



**İKİ DEĞİŞKENLİ SCHURER-STANCU OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM
ÖZELLİKLERİ**

Gözde AKSOY

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

HAZİRAN 2016

Gözde AKSOY tarafından hazırlanan “İKİ DEĞİŞKENLİ SCHURER-STANCU OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Nurhayat İSPİR

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum

Başkan : Prof. Dr. Ogün DOĞRU

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum

Üye : Prof. Dr. İbrahim BÜYÜKYAZICI

Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum

Tez Savunma Tarihi: 21/06/2016

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....
Prof. Dr. Metin GÜRÜ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Gözde AKSOY

21/06/2016

İKİ DEĞİŞKENLİ SCHURER-STANCU OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Gözde AKSOY

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2016

ÖZET

Bu çalışmanın ilk üç bölümünde Bernstein-Schurer, Bernstein-Stancu ve Schurer-Stancu operatörlerinin yaklaşım özellikleri incelendi. Son bölümün ilk kısmında iki değişkenli Schurer-Stancu operatörlerinin yaklaşım derecesi kısmi süreklilik ve tam süreklilik modülü cinsinden ve Lipschitz fonksiyonları yardımı ile verildi. İkinci kısımda ise Schurer-Stancu operatörlerinin genelleştirilmiş Boolean toplamları tanımlanarak Bögel sürekli fonksiyon uzayında karma süreklilik modülü ve karma Lipschitz sınıfı yardımıyla yakınsaklık oranı bulunmuştur. En son olarak operatörlerin belirli fonksiyonlara yakınsaklık oranı bazı grafikler yardımıyla resmedildi.

Bilim Kodu : 20404
Anahtar Kelimeler : Bernstein-Schurer operatörü, Bernstein-Stancu operatörü,
Schurer-Stancu operatörü, GBS operatörü, yaklaşım özellikleri
Sayfa Adedi : 55
Danışman : Prof. Dr. Nurhayat İSPİR

THE APPROXIMATION PROPERTIES OF BIVARIATE SCHURER-STANCU TYPE
OPERATORS

(M. Sc. Thesis)

Gözde AKSOY

GAZİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

June 2016

ABSTRACT

In the first three chapters of this thesis, the approximation properties of Bernstein-Schurer, Bernstein-Stancu and Schurer-Stancu operators are investigated. In the first part of the last chapter, the approximation properties of the bivariate Schurer-Stancu operators are given in terms of the partial and full modulus of continuity and by the means of Lipschitz functions. In the second part, Generalized Boolean Sum of the bivariate Schurer-Stancu operators are defined and the rate of convergence is obtained with the help of mixed modulus of smoothness and mixed Lipschitz class in Bögel continuous function spaces. Finally, the rate of convergence of the operators to certain functions is illustrated with the help of some graphics.

Science Code : 20404
Key Words : Bernstein-Schurer operators, Bernstein-Stancu operators, Schurer-Stancu operators, GBS operators, approximation properties
Page Number : 55
Supervisor : Prof. Dr. Nurhayat İSPİR

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında bilgi ve deneyimlerinden yararlanmamı sağlayan, yardım ve katkılarıyla bana yol gösteren değerli danışmanım Prof. Dr. Nurhayat İSPİR' e, maddi ve manevi desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, daima yanımda olan sevgili aileme ve yakın arkadaşlarıma en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	ix
1. GİRİŞ.....	1
2. TANIM VE TEOREMLER.....	3
3. BERNSTEİN-SCHURER VE BERNSTEİN-STANCU OPERATÖRLER DİZİSİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ	7
3.1. Bernstein Operatörü	7
3.2. Bernstein-Schurer Operatörler Dizisinin Yaklaşım Özellikleri	8
3.3. Bernstein-Stancu Operatör Dizisinin Yaklaşım Özellikleri.....	15
4. SCHURER-STANCU OPERATÖR DİZİSİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ.....	23
5. İKİ DEĞİŞKENLİ SCHURER-STANCU OPERATÖRÜ	27
5.1. İki Değişkenli Schurer-Stancu Operatörünün Yaklaşım Özellikleri.....	27
5.2. İki Değişkenli Schurer-Stancu Tip GBS Operatörü ile Yaklaşım	38
6. GRAFİKLER YARDIMI İLE YAKINSAKLIK ORANLARI	47
7. SONUÇ.....	51
KAYNAKLAR	53
ÖZGEÇMİŞ	55

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 6.1. $n=10$ için tek değişkenli operatörlerin yaklaşımı.....	47
Şekil 6.2. $n=50$ için tek değişkenli operatörlerin yaklaşımı.....	47
Şekil 6.3. $n=m=10$ için iki değişkenli operatörlerin yaklaşımı.....	48
Şekil 6.4. $n=15$ ve $m=10$ için iki değişkenli operatörlerin yaklaşımı	48
Şekil 6.5. $n=m=5$ ve $n=m=10$ için iki değişkenli Schurer-Stancu operatörünün yaklaşımı.....	49
Şekil 6.6. $n=m=10$ için iki değişkenli Schurer-Stancu ve GBS operatörünün yaklaşımı.....	49

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
$C[a, b]$	$[a, b]$ aralığındaki sürekli fonksiyonlar uzayı
$C_b(J)$	$J = [0, 1 + p] \times [0, 1 + q]$ üzerinde B-sürekli fonksiyonlar uzayı
$L_n(f; x)$	L_n lineer operatörünün sürekli f fonksiyonuna uygulanması
$\omega(f, \delta)$	f fonksiyonunun süreklilik modülü
$K(f; \delta)$	f fonksiyonunun Petree K-fonksiyoneli
$\omega_2(f; \delta)$	f fonksiyonunun 2. süreklilik modülü
$B_n(f; x)$	Bernstein operatörü
$B_{n,p}(f; x)$	Bernstein-Schurer operatörü
$B_n^{(\alpha, \beta)}(f; x)$	Bernstein-Stancu operatörü
$S_{n,p}^{(\alpha, \beta)}(f; x)$	Schurer-Stancu operatörü
$S_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}(f; x, y)$	İki değişkenli Schurer-Stancu operatörü
$U_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}(f(t, s); x, y)$	İki değişkenli Schurer-Stancu tip GBS operatörü
$\omega_{mixed}(f; \delta_1, \delta_2)$	f fonksiyonunun Bögel(karma) süreklilik modülü
$Lip_2 C\mu$	$D = [0, 1] \times [0, 1]$ karesinde C sabitine göre μ mertebeden Lipschitz sınıfı

1. GİRİŞ

Yaklaşım teorisinin ilgilendiği problemlerden biri sonlu kapalı aralık üzerinde sürekli fonksiyonlara lineer pozitif operatör dizileri ile yaklaşım özelliklerinin incelenmesidir. 1885 yılında Karl Weierstrass, yaklaşım teorisinin en temel teoremini ispatlamıştır. Bu probleme göre, $f \in C[a,b]$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in [a,b]$ için

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon$$

şartını sağlayan en az bir $P(x)$ polinomu bulunabilir [9]. Weierstrass teoremi olarak bilinen bu teorem kapalı aralıkta sürekli olan fakat türevli olmayan fonksiyonlara polinomlarla düzgün yaklaşılabileceğini göstermektedir. Birçok matematikçi bu teoremi gerçekleyen polinomlar tanımlamıştır. Bunlardan biri de S.N.Bernstein'dır. 1912 yılında, $[0,1]$ aralığında tanımlı sürekli fonksiyonlar için

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n P_{n,k}(x) f\left(\frac{k}{n}\right) ; P_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad (1.1)$$

polinomunu tanımlamıştır. Açık olarak, $B_n : C[0,1] \rightarrow C[0,1]$ lineer pozitif operatördür ve her $n \in \mathbb{N}$ için (B_n) operatör dizisi Korovkin teoremini sağlar [1]. 1962 yılında F.Schurer, $p \in \mathbb{N}$ sabit sayı, her $n \in \mathbb{N}$, her $k \in \{0,1,...,n+p\}$ olmak üzere her $x \in [0,1+p]$ ve her $f \in C[0,1+p]$ için $B_{n,p} : C[0,1+p] \rightarrow C[0,1]$ için

$$B_{n,p}(f; x) = \sum_{k=0}^{n+p} \tilde{P}_{n,k}(x) f\left(\frac{k}{n}\right) ; \tilde{P}_{n,k}(x) = \binom{n+p}{k} x^k (1-x)^{n+p-k} \quad (1.2)$$

lineer pozitif operatörünü tanımlamıştır [11]. 1968 yılında D.D.Stancu $f, [0,1]$ aralığında sürekli ve $0 \leq \alpha \leq \beta$ koşulunu sağlayan α, β, n 'den bağımsız parametreleri için

$$B_n^{(\alpha,\beta)}(f; x) = \sum_{k=0}^n P_{n,k}(x) f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right) ; P_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad (1.3)$$

operatörünü tanımlayarak $[0,1]$ aralığında tanımlı sürekli fonksiyonlara yaklaşım özelliklerini incelemiştir [13].

Bu tezde, öncelikle tek değişkenli Bernstein-Schurer, Bernstein-Stancu ve Schurer-Stancu operatörlerinin temel yaklaşım özellikleri verilecektir. Daha sonra iki değişkenli Schurer-

Stancu operatörünün yaklaşım özellikleri incelenecek ve bu operatörün Bögel sürekli fonksiyonlara yaklaşım özellikleri verilecektir.

Bu tez yedi bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş bölümüdür.

İkinci bölüm diğer bölümlere yardımcı temel tanım ve yaklaşım teorisinin önemli teoremleri verilmiştir.

Üçüncü bölüm Bernstein-Schurer ve Bernstein-Stancu tip operatörlerinin Korovkin teoreminin koşullarını sağladığı gösterilip, yaklaşım derecesi, süreklilik modülü, ve Petree K-fonksiyoneli cinsinden incelenmiştir.

Dördüncü bölüm üçüncü bölümdeki operatörlerin bir genelleşmesi olan ve Dan Bărbosu tarafından [3] de çalışılan Schurer-Stancu tip operatörün yaklaşım özelliğinin incelendiği bölümdür.

Beşinci bölüm iki kısımdan oluşur. İlk kısım da iki boyuta genişletilen Schurer-Stancu operatörü çalışılmıştır. Bu operatör için tam ve kısmi süreklilik modülü cinsinden yaklaşım derecesi verilerek Lipschitz sınıfından fonksiyonlar ile bağlantılı yakınsaklık sonuçları bulunmuştur. İkinci kısım da ise sürekli fonksiyonlar sınıfından daha geniş bir sınıf olan Bögel sürekli fonksiyonlar ile yaklaşım incelenmiştir. Bu anlamda iki değişkenli Schurer-Stancu operatörünün genelleştirilmiş Boolean toplamı tanımlanarak karma süreklilik modülü ve Bögel sürekli fonksiyonlar için Lipschitz sınıfından fonksiyonlar için yakınsaklık sonuçları bulunmuştur.

Altıncı bölümde önceki bölümlerde çalışılan operatörlerin belirli fonksiyonlara yaklaşımını veren grafiklere yer verilmiştir.

Yedinci bölümde bu çalışmamızdan elde ettiğimiz bazı sonuçlara yer verilmiştir.

2. TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde yaklaşım teorisinin önemli bir problemi olan lineer pozitif operatör dizilerinin yaklaşım özelliklerine ilişkin genel tanım ve teoremler verilecektir.

2.1. Tanım

X ve Y birer normlu fonksiyon uzayları $L: X \rightarrow Y$ bir lineer operatör ve $f \in X$ olsun. Eğer $f \geq 0$ için $L(f) \geq 0$ ise L operatörüne, lineer pozitif operatör denir.

L nin X den Y ye bir lineer pozitif operatör olması durumunda aşağıdaki sonuçlar gerçekleşir.

1) Her $f, g \in X$ için $f \leq g$ ise $L(f; x) \leq L(g; x)$ dir.

2) Her $f \in X$ için $|L(f; x)| \leq L(|f|; x)$ dir.

$C[a, b] = \{f \mid f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ sürekli}\}$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $L_n: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ lineer pozitif operatör olsun. $(L_n(f))$ dizisinin f ye düzgün yakınsaklığı $x \in [a, b]$ için $(L_n(f; x))$ dizisi için $f(x)$ e düzgün yakınsaklığı anlamındadır. Aynı zamanda $\| \cdot \|_{C[a, b]}$ normundaki yakınsaklık düzgün yakınsaklık anlamındadır.

Bohman 1951 yılında toplam şeklindeki lineer pozitif operatörler dizisinin $[0, 1]$ aralığında sürekli fonksiyonlara yaklaşmasını incelemiştir. Bohman, her $x \in [a, b]$, $0 \leq a_{k,n} \leq 1$ olduğunda

$$L_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f(a_{k,n}) P_{k,n}(x); P_{k,n}(x) \geq 0$$

pozitif operatörler dizisinin, $n \rightarrow \infty$ için $[0, 1]$ aralığında f fonksiyonuna düzgün yakınsak olabilmesi için gerek ve yeter koşulların $e_k(x) = x^k, k=0, 1, 2$ olmak üzere,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(e_k) - e_k\|_{C[0,1]} = 0$$

şeklinde olduğunu göstermiştir [9].

1953 yılında Korovkin, Bohman teoremini genelleştirerek aşağıdaki teoremi vermiştir.

2.2. Teorem (Korovkin Teoremi)

Her $n \in \mathbb{N}$ için $L_n : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ şeklinde tanımlı (L_n) lineer pozitif operatörler dizisi olsun. Her bir $k=0,1,2$ için $e_k(x)=x^k$ olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(e_k) - e_k\|_{C[a,b]} = 0; k = 0, 1, 2$$

koşulları sağlanıyorsa, bu durumda $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli ve tüm reel ekseninde sınırlı olan her $f \in C[a, b]$ fonksiyonu için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f) - f\|_{C[a,b]} = 0 \quad (2.1)$$

dır [1,9,10].

2.3. Tanım

Herhangi bir $I \subset \mathbb{R}$ aralığında tanımlı f fonksiyonunun süreklilik modülü, $\delta \in [0, \infty)$ olmak üzere $\omega : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ için

$$\omega(f, \delta) = \sup_{|x-y| \leq \delta} \{|f(x_2) - f(x_1)| : |x_2 - x_1| \leq \delta, x_1, x_2 \in I\}$$

olarak tanımlanır [1].

Süreklilik modülü aşağıda verilen özelliklere sahiptir:

- i) $\omega(f, \delta) \geq 0$,
- ii) $\delta_1 \leq \delta_2$ ise $\omega(f, \delta_1) \leq \omega(f, \delta_2)$,
- iii) $m \in \mathbb{N}$ ise $\omega(f, m\delta) \leq m\omega(f, \delta)$,
- iv) Her $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için $\omega(f, \lambda\delta) \leq (\lambda+1)\omega(f, \delta)$,
- v) f, I üzerinde düzgün sürekli $\Leftrightarrow \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega(f, \delta) = 0$,

$$\text{vi)} \quad |f(t) - f(x)| \leq \omega(f; |t - x|),$$

$$\text{vii)} \quad |f(t) - f(x)| \leq \left(\frac{|t - x|}{\delta} + 1 \right) \omega(f; \delta).$$

2.4. Teorem [1]

$L_n : C[a, b] \rightarrow C[c, d]$ ve $[c, d] \subseteq [a, b]$ olmak üzere (L_n) lineer pozitif operatör dizisi olsun.

$x \in [a, b]$ için $\alpha_n^2(x) = L_n((t - x)^2)(x)$ olmak üzere $f \in C[a, b]$ ve $x \in [a, b]$ için

$$\text{i)} \quad |L_n(f; x) - f(x)| \leq |f(x)| |L_n(1; x) - 1| + (L_n(1; x) + (L_n(1; x))^{1/2}) \omega(f, \alpha_n(x))$$

ii) $f' \in C[a, b]$ ise

$$|L_n(f; x) - f(x)| \leq |f(x)| |L_n(1; x) - 1| + |f'(x)| |L_n(t - x; x)| + (1 + (L_n(1; x))^{1/2}) \alpha_n(x) \omega(f', \alpha_n(x))$$

Eşitsizlikleri sağlanır.

2.5. Tanım

$f \in C[a, b]$ ve $\delta \geq 0$ olmak üzere

$$K(f; \delta) = \inf_{g \in C^{(2)}[a, b]} \left\{ \|f - g\|_{C[a, b]} + \delta \|g\|_{C^{(2)}[a, b]} \right\}$$

ifadesine Peetre K-fonksiyonu denir. Burada $C^{(2)}[a, b]$ üzerindeki norm

$$\|g\|_{C^{(2)}[a, b]} = \|g\|_{C[a, b]} + \|g'\|_{C[a, b]} + \|g''\|_{C[a, b]}$$

ile verilir [8].

2.6. Tanım

Herhangi bir $[a, b] \subset \mathbb{R}$ aralığı, $f \in C[a, b]$ için $\delta > 0$ olmak üzere f nin 2. süreklilik modülü

$$\omega_2(f; \delta) = \sup_{0 < h < \delta} \sup_{x, x+2h \in [a, b]} |f(x + 2h) - 2f(x + h) + f(x)|$$

olmak üzere, $M > 0$ sayısı vardır ki;

$$K(f; \delta) \leq M\omega_2(f; \sqrt{\delta})$$

dır [8].

2.7. Tanım

Her $f \in C[a, b]$ ve $\phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $[a, b]$ aralığına bağlı bir adım-ağırlık fonksiyonu olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ ve $\delta \geq 0$ için

$$\bar{\Delta}_{h\phi(x)}^n f(x) = \sum_k^n (-1)^k \binom{n}{k} f\left[x + h\phi(x) \left(\frac{n}{2-k}\right)\right], x \pm \frac{nh\phi(x)}{2} \in [a, b]$$

Olduğunda

$$\omega_\phi^n(f; \delta) = \sup\{\sup\{|\bar{\Delta}_{h\phi(x)}^n f(x)| : x \in [a, b]\}; h \in [0, \delta]\}$$

ifadesine, Ditzian-Totik düzgünlük modülü denir.

$\phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi \neq 0$, Ditzian-Totik düzgünlük modülünün adım-ağırlık fonksiyonu olarak alalım. Buradaki ϕ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar.

- (i) Her $[a', b'] \subset [a, b]$ alt aralığı için öyle bir $M_1 \equiv M(a', b') > 0$ sabiti vardır ki her $x \in [a', b']$ için

$$M^{-1} \leq \phi(x) \leq M$$

dir.

- (ii) $\beta(a) \geq 0$ ve $\beta(b) \geq 0$ iki sayısı için

$$\phi(x) \sim \begin{cases} x^{\beta(a)}, & x \rightarrow 0+ \\ (1-x)^{\beta(b)}, & x \rightarrow 1- \end{cases}$$

sonucu çıkarılır [8].

3. BERNSTEİN-SCHURER VE BERNSTEİN-STANCU OPERATÖRLER DİZİSİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

S.N. Bernstein, $[0,1]$ aralığında tanımlı sürekli fonksiyonlar için $B_n(f;x)$ operatörler dizisini tanımlamıştır ve $[0,1]$ aralığında düzgün olarak f fonksiyonuna yakınsadığını göstermiştir [1]. 1962 yılında F. Schurer, fonksiyonun süreklilik aralığını genişleterek $[0,1+p]$ de tanımlı sürekli f fonksiyonları için $B_{n,p}(f;x)$ lineer pozitif operatörünün yaklaşım özelliklerini çalışmıştır [11]. 1968 yılında da D. D. Stancu, f fonksiyonunun $[0,1]$ aralığındaki düğüm noktalarını sıkılaştırarak $B_n^{(\alpha,\beta)}(f;x)$ lineer pozitif operatörünü tanımlamış ve $[0,1]$ aralığı üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonlara yaklaşım özelliklerini incelemiştir [13].

3.1. Bernstein Operatörü

3.1.1. Tanım

Her $k \in \{0,1,\dots,n\}$, her $n \in \mathbb{N}$, her $x \in [0,1]$ ve her $f \in C[0,1]$ için $B_n: C[0,1] \rightarrow C[0,1]$ olmak üzere

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^n P_{n,k}(x) f\left(\frac{k}{n}\right); P_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

şeklinde tanımlı operatöre Bernstein operatörü denir. Burada, $P_{n,k}$, Bernstein taban polinomudur.

Açık olarak Bernstein operatörü $C[0,1]$ den $C[0,1]$ e bir lineer pozitif operatördür ve (B_n) operatör dizisi için Korovkin teoremi sağlanır [1].

3.1.2. Teorem

Her $f \in C[0,1]$ ve yeterince büyük n 'ler için

$$|B_n(f;x) - f(x)| \leq \frac{3}{2} \omega\left(f; n^{-\frac{1}{2}}\right)$$

eşitsizliği sağlanır.

Buradan, Bernstein operatörünün $f \in C[0,1]$ fonksiyonuna süreklilik modülü ile yaklaşım derecesi δ_n ile belirlenir ve $\delta_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ olup $n \rightarrow \infty$ için $\delta_n \rightarrow 0$ dır. Dolayısıyla Tanım 2.4.1 (v) den $\omega(f; \delta_n) \rightarrow 0$ dır.

3.2. Bernstein-Schurer Operatörler Dizisinin Yaklaşım Özellikleri

3.2.1. Tanım

$p \in \mathbb{N}$ sabit sayısı, her $n \in \mathbb{N}$, her $k \in \{0, 1, \dots, n+p\}$, her $x \in [0, 1+p]$ ve her $f \in C[0, 1+p]$ için $B_{n,p}: C[0, 1+p] \rightarrow C[0, 1]$ olmak üzere

$$B_{n,p}(f, x) = \sum_{k=0}^{n+p} f\left(\frac{k}{n}\right) \tilde{P}_{n,k}(x); \quad \tilde{P}_{n,k}(x) = \binom{n+p}{k} x^k (1-x)^{n+p-k} \quad (3.1)$$

olarak tanımlanan operatöre Bernstein-Schurer operatörü denir [1]. Burada, $\tilde{P}_{n,k}$, Schurer taban polinomu olarak isimlendirilir.

3.2.2. Lemma

$e_k(t) = t^k$; $k=0, 1, 2$, t bir parametre ve her $x \in [0, 1]$ olmak üzere

$$\begin{aligned} B_{n,p}(e_0; x) &= 1, \\ B_{n,p}(e_1; x) &= \left(1 + \frac{p}{n}\right)x, \\ B_{n,p}(e_2; x) &= \left(1 + \frac{p}{n}\right)^2 x^2 + \frac{(n+p)}{n^2} x(1-x) \end{aligned}$$

dir.

Lemma'dan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|B_{n,p}(e_k) - e_k\|_{C[0, 1+p]} = 0; \quad k = 0, 1, 2$$

olduğundan Korovkin Teoremi gereğince $[0, 1+p]$ aralığı üzerinde her $f \in C[0, 1+p]$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|B_n(f) - f\|_{C[0, 1+p]} = 0$$

dır.

3.2.3. Teorem

Her $f \in C[0,1+p]$ için $B_{n,p}(f;x)$, (3.1) ile verilen Bernstein-Schurer operatörü olsun. Bu durumda,

$$i) |B_{n,p}(f;x) - f(x)| \leq 2\omega(f; \delta_{n,p}(x), \delta_{n,p}(x)) = \sqrt{\frac{p^2}{n^2}x^2 + \frac{n+p}{n^2}x(1-x)}$$

ii) f , $[0,1+p]$ üzerinde diferensiyellenebilir ve $f' \in C[0,1+p]$ için

$$|B_{n,p}(f;x) - f(x)| \leq 2\delta_{n,p}(x)\omega(f'; \delta_{n,p}(x)) + \frac{p}{n}|f'(x)|$$

dir.

İspat

i) $B_{n,p}$ operatörünün süreklilik modülü ile f fonksiyonuna yaklaşım derecesini bulalım.

Her $x, t \in [0,1+p]$ için $\psi_x(t) = t - x$ olsun.

Her $x, t \in [0,1+p]$ için

$$\begin{aligned} B_{n,p}(\psi_x; x) &= B_{n,p}(t - x; x) \\ &= B_{n,p}(t; x) - xB_{n,p}(1; x) \\ &= \left(1 + \frac{p}{n}\right)x - x \\ &= \frac{p}{n}x \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} B_{n,p}(\psi_x^2; x) &= B_{n,p}((t - x)^2; x) \\ &= B_{n,p}(t^2 - 2tx + x^2; x) \\ &= \frac{p^2}{n^2}x^2 + \frac{n+p}{n^2}x(1-x) \end{aligned}$$

olur.

$f \in C[0,1+p]$ ve $x, t \in [0,1+p]$ için süreklilik modülünün (vii) özelliğinden,

$$|f(t) - f(x)| \leq \omega(f; \delta_{n,p})(1 + \delta_{n,p}^{-1}|t - x|) \quad (3.2)$$

olup (3.2) eşitsizliğinin yardımıyla

$$\begin{aligned} |B_{n,p}(f; x) - f(x)| &\leq |B_{n,p}(f(t); x) - B_{n,p}(f(x); x)| + |f(x)| |B_{n,p}(e_0(x); x) - e_0(x)| \\ &= |B_{n,p}(f(t); x) - B_{n,p}(f(x); x)| \\ &\leq B_{n,p}(|f(t) - f(x)|; x) \\ &\leq B_{n,p}(\omega(f; \delta_{n,p})(1 + \delta_{n,p}^{-1}|t - x|); x) \\ &\leq \omega(f; \delta_{n,p}) \left(1 + \delta_{n,p}^{-1} \sqrt{\frac{p^2}{n^2}x^2 + \frac{n+p}{n^2}x(1-x)} \right) \end{aligned}$$

olur. $\delta_{n,p}(x)$, teoremdaki gibi seçilirse

$$|B_{n,p}(f; x) - f(x)| \leq 2\omega_f(\delta_{n,p})$$

elde edilir. $n \rightarrow \infty$ için limit alındığında $x \in [0,1+p]$ için $\delta_{n,p} \rightarrow 0$ ve $\omega(f; \delta_{n,p}) \rightarrow 0$ sonucu bulunur.

ii) Ortalama değer teoreminden,

$$f(t) - f(x) = f'(c)(t - x), c \in (x, t)$$

olup

$$f(t) - f(x) = (f'(c) - f'(x))(t - x) + f'(x)(t - x)$$

yazılabilir.

Süreklilik modülünün tanımından dolayı

$$\begin{aligned} |f(c) - f(x)| &\leq \omega(f'; \delta_{n,p})(1 + \delta_{n,p}^{-1}|c - x|) \quad x < c < t \\ &\leq \omega(f'; \delta_{n,p})(1 + \delta_{n,p}^{-1}|t - x|) \end{aligned}$$

yazalım. Buradan, $B_{n,p}$ eşitsizliğin her iki tarafına uygulanarak

$$|B_{n,p}(f; x) - f(x)| \leq 2\delta_{n,p}(x)\omega(f'; \delta_{n,p}) + \frac{p}{n}|f'(x)|$$

bulunur.

3.2.4. Teorem

Her $f \in C[0,1+p]$ ve $B_{n,p}(f; x)$, (3.1) ile verilen Bernstein-Schurer operatörü olsun. Her $g \in C^{(2)}[0,1+p]$ için

$$\begin{aligned} |B_{n,p}(f; x) - f(x)| &\leq MK(f; 2\delta_{n,p}(x)) + \omega\left(f; \frac{p}{n}x\right) \\ &\leq M_1\omega_2\left(f; \sqrt{2\delta_{n,p}(x)}\right) + \omega\left(f; \frac{p}{n}x\right) \end{aligned}$$

olup burada $M, M_1 > 0$ sabit sayılar, ω_2, ω sırasıyla 2. ve 1. süreklilik modülleri ve $\delta_{n,p}(x)$ de Teorem 3.2.3 ün (i) şikkında tanımlanmıştır.

İspat

$f \in C[0,1+p]$ olmak üzere $B_{n,p}$ yardımcı operatörümüzü,

$$\overline{B_{n,p}}(f; x) = B_{n,p}(f; x) + f(x) - f\left(1 + \frac{p}{n}\right)x \quad (3.3)$$

olarak tanımlayalım. Açık olarak

$$\overline{B_{n,p}}(e_0; x) = 1, \overline{B_{n,p}}(e_1; x) = x$$

ve böylece

$$\overline{B_{n,p}}(t - x; x) = 0 \text{ olur.}$$

$g \in C^{(2)}[0,1+p]$ ve $t \in [0,1+p]$ olsun. g için Taylor formülünden,

$$g(t) = g(x) + (t - x)g'(u) + \int_x^t (t - u)g''(u)du$$

yazılır. $\overline{B_{n,p}}$ operatörünü eşitliğin her iki yanına uygularsak

$$\begin{aligned}\overline{B_{n,p}}(g(t);x) - \overline{B_{n,p}}(g(x);x) &= g'(x)\overline{B_{n,p}}(t-x;x) + \overline{B_{n,p}}\left(\int_x^t (t-u)g''(u)d_u;x\right) \\ |\overline{B_{n,p}}(g;x) - g(x)| &= \left|\overline{B_{n,p}}\left(\int_x^t (t-u)g''(u)d_u;x\right)\right|\end{aligned}$$

(3.3) den

$$\begin{aligned}|\overline{B_{n,p}}(g;x) - g(x)| &\leq B_{n,p}\left(\int_x^t |t-u||g''(u)|d_u;x\right) + \int_x^{(1+\frac{p}{n})x} \left|\left(1+\frac{p}{n}\right)x - x\right| |g''(u)|d_u \\ &\leq \|g''\| \left(B_{n,p}(|t-x|^2;x) + \left|\left(1+\frac{p}{n}\right)x - x\right|^2\right) \\ &\leq \|g''\| \left(B_{n,p}(\psi_x^2;x) + \left(\frac{p}{n}x\right)^2\right) \\ &\leq \|g''\| (2\delta_{n,p}(x))\end{aligned}$$

bulunur.

$f \in C[0,1+p]$ için (3.3) ile tanımlanan $\overline{B_{n,p}}$ den

$$\begin{aligned}|\overline{B_{n,p}}(f;x)| &= \left|B_{n,p}(f;x) + f(x) - f\left(\left(1+\frac{p}{n}\right)x\right)\right| \\ &\leq |B_{n,p}(f;x)| + |f(x)| + \left|f\left(\left(1+\frac{p}{n}\right)x\right)\right| \\ &\leq 3\|f\|\end{aligned}$$

olur. Buradan, $f \in C[0,1+p]$ ve $g \in C^{(2)}[0,1+p]$ olmak üzere

$$\begin{aligned}|B_{n,p}(f;x) - f(x)| &= \left|\overline{B_{n,p}}(f;x) - f(x) + f\left(\left(1+\frac{p}{n}\right)x\right) - f(x)\right| \\ &\leq |\overline{B_{n,p}}(f-g;x)| + |\overline{B_{n,p}}(g;x) - g(x)| + |f(x) - g(x)| \\ &\quad + \left|f\left(\left(1+\frac{p}{n}\right)x\right) - f(x)\right| \\ &\leq 3\|f-g\| + \|g''\|(2\delta_{n,p}(x)) + \|f-g\| + \omega\left(f; \left|\left(1+\frac{p}{n}\right)x - x\right|\right) \\ |B_{n,p}(f;x) - f(x)| &\leq 4\|f-g\| + \|g''\|(2\delta_{n,p}(x)) + \omega\left(f; \frac{p}{n}x\right)\end{aligned}$$

ifadesinin sağ tarafının $g \in C^{(2)}[0,1+p]$ için infimum alırsak Petree K-fonksiyoneli'nin tanımından

$$\begin{aligned}
|B_{n,p}(f;x) - f(x)| &\leq MK(f; 2\delta_{n,p}(x)) + \omega\left(f; \frac{p}{n}x\right) \\
&\leq M_1\omega_2\left(f; \sqrt{2\delta_{n,p}(x)}\right) + \omega\left(f; \frac{p}{n}x\right)
\end{aligned}$$

bulunur.

3.2.5. Teorem

Her $f \in C[0,1+p]$ ve $B_{n,p}$, (3.1) ile verilen Bernstein-Schurer operatörü olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
|B_{n,p}(f;x) - f(x)| &\leq 4K_\phi^2\left(f; \left(1 + \frac{p-2p^2}{n}\right) \frac{\phi^2(x)}{\phi^2(x)}\right) + \omega\left(f; \frac{p}{n}x\right) \\
&\leq 4\omega_\phi^2\left(f; \sqrt{\left(1 + \frac{p-2p^2}{n}\right) \frac{\phi^2(x)}{\phi^2(x)}}\right) + \omega\left(f; \frac{p}{n}x\right)
\end{aligned}$$

dir. Burada, $\phi(x) = \sqrt{x(1+p-x)}$, ϕ adım-ağırlık fonksiyonu ve ϕ^2 , ϕ^2/ϕ^2 konkavdır.

İspat

$f \in C[0,1+p]$ olmak üzere $\overline{B_{n,p}}$ yardımcı operatörümüzü,

$$\overline{B_{n,p}}(f;x) = B_{n,p}(f;x) + f(x) - f\left(\left(1 + \frac{p}{n}\right)x\right)$$

olarak tanımlayalım. Açık olarak

$$\overline{B_{n,p}}(e_0;x) = 1, \overline{B_{n,p}}(e_1;x) = x \text{ olup } \overline{B_{n,p}}(t-x;x) = 0 \text{ olur.}$$

$g \in C^{(2)}[0,1+p]$ için Taylor formülünden,

$$g(t) = g(x) + (t-x)g'(x) + \int_x^t (t-u)g''(u)du$$

dir. $\overline{B_{n,p}}$ operatörünün eşitliğin iki yanına uygulanması ile,

$$|\overline{B_{n,p}}(g;x) - g(x)| = \left| \overline{B_{n,p}}\left(\int_x^t (t-u)g''(u)du; x\right) \right|$$

olur. $\overline{B_{n,p}}$ nin tanımının yardımı ile

$$\begin{aligned}
 |\overline{B_{n,p}}(g; x) - g(x)| &\leq B_{n,p} \left(\left| \int_x^t g''(u) \cdot (t-u) du \right|; x \right) + \int_x^{(1+\frac{p}{n})x} \left| \left(1 + \frac{p}{n}\right)x - x \right| |g''(u)| du \\
 &\leq \|\phi^2 g''\| B_{n,p} \left(\left| \int_x^t \frac{(t-u)}{\phi^2(u)} du \right|; x \right) + \|\phi^2 g''\| \int_x^{(1+\frac{p}{n})x} \left| \frac{p}{n} x \phi^{-2}(u) \right| du \\
 &\leq \|\phi^2 g''\| \left(B_{n,p} \left(\left| \int_x^t \frac{(t-u)}{\phi^2(u)} du \right|; x \right) + \int_x^{(1+\frac{p}{n})x} \left| \frac{p}{n} x \phi^{-2}(u) \right| du \right)
 \end{aligned}$$

bulunur.

Her $s, t \in [0, 1+p]$ için $u = t + s(x-t)$ olsun. ϕ^2 nin konkavlığı kullanılarak

$$\begin{aligned}
 \frac{|t-u|}{\phi^2(u)} &= \frac{s|x-t|}{\phi^2(t+s(x-t))} \\
 &\leq \frac{s|x-t|}{\phi^2(t) + \phi^2(s(x-t))} \\
 &\leq \frac{s|x-t|}{\phi^2(t) + s\phi^2(x-t)} \\
 &= \frac{s|x-t|}{\phi^2(t) + s\phi^2(x) - s\phi^2(t)} \\
 &\leq \frac{s|x-t|}{s\phi^2(x)} \\
 &\leq \frac{|x-t|}{\phi^2(x)}
 \end{aligned}$$

olur ve bu eşitsizliği bir önceki eşitsizlikte yerine yazarsak,

$$\begin{aligned}
 |B_{n,p}(f; x) - f(x)| &= \left| \overline{B_{n,p}}(f; x) - f(x) + f\left(\left(1 + \frac{p}{n}\right)x\right) - f(x) \right| \\
 &\leq |\overline{B_{n,p}}(f - g; x)| + |\overline{B_{n,p}}(g; x) - g(x)| + |f(x) - g(x)| \\
 &\quad + \left| f\left(\left(1 + \frac{p}{n}\right)x\right) - f(x) \right| \\
 &\leq 4\|f - g\| + \|\phi^2 g''\| \phi^{-2}(x) \phi^2(x) \left(1 + \frac{p-2p^2}{n}\right) + \omega\left(f, \frac{p}{n}x\right) \\
 &\leq 4K_\phi^2 \left(f, \left(1 + \frac{p-2p^2}{n}\right) \frac{\phi^2(x)}{\phi^2(x)} \right) + \omega\left(f, \frac{p}{n}x\right) \\
 &\leq 4\omega_\phi^2 \left(f, \sqrt{\left(1 + \frac{p-2p^2}{n}\right) \frac{\phi^2(x)}{\phi^2(x)}} \right) + \omega\left(f, \frac{p}{n}x\right)
 \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

3.3. Bernstein-Stancu Operatör Dizisinin Yaklaşım Özellikleri

3.3.1. Tanım

$0 \leq \alpha \leq \beta$ olacak şekilde α, β, n den bağımsız reel parametreler olsun. Her $n \in \mathbb{N}$, her $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ ve her $x \in [0, 1]$ için $B_n^{(\alpha, \beta)} : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ olmak üzere

$$B_n^{(\alpha, \beta)}(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right) P_{n,k}(x); P_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad (3.4)$$

olarak tanımlanan operatöre Bernstein-Stancu operatörü denir [1]. Burada, $P_{n,k}$, Bernstein taban polinomudur.

3.3.2. Lemma

$e_k(t) = t^k$; $k=0, 1, 2$, t bir parametre ve her $x \in [0, 1]$ olmak üzere

$$B_n^{(\alpha, \beta)}(e_0; x) = 1, B_n^{(\alpha, \beta)}(e_1; x) = \frac{nx+\alpha}{n+\beta}, B_n^{(\alpha, \beta)}(e_2; x) = \frac{n^2x^2+nx(1-x)+2\alpha nx+\alpha^2}{(n+\beta)^2}$$

dir.

Lemma'dan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|B_n^{(\alpha, \beta)}(e_k) - e_k\|_{C[0,1]} = 0; k = 0, 1, 2$$

olduğundan Korovkin Teoremi gereğince $[0, 1]$ aralığı üzerinde her $f \in C[0, 1]$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|B_n^{(\alpha, \beta)}(f) - f\|_{C[0,1]} = 0$$

dır.

3.3.3. Teorem

Her $f \in C[0,1]$ ve $B_n^{(\alpha,\beta)}$, (3.4) ile verilen Bernstein-Stancu operatörü olsun. Bu durumda,

$$i) \left| B_n^{(\alpha,\beta)}(f; x) - f(x) \right| \leq 2\omega\left(f; \delta_n^{(\alpha,\beta)}\right), \delta_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{\sqrt{n+(2\alpha-\beta)^2}}{2(n+\beta)}$$

ii) $f \in C[0,1]$ diferensiyellenebilir ve $f' \in C[0,1]$ için

$$\left| B_n^{(\alpha,\beta)}(f; x) - f(x) \right| \leq 2\delta_n^{(\alpha,\beta)}(x)\omega\left(f'; \delta_n^{(\alpha,\beta)}\right) + |f'(x)| \frac{|\alpha-\beta x|}{n+\beta}$$

dir

İspat

i) $B_n^{(\alpha,\beta)}$ operatörünün süreklilik modülü ile f fonksiyonuna yaklaşım derecesini bulalım.

Her $x, t \in [0,1]$ için $\psi_x(t) = t - x$ olsun.

Her $x, t \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned} B_n^{(\alpha,\beta)}(\psi_x; x) &= B_n^{(\alpha,\beta)}(t - x; x) \\ &= B_n^{(\alpha,\beta)}(t; x) - x B_n^{(\alpha,\beta)}(1; x) \\ &= \frac{nx + \alpha}{n + \beta} x - x \\ &= \frac{\alpha - \beta x}{n + \beta} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} B_n^{(\alpha,\beta)}(\psi_x^2; x) &= B_n^{(\alpha,\beta)}((t - x)^2; x) \\ &= B_n^{(\alpha,\beta)}(t^2 - 2tx + x^2; x) \\ &= \frac{nx(1 - x) + (\alpha - \beta x)^2}{(n + \beta)^2} \end{aligned}$$

olur.

$f \in C[0,1]$ ve $x, t \in [0,1]$ için süreklilik modülünün (vii) özelliğinden,

$$|f(t) - f(x)| \leq \omega(f; \delta_n^{(\alpha, \beta)}) \left(1 + (\delta_n^{(\alpha, \beta)})^{-1} |t - x|\right) \quad (3.5)$$

olup (3.5) eşitsizliğinin yardımıyla

$$\begin{aligned} |B_n^{(\alpha, \beta)}(f; x) - f(x)| &\leq |B_n^{(\alpha, \beta)}(f(t); x) - B_n^{(\alpha, \beta)}(f(x); x)| + |f(x)| |B_n^{(\alpha, \beta)}(e_0(x); x) - e_0(x)| \\ &= |B_n^{(\alpha, \beta)}(f(t); x) - B_n^{(\alpha, \beta)}(f(x); x)| \\ &\leq B_n^{(\alpha, \beta)}(|f(t) - f(x)|; x) \\ &\leq B_n^{(\alpha, \beta)}\left(\omega(f; \delta_n^{(\alpha, \beta)}) \left(1 + (\delta_n^{(\alpha, \beta)})^{-1} |t - x|\right); x\right) \\ &\leq \omega(f; \delta_n^{(\alpha, \beta)}) \left(1 + (\delta_n^{(\alpha, \beta)})^{-1} \frac{\sqrt{n + (2\alpha - \beta)^2}}{2(n + \beta)}\right) \end{aligned}$$

olur. $\delta_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, teoremdeki gibi seçilirse her $f \in C[0, 1]$ için

$$|B_n^{(\alpha, \beta)}(f; x) - f(x)| \leq 2\omega(f; \delta_n^{(\alpha, \beta)})$$

elde edilir. $n \rightarrow \infty$ için limit alındığında $x \in [0, 1]$ için $\delta_n^{(\alpha, \beta)} \rightarrow 0$ ve $\omega(f; \delta_n^{(\alpha, \beta)}) \rightarrow 0$ sonucu bulunur.

ii) Ortalama değer teoreminden,

$$f(t) - f(x) = f'(c)(t - x), c \in (x, t)$$

olup

$$f(t) - f(x) = (f'(c) - f'(x))(t - x) + f'(x)(t - x)$$

yazılabilir. Süreklilik modülünün tanımından dolayı

$$\begin{aligned} |f(c) - f(x)| &\leq \omega(f'; \delta_n^{(\alpha, \beta)}) \left(1 + (\delta_n^{(\alpha, \beta)})^{-1} |c - x|\right), x < c < t \\ &\leq \omega(f'; \delta_n^{(\alpha, \beta)}) \left(1 + (\delta_n^{(\alpha, \beta)})^{-1} |t - x|\right) \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan, $B_n^{(\alpha, \beta)}$ eşitsizliğinin her iki tarafına uygulanarak

$$\left| B_n^{(\alpha,\beta)}(f;x) - f(x) \right| \leq 2\delta_n^{(\alpha,\beta)}(x)\omega\left(f'; \delta_n^{(\alpha,\beta)}\right) + |f'(x)| \frac{|\alpha-\beta x|}{n+\beta}$$

bulunur.

3.3.4. Teorem

Her $f \in C[0,1]$ ve $B_n^{(\alpha,\beta)}$ (3.4) ile verilen Bernstein-Stancu operatörü olsun. Her $g \in C^{(2)}[0,1]$ için

$$\begin{aligned} \left| B_n^{(\alpha,\beta)}(f;x) - f(x) \right| &\leq MK\left(f; 2\delta_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right) + \omega\left(f; \frac{|\alpha-\beta x|}{n+\beta}\right) \\ &\leq M_1\omega_2\left(f; \sqrt{2\delta_n^{(\alpha,\beta)}(x)}\right) + \omega\left(f; \frac{|\alpha-\beta x|}{n+\beta}\right) \end{aligned}$$

olup burada $M, M_1 > 0$ sabit sayılar, ω_2, ω sırasıyla 2. ve 1. süreklilik modülleri ve $\delta_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ de Teorem 3.3.3 ün (i) şıkında tanımlanmıştır.

İspat

$f \in C[0,1]$ olmak üzere $\overline{B_n^{(\alpha,\beta)}}$ yardımcı operatörümüzü,

$$\overline{B_n^{(\alpha,\beta)}}(f;x) = B_n^{(\alpha,\beta)}(f;x) + f(x) - f\left(\frac{nx+\alpha}{n+\beta}\right) \quad (3.6)$$

olarak tanımlayalım. Açık olarak;

$$\overline{B_n^{(\alpha,\beta)}}(e_0;x) = 1, \overline{B_n^{(\alpha,\beta)}}(e_1;x) = x \text{ ve böylece } \overline{B_n^{(\alpha,\beta)}}(t-x;x) = 0 \text{ olur.}$$

$g \in C^{(2)}[0,1]$ ve $t \in [0,1]$ için Taylor formülünden,

$$g(t) = g(x) + (t-x)g'(u) + \int_x^t (t-u)g''(u)du$$

yazılır. $\overline{B_n^{(\alpha,\beta)}}$ operatörünü eşitliğin her iki yanına uygularsak;

$$\begin{aligned}\overline{B_n^{(\alpha,\beta)}}(g(t);x) - \overline{B_n^{(\alpha,\beta)}}(g(x);x) &= g'(x)\overline{B_n^{(\alpha,\beta)}}((t-x);x) + \overline{B_n^{(\alpha,\beta)}}\left(\int_x^t (t-u)g''(u)d_u;x\right) \\ \left|\overline{B_n^{(\alpha,\beta)}}(g;x) - g(x)\right| &= \left|\overline{B_n^{(\alpha,\beta)}}\left(\int_x^t (t-u)g''(u)d_u;x\right)\right|\end{aligned}$$

olur. (3.6) den;

$$\begin{aligned}\left|\overline{B_n^{(\alpha,\beta)}}(g;x) - g(x)\right| &\leq B_n^{(\alpha,\beta)}\left(\int_x^t |t-u||g''(u)|d_u;x\right) + \int_x^{\frac{nx+\alpha}{n+\beta}} \left|\frac{nx+\alpha}{n+\beta} - x\right| |g''(u)|d_u \\ &\leq \|g''\| \left(B_n^{(\alpha,\beta)}(|t-x|^2;x) + \left(\frac{nx+\alpha}{n+\beta} - x\right)^2 \right) \\ &\leq \|g''\| \left(B_n^{(\alpha,\beta)}(\psi_x^2;x) + \left(\frac{\alpha-\beta x}{n+\beta}\right)^2 \right) \\ &\leq \|g''\| \left(2\delta_n^{(\alpha,\beta)}(x) \right)\end{aligned}$$

bulunur. $f \in C[0,1]$ için (3.6) ile tanımlanan $B_n^{(\alpha,\beta)}(f;x)$ den;

$$\begin{aligned}\left|\overline{B_n^{(\alpha,\beta)}}(f;x) - f(x)\right| &= \left| B_n^{(\alpha,\beta)}(f;x) + f(x) - f\left(\frac{nx+\alpha}{n+\beta}\right) \right| \\ &\leq \left| B_n^{(\alpha,\beta)}(f;x) \right| + |f(x)| + \left| f\left(\frac{nx+\alpha}{n+\beta}\right) - f(x) \right| \\ &\leq 3\|f\|\end{aligned}$$

olur. Buradan, $f \in C[0,1]$ ve $g \in C^{(2)}[0,1]$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\left| B_n^{(\alpha,\beta)}(f;x) - f(x) \right| &\leq \left| B_n^{(\alpha,\beta)}(f-g;x) \right| + \left| \overline{B_n^{(\alpha,\beta)}}(g;x) - g(x) \right| + |f(x) - g(x)| \\ &\quad + \left| f\left(\frac{nx+\alpha}{n+\beta}\right) - f(x) \right| \\ &\leq 3\|f-g\| + \|g''\| \left(2\delta_n^{(\alpha,\beta)}(x) \right) + \|f-g\| + \omega\left(f; \left|\frac{nx+\alpha}{n+\beta} - x\right|\right) \\ &\leq 4\|f-g\| + \|g''\| \left(2\delta_n^{(\alpha,\beta)}(x) \right) + \omega\left(f; \frac{|\alpha-\beta x|}{n+\beta}\right)\end{aligned}$$

ifadesinin sağ tarafının $g \in C^{(2)}[0,1]$ için infimum alırsak Peetre K-fonksiyoneli'nin tanımından

$$\begin{aligned}\left| B_n^{(\alpha,\beta)}(f;x) - f(x) \right| &\leq MK\left(f; 2\delta_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right) + \omega\left(f; \frac{|\alpha-\beta x|}{n+\beta}\right) \\ &\leq M_1\omega_2\left(f; \sqrt{2\delta_n^{(\alpha,\beta)}(x)}\right) + \omega\left(f; \frac{|\alpha-\beta x|}{n+\beta}\right)\end{aligned}$$

bulunur.

3.3.5. Teorem

Her $f \in C[0,1]$ için $B_n^{(\alpha,\beta)}$ operatörünün düzgünlük modülü ile yaklaşım derecesi, $0 \leq \alpha \leq \beta$ için

$$\begin{aligned} \left| B_n^{(\alpha,\beta)}(f; x) - f(x) \right| &\leq 4K_\varphi^2 \left(f; \left(\frac{n-2\beta^2}{n+\beta} \right) \frac{\varphi^2(x)}{\phi^2(x)} \right) + \omega \left(f; \left(\frac{n-\beta x}{n+\beta} \right) \right) \\ &\leq 4\omega_\varphi^2 \left(f; \sqrt{\left(\frac{n-2\beta^2}{n+\beta} \right) \frac{\varphi^2(x)}{\phi^2(x)}} \right) + \omega \left(f; \left(\frac{n-\beta x}{n+\beta} \right) \right) \end{aligned}$$

bulunur. Burada, $\varphi(x) = \sqrt{x(1-x)}$, ϕ adım-ağırlık fonksiyonu ve ϕ^2 , ϕ^2/ϕ^2 konkavdır.

İspat

$f \in C[0,1]$ olmak üzere $\overline{B_{n,p}}$ yardımcı operatörümüzü,

$$\overline{B_n^{(\alpha,\beta)}}(f; x) = B_n^{(\alpha,\beta)}(f; x) + f(x) - f\left(\frac{nx + \alpha}{n + \beta}\right)$$

olarak tanımlayalım. Açık olarak;

$$\overline{B_n^{(\alpha,\beta)}}(e_0; x) = 1 \text{ ve } \overline{B_n^{(\alpha,\beta)}}(e_1; x) = x \text{ olup } \overline{B_n^{(\alpha,\beta)}}(t-x; x) = 0 \text{ olur.}$$

$g \in C^{(2)}[0,1]$ için Taylor formülünden

$$g(t) = g(x) + (t-x)g'(x) + \int_x^t (t-u)g''(u)du$$

dir. $\overline{B_n^{(\alpha,\beta)}}$ operatörünün eşitliğin her iki yanına uygulanması ile

$$\left| \overline{B_n^{(\alpha,\beta)}}(g; x) - g(x) \right| = \left| \overline{B_n^{(\alpha,\beta)}} \left(\int_x^t (t-u)g''(u)du; x \right) \right|$$

bulunur.

$\overline{B_n^{(\alpha,\beta)}}$ nin tanımından,

$$\begin{aligned}
\left| \overline{B_n^{(\alpha, \beta)}}(g; x) - g(x) \right| &\leq B_n^{(\alpha, \beta)} \left(\left| \int_x^t g''(u)(t-u) d_u \right|; x \right) + \int_x^{\frac{nx+\alpha}{n+\beta}} \left| \frac{nx+\alpha}{n+\beta} - x \right| |g''(u)| d_u \\
&\leq \|\phi^2 g''\| B_n^{(\alpha, \beta)} \left(\left| \int_x^t \frac{(t-u)}{\phi^2(u)} d_u \right|; x \right) + \|\phi^2 g''\| \left(\int_x^{\frac{nx+\alpha}{n+\beta}} \left| \frac{\alpha - \beta x}{n+\beta} \phi^{-2}(u) \right| d_u \right) \\
&\leq \|\phi^2 g''\| \left(B_n^{(\alpha, \beta)} \left(\left| \int_x^t \frac{(t-u)}{\phi^2(u)} d_u \right|; x \right) + \int_x^{\frac{nx+\alpha}{n+\beta}} \left| \frac{\alpha - \beta x}{n+\beta} \phi^{-2}(u) \right| d_u \right)
\end{aligned}$$

bulunur.

Her $s, t \in [0, 1]$ için $u = t + s(x - t)$ olsun. ϕ^2 nin konkavlığı kullanılarak

$$\begin{aligned}
\frac{|t-u|}{\phi^2(u)} &= \frac{s|x-t|}{\phi^2(t+s(x-t))} \\
&\leq \frac{s|x-t|}{\phi^2(t) + \phi^2(s(t-x))} \\
&\leq \frac{s|x-t|}{\phi^2(t) + s\phi^2(x-t)} \\
&= \frac{s|x-t|}{\phi^2(t) + s\phi^2(x) - s\phi^2(t)} \\
&\leq \frac{s|x-t|}{s\phi^2(x)} \\
&\leq \frac{|x-t|}{\phi^2(x)}
\end{aligned}$$

olur ve bu eşitsizliği bir önceki eşitsizlikte yerine yazarsak, $0 \leq \alpha \leq \beta$ için

$$\begin{aligned}
\left| \overline{B_n^{(\alpha, \beta)}}(g; x) - g(x) \right| &\leq \|\phi^2 g''\| B_n^{(\alpha, \beta)} \left(\left| \int_x^t \frac{|t-x|}{\phi^2(x)} d_u \right|; x \right) + \|g''\| \left(\frac{\alpha - \beta x}{n+\beta} \right)^2 \\
&= \|\phi^2 g''\| \phi^{-2}(x) \left(B_n^{(\alpha, \beta)}((t-x)^2; x) + \left(\frac{\alpha - \beta x}{n+\beta} \right)^2 \right) \\
&\leq \|\phi^2 g''\| \phi^{-2}(x) \phi^2(x) \left(\frac{n-2\beta^2}{n+\beta} \right)
\end{aligned} \tag{3.7}$$

elde edilir. Buradan (3.7) eşitsizliğinin de yardımıyla

$$\begin{aligned}
\left| B_n^{(\alpha, \beta)}(f; x) - f(x) \right| &= \left| \overline{B_n^{(\alpha, \beta)}}(f; x) - f(x) + f\left(\frac{nx + \alpha}{n + \beta}\right) - f(x) \right| \\
&\leq \left| \overline{B_n^{(\alpha, \beta)}}(f - g; x) \right| + |f(x) - g(x)| + \left| \overline{B_n^{(\alpha, \beta)}}(g; x) - g(x) \right| \\
&\quad + \left| f\left(\frac{nx + \alpha}{n + \beta}\right) - f(x) \right| \\
&\leq 4\|f - g\| + \|\phi^2 g''\| \phi^{-2}(x) \phi^2(x) \left(\frac{n - 2\beta^2}{n + \beta}\right) + \omega\left(f, \frac{\alpha - \beta x}{n + \beta}\right) \\
&\leq 4K_\varphi^2 \left(f, \left(\frac{n - 2\beta^2}{n + \beta}\right) \frac{\varphi^2(x)}{\phi^2(x)}\right) + \omega\left(f, \frac{\alpha - \beta x}{n + \beta}\right) \\
&\leq 4\omega_\varphi^2 \left(f, \sqrt{\left(\frac{n - 2\beta^2}{n + \beta}\right) \frac{\varphi^2(x)}{\phi^2(x)}}\right) + \omega\left(f, \frac{\alpha - \beta x}{n + \beta}\right)
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

4. SCHURER-STANCU OPERATÖR DİZİSİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde, üçüncü bölümde verilen Schurer ve Stancu operatörlerinin daha genel bir durumu olan Schurer-Stancu operatörünü çalışacağız. [3] de Dan Bărbosu, Schurer-Stancu tip operatörünü tanımlayarak Korovkin tip teorem ve bilinen süreklilik modülü ile yaklaşımını vermiştir. Bu bölümde, bu özelliği inceleyerek türevin süreklilik modülü cinsinden yaklaşım derecesini vereceğiz.

4.1. Tanım

$p \geq 0$ tamsayı ve $0 \leq \alpha \leq \beta$ koşulunu sağlayan α, β reel parametreler olsun. Her $n \in \mathbb{N}$, her $x \in [0, 1+p]$ ve $f \in C[0, 1+p]$ için $S_{n,p}^{(\alpha,\beta)} : C[0, 1+p] \rightarrow C[0, 1]$ olmak üzere

$$S_{n,p}^{(\alpha,\beta)}(f; x) = \sum_{k=0}^{n+p} \tilde{P}_{n,k}(x) f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right); \tilde{P}_{n,k}(x) = \binom{n+p}{k} x^k (1-x)^{n+p-k} \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlı olan operatöre Schurer-Stancu operatörü denir [3].

(4.1) ile tanımlanan Schurer-Stancu operatöründe $\alpha=\beta=0$ alındığında Bernstein-Schurer operatörü, $p=0$ alındığında Bernstein-Stancu operatörü ve $p=\alpha=\beta=0$ alındığında ise klasik Bernstein operatörü elde edilir [3].

4.1. Lemma

$e_k(t) = t^k$; $k=0, 1, 2$, t bir parametre ve her $x \in [0, 1+p]$ olmak üzere

$$S_{n,p}^{(\alpha,\beta)}(e_0; x) = 1, \quad S_{n,p}^{(\alpha,\beta)}(e_1; x) = \frac{(n+p)x+\alpha}{n+\beta}, \quad S_{n,p}^{(\alpha,\beta)}(e_2; x) = \frac{n^2x^2+(n+p)x(1-x)+(px+\alpha)((2n+p)x+\alpha)}{(n+p)^2}$$

dir.

Sonuç olarak;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_{n,p}^{(\alpha,\beta)}(f) - f\|_{C[0, 1+p]} = 0$$

dır. Yani,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_{n,p}^{(\alpha,\beta)}(e_k) - e_k\|_{C[0,1+p]} = 0; k = 0, 1, 2$$

olduğundan $[0,1+p]$ aralığı üzerinde her $f \in C[0,1+p]$ için Korovkin teoreminin koşulları sağlanır. Dolayısıyla her $f \in C[0,1+p]$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_{n,p}^{(\alpha,\beta)}(f) - f\|_{C[0,1+p]} = 0$$

gerçeklenir.

4.2. Teorem

Her $f \in C[0,1+p]$ için $S_{n,p}^{(\alpha,\beta)}$, (4.1) ile verilen Schurer-Stancu operatörü olsun. Bu durumda

$$i) \left| S_{n,p}^{(\alpha,\beta)}(f; x) - f(x) \right| \leq 2\omega\left(f; \delta_{n,p}^{(\alpha,\beta)}\right), \quad \delta_{n,p}^{(\alpha,\beta)} = \frac{\sqrt{(n+p)x(1-x) + (\alpha-\beta x)^2 + 2px(\alpha-\beta) + p^2 x^2}}{n+\beta}$$

ii) $f \in [0,1+p]$ diferensiyellenebilir ve $f' \in C[0,1+p]$ için

$$\left| S_{n,p}^{(\alpha,\beta)}(f; x) - f(x) \right| \leq 2\delta_{n,p}^{(\alpha,\beta)} \omega\left(f'; \delta_{n,p}^{(\alpha,\beta)}\right) + |f'(x)| \frac{|(p-\beta)x + \alpha|}{n+\beta}$$

dir.

İspat

i) $S_{n,p}^{(\alpha,\beta)}$ operatörünün süreklilik modülü ile f fonksiyonuna yaklaşım derecesini bulalım.

Her $x, t \in [0,1+p]$ için $\psi_x(t) = t - x$ olsun.

Her $x, t \in [0,1+p]$ için

$$\begin{aligned}
S_{n,p}^{(\alpha,\beta)}(\psi_x; x) &= S_{n,p}^{(\alpha,\beta)}(t-x; x) \\
&= S_{n,p}^{(\alpha,\beta)}(t; x) - xS_{n,p}^{(\alpha,\beta)}(1; x) \\
&= \frac{(n+p)x + \alpha}{n+\beta} - x \\
&= \frac{(p-\beta)x + \alpha}{n+\beta}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
S_{n,p}^{(\alpha,\beta)}(\psi_x^2; x) &= S_{n,p}^{(\alpha,\beta)}((t-x)^2; x) \\
&= S_{n,p}^{(\alpha,\beta)}(t^2 - 2tx + x^2; x) \\
&= \frac{(n+p)x(1-x) + (\alpha - \beta x)^2 + 2px(\alpha - \beta) + p^2x^2}{(n+\beta)^2}
\end{aligned}$$

olur.

$f \in C[0, 1+p]$ ve $x, t \in [0, 1+p]$ için süreklilik modülünün tanımından,

$$|f(t) - f(x)| \leq \omega\left(f; \delta_{n,p}^{(\alpha,\beta)}\right) \left(1 + \left(\delta_{n,p}^{(\alpha,\beta)}\right)^{-1} |t-x|\right) \quad (4.2)$$

olup eşitsizliğin her iki tarafına $S_{n,p}^{(\alpha,\beta)}$ operatörü uygulanarak ve (4.2) eşitsizliğinin de yardımıyla

$$\begin{aligned}
\left| S_{n,p}^{(\alpha,\beta)}(f; x) - f(x) \right| &\leq \left| S_{n,p}^{(\alpha,\beta)}(f(t); x) - S_{n,p}^{(\alpha,\beta)}(f(x); x) \right| + |f(x)| \left| S_{n,p}^{(\alpha,\beta)}(e_0(x); x) - e_0(x) \right| \\
&= \left| S_{n,p}^{(\alpha,\beta)}(f(t); x) - S_{n,p}^{(\alpha,\beta)}(f(x); x) \right| \\
&\leq S_{n,p}^{(\alpha,\beta)}(|f(t) - f(x)|; x) \\
&\leq S_{n,p}^{(\alpha,\beta)}\left(\omega\left(f; \delta_{n,p}^{(\alpha,\beta)}\right) \left(1 + \left(\delta_{n,p}^{(\alpha,\beta)}\right)^{-1} |t-x|\right); x\right) \\
&\leq \omega\left(f; \delta_{n,p}^{(\alpha,\beta)}\right) \left(1 + \left(\delta_{n,p}^{(\alpha,\beta)}\right)^{-1} \frac{\sqrt{(n+p)x(1-x) + (\alpha - \beta x)^2 + 2px(\alpha - \beta) + p^2x^2}}{n+\beta}\right)
\end{aligned}$$

bulunur. $\delta_{n,p}^{(\alpha,\beta)} = \frac{\sqrt{(n+p)x(1-x) + (\alpha - \beta x)^2 + 2px(\alpha - \beta) + p^2x^2}}{n+\beta}$ seçilirse

$$\left| S_{n,p}^{(\alpha,\beta)}(f;x) - f(x) \right| \leq 2\omega\left(f; \frac{\sqrt{(n+p)x(1-x) + (\alpha-\beta x)^2 + 2px(\alpha-\beta) + p^2 x^2}}{n+\beta}\right)$$

elde edilir. $n \rightarrow \infty$ için limit alındığında $x \in [0, 1+p]$ için $\delta_{n,p}^{(\alpha,\beta)} \rightarrow 0$ ve $\omega(f; \delta_{n,p}^{(\alpha,\beta)}) \rightarrow 0$ sonucu bulunur.

ii) Ortalama değer teoreminden,

$$f(t) - f(x) = f'(c)(t - x), c \in (x, t)$$

olup

$$f(t) - f(x) = (f'(c) - f'(x))(t - x) + f'(x)(t - x)$$

yazılabilir.

Süreklilik modülünün tanımından dolayı

$$\begin{aligned} |f(c) - f(x)| &\leq \omega(f'; \delta_{n,p}^{(\alpha,\beta)}) \left(1 + (\delta_{n,p}^{(\alpha,\beta)})^{-1} |c - x|\right), x < c < t \\ &\leq \omega(f'; \delta_{n,p}^{(\alpha,\beta)}) \left(1 + (\delta_{n,p}^{(\alpha,\beta)})^{-1} |t - x|\right) \end{aligned}$$

yazılır. $S_{n,p}^{(\alpha,\beta)}$ operatörünün uygulanması ile

$$\left| S_{n,p}^{(\alpha,\beta)}(f;x) - f(x) \right| \leq 2\delta_{n,p}^{(\alpha,\beta)} \omega(f'; \delta_{n,p}^{(\alpha,\beta)}) + |f'(x)| \frac{|(p-\beta)x + \alpha|}{n+\beta}$$

bulunur.

5. İKİ DEĞİŞKENLİ SCHURER-STANCU OPERATÖRÜ

5.1. İki Değişkenli Schurer-Stancu Operatörünün Yaklaşım Özellikleri

Bu bölümde, Dan Bărbosu tarafından [3] de verilmiş olan Schurer-Stancu operatörünün iki değişkenli fonksiyonlara yaklaşım özelliklerini ele alacağız. Dan Bărbosu, iki değişkenli düzgünlük modülü yardımıyla yaklaşım derecesini [4] de vermiştir. Biz burada, tam süreklilik ve kısmi süreklilik modülleri yardımıyla operatörün fonksiyona yaklaşım derecelerini ve bununla bağlantılı olarak Lipschitz sınıfından fonksiyonlar için yaklaşım oranına ilişkin sonuçları elde edeceğiz.

5.1.1. Tanım

$p \geq 0, q \geq 0$ tamsayılar, $0 \leq \alpha_1 \leq \beta_1, 0 \leq \alpha_2 \leq \beta_2$ koşulunu sağlayan $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ reel parametreler, $m, n \in \mathbb{N}$, her $x \in [0, 1+p] \times [0, 1+q]$ ve her $f \in C([0, 1+p] \times [0, 1+q])$ için $S_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)} : C([0, 1+p] \times [0, 1+q]) \rightarrow C([0, 1] \times [0, 1])$ olmak üzere

$$S_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}(f)(x, y) = \sum_{k=0}^{n+p} \sum_{j=0}^{m+q} \tilde{P}_{n,k}(x) \tilde{P}_{m,j}(y) f\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}, \frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2}\right);$$

$$\tilde{P}_{n,k}(x) = \binom{n+p}{k} x^k (1-x)^{n+p-k},$$

$$\tilde{P}_{m,j}(y) = \binom{m+q}{j} y^j (1-y)^{m+q-j} \quad (5.1)$$

olarak tanımlanan operatöre iki değişkenli Schurer-Stancu operatörü denir [4]. Burada,

$\tilde{P}_{n,k}(x)$ ve $\tilde{P}_{m,j}(y)$, Schurer taban polinomlarıdır.

5.1.2. Teorem

Her $f \in C([0, 1+p] \times [0, 1+q])$ için

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \left\| S_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}(f) - f \right\|_{C([0, 1+p] \times [0, 1+q])} = 0$$

dir.

İspat

Tanım 4.1 den

$$\sum_{k=0}^{n+p} \tilde{P}_{n,k}(x) = 1 \quad \text{ve} \quad \sum_{j=0}^{m+q} \tilde{P}_{m,j}(y) = 1 \quad \text{olduğunu biliyoruz.}$$

$$\sum_{k=0}^{n+p} \sum_{j=0}^{m+q} \tilde{P}_{n,k}(x) \tilde{P}_{m,j}(y) = 1$$

Olduğundan

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=0}^{n+p} \sum_{j=0}^{m+q} \tilde{P}_{n,k}(x) \tilde{P}_{m,j}(y) - 1 \right\| = 0$$

bulunur.

Tanım 4.1 den

$$\sum_{k=0}^{n+p} \left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1} \right) \tilde{P}_{n,k}(x) = \frac{(n+p)x+\alpha_1}{n+\beta_1}$$

ve

$$\sum_{k=0}^{n+p} \left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1} \right)^2 \tilde{P}_{n,k}(x) = \frac{n^2 x^2 + (n+p)x(1-x) + (px+\alpha_1)((2n+p)x+\alpha_1)}{(n+\beta_1)^2}$$

olduğunu biliyoruz. O halde,

$$\sum_{k=0}^{n+p} \sum_{j=0}^{m+q} \left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1} \right) \tilde{P}_{n,k}(x) \tilde{P}_{m,j}(y) = \sum_{k=0}^{n+p} \left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1} \right) \tilde{P}_{n,k}(x) \sum_{j=0}^{m+q} \tilde{P}_{m,j}(y) = \frac{(n+p)x+\alpha_1}{n+\beta_1}$$

eşitliğinden

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=0}^{n+p} \sum_{j=0}^{m+q} \left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1} \right) \tilde{P}_{n,k}(x) \tilde{P}_{m,j}(y) - x \right\| = 0$$

elde edilir.

Benzer olarak;

$$\sum_{j=0}^{m+q} \left(\frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2} \right) \tilde{P}_{m,j}(y) = \frac{(m+q)y+\alpha_2}{m+\beta_2}$$

ve

$$\sum_{j=0}^{m+q} \left(\frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2} \right)^2 \tilde{P}_{m,j}(y) = \frac{m^2 y^2 + (m+q)y(1-y) + (qy+\alpha_2)((2m+q)y+\alpha_2)}{(m+\beta_2)^2}$$

dir. Öyleyse

$$\sum_{k=0}^{n+p} \sum_{j=0}^{m+q} \left(\frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2} \right) \tilde{P}_{n,k}(x) \tilde{P}_{m,j}(y) = \sum_{k=0}^{n+p} \tilde{P}_{n,k}(x) \sum_{j=0}^{m+q} \left(\frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2} \right) \tilde{P}_{m,j}(y) = \frac{(m+q)y+\alpha_2}{m+\beta_2}$$

eşitliği

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=0}^{n+p} \sum_{j=0}^{m+q} \left(\frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2} \right) \tilde{P}_{n,k}(x) \tilde{P}_{m,j}(y) - y \right\| = 0$$

sonucunu verir.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+p} \sum_{j=0}^{m+q} \left(\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1} \right)^2 + \left(\frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2} \right)^2 \right) \tilde{P}_{n,k}(x) \tilde{P}_{m,j}(y) &= \frac{n^2 x^2 + (n+p)x(1-x) + (px+\alpha_1)((2n+p)x+\alpha_1)}{(n+\beta_1)^2} \\ &+ \frac{m^2 y^2 + (m+q)y(1-y) + (qy+\alpha_2)((2m+q)y+\alpha_2)}{(m+\beta_2)^2} \end{aligned}$$

eşitliği yardımı ile

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=0}^{n+p} \sum_{j=0}^{m+q} \left(\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1} \right)^2 + \left(\frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2} \right)^2 \right) \tilde{P}_{n,k}(x) \tilde{P}_{m,j}(y) - (x^2 + y^2) \right\| = 0$$

dır. O halde, her $f \in C([0,1+p] \times [0,1+q])$ için Volkov Teoreminden,

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \left\| S_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}(f) - f \right\|_{C([0,1+p] \times [0,1+q])} = 0$$

elde edilir.

5.1.3. Tanım

f fonksiyonu $D=[0,1] \times [0,1]$ karesinde sürekli bir fonksiyon, δ pozitif bir sayı olmak üzere,

$$\omega(f; \delta) = \max_{\rho(M_1, M_2) \leq \delta} |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)|, M_1, M_2 \in D \quad (5.2)$$

fonksiyonuna f fonksiyonunun tam süreklilik modülü denir. Burada, $\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ dir.

Bu süreklilik modülünün özellikleri bilinen süreklilik modülünün özellikleriyle aynıdır [8].

5.1.4. Tanım

f fonksiyonu $D=[0,1] \times [0,1]$ karesinde sürekli bir fonksiyon δ pozitif bir sayı olmak üzere,

$$\omega^{(1)}(f; \delta) = \max_{(x_1, y), (x_2, y) \in D} \max_{|x_1 - x_2| \leq \delta} |f(x_1, y) - f(x_2, y)| \quad (5.3)$$

ve

$$\omega^{(2)}(f; \delta) = \max_{(x, y_1), (x, y_2) \in D} \max_{|y_1 - y_2| \leq \delta} |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \quad (5.4)$$

fonksiyonlarına sırasıyla, f fonksiyonunun x değişkenine göre ve y değişkenine göre kısmi süreklilik modülleri denir [8].

5.1.5. Teorem

$f \in C([0, 1+p] \times [0, 1+q])$ için $S_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}$ (5.1) ile verilen operatör olsun. Bu durumda,

$$\left| S_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}(f)(x, y) - f(x, y) \right| \leq 2\omega\left(f, \sqrt{\delta_{n,p}^{(\alpha_1, \beta_1)} + \delta_{m,q}^{(\alpha_2, \beta_2)}}\right)$$

dir.

İspat

$$\begin{aligned} \left| S_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}(f)(x, y) - f(x, y) \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n+p} \sum_{j=0}^{m+q} \tilde{P}_{n,k}(x) \tilde{P}_{m,j}(y) - f(x, y) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n+p} \sum_{j=0}^{m+q} \tilde{P}_{n,k}(x) \tilde{P}_{m,j}(y) \left| f\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}, \frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2}\right) - f(x, y) \right| \end{aligned} \quad (5.5)$$

$\delta_{n,m} = \sqrt{\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1} - x\right)^2 + \left(\frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2} - y\right)^2}$ alırsak (5.2) den,

$$\begin{aligned} \left| f\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}, \frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2}\right) - f(x, y) \right| &\leq \omega\left(f, \sqrt{\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1} - x\right)^2 + \left(\frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2} - y\right)^2}\right) \\ &\leq \omega(f; \delta_{n,m}) \left(1 + \delta_{n,m}^{-1} \sqrt{\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1} - x\right)^2 + \left(\frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2} - y\right)^2}\right) \end{aligned}$$

dir. Bu değeri (5.5) da yerine yazarsak

$$\left| S_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}(f)(x, y) - f(x, y) \right| \leq \omega(f; \delta_{n,m}) \left[1 + \delta_{n,m}^{-1} \left(S_{n,p}^{(\alpha_1, \beta_1)}((t-x)^2; x) + S_{m,q}^{(\alpha_2, \beta_2)}((s-y)^2; y) \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

olur.

$$\delta_{n,m} = \sqrt{S_{n,p}^{(\alpha_1, \beta_1)}((t-x)^2; x) + S_{m,q}^{(\alpha_2, \beta_2)}((s-y)^2; y)}$$

alırsa

$$\left| S_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}(f)(x, y) - f(x, y) \right| \leq 2\omega\left(f, \sqrt{S_{n,p}^{(\alpha_1, \beta_1)}((t-x)^2; x) + S_{m,q}^{(\alpha_2, \beta_2)}((s-y)^2; y)}\right)$$

olup

$$\delta_{n,p}^{(\alpha_1, \beta_1)} = S_{n,p}^{(\alpha_1, \beta_1)}((t-x)^2; x) \text{ ve } \delta_{m,q}^{(\alpha_2, \beta_2)} = S_{m,q}^{(\alpha_2, \beta_2)}((s-y)^2; y) \text{ dersek}$$

$$\left| S_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}(f)(x, y) - f(x, y) \right| \leq 2\omega\left(f; \sqrt{\delta_{n,p}^{(\alpha_1, \beta_1)} + \delta_{m,q}^{(\alpha_2, \beta_2)}}\right)$$

bulunur. Buradan,

$$\delta_{n,p}^{(\alpha_1, \beta_1)} = \frac{(n+p)^2 x(1-x) + (\alpha_1 - \beta_1 x)^2 + 2px(\alpha_1 - \beta_1) + p^2 x^2}{(n + \beta_1)^2}$$

ve

$$\delta_{m,q}^{(\alpha_2, \beta_2)} = \frac{(m+q)^2 y(1-y) + (\alpha_2 - \beta_2 y)^2 + 2qy(\alpha_2 - \beta_2) + q^2 y^2}{(m + \beta_2)^2}$$

olup $n, m \rightarrow \infty$ için $\delta_{n,p}^{(\alpha_1, \beta_1)}, \delta_{m,q}^{(\alpha_2, \beta_2)} \rightarrow 0$ dir.

5.1.6. Teorem

$f \in C([0, 1+p] \times [0, 1+q])$ için, $S_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}$ (5.1) ile verilen iki değişkenli Schurer-Stancu operatörü olsun. Bu durumda,

$$\left| S_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}(f)(x, y) - f(x, y) \right| \leq 2\left(\omega^{(1)}(f; \delta_{n,p}^{(\alpha_1, \beta_1)}) + \omega^{(2)}(f; \delta_{m,q}^{(\alpha_2, \beta_2)})\right)$$

dir.

İspat

$$\sum_{k=0}^{n+p} \sum_{j=0}^{m+q} \tilde{P}_{n,k}(x) \tilde{P}_{m,j}(y) = 1$$

olduğundan,

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{n+p} \sum_{j=0}^{m+q} \tilde{P}_{n,k}(x) \tilde{P}_{m,j}(y) f(x, y)$$

olarak yazılır. Buna göre,

$$\begin{aligned}
S_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}(f)(x, y) - f(x, y) &= \sum_{k=0}^{n+p} \sum_{j=0}^{m+q} \tilde{P}_{n,k}(x) \tilde{P}_{m,j}(y) \\
&\quad \times \left(f\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}, \frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2}\right) - f(x, y) \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n+p} \sum_{j=0}^{m+q} \tilde{P}_{n,k}(x) \tilde{P}_{m,j}(y) \left(f\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}, \frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2}\right) - f\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}, y\right) \right) \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n+p} \sum_{j=0}^{m+q} \tilde{P}_{n,k}(x) \tilde{P}_{m,j}(y) \left(f\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}, y\right) - f(x, y) \right) \\
&= I_1 + I_2
\end{aligned}$$

diyelim. O halde,

$$\left| S_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}(f)(x, y) - f(x, y) \right| \leq |I_1| + |I_2| \quad (5.6)$$

olur.

$$\begin{aligned}
|I_1| &= \sum_{k=0}^{n+p} \sum_{j=0}^{m+q} \tilde{P}_{n,k}(x) \tilde{P}_{m,j}(y) \left| f\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}, \frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2}\right) - f\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}, y\right) \right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n+p} \sum_{j=0}^{m+q} \tilde{P}_{n,k}(x) \tilde{P}_{m,j}(y) \omega^{(2)}\left(f, \left| \frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2} - y \right| \right) \\
&\leq \sum_{k=0}^{n+p} \sum_{j=0}^{m+q} \tilde{P}_{n,k}(x) \tilde{P}_{m,j}(y) \left(1 + \delta_{m,q}^{(\alpha_2, \beta_2)^{-1}} \left| \frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2} - y \right| \right) \omega^{(2)}\left(f, \delta_{m,q}^{(\alpha_2, \beta_2)}\right) \\
&\leq \omega^{(2)}\left(f, \delta_{m,q}^{(\alpha_2, \beta_2)}\right) \left[1 + \delta_{m,q}^{(\alpha_2, \beta_2)^{-1}} \left(\sum_{k=0}^{n+p} \sum_{j=0}^{m+q} \tilde{P}_{n,k}(x) \tilde{P}_{m,j}(y) \left| \frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2} - y \right| \right) \right] \\
&= \omega^{(2)}\left(f, \delta_{m,q}^{(\alpha_2, \beta_2)}\right) \left[1 + \delta_{m,q}^{(\alpha_2, \beta_2)^{-1}} \left(S_{m,q}^{(\alpha_2, \beta_2)}((s-y)^2; y) \right)^{1/2} \right]
\end{aligned}$$

olur.

$$\delta_{m,q}^{(\alpha_2, \beta_2)} = S_{m,q}^{(\alpha_2, \beta_2)}((s-y)^2; y)$$

olduğundan

$$|I_1| \leq 2\omega^{(2)}\left(f; \delta_{m,q}^{(\alpha_2, \beta_2)}\right)$$

olur. Benzer şekilde $|I_2|$ hesaplanırsa

$$|I_2| \leq 2\omega^{(1)}\left(f; \delta_{n,p}^{(\alpha_1, \beta_1)}\right)$$

elde edilir. (5.6) dan

$$\begin{aligned} \left| S_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}(f)(x,y) - f(x,y) \right| &\leq |I_1| + |I_2| \\ &\leq 2\left[\omega^{(1)}\left(f; \delta_{n,p}^{(\alpha_1, \beta_1)}\right) + \omega^{(2)}\left(f; \delta_{m,q}^{(\alpha_2, \beta_2)}\right) \right] \end{aligned}$$

olur. Burada;

$$\delta_{n,p}^{(\alpha_1, \beta_1)} = \frac{(n+p)^2 x(1-x) + (\alpha_1 - \beta_1 x)^2 + 2px(\alpha_1 - \beta_1) + p^2 x^2}{(n+\beta_1)^2}$$

ve

$$\delta_{m,q}^{(\alpha_2, \beta_2)} = \frac{(m+q)^2 y(1-y) + (\alpha_2 - \beta_2 y)^2 + 2qy(\alpha_2 - \beta_2) + q^2 y^2}{(m+\beta_2)^2}$$

olup $n, m \rightarrow \infty$ için $\delta_{n,p}^{(\alpha_1, \beta_1)}, \delta_{m,q}^{(\alpha_2, \beta_2)} \rightarrow 0$ dır.

5.1.7. Tanım

Eğer $D=[0,1] \times [0,1]$ karesinde tanımlı f fonksiyonu, (x_1, y) ve (x_2, y) bu karenin keyfi noktaları olmak üzere,

$$|f(x_1, y) - f(x_2, y)| \leq C|x_1 - x_2|^\mu, \quad 0 < \mu \leq 1$$

koşulunu sağlarsa, o zaman f fonksiyonu D karesinde x değişkenine göre Lipschitz koşulunu sağlar veya x değişkenine göre Lip_μ sınıfındandır denir ve bu $f \in Lip_{x\mu}$ biçiminde gösterilir.

Benzer şekilde (x, y_1) ve (x, y_2) , D karesinde keyfi noktaları olmak üzere

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq C|y_1 - y_2|^\mu, \quad 0 < \mu \leq 1$$

koşulunu sağlarsa, f fonksiyonu y değişkenine göre Lipschitz koşulunu sağlar veya y değişkenine göre Lip_μ sınıfındandır denir ve bu $f \in Lip_{y\mu}$ biçiminde gösterilir.

5.1.8. Tanım

f , D birim karesinde tanımlı bir fonksiyon, $x=(x_1, x_2)$, $t=(t_1, t_2)$ ve $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ olmak üzere

$$|f(x_1, x_2) - f(t_1, t_2)| \leq C\|x - t\|^\mu, \quad 0 < \mu \leq 1$$

ise f , D karesinde C sabitine göre μ .mertebeden Lipschitz sınıfındandır, denir. Ayrıca $Lip_{2C\mu}$ ile gösterilir.

5.1.9. Teorem

$S_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}$, (5.1) ile verilen iki değişkenli Schurer-Stancu operatörü olsun. Bu durumda,

i) $f \in Lip_{y\mu} \cap Lip_{x\eta}$ için

$$\left| S_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}(f)(x, y) - f(x, y) \right| \leq C_1 \left(\delta_{n,p}^{(\alpha, \beta)} \right)^{\frac{\mu}{2}} + C_2 \left(\delta_{m,q}^{(\gamma, \delta)} \right)^{\frac{\eta}{2}}; \quad 0 < \mu, \eta \leq 1$$

ii) $f \in Lip_{2C\mu}$ için

$$\left| S_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}(f)(x, y) - f(x, y) \right| \leq C \left(\delta_{n,p}^{(\alpha, \beta)} + \delta_{m,q}^{(\gamma, \delta)} \right)^{\frac{\mu}{2}}; \quad 0 < \mu \leq 1$$

dir.

İspat

i) $f \in Lip_{y\mu} \cap Lip_{x\eta}$ için

$$\begin{aligned}
S_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}(f)(x,y) - f(x,y) &= \sum_{k=0}^{n+p} \sum_{j=0}^{m+q} \tilde{P}_{n,k}(x) \tilde{P}_{m,j}(y) \left(f\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}, \frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2}\right) - f(x,y) \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n+p} \sum_{j=0}^{m+q} \tilde{P}_{n,k}(x) \tilde{P}_{m,j}(y) \\
&\quad \times \left(f\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}, \frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2}\right) - f\left(x, \frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2}\right) + f\left(x, \frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2}\right) - f(x,y) \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n+p} \sum_{j=0}^{m+q} \tilde{P}_{n,k}(x) \tilde{P}_{m,j}(y) \left(f\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}, \frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2}\right) - f\left(x, \frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2}\right) \right) \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n+p} \sum_{j=0}^{m+q} \tilde{P}_{n,k}(x) \tilde{P}_{m,j}(y) \left(f\left(x, \frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2}\right) - f(x,y) \right) \\
&= I_1 + I_2
\end{aligned}$$

Yani,

$$\left| S_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}(f)(x,y) - f(x,y) \right| \leq |I_1| + |I_2|$$

olur.

$$\begin{aligned}
|I_1| &= \sum_{k=0}^{n+p} \sum_{j=0}^{m+q} \tilde{P}_{n,k}(x) \tilde{P}_{m,j}(y) \left| f\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}, \frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2}\right) - f\left(x, \frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2}\right) \right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n+p} \sum_{j=0}^{m+q} \tilde{P}_{n,k}(x) \tilde{P}_{m,j}(y) C_1 \left| \frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1} - x \right|^\mu, 0 < \mu \leq 1 \\
&= C_1 \sum_{k=0}^{n+p} \tilde{P}_{n,k}(x) \left| \frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1} - x \right|^\mu
\end{aligned}$$

$p = \frac{2}{\mu}$ alırsak $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ den $q = \frac{2}{2-\mu}$ alınarak Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
|I_1| &\leq C_1 \left(\sum_{k=0}^{n+p} \tilde{P}_{n,k}(x) \left| \frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1} - x \right|^2 \right)^{\frac{\mu}{2}} \left(\sum_{j=0}^{m+q} \tilde{P}_{m,j}(y) \right)^{\frac{2-\mu}{2}} \\
&= C_1 \left(S_{n,p}^{(\alpha_1, \beta_1)}((t-x)^2; x) \right)^{\frac{\mu}{2}}
\end{aligned}$$

ve

$$S_{n,p}^{(\alpha_1, \beta_1)}((t-x)^2; x) = \delta_{n,p}^{(\alpha_1, \beta_1)} = \frac{(n+p)^2 x(1-x) + (\alpha_1 - \beta_1 x)^2 + 2px(\alpha_1 - \beta_1) + p^2 x^2}{(n+\beta_1)^2}$$

seçilirse

$$|I_1| \leq C_1 \left(\delta_{n,p}^{(\alpha_1, \beta_1)} \right)^{\frac{\mu}{2}}, 0 < \mu \leq 1$$

olur. Benzer şekilde,

$$S_{m,q}^{(\alpha_2, \beta_2)}((s-y)^2; y) = \delta_{m,q}^{(\alpha_2, \beta_2)} = \frac{(m+q)^2 y(1-y) + (\alpha_2 - \beta_2 y)^2 + 2qy(\alpha_2 - \beta_2) + q^2 y^2}{(m+\beta_2)^2}$$

ve

$$|I_2| \leq C_2 \left(\delta_{m,q}^{(\alpha_2, \beta_2)} \right)^{\frac{\eta}{2}}, 0 < \eta \leq 1$$

olup;

$$\begin{aligned} \left| S_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}(f)(x, y) - f(x, y) \right| &\leq |I_1| + |I_2| \\ &\leq C_1 \left(\delta_{n,p}^{(\alpha_1, \beta_1)} \right)^{\frac{\mu}{2}} + C_2 \left(\delta_{m,q}^{(\alpha_2, \beta_2)} \right)^{\frac{\eta}{2}}, 0 < \mu, \eta \leq 1 \end{aligned}$$

bulunur.

ii) $f \in Lip_2 C^\mu$ için

$$\begin{aligned} \left| S_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}(f)(x, y) - f(x, y) \right| &\leq \sum_{k=0}^{n+p} \sum_{j=0}^{m+q} \tilde{P}_{n,k}(x) \tilde{P}_{m,j}(y) \left| f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}, \frac{j+\gamma}{m+\delta}\right) - f(x, y) \right| \\ &\leq C \sum_{k=0}^{n+p} \sum_{j=0}^{m+q} \tilde{P}_{n,k}(x) \tilde{P}_{m,j}(y) \left(\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta} - x \right)^2 + \left(\frac{j+\gamma}{m+\delta} - y \right)^2 \right)^{\frac{\mu}{2}} \end{aligned}$$

bulunur. Burada $p = \frac{2}{\mu}$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ den $q = \frac{2}{2-\mu}$ alınarak Hölder eşitsizliğinden,

$$\left| S_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}(f)(x, y) - f(x, y) \right| \leq C \left[S_{n,p}^{(\alpha_1, \beta_1)}((t-x)^2; x) + S_{m,q}^{(\alpha_2, \beta_2)}((s-y)^2; y) \right]^{\frac{\mu}{2}}$$

dır. Burada

$$S_{n,p}^{(\alpha_1, \beta_1)}((t-x)^2; x) = \delta_{n,p}^{(\alpha_1, \beta_1)} = \frac{(n+p)^2 x(1-x) + (\alpha_1 - \beta_1 x)^2 + 2px(\alpha_1 - \beta_1) + p^2 x^2}{(n+\beta_1)^2}$$

ve

$$S_{m,q}^{(\alpha_2, \beta_2)}((s-y)^2; y) = \delta_{m,q}^{(\alpha_2, \beta_2)} = \frac{(m+q)^2 y(1-y) + (\alpha_2 - \beta_2 y)^2 + 2qy(\alpha_2 - \beta_2) + q^2 y^2}{(m+\beta_2)^2}$$

olduğundan,

$$\left| S_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}(f)(x, y) - f(x, y) \right| \leq C \left(\delta_{n,p}^{(\alpha_1, \beta_1)} + \delta_{m,q}^{(\alpha_2, \beta_2)} \right)^{\frac{\mu}{2}} ; 0 < \mu \leq 1$$

olur.

5.2. İki Değişkenli Schurer-Stancu Tip GBS Operatörü ile Yaklaşım

Bu bölümde, sürekli fonksiyonlar uzayından daha geniş olan Bögel sürekli fonksiyonlar uzayında çalışacağız. Bögel sürekli fonksiyonlara yaklaşmak için Schurer-Stancu tip operatörün genelleştirilmiş Boolean toplamını kullanarak karma süreklilik modülü yardımıyla yaklaşım derecesini elde edeceğiz. Bu tip bir çalışma Dan Bărbosu tarafından [5] de verilmiştir. Daha sonra, [12] de verilmiş olan Bögel Lipschitz sınıfını dikkate alarak bu sınıfa ait olan fonksiyonlara genelleştirilmiş Boolean operatörü yardımıyla yakınsaklık oranını elde edeceğiz. Bögel sürekli fonksiyon kavramı, Karl Bögel tarafından [6] da tanımlanmıştır. İlk olarak C. Cottin ve H.H. Gonska tarafından Bögel sürekli fonksiyonlar uzayında Korovkin tip teorem [2] de ispatlanmıştır.

5.2.1. Tanım

X, Y kompakt reel aralıklar ve $A = X \times Y$ olsun. $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun karma farkı $\Delta_{(x,y)} f[x_0, y_0; x, y]$ ile gösterilir. Her $(x_0, y_0) \in A$ için $f(x, y)$ nin karma farkı,

$$\Delta_{(x,y)} f[x_0, y_0; x, y] = f(x, y) - f(x_0, y) - f(x, y_0) + f(x_0, y_0)$$

olarak tanımlanır.

Eğer herhangi $(x,y) \in A$ noktası için

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \Delta_{(x,y)} f[x_0,y_0;x,y] = 0$$

ise $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $(x_0,y_0) \in A$ noktasında B-sürekli (Bögel sürekli) denir.

Eşdeğer olarak, her $\varepsilon > 0$ için $|x - x_0| < \delta$ ve $|y - y_0| < \delta$ olduğunda $|\Delta_{(x,y)} f[x_0,y_0;x,y]| < \varepsilon$ olacak biçimde en az bir $\delta > 0$ varsa $f, (x_0,y_0) \in A$ noktasında Bögel sürekli. Bögel sürekliliği B-sürekli olarak ifade ediyoruz. A üzerindeki bütün B-sürekli fonksiyon uzayını $C_b(A)$ ile gösteriyoruz [8].

5.2.2. Teorem

Her sürekli fonksiyon B-sürekli.

İspat

f fonksiyonu A 'da sürekli olsun. Öyleyse her $\varepsilon > 0$ sayısı için $|x - x_0| < \delta$ ve $|y - y_0| < \delta$ şartlarını sağlayan pozitif bir $\delta > 0$ sayısı vardır öyle ki tüm $(x,y), (x_0,y_0) \in A$ için

$$|f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon$$

dur.

$$\begin{aligned} |\Delta_{(x,y)} f[x_0,y_0;x,y]| &= |f(x,y) - f(x_0,y) - f(x,y_0) + f(x_0,y_0)| \\ &\leq |f(x,y) - f(x_0,y)| + |f(x,y_0) - f(x_0,y_0)| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

olur. Böylece her sürekli fonksiyon B-sürekli, ancak tersi doğru değildir.

Örnek

$$1. f(x,y) = \begin{cases} x^2 + 2y & ; (x,y) \neq (2,-2) \\ 0 & ; (x,y) = (2,-2) \end{cases}$$

fonksiyonunun $(2,-2)$ noktasında hem sürekli hem de B-sürekli olduğu açıktır.

$$2. f(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} x^2 + 1 & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{ll} y^2 + 1 & ; y \neq 0 \\ 0 & ; y = 0 \end{array} \right\}$$

fonksiyonunun (0,0) noktasında B-sürekli fakat sürekli olmadığı açıktır.

5.2.3. Tanım

$0 \leq \alpha_1 \leq \beta_1$, $0 \leq \alpha_2 \leq \beta_2$ koşullarını sağlayan α_1 , β_1 , α_2 , β_2 reel parametreler ve $f \in C_b([0,1+p] \times [0,1+q])$ ve $(x,y) \in [0,1+p] \times [0,1+q]$ olsun. (4.1) ile verilen Schurer-Stancu operatörünün parametrik genişletmeleri sırasıyla

$$\left({}_x S_{n,p}^{(\alpha_1, \beta_1)} f \right)(x,y) = \sum_{k=0}^{n+p} \tilde{P}_{n,k}(x) f\left(\frac{k}{n}, y\right) \quad (5.7)$$

ve

$$\left({}_y S_{m,q}^{(\alpha_2, \beta_2)} f \right)(x,y) = \sum_{j=0}^{m+q} \tilde{P}_{m,j}(y) f\left(x, \frac{j}{m}\right) \quad (5.8)$$

ile tanımlanır. Burada, ${}_x S_{n,p}^{(\alpha_1, \beta_1)}$ ve ${}_y S_{m,q}^{(\alpha_2, \beta_2)}$ lineer ve pozitif operatörlerdir. Bunların çarpımı, (5.1) ile tanımlanan iki değişkenli Schurer-Stancu tip operatörünü verir [5].

5.2.4. Tanım

$U_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)} : C_b(J) \rightarrow C_b(J)$ ($J = [0,1+p] \times [0,1+q]$) operatörü (5.7) ve (5.8) operatörlerinin Genelleştirilmiş Boolean Toplamı olarak

$$U_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)} = {}_x S_{n,p}^{(\alpha_1, \beta_1)} + {}_y S_{m,q}^{(\alpha_2, \beta_2)} - S_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)} \quad (5.9)$$

biçiminde tanımlanır. Bu operatöre Schurer-Stancu tip Genelleştirilmiş Boolean Toplamı (GBS) denir.

Her $f \in C_b(J)$ ve $S_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}$ lineer pozitif operatörünün GBS operatörü, her $(x,y), (t,s) \in J$ için $U_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)} : C_b(J) \rightarrow C_b(J)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
U_{n,m,p,q}^{(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2)}(f(t,s);x,y) &= {}_x S_{n,p}^{(\alpha_1,\beta_1)}(f(t,s);x,y) + {}_y S_{m,q}^{(\alpha_2,\beta_2)}(f(t,s);x,y) - S_{n,m,p,q}^{(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2)}(f(t,s);x,y) \\
&= S_{n,m,p,q}^{(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2)}(f(t,y) + f(x,s) - f(t,s);x,y) \\
&= \sum_{k=0}^{n+p} \sum_{j=0}^{m+q} \tilde{P}_{n,k}(x) \tilde{P}_{m,j}(y) \\
&\quad \times \left(f\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}, y\right) + f\left(x, \frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2}\right) - f\left(\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1}, \frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2}\right) \right)
\end{aligned} \tag{5.10}$$

dir [5].

5.2.5. Lemma

$U_{n,m,p,q}^{(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2)} : C_b(J) \rightarrow C_b(J)$ operatörü lineer ve pozitifdir.

Gerçekten, (5.9)'den dolayı Schurer-Stancu operatörü lineer ve pozitif operatör olduğundan $U_{n,m,p,q}^{(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2)}$ operatörünün de lineer ve pozitif olduğu açıktır.

5.2.6. Lemma

$e_{i,j}(s,t) = s^i t^j$ ($i, j \in \mathbb{N}$, $0 \leq i+j \leq 2$), s, t , parametreler, her $(x, y) \in J$ ve $U_{n,m,p,q}^{(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2)} : C_b(J) \rightarrow C_b(J)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
U_{n,m,p,q}^{(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2)}(e_{0,0};x,y) &= 1 \\
U_{n,m,p,q}^{(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2)}(e_{1,0};x,y) &= x \\
U_{n,m,p,q}^{(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2)}(e_{0,1};x,y) &= y \\
U_{n,m,p,q}^{(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2)}(e_{2,0};x,y) &= x^2 \\
U_{n,m,p,q}^{(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2)}(e_{0,2};x,y) &= y^2
\end{aligned}$$

dir.

İspat

$U_{n,m,p,q}^{(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2)}$ nin (5.9) tanımı dikkate alınarak ${}_x S_{n,p}^{(\alpha_1,\beta_1)}(e_{0,0};x,y) = 1$ ve ${}_y S_{m,q}^{(\alpha_2,\beta_2)}(e_{0,0};x,y) = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned}
U_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}(e_{0,0}; x, y) &= {}_x S_{n,p}^{(\alpha_1, \beta_1)}(e_{0,0}; x, y) + {}_y S_{m,q}^{(\alpha_2, \beta_2)}(e_{0,0}; x, y) - S_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}(e_{0,0}; x, y) \\
&= 1 + 1 - 1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

dir.

${}_y S_{m,q}^{(\alpha_2, \beta_2)}(e_{1,0}; x, y) = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned}
U_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}(e_{1,0}; x, y) &= {}_x S_{n,p}^{(\alpha_1, \beta_1)}(e_{1,0}; x, y) + {}_y S_{m,q}^{(\alpha_2, \beta_2)}(e_{1,0}; x, y) - S_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}(e_{1,0}; x, y) \\
&= {}_x S_{n,p}^{(\alpha_1, \beta_1)}(e_{1,0}; x, y) + x - {}_x S_{n,p}^{(\alpha_1, \beta_1)}(e_{1,0}; x, y) {}_y S_{m,q}^{(\alpha_2, \beta_2)}(e_{1,0}; x, y) \\
&= {}_x S_{n,p}^{(\alpha_1, \beta_1)}(e_{1,0}; x, y) + x - {}_x S_{n,p}^{(\alpha_1, \beta_1)}(e_{1,0}; x, y) \\
&= x
\end{aligned}$$

dir ve benzer şekilde

$$U_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}(e_{0,1}; x, y) = y$$

dir.

Benzer hesaplama ile ${}_y S_{m,q}^{(\gamma, \delta)}(e_{0,0}; x, y) = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned}
U_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}(e_{2,0}; x, y) &= {}_x S_{n,p}^{(\alpha_1, \beta_1)}(e_{2,0}; x, y) + {}_y S_{m,q}^{(\alpha_2, \beta_2)}(e_{2,0}; x, y) - S_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}(e_{2,0}; x, y) \\
&= {}_x S_{n,p}^{(\alpha_1, \beta_1)}(e_{2,0}; x, y) + x^2 - {}_x S_{n,p}^{(\alpha_1, \beta_1)}(e_{2,0}; x, y) {}_y S_{m,q}^{(\alpha_2, \beta_2)}(e_{2,0}; x, y) \\
&= x^2
\end{aligned}$$

dir ve benzer şekilde

$$U_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}(e_{0,2}; x, y) = y^2$$

olur.

Lemma 5.2.6 dan, her $x, t \in [0, 1+p]$ ve $y, s \in [0, 1+q]$ için $\psi_x(t) = t - x$ ve $\psi_y(s) = s - y$ olsun.

Her $x, t \in [0, 1+p]$ için

$$\begin{aligned} U_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}(\psi_x; x, y) &= U_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}(t - x; x, y) \\ &= U_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}(t; x, y) - x U_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}(e_{0,0}; x, y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ve $y, s \in [0, 1+q]$ için

$$\begin{aligned} U_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}(\psi_y; x, y) &= U_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}(s - y; x, y) \\ &= U_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}(s; x, y) - y U_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}(e_{0,0}; x, y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

yazılabilir.

5.2.7. Tanım

$f \in C_b(J)$ nin karma süreklilik modülü, her $(x, y), (t, s) \in J$ ve herhangi $\delta_1, \delta_2 \in [0, \infty) \times [0, \infty)$ olmak üzere $\omega_{mixed} : [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ için

$$\omega_{mixed}(f; \delta_1, \delta_2) = \sup \{ |\Delta_{(x,y)} f[x_0, y_0; x, y]| : |x - t| < \delta_1, |y - s| < \delta_2 \}$$

olarak tanımlanır.

ω_{mixed} , klasik süreklilik modülü ile aynı özelliklere sahiptir [7].

5.2.8. Teorem

Her $f \in C_b(J)$ için her bir $(x, y) \in J$ noktasında (5.10) operatörü

$$\left| U_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}(f; x, y) - f(x, y) \right| \leq 4\omega_{mixed}(f; \delta_1, \delta_2)$$

dir. Burada,

$$\delta_1 = \sqrt{S_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}((t-x)^2; x)} \quad \text{ve} \quad \delta_2 = \sqrt{S_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}((s-y)^2; y)} \quad \text{dir.}$$

İspat

$\omega_{mixed}(f; \delta_1, \delta_2)$ tanımı ve temel özellikleri kullanıldığında

$$\omega_{mixed}(f; \lambda_1 \delta_1, \lambda_2 \delta_2) \leq (1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2) \omega_{mixed}(f; \delta_1, \delta_2) ; \lambda_1, \lambda_2 > 0 \quad (5.11)$$

dir.

Her $(x, y), (t, s) \in J$ ve her bir $\delta_1, \delta_2 > 0$ için ve (5.11) eşitsizliğinin de yardımıyla

$$\begin{aligned} |\Delta_{(x,y)} f[t, s; x, y]| &= |f(x, y) - f(x, s) - f(t, y) + f(t, s)| \\ &\leq \omega_{mixed}(f; |t-x|, |s-y|) \\ &\leq \left(1 + \frac{|t-x|}{\delta_1}\right) \left(1 + \frac{|s-y|}{\delta_2}\right) \omega_{mixed}(f; \delta_1, \delta_2) \end{aligned} \quad (5.12)$$

Yazılabilir. $\Delta_{(x,y)} f[t, s; x, y]$ nin tanımından,

$$f(x, s) + f(t, y) - f(t, s) = f(x, y) - \Delta_{(x,y)} f[t, s; x, y]$$

olarak yazılır.

Her iki tarafa lineer $S_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}(f; x, y)$ operatörü uygulanırsa

$$S_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}(f(x, s) + f(t, y) - f(t, s)) = f(x, y) S_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}(e_{00}; x, y) - S_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}(\Delta_{(x,y)} f[t, s; x, y]; x, y)$$

olur. Burada (5.10) ile verilen $U_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}$ tanımından ve $S_{n,m,p,q}^{(\alpha, \beta, \gamma, \delta)}(e_{00}; x, y) = 1$ olduğundan

$$U_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}(f; x, y) = f(x, y) - S_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}(\Delta_{(x,y)} f[t, s; x, y]; x, y)$$

yazılır. Böylece (5.12) eşitsizliği dikkate alınabilir.

$$\begin{aligned}
\left| U_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}(f; x, y) - f(x, y) \right| &\leq S_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}(|\Delta_{(x,y)} f[t, s; x, y]|; x, y) \\
&\leq S_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)} \left(\left(1 + \frac{|t-x|}{\delta_1} \right) \left(1 + \frac{|s-y|}{\delta_2} \right) \omega_{mixed}(f; \delta_1, \delta_2); x, y \right) \\
&\leq S_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)} \left(\left(1 + \frac{|t-x|}{\delta_1} \right) \left(1 + \frac{|s-y|}{\delta_2} \right); x, y \right) \omega_{mixed}(f; \delta_1, \delta_2) \\
&\leq \left[\begin{aligned} &1 + \delta_1^{-1} \sqrt{S_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}((t-x)^2; x)} + \delta_2^{-1} \sqrt{S_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}((s-y)^2; y)} \\ &+ \delta_1^{-1} \delta_2^{-1} \sqrt{S_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}((t-x)^2; x) S_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}((s-y)^2; y)} \end{aligned} \right] \\
&\quad \times \omega_{mixed}(f; \delta_1, \delta_2)
\end{aligned}$$

olur. Burada

$$\delta_1 = \sqrt{S_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}((t-x)^2; x)} \quad \text{ve} \quad \delta_2 = \sqrt{S_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}((s-y)^2; y)} \quad (5.13)$$

alınarak istenilen sonuç elde edilir.

5.2.9. Tanım

Her $f \in C_b(\mathcal{J})$ için Lipschitz sınıfı, $\mu, \eta \in (0, 1]$ olmak üzere

$$Lip_M(\mu, \eta) = \{f \in C_b(\mathcal{J}) : |\Delta_{(x,y)} f[t, s; x, y]| \leq M |t-x|^\mu |s-y|^\eta, (t, s), (x, y) \in \mathcal{J}\}$$

olarak tanımlanır. Burada, $M > 0$ dır.

5.2.10. Teorem

$M > 0, \mu, \eta \in (0, 1]$ için $f \in Lip_M(\mu, \eta)$ olduğunda

$$\left| U_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}(f; x, y) - f(x, y) \right| \leq M \delta_1^{\mu/2} \delta_2^{\eta/2}$$

dir. Burada δ_1 ve δ_2 , Teorem 5.2.8 ile aynıdır.

İspat

$U_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}(f; x, y)$ operatörünün tanımı ve $S_{n,m,p,q}^{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}(f; x, y)$ operatörünün lineerliğinden,

$$U_{n,m,p,q}^{(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2)}(f;x,y) = f(x,y)S_{n,m,p,q}^{(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2)}(e_{00};x,y) - S_{n,m,p,q}^{(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2)}(\Delta_{(x,y)}f[t,s;x,y];x,y)$$

yazılabilir. Buradan,

$$\begin{aligned} \left| U_{n,m,p,q}^{(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2)}(f;x,y) - f(x,y) \right| &\leq S_{n,m,p,q}^{(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2)}(|\Delta_{(x,y)}f[t,s;x,y]|;x,y) \\ &\leq MS_{n,m,p,q}^{(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2)}(|t-x|^\mu |s-y|^\eta; x,y), f \in Lip_M(\mu, \eta) \\ &= MS_{n,m,p,q}^{(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2)}(|t-x|^\mu; x) S_{n,m,p,q}^{(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2)}(|s-y|^\eta; y) \end{aligned}$$

olur.

$p_1 = \frac{2}{\mu}, q_1 = \frac{2}{2-\mu}$ ve $p_2 = \frac{2}{\eta}, q_2 = \frac{2}{2-\eta}$ alınarak Hölder eşitsizliği kullanıldığında,

$$\begin{aligned} \left| U_{n,m,p,q}^{(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2)}(f;x,y) - f(x,y) \right| &\leq M \left(S_{n,m,p,q}^{(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2)}((t-x)^2; x) \right)^{\mu/2} \left(S_{n,m,p,q}^{(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2)}(e_{00}; x,y) \right)^{(2-\mu)/2} \\ &\quad \times \left(S_{n,m,p,q}^{(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2)}((s-y)^2; y) \right)^{\eta/2} \left(S_{n,m,p,q}^{(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2)}(e_{00}; x,y) \right)^{(2-\eta)/2} \\ &\leq M \left(S_{n,m,p,q}^{(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2)}((t-x)^2; x) \right)^{\mu/2} \left(S_{n,m,p,q}^{(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2)}((s-y)^2; y) \right)^{\eta/2} \end{aligned}$$

olur. δ_1 ve δ_2 , Teorem 5.2.8 de olduğu gibi seçilerek

$$\left| U_{n,m,p,q}^{(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2)}(f;x,y) - f(x,y) \right| \leq M \delta_1^{\mu/2} \delta_2^{\eta/2}$$

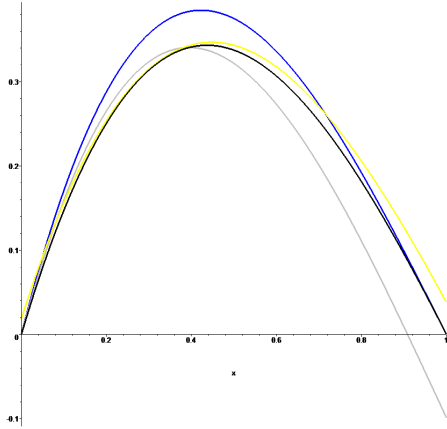
bulunur.

6. GRAFİKLER YARDIMI İLE YAKINSAKLIK ORANLARI

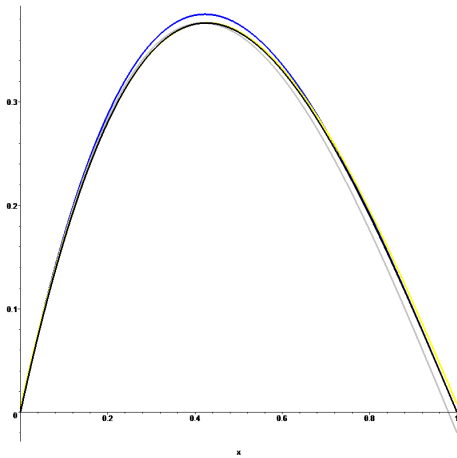
Bu bölümde önceki bölümlerde çalışılan operatörlerin belirli fonksiyonlara, belirli durumlarda yakınsaklıkları grafiklerle incelenecektir.

Örnek

1. $f(x) = x(x-1)(x-2)$ fonksiyonu verilsin ve $p=1$, $\alpha=0.1$, $\beta=0.5$ olsun. Şekil 6.1' de $n=10$, Şekil 6.2'de $n=50$ için tek değişkenli Bernstein (siyah), Bernstein-Schurer (gri) ve Bernstein-Stancu (sarı) operatörlerinin $f(x)$ (mavi) fonksiyonuna yakınsaklığı verilmiştir. n 'nin büyüyen değerleri için yakınsaklığın daha iyi olduğu görülmektedir.

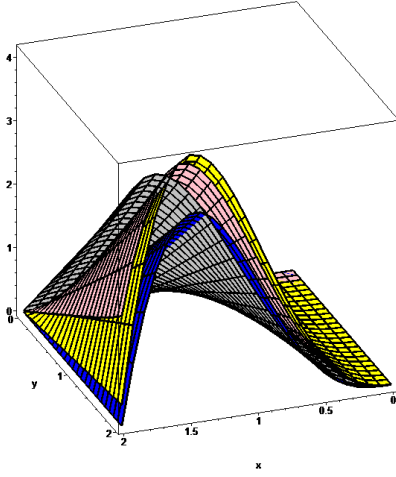


Şekil 6.1. $n=10$ için tek değişkenli operatörlerin yaklaşımı

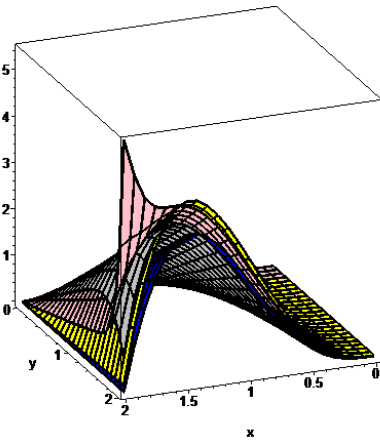


Şekil 6.2. $n=50$ için tek değişkenli operatörlerin yaklaşımı

2. İki değişkenli Bernstein-Schurer (gri), Bernstein-Stancu (sarı) ve Schurer-Stancu (pembe) operatörlerinin Şekil 6.3' de $n=m=10$, $p=q=1, \alpha=\gamma=0.1, \beta=\delta=0.5$ ve Şekil 6.4'de de $n=15, m=10, p=q=1, \alpha=\gamma=0.1, \beta=\delta=0.5$ olması durumunda $f(x,y)=x^2 \sin(\frac{\pi}{2}x)y$ (mavi) fonksiyonuna yakınsaklıkları resmedilmiştir.

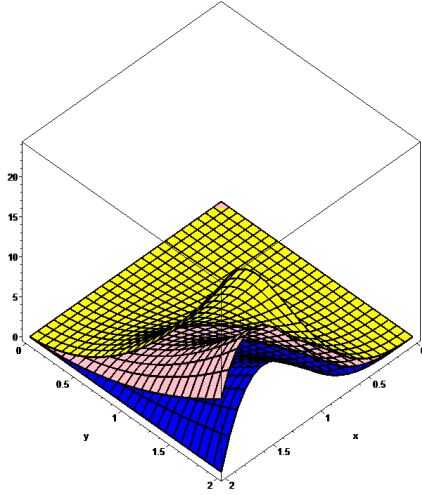


Şekil 6.3. $n=m=10$ için iki değişkenli operatörlerin yaklaşımı



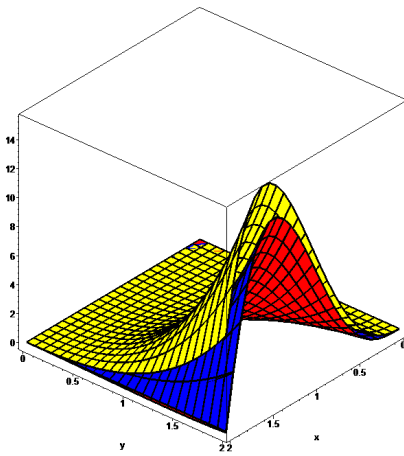
Şekil 6.4. $n=15$ ve $m=10$ için iki değişkenli operatörlerin yaklaşımı

3. Şekil 6.5' de iki değişkenli Schurer-Stancu operatörünün $n=m=5$ (sarı) ve $n=m=10$ (pembe), $p=q=1, \alpha=\gamma=0.1, \beta=\delta=0.5$ olması durumunda n ve m ' nin büyüyen değerleri için $f(x,y) = x^3 \sin\left(\frac{1}{2}\pi x\right)y^2$ (mavi) fonksiyonuna yaklaştığı gösterilmiştir.



Şekil 6.5. $n=m=5$ ve $n=m=10$ için iki değişkenli Schurer-Stancu operatörünün yaklaşımı

4. Şekil 6.6' da $S_{n,m,p,q}^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$ (sarı), iki değişkenli Schurer-Stancu operatörü ve $U_{n,m,p,q}^{(\alpha,\beta,\gamma,\delta)}$ (kırmızı), Schurer-Stancu tip GBS operatörünün $n=m=10, p=q=1, \alpha=\gamma=0.1, \beta=\delta=0.5$ olması durumunda $f(x,y) = x^3 \sin\left(\frac{1}{2}\pi x\right)y^2$ fonksiyonuna yakınsaklıkları gösterilmiştir. GBS operatörü için yakınsama oranının daha iyi olduğu görülmektedir.



Şekil 6.6. $n=m=10$ için iki değişkenli Schurer-Stancu ve GBS operatörünün yaklaşımı



7. SONUÇ

Bu bölümde çalışmamızda elde ettiğimiz bazı sonuçlardan söz edilecektir.

Bernstein operatörleri ve onun genelleştirmeleri yaklaşım teorisinin en çok kullanılan ve uygulama alanı en fazla olan operatörleridir. Bu çalışmada Bernstein operatörünün aralıklara genelleştirmesi olan Schurer metodu ile fonksiyonun düğüm noktalarının genelleştirildiği Stancu yöntemi ele alındı.

Schurer-Stancu operatörlerinin bilinen süreklilik modülü haricinde Petree K-fonksiyoneli ve düzgünlük modülü cinsinden yaklaşım dereceleri verildi.

[3] ve [4] izlenerek Schurer-Stancu operatörlerinin tek ve iki değişkenli fonksiyonlar için yaklaşım özellikleri incelendi. [5] izlenerek Schurer-Stancu tip operatörlerin Bögel sürekli fonksiyonlara Genelleştirilmiş Boolean Toplamı(GBS) tanımlanarak karma süreklilik modülü cinsinden yaklaşım derecesi çalışıldı. [12] de tanımlanmış olan karma Lipschitz fonksiyonlar sınıfı dikkate alınarak, Schurer-Stancu operatörlerinin GBS tipi için Lipschitz sınıfından olan fonksiyonlar için yakınsaklığın derecesi bulundu. Böylece sürekli fonksiyonlardan daha geniş bir sınıf olan Bögel sürekli fonksiyonlar sınıfına bir genelleştirme elde edildi.

Son bölümde ise tüm operatörler için farklı koşullar altında çeşitli fonksiyonlara yaklaşım oranları grafikler ile verildi.



KAYNAKLAR

1. Altomare, F. and Campiti, M. (1994). *Korovkin-type Approximation Theory and its Applications*, Berlin: Water de Gryter, 218-373.
2. Badea, C., Badea, I., Cottin, C. and Gonska, H.H. (1988). Notes on the Degree of Approximation of B-continuous and B-differentiable Functions, *Approximation Theory & its Applications*, 4(3), 95-108.
3. Bărbosu, D. (2003). Schurer-Stancu Type Operators, *Studia University. Babeş-Bolyai*, 47(3), 31-35.
4. Bărbosu, D. (2003). Bivariate Operators of Schurer-Stancu type, *Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta, Seria Matematica*, 11(1), 1-8.
5. Bărbosu, D. (2003). GBS Operators of Schurer-Stancu type, *Annals of University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series*, 30(2), 34-39.
6. Bögel, K. (1935). Über die Mehrdimensionale Differentiation Integration und Beschränkte Variation, *Journal Für Die Reine und Angewandte Mathematik*, 173, 5-29.
7. Cottin, C. (1990). Mixed K-functionals: A Measure Of Smoothness for Blending-Type Approximation, *Mathematische Zeitschrift*, 204(1), 69-83.
8. Gal, S.G. and Anastassiou, G.A. (2000). *Approximation Theory: Moduli of Continuity and Global Smoothness Preservation*, New York: Birkhäuser, 80-466.
9. Hacısalihoğlu, H. ve Hacıyev, A. (1995). *Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı*, Ankara: A.Ü. Fen Fakültesi Yayınları.
10. Korovkin, P.P. (1960). *Linear Operators and Approximation Theory*, Delhi: Hindustan Publishing Corp. (India)
11. Schurer, F. (1965). *On Linear Positive Operators in Approximation Theory*, Phd. Thesis, Techological University of Delft, Netherlands.
12. Sidharth, M., İspir, N. and Agrawal, P.N. (2015). GBS operators of Bernstein-Schure-Kantrovich type Base on q-integers, *Applied Mathematics and Computation* 269, 558-568.
13. Stancu, D.D. (1963). A Method for Obtaning Polynomials of Bernstein type of Two Variables. *The American Mathematical Monthly*, 70(3), 260-264.



ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : AKSOY, Gözde
 Uyuğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 03.05.1989, Giresun
 Medeni hali : Bekar
 Telefon : (0505) 130 26 89
 e-mail : gozde.aksoy@gazi.edu.tr



Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi/Matematik Bölümü	Devam Ediyor
Lisans	Giresun Üniversitesi/Matematik Bölümü	2012
Lise	Giresun Y.D.A. Lisesi	2007

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
-	-	-

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Kitap okumak, Çizim yapmak, Yürüyüş yapmak



GAZİ GELECEKTİR..