Bazı Konveks Çok Yüzlülerle İlgili Metrikler Ve Bu Metriklerin Geometrileri Üzerine

Zeynep CAN

DOKTORA TEZİ

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Mart 2016

On The Metrics Of Some Convex Polyhedra And The Geometries Of These Metrics

Zeynep CAN

DOCTORAL DISSERTATION

Department of Mathematics and Computer Sciences Department

March 2016

Bazı Konveks Çok Yüzlülerle İlgili Metrikler Ve Bu Metriklerin Geometrileri Üzerine

Zeynep CAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalı
DOKTORA TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Rüstem KAYA

Mart 2016

ONAY

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı DOKTORA öğrencisi Zeynep CAN'ın DOKTORA tezi olarak hazırladığı "**Bazı Konveks Çok Yüzlülerle İlgili Metrikler Ve Bu Metriklerin Geometrileri Üzerine**" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek oybirliği ile kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Rüstem KAYA

İkinci Danışman : -

Doktora Tez Savunma Jürisi:

Üye : Prof. Dr. Rüstem KAYA

Üye : Prof. Dr. Süleyman ÇİFTÇİ

Üye : Prof. Dr. Ziya AKÇA

Üye : Doç. Dr. Ali DENİZ

Üye : Doç. Dr. Özcan GELİŞGEN

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..... tarih ve ..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof.Dr. Hürriyet ERŞAHAN
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. Rüstem KAYA danışmanlığında hazırlamış olduğum "**Bazı Konveks Çok Yüzlülerle İlgili Metrikler Ve Bu Metriklerin Geometrileri Üzerine**" başlıklı tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. …/…/20…

Zeynep CAN

ÖZET

Bu tezde, 3- boyutlu $\mathbb{R}^3$ gerçel uzayında bazı yarı-düzgün ve düzgün olmayan konveks çokyüzlüler ile ilgili metrikler belirlenmiş; bu metriklerin belirlediği geometrilerin izometri grupları ile $\mathbb{R}^3$ ün izometri grubu arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Birinci ve ikinci bölümde, **Katalan Cisimler** olarak adlandırılan düzgün olmayan konveks çokyüzlüler ve **Arşimed cisimleri** olarak adlandırılan yarı-düzgün konveks çokyüzlüler hakkında bilgiler verilerek, bu cisimlerin bulunuşundan günümüze kadar olan süreçteki uygulamalarından bahsedilmiş, minkowski geometrisi, duallik ve $\mathbb{R}^3$ ün izometri grubu hakkında temel kavramlar verilerek tanımları hatırlatılmıştır.

Üçüncü, dördüncü, beşinci, altıncı ve yedinci bölümlerde, birim küreleri sırasıyla **cuboctahedron, truncated octahedron, icosidodecahedron, rhombic triacontahedron** ve **disdyakis triacontahedron** çokyüzlüleri olacak şekilde uzaklık fonksiyonları belirlenerek, bu uzaklık fonksiyonlarının metrik oldukları ispat edilmiştir. Daha sonra, elde edilen metrikler ile donatılmış uzayların izometri grupları araştırılmış ve elde edilen sonuçların ele alınan çokyüzlülerin simetri grupları ile ilgileri verilmiştir.

Sekizinci bölümde, bahsedilen cisimlerle ilişkili olan, tezde bu ana kadar değinilmeyen bazı cisimler hakkında daha önce yapılan çalışmalardan yararlanılarak bilgiler verilmiş, uzaklık fonksiyonları tanıtılmış ve izometri grupları hakkında bilgi verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Metrik, Metrik Geometri, İzometri, İzometri Grubu, Uzaklık Fonksiyonu, Katalan Cisimler, Arşimed Cisimleri, Cuboctahedron, Truncated Octahedron, İcosidodecahedron, Rhombic Triacontahedron, Disdyakis Triacontahedron.

SUMMARY

In this thesis, we determine some special metrics related with some of convex polyhedra which are semi-regular or not regular are given in $3-$dimensional real space $\mathbb{R}^3$; and study the metric geometries defined by these metrics.

In the first and second chapter, non-regular convex polyhedra named **Catalan solids** and semi-regular convex polyhedra named **Archimedean solids** are introduced and applications of these polyhedrons from their discovery to nowadays are mentioned; and information about Minkowski geometry, duality and isometry group of $\mathbb{R}^3$ are given.

In third, fourth, fifth, sixth and seventh chapters distance functions which unit spheres are respectively **cuboctahedron, truncated octahedron, icosidodecahedron, rhombic triacontahedron** and **disdyakis triacontahedron** polyhedra are given and proved that these distance functions are metrics. Isometry groups of spaces furnished by acquired metrics are investigated and relations between this results and symmetry groups of mentioned solids are given.

In the last chapter some information about polyhedrons which are studied before and related with mentioned polyhedrons are given, their distance functions are introduced and information about their isometry groups are given.

Keywords: Metric, Metric Geometry, Isometry, Isometry Group, Distance Function, Catalan Solids, Archimedean Solids, Cuboctahedron, Truncated Octahedron, Icosidodecahedron, Disdyakis Triacontahedron.

TEŞEKKÜR

Doktora çalışmamın her aşamasında deneyimlerini, bilimsel katkılarını ve desteklerini esirgemeyen değerli danışman hocam

Prof.Dr.RüstemKAYA'ya,

her zaman fikirlerine başvurduğum ve desteklerini benden esirgemeyen sayın hocam

Doç. Dr. Özcan GELİŞGEN'e,

bu süreçte her zaman yanımda olup maddi manevi bana destek olan sevgili eşim ve oğluma, ayrıca sevgilerini, desteklerini her zaman gördüğüm bugünlere gelmemde en büyük paya ve emeğe sahip olan anneme, babama ve kardeşime, ayrıca sevgili arkadaşım Zeynep Çolak'a en samimi teşekkürlerimi sunarım.

Aksaray, 2016
Zeynep CAN

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET . . . . . **vi**

SUMMARY . . . . . **vii**

TEŞEKKÜR . . . . . **viii**

İÇİNDEKİLER . . . . . **ix**

ŞEKİLLER DİZİNİ . . . . . **xi**

1. GİRİŞ **1**

2. TEMEL KAVRAMLAR **5**
2.1. Euler Formülü Ve Çokyüzlülerde Dualite 5
2.2. Minkowski Geometrisi Ve Konveks Çokyüzlüler 5
2.3. Konveks Cisimler ve Metrikleri 6
2.4. $\mathbb{R}^3$ ün İzometri Grubu 7

3. CUBOCTAHEDRON UZAYI **11**
3.1. Cuboctahedron Metriği ve Özellikleri 11
3.2. Cuboctahedron İzometri Grubu 17

4. TRUNCATED OCTAHEDRON UZAYI **35**
4.1. Truncated Octahedron Metriği ve Özellikleri 35
4.2. Truncated Octahedron İzometri Grubu 40

5. ICOSIDODECAHEDRON UZAYI **60**
5.1. Icosidodecahedron Metriği ve Özellikleri 60
5.2. İcosidodecahedron İzometri Grubu 68

6. RHOMBİC TRİACONTAHEDRON UZAYI **100**
6.1. Rhombic Triacontahedron Metriği ve Özellikleri 100
6.2. Rhombic Triacontahedron İzometri Grubu 107

7. DİSDYAKİS TRİACONTAHEDRON UZAYI **139**
7.1. Disdyakis Triacontahedron Metriği ve Özellikleri 139
7.2. Disdyakis Triacontahedron İzometri Grubu 151

İÇİNDEKİLER (devam)

8. DUAL KONVEKS ÇOKYÜZLÜLER 201

8.1. Çokyüzlülerde Dualite 201

8.2. Rhombic Dodecahedron 201

8.3. Tetrakis Hexahedron 203

9. SONUÇ VE ÖNERİLER 207

KAYNAKLAR DİZİNİ 208

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil		Sayfa
1.1	Mısır Giza Piramitleri	1
1.2	Pirit kristalleri	3
1.3	Truncated Octahedron'un Leonardo Da Vinci tarafından yapılmış bir çizimi	3
1.4	Luca Pacioli'nin portresi	4
1.5	Bazı dönen yapbozlar	4
3.1	Cuboctahedron	11
3.2	Cuboctahedronun Koordinat Sistemine Yerleştirilmesi	13
3.3	Cuboctahedron uzaklığına göre iki nokta arasındaki yollar	14
3.4	$\mathbb{R}^3_{CO}$ de Yansıma Düzlemlerine Göre Köşe Noktaların Görüntüleri	19
3.5	$\mathbb{R}^3_{CO}$ de Dönme Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri	23
3.6	$\mathbb{R}^3_{CO}$ de σ_O inversiyonu Altında Köşe Noktaların Görüntüleri	23
3.7	$\mathbb{R}^3_{CO}$ de Dönme Yansıma Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri	25
3.8	$\mathbb{R}^3_{CO}$ de Dönme İnversiyon Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri	28
3.9	$\mathbb{R}^3_{CO}$ da Minimum Uzaklık Kümesi	29
3.10	$\mathbb{R}^3_{CO}$ da Birim Küre Ve Minimum Uzaklık Kümesi	30
4.1	Truncated Octahedron	35
4.2	Truncated Octahedronun Koordinat Sistemine Yerleştirilmesi	37
4.3	Truncated Octahedron uzaklığına göre iki nokta arasındaki yollar	38
4.4	$\mathbb{R}^3_{TO}$ de Yansıma Düzlemlerine Göre Köşe Noktaların Görüntüleri	43
4.5	$\mathbb{R}^3_{TO}$ de Dönme Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri	46
4.6	$\mathbb{R}^3_{TO}$ de σ_O İnversiyonu Altında Köşe Noktaların Görüntüleri	47
4.7	$\mathbb{R}^3_{TO}$ de Dönme Yansıma Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri	49
4.8	$\mathbb{R}^3_{TO}$ de Dönme İnversiyon Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri	52
4.9	$\mathbb{R}^3_{TO}$ da Minimum Uzaklık Kümesi	53
4.10	$\mathbb{R}^3_{TO}$ da Birim Küre Ve Minimum Uzaklık Kümesi	54
5.1	İcosidodecahedron	60
5.2	İcosidodecahedronun Koordinat Eksenlerine Yerleştirilmesi	64
5.3	İcosidodecahedron Uzaklığına Göre İki Nokta Arasındaki Yollar	65
5.4	$\mathbb{R}^3_{ID}$ de Yansıma Düzlemlerine Göre Köşe Noktaların Görüntüleri	74
5.5	$\mathbb{R}^3_{ID}$ de Dönme Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri	78
5.6	$\mathbb{R}^3_{ID}$ de Dönme Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri Devamı	79
5.7	$\mathbb{R}^3_{ID}$ de σ_O İnversiyonu Altında Köşe Noktaların Görüntüleri	80

ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)

5.8 $\mathbb{R}^3_{ID}$ de Dönme Yansıma Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri 82
5.9 $\mathbb{R}^3_{ID}$ de Dönme İnversiyon Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri . . . 85
5.10 $\mathbb{R}^3_{ID}$ de Dönme İnversiyon Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri Devamı 86
5.11 $\mathbb{R}^3_{ID}$ da Minimum Uzaklık Kümesi 87
5.12 $\mathbb{R}^3_{TO}$ da Birim Küre Ve Minimum Uzaklık Kümesi 88

6.1 Rhombic Triacontahedron 100
6.2 Rhombic Triacontahedronun Koordinat Sistemine Yerleştirilmesi 103
6.3 Rhombic Triacontahedron Uzaklığına Göre İki Nokta Arasındaki Yollar 104
6.4 $\mathbb{R}^3_{RT}$ de Yansıma Düzlemlerine Göre Köşe Noktaların Görüntüleri 113
6.5 $\mathbb{R}^3_{RT}$ de Dönme Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri 117
6.6 $\mathbb{R}^3_{RT}$ de Dönme Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri Devamı 118
6.7 $\mathbb{R}^3_{RT}$ de σ_O İnversiyonu Altında Köşe Noktaların Görüntüleri 119
6.8 $\mathbb{R}^3_{RT}$ de Dönme Yansıma Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri 121
6.9 $\mathbb{R}^3_{RT}$ de Dönme İnversiyon Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri . . . 124
6.10 $\mathbb{R}^3_{RT}$ de Dönme İnversiyon Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri Devamı 125
6.11 $\mathbb{R}^3_{RT}$ da Minimum Uzaklık Kümesi 126
6.12 $\mathbb{R}^3_{RT}$ da Birim Küre Ve Minimum Uzaklık Kümesi 127

7.1 Disdyakis Triacontahedron 140
7.2 Disdyakis Triacontahedronun Koordinat Sistemine Yerleştirilmesi 145
7.3 Disdyakis Triacontahedron Uzaklığına Göre İki Nokta Arasındaki Yollar 146
7.4 $\mathbb{R}^3_{DT}$ de Yansıma Düzlemlerine Göre Köşe Noktaların Görüntüleri 159
7.5 $\mathbb{R}^3_{DT}$ de Dönme Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri 169
7.6 $\mathbb{R}^3_{DT}$ de Dönme Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri Devamı 170
7.7 $\mathbb{R}^3_{DT}$ de Dönme Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri Devamı 171
7.8 $\mathbb{R}^3_{DT}$ de σ_O İnversiyonu Altında Köşe Noktaların Görüntüleri 172
7.9 $\mathbb{R}^3_{DT}$ de Dönme Yansıma Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri 176
7.10 $\mathbb{R}^3_{DT}$ de Dönme Yansıma Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri Devamı 177
7.11 $\mathbb{R}^3_{DT}$ de Dönme İnversiyon Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri . . . 185
7.12 $\mathbb{R}^3_{DT}$ de Dönme İnversiyon Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri Devamı 186
7.13 $\mathbb{R}^3_{DT}$ de Dönme İnversiyon Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri Devamı 187
7.14 $\mathbb{R}^3_{DT}$ da Minimum Uzaklık Kümesi 188
7.15 $\mathbb{R}^3_{DT}$ da Birim Küre Ve Minimum Uzaklık Kümesi 189

8.1 Rhombic Dodecahedron 201
8.2 Tetrakis Hexahedron 203

1. GİRİŞ

Simetri estetik anlayışının en önemli unsurudur; dolayısıyla doğa bilimleri, sanat, mimari gibi birçok alanda üzerinde çalışılan bir olgu olmuştur. Çokyüzlüler de sahip oldukları simetrik özelliklerden dolayı antik çağlardan beri insanoğlunun ilgisini çekmiştir.

Çokyüzlü, sonlu çoklukta çokgenle sınırlandırılmış bir cisim olarak tanımlanabileceği gibi sonlu çoklukta çokgenlerden oluşan bir yüzey olarak da tanımlanabilir. Çokyüzlüyü oluşturan çokgenlere çokyüzlünün yüzleri, çokgenlerin kenar ve köşelerine ise çokyüzlünün ayrıt ve köşeleri denir. (A.D. Alexandrov, Convex Polyhedra, Springer, 7p.).

Çokyüzlüler üzerine yapılan çalışmaların somut örneklerini bulmak oldukça kolaydır. Mimari alanında en eski örneklerden birine Mısır Giza'da rastlamak mümkündür. Gizemli Giza Piramitleri en antik çokyüzlü formlarından biri olan piramit şeklindedir .(Şekil1.1)

Şekil 1.1 Mısır Giza Piramitleri

Britanya Adaları'nda yapılan arkeolojik kazılarda da çokyüzlülere rastlanmıştır. Bu kazılarda, Platon'dan bin yıl öncesine ait taştan yapılmış beş adet düzgün çokyüzlü bulunmuştur (Bu tarza erişilebilecek çevirim içi adres http://anlamak.com/platon'un-beş-katı-cismi.html).

Çokyüzlüler sahip oldukları özelliklerine göre sınıflandırılmışlardır. Çokyüzlünün bir konveks çokyüzlü olması ayrıca önemli bir özelliktir. Bir konveks çokyüzlü aşağıdaki özellikleri sağlayan, sonlu sayıda düzlemsel çokgenden oluşan bir şekildir;

1) bir çokgenden diğer bir çokgene, çokgenlerin ortak kenarları ya da kenar parçaları boyunca geçiş yapmak mümkündür,

2) şeklin tamamı şekli oluşturan çokgen düzlemlerinin sadece bir tarafındadır.

Konveksliği ikinci koşul tanımlamaktadır. Birinci koşul çokyüzlünün, sadece köşelerde birleşen parçalara ayrılamayacağını hatta parçalarının hiçbirinin bir diğerinden ayrı olmadığını ifade etmektedir. (A.D. Alexandrov, Convex Polyhedra, Springer, 8p.).

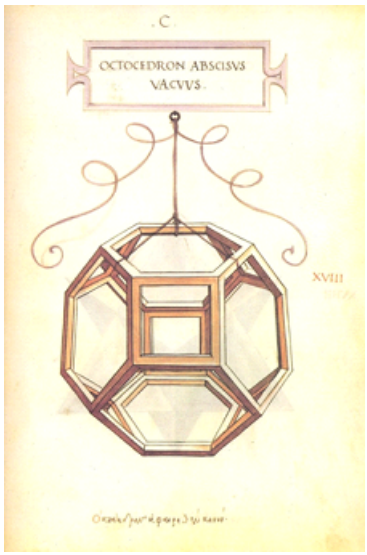
Tüm ayrıt ve yüzleri eş, ayrıca her köşesinde aynı sayıda yüzün kesiştiği çokyüzlülere düzgün çokyüzlüler denilmektedir. Eğer çokyüzlü düzgün değilse düzgün olmayan çokyüzlü olarak isimlendirilirler. Konveks, simetrik çokyüzlüler Platonik cisimler, Arşimed cisimleri ve Katalan cisimleri olarak üç ana grupta incelenebilir. Burada Platonik cisimler düzgün çokyüzlüler, Arşimed ve Katalan cisimler ise düzgün olmayan çokyüzlüler sınıfına girer.

Düzgün çokyüzlü cisimlere rastlayan hemen herkes bunlarla ilgili ilgi çekici birşeyler farkeder. Yunanlıların bu cisimlerle detaylı ve ısrarlı bir şekilde çalışmaları belki de beklenmedik şekilde sonlu sayıda olmalarıyla bağlantılıdır, çünkü limitsiz sayıdaki çokgenin aksine sadece beş tanedirler. Bu cisimler kendilerinden etkilenen Kepler ve Platon'un evrenle ilgili teorilerinde onları kullanmalarını sağlamışlardır. (Peter R. Cromwell, 1997, Cambridge Universıty Press,70-71p.). Düzgün çokyüzlüleri tanıtan en eski eser Platon'un Timaeus adlı eseridir ve herbiri beş elementten birisiyle ilişkilendirilmiştir - küp (altı yüzlü) toprak ile, icosahedron yirmi yüzlü) su ile, octahedron (sekiz yüzlü) hava ile, tetrahedron (dört yüzlü) ateş ile ve dodecahedron (on iki yüzlü) evrenle (ya da eter yani cennetin maddesiyle) ilişkilidir. (Field, J.V., 1997, pp 241-289)

Küp ve piramit gibi cisimlerin çok öncelerden beri bilinen temel şekiller olmalarının yanında dodecahedronun (on iki yüzlü) da antik bir cisim olması oldukça şaşırtıcıdır. Çoğunluk tarafından *aptal altını* olarak bilinen pirit (FeS_2) temel olarak sülfirik asit yapımında kullanılan en yaygın sülfattır ve kristalleri genellikle kübik ya da diğer bir yaygın şekli olan oniki beşgensel yüz biçimindedir (Şekil1.2). Bu beşgenler çok da düzgün değildirler ancak Platonik formu kolaylıkla gözönünde canlandırılabilir. (Peter R. Cromwell, Polyhedra, 1997, Cambridge Universıty Press,71p.)

Şekil 1.2 Pirit kristalleri

Rönesans döneminde Arşimed cisimlerinin tekrar keşfedilmesi ”kayıp” bir eski yazının keşfi şeklinde olmamıştır. Aslında bilindiği kadarıyla Arşimed tarafından kaleme alınmış eski bir yazın yoktur. Arşimed cisimlerinin bu ismi almış olmasının sebebi Pappus’un *Koleksiyon*’ununda Arşimed’in, yüzleri birden fazla düzgün çokgen olan on üç cisim bulduğundan bahsetmesidir. (Field, J.V., pp 241-289). Altın oranın gizemleri, platonik ve arşimed cisimlerinin şekilleri, matematiksel ve geometriksel kuralları Leonardo da Vinci ve Albrecht Dürer gibi önde gelen sanatçıların eserlerinde şifrelenmişlerdi (Şekil1.3 ve Şekil1.4). (Bu tarza erişilebilecek çevirim içi adres https://en.wikipedia.org/wiki/Luca_Pacioli).



Şekil 1.3 Truncated Octahedron’un Leonardo Da Vinci tarafından yapılmış bir çizimi

Şekil 1.4 Luca Pacioli'nin portresi

Arşimed cisimlerinin duallerine **Katalan cisimleri** denir ve Arşimed cisimleri gibi tam olarak on üç tanedir. Bu cisimlere Katalan cismi denilmesinin sebebi, 1865 yılında Belçikalı matematikçi Eugene Catalan tarafından tamamen tanımlanmış olmalarıdır. (Eugène Catalan Mémoire sur la Théorie des Polyèdres. J. l'École Polytechnique (Paris) 41, 1-71, 1865.) Katalan cisimlerini Platonik cisimler ve Arşimed cisimlerinden ayıran temel özellik yüzlerini oluşturan çokgenlerin düzgün çokgen olmamalarıdır, hatta bu çokgenlerin kenar uzunluklarının da aynı olmaları gerekmez. Örneğin Rhombic Triacontahedronun yüzleri aynı eşkenar dörtgenlerden oluşurken Tetrakis Hexahedronun yüzleri aynı ikiz kenar üçgenlerden oluşmaktadır.

Çokyüzlülerle çalışma hala çok ilgi çekici bir konudur. Ayrıca sahip oldukları simetriler rubik kübü benzeri uygulamaların yapılmasına da imkan sağlamaktadır (Şekil1.5). (Bu tarza erişilebilecek çevirim içi adres http://cubemeister.com/polyhedra)

Şekil 1.5 Bazı dönen yapbozlar

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Euler Formülü Ve Çokyüzlülerde Dualite

Bu kısımda herhangi bir konveks çokyüzlüyü matematiksel açıdan daha iyi tanımlayabilmek için, tüm konveks çokyüzlüler için geçerli olan " *Euler Formülü* " verilecektir. Euler formülündeki Euler Karakteristiği konveks olmayan çokyüzlülerde farklı değerler alabilmektedir. Ancak Platonik, Arşimed ve Katalan cisimleri için bu değer 2 dir.Tüm konveks çokyüzlüler için geçerli olan, yüz, ayrıt ve köşe sayıları arasında *Euler Formülü* olarak bilinen bağıntı aşağıdaki teoremde verilmektedir.

Teorem 2.1 *Köşe sayısı K, ayrıt sayısı A, yüz sayısı Y olmak üzere, konveks bir çokyüzlü için*

$$K + Y - A = 2$$

dir.

Duallik ilişkisine sahip iki çokyüzlü karşılaştırıldığında ayrıt sayılarının aynı olduğu, yüz ile köşe sayılarının ise karşılıklı yer değiştirdikleri görülür. (Örneğin, küp ile sekiz yüzlünün oniki olan ayrıt sayıları aynı iken altı ve sekiz olan yüz sayıları ile köşe sayıları karşılıklı olarak yer değiştirmektedir.) Ayrıca aralarında duallik ilişkisi bulunan çokyüzlülerden herhangi birisinin yüzlerinin simetri merkezleri birleştirildiğinde diğer çokyüzlü elde edilir. Aynı işlem yeni oluşan çokyüzlü için de tekrar edilirse birinciye benzer bir çokyüzlü elde edilir (Ermiş, 2014)

2.2 Minkowski Geometrisi Ve Konveks Çokyüzlüler

Minkowski geometrilerini tanıtan ve inceleyen bir çok çalışma vardır. Bunlara (Kaya, 2002), (Özcan ve Kaya, 2003), (Kaya ve Çolakoğlu, 2006), (Krause, 1975), (Martin, 1998), (Millmann and Parker, 1991), (Thompson, 1996) ve (Coxeter, 1961) kaynakları örnek gösterilebilir.

(Thompson, 1996) da ifade edildiği gibi, Minkowski geometrisi, eliptik ve hiperbolik geometriden farklı sonlu boyutlu bir Öklidyen olmayan geometridir. Ayrıca

Space-time Minkowskian geometrisinden de farklıdır. Minkowski geometrisindeki lineer yapı Öklidyen geometrideki ile hemen hemen aynıdır. Noktalar, doğrular ve düzlemler Öklidyen geometrinin noktaları, doğruları ve düzlemleri ile aynı iken açı ölçümü Öklidyen geometri ile aynı yolla yapılmaktadır. Yalnızca bir fark vardır. Bu fark ise uzaklığın tüm yönlerde aynı olmamasıdır. Bu farklılık da alınan metrikle ilgili kavramları değiştirmektedir. Dolayısıyla Minkowski geometrilerinde uzaklıkla ilgili kavramların incelenmesi oldukça ilgi çekici konular ortaya çıkarmaktadır. Örneğin Öklidyen uzaydaki alışılmış kürenin yerine alınan ”yeni birim küre” değişebilen bir genel simetrik konveks kümedir, ve paralellik aksiyomu geçerli olmasına rağmen, Pisagor teoremi ve benzeri birçok teorem geçerli değildir. Bu geometrilere örnek olarak Taksi geometri, Çin Dama geometrisi ve α-geometrisi verilebilir.

2.3 Konveks Cisimler ve Metrikleri

Daha önce yapılan çalışmalarda maksimum, taksi ve çin dama metriklerinin birim küreleri sırasıyla düzgün altı yüzlü, sekiz yüzlü ve bir Katalan cisim olan deltoidal icositetrahedron olduğu görülmektedir. n- boyutlu $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında verilen konveks yapılar için, birim küreleri bu konveks yapılar olan normların varlığı bilinmektedir. Fakat daha önce yapılan çalışmalar incelendiğinde varlığı bilinen bu normların nasıl tanımlı oldukları bilinmemektedir. Bu durumda akla önemli iki soru gelmektedir;

“Birim küreleri belli bazı konveks cisimler olacak şekilde metrikler bulunabilir mi? ”

“Eğer bulunabilirse, bu metrikler analitik olarak nasıl ifade edilirler? ”

Bu metrikler koordinatlar yardımıyla ifade edilebilirse, yeni metriklerle geometriler kolaylıkla inşa edilebilecektir. Bu metrikler sayesinde konveks cisimler için matematiksel formüller verilerek, bu yapılar üzerinde matematik ve diğer bilim dalları açısından daha kolay bir şekilde çalışma imkanı da sağlanır.

2-6. bölümlerde birim küreleri cuboctahedron, truncated octahedron, icosidodecahedron, rhombic triacontahedron ve disdyakis triacontahedron olan uzaklık fonksiyonları tanımlanacak ve bu fonksiyonların metrik oldukları ispatlanacaktır. Bu metrikler sırasıyla d_{CO}, d_{TO}, d_{ID}, d_{RT}, d_{DT} olarak gösterilecektir. Aynı zamanda tezin bundan sonraki kısmında kısalığın hatrına d_{CO} ile donatılmış $\mathbb{R}^3$ uzayı $\mathbb{R}^3_{CO}$, d_{TO} ile donatılmış $\mathbb{R}^3$ uzayı $\mathbb{R}^3_{TO}$, d_{ID} ile donatılmış $\mathbb{R}^3$ uzayı $\mathbb{R}^3_{ID}$, d_{RT} ile donatılmış $\mathbb{R}^3$ uzayı $\mathbb{R}^3_{RT}$, d_{DT} ile donatılmış $\mathbb{R}^3$ uzayı $\mathbb{R}^3_{DT}$ ile gösterilecektir.

$\mathbb{R}^3_{CO}$, $\mathbb{R}^3_{TO}$, $\mathbb{R}^3_{ID}$, $\mathbb{R}^3_{RT}$, $\mathbb{R}^3_{DT}$ uzaylarının noktaları, doğruları ve düzlemleri, 3-boyutlu Öklidyen uzayın noktaları, doğruları ve düzlemleri ile aynıdır. Açı ölçümü de 3-boyutlu Öklid uzayındaki ile aynı yolla yapılır. Yani geometrik yapıları hemen hemen aynıdır. Tek fark iki nokta arasındaki uzaklığı d_E metriği ile ölçmek yerine sırasıyla d_{CO}, d_{TO}, d_{ID}, d_{RT}, d_{DT} metrikleri ile ölçmektir. Ayrıca 2-6. bölümlerde temel geometrik problemlerden olan bir d metriği ile donatılmış S uzayının izometri grubunun bulunması problemi ele alınarak d_{CO}, d_{TO}, d_{ID}, d_{RT}, d_{DT} metrikleri ile donatılmış uzayın izometri grubu bulunacak ve bu grup Gelişgen, Ö. ve Kaya, R., 2009 ve Ermiş, T. ve Kaya, R., 2015 referanslarındaki yöntem kullanılarak ilgili çokyüzlünün Öklidyen simetri grubu ile karşılaştırılacaktır. Buna göre analitik $3-$uzaydaki izometri ve simetri grupları ile ilgili bilgiler hatırlatılarak bu bölüm bitirilecektir. Yani bu metrikler yardımıyla minkowski geometriler inşaa edilecektir.

Bu metrikleri verebilmek için aşağıdaki adımlar takip edilerek bir yöntem geliştirilecek ve bu yöntem metrikleri bulmak için kullanılacaktır.

Adım 1: Cuboctahedron, truncated octahedron, icosidodecahedron, rhombic triacontahedron ve disdyakis triacontahedron için verilecek uzaklık fonksiyonunun en basit şekilde verecek ifadeye sahip olabilmesi için söz konusu çokyüzlü koordinat sistemine en uygun biçimde yerleştirilmelidir. Çünkü bu yerleştirme ve elde edilecek en basit ifade tüm çalışmaları olumlu etkileyecek ve verilen şekillerin sadece sekizde birlik kısmıüzerinde çalışarak tamamı üzerine bir genelleme yapma imkanı da sağlayacaktır.

Adım 2: Koordinat sistemine uygun olarak yerleştirilen çokyüzlünün simetrilerini kolay göstermeli ve köşeleri en basit şekilde vermelidir.

Adım 3: Bu konveks cisimlerin yüzlerini oluşturan çokgenleri içine alan düzlemler, köşe noktaları yardımıyla bulunmalıdır. Bu şekiller koordinat sistemine simetrik olacak şekilde yerleştirildiğinden, yüzey düzlem denklemleri arasında bir ilişki olacaktır. Bu düzlemlerin denklemlerinin genel halleri bulunarak, bu genel halleri içeren kümenin maksimumu alındığında bu cisimler sınırlandırılacaklardır.

2.4 $\mathbb{R}^3$ ün İzometri Grubu

Geometrik çalışmalar genellikle çeşitli uzaylardaki geometrik objelerin dönüşümleri üzerinedir. Bu dönüşümler ile grup yapısı oluşturulabilir. Bu grupların çoğu ise ilgili uzaydaki simetriler veya izometrilerden oluşur. Üzerinde bulunma, arada olma, eş olma, açı ölçümü veya uzaklıklar gibi geometrik özellikleri koruyor olmalarından dolayı izometri

grupları ayrı bir önem teşkil eder(Martin, G.E., 2008). Tezin diğer bölümlerinde değinilecek olan Arşimed ve Katalan Cisimlerin metrikleriyle donatılmış analitik $3-$uzayın izometri grupları, bu cisimlerin simetrilerinden yararlanarak, analitik olarak bulunacak ve alışılmış Öklid metriğine göre olan izometri grubuyla karşılaştırılacaktır.

$\mathbb{P}$ noktalar kümesi, $\mathbb{L}$ doğrular kümesi d herhangi uzaklık fonksiyonu olmak üzere $\mathcal{M} = [\mathbb{P}, \mathbb{L}, d]$ metrik geometrisi verilsin. $f : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$ dönüşümü

$$\forall A, B \in \mathbb{P}, d(A, B) = d(f(A), f(B))$$

özelliğini sağlıyorsa f dönüşümüne **izometri** denir. Yani izometriler uzaklığı koruyan dönüşümlerdir. Grup teoride, izometri grubu, genellikle o uzaydaki matematiksel objelerin simetrilerinden ve öteleme dönüşümlerinden oluşan küme ile temsil edilir. $\mathcal{M}$ metrik geometrisinde bir F şeklinin simetrisi, $f(F) = F$ özelliğini sağlayan $f : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$ izometri dönüşümüdür.

(Martin 2008) kaynağına bağlı kalınarak $\mathbb{R}^3$ deki izometriler aşağıdaki gibi özetlenebilir;

○ $\mathbb{R}^3$ teki bir **dönüşüm**, uzaydaki noktaların kümesinin kendi üzerine birebir bir eşlemesidir.

○ Her l doğrusu için $\alpha(l)$ yine bir doğru olacak şekildeki bir α dönüşümüne **kolinasyon** adı verilir.

○ Her P, Q noktası için $P' = \alpha(P)$ ve $Q' = \alpha(Q)$ olmak üzere $P'Q' = PQ$ ise α dönüşümüne **izometri** adı verilir.

○ **Özdeşlik dönüşümü** her P noktası için $i(P) = P$ biçiminde tanımlanır.

○ Bir α izometrisi bir noktalar kümesini sabit bırakıyorsa, α ya bu noktalar kümesinin bir **simetrisi** denir.

○ Δ bir düzlem olmak üzere, uzaydaki noktaların $\sigma_\triangle$ eşlemesi;

"P, Δ üzerinde ise $\sigma_\triangle(P) = P$ dir.
P, Δ üzerinde değil ise Δ, $\overline{PQ}$ nun orta dikmesi olmak üzere $\sigma_\triangle(P) = Q$ dur."
biçiminde tanımlı ise $\sigma_\triangle$ ya **yansıma** denir.

○ Γ ve Δ düzlemleri bir l doğrusu boyunca kesişiyorlarsa $\sigma_\Gamma\sigma_\Delta$ dönüşümüne l ekseni etrafında **dönme** adı verilir.

○ Γ ve Δ kesişen iki düzlem ve Π bu iki düzleme dik bir düzlem olmak üzere $\sigma_\Pi\sigma_\Gamma\sigma_\Delta$ dönüşümüne Γ, Δ, Π düzlemlerinin ortak noktasına göre **dönme yansıma** denir.

○ M, P ve Q noktalarının orta noktası olmak üzere tüm P noktaları için $\sigma_M(P) = Q$ biçiminde tanımlı σ_M dönüşümüne M noktasına göre **inversiyon** denir. Ayrıca σ_M ye **nokta yansıması** adı da verilir.

○ Γ, Δ kesişen iki düzlem ve M düzlemlerin ortak noktalarından biri olmak üzere $\sigma_M\sigma_\Gamma\sigma_\Delta$ dönüşümüne **dönme inversiyonu** adı verilir.

○ Γ, Δ düzlemleri paralel ise $\sigma_\Gamma\sigma_\Delta$ dönüşümü Γ, Δ düzlemlerinin ortak dik doğruları boyunca bir **ötelemedir**.

$\mathbb{R}^3$ de bu dönüşümlerin oluşturduğu küme, fonksiyonlarda bileşke işlemi ile birlikte izometri grubunu oluşturur.

Dönüşümlerin bir kümesi, herhangi ikisinin çarpımını (kendisi ve kendi tersi ile çarpımı da dahil olmak üzere) ve her birinin tersini de içerirse bir grup oluşturduğu söylenir (Birkoff ve Mac Lane 1, pp.115-118). Farklı dönüşümlerin sayısına grubun mertebesi adı verilir (sonlu ya da sonsuz olabilir). Açıkça herhangi bir şeklin simetri işlemleri bir grup oluşturur. Buna şeklin simetri grubu adı verilir. Uç bir örnek olarak şekil tamamen düzgün olmayan bir şekilse simetri grubunun mertebesi birdir, sadece birim dönüşümden oluşur. (H.S.M. Coxeter, Introduction To Geometry, 1989, John Wiley & Sons Inc., 31 p.)

Octahedral simetri grubu dönme, yansıma (düzleme ve noktaya göre) ve dönme ile yansımanın bileşkesi olan 48 dönüşüm içermektedir. Küp, octahedron ve cuboctahedron çokyüzlüleri octahedral simetriye sahip çokyüzlülerden bazılarıdır. Octahedral grup O_h ile gösterilir ve sahip olduğu dönüşümler aşağıda özetlenmiştir;

○ Birim

○ 90° derecelik 6 dönme

○ 120° derecelik 8 dönme

○ 180° derecelik 9 dönme

○ 90° derecelik 6 dönme yansıma

○ 60° derecelik 8 dönme yansıma

○ 9 yansıma

○ inversiyon

Icosahedral simetri grubu dönme, yansıma (düzleme ve noktaya göre) ve dönme ile yansımanın bileşkesi olan 120 dönüşüm içermektedir. İcosihedron ve dodecahedron icosahedral simetriye sahip çokyüzlülerden bazılarıdır. Icosahedral grup I_h ile gösterilir ve sahip olduğu dönüşümler aşağıda özetlenmiştir;

○ Birim

○ 72° derecelik 12 dönme

○ 144° derecelik 12 dönme

○ 120° derecelik 20 dönme

○ 180° derecelik 15 dönme

○ 108° derecelik 12 dönme yansıma

○ 36° derecelik 12 dönme yansıma

○ 60° derecelik 20 dönme yansıma

○ 15 yansıma

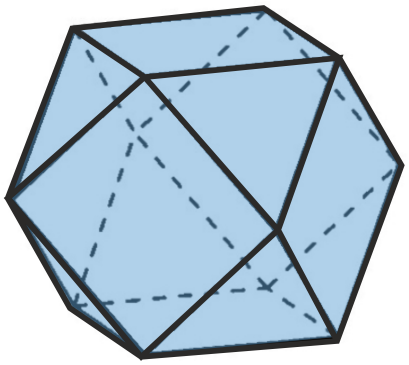
○ inversiyon

Bundan sonraki kısımda sırasıyla birim küreleri çokyüzlüler olan d_{CO}, d_{TO}, d_{ID}, d_{RT}, d_{DT} metrikleri ve bu metrikler ile donatılmış $\mathbb{R}^3$ ün izometri grupları (Gelişgen, Ö. and Kaya, R., 2009) numaralı referansa sadık kalınarak verilecektir.

3. CUBOCTAHEDRON UZAYI

3.1 Cuboctahedron Metriği ve Özellikleri

Cuboctahedron 8 üçgensel ve 6 karesel yüze sahip bir çok yüzlüdür. Her birinde 2 üçgen ve 2 karenin buluştuğu 12 eş köşesi ve her biri bir üçgeni bir kareden ayıran 24 eş kenarı vardır. Bir yarı-düzgün çok yüzlü yani bir Arşimed cismidir. Cuboctahedron birer Platonik cisim olan küp ya da kübün duali olan octahedronun uçları, kenarlarının orta noktalarına kadar kesilerek elde edilir. Ayrıca cuboctahedron 48 tane Öklidyen simetriye sahip olup, simetri grubu O_h ile gösterilir.



Şekil 3.1 Cuboctahedron

Birim küresi Cuboctahedron olan uzaklık fonksiyonu d_{CO} ile gösterilir ve bu uzaklık fonksiyonunun metrik aksiyomlarını sağladığı ve bazı özellikleri (Gelişgen ve Can, 2015) kaynağından verilmektedir.

Tanım 3.1 $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ *ve* $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ $\mathbb{R}^3$ *te iki farklı nokta olsun.*

$$d_{CO}(P_1, P_2) = \max\left\{\frac{1}{2}\left(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|\right), |x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\right\}$$

biçiminde tanımlanan $d_{CO} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to [0, \infty)$ *uzaklık fonksiyonuna cuboctahedron uzaklık fonksiyonu denir.*

Yardımcı Teorem 3.1 *$P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve$P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ $\mathbb{R}^3$ te iki farklı nokta olsun. Bu durumda*

$$\begin{aligned} &d_{CO}(P_1, P_2) \geq \tfrac{1}{2}\left(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|\right), \\ &d_{CO}(P_1, P_2) \geq |x_1 - x_2|, \\ &d_{CO}(P_1, P_2) \geq |y_1 - y_2|, \\ &d_{CO}(P_1, P_2) \geq |z_1 - z_2| \end{aligned}$$

dır.

İspat *İspatı maksimum fonksiyonunun tanımından açıktır.*

Teorem 3.1 *$\mathbb{R}^3$ te d_{CO} uzaklık fonksiyonu metriktir ve bu metrikle donatılmış uzayın birim küresi cuboctahedrondur.*

İspat *$d_{CO} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ cuboctahedron uzaklık fonksiyonu ve $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ ve $P_3 = (x_3, y_3, z_3)$ $\mathbb{R}^3$ te üç farklı nokta olsun. d_{CO} uzaklık fonksiyonu her $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^3$ için aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa $\mathbb{R}^3$ te bir metriktir.*

M1) $d_{CO}(P_1, P_2) \geq 0$ *ve* $d_{CO}(P_1, P_2) = 0 \Leftrightarrow P_1 = P_2$,
M2) $d_{CO}(P_1, P_2) = d_{CO}(P_2, P_1)$,
M3) $d_{CO}(P_1, P_3) \leq d_{CO}(P_1, P_2) + d_{CO}(P_2, P_3)$.

M1) *Mutlak değer her zaman negatif olmayan değerler üreteceğinden dolayı mutlak değerlerin toplamının maksimumu da pozitif veya sıfırdır. Böylece,*

$$d_{CO}(P_1, P_2) = \max \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{2}\left(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|\right), \\ |x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2| \end{array} \right\} \geq 0$$

dır. Yani d_{CO} pozitif tanımlıdır. Eğer

$$\begin{aligned} d_{CO}(P_1, P_2) &= \max \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{2}\left(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|\right), \\ |x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2| \end{array} \right\} = 0 \\ &\Rightarrow |x_1 - x_2| = 0,\ |y_1 - y_2| = 0,\ |z_1 - z_2| = 0 \\ &\Rightarrow x_1 = x_2,\ y_1 = y_2,\ z_1 = z_2 \\ &\Rightarrow P_1 = P_2 \end{aligned}$$

olur. Tersine P_1=P_2 ise $|x_1 - x_2|$=0, $|y_1 - y_2|$=0 ve $|z_1 - z_2|$=0 olacağından $d_{CO}(P_1, P_2)$=0 olur.

M2) *Mutlak değer tanımından $|x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$, $|y_1 - y_2| = |y_2 - y_1|$ ve $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$ dir. Buradan açıkça $d_{CO}(P_1, P_2) = d_{CO}(P_2, P_1)$ dir. Yani, d_{CO} simetriktir.*

M3) *$P_1 = (x_1, y_1, z_1), P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ ve $P_3 = (x_3, y_3, z_3) \in \mathbb{R}^3$ olsun.*

$$d_{CO}(P_1, P_3) \leq d_{CO}(P_1, P_2) + d_{CO}(P_2, P_3)$$

olduğu gösterilmelidir.

$$
\begin{aligned}
& d_{CO}(P_1, P_3) \\
&= \max\left\{\tfrac{1}{2}\left(|x_1 - x_3| + |y_1 - y_3| + |z_1 - z_3|\right), |x_1 - x_3|, |y_1 - y_3|, |z_1 - z_3|\right\} \\
&= \max\left\{\begin{array}{l} \tfrac{1}{2}\left(|x_1 - x_2 + x_2 - x_3| + |y_1 - y_2 + y_2 - y_3| + |z_1 - z_2 + z_2 - z_3|\right), \\ |x_1 - x_2 + x_2 - x_3|, |y_1 - y_2 + y_2 - y_3|, |z_1 - z_2 + z_2 - z_3| \end{array}\right\} \\
&\leq \max\left\{\begin{array}{l} \tfrac{1}{2}\left[\left(|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3|\right) + \left(|y_1 - y_2| + |y_2 - y_3|\right) + \left(|z_1 - z_2| + |z_2 - z_3|\right)\right], \\ |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3|, |y_1 - y_2| + |y_2 - y_3|, |z_1 - z_2| + |z_2 - z_3| \end{array}\right\} \\
&\leq \max\left\{\tfrac{1}{2}\left(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|\right), |x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\right\} + \\
&\qquad \max\left\{\tfrac{1}{2}\left(|x_2 - x_3| + |y_2 - y_3| + |z_2 - z_3|\right), |x_2 - x_3|, |y_2 - y_3|, |z_2 - z_3|\right\} \\
&= I
\end{aligned}
$$

dır. Burada Yardımcı Teorem 2.1 den dolayı

$$d_{CO}(P_1, P_2) \geq \max\left\{\frac{1}{2}\left(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|\right), |x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\right\}$$

$$d_{CO}(P_2, P_3) \geq \max\left\{\frac{1}{2}\left(|x_2 - x_3| + |y_2 - y_3| + |z_2 - z_3|\right), |x_2 - x_3|, |y_2 - y_3|, |z_2 - z_3|\right\}$$

olur. O halde $I \leq d_{CO}(P_1, P_2) + d_{CO}(P_2, P_3)$ *bulunur. Buna göre*

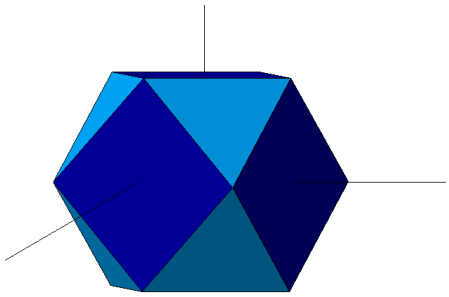
$$d_{CO}(P_1, P_3) \leq d_{CO}(P_1, P_2) + d_{CO}(P_2, P_3)$$

elde edilir. Yani cuboctahedron uzaklık fonksiyonu üçgen eşitsizliğini sağlar.

Sonuç olarak cuboctahedron uzaklık fonksiyonu metriktir. Ayrıca bu metrikle donatılmış analitik $3-$*uzayda orijinden* 1 *birim cuboctahedron uzaklığındaki noktaların kümesi*

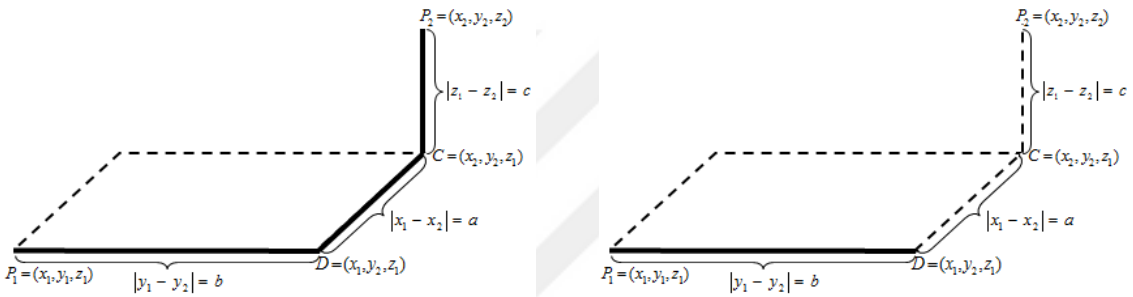
$$S_{CO} = \left\{(x, y, z) : d_{CO}(X, 0) = \max\left\{\tfrac{1}{2}\left(|x| + |y| + |z|\right), |x|, |y|, |z|\right\} = 1\right\}$$

olup bu noktaların geometrik yeri Şekil3.2 de görüldüğü gibi cuboctahedron bulunur.



Şekil 3.2 Cuboctahedronun Koordinat Sistemine Yerleştirilmesi

Cuboctahedron uzaklık fonksiyonuna göre P_1 ve P_2 noktaları arasındaki uzaklık ya apsisler, ya ordinatlar ya da kotlar farkının mutlak değerlerinin birisidir ya da üçünün toplamının yarısıdır. Buna göre geometrik olarak P_1 ve P_2 noktaları arasında iki farklı yol vardır. Eğer P_1P_2 doğru parçası P_1 odaklı ve dayanak eğrisi köşe noktaları $\left(\pm 1, \pm\frac{1}{2}, 0\right)$ noktalarının herbir bileşeninin tüm muhtemel permütasyonları olan kare tabanlı konilerin dışında ise P_1 ile P_2 arasındaki yol her biri bir koordinat eksenine paralel olan üç doğru parçasının birleşimidir. Aksi taktirde P_1 ve P_2 arasındaki yol bir koordinat eksenine paralel olan bir doğru parçasıdır. Böylece P_1 ve P_2 noktaları arasındaki cuboctahedron uzaklığı ya üç doğru parçasının Öklidyen uzunluklarının toplamının yarısıdır ya da bir doğru parçasının Öklidyen uzunluğudur. (Bakınız Şekil3.3)



Şekil 3.3 Cuboctahedron uzaklığına göre iki nokta arasındaki yollar

Sonuç 3.1 $\mathbb{R}^3_{CO}$ *de* (x_0, y_0, z_0) *merkezli ve* r *yarıçaplı küre*

$$\max\left\{\frac{1}{2}\left(|x|+|y|+|z|\right), |x|, |y|, |z|\right\} = r$$

denklemi ile ifade edilen , köşe noktaları $(r, r, 0)$ *noktalarının her bir bileşeninin tüm muhtemel* $+/-$ *işaret değişiklikleri ve üç bileşenin tüm muhtemel permütasyonlarının* (x_0, y_0, z_0) *kadar ötelenmişinden oluşan* $14-$*yüzlü bir çokyüzlü olan cuboctahedrondur.*

Bu bölümün diğer kısımlarında sıkça kullanılacağından dolayı merkezil birim kürenin köşe noktaları aşağıdaki şekilde isimlendirilmiştir;

$V_1 = (1,0,1)$, $V_2 = (1,0,-1)$, $V_3 = (-1,0,1)$, $V_4 = (-1,0,-1)$, $V_5 = (1,1,0)$, $V_6 = (1,-1,0)$, $V_7 = (-1,1,0)$, $V_8 = (-1,-1,0)$, $V_9 = (0,1,1)$, $V_{10} = (0,1,-1)$, $V_{11} = (0,-1,1)$, $V_{12} = (0,-1,-1)$.

Bir sonraki teoremde d_{CO} metriğinin iyi bilinen bazı uzaklık fonksiyonlarının genel hali olan d_m metriği ile ilişkisi verilecektir. Ancak teoremin öncesinde d_m metriğinin tanımı Çolakoğlu ve Kaya 2011 kaynağından hatırlatılsın.

Tanım 3.2 *$P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ üç boyutlu uzayda iki nokta, u, v ve m de $u \geq v \geq 0 \neq u$ özelliğindeki reel sayılar olsun. Buna göre, $p_1 = |(x_1 - x_2) + m(y_1 - y_2)|$, $p_2 = |m(x_1 - x_2) - (y_1 - y_2)|$, $p_3 = |z_1 - z_2|$ için $\Delta_{P_1P_2} = \max\{p_1, p_2, p_3\}$ ve $\delta_{P_1P_2} = \min\{p_1 + p_2, p_1 + p_3, p_2 + p_3\}$ olmak üzere*

$$d_m(P_1, P_2) = (u\Delta_{P_1P_2} + v\delta_{P_1P_2}) / \sqrt{1 + m^2}$$

eşitliği ile tanımlanan $d_m : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to [0, \infty)$ fonksiyonuna $m-uzaklık\ fonksiyonu$ denir.

Teorem 3.2 *$P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ $\mathbb{R}^3$ de herhangi iki nokta olsun. $m = v = 0$ ve*

$$u = \frac{\max\left\{\frac{1}{2}(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|), |x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\right\}}{\max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\}}$$

ise $d_m(P_1, P_2) = d_{CO}(P_1, P_2)$ dir.

İspat *u, v ve m için verilen değerler d_m metriğinde yerine yazılırsa istenen eşitliğin sağlandığı kolaylıkla görülebilir.*

Aşağıdaki önerme $\mathbb{R}^3$ deki noktalar arasındaki Öklidyen ve cuboctahedron uzaklıkları arasındaki geçiş bağıntısını vermektedir.

Yardımcı Teorem 3.2 *$P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ verilsin P_1 ve P_2 noktalarından geçen doğru l ve l nin doğrultu vektörü (p, q, r) ve*

$$\mu(P_1P_2) = \frac{\max\left\{\frac{1}{2}(|p| + |q| + |r|), |p|, |q|, |r|\right\}}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$$

ise

$$d_{CO}(P_1, P_2) = \mu(P_1P_2)\, d_E(P_1, P_2)$$

dir.

İspat $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ *verilsin* P_1 *ve* P_2 *noktalarından geçen doğru* l *ve* l *nin doğrultu vektörü* (p, q, r) *ise* $\lambda \in \mathbb{R}$ *olmak üzere*

$$\frac{x_2 - x_1}{p} = \frac{y_2 - y_1}{q} = \frac{z_2 - z_1}{r} = \lambda$$

yazılabilir. Buradan $x_2 - x_1 = \lambda p$, $y_2 - y_1 = \lambda q$, $z_2 - z_1 = \lambda r$ *elde edilir. Böylece*

$$d_{CO}\left(P_1, P_2\right) = \lambda \max\left\{\frac{1}{2}\left(|p| + |q| + |r|\right), |p|, |q|, |r|\right\}$$

ve

$$d_E(P_1, P_2) = \lambda\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$$

bulunur.

$$\frac{d_{CO}\left(P_1, P_2\right)}{d_E(P_1, P_2)} = \frac{\lambda \max\left\{\frac{1}{2}\left(|p| + |q| + |r|\right), |p|, |q|, |r|\right\}}{\lambda\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$$

olup

$$\mu\left(P_1 P_2\right) = \frac{\max\left\{\frac{1}{2}\left(|p| + |q| + |r|\right), |p|, |q|, |r|\right\}}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$$

denilirse

$$d_{CO}\left(P_1, P_2\right) = \mu\left(P_1 P_2\right) d_E\left(P_1, P_2\right)$$

elde edilir.

Yukarıdaki yardımcı teorem herhangi bir doğru boyunca herhangi P_1 ve P_2 noktaları arasındaki d_{CO}-uzaklığının, aynı doğru boyunca P_1 ve P_2 noktaları arasındaki Öklidyen uzaklığın pozitif katı olduğu gösterir. Buna göre aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Sonuç 3.2 $\mathbb{R}^3$ *de* P_1, P_2, X *doğrudaş, üç farklı nokta ise*

$$d_E(P_1, X) = d_E(P_2, X) \iff d_{CO}(P_1, X) = d_{CO}(P_2, X)$$

dir.

Sonuç 3.3 *3 boyutlu uzayda* P_1, P_2, X *doğrudaş, üç farklı nokta ise*

$$\frac{d_E(X, P_1)}{d_E(X, P_2)} = \frac{d_{CO}(X, P_1)}{d_{CO}(X, P_2)}$$

olur. Yani bir doğru boyunca olan d_E, d_{CO} *uzaklıklarının oranı aynıdır.*

3.2 Cuboctahedron İzometri Grubu

Bu bölümde d_{CO} metriği ile donatılmış analitik $3-$uzayın ($\mathbb{R}^3_{CO}$) izometri grubu araştırılacaktır. d_{CO} uzaklığını koruyan izometrileri tespit etmek için önce hangi Öklidyen izometrilerin cuboctahedron uzaklığını koruduğu araştırılacaktır. Daha sonra da, bu izometriler dışında izometrilerin olmadığı gösterilecektir.

$\alpha : \mathbb{R}^3_{CO} \to \mathbb{R}^3_{CO}$ dönüşüm olmak üzere her $X, Y \in \mathbb{R}^3_{CO}$ için

$$d_{CO}(X,Y) = d_{CO}(\alpha(X), \alpha(Y))$$

ise α dönüşümü $\mathbb{R}^3_{CO}$ da bir izometridir.

Aşağıda ifade edilen önermeler ile hangi Öklidyen izometrilerin cuboctahedron uzayında da izometri oldukları gösterilmektedir.

Önerme 3.1 *$\mathbb{R}^3$ de her Öklidyen öteleme $\mathbb{R}^3_{CO}$ un bir izometrisidir.*

İspat *$A = (a_1, a_2, a_3)$, $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere $T_A : \mathbb{R}^3_{CO} \to \mathbb{R}^3_{CO}$, $T_A(X) = A + X$ olacak şekilde reel uzayda bir öteleme olsun. $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ için*

$$\begin{aligned}
&d_{CO}(T_A(P_1), T_A(P_2)) \\
&\quad = \max \left\{ \begin{array}{r} \frac{1}{2}\left(|a_1+x_1 - a_1 - x_2| + |a_2+y_1 - a_2 - y_2| + |a_3+z_1 - a_3 - z_2|\right), \\ |a_1+x_1 - a_1 - x_2|, |a_2+y_1 - a_2 - y_2|, |a_3+z_1 - a_3 - z_2| \end{array} \right\} \\
&\quad = \max \left\{ \tfrac{1}{2}\left(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|\right), |x_1 - x_2|, |y_1 - y_2| \, |z_1 - z_2| \right\} \\
&\quad = d_{CO}(P_1, P_2)
\end{aligned}$$

dir. Bundan dolayı T_A bir izometridir.

Yukarıdaki önermeden dolayı $\mathbb{R}^3_{CO}$ uzayında dönme ve yansımaları bulmak için orijinden geçen düzlemleri düşünmek yeterli olacaktır.

Önerme 3.2 *$\mathbb{R}^3_{CO}$ de $\Delta : ax + by + cz = 0$ düzlemine göre yansımanın izometri olması için gerek ve yeter koşul düzlemin doğrultu vektörü (a, b, c) nin*

$$D = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,0), (-1,1,0), (1,0,1), (1,0,-1), (0,1,1), (0,1,-1)\}$$

elemanlarına paralel olmasıdır.

İspat $\Delta : ax + by + cz = 0$ *birim normali* (a, b, c) *olan düzlem olmak üzere* $\sigma_\Delta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *Öklidyen yansıma*

$$\sigma_\Delta(x, y, z) = \Big((1 - 2a^2)x - 2aby - 2acz, -2abx + (1 - 2b^2)y - 2bcz, -2acx - 2bcy + (1 - 2c^2)z \Big)$$

biçiminde tanımlanır.

$V_1 = (1, 0, 1)$, $V_5 = (1, 1, 0)$, $V_9 = (0, 1, 1)$ $\mathbb{R}^3$ *ün bir tabanı olduğundan ve bu taban vektörlerini koruyan bir yansıma izometri olacağından bu tabanı koruyan yansımaları araştırmak izometrileri bulmak için yeterli olacaktır.*

$$\begin{aligned}
\sigma_\Delta(V_1) &= \sigma_\Delta(1, 0, 1) = (1 - 2a^2 - 2ac, -2ab - 2bc, -2ac + 1 - 2c^2) \\
\sigma_\Delta(V_5) &= \sigma_\Delta(1, 1, 0) = (1 - 2a^2 - 2ab, -2ab + 1 - 2b^2, -2ac - 2bc) \\
\sigma_\Delta(V_9) &= \sigma_\Delta(0, 1, 1) = (-2ab - 2ac, 1 - 2b^2 - 2bc, 1 - 2bc - 2c^2)
\end{aligned}$$

dir. Açıkça

$$d_{CO}(O, V_1) = d_{CO}(O, V_5) = d_{CO}(O, V_9) = 1$$

dir. Eğer yansıma d_{CO} *uzaklığını koruyor ise taban vektörlerinin yansıma altındaki görüntüleri için uzaklık korunmalıdır. Böylece*

$$d_{CO}(\sigma_\Delta(O), \sigma_\Delta(V_1)) = d_{CO}(\sigma_\Delta(O), \sigma_\Delta(V_5)) = d_{CO}(\sigma_\Delta(O), \sigma_\Delta(V_9)) = 1$$

yani

$$\begin{aligned}
d_{CO}(\sigma_\Delta(O), \sigma_\Delta(V_1)) &= \max \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}\left(|1 - 2a^2 - 2ac| + |-2ab - 2bc| + |-2ac + 1 - 2c^2|\right), \\ |1 - 2a^2 - 2ac|, |-2ab - 2bc|, |-2ac + 1 - 2c^2| \end{array} \right\} = 1 \\
d_{CO}(\sigma_\Delta(O), \sigma_\Delta(V_5)) &= \max \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}\left(|1 - 2a^2 - 2ab| + |-2ab + 1 - 2b^2| + |-2ac - 2bc|\right), \\ |1 - 2a^2 - 2ab|, |-2ab + 1 - 2b^2|, |-2ac - 2bc| \end{array} \right\} = 1 \\
d_{CO}(\sigma_\Delta(O), \sigma_\Delta(V_9)) &= \max \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}\left(|-2ab - 2ac| + |1 - 2b^2 - 2bc| + |1 - 2bc - 2c^2|\right), \\ |-2ab - 2ac|, |1 - 2b^2 - 2bc|, |1 - 2bc - 2c^2| \end{array} \right\} = 1
\end{aligned}$$

olmalıdır. Bu denklem sistemi çözülürse;

$$\begin{aligned}
&(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}), \\
&(1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}), (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), (0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})
\end{aligned}$$

çözümleri elde edilir.

Tersine $\sigma_\Delta(X) = Y$ *iken* OX *ve* OY *vektörlerinin doğrultu vektörleri sırasıyla* (p_1, q_1, r_1) *ve* (p_2, q_2, r_2) *ise Yardımcı Teorem 2.2 den dolayı* $d_{CO}(O, X) = d_{CO}(O, Y)$ *olması için* $\mu(OX) = \mu(OY)$ *olduğunu göstermek yeterlidir. Böylece aşağıdaki liste* (p_2, q_2, r_2)

doğrultusunun ilgili yansımaya göre (p_1, q_1, r_1) *cinsinden karşılığını vermektedir ;*

Δ	(p_2, q_2, r_2)
$x = 0$	$(-p_1, q_1, r_1)$
$y = 0$	$(p_1, -q_1, r_1)$
$z = 0$	$(p_1, q_1, -r_1)$
$x + y = 0$	$(-q_1, -p_1, r_1)$
$x - y = 0$	(q_1, p_1, r_1)
$x + z = 0$	$(-r_1, q_1, -p_1)$
$x - z = 0$	(r_1, q_1, p_1)
$y + z = 0$	$(p_1, -r_1, -q_1)$
$y - z = 0$	(p_1, r_1, q_1)

Böylelikle $\mu(OX) = \mu(OY)$ *olduğu kolaylıkla görülebilir.*

Sonuç 3.4 *Orijinden geçen düzlemlere göre izometrik yansımalarının kümesi* S_{CO} *aşağıda denklemleri verilen 9 tane Öklidyen yansımadan oluşur.*

$$\{x = 0, y = 0, z = 0, x + y = 0, x - y = 0, x + z = 0, x - z = 0, y + z = 0, y - z = 0\}$$

Şekil3.4 deki tabloda cuboctahedron birim küresinin köşe noktalarının yansımalar sonucu dönüştüğü noktalar verilmiştir.

Yansıma Düzlemleri / Noktalar	x=0	y=0	z=0	x+y=0	x+z=0	y+z=0	x-y=0	x-z=0	y-z=0
V_1	V_3	V_1	V_2	V_{11}	V_4	V_6	V_9	V_1	V_5
V_2	V_4	V_2	V_1	V_{12}	V_2	V_5	V_{10}	V_3	V_6
V_3	V_1	V_3	V_4	V_9	V_3	V_8	V_{11}	V_2	V_7
V_4	V_2	V_4	V_3	V_{10}	V_1	V_7	V_{12}	V_4	V_8
V_5	V_7	V_6	V_5	V_8	V_{10}	V_2	V_5	V_9	V_1
V_6	V_8	V_5	V_6	V_6	V_{12}	V_1	V_7	V_{11}	V_2
V_7	V_5	V_8	V_7	V_7	V_9	V_4	V_6	V_{10}	V_3
V_8	V_6	V_7	V_8	V_5	V_{11}	V_3	V_8	V_{12}	V_4
V_9	V_9	V_{11}	V_{10}	V_3	V_7	V_{12}	V_1	V_5	V_9
V_{10}	V_{10}	V_{12}	V_9	V_4	V_5	V_{10}	V_2	V_7	V_{11}
V_{11}	V_{11}	V_9	V_{12}	V_1	V_8	V_{11}	V_3	V_6	V_{10}
V_{12}	V_{12}	V_{10}	V_{11}	V_2	V_6	V_9	V_4	V_8	V_{12}

Şekil 3.4 $\mathbb{R}^3_{CO}$ de Yansıma Düzlemlerine Göre Köşe Noktaların Görüntüleri

Önerme 3.3 *Orijinden geçen bir l doğrusuna göre bir r_θ dönmesinin izometri olması için gerek ve yeter koşul*

$$\begin{aligned}
D_1 &= \{(1,0,0)\,,\ (0,1,0)\,,\ (0,0,1)\}\\
D_2 &= \{(1,1,1)\,,\ (-1,1,1)\,,(1,-1,1)\,,\ (1,1,-1)\}\\
D_3 &= \{(1,1,0)\,,\ (1,0,1)\,,(0,1,1)\,,\ (1,-1,0)\,,\ (1,0,-1)\,,\ (0,1,-1)\}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
R_1 &= \{r_\theta \mid \theta \in \{\pi/2, \pi, 3\pi/2\}\text{, dönme ekseninin yön vektörü } D_1 \text{ in elemanı}\}\\
R_2 &= \{r_\theta \mid \theta \in \{2\pi/3, 4\pi/3\}\text{, dönme ekseninin yön vektörü } D_2 \text{ nin elemanı}\}\\
R_2 &= \{r_\theta \mid \theta = \pi\text{, dönme ekseninin yön vektörü } D_3 \text{ ün elemanı}\}
\end{aligned}$$

olmak üzere $r_\theta \in R_{CO} = R_1 \cup R_2 \cup R_3$ olmasıdır.

İspat *Birim doğrultu vektörü (p,q,r) olan bir l doğrusu etrafında r_θ şeklinde ifade edilen Öklidyen dönmenin matris biçimi*

$$\begin{bmatrix}
\cos\theta + p^2(1-\cos\theta) & pq(1-\cos\theta) - r\sin\theta & pr(1-\cos\theta) + q\sin\theta\\
pq(1-\cos\theta) + r\sin\theta & \cos\theta + q^2(1-\cos\theta) & qr(1-\cos\theta) - p\sin\theta\\
pr(1-\cos\theta) - q\sin\theta & qr(1-\cos\theta) + p\sin\theta & \cos\theta - r^2(1-\cos\theta)
\end{bmatrix}$$

şeklindedir. l eksenindeki bir dönme , l doğrusu boyunca kesişen iki düzlemin yansımalarının birleşimi olduğundan Önerme 2.2 den dolayı l doğrusunun doğrultu vektörleri olarak $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(1,1,1)$, $(-1,1,1)$, $(1,-1,1)$, $(1,1,-1)$, $(1,1,0)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$, $(1,-1,0)$, $(1,0,-1)$, $(0,1,-1)$ alınabilir.

$\mathbb{R}^3_{CO}$ daki izometrik dönmelerin bulunması için, d_{CO} birim küresinin kenarlarının uzunluklarını koruyan dönmelerin tespit edilmesi yeterlidir.

d_{CO} birim küresinin $V_1 = (1,0,1)$, $V_5 = (1,1,0)$, $V_9 = (0,1,1)$ köşe noktalarını ele alalım. Buna göre,

$$\begin{aligned}
r_\theta(V_1) &= \begin{pmatrix}
\cos\theta + p^2(1-\cos\theta) + pr(1-\cos\theta) + q\sin\theta,\\
pq(1-\cos\theta) + r\sin\theta + qr(1-\cos\theta) - p\sin\theta,\\
pr(1-\cos\theta) - q\sin\theta + \cos\theta - r^2(1-\cos\theta)
\end{pmatrix}\\
r_\theta(V_5) &= \begin{pmatrix}
\cos\theta + p^2(1-\cos\theta) + pq(1-\cos\theta) - r\sin\theta,\\
pq(1-\cos\theta) + r\sin\theta + \cos\theta + q^2(1-\cos\theta),\\
pr(1-\cos\theta) - q\sin\theta + qr(1-\cos\theta) + p\sin\theta
\end{pmatrix}\\
r_\theta(V_9) &= \begin{pmatrix}
pq(1-\cos\theta) - r\sin\theta + pr(1-\cos\theta) + q\sin\theta,\\
\cos\theta + q(1-\cos\theta) + qr(1-\cos\theta) - p\sin\theta,\\
qr(1-\cos\theta) + p\sin\theta + \cos\theta + r(1-\cos\theta)
\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

bulunur. Açıkça $d_{co}(V_1,\ V_5) = d_{co}(V_1,\ V_9) = d_{co}(V_5,\ V_9) = 1$ *dir. O halde* $\theta \neq 0$ *olmak üzere* r_θ *nın* d_{CO} *uzaklığını koruması için*

$$d_{CO}(r_\theta(V_1), r_\theta(V_5)) = d_{CO}(r_\theta(V_1), r_\theta(V_9)) = d_{CO}(r_\theta(V_5), r_\theta(V_9)) = 1$$

olmalıdır. Buna göre

$$\begin{aligned} x_1 &= |(pr - pq)\,(1 - \cos\theta) + (q{+}r)\sin\theta| \quad , \quad y_1 = |(qr - q^2)\,(1 - \cos\theta) - \cos\theta - p\sin\theta| \\ x_2 &= |(p^2 - pq)\,(1 - \cos\theta) + \cos\theta{+}r\sin\theta| \quad , \quad y_2 = |(pq - q^2)\,(1 - \cos\theta) - \cos\theta{+}r\sin\theta| \\ x_3 &= |(p^2 - pr)\,(1 - \cos\theta) + \cos\theta{+}q\sin\theta| \quad , \quad y_3 = |(pq - qr)\,(1 - \cos\theta) + (p + r)\sin\theta| \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} z_1 &= |(r^2 - qr)\,(1 - \cos\theta) + \cos\theta + p\sin\theta| \\ z_2 &= |(pr - qr)\,(1 - \cos\theta) - (p + q)\sin\theta| \\ z_3 &= |(pr - r^2)\,(1 - \cos\theta) - \cos\theta - q\sin\theta| \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} d_{CO}(r_\theta(V_1), r_\theta(V_5)) &= \max\left\{\frac{1}{2}\,(x_1 + y_1 + z_1)\,, x_1, y_1, z_1\right\} = 1, \\ d_{CO}(r_\theta(V_1), r_\theta(V_9)) &= \max\left\{\frac{1}{2}\,(x_2 + y_2 + z_2)\,, x_2, y_2, z_2\right\} = 1, \\ d_{CO}(r_\theta(V_5), r_\theta(V_9)) &= \max\left\{\frac{1}{2}\,(x_3 + y_3 + z_3)\,, x_3, y_3, z_3\right\} = 1 \end{aligned}$$

denklemleri elde edilir.

l doğrusunun yön vektörü $(1, 0, 0)$ *ise* $(p, q, r) = (1, 0, 0)$ *olur.* p, q, r *değerleri* $d_{CO}(r_\theta(V_1), r_\theta(V_5)) = d_{CO}(r_\theta(V_1), r_\theta(V_9)) = d_{CO}(r_\theta(V_5), r_\theta(V_9)) = 1$ *denklemlerinde yerine yazılırsa;*

$$\begin{aligned} &\max(\tfrac{1}{2}\,(|\sin\theta + \cos\theta| + |\cos\theta - \sin\theta|)\,, |\sin\theta + \cos\theta|, |\cos\theta - \sin\theta|) = 1 \\ &\max(\tfrac{1}{2}\,(1 + |\cos\theta| + |\sin\theta|)\,, 1, |\cos\theta|, |\sin\theta|) = 1 \\ &\max(\tfrac{1}{2}\,(1 + |\sin\theta| + |\cos\theta|)\,, 1, |\sin\theta|, |\cos\theta|) = 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen bu denklem sistemi çözülürse $\theta = \pi/2$, $\theta = \pi$, $\theta = 3\pi/2$ *sonuçları elde edilir. Buradan,* x *ekseni etrafındaki* $\theta = \pi/2$, π, $3\pi/2$ *radyanlık dönmeler* $\mathbb{R}^3_{CO}$ *un bir izometrisidir. Benzer şekilde, eğer l nin yön vektörü* $(0, 1, 0)$ *veya* $(0, 0, 1)$ *ise* $\theta = \pi/2$, π, $3\pi/2$ *olur.*

l doğrusunun yön vektörü $(1, 1, 1)$ *ise* $(p, q, r) = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ *olur.* p, q, r *değerleri* $d_{CO}(r_\theta(V_1), r_\theta(V_5)) = d_{CO}(r_\theta(V_1), r_\theta(V_9)) = d_{CO}(r_\theta(V_5), r_\theta(V_9)) = 1$ *de yerine*

yazılırsa,

$$\max\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{2}\left(\left|\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right|+\left|\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right|+\left|\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right|\right),\\ \left|\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right|,\left|\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right|,\left|\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right|\end{array}\right\}=1$$

$$\max\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{2}\left(\left|\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right|+\left|-\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right|+\left|\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right|\right),\\ \left|\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right|,\left|-\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right|,\left|\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right|\end{array}\right\}=1$$

$$\max\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{2}\left(\left|\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right|+\left|\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right|+\left|\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right|\right),\\ \left|\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right|,\left|\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right|,\left|\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right|\end{array}\right\}=1$$

denklemleri bulunur. Bu denklem sistemi çözülürse $\theta = 2\pi/3$, $\theta = 4\pi/3$ *olur. Buradan, l etrafındaki* $\theta = 2\pi/3$, $4\pi/3$ *radyanlık dönmeler* $\mathbb{R}^3_{CO}$ *un bir izometrisidir. Benzer şekilde, eğer l nin yön vektörü* $(-1,1,1)$, $(1,1,-1)$ *veya* $(1,-1,1)$ *ise* $\theta = 2\pi/3$, $4\pi/3$ *olur.*

l doğrusunun yön vektörü $(1,1,0)$ *ise* $(p,q,r) = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ *olur.* p,q,r *değerleri* $d_{CO}(r_\theta(V_1), r_\theta(V_5)) = d_{CO}(r_\theta(V_1), r_\theta(V_9)) = d_{CO}(r_\theta(V_5), r_\theta(V_9)) = 1$ *ifadelerinde yerine yazılırsa,*

$$\max\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{2}\left(\left|\frac{\cos\theta-1+\sqrt{2}\sin\theta}{2}\right|+\left|\frac{1+\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta}{2}\right|+\left|\frac{-\sqrt{2}\sin\theta}{2}\right|\right)+\cos\theta|,\\ \left|\frac{\cos\theta-1+\sqrt{2}\sin\theta}{2}\right|,\left|\frac{1+\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta}{2}\right|,\left|\frac{-\sqrt{2}\sin\theta}{2}+\cos\theta\right|\end{array}\right\}=1$$

$$\max\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{2}\left(|\cos\theta|+|\cos\theta|+|\sqrt{2}\sin\theta|\right),\\ |\cos\theta|,|\sqrt{2}\sin\theta|\end{array}\right\}=1$$

$$\max\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{2}\left(\left|\frac{\cos\theta+1-\sqrt{2}\sin\theta}{2}\right|+\left|\frac{1-\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta}{2}\right|+\left|\frac{\sqrt{2}\sin\theta}{2}\right|\right)+\cos\theta|,\\ \left|\frac{\cos\theta+1-\sqrt{2}\sin\theta}{2}\right|,\left|\frac{1-\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta}{2}\right|,\left|\frac{\sqrt{2}\sin\theta}{2}+\cos\theta\right|\end{array}\right\}=1$$

denklemlerine ulaşılır. Bu denklemler çözülürse $\theta = \pi$ *olur.Buradan, l etrafındaki* $\theta = \pi$ *radyanlık dönme* $\mathbb{R}^3_{CO}$ *ün bir izometrisidir. Benzer şekilde, eğer l nin yön vektörü* $(1,0,1)$, $(0,1,1)$, $(1,-1,0)$, $(1,0,-1)$ *ya da* $(0,1,-1)$ *ise* $\theta = \pi$ *olur.*

Tersine $r_\theta(X) = Y$ *olacak şekildeki* X *ve* Y *noktalarıyla oluşturulan* OX *ve* OY *doğrularının doğrultuları sırasıyla* (p_1,q_1,r_1) *ve* (p_2,q_2,r_2) *olmak üzere* $d_{CO}(O,X) = d_{CO}(O,Y)$ *olduğunu göstermek için Yardımcı Teorem 2.2 den* $\mu(OX) = \mu(OY)$ *olduğu gösterilmelidir. Bu ise* (p_1,q_1,r_1) *vektörünün tüm durumlar için görüntüleri bulunarak kolaylıkla gösterilebilir. Örneğin dönme ekseninin doğrultu vektörü* $(1,0,0)$ *olmak üzere bu eksende* $\theta = \pi/2$ *radyanlık dönme dönüşümü yapılınca* $(p_2,q_2,r_2) = (p_1,-r_1,q_1)$ *bulunur. Buradan da açıkça* $\mu(OX) = \mu(OY)$ *olduğu görülür. Benzer şekilde diğer dönme eksenleri ve dönme açıları için eşitlik gösterilebilir. Bu da ispatı tamamlar.*

Sonuç 3.5 *Orijinden geçen doğrulara göre izometrik dönmelerin* R_{CO} *kümesi tam olarak 23 Öklidyen dönme içerir.*

Cuboctahedron birim küresinin köşe noktalarının dönme hareketleri sonucunda hangi noktalara dönüştükleri Şekil3.5 deki tabloda özetlenmiştir;

Dönme Ekseni doğrultu vektörleri	Açılar	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8	V_9	V_{10}	V_{11}	V_{12}
(1,0,0)	$\theta = \pi/2$	V_6	V_5	V_8	V_7	V_1	V_2	V_3	V_4	V_{11}	V_9	V_{12}	V_{10}
	$\theta = \pi$	V_2	V_1	V_4	V_3	V_6	V_5	V_8	V_7	V_{12}	V_{11}	V_{10}	V_9
	$\theta = 3\pi/2$	V_5	V_6	V_7	V_8	V_2	V_1	V_4	V_3	V_{10}	V_{12}	V_9	V_{11}
(0,1,0)	$\theta = \pi/2$	V_2	V_4	V_1	V_3	V_{10}	V_{12}	V_9	V_{11}	V_5	V_7	V_6	V_8
	$\theta = \pi$	V_4	V_3	V_2	V_1	V_7	V_8	V_5	V_6	V_{10}	V_9	V_{12}	V_{11}
	$\theta = 3\pi/2$	V_3	V_1	V_4	V_2	V_9	V_{11}	V_{10}	V_{12}	V_7	V_5	V_8	V_6
(0,0,1)	$\theta = \pi/2$	V_9	V_{10}	V_{11}	V_{12}	V_7	V_5	V_8	V_6	V_3	V_4	V_1	V_2
	$\theta = \pi$	V_3	V_4	V_1	V_2	V_8	V_7	V_6	V_5	V_{11}	V_{12}	V_9	V_{10}
	$\theta = 3\pi/2$	V_{11}	V_{12}	V_9	V_{10}	V_6	V_8	V_5	V_7	V_1	V_2	V_3	V_4
(1,1,0)	$\theta = \pi$	V_{10}	V_9	V_{12}	V_{11}	V_5	V_7	V_6	V_8	V_2	V_1	V_4	V_3
(1,0,1)	$\theta = \pi$	V_1	V_3	V_2	V_4	V_{11}	V_9	V_{12}	V_{10}	V_6	V_8	V_5	V_7
(0,1,1)	$\theta = \pi$	V_7	V_8	V_5	V_6	V_3	V_4	V_1	V_2	V_9	V_{11}	V_{10}	V_{12}
(1,-1,0)	$\theta = \pi$	V_{12}	V_{11}	V_{10}	V_9	V_8	V_6	V_7	V_5	V_4	V_3	V_2	V_1
(1,0,-1)	$\theta = \pi$	V_4	V_2	V_3	V_1	V_{12}	V_{10}	V_{11}	V_9	V_8	V_6	V_7	V_5
(0,1,-1)	$\theta = \pi$	V_8	V_7	V_6	V_5	V_4	V_3	V_2	V_1	V_{12}	V_{10}	V_{11}	V_9
(1,1,1)	$\theta = 2\pi/3$	V_5	V_7	V_6	V_8	V_9	V_{10}	V_{11}	V_{12}	V_1	V_3	V_2	V_4
	$\theta = 4\pi/3$	V_9	V_{11}	V_{10}	V_{12}	V_1	V_3	V_2	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8
(-1,1,1)	$\theta = 2\pi/3$	V_{10}	V_{12}	V_9	V_{11}	V_4	V_2	V_3	V_1	V_7	V_8	V_5	V_6
	$\theta = 4\pi/3$	V_8	V_6	V_7	V_5	V_{11}	V_{12}	V_9	V_{10}	V_3	V_1	V_4	V_2
(1,-1,1)	$\theta = 2\pi/3$	V_{11}	V_9	V_{12}	V_{10}	V_3	V_1	V_4	V_2	V_8	V_7	V_6	V_5
	$\theta = 4\pi/3$	V_6	V_8	V_5	V_7	V_{12}	V_{11}	V_{10}	V_9	V_2	V_4	V_1	V_3
(1,1,-1)	$\theta = 2\pi/3$	V_{12}	V_{10}	V_{11}	V_9	V_2	V_4	V_1	V_3	V_6	V_5	V_8	V_7
	$\theta = 4\pi/3$	V_7	V_5	V_8	V_6	V_{10}	V_9	V_{12}	V_{11}	V_4	V_2	V_3	V_1

Şekil 3.5 $\mathbb{R}^3_{CO}$ de Dönme Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri

Yardımcı Teorem 3.3 *(x, y, z) noktasını $(-x, -y, -z)$ noktasına eşleyen dönüşüm olan orijine göre σ_0 inversiyonu (noktaya göre yansıma) $\mathbb{R}^3_{CO}$ un bir izometrisidir.*

Şekil3.6 daki tabloda cuboctahedron birim küresinin köşe noktalarının inversiyon hareketi sonrası görüntüleri verilmiştir.

İnversiyon Altında Nokta Görüntüleri	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8	V_9	V_{10}	V_{11}	V_{12}
$O = (0,0,0)$ σ_0	V_4	V_3	V_2	V_1	V_8	V_7	V_6	V_5	V_{12}	V_{11}	V_{10}	V_9

Şekil 3.6 $\mathbb{R}^3_{CO}$ de σ_O inversiyonu Altında Köşe Noktaların Görüntüleri

Önerme 3.4 *d_{CO} uzaklığını invaryant bırakan orijine göre altı tane dönme yansıması vardır.*

İspat *$r_\theta \in R_{CO}$, Γ ve Δ düzlemleri Π düzlemine dik olmak üzere dönme-yansıma ρ : $\sigma_\Pi \sigma_\Delta \sigma_\Gamma = \sigma_\Pi r_\theta$ şeklinde ifade edilir. O halde dönme ekseni yansıma düzlemine dik olmak zorundadır. Bu nedenle Önerme 2.3 deki dönme eksenlerinden 9 tanesi incelenmelidir. Çünkü D_2 de verilen dönme eksenlerinin hiçbiri Önerme 2.2 de verilen yansıma düzlemlerine dik değildir.*

Eğer Π, $x = 0$ düzlemi ise r_θ nın birim vektörü $(1, 0, 0)$ dır ve

$$\rho : \sigma_\Pi r_\theta(x, y, z) = (-x, ycos\theta - zsin\theta, ysin\theta + zcos\theta)$$

dır. $V_1 = (1, 0, 1)$, $V_5 = (1, 1, 0)$, $V_{11} = (0, -1, 1)$ ve $V_6 = (1, -1, 0)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\rho(V_1) &= \rho(1, 0, 1) = (-1, -\sin\theta, \cos\theta) \\
\rho(V_5) &= \rho(1, 1, 0) = (-1, \cos\theta, \sin\theta) \\
\rho(V_{11}) &= \rho(0, -1, 1) = (0, -\cos\theta - \sin\theta, -\sin\theta + \cos\theta) \\
\rho(V_6) &= \rho(1, -1, 0) = (-1, -\cos\theta, -\sin\theta)
\end{aligned}$$

ve $d_{CO}(V_1, V_5) = 1$, $d_{CO}(V_{11}, V_6) = 1$ dir. Dolayısıyla ρ uzaklığı korumak zorunda olduğundan

$$\begin{aligned}
d_{CO}(\rho(V_1), \rho(V_5)) &= \max \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{2}\left(|\cos\theta + \sin\theta| + |-\sin\theta + \cos\theta|\right), \\ |\cos\theta + \sin\theta|, |-\sin\theta + \cos\theta| \end{array} \right\} = 1 \\
d_{CO}(\rho(V_{11}), \rho(V_6)) &= \max \left\{ \frac{1}{2}\left(1 + |\sin\theta| + |\cos\theta|\right), |\sin\theta|, |\cos\theta|, 1 \right\} = 1
\end{aligned}$$

olur. Bu denklem sistemi çözülürse $\theta = \pi/2$, π, $3\pi/2$ elde edilir. Burada elde edilen sonuçlardan kolaylıkla, $\sigma_\Pi r_\pi = \sigma_0$ olduğu gösterilebilir. O halde $x = 0$ düzlemine göre 2 tane dönme yansıma elde edilir. Benzer şekilde Π için $y = 0$ ve $z = 0$ düzlemleri kullanılırsa $\theta = \pi/2$, π, $3\pi/2$ için 2 şer tane dönme yansıma elde edilir. Yani bu üç düzlem için toplam 6 tane dönme yansıma vardır.

Eğer Π için $x + y = 0$ düzlemi alınırsa r_θ dönme ekseninin birim vektörü $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ dır ve

$$\rho : \sigma_\Pi r_\theta(x, y, z) = \left(\begin{array}{c} (\frac{\cos\theta - 1}{2})x - (\frac{1+\cos\theta}{2})y + (\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}})z, \\ (\frac{-\cos\theta - 1}{2})x + (\frac{\cos\theta - 1}{2})y - (\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}})z, \\ (-\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}})x + (\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}})y + \cos\theta z \end{array} \right)$$

olur. $V_1 = (1, 0, 1)$, $V_5 = (1, 1, 0)$, $V_{11} = (0, -1, 1)$ ve $V_6 = (1, -1, 0)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\rho(V_1) &= \rho(1, 0, 1) = (\tfrac{-1+\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta}{2}, \tfrac{-\cos\theta-1-\sqrt{2}\sin\theta}{2}, \tfrac{-\sin\theta}{\sqrt{2}} + \cos\theta) \\
\rho(V_5) &= \rho(1, 1, 0) = (-1, -1, 0) \\
\rho(V_{11}) &= \rho(0, -1, 1) = (\tfrac{1+\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta}{2}, \tfrac{1-\cos\theta-\sqrt{2}\sin\theta}{2}, \tfrac{-\sin\theta}{\sqrt{2}} + \cos\theta) \\
\rho(V_6) &= \rho(1, -1, 0) = (\cos\theta, -\cos\theta, -\sqrt{2}\sin\theta)
\end{aligned}$$

ve $d_{CO}(V_1, V_5) = 1$, $d_{CO}(V_{11}, V_6) = 1$ *dir. Dolayısıyla* ρ *uzaklığı korumak zorunda olduğundan*

$$d_{CO}(\rho(V_1), \rho(V_5)) = \max \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{2}\left(\left| \frac{1+\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta}{2} \right| + \left| \frac{1-\cos\theta-\sqrt{2}\sin\theta}{2} \right| + \left| \frac{-\sin\theta}{\sqrt{2}} + \cos\theta \right| \right), \\ \left| \frac{1+\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta}{2} \right|, \left| \frac{1-\cos\theta-\sqrt{2}\sin\theta}{2} \right|, \left| \frac{-\sin\theta}{\sqrt{2}} + \cos\theta \right| \end{array} \right\} = 1$$

$$d_{CO}(\rho(V_{11}), \rho(V_6)) = \max \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{2}\left(\left| \frac{1-\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta}{2} \right| + \left| \frac{1+\cos\theta-\sqrt{2}\sin\theta}{2} \right| + \left| \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} + \cos\theta \right| \right), \\ \left| \frac{1-\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta}{2} \right|, \left| \frac{1+\cos\theta-\sqrt{2}\sin\theta}{2} \right|, \left| \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} + \cos\theta \right| \end{array} \right\} = 1$$

denklem sistemi ortaya çıkar. Bu denklem sistemi çözülürse $\theta = \pi$ *bulunur. Burada elde edilen sonuca göre* $\sigma_\Pi r_\theta = \sigma_0$ *dönüşümü* $O = (0,0,0)$ *a göre bir inversiyon olduğundan bu durumda yeni bir dönme yansıma yoktur. Benzer şekilde* Π , $x - y = 0$, $x + z = 0$, $x - z = 0$, $y + z = 0$, $y - z = 0$ *düzlemlerinden herhangi biri ise dönme eksenlerinin doğrultuları sırasıyla* $(1,-1,0)$, $(1,0,1)$, $(1,0,-1)$, $(0,1,1)$, $(0,1,-1)$ *olup bu durumların her birinde* $\theta = \pi$ *sonucuna ulaşılır. Bu sonuç ise orijine göre inversiyon olduğundan bu durumların hiçbirinde bir dönme yansıma yoktur.*

Şekil3.7 deki tabloda cuboctahedron birim küresinin köşe noktalarının dönme yansıma sonucu görüntüleri verilmiştir.

Yansıma Düzlemi Normali Olan Dönme Ekseni Doğrultu Vektörleri	Açılar	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8	V_9	V_{10}	V_{11}	V_{12}
(1,0,0)	$\theta = \pi/2$	V_8	V_7	V_6	V_5	V_3	V_4	V_1	V_2	V_{11}	V_9	V_{12}	V_{10}
	$\theta = \pi$	V_4	V_3	V_2	V_1	V_8	V_7	V_6	V_5	V_{12}	V_{11}	V_{10}	V_9
	$\theta = 3\pi/2$	V_7	V_8	V_5	V_6	V_4	V_3	V_2	V_1	V_{10}	V_{12}	V_9	V_{11}
(0,1,0)	$\theta = \pi/2$	V_2	V_4	V_1	V_3	V_{12}	V_{10}	V_{11}	V_9	V_6	V_8	V_5	V_7
	$\theta = \pi$	V_4	V_3	V_2	V_1	V_8	V_7	V_6	V_5	V_{12}	V_{11}	V_{10}	V_9
	$\theta = 3\pi/2$	V_3	V_1	V_4	V_2	V_{11}	V_9	V_{12}	V_{10}	V_8	V_6	V_7	V_5
(0,0,1)	$\theta = \pi/2$	V_{10}	V_9	V_{12}	V_{11}	V_7	V_5	V_8	V_6	V_4	V_3	V_2	V_1
	$\theta = \pi$	V_4	V_3	V_2	V_1	V_8	V_7	V_6	V_5	V_{12}	V_{11}	V_{10}	V_9
	$\theta = 3\pi/2$	V_{12}	V_{11}	V_{10}	V_9	V_6	V_8	V_5	V_7	V_2	V_1	V_4	V_3
(1,1,0)	$\theta = \pi$	V_4	V_3	V_2	V_1	V_8	V_7	V_6	V_5	V_{12}	V_{11}	V_{10}	V_9
(1,0,1)	$\theta = \pi$	V_4	V_3	V_2	V_1	V_8	V_7	V_6	V_5	V_{12}	V_{11}	V_{10}	V_9
(0,1,1)	$\theta = \pi$	V_4	V_3	V_2	V_1	V_8	V_7	V_6	V_5	V_{12}	V_{11}	V_{10}	V_9
(1,-1,0)	$\theta = \pi$	V_4	V_3	V_2	V_1	V_8	V_7	V_6	V_5	V_{12}	V_{11}	V_{10}	V_9
(1,0,-1)	$\theta = \pi$	V_4	V_3	V_2	V_1	V_8	V_7	V_6	V_5	V_{12}	V_{11}	V_{10}	V_9
(0,1,-1)	$\theta = \pi$	V_4	V_3	V_2	V_1	V_8	V_7	V_6	V_5	V_{12}	V_{11}	V_{10}	V_9

Şekil 3.7 $\mathbb{R}^3_{CO}$ de Dönme Yansıma Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri

Önerme 3.5 d_{CO} *uzaklığını değişmez bırakan orijine göre sekiz tane dönme inversiyon vardır.*

İspat *Bir dönme inversiyon $r_\theta \in R_{CO}$ olmak üzere $\rho : \sigma_O\sigma_\Delta\sigma_\Gamma = \sigma_O r_\theta$ şeklinde ifade edilir. Buna göre Önerme 2.3 deki dönme eksenleri için 13 durum göz önüne alınmalıdır. r_θ, x ekseni etrafında dönme olarak tanımlanırsa, r_θ nın birim vektörü $(1,0,0)$ olur ve*

$$\rho : \sigma_O r_\theta(x,y,z) = (-x, -y\cos\theta + z\sin\theta, -y\sin\theta - z\cos\theta)$$

dır. $V_1 = (1,0,1)$, $V_5 = (1,1,0)$, $V_9 = (0,1,1)$ ve $V_7 = (-1,1,0)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\rho(V_1) &= \rho(1,0,0) = (-1, \sin\theta, -\cos\theta)\\
\rho(V_5) &= \rho(1,1,0) = (-1, -\cos\theta, -\sin\theta)\\
\rho(V_9) &= \rho(0,1,1) = (0, \sin\theta - \cos\theta, -\cos\theta - \sin\theta)\\
\rho(V_7) &= \rho(-1,1,0) = (1, -\cos\theta, -\sin\theta)
\end{aligned}$$

ve $d_{CO}(V_1,V_5) = 1$ ve $d_{CO}(V_9,V_7) = 1$ dir. Dolayısıyla ρ uzaklığı korumak zorunda olduğundan

$$\begin{aligned}
d_{CO}(\rho(V_1),\rho(V_5)) &= \max\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{2}\left(|\cos\theta + \sin\theta| + |\sin\theta - \cos\theta|\right),\\ |\cos\theta + \sin\theta|, |\sin\theta - \cos\theta|\end{array}\right\} = 1\\
d_{CO}(\rho(V_9),\rho(V_7)) &= \max\left\{\tfrac{1}{2}\left(1 + |\sin\theta| + |\cos\theta|\right), |1|, |\sin\theta|, |\cos\theta|\right\} = 1
\end{aligned}$$

denklemleri bulunur. Bu denklemler çözülürse $\theta = \pi/2$, π, $3\pi/2$ sonuçları elde edilir. Burada $\sigma_0 r_\theta$ bir dönme yansıması veya yansıma olduğundan bu durumda yeni bir dönme inversiyonu yoktur. Benzer şekilde y ve z eksenleri etrafındaki dönmeler için de yeni bir dönme inversiyonu yoktur.

r_θ, doğrultu vektörü $(1,1,0)$ olan l doğrusu etrafındaki dönme ise r_θ nın birim vektörü $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ olur ve

$$\rho : \sigma_O r_\theta(x,y,z) = \begin{pmatrix} (\frac{-\cos\theta-1}{2})x + (\frac{\cos\theta-1}{2})y - (\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}})z,\\ (\frac{\cos\theta-1}{2})x + (\frac{-1-\cos\theta}{2})y + (\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}})z,\\ (\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}})x - (\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}})y - z\cos\theta \end{pmatrix}$$

dir. $V_1 = (1,0,1)$, $V_5 = (1,1,0)$, $V_{10} = (0,1,-1)$ ve $V_2 = (1,0,-1)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\rho(V_1) &= \rho(1,0,0) = \left(\tfrac{-\cos\theta-1-\sqrt{2}\sin\theta}{2}, \tfrac{-1+\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta}{2}, \tfrac{\sin\theta}{\sqrt{2}} - \cos\theta\right)\\
\rho(V_5) &= \rho(1,1,0) = (-1,-1,0)\\
\rho(V_{10}) &= \rho(0,1,-1) = \left(\tfrac{\cos\theta-1+\sqrt{2}\sin\theta}{2}, \tfrac{-1-\cos\theta-\sqrt{2}\sin\theta}{2}, \tfrac{-\sin\theta}{\sqrt{2}} + \cos\theta\right)\\
\rho(V_2) &= \rho(1,0,-1) = \left(\tfrac{-\cos\theta-1+\sqrt{2}\sin\theta}{2}, \tfrac{-1+\cos\theta-\sqrt{2}\sin\theta}{2}, \tfrac{\sin\theta}{\sqrt{2}} + \cos\theta\right)
\end{aligned}$$

ve $d_{CO}(V_1,V_5) = 1$ ve $d_{CO}(V_{10},V_2) = 1$ dir. Dolayısıylaρ uzaklığı koruyacağından

$$\begin{aligned}
d_{CO}(\rho(V_1),\rho(V_5)) &= \max\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{2}\left(\left|\frac{1-\cos\theta-\sqrt{2}\sin\theta}{2}\right| + \left|\frac{1+\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta}{2}\right| + \left|\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} - \cos\theta\right|\right),\\ \left|\frac{1-\cos\theta-\sqrt{2}\sin\theta}{2}\right|, \left|\frac{1+\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta}{2}\right|, \left|\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} - \cos\theta\right|\end{array}\right\} = 1\\
d_{CO}(\rho(V_{10}),\rho(V_2)) &= \max\left\{\tfrac{1}{2}\left(\left|\sqrt{2}\sin\theta\right| + |\cos\theta| + |\cos\theta|\right), |\cos\theta|, \left|\sqrt{2}\sin\theta\right|\right\} = 1
\end{aligned}$$

denklemleri ortaya çıkar. Bu denklem sistemi çözülürse $\theta = \pi$ *bulunur. Buradan* $\rho = \sigma_O r_\theta$ *bir dönme yansıması veya yansıma olduğundan yeni bir dönme inversiyonu yoktur. Benzer şekilde* r_θ, $(1,-1,0)$, $(1,0,1)$, $(1,0,-1)$, $(0,1,1)$, $(0,1,-1)$ *e paralel dönme eksenlerinden herhangi birisi ise yine yeni bir dönme inversiyonu yoktur.*

r_θ *doğrultu vektörü* $(1,1,1)$ *olan* l *doğrusu etrafındaki dönme ise* r_θ *nın birim vektörü* $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ *olur ve*

$$\rho : \sigma_O r_\theta(x,y,z) = \begin{pmatrix} (\frac{-2\cos\theta-1}{3})x + (\frac{\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta-1}{3})y + (\frac{\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta-1}{3})z, \\ \left(\frac{\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta-1}{3}\right)x + \left(\frac{-1-2\cos\theta}{3}\right)y + \left(\frac{\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta-1}{3}\right)z, \\ \left(\frac{\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta-1}{3}\right)x + \left(\frac{\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta-1}{3}\right)y + \left(\frac{-1-2\cos\theta}{3}\right)z \end{pmatrix}$$

dir. $V_1 = (1,1,0)$, $V_{10} = (0,1,-1)$, $V_6 = (1,-1,0)$ *ve* $V_{11} = (0,-1,1)$*olmak üzere*

$$\begin{aligned} \rho(V_1) &= \rho(1,1,0) = \left(\tfrac{-\cos\theta-2-\sqrt{3}\sin\theta}{3}, \tfrac{-2-\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta}{3}, \tfrac{-2+2\cos\theta}{3}\right) \\ \rho(V_{10}) &= \rho(0,1,-1) = \left(\tfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta, -\cos\theta - \tfrac{\sin\theta}{\sqrt{3}}, \cos\theta - \tfrac{\sin\theta}{\sqrt{3}}\right) \\ \rho(V_6) &= \rho(1,-1,0) = \left(-\cos\theta - \tfrac{\sin\theta}{\sqrt{3}}, \cos\theta - \tfrac{\sin\theta}{\sqrt{3}}, \tfrac{\sin\theta}{\sqrt{3}}\right) \\ \rho(V_{11}) &= \rho(0,-1,1) = \left(\tfrac{-2}{\sqrt{3}}\sin\theta, \cos\theta + \tfrac{\sin\theta}{\sqrt{3}}, -\cos\theta + \tfrac{\sin\theta}{\sqrt{3}}\right) \end{aligned}$$

olup ρ *uzaklığı koruyacağından*

$$\begin{aligned} d_{CO}(\rho(V_1), \rho(V_{10})) &= \max \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{2}\left(\left|\frac{2+\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}{3}\right| + \left|\frac{-2+2\cos\theta}{3}\right| + \left|\frac{-\cos\theta-2+\sqrt{3}\sin\theta}{3}\right|\right), \\ \left|\frac{2+\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}{3}\right|, \left|\frac{-2+2\cos\theta}{3}\right|, \left|\frac{-\cos\theta-2+\sqrt{3}\sin\theta}{3}\right| \end{array} \right\} = 1 \\ d_{CO}(\rho(V_6), \rho(V_{11})) &= \max \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{2}\left(\left|-\cos\theta+\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}\right| + \left|\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta\right| + \left|\cos\theta+\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}\right|\right), \\ \left|-\cos\theta+\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}\right|, \left|\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta\right|, \left|\cos\theta+\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}\right| \end{array} \right\} = 1 \end{aligned}$$

denklem sistemi bulunur. Bu denklem sistemi çözülürse $\theta = 2\pi/3$, $4\pi/3$ *sonuçlarına ulaşılır. Bu durumda* $(1,1,1)$ *doğrultu vektörü olan* l *doğrusu etrafındaki dönme kullanılarak 2 tane dönme inversiyonu elde edilir. Benzer şekilde* $(-1,1,1)$, $(1,-1,1)$, $(1,1,-1)$ *doğrultulu eksenler etrafındaki dönmeler kullanılarak herbiri için iki yeni dönme inversiyon elde edilir. Buradan* d_{CO} *uzaklığını koruyan tam olarak sekiz dönme inversiyonu vardır.*

Şekil3.8 deki tabloda cuboctahedron birim küresinin köşe noktalarının dönme inversiyon sonucu görüntüleri verilmiştir.

Dönme Ekseni Doğrultu Vektörleri	Açılar	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8	V_9	V_{10}	V_{11}	V_{12}
(1,0,0)	$\theta = \pi/2$	V_7	V_8	V_5	V_6	V_4	V_3	V_2	V_1	V_{10}	V_{12}	V_9	V_{11}
	$\theta = \pi$	V_3	V_4	V_1	V_2	V_7	V_8	V_5	V_6	V_9	V_{10}	V_{11}	V_{12}
	$\theta = 3\pi/2$	V_8	V_7	V_6	V_5	V_3	V_4	V_1	V_2	V_{11}	V_9	V_{12}	V_{10}
(0,1,0)	$\theta = \pi/2$	V_3	V_1	V_4	V_2	V_{11}	V_9	V_{12}	V_{10}	V_8	V_6	V_7	V_5
	$\theta = \pi$	V_1	V_2	V_3	V_4	V_6	V_5	V_8	V_7	V_{11}	V_{12}	V_9	V_{10}
	$\theta = 3\pi/2$	V_2	V_4	V_1	V_3	V_{12}	V_{10}	V_{11}	V_9	V_6	V_8	V_5	V_7
(0,0,1)	$\theta = \pi/2$	V_{12}	V_{11}	V_{10}	V_9	V_6	V_8	V_5	V_7	V_2	V_1	V_4	V_3
	$\theta = \pi$	V_2	V_1	V_4	V_3	V_5	V_6	V_7	V_8	V_{10}	V_9	V_{12}	V_{11}
	$\theta = 3\pi/2$	V_{10}	V_9	V_{12}	V_{11}	V_7	V_5	V_8	V_6	V_4	V_3	V_2	V_1
(1,1,1)	$\theta = 2\pi/3$	V_8	V_6	V_7	V_5	V_{12}	V_{11}	V_{10}	V_9	V_4	V_2	V_3	V_1
	$\theta = 4\pi/3$	V_{12}	V_{10}	V_{11}	V_9	V_4	V_2	V_3	V_1	V_8	V_7	V_6	V_5
(-1,1,1)	$\theta = 2\pi/3$	V_{11}	V_9	V_{12}	V_{10}	V_1	V_3	V_2	V_4	V_6	V_5	V_8	V_7
	$\theta = 4\pi/3$	V_5	V_7	V_6	V_8	V_{10}	V_9	V_{12}	V_{11}	V_2	V_4	V_1	V_3
(1,-1,1)	$\theta = 2\pi/3$	V_{10}	V_{12}	V_9	V_{11}	V_2	V_4	V_1	V_3	V_5	V_6	V_7	V_8
	$\theta = 4\pi/3$	V_7	V_5	V_8	V_6	V_9	V_{10}	V_{11}	V_{12}	V_3	V_1	V_4	V_2
(1,1,-1)	$\theta = 2\pi/3$	V_9	V_{11}	V_{10}	V_{12}	V_3	V_1	V_4	V_2	V_7	V_8	V_5	V_6
	$\theta = 4\pi/3$	V_6	V_8	V_5	V_7	V_{11}	V_{12}	V_9	V_{10}	V_1	V_3	V_2	V_4
(1,1,0)	$\theta = \pi$	V_{11}	V_{12}	V_9	V_{10}	V_8	V_6	V_7	V_5	V_3	V_4	V_1	V_2
(1,0,1)	$\theta = \pi$	V_4	V_2	V_3	V_1	V_{10}	V_{12}	V_9	V_{11}	V_7	V_5	V_8	V_6
(0,1,1)	$\theta = \pi$	V_6	V_5	V_8	V_7	V_2	V_1	V_4	V_3	V_{12}	V_{10}	V_{11}	V_9
(1,-1,0)	$\theta = \pi$	V_9	V_{10}	V_{11}	V_{12}	V_5	V_7	V_6	V_8	V_1	V_2	V_3	V_4
(1,0,-1)	$\theta = \pi$	V_1	V_3	V_2	V_4	V_9	V_{11}	V_{10}	V_{12}	V_5	V_7	V_6	V_8
(0,1,-1)	$\theta = \pi$	V_5	V_6	V_7	V_8	V_1	V_2	V_3	V_4	V_9	V_{11}	V_{10}	V_{12}

Şekil 3.8 $\mathbb{R}^3_{CO}$ de Dönme İnversiyon Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri

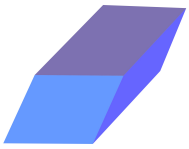
Buraya kadar olan kısımda Öklidyen $3-$uzayın izometrilerinden hangilerinin d_{CO} metriğini koruduğu bulunmuştur. Daha açıkça Öklidyen $3-$uzayın izometrilerinden dokuz yansıma, yirmi dört dönme, altı dönme-yansıma, sekiz dönme-inversiyon ve bir inversiyonun d_{CO} metriğini koruduğu gösterilmiştir. Bu tespit edilen dönüşümler cuboctahedronun Öklidyen simetri grubu olan O_h (octahedral grup) dönüşümleridir. Bu gruba cuboctahedron grup denilsin ve $G(CO)$ ile gösterilsin. Açıkça $G(CO)$, O_h grubuna izomorftur. Bundan sonra bu dönüşümlerden başka d_{CO} metriğini koruyan izometrinin olmadığı gösterilecektir. Yani $\mathbb{R}^3_{CO}$ un tüm izometrilerinin $T(3).G(CO)$ olduğu gösterilecektir.

Tanım 3.3 *$A = (a_1, a_2, a_3)$ ve $B = (b_1, b_2, b_3)$ $\mathbb{R}^3_{CO}$ uzayında farklı iki nokta olsun. Bu takdirde*

$$\{X \mid d_{CO}(A, X) + d_{CO}(B, X) = d_{CO}(A, B)\}$$

kümesine A, B noktalarının minimum uzaklık kümesi denir ve $[AB]$ ile gösterilir.

Genel olarak, $[AB]$ kümesi AB köşegenli bir paralelyüz oluşturur (Şekil3.9).



Şekil 3.9 $\mathbb{R}^3_{CO}$ da Minimum Uzaklık Kümesi

Buradaki minimum uzaklık kümesi $-x+y+z=0$, $-x-y+z=0$, $-x+y-z=0$ düzlemleri ve bunlara paralel düzlemlerin sınırladığı paralelyüzdür.

Önerme 3.6 *$\phi : \mathbb{R}^3_{CO} \to \mathbb{R}^3_{CO}$ bir izometri ve $[AB]$ paralelyüz olsun. O halde*

$$\phi([AB]) = [\phi(A)\phi(B)]$$

olur.

İspat *$Y \in \phi([AB])$ olsun.*

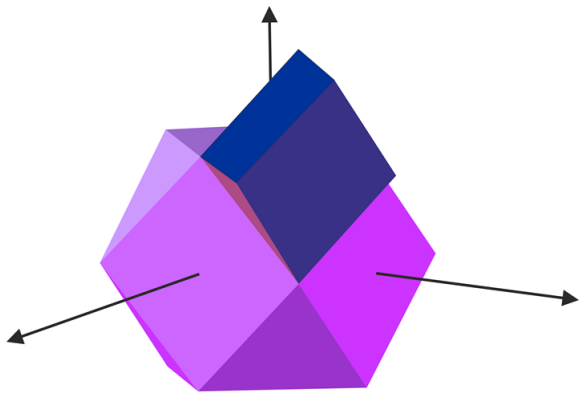
$$\begin{aligned} Y \in \phi([AB]) &\iff \exists X \in [AB] \ni Y = \phi(X) \\ &\iff d_{CO}(A,X) + d_{CO}(B,X) = d_{CO}(A,B) \\ &\iff d_{CO}(\phi(A),\phi(X)) + d_{CO}(\phi(B),\phi(X)) = d_{CO}(\phi(A),\phi(B)) \\ &\iff Y = \phi(X) \in [\phi(A)\phi(B)]\,. \end{aligned}$$

Sonuç 3.6 *$\phi : \mathbb{R}^3_{CO} \to \mathbb{R}^3_{CO}$ bir izometri ve $[AB]$ paralelyüz olsun. Bu durumda ϕ, $[AB]$ nin köşelerini köşelere dönüştürür ve kenar uzunluklarını korur.*

Önerme 3.7 *$f : \mathbb{R}^3_{CO} \to \mathbb{R}^3_{CO}$ dönüşümü $f(O) = O$ olacak şekilde bir izometri olsun. Bu taktirde $f \in G(CO)$ olur.*

İspat *$O = (0,0,0)$ ve $D = (2,2,2)$ olmak üzere $[OD]$ paralelyüzünü gözönüne alalım. Bu paralelyüzün köşe noktalarından üçü $V_1 = (1,0,1)$, $V_5 = (1,1,0)$, $V_9 = (0,1,1)$ olup bu noktalar aynı zamanda merkezil birim cuboctahedron küresinin köşe noktalarıdır. Dahası bu*

üç nokta cuboctahedronun her biri aynı eşkenar üçgen olan bir yüzünün köşe noktalarıdır (Bakınız Şekil3.10).



Şekil 3.10 $\mathbb{R}^3_{CO}$ da Birim Küre Ve Minimum Uzaklık Kümesi

f izometrisi $[OD]$ paralelyüzününün köşe noktalarını köşe noktalara dönüştürüp, kenar uzaklıklarını korduğundan ve $f(O) = O$ olduğundan dolayı V_1, V_5 ve V_9 noktalarını cuboctahedronun yine bir yüzünün köşe noktalarına dönüştürür. Ayrıca bu dönüştürme işlemi gerçekleşirken kenar uzunlukları korunacağından dolayı $i, j, k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ için $f(V_1) = V_i$, $f(V_5) = V_j$, $f(V_9) = V_k$ olmak üzere V_iV_j, V_iV_k, V_jV_k cuboctahedronun üç kenarıdır. Açıkça ifade edilirse f izometrisi, cuboctahedronun bir yüzünün köşe noktalarını yine bir yüzünün köşe noktalarına dönüştürür. O halde cuboctahedron 8 tane eşkenar üçgen yüze sahip olduğundan bir yüzün dönüşebileceği 8 yüz ihtimali vardır. Ayrıca kenar uzunlukları korunmak zorunda olduğundan V_1, V_5 ve V_9 noktalarının dönüşebileceği cuboctahedronun her bir yüzü için 6 ihtimal olup toplamda bu noktaların dönüşebileceği 48 ihtimal vardır. Bu ihtimaller ise aşağıda tek tek sıralanmış ve her bir dönüşümün önceden tespit edilen hareketlerden hangisine karşılık geldiği ifade edilmiştir.

1. $f(V_1) = V_3$, $f(V_5) = V_7$ ve $f(V_9) = V_9$ ise $\Delta : x = 0$ düzlemi olmak üzere $f = \sigma_\Delta$ yansımasıdır.

2. $f(V_1) = V_1$, $f(V_5) = V_6$ ve $f(V_9) = V_{11}$ ise $\Delta : y = 0$ düzlemi olmak üzere $f = \sigma_\Delta$ yansımasıdır.

3. $f(V_1) = V_2$, $f(V_5) = V_5$ *ve* $f(V_9) = V_{10}$ *ise* $\Delta : z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *yansımasıdır.*

4. $f(V_1) = V_{11}$, $f(V_5) = V_8$ *ve* $f(V_9) = V_3$ *ise* $\Delta : x + y = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *yansımasıdır.*

5. $f(V_1) = V_4$, $f(V_5) = V_{10}$ *ve* $f(V_9) = V_7$ *ise* $\Delta : x + z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *yansımasıdır.*

6. $f(V_1) = V_6$, $f(V_5) = V_2$ *ve* $f(V_9) = V_{12}$ *ise* $\Delta : y + z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *yansımasıdır.*

7. $f(V_1) = V_9$, $f(V_5) = V_5$ *ve* $f(V_9) = V_1$ *ise* $\Delta : x - y = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *yansımasıdır.*

8. $f(V_1) = V_1$, $f(V_5) = V_9$ *ve* $f(V_9) = V_5$ *ise* $\Delta : x - z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *yansımasıdır.*

9. $f(V_1) = V_5$, $f(V_5) = V_1$ *ve* $f(V_9) = V_9$ *ise* $\Delta : y - z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *yansımasıdır.*

10. $f(V_1) = V_6$, $f(V_5) = V_1$ *ve* $f(V_9) = V_{11}$ *ise dönme ekseni* $(1, 0, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{\pi}{2}}$ *dönmesidir.*

11. $f(V_1) = V_2$, $f(V_5) = V_6$ *ve* $f(V_9) = V_{12}$ *ise dönme ekseni* $(1, 0, 0)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmesidir.*

12. $f(V_1) = V_5$ *ise* $f(V_5) = V_2$ *ve* $f(V_9) = V_{10}$ *ise dönme ekseni* $(1, 0, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{3\pi}{2}}$ *dönmesidir.*

13. $f(V_1) = V_2$ *ise* $f(V_5) = V_{10}$ *ve* $f(V_9) = V_5$ *ise dönme ekseni* $(0, 1, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{\pi}{2}}$ *dönmesidir.*

14. $f(V_1) = V_4$ *ise* $f(V_5) = V_7$ *ve* $f(V_9) = V_{10}$ *ise dönme ekseni* $(0, 1, 0)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmesidir.*

15. $f(V_1) = V_3$ *ise* $f(V_5) = V_9$ *ve* $f(V_9) = V_7$ *ise dönme ekseni* $(0, 1, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{3\pi}{2}}$ *dönmesidir.*

16. $f(V_1) = V_9$ *ise* $f(V_5) = V_7$ *ve* $f(V_9) = V_3$ *ise dönme ekseni* $(0,0,1)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{\pi}{2}}$ *dönmesidir.*

17. $f(V_1) = V_3$ *ise* $f(V_5) = V_8$ *ve* $f(V_9) = V_{11}$ *ise dönme ekseni* $(0,0,1)$ *olmak üzere* $f = r_{\pi}$ *dönmesidir.*

18. $f(V_1) = V_{11}$ *ise* $f(V_5) = V_6$ *ve* $f(V_9) = V_1$ *ise dönme ekseni* $(0,0,1)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{3\pi}{2}}$ *dönmesidir.*

19. $f(V_1) = V_{10}$ *ise* $f(V_5) = V_5$ *ve* $f(V_9) = V_2$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\pi}$ *dönmesidir.*

20. $f(V_1) = V_1$ *ise* $f(V_5) = V_{11}$ *ve* $f(V_9) = V_6$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\pi}$ *dönmesidir.*

21. $f(V_1) = V_7$ *ise* $f(V_5) = V_3$ *ve* $f(V_9) = V_9$ *ise dönme ekseni* $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\pi}$ *dönmesidir.*

22. $f(V_1) = V_{12}$ *ise* $f(V_5) = V_8$ *ve* $f(V_9) = V_4$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\pi}$ *dönmesidir.*

23. $f(V_1) = V_4$ *ise* $f(V_5) = V_{12}$ *ve* $f(V_9) = V_8$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\pi}$ *dönmesidir.*

24. $f(V_1) = V_8$ *ise* $f(V_5) = V_4$ *ve* $f(V_9) = V_{12}$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\pi}$ *dönmesidir.*

25. $f(V_1) = V_5$ *ise* $f(V_5) = V_9$ *ve* $f(V_9) = V_1$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmesidir.*

26. $f(V_1) = V_9$ *ise* $f(V_5) = V_1$ *ve* $f(V_9) = V_5$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmesidir.*

27.. $f(V_1) = V_{10}$ *ise* $f(V_5) = V_4$ *ve* $f(V_9) = V_7$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmesidir.*

28.. $f(V_1) = V_8$ *ise* $f(V_5) = V_{11}$ *ve* $f(V_9) = V_3$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmesidir.*

29.. $f(V_1) = V_{11}$ *ise* $f(V_5) = V_3$ *ve* $f(V_9) = V_8$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmesidir.*

30.. $f(V_1) = V_6$ *ise* $f(V_5) = V_{12}$ *ve* $f(V_9) = V_2$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmesidir.*

31.. $f(V_1) = V_{12}$ *ise* $f(V_5) = V_2$ *ve* $f(V_9) = V_6$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmesidir.*

32.. $f(V_1) = V_7$ *ise* $f(V_5) = V_{10}$ *ve* $f(V_9) = V_4$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmesidir.*

33. $f(V_1) = V_8$, $f(V_5) = V_{12}$ *ve* $f(V_9) = V_4$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

34. $f(V_1) = V_{12}$ *ise* $f(V_5) = V_4$ *ve* $f(V_9) = V_8$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

35. $f(V_1) = V_{11}$ *ise* $f(V_5) = V_1$ *ve* $f(V_9) = V_6$ *ise dönme ekseni* $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

36. $f(V_1) = V_5$ *ise* $f(V_5) = V_{10}$ *ve* $f(V_9) = V_2$ *ise dönme ekseni* $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

37. $f(V_1) = V_{10}$ *ise* $f(V_5) = V_2$ *ve* $f(V_9) = V_5$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

38. $f(V_1) = V_7$ *ise* $f(V_5) = V_9$ *ve* $f(V_9) = V_3$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

39. $f(V_1) = V_9$ *ise* $f(V_5) = V_3$ *ve* $f(V_9) = V_7$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

40. $f(V_1) = V_6$ *ise* $f(V_5) = V_{11}$ *ve* $f(V_9) = V_1$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

41. $f(V_1) = V_8$, $f(V_5) = V_3$ *ve* $f(V_9) = V_{11}$ *ise* $\Delta : x = 0$ *ve dönme ekseni* $(1, 0, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_\Delta r_{\frac{\pi}{2}}$ *dönme yansımasıdır.*

42. $f(V_1) = V_7$ *ise* $f(V_5) = V_4$ *ve* $f(V_9) = V_{10}$ *ise* $\Delta : x = 0$ *ve dönme ekseni* $(1, 0, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_\Delta r_{\frac{3\pi}{2}}$ *dönme yansımasıdır.*

43. $f(V_1) = V_2$ *ise* $f(V_5) = V_{12}$ *ve* $f(V_9) = V_6$ *ise* $\Delta : y = 0$ *ve dönme ekseni* $(0, 1, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_\Delta r_{\frac{\pi}{2}}$ *dönme yansımasıdır.*

44. $f(V_1) = V_3$ *ise* $f(V_5) = V_{11}$ *ve* $f(V_9) = V_8$ *ise* $\Delta : y = 0$ *ve dönme ekseni* $(0, 1, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_\Delta r_{\frac{3\pi}{2}}$ *dönme yansımasıdır.*

45. $f(V_1) = V_{10}$ *ise* $f(V_5) = V_7$ *ve* $f(V_9) = V_4$ *ise* $\Delta : z = 0$ *ve dönme ekseni* $(0, 0, 1)$ *olmak üzere* $f = \sigma_\Delta r_{\frac{\pi}{2}}$ *dönme yansımasıdır.*

46. $f(V_1) = V_{12}$ *ise* $f(V_5) = V_6$ *ve* $f(V_9) = V_2$ *ise* $\Delta : z = 0$ *ve dönme ekseni* $(0, 0, 1)$ *olmak üzere* $f = \sigma_\Delta r_{\frac{3\pi}{2}}$ *dönme yansımasıdır.*

47. $f(V_1) = V_1$, $f(V_5) = V_5$ *ve* $f(V_9) = V_9$ *ise* f *birim dönüşümdür.*

48. $f(V_1) = V_4$, $f(V_5) = V_8$ *ve* $f(V_9) = V_{12}$ *ise* f *inversiyondur.*

Buna göre orijini koruyan f *izometrisi* $G(CO)$ *nin bir elemanıdır. Bir başka deyişle cuboctahedron uzaklığını koruyan Öklidyen izometriler dışında bir izometri yoktur.*

Teorem 3.3 $f : \mathbb{R}^3_{CO} \to \mathbb{R}^3_{CO}$ *dönüşümü bir izometri olsun.* $f = T_A \circ g$ *olacak şekilde bir tek* $T_A \in T(3)$ *ve* $g \in G(CO)$ *vardır.*

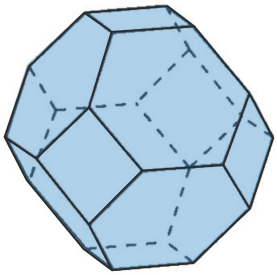
İspat $A = (a_1, a_2, a_3)$ *olmak üzere* $f(O) = A$ *olsun. Bu taktirde* $g = T_{-A} \circ f$ *olacak şekilde tanımlı* g *dönüşümü bir izometridir ve* $g(O) = O$ *olur. Böylece Önerme 2.7 den dolayı* $g \in G(CO)$ *ve* $f = T_A \circ g$ *olur. İspatın tekliği aşikardır.*

Buna göre cuboctahedron metriği ile donatılmış analitik $3-$uzayın izometrilerinin grubu cuboctahedronun (Öklidyen) simetri grubu olan O_h ile $3-$boyutlu analitik uzayın tüm ötelemelerinin grubu olan $T(3)$ ün yarı-direkt çarpımıdır. Yani $\mathbb{R}^3_{CO}$ nun tüm izometrilerinin kümesi $T(3).G(CO)$ dur.

4. TRUNCATED OCTAHEDRON UZAYI

4.1 Truncated Octahedron Metriği ve Özellikleri

Bir arşimed cismi olan truncated octahedronun 8 düzgün altıgen ve 6 kareden oluşan 14 yüzü, 36 kenarı ve 24 köşesi vardır. Octahedronun köşeleri kenar uzunluklarının yarısından daha az olacak şekilde kesilerek atılırsa elde edilen şekil truncated octahedrondur. Ayrıca her bir yüzünün nokta simetrisi olduğundan truncated octahedron bir zonohedrondur.



Şekil 4.1 Truncated Octahedron

Birim küresi Truncated Octahedron olan uzaklık fonksiyonu d_{TO} ile gösterilir ve bu uzaklık fonksiyonunun metrik aksiyomlarını sağladığı ve bazı özellikleri (Gelişgen ve Can, 2015) kaynağından verilmektedir.

Tanım 4.1 $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ *ve* $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ $\mathbb{R}^3$ *de iki farklı nokta olsun.*

$$d_{TO}(P_1, P_2) = \max\left\{\frac{2}{3}\left(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|\right), |x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\right\}$$

biçiminde tanımlanan $d_{TO} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to [0, \infty)$ *uzaklık fonksiyonuna truncated octahedron uzaklık fonksiyonu denir.*

Yardımcı Teorem 4.1 $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ *ve*$P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ $\mathbb{R}^3$ *te iki farklı nokta olsun. Bu durumda*

$$\begin{aligned}
&d_{TO}(P_1, P_2) \geq \tfrac{2}{3}\left(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|\right),\\
&d_{TO}(P_1, P_2) \geq |x_1 - x_2|,\\
&d_{TO}(P_1, P_2) \geq |y_1 - y_2|,\\
&d_{TO}(P_1, P_2) \geq |z_1 - z_2|
\end{aligned}$$

dır.

İspat *İspatı maksimum fonksiyonunun tanımından açıktır.*

Teorem 4.1 $\mathbb{R}^3$ *te* d_{TO} *uzaklık fonksiyonu metriktir ve bu metrikle donatılmış uzayın birim küresi truncated octahedrondur.*

İspat $d_{TO} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *truncated octahedron uzaklık fonksiyonu ve* $P_1 = (x_1, y_1, z_1), P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ *ve* $P_3 = (x_3, y_3, z_3)\mathbb{R}^3$ *te üç farklı nokta olsun.* d_{TO} *uzaklık fonksiyonu her* $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^3$ *için aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa* $\mathbb{R}^3$ *te bir metriktir.*

M1) $d_{TO}(P_1, P_2) \geq 0$ *ve* $d_{TO}(P_1, P_2) = 0 \Leftrightarrow P_1 = P_2$,

M2) $d_{TO}(P_1, P_2) = d_{TO}(P_2, P_1)$,

M3) $d_{TO}(P_1, P_3) \leq d_{TO}(P_1, P_2) + d_{TO}(P_2, P_3)$.

M1) *Mutlak değer her zaman negatif olmayan değerler üreteceğinden dolayı mutlak değerlerin toplamının maksimumu da pozitiftir veya sıfırdır. Böylece*

$$d_{TO}(P_1, P_2) = \max\left\{\frac{2}{3}\left(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|\right), |x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\right\} \geq 0$$

dır. Yani d_{TO} *pozitif tanımlıdır. Eğer*

$$\begin{aligned} d_{TO}(P_1, P_2) = \ & \max\left\{\tfrac{2}{3}\left(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|\right), |x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\right\} = 0 \\ & \Rightarrow |x_1 - x_2| = 0\,,\ |y_1 - y_2| = 0\,,\ |z_1 - z_2| = 0 \\ & \Rightarrow x_1 = x_2,\ y_1 = y_2,\ z_1 = z_2 \\ & \Rightarrow P_1 = P_2 \end{aligned}$$

olur. Tersine P_1=P_2 *ise* $|x_1 - x_2|$=0, $|y_1 - y_2|$=0, $|z_1 - z_2|$=0 *olacağından* $d_{TO}(P_1, P_2)$=0 *olur.*

M2) *Mutlak değer tanımından* $|x_1 - x_2|$=$|x_2 - x_1|$, $|y_1 - y_2|$=$|y_2 - y_1|$ *ve* $|z_1 - z_2|$=$|z_2 - z_1|$. *Buradan açıkça* $d_{TO}(P_1, P_2)$=$d_{TO}(P_2, P_1)$ *dir. Yani,* d_{TO} *simetriktir.*

M3) $P_1 = (x_1, y_1 z_1), P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ *ve* $P_3 = (x_3, y_3, z_3) \in \mathbb{R}^3$ *olsun.*

$$d_{TO}(P_1, P_3) \leq d_{TO}(P_1, P_2) + d_{TO}(P_2, P_3)$$

olduğu gösterilmelidir.

$$\begin{aligned} & d_{TO}(P_1, P_3) \\ & = \max\left\{\tfrac{2}{3}\left(|x_1 - x_3| + |y_1 - y_3| + |z_1 - z_3|\right), |x_1 - x_3|, |y_1 - y_3|, |z_1 - z_3|\right\} \\ & = \max\left\{\begin{array}{l} \frac{2}{3}\left(|x_1 - x_2 + x_2 - x_3| + |y_1 - y_2 + y_2 - y_3| + |z_1 - z_2 + z_2 - z_3|\right), \\ |x_1 - x_2 + x_2 - x_3|, |y_1 - y_2 + y_2 - y_3|, |z_1 - z_2 + z_2 - z_3| \end{array}\right\} \\ & \leq \max\left\{\begin{array}{l} \frac{2}{3}\left[(|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3|) + (|y_1 - y_2| + |y_2 - y_3|) + (|z_1 - z_2| + |z_2 - z_3|)\right], \\ |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3|, |y_1 - y_2| + |y_2 - y_3|, |z_1 - z_2| + |z_2 - z_3| \end{array}\right\} \\ & \leq \max\left\{\tfrac{2}{3}\left(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|\right), |x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\right\} + \\ & \qquad \max\left\{\tfrac{2}{3}\left(|x_2 - x_3| + |y_2 - y_3| + |z_2 - z_3|\right), |x_2 - x_3|, |y_2 - y_3|, |z_2 - z_3|\right\} \\ & = I. \end{aligned}$$

dır. Burada Yardımcı Teorem 3.1 den dolayı

$$d_{TO}(P_1,P_2) \geq \max\left\{\frac{2}{3}\left(|x_1-x_2|+|y_1-y_2|+|z_1-z_2|\right), |x_1-x_2|, |y_1-y_2|, |z_1-z_2|\right\}$$

ve

$$d_{TO}(P_2,P_3) \geq \max\left\{\frac{2}{3}\left(|x_2-x_3|+|y_2-y_3|+|z_2-z_3|\right), |x_2-x_3|, |y_2-y_3|, |z_2-z_3|\right\}$$

olur. O halde

$$I \leq d_{TO}(P_1,P_2)+d_{TO}(P_2,P_3)$$

bulunur. Buna göre

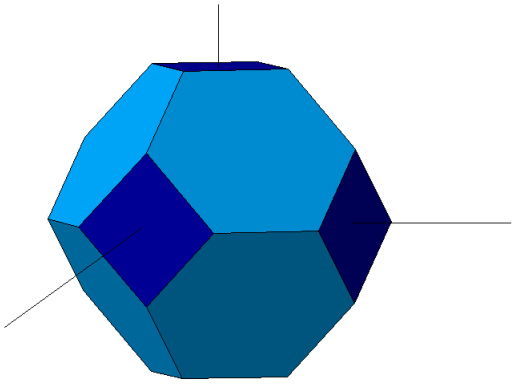
$$d_{TO}(P_1,P_3) \leq d_{TO}(P_1,P_2)+d_{TO}(P_2,P_3)$$

elde edilir. Yani truncated octahedron uzaklık fonksiyonu üçgen eşitsizliğini sağlar.

Sonuç olarak truncated octahedron uzaklık fonksiyonu metriktir. Ayrıca bu metrikle donatılmış analitik $3-$*uzayda orijinden* 1 *birim truncated octahedron uzaklığındaki noktaların kümesi*

$$S_{TO} = \left\{(x,y,z) : d_{TO}(X,0) = \max\left\{\tfrac{2}{3}\left(|x|+|y|+|z|\right), |x|, |y|, |z|\right\} = 1\right\}$$

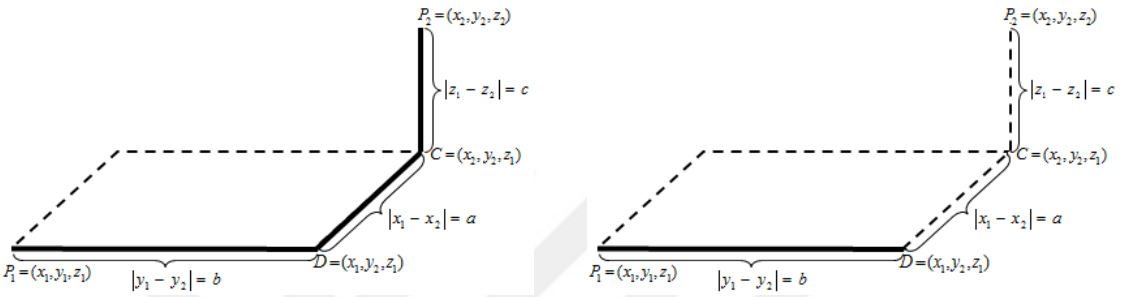
olup bu noktaların geometrik yeri Şekil4.2 de görüldüğü gibi truncated octahedrondur.



Şekil 4.2 Truncated Octahedronun Koordinat Sistemine Yerleştirilmesi

Truncated octahedron uzaklık fonksiyonuna göre P_1 ve P_2 noktaları arasındaki uzaklık ya apsisler, ya ordinatlar veya kotlar farkının mutlak değerlerinin birisi ya da üçünün toplamının $2/3$ katıdır. Buna göre geometrik olarak P_1 ve P_2 noktaları arasında iki

farklı yol vardır. Eğer P_1P_2 doğru parçası P_1 odaklı ve dayanak eğrisi köşe noktaları $\left(\pm 1, \pm\frac{2}{3}, 0\right)$ noktalarının her bir bileşeninin tüm muhtemel permütasyonları olan kare tabanlı koniler dışında ise P_1 ile P_2 arasındaki yol her biri koordinat eksenine paralel olan üç doğru parçasının birleşimidir. Aksi taktirde P_1 ve P_2 arasındaki yol bir koordinat eksenine paralel olan bir doğru parçasıdır. Böylece P_1 ve P_2 noktaları arasındaki truncated octahedron uzaklığı ya üç doğru parçasının Öklidyen uzunlukları toplamının $2/3$ katıdır ya da doğru parçasının Öklidyen uzunluğudur. (Bakınız Şekil4.3)



Şekil 4.3 Truncated Octahedron uzaklığına göre iki nokta arasındaki yollar

Sonuç 4.1 $\mathbb{R}^3_{CO}$ *de* (x_0, y_0, z_0) *merkezli ve* r *yarıçaplı küre*

$$\max\left\{\frac{2}{3}\left(|x-x_0|+|y-y_0|+|z-z_0|\right), |x-x_0|, |y-y_0|, |z-z_0|\right\} = r$$

denklemi ile ifade edilen , köşe noktaları $\left(\frac{r}{2}, r, 0\right)$ *noktalarının her bir bileşeninin tüm muhtemel* $+/-$ *işaret değişiklikleri ve üç bileşenin tüm muhtemel permütasyonlarının* (x_0, y_0, z_0) *kadar ötelenmişinden oluşan* $14-$*yüzlü bir çokyüzlü olan truncated octahedrondur.*

Bu bölümün diğer kısımlarında sıkça kullanılacağından dolayı merkezil birim kürenin köşe noktaları aşağıdaki şekilde isimlendirilmiştir;

$V_1 = \left(\frac{1}{2}, 0, 1\right)$, $V_2 = \left(\frac{1}{2}, 0, -1\right)$, $V_3 = \left(-\frac{1}{2}, 0, 1\right)$, $V_4 = \left(-\frac{1}{2}, 0, -1\right)$, $V_5 = \left(1, \frac{1}{2}, 0\right)$, $V_6 = \left(1, -\frac{1}{2}, 0\right)$, $V_7 = \left(-1, \frac{1}{2}, 0\right)$, $V_8 = \left(-1, -\frac{1}{2}, 0\right)$, $V_9 = \left(0, 1, \frac{1}{2}\right)$, $V_{10} = \left(0, 1, -\frac{1}{2}\right)$, $V_{11} = \left(0, -1, \frac{1}{2}\right)$, $V_{12} = \left(0, -1, -\frac{1}{2}\right)$, $V_{13} = \left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$, $V_{14} = \left(0, \frac{1}{2}, -1\right)$, $V_{15} = \left(0, -\frac{1}{2}, 1\right)$, $V_{16} = \left(0, -\frac{1}{2}, -1\right)$, $V_{17} = \left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$, $V_{18} = \left(1, 0, -\frac{1}{2}\right)$, $V_{19} = \left(-1, 0, \frac{1}{2}\right)$, $V_{20} = \left(-1, 0, -\frac{1}{2}\right)$, $V_{21} = \left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)$, $V_{22} = \left(\frac{1}{2}, -1, 0\right)$, $V_{23} = \left(-\frac{1}{2}, 1, 0\right)$, $V_{24} = \left(-\frac{1}{2}, -1, 0\right)$

Bir sonraki teoremde d_{TO} metriğinin iyi bilinen bazı uzaklık fonksiyonlarının genel hali olan d_m metriği ile ilişkisi verilecektir.

Teorem 4.2 *$P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ $\mathbb{R}^3$ de herhangi iki nokta olsun. $m = v = 0$ ve $u = \frac{\max\left\{\frac{2}{3}(|x_1-x_2|+|y_1-y_2|+|z_1-z_2|),|x_1-x_2|,|y_1-y_2|,|z_1-z_2|\right\}}{\max\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|,|z_1-z_2|\}}$ ise $d_m(P_1, P_2) = d_{TO}(P_1, P_2)$ dir.*

İspat *u, v ve m için verilen değerler d_m metriğinde yerine yazılırsa istenen eşitliğin sağlandığı kolaylıkla görülebilir.*

Aşağıdaki önerme $\mathbb{R}^3$ deki noktalar arasındaki Öklidyen ve truncated octahedron uzaklıkları arasındaki geçiş bağıntısı vermektedir.

Yardımcı Teorem 4.2 *$P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ verilsin P_1 ve P_2 noktalarından geçen doğru l, l nin doğrultu vektörü (p, q, r) ve*

$$\mu(P_1P_2) = \frac{\max\left\{\frac{2}{3}|p| + \frac{2}{3}|q| + \frac{2}{3}|r|, |p|, |q|, |r|\right\}}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

olmak üzere

$$d_{TO}(P_1, P_2) = \mu(P_1P_2)\, d_E(P_1, P_2)$$

dir.

İspat *$P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ verilsin P_1 ve P_2 noktalarından geçen doğru l ve l nin doğrultu vektörü (p, q, r) ise $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere*

$$\frac{x_2 - x_1}{p} = \frac{y_2 - y_1}{q} = \frac{z_2 - z_1}{r} = \lambda$$

yazılabilir. Buradan $x_2 - x_1 = \lambda p$, $y_2 - y_1 = \lambda q$, $z_2 - z_1 = \lambda r$ elde edilir. Böylece

$$d_{TO}(P_1, P_2) = \lambda \max\left\{\frac{2}{3}|p| + \frac{2}{3}|q| + \frac{2}{3}|r|, |p|, |q|, |r|\right\}$$

ve

$$d_E(P_1, P_2) = \lambda\sqrt{p^2+q^2+r^2}$$

bulunur.

$$\frac{d_{TO}(P_1, P_2)}{d_E(P_1, P_2)} = \frac{\lambda \max\left\{\frac{2}{3}|p| + \frac{2}{3}|q| + \frac{2}{3}|r|, |p|, |q|, |r|\right\}}{\lambda\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

olup

$$\mu\left(P_1P_2\right)=\frac{\max\left\{\frac{2}{3}\left|p\right|+\frac{2}{3}\left|q\right|+\frac{2}{3}\left|r\right|,\left|p\right|,\left|q\right|,\left|r\right|\right\}}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

denilirse

$$d_{TO}\left(P_1,P_2\right)=\mu\left(P_1P_2\right)d_E\left(P_1,P_2\right)$$

elde edilir.

Yukarıdaki yardımcı teorem herhangi bir doğru boyunca herhangi P_1 ve P_2 noktaları arasındaki d_{TO}-uzaklığının, aynı doğru boyunca P_1 ve P_2 noktaları arasındaki Öklidyen uzaklığın pozitif katı olduğu gösterir. Buna göre aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Sonuç 4.2 *$\mathbb{R}^3$ de P_1, P_2, X doğrudaş, üç farklı nokta ise*

$$d_E(P_1,X)=d_E(P_2,X)\iff d_{TO}(P_1,X)=d_{TO}(P_2,X)$$

dir.

Sonuç 4.3 *3 boyutlu uzayda P_1, P_2, X doğrudaş, üç farklı nokta ise*

$$\frac{d_E(X,P_1)}{d_E(X,P_2)}=\frac{d_{TO}(X,P_1)}{d_{TO}(X,P_2)}$$

olur. Yani bir doğru boyunca olan d_E, d_{TO} uzaklıklarının oranı aynıdır.

4.2 Truncated Octahedron İzometri Grubu

Bu bölümde d_{TO} metriği ile donatılmış analitik $3-$uzayın ($\mathbb{R}^3_{TO}$) izometri grubu araştırılacaktır. d_{TO} uzaklığını koruyan izometrileri tespit etmek için önce hangi Öklidyen izometrilerin truncated octahedron uzaklığını koruduğu araştırılacaktır. Daha sonra da, bu izometriler dışında izometrilerin olmadığı gösterilecektir.

$\alpha:\mathbb{R}^3_{TO}\to\mathbb{R}^3_{TO}$ dönüşüm olmak üzere her $X,Y\in\mathbb{R}^3_{TO}$ için

$$d_{TO}(X,Y)=d_{TO}(\alpha(X),\alpha(Y))$$

ise α dönüşümü $\mathbb{R}^3_{TO}$ da bir izometridir.

Aşağıda ifade edilen önermeler ile hangi Öklidyen izometrilerin truncated octahedron uzayında da izometri oldukları gösterilmektedir.

Önerme 4.1 *$\mathbb{R}^3$ de her Öklidyen öteleme $\mathbb{R}^3_{TO}$ un bir izometrisidir.*

İspat *$A=(a_1,a_2,a_3)$, $X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ olmak üzere $T_A:\mathbb{R}^3_{TO}\to\mathbb{R}^3_{TO}, T_A(X)=A+X$ olacak şekilde reel uzayda bir öteleme olsun. $P_1=(x_1,y_1,z_1)$, $P_2=(x_2,y_2,z_2)\in\mathbb{R}^3$ için*

$$\begin{aligned}
&d_{TO}(T_A(P_1),T_A(P_2))\\
&\quad=\max\left\{\begin{array}{c}\frac{2}{3}\left(|a_1+x_1-a_1-x_2|+|a_2+y_1-a_2-y_2|+|a_3+z_1-a_3-z_2|\right),\\ |a_1+x_1-a_1-x_2|,|a_2+y_1-a_2-y_2|,|a_3+z_1-a_3-z_2|\end{array}\right\}\\
&\quad=\max\left\{\tfrac{2}{3}\left(|x_1-x_2|+|y_1-y_2|+|z_1-z_2|\right),|x_1-x_2|,|y_1-y_2|\,|z_1-z_2|\right\}\\
&\quad=d_{TO}(P_1,P_2)
\end{aligned}$$

dir. Bundan dolayı T_A bir izometridir.

Yukarıdaki önermeden dolayı $\mathbb{R}^3_{TO}$ uzayında dönme ve yansımaları bulmak için orijinden geçen düzlemleri düşünmek yeterli olacaktır.

Önerme 4.2 *$\mathbb{R}^3_{TO}$ de $\Delta=ax+by+cz=0$ düzlemine göre yansımanın izometri olması için gerek ve yeter koşul düzlemin doğrultu vektörü (a,b,c) nin*

$$D=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,0),(-1,1,0),(1,0,1),(1,0,-1),(0,1,1),(0,1,-1)\}$$

elemanlarına paralel olmasıdır.

İspat *Δ:ax+by+cz=0 birim normali (a,b,c) olan düzlem olmak üzere $\sigma_\Delta:\mathbb{R}^3_{TO}\to\mathbb{R}^3_{TO}$ Öklidyen yansıma*

$$\sigma_\Delta(x,y,z)=\left(\begin{array}{c}(1-2a^2)x-2aby-2acz,-2abx+(1-2b^2)y-2bcz,\\ -2acx-2bcy+(1-2c^2)z\end{array}\right)$$

biçiminde tanımlıdır. $V_1=(\frac{1}{2},0,1)$, $V_4=(1,\frac{1}{2},0)$, $V_8=(0,1,\frac{1}{2})$ $\mathbb{R}^3$ ün bir tabanı olduğundan bu taban vektörlerini koruyan bir yansıma izometri olacağından bu tabanı koruyan yansımaları araştırmak izometrileri bulmak için yeterli olacaktır Öklidyen yansımada taban vektörleri

$$\begin{aligned}
\sigma_\Delta(V_1)&=\sigma_\Delta(\tfrac{1}{2},0,1)=\left(\tfrac{1}{2}-a^2-2ac,-ab-2bc,-ac+1-2c^2\right)\\
\sigma_\Delta(V_4)&=\sigma_\Delta(1,\tfrac{1}{2},0)=\left(1-2a^2-ab,-2ab+\tfrac{1}{2}-b^2,-2ac-bc\right)\\
\sigma_\Delta(V_8)&=\sigma_\Delta(0,1,\tfrac{1}{2})=\left(-2ab-ac,1-2b^2-bc,\tfrac{1}{2}-2bc-c^2\right)
\end{aligned}$$

dir. Açıkça $d_{TO}(O,V_1)=d_{TO}(O,V_4)=d_{TO}(O,V_8)=1$ dir. Eğer yansıma d_{TO} uzaklığını koruyor ise taban vektörlerinin yansıma altındaki görüntüleri için uzaklık korunmalıdır. Yani

$$d_{TO}(\sigma_\Delta(O),\sigma_\Delta(V_1))=d_{TO}(\sigma_\Delta(O),\sigma_\Delta(V_4))=d_{TO}(\sigma_\Delta(O),\sigma_\Delta(V_8))=1$$

olmalıdır. Böylece

$$d_{TO}(\sigma_\Delta(0),\sigma_\Delta(V_1)) = \max\left\{\begin{array}{l} \frac{2}{3}\left(\left|\frac{1}{2}-a^2-2ac\right|+|-ab-2bc|+|-ac+1-2c^2|\right), \\ \left|\frac{1}{2}-a^2-2ac\right|,|-ab-2bc|,|-ac+1-2c^2| \end{array}\right\}=1$$

$$d_{TO}(\sigma_\Delta(0),\sigma_\Delta(V_4)) = \max\left\{\begin{array}{l} \frac{2}{3}\left(|1-2a^2-ab|+\left|-2ab+\frac{1}{2}-b^2\right|+|-2ac-bc|\right), \\ |1-2a^2-2ab|,\left|-2ab+\frac{1}{2}-b^2\right|,|-2ac-bc| \end{array}\right\}=1$$

$$d_{TO}(\sigma_\Delta(0),\sigma_\Delta(V_8)) = \max\left\{\begin{array}{l} \frac{2}{3}\left(|-2ab-ac|+|1-2b^2-bc|+\left|\frac{1}{2}-2bc-c^2\right|\right), \\ |-2ab-ac|,|1-2b^2-bc|,\left|\frac{1}{2}-2bc-c^2\right| \end{array}\right\}=1$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözülürse $(1,0,0)$*,* $(0,1,0)$*,* $(0,0,1)$*,* $(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0)$*,* $(-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0)$*,* $(1/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2})$*,* $(1/\sqrt{2},0,-1/\sqrt{2})$*,* $(0,1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$*,* $(0,1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})$ *çözümleri elde edilir.*

Tersine $\sigma_\Delta\ (X) = Y$ *iken* OX *ve* OY *vektörlerinin doğrultu vektörleri sırasıyla* (p_1,q_1,r_1) *ve* (p_2,q_2,r_2) *ise Yardımcı Teorem 3.2 den dolayı* $d_{TO}(O,X)=d_{TO}(O,Y)$ *olması için* $\mu\,(OX) = \mu\,(OY)$ *olduğunu göstermek yeterlidir. Böylece aşağıdaki liste* (p_2,q_2,r_2) *doğrultusunun ilgili yansımaya göre* (p_1,q_1,r_1) *cinsinden karşılığını vermektedir.*

Δ	(p_2,q_2,r_2)
$x=0$	$(-p_1,q_1,r_1)$
$y=0$	$(p_1,-q_1,r_1)$
$z=0$	$(p_1,q_1,-r_1)$
$x+y=0$	$(-q_1,-p_1,r_1)$
$x-y=0$	(q_1,p_1,r_1)
$x+z=0$	$(-r_1,q_1,-p_1)$
$x-z=0$	(r_1,q_1,p_1)
$y+z=0$	$(p_1,-r_1,-q_1)$
$y-z=0$	(p_1,r_1,q_1)

Buna göre $\mu\,(OX)=\mu\,(OY)$ *olduğu kolaylıkla görülebilir.*

Sonuç 4.4 *Orijinden geçen düzlemlerin izometrik yansımalarının kümesi* S_{TO} *aşağıda denklemleri verilen 9 tane Öklidyen yansımadan oluşur.*

$$\{x=0,y=0,z=0,x+y=0,x-y=0,x+z=0,x-z=0,y+z=0,y-z=0\}.$$

Truncated octahedron birim küresinin köşe noktalarının yansımalar altındaki görüntüleri kısaca Şekil4.4 deki tablodaki gibi özetlenebilir.

Yansıma Düzlemleri / Noktalar	x=0	y=0	z=0	x+y=0	x+z=0	y+z=0	x-y=0	x-z=0	y-z=0
V_1	V_3	V_1	V_2	V_{15}	V_{20}	V_{22}	V_{13}	V_{17}	V_{21}
V_2	V_4	V_2	V_1	V_{16}	V_{18}	V_{21}	V_{14}	V_{19}	V_{22}
V_3	V_1	V_3	V_4	V_{13}	V_{19}	V_{24}	V_{15}	V_{18}	V_{23}
V_4	V_2	V_4	V_3	V_{14}	V_{17}	V_{23}	V_{16}	V_{20}	V_{24}
V_5	V_7	V_6	V_5	V_{24}	V_{14}	V_{18}	V_{21}	V_{13}	V_{17}
V_6	V_8	V_5	V_6	V_{22}	V_{16}	V_{17}	V_{23}	V_{15}	V_{18}
V_7	V_5	V_8	V_7	V_{23}	V_{13}	V_{20}	V_{22}	V_{14}	V_{19}
V_8	V_6	V_7	V_8	V_{21}	V_{15}	V_{19}	V_{24}	V_{16}	V_{20}
V_9	V_9	V_{11}	V_{10}	V_{19}	V_{23}	V_{16}	V_{17}	V_{21}	V_{13}
V_{10}	V_{10}	V_{12}	V_9	V_{20}	V_{21}	V_{14}	V_{18}	V_{23}	V_{15}
V_{11}	V_{11}	V_9	V_{12}	V_{17}	V_{24}	V_{15}	V_{19}	V_{22}	V_{14}
V_{12}	V_{12}	V_{10}	V_{11}	V_{18}	V_{22}	V_{13}	V_{20}	V_{24}	V_{16}
V_{13}	V_{13}	V_{15}	V_{14}	V_3	V_7	V_{12}	V_1	V_5	V_9
V_{14}	V_{14}	V_{16}	V_{13}	V_4	V_5	V_{10}	V_2	V_7	V_{11}
V_{15}	V_{15}	V_{13}	V_{16}	V_1	V_8	V_{11}	V_3	V_6	V_{10}
V_{16}	V_{16}	V_{14}	V_{15}	V_2	V_6	V_9	V_4	V_8	V_{12}
V_{17}	V_{19}	V_{17}	V_{18}	V_{11}	V_4	V_6	V_9	V_1	V_5
V_{18}	V_{20}	V_{18}	V_{17}	V_{12}	V_2	V_5	V_{10}	V_3	V_6
V_{19}	V_{17}	V_{19}	V_{20}	V_9	V_3	V_8	V_{11}	V_2	V_7
V_{20}	V_{18}	V_{20}	V_{19}	V_{10}	V_1	V_7	V_{12}	V_4	V_8
V_{21}	V_{23}	V_{22}	V_{21}	V_8	V_{10}	V_2	V_5	V_9	V_1
V_{22}	V_{24}	V_{21}	V_{22}	V_6	V_{12}	V_1	V_7	V_{11}	V_2
V_{23}	V_{21}	V_{24}	V_{23}	V_7	V_9	V_4	V_6	V_{10}	V_3
V_{24}	V_{22}	V_{23}	V_{24}	V_5	V_{11}	V_3	V_8	V_{12}	V_4

Şekil 4.4 $\mathbb{R}^3_{TO}$ de Yansıma Düzlemlerine Göre Köşe Noktaların Görüntüleri

Önerme 4.3 *Orijinden geçen bir l doğrusuna göre bir r_θ dönmesinin izometri olması için gerek ve yeter koşul*

$$D_1 = \{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$$
$$D_2 = \{(1,1,1),\ (-1,1,1),(1,-1,1),\ (1,1,-1)\}$$
$$D_3 = \{(1,1,0),\ (1,0,1),(0,1,1),\ (1,-1,0),\ (1,0,-1),\ (0,1,-1)\}$$

ve

$$R_1 = \{r_\theta \mid \theta \in \{\pi/2, \pi, 3\pi/2\}, \text{ dönme ekseninin doğrultusu } D_1 \text{ in elemanı}\}$$
$$R_2 = \{r_\theta \mid \theta \in \{2\pi/3, 4\pi/3\}, \text{ dönme ekseninin doğrultusu } D_2 \text{ nin elemanı}\}$$
$$R_2 = \{r_\theta \mid \theta = \pi, \text{ dönme ekseninin doğrultusu } D_3 \text{ ün elemanı}\}$$

olmak üzere $r_\theta \in R_{CO} = R_1 \cup R_2 \cup R_3$ olmasıdır.

İspat *Birim doğrultu vektörü* (p,q,r) *olan bir* l *doğrusu etrafında* r_θ *şeklide ifade edilen Öklidyen dönmenin matris formu*

$$\begin{bmatrix} \cos\theta + p^2(1-\cos\theta) & pq(1-\cos\theta) - r\sin\theta & pr(1-\cos\theta) + q\sin\theta \\ pq(1-\cos\theta) + r\sin\theta & \cos\theta + q^2(1-\cos\theta) & qr(1-\cos\theta) - p\sin\theta \\ pr(1-\cos\theta) - q\sin\theta & qr(1-\cos\theta) + p\sin\theta & \cos\theta - r^2(1-\cos\theta) \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

l *eksenindeki bir dönme,* l *doğrusu boyunca kesişen iki düzlemin yansımalarının birleşimi olduğundan Önerme 3.2 den dolayı* l *doğrusunun doğrultu vektörleri olarak* $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$,$(1,1,1)$, $(-1,1,1)$, $(1,-1,1)$, $(1,1,-1)$, $(1,1,0)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$, $(1,-1,0)$, $(1,0,-1)$, $(0,1,-1)$ *alınabilir.*

$\mathbb{R}^3_{TO}$ *deki dönmelerin bulunması için,* d_{TO} *birim küresinin kenarlarının uzunluklarını koruyan dönmelerin tespiti yeterlidir.* d_{TO} *birim küresinin* $V_1 = \left(\frac{1}{2},0,1\right)$, $V_5 = \left(1,\frac{1}{2},0\right)$, $V_6 = \left(1,-\frac{1}{2},0\right)$, $V_{17} = \left(1,0,\frac{1}{2}\right)$ *köşe noktalarını ele alalım. Buna göre*

$$\begin{aligned}
r_\theta(V_1) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}p^2(1-\cos\theta) + pr(1-\cos\theta) + q\sin\theta, \\ \frac{1}{2}pq(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}r\sin\theta + qr(1-\cos\theta) - p\sin\theta, \\ \frac{1}{2}pr(1-\cos\theta) - \frac{1}{2}q\sin\theta + \cos\theta - r^2(1-\cos\theta) \end{pmatrix} \\
r_\theta(V_5) &= \begin{pmatrix} \cos\theta + p^2(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}pq(1-\cos\theta) - \frac{1}{2}r\sin\theta, \\ pq(1-\cos\theta) + r\sin\theta + \frac{1}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}q^2(1-\cos\theta), \\ pr(1-\cos\theta) - q\sin\theta + \frac{1}{2}qr(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}p\sin\theta \end{pmatrix} \\
r_\theta(V_6) &= \begin{pmatrix} \cos\theta + p^2(1-\cos\theta) - \frac{1}{2}pq(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}r\sin\theta, \\ pq(1-\cos\theta) + r\sin\theta - \frac{1}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}q^2(1-\cos\theta), \\ pr(1-\cos\theta) - q\sin\theta - \frac{1}{2}qr(1-\cos\theta) - \frac{1}{2}p\sin\theta \end{pmatrix} \\
r_\theta(V_{17}) &= \begin{pmatrix} \cos\theta + p^2(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}pr(1-\cos\theta) - \frac{1}{2}q\sin\theta, \\ pq(1-\cos\theta) + r\sin\theta + \frac{1}{2}qr(1-\cos\theta) - \frac{1}{2}p\sin\theta, \\ pr(1-\cos\theta) - q\sin\theta + \frac{1}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}r^2(1-\cos\theta) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

elde edilir. Açıkça $d_{TO}(V_1,\ V_5) = \frac{4}{3}$, $d_{TO}(V_6,\ V_{17}) = \frac{2}{3}$ *tür. O halde* $\theta \neq 0$ *olmak üzere* r_θ *nın* d_{TO} *uzaklığını koruması için* $d_{TO}(r_\theta(V_1), r_\theta(V_5)) = \frac{4}{3}$, $d_{TO}(r_\theta(V_6), r_\theta(V_{17})) = \frac{2}{3}$ *olmalıdır.*

l *doğrusunun yön vektörü* $(1,0,0)$ *ise* $(p,q,r) = (1,0,0)$ *olur.* p,q,r *değerleri* $d_{TO}(r_\theta(V_1), r_\theta(V_5)) = \frac{4}{3}$ *ve* $d_{TO}(r_\theta(V_6), r_\theta(V_{17})) = \frac{2}{3}$ *denklemlerinde yerine yazılırsa;*

$$\max\left\{\tfrac{1}{3}+\tfrac{2}{3}\left(\left|\sin\theta+\tfrac{1}{2}\cos\theta\right| + \left|\cos\theta - \tfrac{1}{2}\sin\theta\right|\right), \tfrac{1}{2}, \left|\cos\theta - \tfrac{1}{2}\sin\theta\right|, \left|\sin\theta+\tfrac{1}{2}\cos\theta\right|\right\} = \tfrac{4}{3}$$
$$\max\left\{\tfrac{2}{3}\left(\left|\tfrac{\cos\theta-\sin\theta}{2}\right| + \left|\tfrac{\cos\theta+\sin\theta}{2}\right|\right), \left|\tfrac{\cos\theta-\sin\theta}{2}\right|, \left|\tfrac{\cos\theta+\sin\theta}{2}\right|\right\} = \tfrac{2}{3}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklem sistemi çözülürse $\theta = \pi/2$, $\theta = \pi$, $\theta = 3\pi/2$ *olur. Buradan* x *ekseni etrafındaki* $\theta = \pi/2$, π, $3\pi/2$ *radyanlık dönmeler* $\mathbb{R}^3_{TO}$ *ün bir izometrisidir. Benzer şekilde, eğer* l *nin yön vektörü* $(0,1,0)$ *veya* $(0,0,1)$ *ise* $\theta = \pi/2$, π, $3\pi/2$ *bulunur.*

l doğrusunun yön vektörü $(1,1,1)$ ise $(p,q,r) = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ olur. p,q,r değerleri $d_{TO}(r_\theta(V_1), r_\theta(V_5)) = \frac{4}{3}$ ve $d_{TO}(r_\theta(V_6), r_\theta(V_{17})) = \frac{2}{3}$ te yerine yazılırsa

$$\max\left\{\frac{2}{3}\left(\left|\frac{\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta}{2}\right| + \left|\frac{\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}{2}\right| + |\cos\theta|\right), \left|\frac{\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta}{2}\right|, \left|\frac{\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}{2}\right|, |\cos\theta|\right\} = \frac{4}{3}$$

$$\max\left\{\begin{array}{c}\frac{2}{3}\left(\left|\frac{1-\cos\theta}{3}\right| + \left|\frac{\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta+2}{6}\right| + \left|\frac{\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta+2}{6}\right|\right), \\ \left|\frac{1-\cos\theta}{3}\right|, \left|\frac{\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta+2}{6}\right|, \left|\frac{\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta+2}{6}\right|\end{array}\right\} = \frac{2}{3}$$

elde edilir. Bu denklemler çözülürse $\theta = 2\pi/3$, $\theta = 4\pi/3$ bulunur. Buradan l etrafındaki $\theta = 2\pi/3$, $4\pi/3$ radyanlık dönmeler $\mathbb{R}^3_{TO}$ ün bir izometrisidir. Benzer şekilde, eğer l nin yön vektörü $(-1,1,1)$, $(1,1,-1)$ veya $(1,-1,1)$ ise $\theta = 2\pi/3$, $4\pi/3$ olur.

l doğrusunun yön vektörü $(1,1,0)$ ise $(p,q,r) = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ olur. p,q,r değerleri $d_{TO}(r_\theta(V_1), r_\theta(V_5)) = \frac{4}{3}$ ve $d_{TO}(r_\theta(V_6), r_\theta(V_{17})) = \frac{2}{3}$ te yerine yazılırsa

$$\max\left\{\frac{2}{3}\left(\left|\frac{\sqrt{2}\sin\theta-1}{2}\right| + \left|\frac{\sqrt{2}\sin\theta+1}{2}\right| + |\cos\theta|\right), \left|\frac{\sqrt{2}\sin\theta-1}{2}\right|, \left|\frac{\sqrt{2}\sin\theta+1}{2}\right|, |\cos\theta|\right\} = \frac{4}{3}$$

$$\max\left\{\begin{array}{c}\frac{2}{3}\left(\left|\frac{\cos\theta-\sqrt{2}\sin\theta-1}{4}\right| + \left|\frac{\cos\theta-\sqrt{2}\sin\theta+1}{4}\right| + \left|\frac{\sqrt{2}\sin\theta+2\cos\theta}{4}\right|\right), \\ \left|\frac{\cos\theta-\sqrt{2}\sin\theta-1}{4}\right|, \left|\frac{\cos\theta-\sqrt{2}\sin\theta+1}{4}\right|, \left|\frac{\sqrt{2}\sin\theta+2\cos\theta}{4}\right|\end{array}\right\} = \frac{2}{3}$$

denklemlerine ulaşılır. Bu denklem sistemi çözülürse $\theta = \pi$ bulunur. Buradan l etrafındaki $\theta = \pi$ radyanlık dönmeler $\mathbb{R}^3_{TO}$ ün bir izometrisidir. Benzer şekilde, eğer l nin yön vektörü $(1,0,1)$, $(0,1,1)$, $(1,-1,0)$, $(1,0,-1)$, $(0,1,-1)$ ise $\theta = \pi$ olur.

Tersine $r_\theta(X) = Y$ olacak şekildeki X ve Y noktalarıyla oluşturulan OX ve OY doğrularının doğrultuları sırasıyla (p_1, q_1, r_1) ve (p_2, q_2, r_2) olmak üzere $d_{TO}(O,X) = d_{TO}(O,Y)$ olduğunu göstermek için Yardımcı Teorem 3.1.6 dan $\mu(OX) = \mu(OY)$ olduğu gösterilmelidir. Bu ise (p_1, q_1, r_1) vektörünün tüm durumlar için görüntüleri bulunarak kolaylıkla gösterilebilir. Örneğin dönme ekseninin doğrultu vektörü $(1,0,0)$ olmak üzere bu eksende $\theta = \pi/2$ radyanlık dönme dönüşümü yapılınca $(p_2, q_2, r_2) = (p_1, -r_1, q_1)$ bulunur. Buradan da açıkça $\mu(OX) = \mu(OY)$ olduğu görülür. Benzer şekilde diğer dönme eksenleri ve dönme açıları için eşitlik gösterilebilir. Bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 4.5 *Orijinden geçen doğrulara göre izometrik dönmelerin R_{TO} kümesi tam olarak 23 Öklidyen dönme içerir.*

Şekil4.5 deki tabloda truncated octahedron birim küresinin köşe noktalarının dönmeler sonucunda dönüştüğü noktalar kısaca özetlenmiştir.

Dönme Ekseni doğrultu vektörleri	Açılar	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8	V_9	V_{10}	V_{11}	V_{12}
(1,0,0)	$\theta = \pi/2$	V_{22}	V_{21}	V_{24}	V_{23}	V_{17}	V_{18}	V_{19}	V_{20}	V_{15}	V_{13}	V_{16}	V_{14}
	$\theta = \pi$	V_2	V_1	V_4	V_3	V_6	V_5	V_8	V_7	V_{12}	V_{11}	V_{10}	V_9
	$\theta = 3\pi/2$	V_{21}	V_{22}	V_{23}	V_{24}	V_{18}	V_{17}	V_{20}	V_{19}	V_{14}	V_{16}	V_{13}	V_{15}
(0,1,0)	$\theta = \pi/2$	V_{18}	V_{20}	V_{17}	V_{19}	V_{14}	V_{16}	V_{13}	V_{15}	V_{21}	V_{23}	V_{22}	V_{24}
	$\theta = \pi$	V_4	V_3	V_2	V_1	V_7	V_8	V_5	V_6	V_{10}	V_9	V_{12}	V_{11}
	$\theta = 3\pi/2$	V_{19}	V_{17}	V_{20}	V_{18}	V_{13}	V_{15}	V_{14}	V_{16}	V_{23}	V_{21}	V_{24}	V_{22}
(0,0,1)	$\theta = \pi/2$	V_{13}	V_{14}	V_{15}	V_{16}	V_{23}	V_{21}	V_{24}	V_{22}	V_{19}	V_{20}	V_{17}	V_{18}
	$\theta = \pi$	V_3	V_4	V_1	V_2	V_8	V_7	V_6	V_5	V_{11}	V_{12}	V_9	V_{10}
	$\theta = 3\pi/2$	V_{15}	V_{16}	V_{13}	V_{14}	V_{22}	V_{24}	V_{21}	V_{23}	V_{17}	V_{18}	V_{19}	V_{20}
(1,1,0)	$\theta = \pi$	V_{14}	V_{13}	V_{16}	V_{15}	V_{21}	V_{23}	V_{22}	V_{24}	V_{18}	V_{17}	V_{20}	V_{19}
(1,0,1)	$\theta = \pi$	V_{17}	V_{19}	V_{18}	V_{20}	V_{15}	V_{13}	V_{16}	V_{14}	V_{22}	V_{24}	V_{21}	V_{23}
(0,1,1)	$\theta = \pi$	V_{23}	V_{24}	V_{21}	V_{22}	V_{19}	V_{20}	V_{17}	V_{18}	V_{13}	V_{15}	V_{14}	V_{16}
(1,-1,0)	$\theta = \pi$	V_{16}	V_{15}	V_{14}	V_{13}	V_{24}	V_{22}	V_{23}	V_{21}	V_{20}	V_{19}	V_{18}	V_{17}
(1,0,-1)	$\theta = \pi$	V_{20}	V_{18}	V_{19}	V_{17}	V_{16}	V_{14}	V_{15}	V_{13}	V_{24}	V_{22}	V_{23}	V_{21}
(0,1,-1)	$\theta = \pi$	V_{24}	V_{23}	V_{22}	V_{21}	V_{20}	V_{19}	V_{18}	V_{17}	V_{16}	V_{14}	V_{15}	V_{13}
(1,1,1)	$\theta = 2\pi/3$	V_5	V_7	V_6	V_8	V_9	V_{10}	V_{11}	V_{12}	V_1	V_3	V_2	V_4
	$\theta = 4\pi/3$	V_9	V_{11}	V_{10}	V_{12}	V_1	V_3	V_2	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8
(-1,1,1)	$\theta = 2\pi/3$	V_{10}	V_{12}	V_9	V_{11}	V_4	V_2	V_3	V_1	V_7	V_8	V_5	V_6
	$\theta = 4\pi/3$	V_8	V_6	V_7	V_5	V_{11}	V_{12}	V_9	V_{10}	V_3	V_1	V_4	V_2
(1,-1,1)	$\theta = 2\pi/3$	V_{11}	V_9	V_{12}	V_{10}	V_3	V_1	V_4	V_2	V_8	V_7	V_6	V_5
	$\theta = 4\pi/3$	V_6	V_8	V_5	V_7	V_{12}	V_{11}	V_{10}	V_9	V_2	V_4	V_1	V_3
(1,1,-1)	$\theta = 2\pi/3$	V_{12}	V_{10}	V_{11}	V_9	V_2	V_4	V_1	V_3	V_6	V_5	V_8	V_7
	$\theta = 4\pi/3$	V_7	V_5	V_8	V_6	V_{10}	V_9	V_{12}	V_{11}	V_4	V_2	V_3	V_1

Dönme Ekseni doğrultu vektörleri	Açılar	V_{13}	V_{14}	V_{15}	V_{16}	V_{17}	V_{18}	V_{19}	V_{20}	V_{21}	V_{22}	V_{23}	V_{24}
(1,0,0)	$\theta = \pi/2$	V_{11}	V_9	V_{12}	V_{10}	V_6	V_5	V_8	V_7	V_1	V_2	V_3	V_4
	$\theta = \pi$	V_{16}	V_{15}	V_{14}	V_{13}	V_{18}	V_{17}	V_{20}	V_{19}	V_{22}	V_{21}	V_{24}	V_{23}
	$\theta = 3\pi/2$	V_{10}	V_{12}	V_9	V_{11}	V_5	V_6	V_7	V_8	V_2	V_1	V_4	V_3
(0,1,0)	$\theta = \pi/2$	V_5	V_7	V_6	V_8	V_2	V_4	V_1	V_3	V_{10}	V_{12}	V_9	V_{11}
	$\theta = \pi$	V_{14}	V_{13}	V_{16}	V_{15}	V_{20}	V_{19}	V_{18}	V_{17}	V_{23}	V_{24}	V_{21}	V_{22}
	$\theta = 3\pi/2$	V_7	V_5	V_8	V_6	V_3	V_1	V_4	V_2	V_9	V_{11}	V_{10}	V_{12}
(0,0,1)	$\theta = \pi/2$	V_3	V_4	V_1	V_2	V_9	V_{10}	V_{11}	V_{12}	V_7	V_5	V_8	V_6
	$\theta = \pi$	V_{15}	V_{16}	V_{13}	V_{14}	V_{19}	V_{20}	V_{17}	V_{18}	V_{24}	V_{23}	V_{22}	V_{21}
	$\theta = 3\pi/2$	V_1	V_2	V_3	V_4	V_{11}	V_{12}	V_9	V_{10}	V_6	V_8	V_5	V_7
(1,1,0)	$\theta = \pi$	V_2	V_1	V_4	V_3	V_{10}	V_9	V_{12}	V_{11}	V_5	V_7	V_6	V_8
(1,0,1)	$\theta = \pi$	V_6	V_8	V_5	V_7	V_1	V_3	V_2	V_4	V_{11}	V_9	V_{12}	V_{10}
(0,1,1)	$\theta = \pi$	V_9	V_{11}	V_{10}	V_{12}	V_7	V_8	V_5	V_6	V_3	V_4	V_1	V_2
(1,-1,0)	$\theta = \pi$	V_4	V_3	V_2	V_1	V_{12}	V_{11}	V_{10}	V_9	V_8	V_6	V_7	V_5
(1,0,-1)	$\theta = \pi$	V_8	V_6	V_7	V_5	V_4	V_2	V_3	V_1	V_{12}	V_{10}	V_{11}	V_9
(0,1,-1)	$\theta = \pi$	V_{12}	V_{10}	V_{11}	V_9	V_8	V_7	V_6	V_5	V_4	V_3	V_2	V_1
(1,1,1)	$\theta = 2\pi/3$	V_{17}	V_{19}	V_{18}	V_{20}	V_{21}	V_{23}	V_{22}	V_{24}	V_{13}	V_{14}	V_{15}	V_{16}
	$\theta = 4\pi/3$	V_{21}	V_{22}	V_{23}	V_{24}	V_{13}	V_{15}	V_{14}	V_{16}	V_{17}	V_{19}	V_{18}	V_{20}
(-1,1,1)	$\theta = 2\pi/3$	V_{23}	V_{24}	V_{21}	V_{22}	V_{14}	V_{16}	V_{13}	V_{15}	V_{20}	V_{18}	V_{19}	V_{17}
	$\theta = 4\pi/3$	V_{19}	V_{17}	V_{20}	V_{18}	V_{24}	V_{22}	V_{23}	V_{21}	V_{15}	V_{16}	V_{13}	V_{14}
(1,-1,1)	$\theta = 2\pi/3$	V_{24}	V_{23}	V_{22}	V_{21}	V_{15}	V_{13}	V_{16}	V_{14}	V_{19}	V_{17}	V_{20}	V_{18}
	$\theta = 4\pi/3$	V_{18}	V_{20}	V_{17}	V_{19}	V_{22}	V_{24}	V_{21}	V_{23}	V_{16}	V_{15}	V_{14}	V_{13}
(1,1,-1)	$\theta = 2\pi/3$	V_{22}	V_{21}	V_{24}	V_{23}	V_{16}	V_{14}	V_{15}	V_{13}	V_{18}	V_{20}	V_{17}	V_{19}
	$\theta = 4\pi/3$	V_{20}	V_{18}	V_{19}	V_{17}	V_{23}	V_{21}	V_{24}	V_{22}	V_{14}	V_{13}	V_{16}	V_{15}

Şekil 4.5 $\mathbb{R}^3_{TO}$ de Dönme Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri

Yardımcı Teorem 4.3 *(x, y, z) noktasını $(-x, -y, -z)$ noktasına eşleyen dönüşüm olan orijine göre σ_0 inversiyonu (noktaya göre yansıma) $\mathbb{R}^3_{CO}$ un bir izometrisidir.*

Şekil4.6 daki tabloda truncated octahedron birim küresinin köşe noktalarının inversiyon hareketi altında görüntüleri verilmiştir.

İnversiyon Altında Nokta Görüntüleri	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8	V_9	V_{10}	V_{11}	V_{12}
$O = (0,0,0)$ σ_0	V_4	V_3	V_2	V_1	V_8	V_7	V_6	V_5	V_{12}	V_{11}	V_{10}	V_9

İnversiyon Altında Nokta Görüntüleri	V_{13}	V_{14}	V_{15}	V_{16}	V_{17}	V_{18}	V_{19}	V_{20}	V_{21}	V_{22}	V_{23}	V_{24}
$O = (0,0,0)$ σ_0	V_{16}	V_{15}	V_{14}	V_{13}	V_{20}	V_{19}	V_{18}	V_{17}	V_{24}	V_{23}	V_{22}	V_{21}

Şekil 4.6 $\mathbb{R}^3_{TO}$ de σ_O İnversiyonu Altında Köşe Noktaların Görüntüleri

Önerme 4.4 *d_{TO} uzaklığını invaryant bırakan orijine göre altı tane dönme yansıması vardır.*

İspat *$r_\theta \in R_{TH}$, Γ ve Δ düzlemleri Π düzlemine dik olmak üzere dönme-yansıma $\rho : \sigma_\Pi \sigma_\Delta \sigma_\Gamma = \sigma_\Pi r_\theta$ şeklinde ifade edilir. O halde dönme ekseni yansıma düzlemine dik olmak zorundadır. Bu nedenle Önerme 3.3 deki dönme eksenlerinden 9 tanesi incelenmelidir. Çünkü D_2 de verilen dönme eksenlerinin hiçbiri Önerme 3.2 de verilen yansıma düzlemlerine dik değildir.*

Eğer Π, $x = 0$ düzlemi ise r_θ nın birim vektörü $(1, 0, 0)$ dır ve

$$\rho : \sigma_\Pi r_\theta(x, y, z) = (-x, ycos\theta - zsin\theta, ysin\theta + zcos\theta)$$

dır. $V_1 = \left(\frac{1}{2}, 0, 1\right)$, $V_5 = \left(1, \frac{1}{2}, 0\right)$ ve $V_{17} = \left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\rho(V_1) &= \rho\left(\tfrac{1}{2}, 0, 1\right) = \left(-\tfrac{1}{2}, -\sin\theta, \cos\theta\right) \\
\rho(V_5) &= \rho\left(1, \tfrac{1}{2}, 0\right) = \left(-1, \tfrac{1}{2}\cos\theta, \tfrac{1}{2}\sin\theta\right) \\
\rho(V_{17}) &= \rho\left(1, 0, \tfrac{1}{2}\right) = \left(-1, -\tfrac{1}{2}\sin\theta, \tfrac{1}{2}\cos\theta\right)
\end{aligned}$$

ve $d_{TO}(V_1, V_{17}) = \frac{2}{3}$ *,* $d_{TO}(V_5, V_{17}) = \frac{2}{3}$ *dir. Dolayısıyla* ρ *uzaklığı koruyacağından*

$$\begin{aligned} d_{TO}(\rho(V_1), \rho(V_{17})) &= \max\left\{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left|\sin\theta\right| + \frac{1}{3}\left|\cos\theta\right|, \left|\cos\theta\right|, \left|\sin\theta\right|, \frac{1}{2}\right\} = \frac{2}{3} \\ d_{TO}(\rho(V_1), \rho(V_{17})) &= \max\left\{\begin{array}{c} \frac{2}{3}\left(\left|\frac{\cos\theta-\sin\theta}{2}\right| + \left|\frac{\cos\theta-\sin\theta}{2}\right|\right), \\ \left|\frac{\cos\theta-\sin\theta}{2}\right|, \left|\frac{\cos\theta-\sin\theta}{2}\right| \end{array}\right\} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Bulunan bu denklemler çözülürse $\theta = \pi/2$*,* $\pi, 3\pi/2$ *elde edilir. Burada elde edilen sonuçlardan kolaylıkla* $\sigma_\Pi r_\pi = \sigma_0$ *olduğu gösterilebilir. O halde* $x = 0$ *düzlemini kullanarak 2 tane dönme yansıma elde edilir. Benzer şekilde* Π *için* $y = 0$ *ve* $z = 0$ *düzlemleri kullanılırsa* $\theta = \pi/2$*,* $\pi, 3\pi/2$ *için 2 şer dönme yansıma elde edilir. Yani bu üç düzlem için toplam 6 tane dönme yansıma vardır.*

Eğer Π *için* $x + y = 0$ *düzlemi alınırsa* r_θ *nın birim vektörü* $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ *dır ve*

$$\rho : \sigma_\Pi r_\theta(x, y, z) = \left(\begin{array}{c} (\frac{\cos\theta-1}{2})x - (\frac{1+\cos\theta}{2})y + (\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}})z, \\ (\frac{-\cos\theta-1}{2})x + (\frac{\cos\theta-1}{2})y - (\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}})z, (-\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}})x + (\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}})y + \cos\theta z) \end{array}\right)$$

olur. $V_1 = \left(\frac{1}{2}, 0, 1\right)$*,* $V_5 = \left(1, \frac{1}{2}, 0\right)$ *ve* $V_{17} = \left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$ *olmak üzere*

$$\begin{aligned} \rho(V_1) &= \rho\left(\tfrac{1}{2}, 0, 1\right) = \left(\tfrac{-1+\cos\theta}{4} + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta, \tfrac{-\cos\theta-1}{4} - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta, \tfrac{\sqrt{2}}{4}\sin\theta + \cos\theta\right) \\ \rho(V_5) &= \rho\left(1, \tfrac{1}{2}, 0\right) = \left(\tfrac{\cos\theta-3}{4}, \tfrac{-\cos\theta-3}{4}, -\tfrac{\sqrt{2}}{4}\sin\theta\right) \\ \rho(V_{17}) &= \rho\left(1, 0, \tfrac{1}{2}\right) = \left(\tfrac{-1+\cos\theta}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{4}\sin\theta, \tfrac{-\cos\theta-1}{2} - \tfrac{\sqrt{2}}{4}\sin\theta, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta + \tfrac{1}{2}\cos\theta\right) \end{aligned}$$

elde edilir. $d_{TO}(V_1, V_{17}) = \frac{2}{3}$ *ve* $d_{TO}(V_5, V_{21}) = \frac{2}{3}$ *dir. Dolayısıyla* ρ *uzaklığı koruyacağından*

$$\begin{aligned} d_{TO}(\rho(V_1), \rho(V_{17})) &= \max\left\{\begin{array}{c} \frac{2}{3}\left\{\left|\frac{1-\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta}{4}\right| + \left|\frac{1+\cos\theta-\sqrt{2}\sin\theta}{4}\right| + \left|\frac{\sqrt{2}\sin\theta}{4} + \frac{1}{2}\cos\theta\right|\right\}, \\ \left|\frac{1-\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta}{4}\right|, \left|\frac{1+\cos\theta-\sqrt{2}\sin\theta}{4}\right|, \left|\frac{\sqrt{2}\sin\theta}{4} + \frac{1}{2}\cos\theta\right| \end{array}\right\} = \frac{2}{3} \\ d_{TO}(\rho(V_5), \rho(V_{17})) &= \max\left\{\begin{array}{c} \frac{2}{3}\left(\left|\frac{2\cos\theta-\sqrt{2}\sin\theta}{4}\right| + \left|\frac{1+\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta}{4}\right| + \left|\frac{\sqrt{2}\sin\theta-1+\cos\theta}{4}\right|\right), \\ \left|\frac{2\cos\theta-\sqrt{2}\sin\theta}{4}\right|, \left|\frac{1+\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta}{4}\right|, \left|\frac{\sqrt{2}\sin\theta-1+\cos\theta}{4}\right| \end{array}\right\} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

bulunur. Bu denklem sistemi çözülürse $\theta = \pi$ *bulunur. Burada elde edilen sonuca göre* $\sigma_\Pi r_\theta = \sigma_0$ *dönüşümü* $O = (0, 0, 0)$ *göre bir inversiyon olduğundan bu durumda yeni bir dönme yansıma yoktur. Benzer şekilde* Π *,* $x - y = 0$*,* $x + z = 0$*,* $x - z = 0$*,* $y + z = 0$*,* $y - z = 0$ *düzlemlerinden herhangi biri ise dönme eksenlerinin doğrultuları sırasıyla* $(1, -1, 0)$*,* $(1, 0, 1)$*,* $(1, 0, -1)$*,* $(0, 1, 1)$*,* $(0, 1, -1)$ *olup bu durumların her birinde* $\theta = \pi$ *sonucuna ulaşılır. Bu sonuç ise orijine göre inversiyon olduğundan bu durumların hiçbirinde bir dönme yansıma yoktur.*

Şekil4.7 deki tablolarda truncated octahedron birim küresinin köşe noktalarının dönme yansıma sonucu altındaki görüntüleri verilmiştir.

Yansıma Düzlemi Normali Olan Dönme Ekseni Doğrultu Vektörleri	Açılar	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8	V_9	V_{10}	V_{11}	V_{12}
(1,0,0)	$\theta = \pi/2$	V_{24}	V_{23}	V_{22}	V_{21}	V_{19}	V_{20}	V_{17}	V_{18}	V_{15}	V_{13}	V_{16}	V_{14}
	$\theta = \pi$	V_4	V_3	V_2	V_1	V_8	V_7	V_6	V_5	V_{12}	V_{11}	V_{10}	V_9
	$\theta = 3\pi/2$	V_{23}	V_{24}	V_{21}	V_{22}	V_{20}	V_{19}	V_{18}	V_{17}	V_{14}	V_{16}	V_{13}	V_{15}
(0,1,0)	$\theta = \pi/2$	V_{18}	V_{20}	V_{17}	V_{19}	V_{16}	V_{14}	V_{15}	V_{13}	V_{22}	V_{24}	V_{21}	V_{23}
	$\theta = \pi$	V_4	V_3	V_2	V_1	V_8	V_7	V_6	V_5	V_{12}	V_{11}	V_{10}	V_9
	$\theta = 3\pi/2$	V_{19}	V_{17}	V_{20}	V_{18}	V_{15}	V_{13}	V_{16}	V_{14}	V_{24}	V_{22}	V_{23}	V_{21}
(0,0,1)	$\theta = \pi/2$	V_{14}	V_{13}	V_{16}	V_{15}	V_{23}	V_{21}	V_{24}	V_{22}	V_{20}	V_{19}	V_{18}	V_{17}
	$\theta = \pi$	V_4	V_3	V_2	V_1	V_8	V_7	V_6	V_5	V_{12}	V_{11}	V_{10}	V_9
	$\theta = 3\pi/2$	V_{16}	V_{15}	V_{14}	V_{13}	V_{22}	V_{24}	V_{21}	V_{23}	V_{18}	V_{17}	V_{20}	V_{19}
(1,1,0)	$\theta = \pi$	V_4	V_3	V_2	V_1	V_8	V_7	V_6	V_5	V_{12}	V_{11}	V_{10}	V_9
(1,0,1)	$\theta = \pi$	V_4	V_3	V_2	V_1	V_8	V_7	V_6	V_5	V_{12}	V_{11}	V_{10}	V_9
(0,1,1)	$\theta = \pi$	V_4	V_3	V_2	V_1	V_8	V_7	V_6	V_5	V_{12}	V_{11}	V_{10}	V_9
(1,-1,0)	$\theta = \pi$	V_4	V_3	V_2	V_1	V_8	V_7	V_6	V_5	V_{12}	V_{11}	V_{10}	V_9
(1,0,-1)	$\theta = \pi$	V_4	V_3	V_2	V_1	V_8	V_7	V_6	V_5	V_{12}	V_{11}	V_{10}	V_9
(0,1,-1)	$\theta = \pi$	V_4	V_3	V_2	V_1	V_8	V_7	V_6	V_5	V_{12}	V_{11}	V_{10}	V_9

Yansıma Düzlemi Normali Olan Dönme Ekseni Doğrultu Vektörleri	Açılar	V_{13}	V_{14}	V_{15}	V_{16}	V_{17}	V_{18}	V_{19}	V_{20}	V_{21}	V_{22}	V_{23}	V_{24}
(1,0,0)	$\theta = \pi/2$	V_{11}	V_9	V_{12}	V_{10}	V_8	V_7	V_6	V_5	V_3	V_4	V_1	V_2
	$\theta = \pi$	V_{16}	V_{15}	V_{14}	V_{13}	V_{20}	V_{19}	V_{18}	V_{17}	V_{24}	V_{23}	V_{22}	V_{21}
	$\theta = 3\pi/2$	V_{10}	V_{12}	V_9	V_{11}	V_7	V_8	V_5	V_6	V_4	V_3	V_2	V_1
(0,1,0)	$\theta = \pi/2$	V_6	V_8	V_5	V_7	V_2	V_4	V_1	V_3	V_{12}	V_{10}	V_{11}	V_9
	$\theta = \pi$	V_{16}	V_{15}	V_{14}	V_{13}	V_{20}	V_{19}	V_{18}	V_{17}	V_{24}	V_{23}	V_{22}	V_{21}
	$\theta = 3\pi/2$	V_8	V_6	V_7	V_5	V_3	V_1	V_4	V_2	V_{11}	V_9	V_{12}	V_{10}
(0,0,1)	$\theta = \pi/2$	V_4	V_3	V_2	V_1	V_{10}	V_9	V_{12}	V_{11}	V_7	V_5	V_8	V_6
	$\theta = \pi$	V_{16}	V_{15}	V_{14}	V_{13}	V_{20}	V_{19}	V_{18}	V_{17}	V_{24}	V_{23}	V_{22}	V_{21}
	$\theta = 3\pi/2$	V_2	V_1	V_4	V_3	V_{12}	V_{11}	V_{10}	V_9	V_6	V_8	V_5	V_7
(1,1,0)	$\theta = \pi$	V_{16}	V_{15}	V_{14}	V_{13}	V_{20}	V_{19}	V_{18}	V_{17}	V_{24}	V_{23}	V_{22}	V_{21}
(1,0,1)	$\theta = \pi$	V_{16}	V_{15}	V_{14}	V_{13}	V_{20}	V_{19}	V_{18}	V_{17}	V_{24}	V_{23}	V_{22}	V_{21}
(0,1,1)	$\theta = \pi$	V_{16}	V_{15}	V_{14}	V_{13}	V_{20}	V_{19}	V_{18}	V_{17}	V_{24}	V_{23}	V_{22}	V_{21}
(1,-1,0)	$\theta = \pi$	V_{16}	V_{15}	V_{14}	V_{13}	V_{20}	V_{19}	V_{18}	V_{17}	V_{24}	V_{23}	V_{22}	V_{21}
(1,0,-1)	$\theta = \pi$	V_{16}	V_{15}	V_{14}	V_{13}	V_{20}	V_{19}	V_{18}	V_{17}	V_{24}	V_{23}	V_{22}	V_{21}
(0,1,-1)	$\theta = \pi$	V_{16}	V_{15}	V_{14}	V_{13}	V_{20}	V_{19}	V_{18}	V_{17}	V_{24}	V_{23}	V_{22}	V_{21}

Şekil 4.7 $\mathbb{R}^3_{TO}$ de Dönme Yansıma Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri

Önerme 4.5 *d_{TO} uzaklığını değişmez bırakan orijine göre sekiz tane dönme inversiyon vardır.*

İspat *Bir dönme inversiyon $r_\theta \in R_{TO}$ olmak üzere $\rho : \sigma_O\sigma_\Delta\sigma_\Gamma = \sigma_O r_\theta$ şeklinde ifade edilir. Buna göre Önerme 3.3 deki dönme eksenleri için 13 durum göz önüne alınmalıdır. r_θ,*

x ekseni etrafında dönme olarak tanımlanırsa, r_θ nın birim vektörü $(1,0,0)$ olur ve

$$\rho : \sigma_O r_\theta(x,y,z) = (-x, -y\cos\theta + z\sin\theta, -y\sin\theta - z\cos\theta)$$

dır.
$V_1 = \left(\frac{1}{2},0,1\right)$, $V_5 = \left(1,\frac{1}{2},0\right)$, $V_{17} = \left(1,0,\frac{1}{2}\right)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\rho(V_1) &= \rho\left(\tfrac{1}{2},0,1\right) = \left(-\tfrac{1}{2}, \sin\theta, -\cos\theta\right)\\
\rho(V_5) &= \rho\left(1,\tfrac{1}{2},0\right) = \left(-1, -\tfrac{1}{2}\cos\theta, -\tfrac{1}{2}\sin\theta\right)\\
\rho(V_{17}) &= \rho\left(1,0,\tfrac{1}{2}\right) = \left(-1, \tfrac{1}{2}\sin\theta, -\tfrac{1}{2}\cos\theta\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. $d_{TO}(V_1,V_{17}) = \frac{2}{3}$ ve $d_{TO}(V_5,V_{17}) = \frac{2}{3}$ tür. Dolayısıyla ρ uzaklığı koruyacağından dolayı

$$\begin{aligned}
d_{TO}(\rho(V_1),\rho(V_{17})) &= \max\left\{\tfrac{2}{3}\left|\tfrac{1}{2}\right| + \tfrac{2}{3}\left|\tfrac{1}{2}\cos\theta\right| + \tfrac{2}{3}\left|\tfrac{1}{2}\sin\theta\right|, \left|\tfrac{1}{2}\right|, \left|\tfrac{1}{2}\cos\theta\right|, \left|\tfrac{1}{2}\sin\theta\right|\right\} = \tfrac{2}{3}\\
d_{TO}(\rho(V_5),\rho(V_{17})) &= \max\left\{\tfrac{2}{3}\left(\left|\tfrac{\cos\theta-\sin\theta}{2}\right| + \left|\tfrac{\cos\theta-\sin\theta}{2}\right|\right), \left|\tfrac{\cos\theta-\sin\theta}{2}\right|, \left|\tfrac{\cos\theta-\sin\theta}{2}\right|\right\} = \tfrac{2}{3}
\end{aligned}$$

şeklinde oluşan denklemler çözülürse $\theta = \pi/2$, π, $3\pi/2$ elde edilir. Burada $\sigma_0 r_\theta$ bir dönme yansıması veya yansıma olduğundan bu durumda yeni bir dönme inversiyonu yoktur. Benzer şekilde y ve z eksenleri etrafındaki dönmeler için de yeni bir dönme inversiyonu yoktur.

r_θ doğrultu vektörü $(1,1,0)$ olan l doğrusu etrafındaki dönme ise r_θ nın birim vektörü $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ olur ve

$$\rho : \sigma_O r_\theta(x,y,z) = \begin{pmatrix} (\frac{-\cos\theta-1}{2})x + (\frac{\cos\theta-1}{2})y - (\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}})z, (\frac{\cos\theta-1}{2})x + (\frac{-1-\cos\theta}{2})y + (\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}})z, \\ (\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}})x - (\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}})y - \cos\theta z) \end{pmatrix}$$

dır. $V_1 = \left(\frac{1}{2},0,1\right)$, $V_5 = \left(1,\frac{1}{2},0\right)$ ve $V_{17} = \left(1,0,\frac{1}{2}\right)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\rho(V_1) &= \rho\left(\tfrac{1}{2},0,1\right) = \left(\tfrac{-1-\cos\theta}{4} - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta, \tfrac{\cos\theta-1}{4} + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta, \tfrac{\sqrt{2}}{4}\sin\theta - \cos\theta\right)\\
\rho(V_5) &= \rho\left(1,\tfrac{1}{2},0\right) = \left(\tfrac{-\cos\theta-3}{4}, \tfrac{\cos\theta-3}{4}, \tfrac{\sqrt{2}}{4}\sin\theta\right)\\
\rho(V_{17}) &= \rho\left(1,0,\tfrac{1}{2}\right) = \left(\tfrac{-1-\cos\theta}{2} - \tfrac{\sqrt{2}}{4}\sin\theta, \tfrac{\cos\theta-1}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{4}\sin\theta, \tfrac{\sqrt{2}\sin\theta-\cos\theta}{2}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. $d_{TO}(V_1,V_{17}) = \frac{2}{3}$ ve $d_{TO}(V_5,V_{17}) = \frac{2}{3}$ tür. Dolayısıyla ρ uzaklığı korumak zorunda olduğundan

$$\begin{aligned}
d_{TO}(\rho(V_1),\rho(V_{17})) &= \max\left\{\begin{array}{l} \frac{2}{3}\left(\left|\frac{1+\cos\theta-\sqrt{2}\sin\theta}{4}\right| + \left|\frac{1-\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta}{4}\right| + \left|-\frac{\sqrt{2}}{4}\sin\theta - \frac{1}{2}\cos\theta\right|\right), \\ \left|\frac{1+\cos\theta-\sqrt{2}\sin\theta}{4}\right|, \left|\frac{1-\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta}{4}\right|, \left|-\frac{\sqrt{2}}{4}\sin\theta - \frac{1}{2}\cos\theta\right| \end{array}\right\} = \frac{2}{3}\\
d_{TO}(\rho(V_5),\rho(V_{17})) &= \max\left\{\begin{array}{l} \frac{2}{3}\left(\left|\frac{2\cos\theta-\sqrt{2}\sin\theta}{4}\right| + \left|\frac{-1+\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta}{4}\right| + \left|\frac{\cos\theta+1+\sqrt{2}\sin\theta}{4}\right|\right), \\ \left|\frac{2\cos\theta-\sqrt{2}\sin\theta}{4}\right|, \left|\frac{-1+\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta}{4}\right|, \left|\frac{\cos\theta+1+\sqrt{2}\sin\theta}{4}\right| \end{array}\right\} = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunan denklem sistemi çözülürse $\theta = \pi$ sonucuna ulaşılır. Buradan $\rho = \sigma_O r_\theta$ bir dönme yansıması veya yansıma olduğundan yeni bir dönme inversiyonu yoktur.

Benzer şekilde r_θ *,* $(1,-1,0)$*,* $(1,0,1)$*,* $(1,0,-1)$*,* $(0,1,1)$*,* $(0,1,-1)$ *e paralel dönme eksenlerinden herhangi birisi ise yine yeni bir dönme inversiyonu yoktur.*

r_θ *doğrultu vektörü* $(1,1,1)$ *olan l doğrusu etrafındaki dönme ise* r_θ*nın birim vektörü* $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ *olur ve*

$$\rho : \sigma_O r_\theta(x,y,z) = \begin{pmatrix} (\frac{-2\cos\theta-1}{3})x + (\frac{\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta-1}{3})y + (\frac{\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta-1}{3})z, \\ \left(\frac{\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta-1}{3}\right)x + \left(\frac{-1-2\cos\theta}{3}\right)y + \left(\frac{\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta-1}{3}\right)z, \\ \left(\frac{\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta-1}{3}\right)x + \left(\frac{\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta-1}{3}\right)y + \left(\frac{-1-2\cos\theta}{3}\right)z \end{pmatrix}$$

dir.$V_1 = \left(\frac{1}{2}, 0, 1\right)$*,* $V_5 = \left(1, \frac{1}{2}, 0\right)$ *ve* $V_{17} = \left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$ *olmak üzere*

$$\begin{aligned} \rho(V_1) &= \rho\left(\tfrac{1}{2}, 0, 1\right) = \left(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta, \tfrac{-1+\cos\theta}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{6}\sin\theta, \tfrac{-1-\cos\theta}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{6}\sin\theta\right) \\ \rho(V_5) &= \rho\left(1, \tfrac{1}{2}, 0\right) = \left(\tfrac{-1-\cos\theta}{2} + \tfrac{\sqrt{3}\sin\theta}{6}, -\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}\sin\theta}{3}, \tfrac{-1+\cos\theta}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{6}\sin\theta,\right) \\ \rho(V_{17}) &= \rho\left(1, 0, \tfrac{1}{2}\right) = \left(\tfrac{-1-\cos\theta}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{6}\sin\theta, \tfrac{-1+\cos\theta}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{6}\sin\theta, -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta\right) \end{aligned}$$

elde edilir. $d_{TO}(V_1, V_{17}) = \frac{2}{3}$ *ve* $d_{TO}(V_5, V_{17}) = \frac{2}{3}$ *tür. Dolayısıyla* ρ *uzaklığı korumak zorunda olduğundan*

$$d_{TO}(\rho(V_1), \rho(V_{17})) = \max \left\{ \begin{array}{c} \frac{2}{3}\left(\left|-\frac{\sqrt{3}}{6}\sin\theta + \frac{1}{2}\cos\theta\right| + \left|\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right| + \left|-\frac{1}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{6}\sin\theta\right|\right), \\ \left|-\frac{\sqrt{3}}{6}\sin\theta + \frac{1}{2}\cos\theta\right|, \left|\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right|, \left|-\frac{1}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{6}\sin\theta\right| \end{array} \right\} = \frac{2}{3}$$

$$d_{TO}(\rho(V_5), \rho(V_{17})) = \max \left\{ \begin{array}{c} \frac{2}{3}\left(\left|\frac{\cos\theta}{2} - \frac{\sqrt{3}\sin\theta}{6}\right| + \frac{\sqrt{3}}{3}\left|\sin\theta\right| + \left|\frac{\cos\theta}{2} + \frac{\sqrt{3}\sin\theta}{6}\right|\right), \\ \left|\frac{\cos\theta}{2} - \frac{\sqrt{3}\sin\theta}{6}\right|, \frac{\sqrt{3}}{3}\left|\sin\theta\right|, \left|\frac{\cos\theta}{2} + \frac{\sqrt{3}\sin\theta}{6}\right| \end{array} \right\} = \frac{2}{3}$$

bulunur. Bu denklem sistemi çözülürse $\theta = 2\pi/3, 4\pi/3$ *olur. Bu durumda* $(1,1,1)$ *doğrultu vektörü olan* l *doğrusu etrafındaki dönme kullanılarak 2 tane dönme inversiyonu elde edilir. Benzer şekilde* $(-1,1,1)$*,* $(1,-1,1)$*,* $(1,1,-1)$ *doğrultulu eksenler etrafındaki dönmeler kullanılarak her biri için iki yeni dönme inversiyon elde edilir. Burada* d_{TO} *uzaklığını koruyan tam olarak sekiz dönme inversiyonu vardır.*

Şekil4.8 deki tablolar truncated octahedron birim küresinin köşe noktalarının dönme inversiyon altındaki görüntülerini vermektedir.

Dönme Ekseni Doğrultu Vektörleri	Açılar	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8	V_9	V_{10}	V_{11}	V_{12}
(1,0,0)	$\theta = \pi/2$	V_{23}	V_{24}	V_{21}	V_{22}	V_{20}	V_{19}	V_{18}	V_{17}	V_{14}	V_{16}	V_{13}	V_{15}
	$\theta = \pi$	V_3	V_4	V_1	V_2	V_7	V_8	V_5	V_6	V_9	V_{10}	V_{11}	V_{12}
	$\theta = 3\pi/2$	V_{24}	V_{23}	V_{22}	V_{21}	V_{19}	V_{20}	V_{17}	V_{18}	V_{15}	V_{13}	V_{16}	V_{14}
(0,1,0)	$\theta = \pi/2$	V_{19}	V_{17}	V_{20}	V_{18}	V_{15}	V_{13}	V_{16}	V_{14}	V_{24}	V_{22}	V_{23}	V_{21}
	$\theta = \pi$	V_1	V_2	V_3	V_4	V_6	V_5	V_8	V_7	V_{11}	V_{12}	V_9	V_{10}
	$\theta = 3\pi/2$	V_{18}	V_{20}	V_{17}	V_{19}	V_{16}	V_{14}	V_{15}	V_{13}	V_{22}	V_{24}	V_{21}	V_{23}
(0,0,1)	$\theta = \pi/2$	V_{16}	V_{15}	V_{14}	V_{13}	V_{22}	V_{24}	V_{21}	V_{23}	V_{18}	V_{17}	V_{20}	V_{19}
	$\theta = \pi$	V_2	V_1	V_4	V_3	V_5	V_6	V_7	V_8	V_{10}	V_9	V_{12}	V_{11}
	$\theta = 3\pi/2$	V_{14}	V_{13}	V_{16}	V_{15}	V_{23}	V_{21}	V_{24}	V_{22}	V_{20}	V_{19}	V_{18}	V_{17}
(1,1,1)	$\theta = 2\pi/3$	V_8	V_6	V_7	V_5	V_{12}	V_{11}	V_{10}	V_9	V_4	V_2	V_3	V_1
	$\theta = 4\pi/3$	V_{12}	V_{10}	V_{11}	V_9	V_4	V_2	V_3	V_1	V_8	V_7	V_6	V_5
(-1,1,1)	$\theta = 2\pi/3$	V_{11}	V_9	V_{12}	V_{10}	V_1	V_3	V_2	V_4	V_6	V_5	V_8	V_7
	$\theta = 4\pi/3$	V_5	V_7	V_6	V_8	V_{10}	V_9	V_{12}	V_{11}	V_2	V_4	V_1	V_3
(1,-1,1)	$\theta = 2\pi/3$	V_{10}	V_{12}	V_9	V_{11}	V_2	V_4	V_1	V_3	V_5	V_6	V_7	V_8
	$\theta = 4\pi/3$	V_7	V_5	V_8	V_6	V_9	V_{10}	V_{11}	V_{12}	V_3	V_1	V_4	V_2
(1,1,-1)	$\theta = 2\pi/3$	V_9	V_{11}	V_{10}	V_{12}	V_3	V_1	V_4	V_2	V_7	V_8	V_5	V_6
	$\theta = 4\pi/3$	V_6	V_8	V_5	V_7	V_{11}	V_{12}	V_9	V_{10}	V_1	V_3	V_2	V_4
(1,1,0)	$\theta = \pi$	V_{15}	V_{16}	V_{13}	V_{14}	V_{24}	V_{22}	V_{23}	V_{21}	V_{19}	V_{20}	V_{17}	V_{18}
(1,0,1)	$\theta = \pi$	V_{20}	V_{18}	V_{19}	V_{17}	V_{14}	V_{16}	V_{13}	V_{15}	V_{23}	V_{21}	V_{24}	V_{22}
(0,1,1)	$\theta = \pi$	V_{22}	V_{21}	V_{24}	V_{23}	V_{18}	V_{17}	V_{20}	V_{19}	V_{16}	V_{14}	V_{15}	V_{13}
(1,-1,0)	$\theta = \pi$	V_{13}	V_{14}	V_{15}	V_{16}	V_{21}	V_{23}	V_{22}	V_{24}	V_{17}	V_{18}	V_{19}	V_{20}
(1,0,-1)	$\theta = \pi$	V_{17}	V_{19}	V_{18}	V_{20}	V_{13}	V_{15}	V_{14}	V_{16}	V_{21}	V_{23}	V_{22}	V_{24}
(0,1,-1)	$\theta = \pi$	V_{21}	V_{22}	V_{23}	V_{24}	V_{17}	V_{18}	V_{19}	V_{20}	V_{13}	V_{15}	V_{14}	V_{16}

Dönme Ekseni Doğrultu Vektörleri	Açılar	V_{13}	V_{14}	V_{15}	V_{16}	V_{17}	V_{18}	V_{19}	V_{20}	V_{21}	V_{22}	V_{23}	V_{24}
(1,0,0)	$\theta = \pi/2$	V_{10}	V_{12}	V_9	V_{11}	V_7	V_8	V_5	V_6	V_4	V_3	V_2	V_1
	$\theta = \pi$	V_{13}	V_{14}	V_{15}	V_{16}	V_{19}	V_{20}	V_{17}	V_{18}	V_{23}	V_{24}	V_{21}	V_{22}
	$\theta = 3\pi/2$	V_{11}	V_9	V_{12}	V_{10}	V_8	V_7	V_6	V_5	V_3	V_4	V_1	V_2
(0,1,0)	$\theta = \pi/2$	V_8	V_6	V_7	V_5	V_3	V_1	V_4	V_2	V_{11}	V_9	V_{12}	V_{10}
	$\theta = \pi$	V_{15}	V_{16}	V_{13}	V_{14}	V_{17}	V_{18}	V_{19}	V_{20}	V_{22}	V_{21}	V_{24}	V_{23}
	$\theta = 3\pi/2$	V_6	V_8	V_5	V_7	V_2	V_4	V_1	V_3	V_{12}	V_{10}	V_{11}	V_9
(0,0,1)	$\theta = \pi/2$	V_2	V_1	V_4	V_3	V_{12}	V_{11}	V_{10}	V_9	V_6	V_8	V_5	V_7
	$\theta = \pi$	V_{14}	V_{13}	V_{16}	V_{15}	V_{18}	V_{17}	V_{20}	V_{19}	V_{21}	V_{22}	V_{23}	V_{24}
	$\theta = 3\pi/2$	V_4	V_3	V_2	V_1	V_{10}	V_9	V_{12}	V_{11}	V_7	V_5	V_8	V_6
(1,1,1)	$\theta = 2\pi/3$	V_{20}	V_{18}	V_{19}	V_{17}	V_{24}	V_{22}	V_{23}	V_{21}	V_{16}	V_{15}	V_{14}	V_{13}
	$\theta = 4\pi/3$	V_{24}	V_{23}	V_{22}	V_{21}	V_{16}	V_{14}	V_{15}	V_{13}	V_{20}	V_{18}	V_{19}	V_{17}
(-1,1,1)	$\theta = 2\pi/3$	V_{22}	V_{21}	V_{24}	V_{23}	V_{15}	V_{13}	V_{16}	V_{14}	V_{17}	V_{19}	V_{18}	V_{20}
	$\theta = 4\pi/3$	V_{18}	V_{20}	V_{17}	V_{19}	V_{21}	V_{23}	V_{22}	V_{24}	V_{14}	V_{13}	V_{16}	V_{15}
(1,-1,1)	$\theta = 2\pi/3$	V_{21}	V_{22}	V_{23}	V_{24}	V_{14}	V_{16}	V_{13}	V_{15}	V_{18}	V_{20}	V_{17}	V_{19}
	$\theta = 4\pi/3$	V_{19}	V_{17}	V_{20}	V_{18}	V_{23}	V_{21}	V_{24}	V_{22}	V_{13}	V_{14}	V_{15}	V_{16}
(1,1,-1)	$\theta = 2\pi/3$	V_{23}	V_{24}	V_{21}	V_{22}	V_{13}	V_{15}	V_{14}	V_{16}	V_{19}	V_{17}	V_{20}	V_{18}
	$\theta = 4\pi/3$	V_{17}	V_{19}	V_{18}	V_{20}	V_{22}	V_{24}	V_{21}	V_{23}	V_{15}	V_{16}	V_{13}	V_{14}
(1,1,0)	$\theta = \pi$	V_3	V_4	V_1	V_2	V_{11}	V_{12}	V_9	V_{10}	V_8	V_6	V_7	V_5
(1,0,1)	$\theta = \pi$	V_7	V_5	V_8	V_6	V_4	V_2	V_3	V_1	V_{10}	V_{12}	V_9	V_{11}
(0,1,1)	$\theta = \pi$	V_{12}	V_{10}	V_{11}	V_9	V_6	V_5	V_8	V_7	V_2	V_1	V_4	V_3
(1,-1,0)	$\theta = \pi$	V_1	V_2	V_3	V_4	V_9	V_{10}	V_{11}	V_{12}	V_5	V_7	V_6	V_8
(1,0,-1)	$\theta = \pi$	V_5	V_7	V_6	V_8	V_1	V_3	V_2	V_4	V_9	V_{11}	V_{10}	V_{12}
(0,1,-1)	$\theta = \pi$	V_9	V_{11}	V_{10}	V_{12}	V_5	V_6	V_7	V_8	V_1	V_2	V_3	V_4

Şekil 4.8 $\mathbb{R}^3_{TO}$ de Dönme İnversiyon Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri

Buraya kadar olan kısımda Öklidyen $3-$uzayın izometrilerinden hangilerinin d_{TO} metriğini koruduğu bulunmuştur. Daha açıkça Öklidyen $3-$uzayın izometrilerinden dokuz yansıma, yirmi dört dönme, altı dönme-yansıma, sekiz dönme-inversiyon ve bir inversiyonun d_{TO} metriğini koruduğu gösterilmiştir. Bu tespit edilen dönüşümler truncated octahedronun Öklidyen simetri grubu olan O_h (octahedral grup) dönüşümleridir. Bu gruba truncated octahedron grup denilsin ve $G(TO)$ ile gösterilsin. Açıkça $G(TO)$, O_h grubuna izomorftur. Bundan sonra bu dönüşümlerden başka d_{TO} metriğini koruyan izometrinin olmadığı gösterilecektir. Yani $\mathbb{R}^3_{TO}$ un tüm izometrilerinin $T(3).G(TO)$ olduğu gösterilecektir.

Tanım 4.2 *$A = (a_1, a_2, a_3)$ ve $B = (b_1, b_2, b_3)$ $\mathbb{R}^3_{TO}$ uzayında farklı iki nokta olsun. Bu taktirde*

$$\{X \mid d_{TO}(A, X) + d_{TO}(B, X) = d_{TO}(A, B)\}$$

kümesine A, B noktalarının minimum uzaklık kümesi denir ve $[AB]$ ile gösterilir.

Genel olarak, $[AB]$ kümesi AB köşegenli bir onikiyüzlü oluşturur (Bakınız Şekil4.9).

Şekil 4.9 $\mathbb{R}^3_{TO}$ da Minimum Uzaklık Kümesi

Buradaki minimum uzaklık kümesi $y = 0$, $-x+2y+2z = 0$, $z = 0$, $2x-y+2z = 0$, $x = 0$, $2x + 2y - z = 0$ düzlemleri ve bunlara paralel düzlemlerle oluşan onikiyüzlüdür.

Önerme 4.6 *$\phi : \mathbb{R}^3_{TO} \to \mathbb{R}^3_{TO}$ bir izometri ve $[AB]$ paralelyüz olsun. O halde*

$$\phi([AB]) = [\phi(A)\phi(B)]$$

olur.

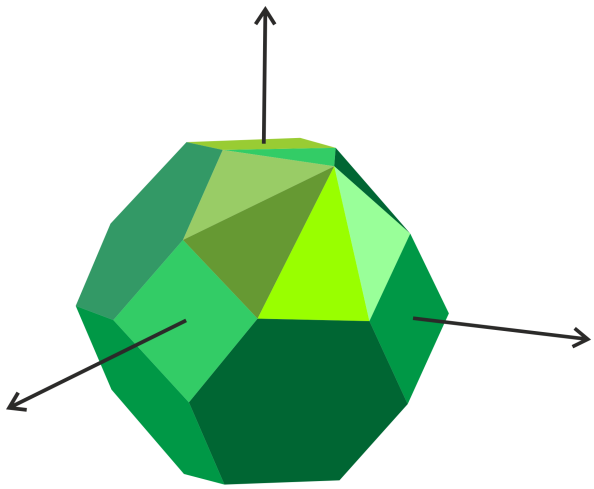
İspat *$Y \in \phi([AB])$ olsun.*

$$\begin{aligned} Y \in \phi([AB]) &\iff \exists X \in [AB] \ni Y = \phi(X) \\ &\iff d_{TO}(A,X) + d_{TO}(B,X) = d_{TO}(A,B) \\ &\iff d_{TO}(\phi(A),\phi(X)) + d_{TO}(\phi(B),\phi(X)) = d_{TO}(\phi(A),\phi(B)) \\ &\iff Y = \phi(X) \in [\phi(A)\phi(B)]\,. \end{aligned}$$

Sonuç 4.6 *$\phi : \mathbb{R}^3_{TO} \to \mathbb{R}^3_{TO}$ bir izometri ve $[AB]$ paralelyüz olsun. Bu durumda ϕ, $[AB]$ nin köşelerini köşelere dönüştürür ve kenar uzunluklarını korur.*

Önerme 4.7 *$f : \mathbb{R}^3_{TO} \to \mathbb{R}^3_{TO}$ dönüşümü $f(O) = O$ olacak şekilde bir izometri olsun. Bu taktirde $f \in G(TO)$ olur.*

İspat *$O = (0,0,0)$ ve $D = (1,1,1)$ olmak üzere $[OD]$ onikiyüzlüsünü gözönüne alalım. Bu onikiyüzlünün köşe noktalarından altısı $V_1 = \left(\frac{1}{2},0,1\right)$, $V_{17} = \left(1,0,\frac{1}{2}\right)$, $V_5 = \left(1,\frac{1}{2},0\right)$, $V_{21} = \left(\frac{1}{2},1,0\right)$,$V_9 = \left(0,1,\frac{1}{2}\right)$ ve $V_{13} = \left(0,\frac{1}{2},1\right)$olup bu noktalar aynı zamanda merkezil birim truncated octahedron birim küresinin köşe noktalarıdır. Dahası bu altı nokta truncated octahedronun her biri aynı düzgün altıgen olan bir yüzünün köşe noktalarıdır (Bakınız Şekil4.10).*



Şekil 4.10 $\mathbb{R}^3_{TO}$ da Birim Küre Ve Minimum Uzaklık Kümesi

f izometrisi $[OD]$ onikiyüzlüsünün köşe noktalarını köşe noktalara dönüştürüp, kenar uzaklıklarını korduğundan ve $f(O) = O$ olduğundan dolayı V_1, V_{17}, V_5 , V_{21}, V_9 ve V_{13} noktalarını truncated octahedronun yine bir yüzünün köşe noktalarına dönüştürür. Ayrıca bu dönüştürme işlemi gerçekleşirken kenar uzunlukları korunacağından dolayı $i, j, k, l, m, n \in \{1, 2, \ldots, 24\}$ ve V_iV_j, V_jV_k, V_kV_l, V_lV_m, V_mV_n ve V_nV_i truncated octahedronun altı kenarı olmak üzere $f(V_1) = V_i$, $f(V_{17}) = V_j$, $f(V_5) = V_k$, $f(V_{21}) = V_l$, $f(V_9) = V_m$ ve $f(V_{13}) = V_n$ olur. Açıkça ifade edilirse f izometrisi, truncated octahedronun bir yüzünün köşe noktalarını yine bir yüzünün köşe noktalarına dönüştürür. O halde truncated octahedron 8 tane düzgün altıgen yüze sahip olduğundan bir yüzün dönüşebileceği 8 yüz ihtimali vardır. Ayrıca kenar uzunlukları korunmak zorunda olduğundan V_1 noktası bu yüz üzerinde dönüşebileceği noktalar altı şekilde belli iken diğer beş köşenin noktaları olan V_{17}, V_5, V_{21}, V_9 ve V_{13} için bir tek ihtimal vardır. Bu taktirde truncated octahedronun her bir yüzü için 6 ihtimal olduğundan dolayı bu noktaların dönüşebileceği 48 ihtimal vardır. Bu ihtimaller ise aşağıda tek tek sıralanmış ve her bir dönüşümün önceden tespit edilen hareketlerden hangisine karşılık geldiği ifade edilmiştir.

1. $f(V_1) = V_3$, $f(V_{17}) = V_{19}$, $f(V_5) = V_7$, $f(V_{21}) = V_{23}$, $f(V_9) = V_9$ ve $f(V_{13}) = V_{13}$ ise $\Delta : x = 0$ düzlemi olmak üzere $f = \sigma_\Delta$ yansımasıdır.

2. $f(V_1) = V_1$, $f(V_{17}) = V_{17}$, $f(V_5) = V_6$, $f(V_{21}) = V_{22}$, $f(V_9) = V_{11}$ ve $f(V_{13}) = V_{15}$ ise $\Delta : y = 0$ düzlemi olmak üzere $f = \sigma_\Delta$ yansımasıdır.

3. $f(V_1) = V_2$, $f(V_{17}) = V_{18}$, $f(V_5) = V_5$, $f(V_{21}) = V_{21}$, $f(V_9) = V_{10}$ ve $f(V_{13}) = V_{14}$ ise $\Delta : z = 0$ düzlemi olmak üzere $f = \sigma_\Delta$ yansımasıdır.

4. $f(V_1) = V_{15}$, $f(V_{17}) = V_{11}$, $f(V_5) = V_{24}$, $f(V_{21}) = V_8$, $f(V_9) = V_{19}$ ve $f(V_{13}) = V_3$ ise $\Delta : x + y = 0$ düzlemi olmak üzere $f = \sigma_\Delta$ yansımasıdır.

5. $f(V_1) = V_{20}$, $f(V_{17}) = V_4$, $f(V_5) = V_{14}$, $f(V_{21}) = V_{10}$, $f(V_9) = V_{23}$ ve $f(V_{13}) = V_7$ ise $\Delta : x + z = 0$ düzlemi olmak üzere $f = \sigma_\Delta$ yansımasıdır.

6. $f(V_1) = V_{22}$, $f(V_{17}) = V_6$, $f(V_5) = V_{18}$, $f(V_{21}) = V_2$, $f(V_9) = V_{16}$ ve $f(V_{13}) = V_{12}$ ise $\Delta : y + z = 0$ düzlemi olmak üzere $f = \sigma_\Delta$ yansımasıdır.

7. $f(V_1) = V_{13}$, $f(V_{17}) = V_9$, $f(V_5) = V_{21}$, $f(V_{21}) = V_5$, $f(V_9) = V_{17}$ ve $f(V_{13}) = V_1$ ise $\Delta : x - y = 0$ düzlemi olmak üzere $f = \sigma_\Delta$ yansımasıdır.

8. $f(V_1) = V_{17}$, $f(V_{17}) = V_1$, $f(V_5) = V_{13}$, $f(V_{21}) = V_9$, $f(V_9) = V_{21}$ ve $f(V_{13}) = V_5$ ise $\Delta : x - z = 0$ düzlemi olmak üzere $f = \sigma_\Delta$ yansımasıdır.

9. $f(V_1) = V_{21}$, $f(V_{17}) = V_5$, $f(V_5) = V_{17}$, $f(V_{21}) = V_1$, $f(V_9) = V_{13}$ *ve* $f(V_{13}) = V_9$ *ise* $\Delta : y - z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *yansımasıdır.*

10. $f(V_1) = V_{22}$, $f(V_{17}) = V_6$, $f(V_5) = V_{17}$, $f(V_{21}) = V_1$, $f(V_9) = V_{15}$ *ve* $f(V_{13}) = V_{11}$ *ise dönme ekseni* $(1, 0, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{\Pi}{2}}$ *dönmesidir.*

11. $f(V_1) = V_2$, $f(V_{17}) = V_{18}$, $f(V_5) = V_6$, $f(V_{21}) = V_{22}$, $f(V_9) = V_{12}$ *ve* $f(V_{13}) = V_{16}$ *ise dönme ekseni* $(1, 0, 0)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmesidir.*

12. $f(V_1) = V_{21}$ *ise* $f(V_{17}) = V_5$, $f(V_5) = V_{18}$, $f(V_{21}) = V_2$, $f(V_9) = V_{14}$ *ve* $f(V_{13}) = V_{10}$ *ise dönme ekseni* $(1, 0, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{3\Pi}{2}}$ *dönmesidir.*

13. $f(V_1) = V_{18}$ *ise* $f(V_{17}) = V_2$, $f(V_5) = V_{14}$, $f(V_{21}) = V_{10}$, $f(V_9) = V_{21}$ *ve* $f(V_{13}) = V_5$ *ise dönme ekseni* $(0, 1, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{\Pi}{2}}$ *dönmesidir.*

14. $f(V_1) = V_4$ *ise* $f(V_{17}) = V_{20}$, $f(V_5) = V_7$, $f(V_{21}) = V_{23}$, $f(V_9) = V_{10}$ *ve* $f(V_{13}) = V_{14}$ *ise dönme ekseni* $(0, 1, 0)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmesidir.*

15. $f(V_1) = V_{19}$ *ise* $f(V_{17}) = V_3$, $f(V_5) = V_{13}$, $f(V_{21}) = V_9$, $f(V_9) = V_{23}$ *ve* $f(V_{13}) = V_7$ *ise dönme ekseni* $(0, 1, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{3\Pi}{2}}$ *dönmesidir.*

16. $f(V_1) = V_{13}$ *ise* $f(V_{17}) = V_9$, $f(V_5) = V_{23}$, $f(V_{21}) = V_7$, $f(V_9) = V_{19}$ *ve* $f(V_{13}) = V_3$ *ise dönme ekseni* $(0, 0, 1)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{\Pi}{2}}$ *dönmesidir.*

17. $f(V_1) = V_3$ *ise* $f(V_{17}) = V_{19}$, $f(V_5) = V_8$, $f(V_{21}) = V_{24}$, $f(V_9) = V_{11}$ *ve* $f(V_{13}) = V_{15}$ *ise dönme ekseni* $(0, 0, 1)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmesidir.*

18. $f(V_1) = V_{15}$ *ise* $f(V_{17}) = V_{11}$, $f(V_5) = V_{22}$, $f(V_{21}) = V_6$, $f(V_9) = V_{17}$ *ve* $f(V_{13}) = V_1$ *ise dönme ekseni* $(0, 0, 1)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{3\Pi}{2}}$ *dönmesidir.*

19. $f(V_1) = V_{14}$ *ise* $f(V_{17}) = V_{10}$, $f(V_5) = V_{21}$, $f(V_{21}) = V_5$, $f(V_9) = V_{18}$ *ve* $f(V_{13}) = V_2$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmesidir.*

20. $f(V_1) = V_{17}$ *ise* $f(V_{17}) = V_1$, $f(V_5) = V_{15}$, $f(V_{21}) = V_{11}$, $f(V_9) = V_{22}$ *ve* $f(V_{13}) = V_6$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmesidir.*

21. $f(V_1) = V_{23}$ *ise* $f(V_{17}) = V_7$, $f(V_5) = V_{19}$, $f(V_{21}) = V_3$, $f(V_9) = V_{13}$ *ve* $f(V_{13}) = V_9$ *ise dönme ekseni* $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmesidir.*

22. $f(V_1) = V_{16}$ *ise* $f(V_{17}) = V_{12}$, $f(V_5) = V_{24}$, $f(V_{21}) = V_8$, $f(V_9) = V_{20}$ *ve* $f(V_{13}) = V_4$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmesidir.*

23. $f(V_1) = V_{20}$ *ise* $f(V_{17}) = V_4$, $f(V_5) = V_{16}$, $f(V_{21}) = V_{12}$, $f(V_9) = V_{24}$ *ve* $f(V_{13}) = V_8$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmesidir.*

24. $f(V_1) = V_{24}$ *ise* $f(V_{17}) = V_8$, $f(V_5) = V_{20}$, $f(V_{21}) = V_4$, $f(V_9) = V_{16}$ *ve* $f(V_{13}) = V_{12}$ *ise dönme ekseni* $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmesidir.*

25. $f(V_1) = V_5$ *ise* $f(V_{17}) = V_{21}$, $f(V_5) = V_9$, $f(V_{21}) = V_{13}$, $f(V_9) = V_1$ *ve* $f(V_{13}) = V_{17}$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmesidir.*

26. $f(V_1) = V_9$ *ise* $f(V_{17}) = V_{13}$, $f(V_5) = V_1$, $f(V_{21}) = V_{17}$, $f(V_9) = V_5$ *ve* $f(V_{13}) = V_{21}$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmesidir.*

27. $f(V_1) = V_{10}$ *ise* $f(V_{17}) = V_{14}$, $f(V_5) = V_4$, $f(V_{21}) = V_{20}$, $f(V_9) = V_7$ *ve* $f(V_{13}) = V_{23}$ *ise dönme ekseni* $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmesidir.*

28. $f(V_1) = V_8$ *ise* $f(V_{17}) = V_{24}$, $f(V_5) = V_{11}$, $f(V_{21}) = V_{15}$, $f(V_9) = V_3$ *ve* $f(V_{13}) = V_{19}$ *ise dönme ekseni* $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmesidir.*

29. $f(V_1) = V_{11}$ *ise* $f(V_{17}) = V_{15}$, $f(V_5) = V_3$, $f(V_{21}) = V_{19}$, $f(V_9) = V_8$ *ve* $f(V_{13}) = V_{24}$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmesidir.*

30. $f(V_1) = V_6$ *ise* $f(V_{17}) = V_{22}$, $f(V_5) = V_{12}$, $f(V_{21}) = V_{16}$, $f(V_9) = V_2$ *ve* $f(V_{13}) = V_{18}$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmesidir.*

31. $f(V_1) = V_{12}$ *ise* $f(V_{17}) = V_{16}$, $f(V_5) = V_2$, $f(V_{21}) = V_{18}$, $f(V_9) = V_6$ *ve* $f(V_{13}) = V_{22}$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmesidir.*

32. $f(V_1) = V_7$ *ise* $f(V_{17}) = V_{23}$, $f(V_5) = V_{10}$, $f(V_{21}) = V_{14}$, $f(V_9) = V_4$ *ve* $f(V_{13}) = V_{20}$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmesidir.*

33. $f(V_1) = V_8$, $f(V_{17}) = V_{24}$, $f(V_5) = V_{12}$, $f(V_{21}) = V_{16}$, $f(V_9) = V_4$ *ve* $f(V_{13}) = V_{20}$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

34. $f(V_1) = V_{12}$ *ise* $f(V_{17}) = V_{16}$, $f(V_5) = V_4$, $f(V_{21}) = V_{20}$, $f(V_9) = V_8$ *ve* $f(V_{13}) = V_{24}$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur*

35. $f(V_1) = V_{11}$ *ise* $f(V_{17}) = V_{15}$, $f(V_5) = V_1$, $f(V_{21}) = V_{17}$, $f(V_9) = V_6$ *ve* $f(V_{13}) = V_{22}$ *ise dönme ekseni* $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur*

36. $f(V_1) = V_5$ *ise* $f(V_{17}) = V_{21}$, $f(V_5) = V_{10}$, $f(V_{21}) = V_{14}$, $f(V_9) = V_2$ *ve* $f(V_{13}) = V_{18}$ *ise dönme ekseni* $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

37. $f(V_1) = V_{10}$ *ise* $f(V_{17}) = V_{14}$, $f(V_5) = V_2$, $f(V_{21}) = V_{18}$, $f(V_9) = V_5$ *ve* $f(V_{13}) = V_{21}$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

38. $f(V_1) = V_7$ *ise* $f(V_{17}) = V_{23}$, $f(V_5) = V_9$, $f(V_{21}) = V_{13}$, $f(V_9) = V_3$ *ve* $f(V_{13}) = V_{19}$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

39. $f(V_1) = V_9$ *ise* $f(V_{17}) = V_{13}$, $f(V_5) = V_3$, $f(V_{21}) = V_{19}$, $f(V_9) = V_7$ *ve* $f(V_{13}) = V_{23}$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

40. $f(V_1) = V_6$ *ise* $f(V_{17}) = V_{22}$, $f(V_5) = V_{11}$, $f(V_{21}) = V_{15}$, $f(V_9) = V_1$ *ve* $f(V_{13}) = V_{17}$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

41. $f(V_1) = V_{24}$, $f(V_{17}) = V_8$, $f(V_5) = V_{19}$, $f(V_{21}) = V_3$, $f(V_9) = V_{15}$ *ve* $f(V_{13}) = V_{11}$ *ise* $\Delta : x = 0$ *ve dönme ekseni* $(1, 0, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_\Delta r_{\frac{\pi}{2}}$ *dönme yansımasıdır.*

42. $f(V_1) = V_{23}$ *ise* $f(V_{17}) = V_7$, $f(V_5) = V_{20}$, $f(V_{21}) = V_4$, $f(V_9) = V_{14}$ *ve* $f(V_{13}) = V_{10}$ *ise* $\Delta : x = 0$ *ve dönme ekseni* $(1, 0, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_\Delta r_{\frac{3\pi}{2}}$ *dönme yansımasıdır.*

43. $f(V_1) = V_{18}$ *ise* $f(V_{17}) = V_2$, $f(V_5) = V_{16}$, $f(V_{21}) = V_{12}$, $f(V_9) = V_{22}$ *ve* $f(V_{13}) = V_6$ *ise* $\Delta : y = 0$ *ve dönme ekseni* $(0, 1, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_\Delta r_{\frac{\pi}{2}}$ *dönme yansımasıdır.*

44. $f(V_1) = V_{19}$ *ise* $f(V_{17}) = V_3$, $f(V_5) = V_{15}$, $f(V_{21}) = V_{11}$, $f(V_9) = V_{24}$ *ve* $f(V_{13}) = V_8$ *ise* $\Delta : y = 0$ *ve dönme ekseni* $(0, 1, 0)$ *olmak üzere* $f = \sigma_\Delta r_{\frac{3\pi}{2}}$ *dönme yansımasıdır.*

45. $f(V_1) = V_{14}$ *ise* $f(V_{17}) = V_{10}$, $f(V_5) = V_{23}$, $f(V_{21}) = V_7$, $f(V_9) = V_{20}$ *ve* $f(V_{13}) = V_4$ *ise* $\Delta : z = 0$ *ve dönme ekseni* $(0,0,1)$ *olmak üzere* $f = \sigma_\Delta r_{\frac{\pi}{2}}$ *dönme yansımasıdır.*

46. $f(V_1) = V_{16}$ *ise* $f(V_{17}) = V_{12}$, $f(V_5) = V_{22}$, $f(V_{21}) = V_6$, $f(V_9) = V_{18}$ *ve* $f(V_{13}) = V_2$ *ise* $\Delta : z = 0$ *ve dönme ekseni* $(0,0,1)$ *olmak üzere* $f = \sigma_\Delta r_{\frac{3\pi}{2}}$ *dönme yansımasıdır.*

47. $f(V_1) = V_1$,$f(V_{17}) = V_{17}$, $f(V_5) = V_5$, $f(V_{21}) = V_{21}$, $f(V_9) = V_9$ *ve* $f(V_{13}) = V_{13}$ *ise* f *birim dönüşümdür.*

48. $f(V_1) = V_4$,$f(V_{17}) = V_{20}$, $f(V_5) = V_8$, $f(V_{21}) = V_{24}$, $f(V_9) = V_{12}$ *ve* $f(V_{13}) = V_{16}$ *ise* f *inversiyondur.*

Buna göre orijini koruyan f *izometrisi* $G(TO)$ *nun bir elemanıdır. Bir başka deyişle truncated octahedron uzaklığını koruyan Öklidyen izometriler dışında bir izometri yoktur.*

Teorem 4.3 $f : \mathbb{R}^3_{TO} \to \mathbb{R}^3_{TO}$ *dönüşümü bir izometri olsun.* $f = T_A \circ g$ *olacak şekilde bir tek* $T_A \in T(3)$ *ve* $g \in G(TO)$ *vardır.*

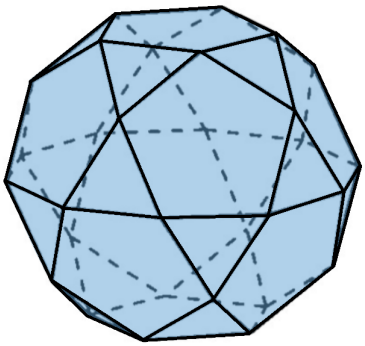
İspat $A = (a_1, a_2, a_3)$ *olmak üzere* $f(O) = A$ *olsun. Bu taktirde* $g = T_{-A} \circ f$ *olacak şekilde tanımlı* g *dönüşümü bir izometridir ve* $g(O) = O$ *olur. Böylece Önerme 3.7 den dolayı* $g \in G(TO)$ *ve* $f = T_A \circ g$ *olur. İspatın tekliği aşikardır.*

Buna göre truncated octahedron metriği ile donatılmış analitik $3-$uzayın izometrilerinin grubu truncated octahedronun (Öklidyen) simetri grubu olan O_h ile $3-$boyutlu analitik uzayın tüm ötelemelerinin grubu olan $T(3)$ ün yarı-direkt çarpımıdır. Yani $\mathbb{R}^3_{TO}$ nun tüm izometrilerinin kümesi $T(3).G(TO)$ dur.

5. ICOSIDODECAHEDRON UZAYI

5.1 Icosidodecahedron Metriği ve Özellikleri

İcosidodecahedron 20 üçgensel ve 12 beşgensel yüze sahip bir arşimed cismidir. Her birinde 2 üçgen ve 2 beşgenin buluştuğu 30 eş köşeye ve her biri bir üçgeni bir beşgenden ayıran 60 eş kenara sahiptir. İcosahedron ya da dodecahedronun uçları kenarlarının orta noktalarına kadar kesilerek elde edilmiş bir konveks cisimdir.



Şekil 5.1 İcosidodecahedron

Birim küresi icosidodecahedron olan uzaklık fonksiyonu d_{ID} ile gösterilir ve bu uzaklık fonksiyonunun metrik aksiyomlarını sağladığı ve bazı özellikleri (Can, Gelişgen ve Kaya, 2015) kaynağından verilmektedir.

Tanım 5.1 *$P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ $\mathbb{R}^3$ te iki farklı nokta olsun. $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$altın oran olmak üzere*

$$d_{ID}(P_1, P_2) = \max \left\{ \begin{array}{l} |x_1 - x_2| + (\varphi - 1) \max \left\{ \begin{array}{l} |y_1 - y_2|, (\varphi - 1)|z_1 - z_2|, \\ (1-\varphi)|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2| \end{array} \right\}, \\ |y_1 - y_2| + (\varphi - 1) \max \left\{ \begin{array}{l} |z_1 - z_2|, (\varphi - 1)|x_1 - x_2|, \\ |x_1 - x_2| + (1-\varphi)|y_1 - y_2| + |z_1 - z_2| \end{array} \right\}, \\ |z_1 - z_2| + (\varphi - 1) \max \left\{ \begin{array}{l} |x_1 - x_2|, (\varphi - 1)|y_1 - y_2|, \\ |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + (1-\varphi)|z_1 - z_2| \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

biçiminde tanımlanan $d_{ID} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to [0, \infty)$ uzaklık fonksiyonuna icosidodecahedron uzaklık fonksiyonu denir.

Yardımcı Teorem 5.1 *$P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ $\mathbb{R}^3$ te iki farklı nokta olsun. Bu durumda*

$$d_{ID}(P_1, P_2) \geq |x_1 - x_2| + (\varphi - 1) \max \left\{ \begin{array}{l} |y_1 - y_2|, (\varphi - 1)|z_1 - z_2|, \\ (1-\varphi)|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2| \end{array} \right\},$$
$$d_{ID}(P_1, P_2) \geq |y_1 - y_2| + (\varphi - 1) \max \left\{ \begin{array}{l} |z_1 - z_2|, (\varphi - 1)|x_1 - x_2|, \\ |x_1 - x_2| + (1-\varphi)|y_1 - y_2| + |z_1 - z_2| \end{array} \right\},$$
$$d_{ID}(P_1, P_2) \geq |z_1 - z_2| + (\varphi - 1) \max \left\{ \begin{array}{l} |x_1 - x_2|, (\varphi - 1)|y_1 - y_2|, \\ |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + (1-\varphi)|z_1 - z_2| \end{array} \right\},$$

dır.

İspat *İspatı maksimum fonksiyonunun tanımından açıktır.*

Teorem 5.1 *$\mathbb{R}^3$ te d_{ID} uzaklık fonksiyonu metriktir ve bu metrikle donatılmış uzayın birim küresi icosidodecahedrondur.*

İspat *$d_{ID} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ icosidodecahedron uzaklık fonksiyonu ve $P_1 = (x_1, y_1, z_1), P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ ve $P_3 = (x_3, y_3, z_3)$ $\mathbb{R}^3$ te üç farklı nokta olsun. d_{ID} uzaklık fonksiyonu her $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^3$ noktaları için aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa $\mathbb{R}^3$ te bir metriktir.*

M1) $d_{ID}(P_1, P_2) \geq 0$ *ve* $d_{ID}(P_1, P_2) = 0 \Leftrightarrow P_1 = P_2$
M2) $d_{ID}(P_1, P_2) = d_{ID}(P_2, P_1)$
M3) $d_{ID}(P_1, P_3) \leq d_{ID}(P_1, P_2) + d_{ID}(P_2, P_3)$.

M1) *Mutlak değer her zaman negatif olmayan değerler üreteceğinden dolayı mutlak değerlerin toplamının maksimumu da pozitiftir veya sıfırdır. Böylece,*

$$d_{ID}(P_1, P_2)$$
$$= \max \left\{ \begin{array}{l} |x_1 - x_2| + (\varphi - 1) \max \left\{ \begin{array}{l} |y_1 - y_2|, (\varphi - 1)|z_1 - z_2|, \\ (1-\varphi)|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2| \end{array} \right\}, \\ |y_1 - y_2| + (\varphi - 1) \max \left\{ \begin{array}{l} |z_1 - z_2|, (\varphi - 1)|x_1 - x_2|, \\ |x_1 - x_2| + (1-\varphi)|y_1 - y_2| + |z_1 - z_2| \end{array} \right\}, \\ |z_1 - z_2| + (\varphi - 1) \max \left\{ \begin{array}{l} |x_1 - x_2|, (\varphi - 1)|y_1 - y_2|, \\ |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + (1-\varphi)|z_1 - z_2| \end{array} \right\} \end{array} \right\} \geq 0$$

dır. Yani d_{ID} pozitif tanımlıdır. Eğer

$$
\begin{aligned}
&d_{ID}(P_1,P_2)\\
&= \max\left\{\begin{array}{l}
|x_1-x_2|+(\varphi-1)\max\left\{\begin{array}{l}|y_1-y_2|,(\varphi-1)|z_1-z_2|,\\(1-\varphi)|x_1-x_2|+|y_1-y_2|+|z_1-z_2|\end{array}\right\},\\
|y_1-y_2|+(\varphi-1)\max\left\{\begin{array}{l}|z_1-z_2|,(\varphi-1)|x_1-x_2|,\\|x_1-x_2|+(1-\varphi)|y_1-y_2|+|z_1-z_2|\end{array}\right\},\\
|z_1-z_2|+(\varphi-1)\max\left\{\begin{array}{l}|x_1-x_2|,(\varphi-1)|y_1-y_2|,\\|x_1-x_2|+|y_1-y_2|+(1-\varphi)|z_1-z_2|\end{array}\right\}
\end{array}\right\}=0\\
&\Rightarrow |x_1-x_2|=0,\ |y_1-y_2|=0,\ |z_1-z_2|=0\\
&\Rightarrow x_1=x_2,\ y_1=y_2,\ z_1=z_2\\
&\Rightarrow P_1=P_2
\end{aligned}
$$

Tersine P_1=P_2 ise $|x_1-x_2|$=0, $|y_1-y_2|$=0 ve $|z_1-z_2|$=0 olacağından $d_{ID}(P_1,P_2)$=0 olur.

M2) *Mutlak değer tanımından $|x_1-x_2|$=$|x_2-x_1|$, $|y_1-y_2|$=$|y_2-y_1|$ ve $|z_1-z_2|$=$|z_2-z_1|$ dir. Buradan açıkça $d_{ID}(P_1,P_2)$=$d_{ID}(P_2,P_1)$ dir. Yani, d_{ID} simetriktir.*

M3) *$P_1=(x_1,y_1,z_1), P_2=(x_2,y_2,z_2)$ ve $P_3=(x_3,y_3,z_3)\in\mathbb{R}^3$ olsun.*

$$d_{ID}(P_1,P_3)\le d_{ID}(P_1,P_2)+d_{ID}(P_2,P_3)$$

olduğu gösterilmelidir.

$$
\begin{aligned}
&d_{ID}(P_1,P_3)\\
&= \max\left\{\begin{array}{l}
|x_1-x_3|+(\varphi-1)\max\left\{\begin{array}{l}|y_1-y_3|,\ (\varphi-1)|z_1-z_3|,\\(1-\varphi)|x_1-x_3|+|y_1-y_3|+|z_1-z_3|\end{array}\right\},\\
|y_1-y_3|+(\varphi-1)\max\left\{\begin{array}{l}|z_1-z_3|,\ (\varphi-1)|x_1-x_3|,\\|x_1-x_3|+(1-\varphi)|y_1-y_3|+|z_1-z_3|\end{array}\right\},\\
|z_1-z_3|+(\varphi-1)\max\left\{\begin{array}{l}|x_1-x_3|,\ (\varphi-1)|y_1-y_3|\\|x_1-x_3|+|y_1-y_3|+(1-\varphi)|z_1-z_3|\end{array}\right\}
\end{array}\right\}\\
&= \max\left\{\begin{array}{l}
|x_1-x_2+x_2-x_3|+(\varphi-1)\max\left\{\begin{array}{l}|y_1-y_2+y_2-y_3|,\ (\varphi-1)|z_1-z_2+z_2-z_3|,\\(1-\varphi)|x_1-x_2+x_2-x_3|+|y_1-y_2+y_2-y_3|\\+|z_1-z_2+z_2-z_3|\end{array}\right\},\\
|y_1-y_2+y_2-y_3|+(\varphi-1)\max\left\{\begin{array}{l}|z_1-z_2+z_2-z_3|,\ (\varphi-1)|x_1-x_2+x_2-x_3|,\\|x_1-x_2+x_2-x_3|+(1-\varphi)|y_1-y_2+y_2-y_3|\\+|z_1-z_2+z_2-z_3|\end{array}\right\},\\
|z_1-z_2+z_2-z_3|+(\varphi-1)\max\left\{\begin{array}{l}|x_1-x_2+x_2-x_3|,\ (\varphi-1)|y_1-y_2+y_2-y_3|\\|x_1-x_2+x_2-x_3|+|y_1-y_2+y_2-y_3|\\(1-\varphi)+|z_1-z_2+z_2-z_3|\end{array}\right\}
\end{array}\right\}
\end{aligned}
$$

$$\leq \max\left\{\begin{array}{l} |x_1-x_2|+|x_2-x_3|+(\varphi-1)\max\left\{\begin{array}{l} |y_1-y_2|+|y_2-y_3|,\ (\varphi-1)\left(|z_1-z_2|+|z_2-z_3|\right), \\ (1-\varphi)\left(|x_1-x_2|+|x_2-x_3|\right)+|y_1-y_2|+|y_2-y_3| \\ +|z_1-z_2|+|z_2-z_3| \end{array}\right\}, \\ |y_1-y_2|+|y_2-y_3|+(\varphi-1)\max\left\{\begin{array}{l} |z_1-z_2|+|z_2-z_3|,\ (\varphi-1)\left(|x_1-x_2|+|x_2-x_3|\right), \\ |x_1-x_2|+|x_2-x_3|+(1-\varphi)\left(|y_1-y_2|+|y_2-y_3|\right) \\ +|z_1-z_2|+|z_2-z_3| \end{array}\right\}, \\ |z_1-z_2|+|z_2-z_3|+(\varphi-1)\max\left\{\begin{array}{l} |x_1-x_2|+|x_2-x_3|,\ (\varphi-1)\left(|y_1-y_2|+|y_2-y_3|\right) \\ |x_1-x_2|+|x_2-x_3|+|y_1-y_2|+|y_2-y_3| \\ +(1-\varphi)\left(|z_1-z_2|+|z_2-z_3|\right) \end{array}\right\} \end{array}\right\}$$

$$\leq \max\left\{\begin{array}{l} |x_1-x_2|+(\varphi-1)\max\left\{\begin{array}{c} |y_1-y_2|,\ (\varphi-1)|z_1-z_2|, \\ (1-\varphi)|x_1-x_2|+|y_1-y_2|+|z_1-z_2| \end{array}\right\}, \\ |y_1-y_2|+(\varphi-1)\max\left\{\begin{array}{c} |z_1-z_2|,\ (\varphi-1)|x_1-x_2|, \\ |x_1-x_2|+(1-\varphi)|y_1-y_2|+|z_1-z_2| \end{array}\right\}, \\ |z_1-z_2|+(\varphi-1)\max\left\{\begin{array}{c} |x_1-x_2|,\ (\varphi-1)|y_1-y_2| \\ |x_1-x_2|+|y_1-y_2|+(1-\varphi)|z_1-z_2| \end{array}\right\} \end{array}\right\}+$$

$$\max\left\{\begin{array}{l} |x_2-x_3|+(\varphi-1)\max\left\{\begin{array}{c} |y_2-y_3|,\ (\varphi-1)|z_2-z_3|, \\ (1-\varphi)|x_2-x_3|+|y_2-y_3|+|z_2-z_3| \end{array}\right\}, \\ |y_2-y_3|+(\varphi-1)\max\left\{\begin{array}{c} |z_2-z_3|,\ (\varphi-1)|x_2-x_3|, \\ |x_2-x_3|+(1-\varphi)|y_2-y_3|+|z_2-z_3| \end{array}\right\}, \\ |z_2-z_3|+(\varphi-1)\max\left\{\begin{array}{c} |x_2-x_3|,\ (\varphi-1)|y_2-y_3| \\ |x_2-x_3|+|y_2-y_3|+(1-\varphi)|z_2-z_3| \end{array}\right\} \end{array}\right\}$$

$=I.$

dır. Burada Yardımcı Teorem 4.1 den dolayı

$$d_{ID}(P_1,P_2)\geq \max\left\{\begin{array}{l} |x_1-x_2|+(\varphi-1)\max\left\{\begin{array}{c} |y_1-y_2|,\ (\varphi-1)|z_1-z_2|, \\ (1-\varphi)|x_1-x_2|+|y_1-y_2|+|z_1-z_2| \end{array}\right\}, \\ |y_1-y_2|+(\varphi-1)\max\left\{\begin{array}{c} |z_1-z_2|,\ (\varphi-1)|x_1-x_2|, \\ |x_1-x_2|+(1-\varphi)|y_1-y_2|+|z_1-z_2| \end{array}\right\}, \\ |z_1-z_2|+(\varphi-1)\max\left\{\begin{array}{c} |x_1-x_2|,\ (\varphi-1)|y_1-y_2| \\ |x_1-x_2|+|y_1-y_2|+(1-\varphi)|z_1-z_2| \end{array}\right\} \end{array}\right\}$$

ve

$$d_{ID}(P_2,P_3)\geq \max\left\{\begin{array}{l} |x_2-x_3|+(\varphi-1)\max\left\{\begin{array}{c} |y_2-y_3|,\ (\varphi-1)|z_2-z_3|, \\ (1-\varphi)|x_2-x_3|+|y_2-y_3|+|z_2-z_3| \end{array}\right\}, \\ |y_2-y_3|+(\varphi-1)\max\left\{\begin{array}{c} |z_2-z_3|,\ (\varphi-1)|x_2-x_3|, \\ |x_2-x_3|+(1-\varphi)|y_2-y_3|+|z_2-z_3| \end{array}\right\}, \\ |z_2-z_3|+(\varphi-1)\max\left\{\begin{array}{c} |x_2-x_3|,\ (\varphi-1)|y_2-y_3| \\ |x_2-x_3|+|y_2-y_3|+(1-\varphi)|z_2-z_3| \end{array}\right\} \end{array}\right\}$$

olur. O halde $I\leq d_{ID}(P_1,P_2)+d_{ID}(P_2,P_3)$ *bulunur. Buna göre*

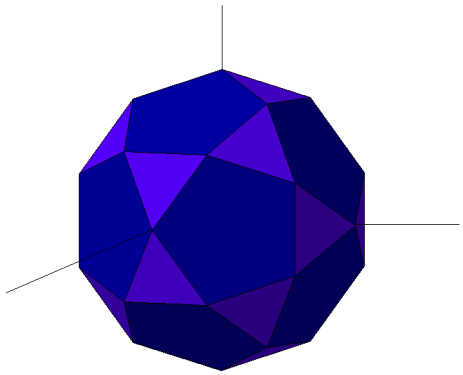
$$d_{ID}(P_1,P_3)\leq d_{ID}(P_1,P_2)+d_{ID}(P_2,P_3)$$

elde edilir. Yani icosidodecahedron uzaklık fonksiyonu üçgen eşitsizliğini sağlar.

Sonuç olarak icosidodecahedron uzaklık fonksiyonu metriktir. Ayrıca bu metrikle donatılmış analitik $3-$*uzayda orijinden* 1 *birim icosidodecahedron uzaklığındaki noktaların kümesi*

$$S_{ID} = \left\{ (x,y,z) : \max \left\{ \begin{array}{l} |x| + (\varphi - 1) \max \left\{ \begin{array}{l} |y|, (\varphi-1)|z|, \\ (1-\varphi)|x| + |y| + |z| \end{array} \right\}, \\ |y| + (\varphi - 1) \max \left\{ \begin{array}{l} |z|, (\varphi-1)|x|, \\ |x| + (1-\varphi)|y| + |z| \end{array} \right\}, \\ |z| + (\varphi - 1) \max \left\{ \begin{array}{l} |x|, (\varphi-1)|y|, \\ |x| + |y| + (1-\varphi)|z| \end{array} \right\} \end{array} \right\} = 1 \right\}$$

olup bu noktaların geometrik yeri Şekil5.2 de görüldüğü gibi icosidodecahedrondur.



Şekil 5.2 İcosidodecahedronun Koordinat Eksenlerine Yerleştirilmesi

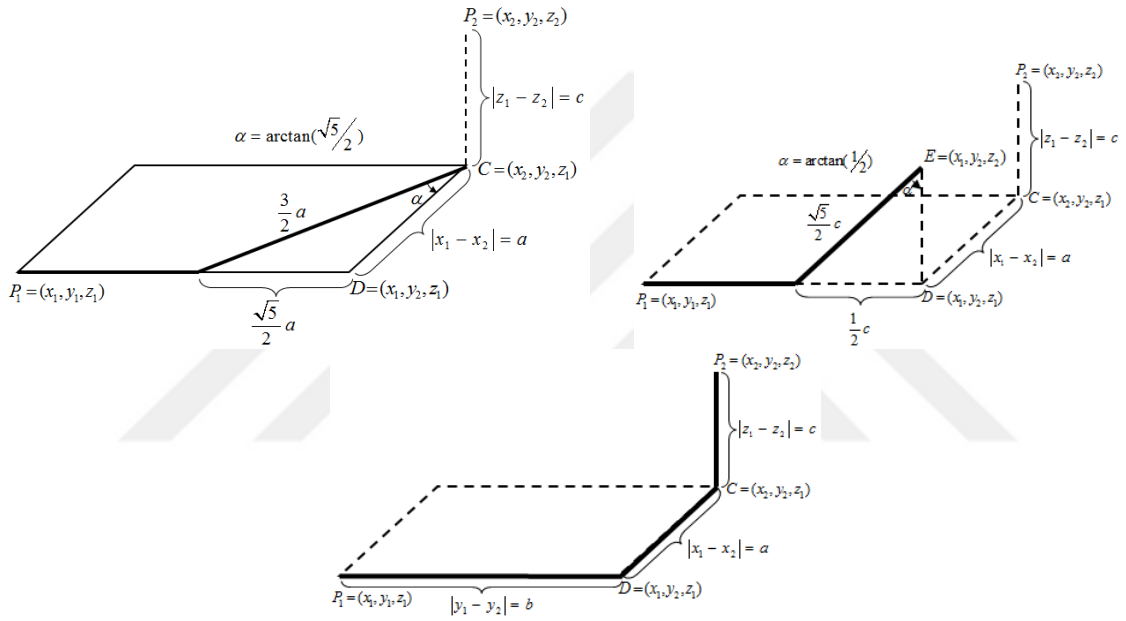
İcosidodecahedron uzaklık fonksiyonu bir hayli karmaşık gözükmesine rağmen apsis, ordinat ve kotlar arasında bir yönlendirme vardır. Bu yönlendirme ise $|x_1 - x_2|$-$|y_1 - y_2|$-$|z_1 - z_2|$-$|x_1 - x_2|$ şeklindedir. Buna göre d_{ID} fonksiyonunda yer alan üç ifadeden herhangi birinde $|x_1 - x_2|$ yerine $|y_1 - y_2|$, $|y_1 - y_2|$ yerine $|z_1 - z_2|$ ve $|z_1 - z_2|$ yerine $|x_1 - x_2|$ yazıldığında diğer bir ifadeye ulaşılır. Geometrik olarak P_1 noktasından P_2 noktasına olan yol için üç farklı olasılık vardır. Buna göre bu yollar aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

(i) Biri koordinat eksenlerinden birine paralel diğeri bir diğer koordinat ekseni ile $\arctan(\sqrt{5}/2)$ radyanlık açı yapan iki doğru parçasının birleşimidir.

(ii) Biri koordinat eksenlerinden birine paralel diğeri bir diğer koordinat ekseni ile $\arctan(1/2)$ radyanlık açı yapan iki doğru parçasının birleşimidir.

(iii) Her biri koordinat eksenine paralel olan üç doğru parçasının birleşimidir.

Böylece P_1 ve P_2 noktaları arasındaki icosidodecahedron uzaklığı (i) şıkkındaki yol için bahsedilen iki doğru parçasının Öklidyen uzunluklarının toplamı, (ii) şıkkındaki yol için bahsedilen iki doğru parçasının Öklidyen uzunlukları toplamı ve (iii) şıkkındaki yol için bahsedilen üç doğru parçasının Öklidyen uzunlukları toplamının $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ katıdır.



Şekil 5.3 İcosidodecahedron Uzaklığına Göre İki Nokta Arasındaki Yollar

Sonuç 5.1 $\mathbb{R}^3_{ID}$ *de* (x_0,y_0,z_0) *merkezli ve* r *yarıçaplı küre*

$$\max\left\{\begin{array}{l} |x-x_0|+(\varphi-1)\max\left\{\begin{array}{l}|y-y_0|,(\varphi-1)|z-z_0|,\\(1-\varphi)|x-x_0|+|y-y_0|+|z-z_0|\end{array}\right\},\\ |y-y_0|+(\varphi-1)\max\left\{\begin{array}{l}|z|,(\varphi-1)|x-x_0|,\\|x-x_0|+(1-\varphi)|y-y_0|+|z-z_0|\end{array}\right\},\\ |z-z_0|+(\varphi-1)\max\left\{\begin{array}{l}|x-x_0|,(\varphi-1)|y-y_0|,\\|x-x_0|+|y-y_0|+(1-\varphi)|z-z_0|\end{array}\right\}\end{array}\right\}=r$$

denklemi ile ifade edilen , köşe noktaları $(0,0,r)$, $(r,0,0)$, $(0,r,0)$, $\left(\frac{\varphi-1}{2}r,\frac{1}{2}r,\frac{\varphi}{2}r\right)$, $\left(\frac{\varphi}{2}r,\frac{\varphi-1}{2}r,\frac{1}{2}r\right)$, $\left(\frac{1}{2}r,\frac{\varphi}{2}r,\frac{\varphi-1}{2}r\right)$ *noktalarının her bir bileşeninin tüm muhtemel* $+/-$ *işaret değişikliklerinin* (x_0,y_0,z_0) *kadar ötelenmişinden oluşan* $32-$*yüzlü bir çokyüzlü olan icosidodecahedrondur.*

Bu bölümün diğer kısımlarında sıkça kullanılacağından dolayı merkezil birim kürenin köşe noktaları aşağıdaki şekilde isimlendirilmiştir;

$V_1 = (0,0,1)$, $V_2 = (0,0,-1)$, $V_3 = (1,0,0)$, $V_4 = (-1,0,0)$, $V_5 = (0,1,0)$, $V_6 = (0,-1,0)$, $V_7 = \left(\frac{\varphi-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\varphi}{2}\right)$, $V_8 = \left(\frac{\varphi-1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\varphi}{2}\right)$, $V_9 = \left(\frac{\varphi-1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\varphi}{2}\right)$, $V_{10} = \left(\frac{\varphi-1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{\varphi}{2}\right)$, $V_{11} = \left(\frac{1-\varphi}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\varphi}{2}\right)$, $V_{12} = \left(\frac{1-\varphi}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\varphi}{2}\right)$, $V_{13} = \left(\frac{1-\varphi}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\varphi}{2}\right)$, $V_{14} = \left(\frac{1-\varphi}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{\varphi}{2}\right)$, $V_{15} = \left(\frac{\varphi}{2}, \frac{\varphi-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $V_{16} = \left(\frac{\varphi}{2}, \frac{\varphi-1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $V_{17} = \left(\frac{\varphi}{2}, \frac{1-\varphi}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $V_{18} = \left(\frac{\varphi}{2}, \frac{1-\varphi}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $V_{19} = \left(-\frac{\varphi}{2}, \frac{\varphi-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $V_{20} = \left(-\frac{\varphi}{2}, \frac{\varphi-1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $V_{21} = \left(-\frac{\varphi}{2}, \frac{1-\varphi}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $V_{22} = \left(-\frac{\varphi}{2}, \frac{1-\varphi}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $V_{23} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\varphi}{2}, \frac{\varphi-1}{2}\right)$, $V_{24} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\varphi}{2}, \frac{1-\varphi}{2}\right)$, $V_{25} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\varphi}{2}, \frac{\varphi-1}{2}\right)$, $V_{26} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\varphi}{2}, \frac{1-\varphi}{2}\right)$, $V_{27} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\varphi}{2}, \frac{\varphi-1}{2}\right)$, $V_{28} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\varphi}{2}, \frac{1-\varphi}{2}\right)$, $V_{29} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\varphi}{2}, \frac{\varphi-1}{2}\right)$, $V_{30} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\varphi}{2}, \frac{1-\varphi}{2}\right)$

Bir sonraki teoremde d_{ID} metriğinin iyi bilinen bazı uzaklık fonksiyonlarının genel hali olan d_m metriği ile ilişkisi verilecektir.

Teorem 5.2 *$P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ $\mathbb{R}^3$ de herhangi iki nokta olsun. $m = v = 0$ ve*

$$u = \frac{\max\left\{\begin{array}{l} |x_1 - x_2| + (\varphi - 1)\max\left\{\begin{array}{l} |y_1 - y_2|, (\varphi-1)|z_1 - z_2|, \\ (1-\varphi)|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2| \end{array}\right\}, \\ |y_1 - y_2| + (\varphi - 1)\max\left\{\begin{array}{l} |z_1 - z_2|, (\varphi-1)|x_1 - x_2|, \\ |x_1 - x_2| + (1-\varphi)|y_1 - y_2| + |z_1 - z_2| \end{array}\right\}, \\ |z_1 - z_2| + (\varphi - 1)\max\left\{\begin{array}{l} |x_1 - x_2|, (\varphi-1)|y_1 - y_2|, \\ |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + (1-\varphi)|z_1 - z_2| \end{array}\right\} \end{array}\right\}}{\max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\}}$$

olmak üzere $d_m(P_1, P_2) = d_{ID}(P_1, P_2)$ dir.

İspat *u, v ve m için verilen değerler d_m metriğinde yerine yazılırsa istenen eşitliğin sağlandığı kolaylıkla görülebilir.*

Aşağıdaki önerme $\mathbb{R}^3$ deki noktalar arasındaki Öklidyen ve icosidodecahedron uzaklıkları arasındaki geçiş bağıntılarını ifade etmektedir.

Yardımcı Teorem 5.2 *$P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ verilsin. P_1 ve P_2 noktalarından geçen doğru l, l nin doğrultu vektörü (p, q, r) ve*

$$\mu(P_1P_2) = \frac{\max\left\{\begin{array}{l} |p| + (\varphi-1)\max\{(\varphi-1)|r|, (1-\varphi)|p| + |q| + |r|, |q|\}, \\ |q| + (\varphi-1)\max\{(\varphi-1)|p|, |p| + (1-\varphi)|q| + |r|, |r|\}, \\ |r| + (\varphi-1)\max\{(\varphi-1)|q|, |p| + |q| + (1-\varphi)|r|, |p|\} \end{array}\right\}}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

ise

$$d_{ID}(P_1, P_2) = \mu(P_1P_2)\, d_E(P_1, P_2)$$

dir.

İspat *$P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ verilsin P_1 ve P_2 noktalarından geçen doğru l ve l nin doğrultu vektörü (p, q, r) ise $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere*

$$\frac{x_2 - x_1}{p} = \frac{y_2 - y_1}{q} = \frac{z_2 - z_1}{r} = \lambda$$

yazılabilir. Buradan $x_2 - x_1 = \lambda p$, $y_2 - y_1 = \lambda q$,$z_2 - z_1 = \lambda r$ elde edilir. Böylece

$$d_{ID}(P_1, P_2) = \lambda \max\left\{\begin{array}{l} |p| + (\varphi-1)\max\{(\varphi-1)|r|, (1-\varphi)|p| + |q| + |r|, |q|\}, \\ |q| + (\varphi-1)\max\{(\varphi-1)|p|, |p| + (1-\varphi)|q| + |r|, |r|\}, \\ |r| + (\varphi-1)\max\{(\varphi-1)|q|, |p| + |q| + (1-\varphi)|r|, |p|\} \end{array}\right\}$$

ve

$$d_E(P_1, P_2) = \lambda\sqrt{p^2+q^2+r^2}$$

bulunur.

$$\frac{d_{ID}(P_1, P_2)}{d_E(P_1, P_2)} = \frac{\lambda \max\left\{\begin{array}{l} |p| + (\varphi-1)\max\{(\varphi-1)|r|, (1-\varphi)|p| + |q| + |r|, |q|\}, \\ |q| + (\varphi-1)\max\{(\varphi-1)|p|, |p| + (1-\varphi)|q| + |r|, |r|\}, \\ |r| + (\varphi-1)\max\{(\varphi-1)|q|, |p| + |q| + (1-\varphi)|r|, |p|\} \end{array}\right\}}{\lambda\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

olup

$$\mu(P_1P_2) = \frac{\max\left\{\begin{array}{l} |p| + (\varphi-1)\max\{(\varphi-1)|r|, (1-\varphi)|p| + |q| + |r|, |q|\}, \\ |q| + (\varphi-1)\max\{(\varphi-1)|p|, |p| + (1-\varphi)|q| + |r|, |r|\}, \\ |r| + (\varphi-1)\max\{(\varphi-1)|q|, |p| + |q| + (1-\varphi)|r|, |p|\} \end{array}\right\}}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

denilirse

$$d_{ID}(P_1, P_2) = \mu(P_1P_2)\, d_E(P_1, P_2)$$

elde edilir.

Yukarıdaki yardımcı teorem herhangi bir doğru boyunca herhangi P_1 ve P_2 noktaları arasındaki d_{ID}-uzaklığının, aynı doğru boyunca P_1 ve P_2 noktaları arasındaki Öklidyen uzaklığın pozitif katı olduğu gösterir. Buna göre aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Sonuç 5.2 *$\mathbb{R}^3$ de P_1, P_2, X doğrudaş, üç farklı nokta ise*

$$d_E(P_1, X) = d_E(P_2, X) \iff d_{ID}(P_1, X) = d_{ID}(P_2, X)$$

dir.

Sonuç 5.3 *3 boyutlu uzayda P_1, P_2, X doğrudaş, üç farklı nokta ise*

$$\frac{d_E(X, P_1)}{d_E(X, P_2)} = \frac{d_{ID}(X, P_1)}{d_{ID}(X, P_2)}$$

olur. Yani bir doğru boyunca olan d_E, d_{ID} uzaklıklarının oranı aynıdır.

5.2 İcosidodecahedron İzometri Grubu

Bu bölümde d_{ID} metriği ile donatılmış analitik $3-$uzayın ($\mathbb{R}^3_{ID}$) izometri grubu araştırılacaktır. d_{ID} uzaklığını koruyan izometrileri tespit etmek için önce hangi Öklidyen izometrilerin icosidodecahedron uzaklığını koruduğu araştırılacaktır. Daha sonra da, bu izometriler dışında izometrilerin olmadığı gösterilecektir.

$\alpha : \mathbb{R}^3_{ID} \to \mathbb{R}^3_{ID}$ dönüşüm olmak üzere her $X, Y \in \mathbb{R}^3_{ID}$ için

$$d_{ID}(X, Y) = d_{ID}(\alpha(X), \alpha(Y))$$

ise α dönüşümü $\mathbb{R}^3_{ID}$ da bir izometridir.

Aşağıda ifade edilen önermeler ile hangi Öklidyen izometrilerin icosidodecahedron uzayında da izometri oldukları gösterilmektedir.

Önerme 5.1 *$\mathbb{R}^3$ de her Öklidyen öteleme $\mathbb{R}^3_{ID}$ ün bir izometrisidir.*

İspat *$A = (a_1, a_2, a_3)$ ve $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere $T_A : \mathbb{R}^3_{ID} \to \mathbb{R}^3_{ID}$, $T_A(X) = A + X$ olacak şekilde reel uzayda bir öteleme olsun. $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3_c$ için*

$$
\begin{aligned}
&d_{ID}\left(T_A\left(P_1\right), T_A\left(P_2\right)\right) \\
&= \max\left\{\begin{array}{l}
|a_1+x_1-a_1-x_2|+(\varphi-1)\max\left\{\begin{array}{l}(\varphi-1)\left|a_3+z_1-a_3-z_2\right|, \\ (1-\varphi)\left|a_1+x_1-a_1-x_2\right|+ \\ \left|a_2+y_1-a_2-y_2\right|+ \\ \left|a_3+z_1-a_3-z_2\right|, \\ \left|a_2+y_1-a_2-y_2\right|\end{array}\right\}, \\
|a_2+y_1-a_2-y_2|+(\varphi-1)\max\left\{\begin{array}{l}(\varphi-1)\left|a_1+x_1-a_1-x_2\right|, \\ \left|a_1+x_1-a_1-x_2\right|+ \\ (1-\varphi)\left|a_2+y_1-a_2-y_2\right|+ \\ \left|a_3+z_1-a_3-z_2\right|, \\ \left|a_3+z_1-a_3-z_2\right|\end{array}\right\}, \\
|a_3+z_1-a_3-z_2|+(\varphi-1)\max\left\{\begin{array}{l}(\varphi-1)\left|a_2+y_1-a_2-y_2\right|, \\ \left|a_1+x_1-a_1-x_2\right|+ \\ \left|a_2+y_1-a_2-y_2\right|+ \\ (1-\varphi)\left|a_3+z_1-a_3-z_2\right|, \\ \left|a_1+x_1-a_1-x_2\right|\end{array}\right\}
\end{array}\right\} \\
&= \max\left\{\begin{array}{l}
|x_1-x_2|+(\varphi-1)\max\left\{\begin{array}{l}(\varphi-1)\left|z_1-z_2\right|, \\ (1-\varphi)\left|x_1-x_2\right|+\left|y_1-y_2\right|+\left|z_1-z_2\right|, \\ \left|y_1-y_2\right|\end{array}\right\}, \\
|y_1-y_2|+(\varphi-1)\max\left\{\begin{array}{l}(\varphi-1)\left|x_1-x_2\right|, \\ \left|x_1-x_2\right|+(1-\varphi)\left|y_1-y_2\right|+\left|z_1-z_2\right|, \\ \left|z_1-z_2\right|\end{array}\right\}, \\
|z_1-z_2|+(\varphi-1)\max\left\{\begin{array}{l}(\varphi-1)\left|y_1-y_2\right|, \\ \left|x_1-x_2\right|+\left|y_1-y_2\right|+(1-\varphi)\left|z_1-z_2\right|, \\ \left|x_1-x_2\right|\end{array}\right\}
\end{array}\right\} \\
&= d_{ID}\left(P_1, P_2\right)
\end{aligned}
$$

dir. Bundan dolayı T_A bir izometridir.

Yukarıdaki önermeden dolayı $\mathbb{R}^3_{ID}$ uzayında dönme ve yansımaları bulmak için orijinden geçen düzlemleri düşünmek yeterli olacaktır. Aşağıdaki önermede $\mathbb{R}^3_{ID}$ de uzaklığı koruyan yansımalar ifade edilecektir.

Önerme 5.2 *$\mathbb{R}^3_{ID}$ de $\Delta : ax+by+cz=0$ düzlemine göre yansımanın izometri olması için gerek ve yeter koşul düzlemin doğrultu vektörü (a,b,c) nin*

$$D=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(\pm1,\pm\varphi,(\varphi-1)),((\varphi-1),\pm1,\pm\varphi),(\pm\varphi,(\varphi-1),\pm1)\}$$

vektör kümesinin elemanlarından birine paralel olmasıdır.

İspat $\Delta : ax+by+cz=0$ *birim normali* (a,b,c) *olan düzlem olmak üzere* $\sigma_\Delta : \mathbb{R}^3_{ID} \to \mathbb{R}^3_{ID}$ *Öklidyen yansıma*

$$\sigma_\Delta(x,y,z) = \begin{pmatrix} (1-2a^2)x - 2aby - 2acz, -2abx + (1-2b^2)y - 2bcz, \\ -2acx - 2bcy + (1-2c^2)z \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanır. $\mathbb{R}^3_{ID}$ *un taban vektörlerini koruyan yansıma izometri olacağından, icosidodecahedronun köşe noktaları da olan,* $\mathbb{R}^3_{ID}$ *un* $V_2 = (1,0,0)$, $V_{14} = \left(\frac{\varphi}{2}, \frac{\varphi-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $V_{22} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\varphi}{2}, \frac{\varphi-1}{2}\right)$ *tabanını koruyan yansımaları tespit etmek izometrileri bulmak için yeterli olacaktır. Taban vektörlerinin Öklidyen yansımalar altında görüntüleri*

$$\sigma_\Delta(V_2) = (1-2a^2, -2ab, -2ac)$$
$$\sigma_\Delta(V_{14}) = \begin{pmatrix} \frac{\varphi}{2}(1-2a^2) - (\varphi-1)ab - ac, -\varphi ab + \left(\frac{\varphi-1}{2}\right)(1-2b^2) - bc, \\ -\varphi ac - (\varphi-1)bc + \frac{1}{2} - c^2 \end{pmatrix}$$
$$\sigma_\Delta(V_{22}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1-2a^2) - \varphi ab - (\varphi-1)ac, -ab + \frac{\varphi}{2}(1-2b^2) - (\varphi-1)bc, \\ -ac - \varphi bc + \left(\frac{\varphi-1}{2}\right)(1-2c^2) \end{pmatrix}$$

dir. Açıkça $d_{ID}(O,V_2) = d_{ID}(O,V_{14}) = d_{ID}(O,V_{22}) = 1$ *dir.*

Eğer yansıma d_{ID} *uzaklığını koruyor ise taban vektörlerinin yansıma altındaki görüntüleri için uzaklık korunmalıdır. Yani*

$$d_{ID}(\sigma_\Delta(O), \sigma_\Delta(V_2)) = d_{ID}(\sigma_\Delta(O), \sigma_\Delta(V_{14})) = d_{ID}(\sigma_\Delta(O), \sigma_\Delta(V_{22})) = 1$$

olmalıdır. Böylece

$$\begin{array}{lll} \alpha_1 = 1-2a^2 & \beta_1 = \frac{\varphi}{2}(1-2a^2) - (\varphi-1)ab - ac & \gamma_1 = \frac{1}{2}(1-2a^2) - \varphi ab - (\varphi-1)ac \\ \alpha_2 = -2ab \quad , & \beta_2 = -\varphi ab + \left(\frac{\varphi-1}{2}\right)(1-2b^2) - bc \quad \textit{ve} & \gamma_2 = -ab + \frac{\varphi}{2}(1-2b^2) - (\varphi-1)bc \\ \alpha_3 = -2ac & \beta_3 = -\varphi ac - (\varphi-1)bc + \frac{1}{2} - c^2 & \gamma_3 = -ac - \varphi bc + \left(\frac{\varphi-1}{2}\right)(1-2c^2) \end{array}$$

olmak üzere

$$d_{ID}(\sigma_\Delta(O), \sigma_\Delta(V_2)) =$$
$$\max \left\{ \begin{array}{l} |\alpha_1| + (\varphi-1)\max\{(\varphi-1)|\alpha_3|, (1-\varphi)|\alpha_1| + |\alpha_2| + |\alpha_3|, |\alpha_2|\}, \\ |\alpha_2| + (\varphi-1)\max\{(\varphi-1)|\alpha_1|, |\alpha_1| + (1-\varphi)|\alpha_2| + |\alpha_3|, |\alpha_3|\}, \\ |\alpha_3| + (\varphi-1)\max\{(\varphi-1)|\alpha_2|, |\alpha_1| + |\alpha_2| + (1-\varphi)|\alpha_3|, |\alpha_1|\} \end{array} \right\} = 1$$
$$d_{ID}(\sigma_\Delta(O), \sigma_\Delta(V_{14})) =$$
$$\max \left\{ \begin{array}{l} |\beta_1| + (\varphi-1)\max\{(\varphi-1)|\beta_3|, (1-\varphi)|\beta_1| + |\beta_2| + |\beta_3|, |\beta_2|\}, \\ |\beta_2| + (\varphi-1)\max\{(\varphi-1)|\beta_1|, |\beta_1| + (1-\varphi)|\beta_2| + |\beta_3|, |\beta_3|\}, \\ |\beta_3| + (\varphi-1)\max\{(\varphi-1)|\beta_2|, |\beta_1| + |\beta_2| + (1-\varphi)|\beta_3|, |\beta_1|\} \end{array} \right\} = 1$$
$$d_{ID}(\sigma_\Delta(O), \sigma_\Delta(V_{22})) =$$
$$\max \left\{ \begin{array}{l} |\gamma_1| + (\varphi-1)\max\{(\varphi-1)|\gamma_3|, (1-\varphi)|\gamma_1| + |\gamma_2| + |\gamma_3|, |\gamma_2|\}, \\ |\gamma_2| + (\varphi-1)\max\{(\varphi-1)|\gamma_1|, |\gamma_1| + (1-\varphi)|\gamma_2| + |\gamma_3|, |\gamma_3|\}, \\ |\gamma_3| + (\varphi-1)\max\{(\varphi-1)|\gamma_2|, |\gamma_1| + |\gamma_2| + (1-\varphi)|\gamma_3|, |\gamma_1|\} \end{array} \right\} = 1$$

denklem sistemini elde ederiz. Bu denklem sistemi çözülürse (a,b,c) *için* $\left(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{\varphi}{2},\frac{\varphi-1}{2}\right)$, $\left(\frac{\varphi-1}{2},\pm\frac{1}{2},\pm\frac{\varphi}{2}\right)$, $\left(\pm\frac{\varphi}{2},\frac{\varphi-1}{2},\pm\frac{1}{2}\right)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ *çözümleri elde edilir.*

Tersine normal vektörleri D *kümesindeki vektörlere paralel olacak şekildeki düzlemlere göre yansımaların uzaklığı koruduğu gösterilmelidir.* $\sigma_\Delta(X) = Y$ *olacak şekilde* X *ve* Y *noktaları için* (p_1,q_1,r_1) *ve* (p_2,q_2,r_2), OX *ve* OY *vektörlerinin yön vektörleri olsun.* $d_{ID}(O,X) = d_{ID}(O,Y)$ *olduğunu göstermek için* $\mu(OX) = \mu(OY)$ *olduğunu göstermek yeterlidir.* (p_1,q_1,r_1) *vektörünün verilen düzlemlere göre yansıma altındaki görüntüleri bulunursa;*

1. Durum: $1x+\varphi y+(1-\varphi)z=0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1,q_1,r_1)=(\tfrac{1}{2}p_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1-\tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}r_1,\ \tfrac{-1-\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{1}{2}r_1,\ \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{1}{2}q_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1),$$

2. Durum: $1x+\varphi y+-(1-\varphi)z=0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1,q_1,r_1)=(\tfrac{1}{2}p_1+\tfrac{-1-\sqrt{5}}{4}q_1-\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}r_1,\ \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}q_1-\tfrac{1}{2}r_1,\ \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}p_1-\tfrac{1}{2}q_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1),$$

3.Durum: -$1x+\varphi y+(1-\varphi)z=0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1,q_1,r_1)=(\tfrac{1}{2}p_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}r_1,\ \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{1}{2}r_1,\ \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{1}{2}q_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1),$$

4.Durum: -$1x+\varphi y+-(1-\varphi)z=0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1,q_1,r_1)=(\tfrac{1}{2}p_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}r_1,\ \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}q_1-\tfrac{1}{2}r_1,\ \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}p_1-\tfrac{1}{2}q_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1),$$

5.Durum: (1-$\varphi)x+1y+\varphi z=0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1,q_1,r_1)=(\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1-\tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{1}{2}r_1,\ \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{1}{2}q_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1,\ \tfrac{1}{2}p_1+\tfrac{-1-\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}r_1),$$

6.Durum: -(1-$\varphi)x+1y+\varphi z=0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1,q_1,r_1)=(\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}q_1-\tfrac{1}{2}r_1,\ \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{1}{2}q_1+\tfrac{-1-\sqrt{5}}{4}r_1,\ -\tfrac{1}{2}p_1-\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}r_1),$$

7.Durum: $(1-\varphi)x-1y+\varphi z=0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1,q_1,r_1)=(\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{1}{2}r_1,\ \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{1}{2}q_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1,\ \tfrac{1}{2}p_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}r_1),$$

8.Durum: $-(1-\varphi)x-1y+\varphi z=0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_{\Delta}(p_1,q_1,r_1)=(\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}q_1-\tfrac{1}{2}r_1,\tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{1}{2}q_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1,-\tfrac{1}{2}p_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}r_1),$$

9.Durum: $\varphi x+(1-\varphi)y+1z=0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_{\Delta}(p_1,q_1,r_1)=(\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{1}{2}q_1-\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1,\tfrac{1}{2}p_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}r_1,-\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{1}{2}r_1),$$

10.Durum: $\varphi x+-(1-\varphi)y+1z=0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_{\Delta}(p_1,q_1,r_1)=(\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}p_1-\tfrac{1}{2}q_1-\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1,-\tfrac{1}{2}p_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}r_1,-\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{1}{2}r_1),$$

11.Durum: $\varphi x+(1-\varphi)y-1z=0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_{\Delta}(p_1,q_1,r_1)=(\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{1}{2}q_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1,\tfrac{1}{2}p_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}r_1,\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{1}{2}r_1),$$

12.Durum: $\varphi x+-(1-\varphi)y-1z=0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_{\Delta}(p_1,q_1,r_1)=(\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}p_1-\tfrac{1}{2}q_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1,-\tfrac{1}{2}p_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}r_1,\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{1}{2}r_1),$$

13.Durum: $1x=0$ *yansıma düzlemi için,*$\sigma_{\Delta}\left(p_1,q_1,r_1\right)=\left(-p_1,q_1,r_1\right)$,

14.Durum: $1y=0$ *yansıma düzlemi için,*$\sigma_{\Delta}\left(p_1,q_1,r_1\right)=\left(p_1,-q_1,r_1\right)$,

15.Durum: $1z=0$ *yansıma düzlemi için,*$\sigma_{\Delta}\left(p_1,q_1,r_1\right)=\left(p_1,q_1,-r_1\right)$.
sonuçları elde edilir. Bu sonuçlara göre Yardımcı Teorem 4.2 den dolayı $\mu\left(OX\right)=\mu\left(OY\right)$ *olduğu görülmektedir. Örneğin;* $x+\varphi y+\left(\varphi-1\right)z=0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\mu\left(OX\right)=\frac{\max\left\{\begin{array}{l}\left|p_1\right|+\left(\varphi-1\right)\max\left\{\left(\varphi-1\right)\left|r_1\right|,\left(1-\varphi\right)\left|p_1\right|+\left|q_1\right|+\left|r_1\right|,\left|q_1\right|\right\},\\ \left|q_1\right|+\left(\varphi-1\right)\max\left\{\left(\varphi-1\right)\left|p_1\right|,\left|p_1\right|+\left(1-\varphi\right)\left|q_1\right|+\left|r_1\right|,\left|r_1\right|\right\},\\ \left|r_1\right|+\left(\varphi-1\right)\max\left\{\left(\varphi-1\right)\left|q_1\right|,\left|p_1\right|+\left|q_1\right|+\left(1-\varphi\right)\left|r_1\right|,\left|p_1\right|\right\}\end{array}\right\}}{\sqrt{p_1^2+q_1^2+r_1^2}}$$

$$\mu\left(OY\right)=\frac{\max\left\{\begin{array}{l}\left|p_2\right|+\left(\varphi-1\right)\max\left\{\left(\varphi-1\right)\left|r_2\right|,\left(1-\varphi\right)\left|p_2\right|+\left|q_2\right|+\left|r_2\right|,\left|q_2\right|\right\},\\ \left|q_2\right|+\left(\varphi-1\right)\max\left\{\left(\varphi-1\right)\left|p_2\right|,\left|p_2\right|+\left(1-\varphi\right)\left|q_2\right|+\left|r_2\right|,\left|r_2\right|\right\},\\ \left|r_2\right|+\left(\varphi-1\right)\max\left\{\left(\varphi-1\right)\left|q_2\right|,\left|p_2\right|+\left|q_2\right|+\left(1-\varphi\right)\left|r_2\right|,\left|p_2\right|\right\}\end{array}\right\}}{\sqrt{p_2^2+q_2^2+r_2^2}}$$

dir. Burada

$$\begin{aligned}\sigma_{\Delta}\left(p_1,q_1,r_1\right)&=\left(p_2,q_2,r_2\right)\\&=\left(\tfrac{1}{2}p_1-\tfrac{\varphi}{2}q_1-\tfrac{(\varphi-1)}{2}r_1,-\tfrac{\varphi}{2}p_1+\tfrac{(1-\varphi)}{2}q_1-2r_1,\tfrac{(1-\varphi)}{2}p_1-2q_1+\tfrac{\varphi}{2}r_1\right)\end{aligned}$$

olduğundan

$$\mu(OY)=\frac{\max\left\{\begin{array}{l}|p_2|+(\varphi-1)\max\{(\varphi-1)|r_2|,(1-\varphi)|p_2|+|q_2|+|r_2|,|q_2|\},\\ |q_2|+(\varphi-1)\max\{(\varphi-1)|p_2|,|p_2|+(1-\varphi)|q_2|+|r_2|,|r_2|\},\\ |r_2|+(\varphi-1)\max\{(\varphi-1)|q_2|,|p_2|+|q_2|+(1-\varphi)|r_2|,|p_2|\}\end{array}\right\}}{\sqrt{p_2^2+q_2^2+r_2^2}}$$

ifadesinde

$$\begin{array}{l} p_2 \textit{ yerine } \frac{1}{2}p_1-\frac{\varphi}{2}q_1-\frac{(\varphi-1)}{2}r_1\\ q_2 \textit{ yerine } -\frac{\varphi}{2}p_1+\frac{(1-\varphi)}{2}q_1-2r_1\\ r_2 \textit{ yerine } \frac{(1-\varphi)}{2}p_1-2q_1+\frac{\varphi}{2}r_1\end{array}$$

yazılırsa $\mu(OX)=\mu(OY)$ *eşitliği görülmektedir. Böylece ispat tamamlanmış olur.*

Sonuç 5.4 S_{ID} *izometrik yansımaların kümesi orijinden geçen*

$$\begin{array}{ccccc} x=0 & , & y=0 & , & z=0\\ x+\varphi y+(\varphi-1)z=0 & , & (\varphi-1)x+y+\varphi z=0 & , & \varphi x+(\varphi-1)y+z=0\\ x-\varphi y+(\varphi-1)z=0 & , & (\varphi-1)x+y-\varphi z=0 & , & \varphi x+(\varphi-1)y-z=0\\ -x+\varphi y+(\varphi-1)z=0 & , & (\varphi-1)x-y+\varphi z=0 & , & -\varphi x+(\varphi-1)y+z=0\\ -x-\varphi y+(\varphi-1)z=0 & , & (\varphi-1)x-y-\varphi z=0 & , & -\varphi x+(\varphi-1)y-z=0\end{array}$$

düzlemlerine göre on beş Öklidyen yansımadan oluşur.

Şekil5.4 deki tabloda yansıma düzlemleri

$$\begin{array}{ll} D_1: x=0 & , \ D_2: y=0\\ D_3: z=0 & , \ D_4: (\varphi-1)x+y+\varphi z=0\\ D_5: (\varphi-1)x+y-\varphi z=0 & , \ D_6: (\varphi-1)x-y+\varphi z=0\\ D_7: (\varphi-1)x-y-\varphi z=0 & , \ D_8: x+\varphi y+(\varphi-1)z=0\\ D_9: x-\varphi y+(\varphi-1)z=0 & , \ D_{10}: -x+\varphi y+(\varphi-1)z=0\\ D_{11}: -x-\varphi y+(\varphi-1)z=0 & , \ D_{12}: \varphi x+(\varphi-1)y+z=0\\ D_{13}: \varphi x+(\varphi-1)y-z=0 & , \ D_{14}: -\varphi x+(\varphi-1)y+z=0\\ D_{15}: -\varphi x+(\varphi-1)y-z=0 & \end{array}$$

olmak üzere icosidodecahedron birim küresinin köşe noktalarının yansıma hareketi (dönüşümü) altındaki görüntüleri verilmiştir.

Yansıma Düzlemleri / Noktalar	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_8	D_9	D_{10}	D_{11}	D_{12}	D_{13}	D_{14}	D_{15}
V_1	V_1	V_1	V_2	V_{30}	V_{24}	V_{28}	V_{26}	V_{13}	V_{11}	V_9	V_7	V_{21}	V_{15}	V_{17}	V_{19}
V_2	V_2	V_2	V_1	V_{23}	V_{29}	V_{25}	V_{27}	V_8	V_{10}	V_{12}	V_{14}	V_{16}	V_{22}	V_{20}	V_{18}
V_3	V_4	V_3	V_3	V_{18}	V_{17}	V_{16}	V_{15}	V_{26}	V_{24}	V_{23}	V_{25}	V_{14}	V_{13}	V_{11}	V_{12}
V_4	V_3	V_4	V_4	V_{19}	V_{20}	V_{21}	V_{22}	V_{27}	V_{29}	V_{30}	V_{28}	V_7	V_8	V_{10}	V_9
V_5	V_5	V_6	V_5	V_{12}	V_{11}	V_7	V_8	V_{22}	V_{17}	V_{18}	V_{21}	V_{28}	V_{27}	V_{24}	V_{23}
V_6	V_6	V_5	V_6	V_9	V_{10}	V_{14}	V_{13}	V_{15}	V_{20}	V_{19}	V_{16}	V_{25}	V_{26}	V_{29}	V_{30}
V_7	V_{11}	V_9	V_8	V_{14}	V_{23}	V_5	V_{18}	V_{29}	V_7	V_{17}	V_1	V_4	V_7	V_{15}	V_{27}
V_8	V_{12}	V_{10}	V_7	V_{24}	V_{13}	V_{17}	V_5	V_2	V_{18}	V_8	V_{30}	V_8	V_4	V_{28}	V_{16}
V_9	V_{13}	V_7	V_{10}	V_6	V_{16}	V_{12}	V_{25}	V_9	V_{27}	V_1	V_{15}	V_{29}	V_{17}	V_9	V_4
V_{10}	V_{14}	V_8	V_9	V_{15}	V_6	V_{26}	V_{11}	V_{16}	V_2	V_{28}	V_{10}	V_{18}	V_{30}	V_4	V_{10}
V_{11}	V_7	V_{13}	V_{12}	V_{22}	V_5	V_{27}	V_{10}	V_{21}	V_1	V_{25}	V_{11}	V_{19}	V_{23}	V_3	V_{11}
V_{12}	V_8	V_{14}	V_{11}	V_5	V_{21}	V_9	V_{28}	V_{12}	V_{26}	V_2	V_{22}	V_{24}	V_{20}	V_{12}	V_3
V_{13}	V_9	V_{11}	V_{14}	V_{29}	V_8	V_{20}	V_6	V_1	V_{19}	V_{13}	V_{23}	V_{13}	V_3	V_{25}	V_{21}
V_{14}	V_{10}	V_{12}	V_{13}	V_7	V_{30}	V_6	V_{19}	V_{24}	V_{14}	V_{20}	V_2	V_3	V_{14}	V_{22}	V_{26}
V_{15}	V_{19}	V_{17}	V_{16}	V_{10}	V_{15}	V_{24}	V_3	V_6	V_{23}	V_{15}	V_9	V_{22}	V_1	V_7	V_{28}
V_{16}	V_{20}	V_{18}	V_{15}	V_{16}	V_9	V_3	V_{23}	V_{10}	V_{16}	V_{24}	V_6	V_2	V_{21}	V_{27}	V_8
V_{17}	V_{21}	V_{15}	V_{18}	V_{26}	V_3	V_8	V_{17}	V_{25}	V_5	V_7	V_{17}	V_{30}	V_9	V_1	V_{20}
V_{18}	V_{22}	V_{16}	V_{17}	V_3	V_{25}	V_{18}	V_7	V_{18}	V_8	V_5	V_{26}	V_{10}	V_{29}	V_{19}	V_2
V_{19}	V_{15}	V_{21}	V_{20}	V_4	V_{28}	V_{19}	V_{14}	V_{19}	V_{13}	V_6	V_{27}	V_{11}	V_{24}	V_{18}	V_1
V_{20}	V_{16}	V_{22}	V_{19}	V_{27}	V_4	V_{13}	V_{20}	V_{28}	V_6	V_{14}	V_{20}	V_{23}	V_{12}	V_2	V_{17}
V_{21}	V_{17}	V_{19}	V_{22}	V_{21}	V_{12}	V_4	V_{30}	V_{11}	V_{21}	V_{29}	V_5	V_1	V_{16}	V_{26}	V_{13}
V_{22}	V_{18}	V_{20}	V_{21}	V_{11}	V_{22}	V_{29}	V_4	V_5	V_{30}	V_{22}	V_{12}	V_{15}	V_2	V_{14}	V_{25}
V_{23}	V_{27}	V_{25}	V_{24}	V_2	V_7	V_{23}	V_{16}	V_{30}	V_{15}	V_3	V_{13}	V_{20}	V_{11}	V_{23}	V_5
V_{24}	V_{28}	V_{26}	V_{23}	V_8	V_1	V_{15}	V_{24}	V_{14}	V_3	V_{16}	V_{29}	V_{12}	V_{19}	V_5	V_{24}
V_{25}	V_{29}	V_{23}	V_{26}	V_{25}	V_{18}	V_2	V_9	V_{17}	V_{28}	V_{11}	V_3	V_6	V_{25}	V_{13}	V_{22}
V_{26}	V_{30}	V_{24}	V_{25}	V_{17}	V_{26}	V_{10}	V_1	V_3	V_{12}	V_{27}	V_{18}	V_{26}	V_6	V_{21}	V_{14}
V_{27}	V_{23}	V_{29}	V_{28}	V_{20}	V_{27}	V_{11}	V_2	V_4	V_9	V_{26}	V_{19}	V_{27}	V_5	V_{16}	V_7
V_{28}	V_{24}	V_{30}	V_{27}	V_{28}	V_{19}	V_1	V_{12}	V_{20}	V_{25}	V_{10}	V_4	V_5	V_{28}	V_8	V_{15}
V_{29}	V_{25}	V_{27}	V_{30}	V_{13}	V_2	V_{22}	V_{29}	V_7	V_4	V_{21}	V_{24}	V_9	V_{18}	V_6	V_{29}
V_{30}	V_{26}	V_{28}	V_{29}	V_1	V_{14}	V_{30}	V_{21}	V_{23}	V_{22}	V_4	V_8	V_{17}	V_{10}	V_{30}	V_6

Şekil 5.4 $\mathbb{R}^3_{ID}$ de Yansıma Düzlemlerine Göre Köşe Noktaların Görüntüleri

Önerme 5.3 $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *ve*

$$D_1 = \{(0, \pm 1, (\varphi - 1)), (\pm 1, (\varphi - 1), 0), (\pm 1, 0, \varphi)\}$$

$$D_2 = \left\{ \begin{array}{l} (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), ((\varphi - 1), \pm 1, \pm\varphi), (\pm 1, \pm\varphi, \varphi - 1) \\ (\pm\varphi, \varphi - 1, \pm 1) \end{array} \right\}$$

$$D_3 = \left\{ \begin{array}{l} (1,1,1), (1,1,-1), (1,-1,1), (-1,1,1), (0, \varphi - 1, \pm\varphi), \\ (\varphi - 1, \pm\varphi, 0), (\pm\varphi, 0, \varphi - 1) \end{array} \right\}$$

olmak üzere

$R_1 = \{r_\theta \mid \theta \in \{2\pi/5, 4\pi/5, 6\pi/5, 8\pi/5\}$ *, dönme ekseninin doğrultusu* D_1 *in elemanı*$\}$
$R_2 = \{r_\theta \mid \theta \in \{\pi\}$ *, dönme ekseninin doğrultusu* D_2 *nin elemanı*$\}$
$R_3 = \{r_\theta \mid \theta = \{2\pi/3, 4\pi/3\}$*, dönme ekseninin doğrultusu* D_3 *ün elemanı*$\}$

kümeleri verilsin. Dönme ekseni orijinden geçen bir l doğrusu olan r_θ *dönmesinin bir izometri olması için gerek ve yeter koşul* $r_\theta \in R_{ID} = R_1 \cup R_2 \cup R_3$ *olmasıdır.*

İspat *Birim doğrultu vektörü* (p, q, r) *olan bir l doğrusu etrafında* r_θ *şeklinde ifade edilen Öklidyen dönmenin matris formu;*

$$\begin{bmatrix} \cos\theta + p^2(1-\cos\theta) & pq(1-\cos\theta) - r\sin\theta & pr(1-\cos\theta) + q\sin\theta \\ pq(1-\cos\theta) + r\sin\theta & \cos\theta + q^2(1-\cos\theta) & qr(1-\cos\theta) - p\sin\theta \\ pr(1-\cos\theta) - q\sin\theta & qr(1-\cos\theta) + p\sin\theta & \cos\theta - r^2(1-\cos\theta) \end{bmatrix}$$

biçimindedir.

l eksenli bir dönme , l doğrusu boyunca kesişen iki düzlemin yansımalarının birleşimi olduğundan ve Önerme 4.2 den dolayı l doğrusunun doğrultu vektörlerini $(0, \pm 1, (\varphi - 1))$, $(\pm 1, (\varphi - 1), 0)$, $(\pm 1, 0, \varphi)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $((\varphi - 1), \pm 1, \pm\varphi)$, $(\pm 1, \pm\varphi, \varphi - 1)$, $(\pm\varphi, \varphi - 1, \pm 1)$, $(1, 1, 1)$, $(1, 1, -1)$, $(1, -1, 1)$, $(-1, 1, 1)$, $(0, \varphi - 1, \pm\varphi)$, $(\varphi - 1, \pm\varphi, 0)$, $(\pm\varphi, 0, \varphi - 1)$ *olarak alınabilir.*

$\mathbb{R}^3_{ID}$ *da izometrik dönmelerin bulunması için,* d_{ID} *birim küresinin kenarlarının uzunluklarını koruyan dönmelerin tespiti yeterlidir.* d_{ID} *birim küresinin* $V_{14} = \left(\frac{\varphi}{2}, \frac{\varphi-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ *ve* $V_{16} = \left(\frac{\varphi}{2}, \frac{1-\varphi}{2}, \frac{1}{2}\right)$ *köşe noktaları göz önüne alınsın. Buna göre*

$$r_\theta(V_{14}) = \begin{pmatrix} \frac{\varphi}{2}(\cos\theta + p^2(1-\cos\theta)) + \left(\frac{\varphi-1}{2}\right)(pq(1-\cos\theta) - r\sin\theta) + \\ \frac{1}{2}(pr(1-\cos\theta) + q\sin\theta), \\ \frac{\varphi}{2}(pq(1-\cos\theta) + r\sin\theta) + \left(\frac{\varphi-1}{2}\right)(\cos\theta + q^2(1-\cos\theta)) + \\ \frac{1}{2}(qr(1-\cos\theta) - p\sin\theta), \\ \frac{\varphi}{2}(pr(1-\cos\theta) - q\sin\theta) + \left(\frac{\varphi-1}{2}\right)(qr(1-\cos\theta) + p\sin\theta) + \\ \frac{1}{2}(\cos\theta - r^2(1-\cos\theta)) \end{pmatrix}$$

ve

$$r_\theta(V_{16}) = \begin{pmatrix} \frac{\varphi}{2}(\cos\theta + p^2(1-\cos\theta)) + \left(\frac{1-\varphi}{2}\right)(pq(1-\cos\theta) - r\sin\theta) + \\ \frac{1}{2}(pr(1-\cos\theta) + q\sin\theta), \\ \frac{\varphi}{2}(pq(1-\cos\theta) + r\sin\theta) + \left(\frac{1-\varphi}{2}\right)(\cos\theta + q^2(1-\cos\theta)) + \\ \frac{1}{2}(qr(1-\cos\theta) - p\sin\theta), \\ \frac{\varphi}{2}(pr(1-\cos\theta) - q\sin\theta) + \left(\frac{1-\varphi}{2}\right)(qr(1-\cos\theta) + p\sin\theta) + \\ \frac{1}{2}(\cos\theta - r^2(1-\cos\theta)) \end{pmatrix}$$

dir. Ayrıca $V_{14}=\left(\frac{\varphi}{2},\frac{\varphi-1}{2},\frac{1}{2}\right)$ *ve* $V_{16}=\left(\frac{\varphi}{2},\frac{1-\varphi}{2},\frac{1}{2}\right)$ *için* $d_{ID}(V_{14},V_{16})=\varphi-1$ *dir. O halde* $\theta\neq 0$ *olmak üzere* r_θ *nın* d_{ID} *uzaklığını koruması için* $d_{ID}(r_\theta(V_{14}),r_\theta(V_{16}))=\varphi-1$ *olmalıdır.*

l doğrusunun doğrultu vektörü $(0,1,\varphi-1)$ *olarak alınırsa* $(p,q,r)=\left(0,\sqrt{\frac{2+\varphi}{5}},\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\right)$ *olur.* p,q,r *değerleri* $d_{ID}\left(r_\theta(V_{14}),r_\theta(V_{16})\right)=\varphi-1$ *de yerine yazılırsa* $\alpha_1=\sqrt{\frac{7-4\varphi}{5}}\sin\theta$, $\alpha_2=\frac{2\varphi-1}{5}+\frac{3\varphi-4}{2}\cos\theta$ *ve* $\alpha_3=\frac{3-\varphi}{10}\left(1-\cos\theta\right)$ *olmak üzere*

$$\max\left\{\begin{array}{l}|\alpha_1|+(\varphi-1)\max\left\{(\varphi-1)\left|\alpha_3\right|,(1-\varphi)\left|\alpha_1\right|+\left|\alpha_2\right|+\left|\alpha_3\right|,\left|\alpha_2\right|\right\},\\ |\alpha_2|+(\varphi-1)\max\left\{(\varphi-1)\left|\alpha_1\right|,\left|\alpha_1\right|+(1-\varphi)\left|\alpha_2\right|+\left|\alpha_3\right|,\left|\alpha_3\right|\right\},\\ |\alpha_3|+(\varphi-1)\max\left\{(\varphi-1)\left|\alpha_2\right|,\left|\alpha_1\right|+\left|\alpha_2\right|+(1-\varphi)\left|\alpha_3\right|,\left|\alpha_1\right|\right\}\end{array}\right\}=\varphi-1$$

olur. Bu denklem çözülürse $\theta=2\pi/5,4\pi/5,6\pi/5,8\pi/5$ *sonuçları bulunur. Benzer şekilde, eğer l doğrusunun yön vektörü* $(0,-1,(\varphi-1))$, $(\pm1,(\varphi-1),0)$, $(\pm1,0,\varphi)$ *olarak alınırsa* $\theta=2\pi/5,4\pi/5,6\pi/5,8\pi/5$ *olur. Dolayısıyla* D_1 *deki altı yön vektörüyle yirmi dört dönme açısı elde edilir.*

l doğrusunun yön vektörü $(1,0,0)$ *ise* $(p,q,r)=(1,0,0)$ *olur.*p,q,r *değerlerini* $d_{ID}\left(r_\theta(V_{14}),r_\theta(V_{16})\right)=\varphi-1$ *de yerine yazarsak;*

$$\max\left\{\begin{array}{l}(2-\varphi)\max\left\{(\varphi-1)\left|\sin\theta\right|,\left|\cos\theta\right|+\left|\sin\theta\right|,\left|\cos\theta\right|\right\},\\ (\varphi-1)\left|\sin\theta\right|+(2-\varphi)\max\left\{\begin{array}{l}(\varphi-1)\left|\cos\theta\right|,\\ \left|\cos\theta\right|+(1-\varphi)\left|\sin\theta\right|\end{array}\right\},\\ (\varphi-1)\left|\cos\theta\right|+(2-\varphi)\max\left\{(1-\varphi)\left|\cos\theta\right|+\left|\sin\theta\right|,\left|\sin\theta\right|\right\}\end{array}\right\}=\varphi-1$$

denklemine ulaşılır. Bu denklem çözülürse $\theta=\pi$ *sonucu bulunur. Benzer şekilde, eğer l nin yön vektörü* D_2 *nin* $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $((\varphi-1),\pm1,\pm\varphi)$, $(\pm1,\pm\varphi,\varphi-1)$, $(\pm\varphi,\varphi-1,\pm1)$ *vektörlerinden biri olarak alınırsa* $\theta=\pi$ *olarak bulunur. Dolayısıyla* D_2 *deki on beş yön vektörüyle on beş dönme açısı elde edilir.*

l doğrusunun doğrultu vektörü $(1,1,1)$ *ise* $(p,q,r)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ *olur.* p,q,r *değerleri* $d_{ID}\left(r_\theta(V_{14}),r_\theta(V_{16})\right)=\varphi-1$ *de yerine yazılırsa* $\alpha_1=\left(\frac{\varphi-1}{3}\right)\left(1-\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta\right)$, $\alpha_2=\left(\frac{\varphi-1}{3}\right)\left(2\cos\theta+1\right)$ *ve* $\alpha_3=\left(\frac{\varphi-1}{3}\right)\left(1-\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta\right)$ *olmak üzere*

$$\max\left\{\begin{array}{l}|\alpha_1|+(\varphi-1)\max\left\{(\varphi-1)\left|\alpha_3\right|,(1-\varphi)\left|\alpha_1\right|+\left|\alpha_2\right|+\left|\alpha_3\right|,\left|\alpha_2\right|\right\},\\ |\alpha_2|+(\varphi-1)\max\left\{(\varphi-1)\left|\alpha_1\right|,\left|\alpha_1\right|+(1-\varphi)\left|\alpha_2\right|+\left|\alpha_3\right|,\left|\alpha_3\right|\right\},\\ |\alpha_3|+(\varphi-1)\max\left\{(\varphi-1)\left|\alpha_2\right|,\left|\alpha_1\right|+\left|\alpha_2\right|+(1-\varphi)\left|\alpha_3\right|,\left|\alpha_1\right|\right\}\end{array}\right\}=\varphi-1$$

elde edilir. Bu denklem çözülürse $\theta=2\pi/3,4\pi/3$ *sonuçlarına ulaşılır. Benzer şekilde, eğer l nin yön vektörü* D_3 *ün* $(-1,1,1)$, $(1,-1,1)$, $(1,1,-1)$, $(0,\varphi-1,\pm\varphi)$, $(\varphi-1,\pm\varphi,0)$,

$(\pm\varphi, 0, \varphi - 1)$ *vektörlerinden biri olarak alınırsa* $\theta = 2\pi/3$, $4\pi/3$ *olur. Dolayısıyla* D_3 *deki on tane yön vektörüyle yirmi tane dönme açısı elde edilir. Burada,* l *etrafındaki* $\theta = 2\pi/3, 4\pi/3$ *radyanlık dönmeler* $\mathbb{R}^3_{ID}$ *ın bir izometrisidir.*

Tersine $r_\theta(X) = Y$ *olacak şekilde* X *ve* Y *noktalarıyla oluşturulan* OX *ve* OY *doğrularının doğrultuları sırasıyla* (p_1, q_1, r_1) *ve* (p_2, q_2, r_2) *olmak üzere* $d_{ID}(O, X) = d_{ID}(O, Y)$ *olduğunu göstermek için Yardımcı Teorem 4.2 den* $\mu(OX) = \mu(OY)$ *olduğu gösterilmelidir. Bu ise* (p_1, q_1, r_1) *vektörünün tüm durumlar için görüntüleri bulunarak kolaylıkla gösterilebilir. Örneğin dönme ekseninin doğrultu vektörü* $(1, 0, 0)$ *olsun. Bu durumda* $\sigma_\Delta(p_1, q_1, r_1) = (p_2, q_2, r_2) = (p_1, -q_1, -r_1)$ *elde edilir. Yardımcı Teorem 4.2 den*

$$\mu(OX) = \frac{\max\left\{\begin{array}{l} |p_1| + (\varphi-1)\max\{(\varphi-1)|r_1|, (1-\varphi)|p_1| + |q_1| + |r_1|, |q_1|\}, \\ |q_1| + (\varphi-1)\max\{(\varphi-1)|p_1|, |p_1| + (1-\varphi)|q_1| + |r_1|, |r_1|\}, \\ |r_1| + (\varphi-1)\max\{(\varphi-1)|q_1|, |p_1| + |q_1| + (1-\varphi)|r_1|, |p_1|\} \end{array}\right\}}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2 + r_1^2}}$$

$$\mu(OY) = \frac{\max\left\{\begin{array}{l} |p_2| + (\varphi-1)\max\{(\varphi-1)|r_2|, (1-\varphi)|p_2| + |q_2| + |r_2|, |q_2|\}, \\ |q_2| + (\varphi-1)\max\{(\varphi-1)|p_2|, |p_2| + (1-\varphi)|q_2| + |r_2|, |r_2|\}, \\ |r_2| + (\varphi-1)\max\{(\varphi-1)|q_2|, |p_2| + |q_2| + (1-\varphi)|r_2|, |p_2|\} \end{array}\right\}}{\sqrt{p_2^2 + q_2^2 + r_2^2}}$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} \mu(OY) &= \frac{\max\left\{\begin{array}{l} |p_1| + (\varphi-1)\max\{(\varphi-1)|-r_1|, (1-\varphi)|p_1| + |-q_1| + |-r_1|, |-q_1|\}, \\ |-q_1| + (\varphi-1)\max\{(\varphi-1)|p_1|, |p_1| + (1-\varphi)|-q_1| + |-r_1|, |-r_1|\}, \\ |-r_1| + (\varphi-1)\max\{(\varphi-1)|-q_1|, |p_1| + |-q_1| + (1-\varphi)|-r_1|, |p_1|\} \end{array}\right\}}{\sqrt{p_1^2 + (-q_1)^2 + (-r_1)^2}} \\ &= \frac{\max\left\{\begin{array}{l} |p_1| + (\varphi-1)\max\{(\varphi-1)|r_1|, (1-\varphi)|p_1| + |q_1| + |r_1|, |q_1|\}, \\ |q_1| + (\varphi-1)\max\{(\varphi-1)|p_1|, |p_1| + (1-\varphi)|q_1| + |r_1|, |r_1|\}, \\ |r_1| + (\varphi-1)\max\{(\varphi-1)|q_1|, |p_1| + |q_1| + (1-\varphi)|r_1|, |p_1|\} \end{array}\right\}}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2 + r_1^2}} \\ &= \mu(OX) \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde diğer dönme eksenleri ve dönme açıları için de $\mu(OX) = \mu(OY)$ *eşitliği gösterilebilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.*

Sonuç 5.5 R_{ID}*, orijinden geçen doğruları eksen kabul eden dönmelerin kümesi olmak üzere, tam olarak elli dokuz Öklidyen dönmeden oluşur.*

Şekil5.5 ve Şekil5.6 daki tablolarda dönme hareketleri (dönüşümleri) sonucunda birim kürenin köşe noktalarının görüntüleri verilmiştir.

Dönme Ekseni doğrultu vektörleri	Açılar	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8	V_9	V_{10}	V_{11}	V_{12}	V_{13}	V_{14}	V_{15}
$(0,1,\varphi-1)$	$\theta=2\pi/5$	V_{15}	V_{22}	V_8	V_{13}	V_{27}	V_{26}	V_{23}	V_{20}	V_3	V_{14}	V_7	V_4	V_{17}	V_{30}	V_{24}
	$\theta=4\pi/5$	V_{24}	V_{29}	V_{20}	V_{17}	V_{11}	V_{10}	V_5	V_{21}	V_8	V_{30}	V_{23}	V_{13}	V_{16}	V_6	V_{28}
	$\theta=6\pi/5$	V_{28}	V_{25}	V_{21}	V_{16}	V_7	V_{14}	V_{27}	V_9	V_{20}	V_6	V_5	V_{17}	V_{12}	V_{26}	V_{19}
	$\theta=8\pi/5$	V_{19}	V_{18}	V_9	V_{12}	V_{23}	V_{30}	V_{11}	V_3	V_{21}	V_{26}	V_{27}	V_{16}	V_4	V_{10}	V_1
$(0,-1,\varphi-1)$	$\theta=2\pi/5$	V_{17}	V_{20}	V_{10}	V_{11}	V_{24}	V_{29}	V_3	V_{12}	V_{25}	V_{22}	V_{15}	V_{28}	V_9	V_4	V_{18}
	$\theta=4\pi/5$	V_{26}	V_{27}	V_{22}	V_{15}	V_8	V_{13}	V_{10}	V_{28}	V_6	V_{19}	V_{18}	V_5	V_{25}	V_{11}	V_{14}
	$\theta=6\pi/5$	V_{30}	V_{23}	V_{19}	V_{18}	V_{12}	V_9	V_{22}	V_5	V_{29}	V_7	V_{14}	V_{24}	V_6	V_{15}	V_4
	$\theta=8\pi/5$	V_{21}	V_{16}	V_7	V_{14}	V_{28}	V_{25}	V_{19}	V_{24}	V_{13}	V_3	V_4	V_8	V_{29}	V_{18}	V_{11}
$(1,\varphi-1,0)$	$\theta=2\pi/5$	V_9	V_{12}	V_{23}	V_{30}	V_{19}	V_{18}	V_1	V_{28}	V_{17}	V_8	V_{13}	V_{20}	V_{25}	V_2	V_7
	$\theta=4\pi/5$	V_{17}	V_{19}	V_{11}	V_{10}	V_{29}	V_{24}	V_9	V_4	V_{15}	V_{28}	V_{25}	V_{22}	V_3	V_{12}	V_1
	$\theta=6\pi/5$	V_{15}	V_{22}	V_{13}	V_8	V_{26}	V_{27}	V_{17}	V_{30}	V_7	V_4	V_3	V_{14}	V_{23}	V_{20}	V_9
	$\theta=8\pi/5$	V_7	V_{14}	V_{25}	V_{28}	V_{16}	V_{21}	V_{15}	V_{10}	V_1	V_{30}	V_{23}	V_2	V_{11}	V_{22}	V_{17}
$(-1,\varphi-1,0)$	$\theta=2\pi/5$	V_{13}	V_8	V_{26}	V_{27}	V_{15}	V_{22}	V_9	V_{16}	V_{29}	V_2	V_1	V_{24}	V_{21}	V_{12}	V_{25}
	$\theta=4\pi/5$	V_{21}	V_{16}	V_{14}	V_7	V_{25}	V_{28}	V_{29}	V_{18}	V_4	V_8	V_{13}	V_3	V_{19}	V_{24}	V_{30}
	$\theta=6\pi/5$	V_{19}	V_{18}	V_{12}	V_9	V_{30}	V_{23}	V_4	V_{10}	V_{27}	V_{16}	V_{21}	V_{26}	V_{11}	V_3	V_{20}
	$\theta=8\pi/5$	V_{11}	V_{10}	V_{24}	V_{29}	V_{20}	V_{17}	V_{27}	V_2	V_7	V_{18}	V_{19}	V_{14}	V_1	V_{26}	V_5
$(1,0,\varphi)$	$\theta=2\pi/5$	V_{25}	V_{28}	V_{16}	V_{21}	V_7	V_{14}	V_{17}	V_5	V_{26}	V_{12}	V_9	V_{27}	V_6	V_{20}	V_3
	$\theta=4\pi/5$	V_{10}	V_{11}	V_{24}	V_{29}	V_{17}	V_{20}	V_{18}	V_7	V_2	V_{27}	V_{26}	V_1	V_{14}	V_{19}	V_{16}
	$\theta=6\pi/5$	V_{12}	V_9	V_{23}	V_{30}	V_{18}	V_{19}	V_8	V_{17}	V_{28}	V_1	V_2	V_{25}	V_{20}	V_{13}	V_{24}
	$\theta=8\pi/5$	V_{27}	V_{26}	V_{15}	V_{22}	V_8	V_{13}	V_5	V_{18}	V_{11}	V_{25}	V_{28}	V_{10}	V_{19}	V_6	V_{23}
$(-1,0,\varphi)$	$\theta=2\pi/5$	V_{29}	V_{24}	V_{17}	V_{20}	V_{11}	V_{10}	V_{13}	V_{23}	V_6	V_{16}	V_{21}	V_5	V_{30}	V_8	V_9
	$\theta=4\pi/5$	V_{14}	V_7	V_{25}	V_{28}	V_{21}	V_{16}	V_{30}	V_1	V_{10}	V_{15}	V_{22}	V_{11}	V_2	V_{23}	V_6
	$\theta=6\pi/5$	V_8	V_{13}	V_{26}	V_{27}	V_{22}	V_{15}	V_2	V_{29}	V_{16}	V_9	V_{12}	V_{21}	V_{24}	V_1	V_{10}
	$\theta=8\pi/5$	V_{23}	V_{30}	V_{18}	V_{19}	V_{12}	V_9	V_{24}	V_{14}	V_{15}	V_6	V_5	V_{22}	V_7	V_{29}	V_{16}
$(1,0,0)$	$\theta=\pi$	V_2	V_1	V_3	V_4	V_6	V_5	V_{10}	V_9	V_8	V_7	V_{14}	V_{13}	V_{12}	V_{11}	V_{18}
$(0,1,0)$	$\theta=\pi$	V_2	V_1	V_4	V_3	V_5	V_6	V_{12}	V_{11}	V_{14}	V_{13}	V_8	V_7	V_{10}	V_9	V_{20}
$(0,0,1)$	$\theta=\pi$	V_1	V_2	V_4	V_3	V_6	V_5	V_{13}	V_{14}	V_{11}	V_{12}	V_9	V_{10}	V_7	V_8	V_{21}
$(\varphi-1,1,\varphi)$	$\theta=\pi$	V_{23}	V_{30}	V_{19}	V_{18}	V_9	V_{12}	V_7	V_{29}	V_5	V_{22}	V_{15}	V_6	V_{24}	V_{14}	V_{11}
$(\varphi-1,1,-\varphi)$	$\theta=\pi$	V_{29}	V_{24}	V_{20}	V_{17}	V_{10}	V_{11}	V_{30}	V_8	V_{21}	V_5	V_6	V_{16}	V_{13}	V_{23}	V_{22}
$(\varphi-1,-1,\varphi)$	$\theta=\pi$	V_{25}	V_{28}	V_{21}	V_{16}	V_{14}	V_7	V_6	V_{20}	V_9	V_{27}	V_{26}	V_{12}	V_{17}	V_5	V_{29}
$(\varphi-1,-1,-\varphi)$	$\theta=\pi$	V_{27}	V_{26}	V_{22}	V_{15}	V_{13}	V_8	V_{19}	V_6	V_{28}	V_{10}	V_{11}	V_{25}	V_5	V_{18}	V_4
$(1,\varphi,\varphi-1)$	$\theta=\pi$	V_8	V_{13}	V_{27}	V_{26}	V_{15}	V_{22}	V_{24}	V_1	V_{12}	V_{21}	V_{16}	V_9	V_2	V_{29}	V_5
$(1,-\varphi,\varphi-1)$	$\theta=\pi$	V_{10}	V_{11}	V_{29}	V_{24}	V_{20}	V_{17}	V_{14}	V_{19}	V_{26}	V_1	V_2	V_{27}	V_{18}	V_7	V_{30}
$(-1,\varphi,\varphi-1)$	$\theta=\pi$	V_{12}	V_9	V_{30}	V_{23}	V_{19}	V_{18}	V_{20}	V_{13}	V_2	V_{25}	V_{28}	V_1	V_8	V_{17}	V_{22}
$(-1,-\varphi,\varphi-1)$	$\theta=\pi$	V_{14}	V_7	V_{28}	V_{25}	V_{16}	V_{21}	V_2	V_{23}	V_{22}	V_{11}	V_{10}	V_{15}	V_{30}	V_1	V_{12}
$(\varphi,\varphi-1,1)$	$\theta=\pi$	V_{16}	V_{21}	V_7	V_{14}	V_{25}	V_{28}	V_3	V_{13}	V_{24}	V_{19}	V_{18}	V_{29}	V_8	V_4	V_{15}
$(\varphi,\varphi-1,-1)$	$\theta=\pi$	V_{22}	V_{15}	V_8	V_{13}	V_{26}	V_{27}	V_{14}	V_3	V_{20}	V_{23}	V_{30}	V_{17}	V_4	V_7	V_2
$(-\varphi,\varphi-1,1)$	$\theta=\pi$	V_{20}	V_{17}	V_{10}	V_{11}	V_{29}	V_{24}	V_{22}	V_{25}	V_{12}	V_3	V_4	V_9	V_{28}	V_{15}	V_{14}
$(-\varphi,\varphi-1,-1)$	$\theta=\pi$	V_{18}	V_{19}	V_9	V_{12}	V_{30}	V_{23}	V_{26}	V_{21}	V_3	V_{11}	V_{10}	V_4	V_{16}	V_{27}	V_{25}
$(1,1,1)$	$\theta=2\pi/3$	V_3	V_4	V_5	V_6	V_1	V_2	V_{15}	V_{19}	V_{16}	V_{20}	V_{17}	V_{21}	V_{18}	V_{22}	V_{23}
	$\theta=4\pi/3$	V_5	V_6	V_1	V_2	V_3	V_4	V_{23}	V_{25}	V_{27}	V_{29}	V_{24}	V_{26}	V_{28}	V_{30}	V_7
(-1,1,1)	$\theta=2\pi/3$	V_5	V_6	V_2	V_1	V_4	V_3	V_{28}	V_{30}	V_{24}	V_{26}	V_{27}	V_{29}	V_{23}	V_{25}	V_{12}
	$\theta=4\pi/3$	V_4	V_3	V_6	V_5	V_1	V_2	V_{21}	V_{17}	V_{22}	V_{18}	V_{19}	V_{15}	V_{20}	V_{16}	V_{29}
(1,-1,1)	$\theta=2\pi/3$	V_6	V_5	V_1	V_2	V_4	V_3	V_{29}	V_{27}	V_{25}	V_{23}	V_{30}	V_{28}	V_{26}	V_{24}	V_{13}
	$\theta=4\pi/3$	V_3	V_4	V_6	V_5	V_2	V_1	V_{18}	V_{22}	V_{17}	V_{21}	V_{16}	V_{20}	V_{15}	V_{19}	V_{26}
(1,1,-1)	$\theta=2\pi/3$	V_6	V_5	V_2	V_1	V_3	V_4	V_{26}	V_{24}	V_{30}	V_{28}	V_{25}	V_{23}	V_{29}	V_{27}	V_{10}
	$\theta=4\pi/3$	V_4	V_3	V_5	V_6	V_2	V_1	V_{20}	V_{16}	V_{19}	V_{15}	V_{22}	V_{18}	V_{21}	V_{17}	V_{28}
$(0,\varphi-1,\varphi)$	$\theta=2\pi/3$	V_7	V_{14}	V_{28}	V_{25}	V_{21}	V_{16}	V_{11}	V_{22}	V_{23}	V_2	V_1	V_{30}	V_{15}	V_{10}	V_{27}
	$\theta=4\pi/3$	V_{11}	V_{10}	V_{29}	V_{24}	V_{17}	V_{20}	V_1	V_{26}	V_{19}	V_{14}	V_7	V_{18}	V_{27}	V_2	V_{13}
$(0,\varphi-1,-\varphi)$	$\theta=2\pi/3$	V_9	V_{12}	V_{30}	V_{23}	V_{18}	V_{19}	V_{25}	V_2	V_{13}	V_{20}	V_{17}	V_8	V_1	V_{28}	V_6
	$\theta=4\pi/3$	V_{13}	V_8	V_{27}	V_{26}	V_{22}	V_{15}	V_{21}	V_{12}	V_1	V_{24}	V_{29}	V_2	V_9	V_{16}	V_{19}
$(\varphi-1,\varphi,0)$	$\theta=2\pi/3$	V_{18}	V_{19}	V_{12}	V_9	V_{23}	V_{30}	V_{16}	V_{27}	V_{10}	V_4	V_3	V_{11}	V_{26}	V_{21}	V_8
	$\theta=4\pi/3$	V_{20}	V_{17}	V_{11}	V_{10}	V_{24}	V_{29}	V_{28}	V_{15}	V_4	V_9	V_{12}	V_3	V_{22}	V_{25}	V_{27}
$(\varphi-1,-\varphi,0)$	$\theta=2\pi/3$	V_{22}	V_{15}	V_{13}	V_8	V_{27}	V_{26}	V_4	V_7	V_{30}	V_{17}	V_{20}	V_{23}	V_{14}	V_3	V_{21}
	$\theta=4\pi/3$	V_{16}	V_{21}	V_{14}	V_7	V_{28}	V_{25}	V_8	V_4	V_{18}	V_{29}	V_{24}	V_{19}	V_3	V_{13}	V_2
$(\varphi,0,\varphi-1)$	$\theta=2\pi/3$	V_{26}	V_{27}	V_{15}	V_{22}	V_{13}	V_8	V_{25}	V_{11}	V_{18}	V_5	V_6	V_{19}	V_{10}	V_{28}	V_{17}
	$\theta=4\pi/3$	V_{24}	V_{29}	V_{17}	V_{20}	V_{10}	V_{11}	V_{16}	V_6	V_{23}	V_{13}	V_8	V_{30}	V_5	V_{21}	V_3
$(-\varphi,0,\varphi-1)$	$\theta=2\pi/3$	V_{28}	V_{25}	V_{16}	V_{21}	V_{14}	V_7	V_{12}	V_{26}	V_5	V_{17}	V_{20}	V_6	V_{27}	V_9	V_8
	$\theta=4\pi/3$	V_{30}	V_{23}	V_{18}	V_{19}	V_9	V_{12}	V_6	V_{15}	V_{14}	V_{24}	V_{29}	V_7	V_{22}	V_5	V_{26}

Şekil 5.5 $\mathbb{R}^3_{ID}$ de Dönme Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri

Dönme Ekseni doğrultu vektörleri	Açılar	V_{16}	V_{17}	V_{18}	V_{19}	V_{20}	V_{21}	V_{22}	V_{23}	V_{24}	V_{25}	V_{26}	V_{27}	V_{28}	V_{29}	V_{30}
$(0,1,\varphi-1)$	$\theta=2\pi/5$	V_{12}	V_{16}	V_{2}	V_{1}	V_{21}	V_{9}	V_{29}	V_{5}	V_{28}	V_{18}	V_{10}	V_{11}	V_{19}	V_{25}	V_{6}
	$\theta=4\pi/5$	V_{4}	V_{12}	V_{22}	V_{15}	V_{9}	V_{3}	V_{25}	V_{27}	V_{19}	V_{2}	V_{14}	V_{7}	V_{1}	V_{18}	V_{26}
	$\theta=6\pi/5$	V_{13}	V_{4}	V_{29}	V_{24}	V_{3}	V_{8}	V_{18}	V_{11}	V_{1}	V_{22}	V_{30}	V_{23}	V_{15}	V_{2}	V_{10}
	$\theta=8\pi/5$	V_{17}	V_{13}	V_{24}	V_{28}	V_{8}	V_{20}	V_{2}	V_{7}	V_{15}	V_{29}	V_{6}	V_{5}	V_{24}	V_{22}	V_{14}
$(0,-1,\varphi-1)$	$\theta=2\pi/5$	V_{2}	V_{26}	V_{14}	V_{7}	V_{27}	V_{1}	V_{19}	V_{16}	V_{8}	V_{6}	V_{30}	V_{23}	V_{5}	V_{13}	V_{21}
	$\theta=4\pi/5$	V_{20}	V_{30}	V_{4}	V_{3}	V_{23}	V_{17}	V_{7}	V_{2}	V_{12}	V_{29}	V_{21}	V_{16}	V_{24}	V_{9}	V_{1}
	$\theta=6\pi/5$	V_{27}	V_{21}	V_{11}	V_{10}	V_{16}	V_{26}	V_{3}	V_{20}	V_{28}	V_{13}	V_{1}	V_{2}	V_{8}	V_{25}	V_{17}
	$\theta=8\pi/5$	V_{23}	V_{1}	V_{15}	V_{22}	V_{2}	V_{30}	V_{10}	V_{27}	V_{5}	V_{9}	V_{17}	V_{20}	V_{12}	V_{6}	V_{26}
$(1,\varphi-1,0)$	$\theta=2\pi/5$	V_{5}	V_{15}	V_{24}	V_{29}	V_{22}	V_{6}	V_{14}	V_{11}	V_{27}	V_{3}	V_{16}	V_{21}	V_{4}	V_{26}	V_{10}
	$\theta=4\pi/5$	V_{19}	V_{7}	V_{27}	V_{26}	V_{14}	V_{18}	V_{2}	V_{13}	V_{21}	V_{23}	V_{5}	V_{6}	V_{30}	V_{16}	V_{8}
	$\theta=6\pi/5$	V_{29}	V_{1}	V_{21}	V_{16}	V_{2}	V_{24}	V_{12}	V_{25}	V_{6}	V_{11}	V_{19}	V_{18}	V_{10}	V_{5}	V_{28}
	$\theta=8\pi/5$	V_{26}	V_{9}	V_{6}	V_{5}	V_{12}	V_{27}	V_{20}	V_{3}	V_{18}	V_{13}	V_{29}	V_{24}	V_{8}	V_{19}	V_{4}
$(-1,\varphi-1,0)$	$\theta=2\pi/5$	V_{18}	V_{6}	V_{10}	V_{11}	V_{5}	V_{19}	V_{28}	V_{17}	V_{3}	V_{30}	V_{14}	V_{7}	V_{23}	V_{4}	V_{20}
	$\theta=4\pi/5$	V_{10}	V_{22}	V_{2}	V_{1}	V_{15}	V_{11}	V_{23}	V_{6}	V_{26}	V_{20}	V_{12}	V_{9}	V_{17}	V_{27}	V_{5}
	$\theta=6\pi/5$	V_{2}	V_{28}	V_{8}	V_{13}	V_{25}	V_{1}	V_{17}	V_{22}	V_{14}	V_{5}	V_{24}	V_{29}	V_{6}	V_{7}	V_{15}
	$\theta=8\pi/5$	V_{8}	V_{23}	V_{16}	V_{21}	V_{30}	V_{13}	V_{6}	V_{28}	V_{12}	V_{15}	V_{3}	V_{4}	V_{22}	V_{9}	V_{25}
$(1,0,\varphi)$	$\theta=2\pi/5$	V_{24}	V_{18}	V_{8}	V_{13}	V_{19}	V_{29}	V_{4}	V_{15}	V_{23}	V_{10}	V_{2}	V_{1}	V_{11}	V_{30}	V_{22}
	$\theta=4\pi/5$	V_{23}	V_{8}	V_{5}	V_{6}	V_{13}	V_{30}	V_{21}	V_{3}	V_{15}	V_{12}	V_{28}	V_{25}	V_{9}	V_{22}	V_{4}
	$\theta=6\pi/5$	V_{15}	V_{5}	V_{7}	V_{14}	V_{6}	V_{22}	V_{29}	V_{16}	V_{3}	V_{27}	V_{11}	V_{10}	V_{26}	V_{4}	V_{21}
	$\theta=8\pi/5$	V_{3}	V_{7}	V_{17}	V_{20}	V_{14}	V_{4}	V_{30}	V_{24}	V_{16}	V_{1}	V_{9}	V_{12}	V_{2}	V_{21}	V_{29}
$(-1,0,\varphi)$	$\theta=2\pi/5$	V_{15}	V_{25}	V_{3}	V_{4}	V_{28}	V_{22}	V_{12}	V_{1}	V_{7}	V_{26}	V_{18}	V_{19}	V_{27}	V_{14}	V_{2}
	$\theta=4\pi/5$	V_{9}	V_{26}	V_{17}	V_{20}	V_{27}	V_{12}	V_{5}	V_{29}	V_{13}	V_{18}	V_{3}	V_{4}	V_{19}	V_{8}	V_{24}
	$\theta=6\pi/5$	V_{6}	V_{18}	V_{25}	V_{28}	V_{19}	V_{5}	V_{11}	V_{14}	V_{30}	V_{3}	V_{17}	V_{20}	V_{4}	V_{23}	V_{7}
	$\theta=8\pi/5$	V_{10}	V_{3}	V_{26}	V_{27}	V_{4}	V_{11}	V_{21}	V_{8}	V_{2}	V_{17}	V_{25}	V_{28}	V_{20}	V_{1}	V_{13}
$(1,0,0)$	$\theta=\pi$	V_{17}	V_{16}	V_{15}	V_{22}	V_{21}	V_{20}	V_{19}	V_{26}	V_{25}	V_{24}	V_{23}	V_{30}	V_{29}	V_{28}	V_{27}
$(0,1,0)$	$\theta=\pi$	V_{19}	V_{22}	V_{21}	V_{16}	V_{15}	V_{18}	V_{17}	V_{28}	V_{27}	V_{30}	V_{29}	V_{24}	V_{23}	V_{26}	V_{25}
$(0,0,1)$	$\theta=\pi$	V_{22}	V_{19}	V_{20}	V_{17}	V_{18}	V_{15}	V_{16}	V_{29}	V_{30}	V_{27}	V_{28}	V_{25}	V_{26}	V_{23}	V_{24}
$(\varphi-1,1,\varphi)$	$\theta=\pi$	V_{21}	V_{27}	V_{4}	V_{3}	V_{26}	V_{16}	V_{10}	V_{1}	V_{13}	V_{28}	V_{20}	V_{17}	V_{25}	V_{8}	V_{2}
$(\varphi-1,1,-\varphi)$	$\theta=\pi$	V_{12}	V_{4}	V_{28}	V_{25}	V_{3}	V_{9}	V_{15}	V_{14}	V_{2}	V_{19}	V_{27}	V_{26}	V_{18}	V_{1}	V_{7}
$(\varphi-1,-1,\varphi)$	$\theta=\pi$	V_{4}	V_{13}	V_{19}	V_{18}	V_{8}	V_{3}	V_{24}	V_{30}	V_{22}	V_{1}	V_{11}	V_{10}	V_{2}	V_{15}	V_{23}
$(\varphi-1,-1,-\varphi)$	$\theta=\pi$	V_{30}	V_{20}	V_{14}	V_{7}	V_{17}	V_{23}	V_{3}	V_{21}	V_{29}	V_{12}	V_{2}	V_{1}	V_{9}	V_{24}	V_{16}
$(1,\varphi,\varphi-1)$	$\theta=\pi$	V_{11}	V_{28}	V_{19}	V_{18}	V_{25}	V_{10}	V_{6}	V_{23}	V_{7}	V_{20}	V_{4}	V_{3}	V_{17}	V_{14}	V_{30}
$(1,-\varphi,\varphi-1)$	$\theta=\pi$	V_{21}	V_{6}	V_{13}	V_{8}	V_{5}	V_{16}	V_{23}	V_{22}	V_{4}	V_{25}	V_{9}	V_{12}	V_{28}	V_{3}	V_{15}
$(-1,\varphi,\varphi-1)$	$\theta=\pi$	V_{29}	V_{14}	V_{6}	V_{5}	V_{7}	V_{24}	V_{15}	V_{4}	V_{21}	V_{10}	V_{26}	V_{27}	V_{11}	V_{16}	V_{3}
$(-1,-\varphi,\varphi-1)$	$\theta=\pi$	V_{5}	V_{20}	V_{27}	V_{26}	V_{17}	V_{6}	V_{9}	V_{8}	V_{24}	V_{4}	V_{19}	V_{18}	V_{3}	V_{29}	V_{13}
$(\varphi,\varphi-1,1)$	$\theta=\pi$	V_{1}	V_{23}	V_{11}	V_{10}	V_{30}	V_{2}	V_{22}	V_{17}	V_{9}	V_{5}	V_{27}	V_{26}	V_{6}	V_{12}	V_{20}
$(\varphi,\varphi-1,-1)$	$\theta=\pi$	V_{16}	V_{12}	V_{24}	V_{29}	V_{9}	V_{21}	V_{1}	V_{10}	V_{18}	V_{28}	V_{5}	V_{6}	V_{25}	V_{19}	V_{11}
$(-\varphi,\varphi-1,1)$	$\theta=\pi$	V_{26}	V_{2}	V_{18}	V_{19}	V_{1}	V_{27}	V_{7}	V_{30}	V_{6}	V_{8}	V_{16}	V_{21}	V_{13}	V_{5}	V_{23}
$(-\varphi,\varphi-1,-1)$	$\theta=\pi$	V_{13}	V_{17}	V_{1}	V_{2}	V_{20}	V_{8}	V_{28}	V_{6}	V_{29}	V_{15}	V_{7}	V_{14}	V_{22}	V_{24}	V_{5}
$(1,1,1)$	$\theta=2\pi/3$	V_{27}	V_{24}	V_{28}	V_{25}	V_{29}	V_{26}	V_{30}	V_{7}	V_{11}	V_{8}	V_{12}	V_{9}	V_{13}	V_{10}	V_{14}
	$\theta=4\pi/3$	V_{9}	V_{11}	V_{13}	V_{8}	V_{10}	V_{12}	V_{14}	V_{15}	V_{17}	V_{19}	V_{21}	V_{16}	V_{18}	V_{20}	V_{22}
$(-1,1,1)$	$\theta=2\pi/3$	V_{14}	V_{8}	V_{10}	V_{11}	V_{13}	V_{7}	V_{9}	V_{20}	V_{22}	V_{16}	V_{18}	V_{19}	V_{21}	V_{15}	V_{17}
	$\theta=4\pi/3$	V_{25}	V_{30}	V_{26}	V_{27}	V_{23}	V_{28}	V_{24}	V_{13}	V_{9}	V_{14}	V_{10}	V_{11}	V_{7}	V_{12}	V_{8}
$(1,-1,1)$	$\theta=2\pi/3$	V_{11}	V_{9}	V_{7}	V_{14}	V_{12}	V_{10}	V_{8}	V_{21}	V_{19}	V_{17}	V_{15}	V_{22}	V_{20}	V_{18}	V_{16}
	$\theta=4\pi/3$	V_{30}	V_{25}	V_{29}	V_{24}	V_{28}	V_{23}	V_{27}	V_{10}	V_{14}	V_{9}	V_{13}	V_{8}	V_{12}	V_{7}	V_{11}
$(1,1,-1)$	$\theta=2\pi/3$	V_{8}	V_{14}	V_{12}	V_{9}	V_{7}	V_{13}	V_{11}	V_{18}	V_{16}	V_{22}	V_{20}	V_{17}	V_{15}	V_{21}	V_{19}
	$\theta=4\pi/3$	V_{24}	V_{27}	V_{23}	V_{30}	V_{26}	V_{29}	V_{25}	V_{12}	V_{8}	V_{11}	V_{7}	V_{14}	V_{10}	V_{13}	V_{9}
$(0,\varphi-1,\varphi)$	$\theta=2\pi/3$	V_{20}	V_{5}	V_{12}	V_{9}	V_{6}	V_{17}	V_{26}	V_{19}	V_{4}	V_{24}	V_{8}	V_{13}	V_{29}	V_{3}	V_{18}
	$\theta=4\pi/3$	V_{6}	V_{21}	V_{30}	V_{23}	V_{16}	V_{5}	V_{8}	V_{9}	V_{25}	V_{4}	V_{22}	V_{15}	V_{3}	V_{28}	V_{12}
$(0,\varphi-1,-\varphi)$	$\theta=2\pi/3$	V_{14}	V_{29}	V_{22}	V_{15}	V_{24}	V_{7}	V_{5}	V_{26}	V_{10}	V_{21}	V_{4}	V_{3}	V_{16}	V_{11}	V_{27}
	$\theta=4\pi/3$	V_{28}	V_{11}	V_{5}	V_{6}	V_{10}	V_{25}	V_{18}	V_{4}	V_{20}	V_{7}	V_{23}	V_{30}	V_{14}	V_{17}	V_{3}
$(\varphi-1,\varphi,0)$	$\theta=2\pi/3$	V_{28}	V_{2}	V_{20}	V_{17}	V_{1}	V_{25}	V_{13}	V_{24}	V_{5}	V_{14}	V_{22}	V_{15}	V_{7}	V_{6}	V_{29}
	$\theta=4\pi/3$	V_{7}	V_{19}	V_{1}	V_{2}	V_{18}	V_{14}	V_{26}	V_{5}	V_{23}	V_{21}	V_{13}	V_{8}	V_{16}	V_{30}	V_{6}
$(\varphi-1,-\varphi,0)$	$\theta=2\pi/3$	V_{1}	V_{29}	V_{9}	V_{12}	V_{24}	V_{2}	V_{16}	V_{19}	V_{11}	V_{6}	V_{25}	V_{28}	V_{5}	V_{10}	V_{18}
	$\theta=4\pi/3$	V_{22}	V_{10}	V_{30}	V_{23}	V_{11}	V_{15}	V_{1}	V_{12}	V_{20}	V_{26}	V_{6}	V_{5}	V_{27}	V_{17}	V_{9}
$(\varphi,0,\varphi-1)$	$\theta=2\pi/3$	V_{7}	V_{3}	V_{23}	V_{30}	V_{4}	V_{14}	V_{20}	V_{9}	V_{1}	V_{16}	V_{24}	V_{29}	V_{21}	V_{2}	V_{12}
	$\theta=4\pi/3$	V_{25}	V_{15}	V_{9}	V_{12}	V_{22}	V_{28}	V_{4}	V_{18}	V_{26}	V_{7}	V_{1}	V_{2}	V_{14}	V_{27}	V_{19}
$(-\varphi,0,\varphi-1)$	$\theta=2\pi/3$	V_{18}	V_{24}	V_{3}	V_{4}	V_{29}	V_{19}	V_{13}	V_{2}	V_{10}	V_{23}	V_{15}	V_{22}	V_{30}	V_{11}	V_{1}
	$\theta=4\pi/3$	V_{3}	V_{10}	V_{16}	V_{21}	V_{11}	V_{4}	V_{27}	V_{25}	V_{17}	V_{2}	V_{8}	V_{13}	V_{1}	V_{20}	V_{28}

Şekil 5.6 $\mathbb{R}^3_{ID}$ de Dönme Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri Devamı

Yardımcı Teorem 5.3 *(x, y, z) noktasını $(-x, -y, -z)$ noktasına dönüştüren dönüşüm olan $O = (0, 0, 0)$ orijine göre σ_0 inversiyonu $\mathbb{R}^3_{ID}$ ın bir izometrisidir.*

Şekil5.7 deki tablolarda inversiyon hareketi(dönüşümü) sonrasında birim kürenin köşe noktalarının görüntüleri verilmiştir.

İnversiyon Altında Nokta Görüntüleri	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8	V_9	V_{10}	V_{11}	V_{12}	V_{13}	V_{14}	V_{15}
$O = (0,0,0)$ σ_0	V_2	V_1	V_4	V_3	V_6	V_5	V_{14}	V_{13}	V_{12}	V_{11}	V_{10}	V_9	V_8	V_7	V_{22}
İnversiyon Altında Nokta Görüntüleri	V_{16}	V_{17}	V_{18}	V_{19}	V_{20}	V_{21}	V_{22}	V_{23}	V_{24}	V_{25}	V_{26}	V_{27}	V_{28}	V_{29}	V_{30}
$O = (0,0,0)$ σ_0	V_{21}	V_{20}	V_{19}	V_{18}	V_{17}	V_{16}	V_{15}	V_{30}	V_{29}	V_{28}	V_{27}	V_{26}	V_{25}	V_{24}	V_{23}

Şekil 5.7 $\mathbb{R}^3_{ID}$ de σ_O İnversiyonu Altında Köşe Noktaların Görüntüleri

Önerme 5.4 *$d_{ID}-$ uzaklığını invaryant bırakan, orijine göre dönme-yansımaların tümü orijine göre inversiyon hareketine (dönüşümüne) eşittir.*

İspat *$r_\theta \in R_{ID}$, Γ ve Δ , Π ye dik düzlemler olmak üzere bir dönme-yansıma $\rho := \sigma_\Pi \sigma_\Delta \sigma_\Gamma = \sigma_\Pi r_\theta$ biçiminde yazılabilir. O halde dönme ekseni yansıma düzlemine dik olmak zorundadır. Bu durumda Π düzlemi için Önerme 4.3 de ifade edilen otuz bir dönme ekseninden on beş durum incelenmelidir. Çünkü D_1 ve D_3 deki dönme eksenlerinden hiçbirisi Sonuç 4.4 de verilen yansıma düzlemlerinden herhangi birine dik değildir. Eğer Π düzlemi olarak $x = 0$ düzlemi alınırsa r_θ nın birim yön vektörü $(1, 0, 0)$ olur ve*

$$\rho := \sigma_\Pi r(x, y, z) = (-x, ycos\theta - zsin\theta, ysin\theta + zcos\theta)$$

elde edilir. $V_1 = (0, 0, 1)$ ve $V_7 = \left(\frac{\varphi-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\varphi}{2}\right)$ köşe noktaları için

$$\rho(V_1) = \rho(0, 0, 1) = (0, -sin\theta, cos\theta) \text{ ve}$$

$$\rho(V_7) = \rho\left(\frac{\varphi-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\varphi}{2}\right) = \left(\frac{1-\varphi}{2}, \frac{1}{2}cos\theta - \left(\frac{\varphi}{2}\right) sin\theta, \frac{1}{2}sin\theta + \left(\frac{\varphi}{2}\right) cos\theta\right)$$

bulunur.
$d_{ID}\left(V_1, V_7\right) = \varphi - 1$ *olduğundan ve* ρ *uzaklığı koruyacağından* $d_{ID}(\rho(V_1), \rho(V_7)) = \varphi - 1$ *olmalıdır. Böylece*

$$\alpha_1 = \left(1 - \frac{\varphi}{2}\right)\cos\theta - \frac{\sin\theta}{2},$$

$$\alpha_2 = \frac{\varphi - 1}{2}$$

ve

$$\alpha_3 = \left(1 - \frac{\varphi}{2}\right)\sin\theta + \frac{\cos\theta}{2}$$

olmak üzere

$$\max\left\{\begin{array}{l} |\alpha_1| + (\varphi - 1)\max\left\{(\varphi - 1)\left|\alpha_3\right|, (1 - \varphi)\left|\alpha_1\right| + \left|\alpha_2\right| + \left|\alpha_3\right|, \left|\alpha_2\right|\right\}, \\ |\alpha_2| + (\varphi - 1)\max\left\{(\varphi - 1)\left|\alpha_1\right|, \left|\alpha_1\right| + (1 - \varphi)\left|\alpha_2\right| + \left|\alpha_3\right|, \left|\alpha_3\right|\right\}, \\ |\alpha_3| + (\varphi - 1)\max\left\{(\varphi - 1)\left|\alpha_2\right|, \left|\alpha_1\right| + \left|\alpha_2\right| + (1 - \varphi)\left|\alpha_3\right|, \left|\alpha_1\right|\right\} \end{array}\right\} = \varphi - 1$$

elde edilir. Bu denklem çözülürse $\theta \in \{0, \pi\}$ *elde edilir. Buradan da kolaylıkla* $\sigma_{\Pi} r_{\pi} = \sigma_0$ *olduğu görülebilir. Sonuç olarak bu durumda yeni bir dönme-yansıma yoktur. Benzer şekilde dönme eksenleri bir yansıma düzlemi normali olan*

$$\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\varphi}{2}, \frac{\varphi - 1}{2}\right), \left(\frac{\varphi - 1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\varphi}{2}\right), \left(\pm\frac{\varphi}{2}, \frac{\varphi - 1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$$

vektörleri için de aynı sonuçlar elde edilir.

Şekil5.8 deki tabloda, bir yansıma düzleminin normali olup, aynı zamanda dönme ekseninin doğrultusu olanlar tespit edilmiş ve bu eksenlere göre dönme-yansıma hareketi(dönüşümü) yapılarak birim kürenin köşe noktalarının bu hareketlere (dönüşümlere) göre görüntüleri verilmiştir.

Yansıma Düzlemi Normali Olan Dönme Ekseni Doğrultu Vektörleri	(1,0,0)	(0,1,0)	(0,0,1)	$(\varphi-1,1,\varphi)$	$(\varphi-1,1,-\varphi)$	$(\varphi-1,-1,\varphi)$	$(\varphi-1,-1,-\varphi)$	$(1,\varphi,\varphi-1)$	$(1,-\varphi,\varphi-1)$	$(-1,\varphi,\varphi-1)$	$(-1,-\varphi,\varphi-1)$	$(\varphi,\varphi-1,1)$	$(\varphi,\varphi-1,-1)$	$(-\varphi,\varphi-1,1)$	$(-\varphi,\varphi-1,-1)$
Açılar	$\theta=\pi$	$\theta=\pi$	$\theta=\pi$	$\theta=\pi$	$\theta=\pi$	$\theta=\pi$	$\theta=\pi$	$\theta=\pi$	$\theta=\pi$	$\theta=\pi$	$\theta=\pi$	$\theta=\pi$	$\theta=\pi$	$\theta=\pi$	$\theta=\pi$
V_1	V_2	V_2	V_2	V_2	V_2	V_2	V_2	V_2	V_2	V_2	V_2	V_2	V_2	V_2	V_2
V_2	V_1	V_1	V_1	V_1	V_1	V_1	V_1	V_1	V_1	V_1	V_1	V_1	V_1	V_1	V_1
V_3	V_4	V_4	V_4	V_4	V_4	V_4	V_4	V_4	V_4	V_4	V_4	V_4	V_4	V_4	V_4
V_4	V_3	V_3	V_3	V_3	V_3	V_3	V_3	V_3	V_3	V_3	V_3	V_3	V_3	V_3	V_3
V_5	V_6	V_6	V_6	V_6	V_6	V_6	V_6	V_6	V_6	V_6	V_6	V_6	V_6	V_6	V_6
V_6	V_5	V_5	V_5	V_5	V_5	V_5	V_5	V_5	V_5	V_5	V_5	V_5	V_5	V_5	V_5
V_7	V_{14}	V_{14}	V_{14}	V_{14}	V_{14}	V_{14}	V_{14}	V_{14}	V_{14}	V_{14}	V_{14}	V_{14}	V_{14}	V_{14}	V_{14}
V_8	V_{13}	V_{13}	V_{13}	V_{13}	V_{13}	V_{13}	V_{13}	V_{13}	V_{13}	V_{13}	V_{13}	V_{13}	V_{13}	V_{13}	V_{13}
V_9	V_{12}	V_{12}	V_{12}	V_{12}	V_{12}	V_{12}	V_{12}	V_{12}	V_{12}	V_{12}	V_{12}	V_{12}	V_{12}	V_{12}	V_{12}
V_{10}	V_{11}	V_{11}	V_{11}	V_{11}	V_{11}	V_{11}	V_{11}	V_{11}	V_{11}	V_{11}	V_{11}	V_{11}	V_{11}	V_{11}	V_{11}
V_{11}	V_{10}	V_{10}	V_{10}	V_{10}	V_{10}	V_{10}	V_{10}	V_{10}	V_{10}	V_{10}	V_{10}	V_{10}	V_{10}	V_{10}	V_{10}
V_{12}	V_9	V_9	V_9	V_9	V_9	V_9	V_9	V_9	V_9	V_9	V_9	V_9	V_9	V_9	V_9
V_{13}	V_8	V_8	V_8	V_8	V_8	V_8	V_8	V_8	V_8	V_8	V_8	V_8	V_8	V_8	V_8
V_{14}	V_7	V_7	V_7	V_7	V_7	V_7	V_7	V_7	V_7	V_7	V_7	V_7	V_7	V_7	V_7
V_{15}	V_{22}	V_{22}	V_{22}	V_{22}	V_{22}	V_{22}	V_{22}	V_{22}	V_{22}	V_{22}	V_{22}	V_{22}	V_{22}	V_{22}	V_{22}
V_{16}	V_{21}	V_{21}	V_{21}	V_{21}	V_{21}	V_{21}	V_{21}	V_{21}	V_{21}	V_{21}	V_{21}	V_{21}	V_{21}	V_{21}	V_{21}
V_{17}	V_{20}	V_{20}	V_{20}	V_{20}	V_{20}	V_{20}	V_{20}	V_{20}	V_{20}	V_{20}	V_{20}	V_{20}	V_{20}	V_{20}	V_{20}
V_{18}	V_{19}	V_{19}	V_{19}	V_{19}	V_{19}	V_{19}	V_{19}	V_{19}	V_{19}	V_{19}	V_{19}	V_{19}	V_{19}	V_{19}	V_{19}
V_{19}	V_{18}	V_{18}	V_{18}	V_{18}	V_{18}	V_{18}	V_{18}	V_{18}	V_{18}	V_{18}	V_{18}	V_{18}	V_{18}	V_{18}	V_{18}
V_{20}	V_{17}	V_{17}	V_{17}	V_{17}	V_{17}	V_{17}	V_{17}	V_{17}	V_{17}	V_{17}	V_{17}	V_{17}	V_{17}	V_{17}	V_{17}
V_{21}	V_{16}	V_{16}	V_{16}	V_{16}	V_{16}	V_{16}	V_{16}	V_{16}	V_{16}	V_{16}	V_{16}	V_{16}	V_{16}	V_{16}	V_{16}
V_{22}	V_{15}	V_{15}	V_{15}	V_{15}	V_{15}	V_{15}	V_{15}	V_{15}	V_{15}	V_{15}	V_{15}	V_{15}	V_{15}	V_{15}	V_{15}
V_{23}	V_{30}	V_{30}	V_{30}	V_{30}	V_{30}	V_{30}	V_{30}	V_{30}	V_{30}	V_{30}	V_{30}	V_{30}	V_{30}	V_{30}	V_{30}
V_{24}	V_{29}	V_{29}	V_{29}	V_{29}	V_{29}	V_{29}	V_{29}	V_{29}	V_{29}	V_{29}	V_{29}	V_{29}	V_{29}	V_{29}	V_{29}
V_{25}	V_{28}	V_{28}	V_{28}	V_{28}	V_{28}	V_{28}	V_{28}	V_{28}	V_{28}	V_{28}	V_{28}	V_{28}	V_{28}	V_{28}	V_{28}
V_{26}	V_{27}	V_{27}	V_{27}	V_{27}	V_{27}	V_{27}	V_{27}	V_{27}	V_{27}	V_{27}	V_{27}	V_{27}	V_{27}	V_{27}	V_{27}
V_{27}	V_{26}	V_{26}	V_{26}	V_{26}	V_{26}	V_{26}	V_{26}	V_{26}	V_{26}	V_{26}	V_{26}	V_{26}	V_{26}	V_{26}	V_{26}
V_{28}	V_{25}	V_{25}	V_{25}	V_{25}	V_{25}	V_{25}	V_{25}	V_{25}	V_{25}	V_{25}	V_{25}	V_{25}	V_{25}	V_{25}	V_{25}
V_{29}	V_{24}	V_{24}	V_{24}	V_{24}	V_{24}	V_{24}	V_{24}	V_{24}	V_{24}	V_{24}	V_{24}	V_{24}	V_{24}	V_{24}	V_{24}
V_{30}	V_{23}	V_{23}	V_{23}	V_{23}	V_{23}	V_{23}	V_{23}	V_{23}	V_{23}	V_{23}	V_{23}	V_{23}	V_{23}	V_{23}	V_{23}

Şekil 5.8 $\mathbb{R}^3_{ID}$ de Dönme Yansıma Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri

Önerme 5.5 *d_{ID} uzaklığını koruyan, orijine göre kırk dört tane dönme-inversiyon vardır.*

İspat *$r_\theta \in R_{ID}$ olmak üzere bir dönme-inversiyon $\rho := \sigma_O \sigma_\Delta \sigma_\Gamma = \sigma_O r_\theta$ biçiminde bileşke olarak yazılabileceğinden Önerme 4.3 den, ispat otuz bir dönme ekseni için verilmelidir. r_θ $(0, 1, \varphi - 1)$ doğrultulu doğru etrafındaki dönme ise birim doğrultu vektörü $\left(0, \sqrt{\frac{2+\varphi}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\right)$ olur. Bu durumda*

$$\rho(x,y,z) = \sigma_O r_\theta(x,y,z) = \begin{pmatrix} -x\cos\theta + \left(\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\sin\theta\right) y - \left(\sqrt{\frac{2+\varphi}{5}}\sin\theta\right) z, \\ -\left(\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\sin\theta\right) x - \left(\frac{2+\varphi}{5} + \frac{3-\varphi}{5}\cos\theta\right) y - \left(\left(\frac{2\varphi-1}{5}\right)(1-\cos\theta)\right) z, \\ \left(\sqrt{\frac{2+\varphi}{5}}\sin\theta\right) x - \left(\left(\frac{2\varphi-1}{5}\right)(1-\cos\theta)\right) y - \left(\frac{3-\varphi}{5} + \frac{2+\varphi}{5}\cos\theta\right) z \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $V_1 = (0,0,1)$ ve $V_7 = \left(\frac{\varphi-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\varphi}{2}\right)$ olmak üzere

$$\rho(V_1) = \rho(0,0,1) = \left(-\left(\sqrt{\frac{2+\varphi}{5}}\sin\theta\right), \frac{2\varphi-1}{5}(1-\cos\theta), \frac{\varphi-3}{5} - \frac{2+\varphi}{5}\cos\theta\right)$$

$$\rho(V_7) = \rho\left(\frac{\varphi-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\varphi}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1-\varphi}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}} - \sqrt{\frac{3+4\varphi}{5}}\right)\sin\theta, \\ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7-4\varphi}{5}}\sin\theta + \frac{2\varphi-1}{10}\cos\theta - \frac{2+\varphi}{5}, \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\sin\theta - \frac{2\varphi-1}{5} - \frac{2+\varphi}{10}\cos\theta \end{pmatrix}$$

elde edilir. Burada $d_{ID}(V_1, V_7) = \varphi - 1$ olduğundan ve ρ uzaklığı korumak zorunda olduğundan $d_{ID}(\rho(V_1), \rho(V_7)) = \varphi - 1$ olmalıdır. Bu durumda

$$\alpha_1 = \left(1 - \frac{\varphi}{2}\right)\cos\theta + \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3+4\varphi}{10}} - \frac{2\varphi+1}{2}\sqrt{\frac{7-4\varphi}{10}}\right)\sin\theta,$$

$$\alpha_2 = \frac{2\varphi-1}{10}\cos\theta + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7-4\varphi}{5}}\sin\theta + \frac{3-\varphi}{5}$$

ve

$$\alpha_3 = -\frac{\varphi+2}{10}\cos\theta - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7-4\varphi}{10}}\sin\theta + \frac{3\varphi-4}{10}$$

olmak üzere

$$\max\left\{\begin{array}{l} |\alpha_1| + (\varphi-1)\max\{(\varphi-1)|\alpha_3|, (1-\varphi)|\alpha_1| + |\alpha_2| + |\alpha_3|, |\alpha_2|\}, \\ |\alpha_2| + (\varphi-1)\max\{(\varphi-1)|\alpha_1|, |\alpha_1| + (1-\varphi)|\alpha_2| + |\alpha_3|, |\alpha_3|\}, \\ |\alpha_3| + (\varphi-1)\max\{(\varphi-1)|\alpha_2|, |\alpha_1| + |\alpha_2| + (1-\varphi)|\alpha_3|, |\alpha_1|\} \end{array}\right\} = \varphi - 1$$

olur. Bu denklem çözülürse $\theta = 2\pi/5, 4\pi/5, 6\pi/5, 8\pi/5$ sonuçları bulunur. Benzer şekilde, r_θ, dönme ekseninin doğrultusu $(0, -1, (\varphi-1))$, $(\pm 1, (\varphi-1), 0)$, $(\pm 1, 0, \varphi)$ vektörleri olarak alınırsa $\theta = 2\pi/5, 4\pi/5, 6\pi/5, 8\pi/5$ olur. Böylece $d_{ID}-$uzaklığını koruyacak şekilde yirmi dört farklı dönme-inversiyon hareketi bulunur.

r_θ, dönme ekseni $(1,1,1)$ doğrultulu doğru ise r_θ nın birim yön vektörü $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ olur. Buradan $\rho(V_1)$ ve$\rho(V_7)$ hesaplanıp $d_{ID}\left(\rho(V_1),\rho(V_7)\right) = \varphi - 1$ bağıntısında yerine yazılırsa

$$\alpha_1 = \frac{\varphi-1}{6}\cos\theta + \frac{-2\varphi^2+3\varphi+1}{2\sqrt{3}}\sin\theta + \frac{\varphi-1}{3}$$

$$\alpha_2 = \frac{5-2\varphi}{6}\cos\theta + \frac{1}{2\sqrt{3}}\sin\theta + \frac{\varphi-1}{3}$$

ve

$$\alpha_3 = \frac{5\varphi-4}{6}\cos\theta + \frac{2-\varphi}{2\sqrt{3}}\sin\theta + \frac{2\varphi-1}{3}$$

olmak üzere

$$\max\left\{\begin{array}{l} |\alpha_1| + (\varphi-1)\max\left\{(\varphi-1)|\alpha_3|, (1-\varphi)|\alpha_1| + |\alpha_2| + |\alpha_3|, |\alpha_2|\right\}, \\ |\alpha_2| + (\varphi-1)\max\left\{(\varphi-1)|\alpha_1|, |\alpha_1| + (1-\varphi)|\alpha_2| + |\alpha_3|, |\alpha_3|\right\}, \\ |\alpha_3| + (\varphi-1)\max\left\{(\varphi-1)|\alpha_2|, |\alpha_1| + |\alpha_2| + (1-\varphi)|\alpha_3|, |\alpha_1|\right\} \end{array}\right\} = \varphi - 1$$

denklemi elde edilir. Bu denklem çözülürse $\theta = 2\pi/3, 4\pi/3$ olur. Benzer şekilde,r_θ, dönme ekseni doğrultusu $(-1,1,1)$, $(1,-1,1)$, $(1,1,-1)$, $(0,\varphi-1,\pm\varphi)$, $(\varphi-1,\pm\varphi,0)$, $(\pm\varphi,0,\varphi-1)$ vektörlerine paralel olarak alınırsa $\theta = 2\pi/3, 4\pi/3$ olur. Böylece $d_{ID}-$uzaklığını koruyacak şekilde yirmi farklı dönme-inversiyon hareketi bulunur.

r_θ, dönme ekseni $(1,0,0)$ doğrultulu doğru ise birim yön vektörü $(1,0,0)$ olur. Bu durumda $\rho(V_1)$ ve$\rho(V_7)$ hesaplanıp $d_{ID}\left(\rho(V_1),\rho(V_7)\right) = \varphi - 1$ ifadesinde yerine yazılırsa

$$\alpha_1 = \frac{\varphi-2}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta, \alpha_2 = \frac{1}{2}\cos\theta + \frac{2-\varphi}{2}\sin\theta, \alpha_3 = \frac{\varphi-1}{2}$$

olmak üzere

$$d_{ID}\left(\rho(V_1),\rho(V_7)\right) = \max\left\{\begin{array}{l} |\alpha_1| + (\varphi-1)\max\left\{(\varphi-1)|\alpha_3|, (1-\varphi)|\alpha_1| + |\alpha_2| + |\alpha_3|, |\alpha_2|\right\}, \\ |\alpha_2| + (\varphi-1)\max\left\{(\varphi-1)|\alpha_1|, |\alpha_1| + (1-\varphi)|\alpha_2| + |\alpha_3|, |\alpha_3|\right\}, \\ |\alpha_3| + (\varphi-1)\max\left\{(\varphi-1)|\alpha_2|, |\alpha_1| + |\alpha_2| + (1-\varphi)|\alpha_3|, |\alpha_1|\right\} \end{array}\right\} = \varphi - 1$$

bulunur. Bu denklem çözülürse $\theta = \pi$ olarak bulunur. Benzer şekilde, r_θ, dönme ekseni doğrultusu $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $((\varphi-1),\pm1,\pm\varphi)$, $(\pm1,\pm\varphi,\varphi-1)$, $(\pm\varphi,\varphi-1,\pm1)$ vektörlerine paralel olarak alınırsa $\theta = \pi$ olur. Ancak bu durumda yeni bir dönme-inversiyon hareketi bulunmamaktadır. Çünkü $\theta = \pi$ için, dönme ekseni doğrultu vektörü bu vektörler olacak şekilde alınır ve dönme-inversiyon hareketi yapılırsa Şekil5.9 ve Şekil5.10 daki tablolarda verilen düzlemlere göre yansıma hareketleri bulunur.

Dönme Ekseni Doğrultu	Açılar	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8	V_9	V_{10}	V_{11}	V_{12}	V_{13}	V_{14}	V_{15}
$(0,1,\varphi-1)$	$\theta=2\pi/5$	V_{22}	V_{15}	V_{13}	V_8	V_{26}	V_{27}	V_{30}	V_{17}	V_4	V_7	V_{14}	V_3	V_{20}	V_{23}	V_{29}
	$\theta=4\pi/5$	V_{29}	V_{24}	V_{17}	V_{20}	V_{10}	V_{11}	V_6	V_{16}	V_{13}	V_{23}	V_{30}	V_8	V_{21}	V_5	V_{25}
	$\theta=6\pi/5$	V_{25}	V_{28}	V_{16}	V_{21}	V_{14}	V_7	V_{26}	V_{12}	V_{17}	V_5	V_6	V_{20}	V_9	V_{27}	V_{18}
	$\theta=8\pi/5$	V_{18}	V_{19}	V_{12}	V_9	V_{30}	V_{23}	V_{10}	V_4	V_{16}	V_{27}	V_{26}	V_{21}	V_3	V_{11}	V_2
$(0,1,1-\varphi)$	$\theta=2\pi/5$	V_{20}	V_{17}	V_{11}	V_{10}	V_{30}	V_{23}	V_4	V_9	V_{28}	V_{15}	V_{22}	V_{25}	V_{12}	V_3	V_{19}
	$\theta=4\pi/5$	V_{27}	V_{26}	V_{15}	V_{22}	V_{13}	V_8	V_{11}	V_{25}	V_5	V_{18}	V_{19}	V_6	V_{28}	V_{10}	V_7
	$\theta=6\pi/5$	V_{23}	V_{30}	V_{18}	V_{19}	V_9	V_{12}	V_{15}	V_6	V_{24}	V_{14}	V_7	V_{29}	V_5	V_{22}	V_3
	$\theta=8\pi/5$	V_{16}	V_{21}	V_{14}	V_7	V_{25}	V_{28}	V_{18}	V_{29}	V_8	V_4	V_3	V_{13}	V_{24}	V_{19}	V_{10}
$(1,0,\varphi)$	$\theta=2\pi/5$	V_{12}	V_9	V_{30}	V_{23}	V_{18}	V_{19}	V_2	V_{25}	V_{20}	V_{13}	V_8	V_{17}	V_{28}	V_1	V_{14}
	$\theta=4\pi/5$	V_{20}	V_{17}	V_{10}	V_{11}	V_{24}	V_{29}	V_{12}	V_3	V_{22}	V_{25}	V_{28}	V_{15}	V_4	V_9	V_2
	$\theta=6\pi/5$	V_{22}	V_{15}	V_8	V_{13}	V_{27}	V_{26}	V_{20}	V_{22}	V_{14}	V_3	V_4	V_7	V_{30}	V_{17}	V_{12}
	$\theta=8\pi/5$	V_{14}	V_7	V_{28}	V_{25}	V_{21}	V_{16}	V_{22}	V_{11}	V_2	V_{23}	V_{30}	V_1	V_{10}	V_{15}	V_{20}
$(1,0,-\varphi)$	$\theta=2\pi/5$	V_8	V_{13}	V_{27}	V_{26}	V_{22}	V_{15}	V_{12}	V_{21}	V_{24}	V_1	V_2	V_{29}	V_{16}	V_9	V_{28}
	$\theta=4\pi/5$	V_{16}	V_{21}	V_7	V_{14}	V_{28}	V_{25}	V_{24}	V_{19}	V_3	V_{13}	V_8	V_4	V_{18}	V_{29}	V_{23}
	$\theta=6\pi/5$	V_{18}	V_{19}	V_9	V_{12}	V_{23}	V_{30}	V_3	V_{11}	V_{26}	V_{21}	V_{16}	V_{27}	V_{10}	V_4	V_{17}
	$\theta=8\pi/5$	V_{10}	V_{11}	V_{29}	V_{24}	V_{17}	V_{20}	V_{26}	V_1	V_{14}	V_{19}	V_{18}	V_7	V_2	V_{27}	V_6
$(1,\varphi-1,0)$	$\theta=2\pi/5$	V_{28}	V_{25}	V_{21}	V_{16}	V_{14}	V_7	V_{20}	V_6	V_{27}	V_9	V_{12}	V_{26}	V_5	V_{17}	V_4
	$\theta=4\pi/5$	V_{11}	V_{10}	V_{29}	V_{24}	V_{20}	V_{17}	V_{19}	V_{14}	V_1	V_{26}	V_{27}	V_2	V_7	V_{18}	V_{21}
	$\theta=6\pi/5$	V_9	V_{12}	V_{30}	V_{23}	V_{19}	V_{18}	V_{13}	V_{20}	V_{25}	V_2	V_1	V_{28}	V_{17}	V_8	V_{29}
	$\theta=8\pi/5$	V_{26}	V_{27}	V_{22}	V_{15}	V_{13}	V_8	V_6	V_{19}	V_{10}	V_{28}	V_{25}	V_{11}	V_{18}	V_5	V_{30}
$(1,1-\varphi,0)$	$\theta=2\pi/5$	V_{24}	V_{29}	V_{20}	V_{17}	V_{10}	V_{11}	V_8	V_{30}	V_5	V_{21}	V_{16}	V_6	V_{23}	V_{13}	V_{12}
	$\theta=4\pi/5$	V_7	V_{14}	V_{28}	V_{25}	V_{16}	V_{21}	V_{23}	V_2	V_{11}	V_{22}	V_{15}	V_{10}	V_1	V_{30}	V_5
	$\theta=6\pi/5$	V_{13}	V_8	V_{27}	V_{26}	V_{15}	V_{22}	V_1	V_{24}	V_{21}	V_{12}	V_9	V_{16}	V_{29}	V_2	V_{11}
	$\theta=8\pi/5$	V_{30}	V_{23}	V_{19}	V_{18}	V_9	V_{12}	V_{29}	V_7	V_{22}	V_5	V_6	V_{15}	V_{14}	V_{24}	V_{21}
$(1,0,0)$	$\theta=\pi$	V_1	V_2	V_4	V_3	V_5	V_6	V_{11}	V_{12}	V_{13}	V_{14}	V_7	V_8	V_9	V_{10}	V_{19}
$(0,1,0)$	$\theta=\pi$	V_1	V_2	V_3	V_4	V_6	V_5	V_9	V_{10}	V_7	V_8	V_{13}	V_{14}	V_{11}	V_{12}	V_{17}
$(0,0,1)$	$\theta=\pi$	V_2	V_1	V_3	V_4	V_5	V_6	V_8	V_7	V_{10}	V_9	V_{12}	V_{11}	V_{14}	V_{13}	V_{16}
$(\varphi-1,1,\varphi)$	$\theta=\pi$	V_{30}	V_{23}	V_{18}	V_{19}	V_{12}	V_9	V_{14}	V_{24}	V_6	V_{15}	V_{22}	V_5	V_{29}	V_7	V_{10}
$(\varphi-1,1,-\varphi)$	$\theta=\pi$	V_{24}	V_{29}	V_{17}	V_{20}	V_{11}	V_{10}	V_{23}	V_{13}	V_{16}	V_6	V_5	V_{21}	V_8	V_{30}	V_{15}
$(\varphi-1,-1,\varphi)$	$\theta=\pi$	V_{28}	V_{25}	V_{16}	V_{21}	V_7	V_{14}	V_5	V_{17}	V_{12}	V_{26}	V_{27}	V_9	V_{20}	V_6	V_{24}
$(\varphi-1,-1,-\varphi)$	$\theta=\pi$	V_{26}	V_{27}	V_{15}	V_{22}	V_8	V_{13}	V_{18}	V_5	V_{25}	V_{11}	V_{10}	V_{28}	V_6	V_{19}	V_3
$(1,\varphi,\varphi-1)$	$\theta=\pi$	V_{13}	V_8	V_{26}	V_{27}	V_{22}	V_{15}	V_{29}	V_2	V_9	V_{16}	V_{21}	V_{12}	V_1	V_{24}	V_6
$(1,-\varphi,\varphi-1)$	$\theta=\pi$	V_{11}	V_{10}	V_{24}	V_{29}	V_{17}	V_{20}	V_7	V_{18}	V_{27}	V_2	V_1	V_{26}	V_{19}	V_{14}	V_{23}
$(-1,\varphi,\varphi-1)$	$\theta=\pi$	V_9	V_{12}	V_{23}	V_{30}	V_{18}	V_{19}	V_{17}	V_8	V_1	V_{28}	V_{25}	V_2	V_{13}	V_{20}	V_{15}
$(-1,-\varphi,\varphi-1)$	$\theta=\pi$	V_7	V_{14}	V_{25}	V_{28}	V_{21}	V_{16}	V_1	V_{30}	V_{15}	V_{10}	V_{11}	V_{22}	V_{23}	V_2	V_9
$(\varphi,\varphi-1,1)$	$\theta=\pi$	V_{21}	V_{16}	V_{14}	V_7	V_{28}	V_{25}	V_4	V_8	V_{29}	V_{18}	V_{19}	V_{24}	V_{13}	V_3	V_{22}
$(\varphi,\varphi-1,-1)$	$\theta=\pi$	V_{15}	V_{22}	V_{13}	V_8	V_{27}	V_{26}	V_7	V_4	V_{17}	V_{30}	V_{23}	V_{20}	V_3	V_{14}	V_1
$(-\varphi,\varphi-1,1)$	$\theta=\pi$	V_{17}	V_{20}	V_{11}	V_{10}	V_{24}	V_{29}	V_{15}	V_{28}	V_9	V_4	V_3	V_{12}	V_{25}	V_{22}	V_7
$(-\varphi,\varphi-1,-1)$	$\theta=\pi$	V_{19}	V_{18}	V_{12}	V_9	V_{23}	V_{30}	V_{27}	V_{16}	V_4	V_{10}	V_{11}	V_3	V_{21}	V_{26}	V_{28}
(1,1,1)	$\theta=2\pi/3$	V_4	V_3	V_6	V_5	V_2	V_1	V_{22}	V_{18}	V_{21}	V_{17}	V_{20}	V_{16}	V_{19}	V_{15}	V_{30}
	$\theta=4\pi/3$	V_6	V_5	V_2	V_1	V_4	V_3	V_{30}	V_{28}	V_{26}	V_{24}	V_{29}	V_{27}	V_{25}	V_{23}	V_{14}
(-1,1,1)	$\theta=2\pi/3$	V_6	V_5	V_1	V_2	V_3	V_4	V_{25}	V_{23}	V_{29}	V_{27}	V_{26}	V_{24}	V_{30}	V_{28}	V_9
	$\theta=4\pi/3$	V_3	V_4	V_5	V_6	V_2	V_1	V_{16}	V_{20}	V_{15}	V_{19}	V_{18}	V_{22}	V_{17}	V_{21}	V_{24}
(1,-1,1)	$\theta=2\pi/3$	V_5	V_6	V_2	V_1	V_3	V_4	V_{24}	V_{26}	V_{28}	V_{30}	V_{23}	V_{25}	V_{27}	V_{29}	V_8
	$\theta=4\pi/3$	V_4	V_3	V_5	V_6	V_1	V_2	V_{19}	V_{15}	V_{20}	V_{16}	V_{21}	V_{17}	V_{22}	V_{18}	V_{27}
(1,1,-1)	$\theta=2\pi/3$	V_5	V_6	V_1	V_2	V_4	V_3	V_{27}	V_{29}	V_{23}	V_{25}	V_{28}	V_{30}	V_{24}	V_{26}	V_{11}
	$\theta=4\pi/3$	V_3	V_4	V_6	V_5	V_1	V_2	V_{17}	V_{21}	V_{18}	V_{22}	V_{15}	V_{19}	V_{16}	V_{20}	V_{25}
$(0,\varphi-1,\varphi)$	$\theta=2\pi/3$	V_{14}	V_7	V_{25}	V_{28}	V_{16}	V_{21}	V_{10}	V_{15}	V_{30}	V_1	V_2	V_{23}	V_{22}	V_{11}	V_{26}
	$\theta=4\pi/3$	V_{10}	V_{11}	V_{24}	V_{29}	V_{20}	V_{17}	V_2	V_{27}	V_{18}	V_7	V_{14}	V_{19}	V_{26}	V_1	V_8
$(0,\varphi-1,-\varphi)$	$\theta=2\pi/3$	V_{12}	V_9	V_{23}	V_{30}	V_{19}	V_{18}	V_{28}	V_1	V_8	V_{17}	V_{20}	V_{13}	V_2	V_{25}	V_5
	$\theta=4\pi/3$	V_8	V_{13}	V_{26}	V_{27}	V_{15}	V_{22}	V_{16}	V_9	V_2	V_{29}	V_{24}	V_1	V_{12}	V_{21}	V_{18}
$(\varphi-1,\varphi,0)$	$\theta=2\pi/3$	V_{19}	V_{18}	V_9	V_{12}	V_{30}	V_{23}	V_{21}	V_{26}	V_{11}	V_3	V_4	V_{10}	V_{27}	V_{16}	V_{13}
	$\theta=4\pi/3$	V_{17}	V_{20}	V_{10}	V_{11}	V_{29}	V_{24}	V_{25}	V_{22}	V_3	V_{12}	V_9	V_4	V_{15}	V_{28}	V_{26}
$(\varphi-1,-\varphi,0)$	$\theta=2\pi/3$	V_{15}	V_{22}	V_8	V_{13}	V_{26}	V_{27}	V_3	V_{14}	V_{23}	V_{20}	V_{17}	V_{30}	V_7	V_4	V_{16}
	$\theta=4\pi/3$	V_{21}	V_{16}	V_7	V_{14}	V_{25}	V_{28}	V_{13}	V_3	V_{19}	V_{24}	V_{29}	V_{18}	V_4	V_8	V_1
$(\varphi,0,\varphi-1)$	$\theta=2\pi/3$	V_{27}	V_{26}	V_{22}	V_{15}	V_8	V_{13}	V_{28}	V_{10}	V_{19}	V_6	V_5	V_{18}	V_{11}	V_{25}	V_{20}
	$\theta=4\pi/3$	V_{29}	V_{24}	V_{20}	V_{17}	V_{11}	V_{10}	V_{21}	V_5	V_{30}	V_8	V_{13}	V_{23}	V_6	V_{16}	V_4
$(-\varphi,0,\varphi-1)$	$\theta=2\pi/3$	V_{25}	V_{28}	V_{21}	V_{16}	V_7	V_{14}	V_9	V_{27}	V_6	V_{20}	V_{17}	V_5	V_{26}	V_{12}	V_{13}
	$\theta=4\pi/3$	V_{23}	V_{30}	V_{19}	V_{18}	V_{12}	V_9	V_5	V_{22}	V_7	V_{29}	V_{24}	V_{14}	V_{15}	V_6	V_{27}

Şekil 5.9 $\mathbb{R}^3_{ID}$ de Dönme İnversiyon Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri

Dönme Ekseni Doğrultu	Açılar	V_{16}	V_{17}	V_{18}	V_{19}	V_{20}	V_{21}	V_{22}	V_{23}	V_{24}	V_{25}	V_{26}	V_{27}	V_{28}	V_{29}	V_{30}
$(0,1,\varphi-1)$	$\theta=2\pi/5$	V_9	V_{21}	V_1	V_2	V_{16}	V_{12}	V_{24}	V_6	V_{25}	V_{19}	V_{11}	V_{10}	V_{18}	V_{28}	V_5
	$\theta=4\pi/5$	V_3	V_9	V_{15}	V_{22}	V_{12}	V_4	V_{28}	V_{26}	V_{18}	V_1	V_7	V_{14}	V_2	V_{19}	V_{27}
	$\theta=6\pi/5$	V_8	V_3	V_{24}	V_{29}	V_4	V_{13}	V_{19}	V_{10}	V_2	V_{15}	V_{23}	V_{30}	V_{22}	V_1	V_{11}
	$\theta=8\pi/5$	V_{20}	V_8	V_{28}	V_{25}	V_{13}	V_{17}	V_1	V_{14}	V_{22}	V_{24}	V_5	V_6	V_{29}	V_{15}	V_7
$(0,1,1-\varphi)$	$\theta=2\pi/5$	V_1	V_{27}	V_7	V_{14}	V_{26}	V_2	V_{18}	V_{21}	V_{13}	V_5	V_{23}	V_{27}	V_6	V_8	V_{16}
	$\theta=4\pi/5$	V_{17}	V_{23}	V_3	V_4	V_{30}	V_{20}	V_{14}	V_1	V_9	V_{24}	V_{16}	V_{21}	V_{29}	V_{12}	V_2
	$\theta=6\pi/5$	V_{26}	V_{16}	V_{10}	V_{11}	V_{21}	V_{27}	V_4	V_{17}	V_{25}	V_8	V_2	V_1	V_{13}	V_{28}	V_{20}
	$\theta=8\pi/5$	V_{30}	V_2	V_{22}	V_{15}	V_1	V_{23}	V_{11}	V_{26}	V_6	V_{12}	V_{20}	V_{17}	V_9	V_5	V_{27}
$(1,0,\varphi)$	$\theta=2\pi/5$	V_6	V_{22}	V_{29}	V_{24}	V_{15}	V_5	V_7	V_{10}	V_{26}	V_4	V_{21}	V_{16}	V_3	V_{27}	V_{11}
	$\theta=4\pi/5$	V_{18}	V_{14}	V_{26}	V_{27}	V_7	V_{19}	V_1	V_8	V_{16}	V_{30}	V_6	V_5	V_{25}	V_{21}	V_{13}
	$\theta=6\pi/5$	V_{24}	V_2	V_{16}	V_{21}	V_1	V_{29}	V_9	V_{28}	V_5	V_{10}	V_{18}	V_{19}	V_{11}	V_6	V_{25}
	$\theta=8\pi/5$	V_{27}	V_{12}	V_5	V_6	V_9	V_{26}	V_{17}	V_4	V_{19}	V_8	V_{24}	V_{29}	V_{13}	V_{18}	V_3
$(1,0,-\varphi)$	$\theta=2\pi/5$	V_{19}	V_5	V_{11}	V_{10}	V_6	V_{18}	V_{25}	V_{20}	V_4	V_{23}	V_7	V_{14}	V_{30}	V_3	V_{17}
	$\theta=4\pi/5$	V_{11}	V_{15}	V_1	V_2	V_{22}	V_{10}	V_{30}	V_5	V_{27}	V_{17}	V_9	V_{12}	V_{20}	V_{26}	V_6
	$\theta=6\pi/5$	V_1	V_{25}	V_{13}	V_8	V_{28}	V_2	V_{20}	V_{15}	V_7	V_6	V_{29}	V_{24}	V_7	V_{14}	V_{22}
	$\theta=8\pi/5$	V_{13}	V_{30}	V_{21}	V_{16}	V_{23}	V_8	V_5	V_{25}	V_9	V_{22}	V_4	V_3	V_{15}	V_{12}	V_{28}
$(1,\varphi-1,0)$	$\theta=2\pi/5$	V_{29}	V_{19}	V_{13}	V_8	V_{18}	V_{24}	V_3	V_{22}	V_{20}	V_{11}	V_1	V_2	V_{10}	V_{23}	V_{15}
	$\theta=4\pi/5$	V_{30}	V_{13}	V_6	V_5	V_8	V_{23}	V_{16}	V_4	V_{22}	V_9	V_{25}	V_{28}	V_{12}	V_{15}	V_3
	$\theta=6\pi/5$	V_{22}	V_6	V_{14}	V_7	V_5	V_{15}	V_{24}	V_{21}	V_4	V_{26}	V_{10}	V_{11}	V_{27}	V_3	V_{16}
	$\theta=8\pi/5$	V_4	V_{14}	V_{20}	V_{17}	V_7	V_3	V_{23}	V_{29}	V_{21}	V_2	V_{12}	V_9	V_1	V_{16}	V_{24}
$(1,1-\varphi,0)$	$\theta=2\pi/5$	V_{22}	V_{28}	V_4	V_3	V_{25}	V_{15}	V_9	V_2	V_{14}	V_{27}	V_{19}	V_{18}	V_{26}	V_7	V_1
	$\theta=4\pi/5$	V_{12}	V_{27}	V_{20}	V_{17}	V_{26}	V_9	V_6	V_{24}	V_8	V_{19}	V_4	V_3	V_{18}	V_{13}	V_{29}
	$\theta=6\pi/5$	V_5	V_{19}	V_{28}	V_{25}	V_{18}	V_6	V_{10}	V_7	V_{23}	V_4	V_{20}	V_{17}	V_3	V_{30}	V_{14}
	$\theta=8\pi/5$	V_{11}	V_4	V_{27}	V_{26}	V_3	V_{10}	V_{16}	V_{13}	V_1	V_{20}	V_{28}	V_{25}	V_{17}	V_2	V_8
$(1,0,0)$	$\theta=\pi$	V_{20}	V_{21}	V_{22}	V_{15}	V_{16}	V_{17}	V_{18}	V_{27}	V_{28}	V_{29}	V_{30}	V_{23}	V_{24}	V_{25}	V_{26}
$(0,1,0)$	$\theta=\pi$	V_{18}	V_{15}	V_{16}	V_{21}	V_{22}	V_{19}	V_{20}	V_{25}	V_{26}	V_{23}	V_{24}	V_{29}	V_{30}	V_{27}	V_{28}
$(0,0,1)$	$\theta=\pi$	V_{15}	V_{18}	V_{17}	V_{20}	V_{19}	V_{22}	V_{21}	V_{24}	V_{23}	V_{26}	V_{25}	V_{28}	V_{27}	V_{30}	V_{29}
$(\varphi-1,1,\varphi)$	$\theta=\pi$	V_{16}	V_{26}	V_3	V_4	V_{27}	V_{21}	V_{11}	V_2	V_8	V_{25}	V_{17}	V_{20}	V_{28}	V_{13}	V_1
$(\varphi-1,1,-\varphi)$	$\theta=\pi$	V_9	V_3	V_{25}	V_{28}	V_4	V_{12}	V_{22}	V_7	V_1	V_{18}	V_{26}	V_{27}	V_{19}	V_2	V_{14}
$(\varphi-1,-1,\varphi)$	$\theta=\pi$	V_3	V_8	V_{18}	V_{19}	V_{13}	V_4	V_{29}	V_{23}	V_{15}	V_2	V_{10}	V_{27}	V_{28}	V_{29}	V_{30}
$(\varphi-1,-1,-\varphi)$	$\theta=\pi$	V_{23}	V_{17}	V_7	V_{14}	V_{20}	V_{30}	V_4	V_{16}	V_{24}	V_9	V_1	V_2	V_{12}	V_{29}	V_{21}
$(1,\varphi,\varphi-1)$	$\theta=\pi$	V_{10}	V_{25}	V_{18}	V_{19}	V_{28}	V_{11}	V_5	V_{30}	V_{14}	V_{17}	V_3	V_4	V_{20}	V_7	V_{23}
$(1,-\varphi,\varphi-1)$	$\theta=\pi$	V_{16}	V_5	V_8	V_{13}	V_6	V_{21}	V_{30}	V_{15}	V_3	V_{28}	V_{12}	V_9	V_{25}	V_4	V_{22}
$(-1,\varphi,\varphi-1)$	$\theta=\pi$	V_{24}	V_7	V_5	V_6	V_{14}	V_{29}	V_{22}	V_3	V_{16}	V_{11}	V_{27}	V_{26}	V_{10}	V_{21}	V_4
$(-1,-\varphi,\varphi-1)$	$\theta=\pi$	V_6	V_{17}	V_{26}	V_{27}	V_{20}	V_5	V_{12}	V_{13}	V_{29}	V_3	V_{18}	V_{19}	V_4	V_{24}	V_8
$(\varphi,\varphi-1,1)$	$\theta=\pi$	V_2	V_{30}	V_{10}	V_{11}	V_{23}	V_1	V_{15}	V_{20}	V_{12}	V_6	V_{26}	V_{27}	V_5	V_9	V_{17}
$(\varphi,\varphi-1,-1)$	$\theta=\pi$	V_{21}	V_9	V_{29}	V_{24}	V_{12}	V_{16}	V_2	V_{11}	V_{19}	V_{25}	V_6	V_5	V_{28}	V_{18}	V_{10}
$(-\varphi,\varphi-1,1)$	$\theta=\pi$	V_{27}	V_1	V_{19}	V_{18}	V_2	V_{26}	V_{14}	V_{23}	V_5	V_{13}	V_{21}	V_{16}	V_8	V_6	V_{30}
$(-\varphi,\varphi-1,-1)$	$\theta=\pi$	V_8	V_{20}	V_2	V_1	V_{17}	V_{13}	V_{25}	V_5	V_{24}	V_{22}	V_{14}	V_7	V_{15}	V_{29}	V_6
$(1,1,1)$	$\theta=2\pi/3$	V_{26}	V_{29}	V_{25}	V_{28}	V_{24}	V_{27}	V_{23}	V_{14}	V_{10}	V_{13}	V_9	V_{12}	V_8	V_{11}	V_7
	$\theta=4\pi/3$	V_{12}	V_{10}	V_8	V_{13}	V_{11}	V_9	V_7	V_{22}	V_{20}	V_{18}	V_{16}	V_{21}	V_{19}	V_{17}	V_{15}
(-1,1,1)	$\theta=2\pi/3$	V_7	V_{13}	V_{11}	V_{10}	V_8	V_{14}	V_{12}	V_{17}	V_{15}	V_{21}	V_{19}	V_{18}	V_{16}	V_{22}	V_{20}
	$\theta=4\pi/3$	V_{28}	V_{23}	V_{27}	V_{26}	V_{30}	V_{25}	V_{29}	V_8	V_{12}	V_7	V_{11}	V_{10}	V_{14}	V_9	V_{13}
(1,-1,1)	$\theta=2\pi/3$	V_{10}	V_{12}	V_{14}	V_7	V_9	V_{11}	V_{13}	V_{16}	V_{18}	V_{20}	V_{22}	V_{15}	V_{17}	V_{19}	V_{21}
	$\theta=4\pi/3$	V_{23}	V_{28}	V_{24}	V_{29}	V_{25}	V_{30}	V_{26}	V_{11}	V_7	V_{12}	V_8	V_{13}	V_9	V_{14}	V_{10}
(1,1,-1)	$\theta=2\pi/3$	V_{13}	V_7	V_9	V_{12}	V_{14}	V_8	V_{10}	V_{19}	V_{21}	V_{15}	V_{17}	V_{20}	V_{22}	V_{16}	V_{18}
	$\theta=4\pi/3$	V_{29}	V_{26}	V_{30}	V_{23}	V_{27}	V_{24}	V_{28}	V_9	V_{13}	V_{10}	V_{14}	V_7	V_{11}	V_8	V_{12}
$(0,\varphi-1,\varphi)$	$\theta=2\pi/3$	V_{17}	V_6	V_9	V_{12}	V_5	V_{20}	V_{27}	V_{18}	V_3	V_{29}	V_{13}	V_8	V_{24}	V_4	V_{19}
	$\theta=4\pi/3$	V_5	V_{16}	V_{23}	V_{30}	V_{30}	V_6	V_{13}	V_{12}	V_{28}	V_3	V_{15}	V_{22}	V_4	V_{25}	V_9
$(0,\varphi-1,-\varphi)$	$\theta=2\pi/3$	V_7	V_{24}	V_{15}	V_{22}	V_{19}	V_{14}	V_6	V_{27}	V_{11}	V_{16}	V_3	V_4	V_{21}	V_{10}	V_{26}
	$\theta=4\pi/3$	V_{25}	V_{10}	V_6	V_5	V_{11}	V_{28}	V_{19}	V_3	V_{17}	V_{14}	V_{30}	V_{23}	V_7	V_{20}	V_4
$(\varphi-1,\varphi,0)$	$\theta=2\pi/3$	V_{25}	V_1	V_{17}	V_{20}	V_2	V_{28}	V_8	V_{29}	V_6	V_7	V_{15}	V_{22}	V_{14}	V_5	V_{24}
	$\theta=4\pi/3$	V_{14}	V_{18}	V_2	V_1	V_{19}	V_7	V_{27}	V_6	V_{30}	V_{16}	V_8	V_{13}	V_{21}	V_{23}	V_5
$(\varphi-1,-\varphi,0)$	$\theta=2\pi/3$	V_2	V_{24}	V_{12}	V_9	V_{29}	V_1	V_{21}	V_{18}	V_{10}	V_5	V_{28}	V_{25}	V_6	V_{11}	V_{19}
	$\theta=4\pi/3$	V_{15}	V_{11}	V_{23}	V_{30}	V_{10}	V_{22}	V_2	V_9	V_{17}	V_{27}	V_5	V_6	V_{26}	V_{20}	V_{12}
$(\varphi,0,\varphi-1)$	$\theta=2\pi/3$	V_{14}	V_4	V_{30}	V_{23}	V_3	V_7	V_{17}	V_{12}	V_2	V_{21}	V_{29}	V_{24}	V_{16}	V_1	V_9
	$\theta=4\pi/3$	V_{28}	V_{22}	V_{12}	V_9	V_{15}	V_{25}	V_3	V_{19}	V_{27}	V_{14}	V_2	V_1	V_7	V_{26}	V_{18}
$(-\varphi,0,\varphi-1)$	$\theta=2\pi/3$	V_{19}	V_{29}	V_4	V_3	V_{24}	V_{18}	V_8	V_1	V_{11}	V_{30}	V_{22}	V_{15}	V_{23}	V_{10}	V_2
	$\theta=4\pi/3$	V_4	V_{11}	V_{21}	V_{16}	V_{10}	V_3	V_{26}	V_{28}	V_{20}	V_1	V_{13}	V_8	V_2	V_{17}	V_{25}

Şekil 5.10 $\mathbb{R}^3_{ID}$ de Dönme İnversiyon Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri Devamı

Buraya kadar olan kısımda Öklidyen 3-uzayın izometrilerinden hangilerinin $d_{ID}-$metriğini koruduğu bulunmuştur. Yani $\mathbb{R}^3$ te $d_{ID}-$metriğini koruyan yansımalar, dönmeler, inversiyonlar, dönme-yansımalar ve dönme-inversiyonlar tespit edilmiştir. Sonuç olarak on beş yansıma, altmış dönme, kırk dört dönme-inversiyon ve bir inversiyondan oluşan, $d_{ID}-$metriğine göre olan izometriler icosidodecahedronun Öklidyen simetri grubu olan I_h ın elemanlarıdır. Bu gruba icosidodecahedron grup denilsin ve $G(ID)$ ile gösterilsin. Açıkça $G(ID)$, I_h grubuna izomorftur. Bundan sonraki kısımda $\mathbb{R}^3$ te $d_{ID}-$metriğini koruyan, I_h grubunun elemanları dışında izometrilerin olmadığı gösterilecektir. Yani $\mathbb{R}^3_{ID}$ nin tüm izometrilerinin $T(3).G(ID)$ olduğu gösterilecektir.

Tanım 5.2 *$A = (a_1, a_2, a_3)$ ve $B = (b_1, b_2, b_3)$ $\mathbb{R}^3_{ID}$ uzayında farklı iki nokta olsun. Bu taktirde*

$$\{X \mid d_{ID}(A, X) + d_{ID}(B, X) = d_{ID}(A, B)\}$$

kümesine A, B noktalarının minimum uzaklık kümesi denir ve $[AB]$ ile gösterilir.

Genel olarak, $[AB]$ kümesi AB köşegenli bir paralelyüz oluşturur (Bakınız Şeki5.11).

Şekil 5.11 $\mathbb{R}^3_{ID}$ da Minimum Uzaklık Kümesi

Böylece buradaki minimum uzaklık kümesi $3x + 2y - (2 - 2\varphi)z = 0$, $(2 - 2\varphi)x - 3y + 2z = 0$, $2x + (2 - 2\varphi)y - 3z = 0$ düzlemleri ve bu düzlemlere paralel düzlemlerden oluşur.

Önerme 5.6 *$\phi : \mathbb{R}^3_{ID} \to \mathbb{R}^3_{ID}$ bir izometri ve $[AB]$ paralelyüz olsun. O halde*

$$\phi([AB]) = [\phi(A)\phi(B)]$$

olur.

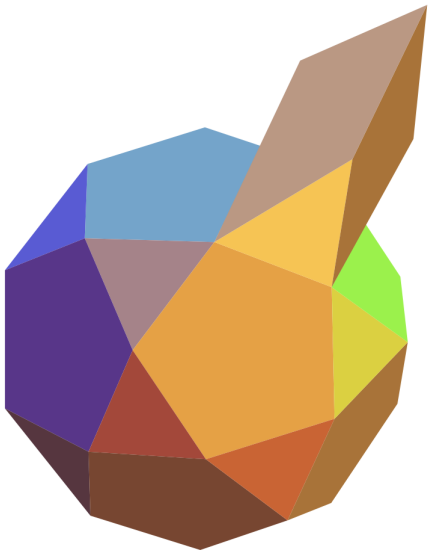
İspat *$Y \in \phi([AB])$ olsun.*

$$\begin{aligned} Y \in \phi([AB]) &\iff \exists X \in [AB] \ni Y = \phi(X) \\ &\iff d_{ID}(A,X) + d_{ID}(B,X) = d_{ID}(A,B) \\ &\iff d_{ID}(\phi(A),\phi(X)) + d_{ID}(\phi(B),\phi(X)) = d_{ID}(\phi(A),\phi(B)) \\ &\iff Y = \phi(X) \in [\phi(A)\phi(B)]\,. \end{aligned}$$

Sonuç 5.6 *$\phi : \mathbb{R}^3_{ID} \to \mathbb{R}^3_{ID}$ bir izometri ve $[AB]$ paralelyüz olsun. Bu durumda ϕ, $[AB]$ nin köşelerini köşelere dönüştürür ve kenar uzunluklarını korur.*

Önerme 5.7 *$f : \mathbb{R}^3_{ID} \to \mathbb{R}^3_{ID}$ dönüşümü $f(O) = O$ olacak şekilde bir izometri olsun. Bu taktirde $f \in G(ID)$ olur.*

İspat *$O = (0,0,0)$ ve $D = (\varphi,\varphi,\varphi)$ olmak üzere $[OD]$ paralelyüzünü gözönüne alalım. Bu paralelyüzün köşe noktalarından üçü $V_7 = \left(\frac{\varphi-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\varphi}{2}\right)$, $V_{15} = \left(\frac{\varphi}{2}, \frac{\varphi-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $V_{23} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\varphi}{2}, \frac{\varphi-1}{2}\right)$ olup bu noktalar aynı zamanda merkezil birim icosidodecahedron birim küresinin köşe noktalarıdır. Dahası bu üç nokta icosidodecahedronun her biri aynı eşkenar üçgen biçiminde olan bir yüzünün köşe noktalarıdır (Bakınız Şekil5.12).*



Şekil 5.12 $\mathbb{R}^3_{TO}$ da Birim Küre Ve Minimum Uzaklık Kümesi

f izometrisi $[OD]$ paralelyüzün köşe noktalarını köşe noktalara dönüştürüp, kenar uzaklıklarını korduğundan ve $f(O) = O$ olduğundan dolayı V_7, V_{15} ve V_{23} noktalarını icosidodecahedronun yine bir yüzünün köşe noktalarına dönüştürür. Ayrıca bu dönüştürme işlemi gerçekleşirken kenar uzunlukları korunacağından dolayı $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, 30\}$ olmak üzere $f(V_7) = V_i$, $f(V_{15}) = V_j$, $f(V_{23}) = V_k$ olmak üzere V_iV_j, V_iV_k.ve V_jV_k icosidodecahedronun üç kenarıdır. Açıkça ifade edilirse f izometrisi, icosidodecahedronun bir yüzünün köşe noktalarını yine bir yüzünün köşe noktalarına dönüştürür. O halde icosidodecahedron 20 tane eşkenar üçgen biçiminde yüze sahip olduğundan bir yüzün dönüşebileceği 20 yüz ihtimali vardır. Ayrıca kenar uzunlukları ve dolayısıyla köşegen uzunlukları korunmak zorunda olduğundan V_7, V_{15} ve V_{23} noktalarının dönüşebileceği icosidodecahedronun her bir yüzü için 6 ihtimal olduğundan dolayı bu noktaların dönüşebileceği 120 ihtimal vardır. Bu ihtimaller ise aşağıda tek tek sıralanmış ve her bir dönüşümün önceden tespit edilen hareketlerden hangisine karşılık geldiği ifade edilmiştir.

1. $f(V_7) = V_{11}$ ise $f(V_{15}) = V_{19}$ ve $f(V_{23}) = V_{27}$ ise $\Delta : x = 0$ düzlemi olmak üzere $f = \sigma_\Delta$ yansımasıdır.

2. $f(V_7) = V_9$ ise $f(V_{15}) = V_{17}$ ve $f(V_{23}) = V_{25}$ ise $\Delta : y = 0$ düzlemi olmak üzere $f = \sigma_\Delta$ yansımasıdır.

3. $f(V_7) = V_8$ ise $f(V_{15}) = V_{16}$ ve $f(V_{23}) = V_{24}$ ise $\Delta : z = 0$ düzlemi olmak üzere $f = \sigma_\Delta$ yansımasıdır.

4. $f(V_7) = V_{14}$ ise $f(V_{15}) = V_{10}$ ve $f(V_{23}) = V_2$ ise $\Delta : (\varphi - 1)\, x + y + \varphi z = 0$ düzlemi olmak üzere $f = \sigma_\Delta$ yansımasıdır.

5. $f(V_7) = V_{23}$ ise $f(V_{15}) = V_{15}$ ve $f(V_{23}) = V_7$ ise $\Delta : (\varphi - 1)\, x + y - \varphi z = 0$ düzlemi olmak üzere $f = \sigma_\Delta$ göre yansımasıdır.

6. $f(V_7) = V_5$ ise $f(V_{15}) = V_{24}$ ve $f(V_{23}) = V_{23}$ ise $\Delta : (\varphi - 1)\, x - y + \varphi z = 0$ düzlemi olmak üzere $f = \sigma_\Delta$ göre yansımasıdır.

7. $f(V_7) = V_{18}$ ise $f(V_{15}) = V_3$ ve $f(V_{23}) = V_{16}$ ise $\Delta : (\varphi - 1)\, x - y - \varphi z = 0$ düzlemi olmak üzere $f = \sigma_\Delta$ göre yansımasıdır.

8. $f(V_7) = V_{29}$ ise $f(V_{15}) = V_6$ ve $f(V_{23}) = V_{30}$ ise $\Delta : x + \varphi y + (\varphi - 1)\, z = 0$ düzlemi olmak üzere $f = \sigma_\Delta$ göre yansımasıdır.

9. $f(V_7) = V_7$ *ise* $f(V_{15}) = V_{23}$ *ve* $f(V_{23}) = V_{15}$ *ise* $\Delta : x - \varphi y + (\varphi - 1)\, z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

10. $f(V_7) = V_{17}$ *ise* $f(V_{15}) = V_{15}$ *ve* $f(V_{23}) = V_3$ *ise* $\Delta : -x + \varphi y + (\varphi - 1)\, z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

11. $f(V_7) = V_1$ *ise* $f(V_{15}) = V_9$ *ve* $f(V_{23}) = V_{13}$ *ise* $\Delta : -x - \varphi y + (\varphi - 1)\, z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

12. $f(V_7) = V_4$ *ise* $f(V_{15}) = V_{22}$ *ve* $f(V_{23}) = V_{20}$ *ise* $\Delta : \varphi x + (\varphi - 1)\, y + z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

13. $f(V_7) = V_7$ *ise* $f(V_{15}) = V_1$ *ve* $f(V_{23}) = V_{11}$ *ise* $\Delta : \varphi x + (\varphi - 1)\, y - z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

14. $f(V_7) = V_{15}$ *ise* $f(V_{15}) = V_7$ *ve* $f(V_{23}) = V_{23}$ *ise* $\Delta : -\varphi x + (\varphi - 1)\, y + z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

15. $f(V_7) = V_{27}$ *ise* $f(V_{15}) = V_{28}$ *ve* $f(V_{23}) = V_5$ *ise* $\Delta : -\varphi x + (\varphi - 1)\, y - z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

16. $f(V_7) = V_{10}$ *ise* $f(V_{15}) = V_{18}$ *ve* $f(V_{23}) = V_{26}$ *ise dönme ekseni* $(1, 0, 0)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

17. $f(V_7) = V_{12}$ *ise* $f(V_{15}) = V_{20}$ *ve* $f(V_{23}) = V_{28}$ *ise dönme ekseni* $(0, 1, 0)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

18. $f(V_7) = V_{13}$ *ise* $f(V_{15}) = V_{21}$ *ve* $f(V_{23}) = V_{29}$ *ise dönme ekseni* $(0, 0, 1)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

19. $f(V_7) = V_{15}$ *ise* $f(V_{15}) = V_{23}$ *ve* $f(V_{23}) = V_7$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

20. $f(V_7) = V_{23}$ *ise* $f(V_{15}) = V_7$ *ve* $f(V_{23}) = V_{15}$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

21. $f(V_7) = V_{28}$ *ise* $f(V_{15}) = V_{12}$ *ve* $f(V_{23}) = V_{20}$ *ise dönme ekseni* $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

22. $f(V_7) = V_{21}$ *ise* $f(V_{15}) = V_{29}$ *ve* $f(V_{23}) = V_{13}$ *ise dönme ekseni* $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$*olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

23. $f(V_7) = V_{29}$ *ise* $f(V_{15}) = V_{13}$ *ve* $f(V_{23}) = V_{21}$ *ise dönme eksen* $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

24. $f(V_7) = V_{18}$ *ise* $f(V_{15}) = V_{26}$ *ve* $f(V_{23}) = V_{10}$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

25. $f(V_7) = V_{26}$ *ise* $f(V_{15}) = V_{10}$ *ve* $f(V_{23}) = V_{18}$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

26. $f(V_7) = V_{20}$ *ise* $f(V_{15}) = V_{28}$ *ve* $f(V_{23}) = V_{12}$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

27. $f(V_7) = V_{11}$ *ise* $f(V_{15}) = V_{27}$ *ve* $f(V_{23}) = V_{19}$ *ise dönme ekseni* $\left(0, \frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}}, \frac{\varphi}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

28. $f(V_7) = V_1$ *ise* $f(V_{15}) = V_{13}$ *ve* $f(V_{23}) = V_9$ *ise dönme ekseni* $\left(0, \frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}}, \frac{\varphi}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

29. $f(V_7) = V_{25}$ *ise* $f(V_{15}) = V_6$ *ve* $f(V_{23}) = V_{26}$ *ise dönme ekseni* $\left(0, \frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}}, -\frac{\varphi}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

30. $f(V_7) = V_{21}$ *ise* $f(V_{15}) = V_{19}$ *ve* $f(V_{23}) = V_4$ *ise dönme ekseni* $\left(0, \frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}}, -\frac{\varphi}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

31. $f(V_7) = V_{16}$ *ise* $f(V_{15}) = V_8$ *ve* $f(V_{23}) = V_{24}$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}}, \frac{\varphi}{\sqrt{3}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

32. $f(V_7) = V_{28}$ *ise* $f(V_{15}) = V_{27}$ *ve* $f(V_{23}) = V_5$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}}, \frac{\varphi}{\sqrt{3}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

33. $f(V_7) = V_4$ *ise* $f(V_{15}) = V_{21}$ *ve* $f(V_{23}) = V_{19}$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}}, -\frac{\varphi}{\sqrt{3}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

34. $f(V_7) = V_8$ *ise* $f(V_{15}) = V_2$ *ve* $f(V_{23}) = V_{12}$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}}, -\frac{\varphi}{\sqrt{3}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

35. $f(V_7) = V_{25}$ *ise* $f(V_{15}) = V_{17}$ *ve* $f(V_{23}) = V_9$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{\varphi}{\sqrt{3}}, 0, \frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

36. $f(V_7) = V_{16}$ *ise* $f(V_{15}) = V_3$ *ve* $f(V_{23}) = V_{18}$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{\varphi}{\sqrt{3}}, 0, \frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

37. $f(V_7) = V_{12}$ *ise* $f(V_{15}) = V_8$ *ve* $f(V_{23}) = V_2$ *ise dönme ekseni* $\left(-\frac{\varphi}{\sqrt{3}}, 0, \frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

38. $f(V_7) = V_6$ *ise* $f(V_{15}) = V_{26}$ *ve* $f(V_{23}) = V_{25}$ *ise dönme ekseni* $\left(-\frac{\varphi}{\sqrt{3}}, 0, \frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

39. $f(V_7) = V_{23}$ *ise* $f(V_{15}) = V_{24}$ *ve* $f(V_{23}) = V_5$ *ise dönme ekseni* $\left(0, \sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönmedir.*

40. $f(V_7) = V_5$ *ise* $f(V_{15}) = V_{28}$ *ve* $f(V_{23}) = V_{27}$ *ise dönme ekseni* $\left(0, \sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönmedir.*

41. $f(V_7) = V_{27}$ *ise* $f(V_{15}) = V_{19}$ *ve* $f(V_{23}) = V_{11}$ *ise dönme ekseni* $\left(0, \sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönmedir.*

42. $f(V_7) = V_{11}$ *ise* $f(V_{15}) = V_1$ *ve* $f(V_{23}) = V_7$ *ise dönme ekseni* $\left(0, \sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönmedir.*

43. $f(V_7) = V_3$ *ise* $f(V_{15}) = V_{18}$ *ve* $f(V_{23}) = V_{16}$ *ise dönme ekseni* $\left(0, -\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönmedir.*

44. $f(V_7) = V_{10}$ *ise* $f(V_{15}) = V_{14}$ *ve* $f(V_{23}) = V_2$ *ise dönme ekseni* $\left(0, -\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönmedir.*

45. $f(V_7) = V_{22}$ *ise* $f(V_{15}) = V_4$ *ve* $f(V_{23}) = V_{20}$ *ise dönme ekseni* $\left(0, -\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönmedir.*

46. $f(V_7) = V_{19}$ *ise* $f(V_{15}) = V_{11}$ *ve* $f(V_{23}) = V_{27}$ *ise dönme ekseni* $\left(0, -\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönmedir.*

47. $f(V_7) = V_1$ *ise* $f(V_{15}) = V_7$ *ve* $f(V_{23}) = V_{11}$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönmedir.*

48. $f(V_7) = V_9$ *ise* $f(V_{15}) = V_1$ *ve* $f(V_{23}) = V_{13}$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönmedir.*

49. $f(V_7) = V_{17}$ *ise* $f(V_{15}) = V_9$ *ve* $f(V_{23}) = V_{25}$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönmedir.*

50. $f(V_7) = V_{15}$ *ise* $f(V_{15}) = V_{17}$ *ve* $f(V_{23}) = V_3$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönmedir.*

51. $f(V_7) = V_9$ *ise* $f(V_{15}) = V_{25}$ *ve* $f(V_{23}) = V_{17}$ *ise dönme ekseni* $\left(-\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönmedir.*

52. $f(V_7) = V_{29}$ *ise* $f(V_{15}) = V_{30}$ *ve* $f(V_{23}) = V_6$ *ise dönme ekseni* $\left(-\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönmedir.*

53. $f(V_7) = V_4$ *ise* $f(V_{15}) = V_{20}$ *ve* $f(V_{23}) = V_{22}$ *ise dönme ekseni* $\left(-\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönmedir.*

54. $f(V_7) = V_{27}$ *ise* $f(V_{15}) = V_5$ *ve* $f(V_{23}) = V_{28}$ *ise dönme ekseni* $\left(-\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönmedir.*

55. $f(V_7) = V_{17}$ *ise* $f(V_{15}) = V_3$ *ve* $f(V_{23}) = V_{15}$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0, \sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönmedir.*

56. $f(V_7) = V_{18}$ *ise* $f(V_{15}) = V_{16}$ *ve* $f(V_{23}) = V_3$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0, \sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönmedir.*

57. $f(V_7) = V_8$ *ise* $f(V_{15}) = V_{24}$ *ve* $f(V_{23}) = V_{16}$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0, \sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönmedir.*

58. $f(V_7) = V_5$ *ise* $f(V_{15}) = V_{23}$ *ve* $f(V_{23}) = V_{24}$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0, \sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönmedir.*

59. $f(V_7) = V_{13}$ *ise* $f(V_{15}) = V_9$ *ve* $f(V_{23}) = V_1$ *ise dönme ekseni* $\left(-\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0, \sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönmedir.*

60. $f(V_7) = V_{30}$ *ise* $f(V_{15}) = V_6$ *ve* $f(V_{23}) = V_{29}$ *ise dönme ekseni* $\left(-\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0, \sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönmedir.*

61. $f(V_7) = V_2$ *ise* $f(V_{15}) = V_{10}$ *ve* $f(V_{23}) = V_{14}$ *ise dönme ekseni* $\left(-\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0, \sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönmedir.*

62. $f(V_0) = V_{24}$ *ise* $f(V_{15}) = V_{16}$ *ve* $f(V_{23}) = V_8$ *ise dönme ekseni* $\left(-\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0, \sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönmedir.*

63. $f(V_7) = V_7$ *ise* $f(V_{15}) = V_{11}$ *ve* $f(V_{23}) = V_1$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{\varphi-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\varphi}{2}\right)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

64. $f(V_7) = V_{30}$ *ise* $f(V_{15}) = V_{22}$ *ve* $f(V_{23}) = V_{14}$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{\varphi-1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\varphi}{2}\right)$*olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

65. $f(V_7) = V_6$ *ise* $f(V_{15}) = V_{29}$ *ve* $f(V_{23}) = V_{30}$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{\varphi-1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\varphi}{2}\right)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

66. $f(V_7) = V_{19}$ *ise* $f(V_{15}) = V_4$ *ve* $f(V_{23}) = V_{21}$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{\varphi-1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{\varphi}{2}\right)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

67. $f(V_7) = V_{24}$ *ise* $f(V_{15}) = V_5$ *ve* $f(V_{23}) = V_{23}$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{1}{2}, \frac{\varphi}{2}, \frac{\varphi-1}{2}\right)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

68. $f(V_7) = V_{14}$ *ise* $f(V_{15}) = V_{30}$ *ve* $f(V_{23}) = V_{22}$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\varphi}{2}, \frac{\varphi-1}{2}\right)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

69. $f(V_7) = V_{20}$ *ise* $f(V_{15}) = V_{22}$ *ve* $f(V_{23}) = V_4$ *ise dönme ekseni* $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\varphi}{2}, \frac{\varphi-1}{2}\right)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

70. $f(V_7) = V_2$ *ise* $f(V_{15}) = V_{12}$ *ve* $f(V_{23}) = V_8$ *ise dönme ekseni* $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\varphi}{2}, \frac{\varphi-1}{2}\right)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

71. $f(V_7) = V_3$ *ise* $f(V_{15}) = V_{15}$ *ve* $f(V_{23}) = V_{17}$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{\varphi}{2}, \frac{\varphi-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$*olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

72. $f(V_7) = V_{14}$ *ise* $f(V_{15}) = V_2$ *ve* $f(V_{23}) = V_{10}$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{\varphi}{2}, \frac{\varphi-1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

73. $f(V_7) = V_{22}$ *ise* $f(V_{15}) = V_{14}$ *ve* $f(V_{23}) = V_{30}$ *ise dönme ekseni* $\left(-\frac{\varphi}{2}, \frac{\varphi-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

74. $f(V_7) = V_{26}$ *ise* $f(V_{15}) = V_{25}$ *ve* $f(V_{23}) = V_6$ *ise dönme ekseni* $\left(-\frac{\varphi}{2}, \frac{\varphi-1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

75. $f(V_7) = V_{22}$ *ise* $f(V_{15}) = V_{30}$ *ve* $f(V_{23}) = V_{14}$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

76. $f(V_7) = V_{30}$ *ise* $f(V_{15}) = V_{14}$ *ve* $f(V_{23}) = V_{22}$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

77. $f(V_7) = V_{25}$ *ise* $f(V_{15}) = V_9$ *ve* $f(V_{23}) = V_{17}$ *ise dönme ekseni* $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

78. $f(V_7) = V_{16}$ *ise* $f(V_{15}) = V_{24}$ *ve* $f(V_{23}) = V_8$ *ise dönme ekseni* $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

79. $f(V_7) = V_{24}$ *ise* $f(V_{15}) = V_8$ *ve* $f(V_{23}) = V_{16}$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

80. $f(V_7) = V_{19}$ *ise* $f(V_{15}) = V_{27}$ *ve* $f(V_{23}) = V_{11}$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

81. $f(V_7) = V_{27}$ *ise* $f(V_{15}) = V_{11}$ *ve* $f(V_{23}) = V_{19}$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

82. $f(V_7) = V_{17}$ *ise* $f(V_{15}) = V_{25}$ *ve* $f(V_{23}) = V_9$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

83. $f(V_7) = V_{10}$ *ise* $f(V_{15}) = V_{26}$ *ve* $f(V_{23}) = V_{18}$ *ise dönme ekseni* $\left(0, \frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}}, \frac{\varphi}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

84. $f(V_7) = V_2$ *ise* $f(V_{15}) = V_8$ *ve* $f(V_{23}) = V_{12}$ *ise dönme ekseni* $\left(0, \frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}}, \frac{\varphi}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

85. $f(V_7) = V_{28}$ *ise* $f(V_{15}) = V_5$ *ve* $f(V_{23}) = V_{27}$ *ise dönme ekseni* $\left(0, \frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}}, -\frac{\varphi}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

86. $f(V_7) = V_{16}$ *ise* $f(V_{15}) = V_{18}$ *ve* $f(V_{23}) = V_3$ *ise dönme ekseni* $\left(0, \frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}}, -\frac{\varphi}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

87. $f(V_7) = V_{21}$ *ise* $f(V_{15}) = V_{13}$ *ve* $f(V_{23}) = V_{29}$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}}, \frac{\varphi}{\sqrt{3}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

88. $f(V_7) = V_{25}$ *ise* $f(V_{15}) = V_{26}$ *ve* $f(V_{23}) = V_6$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}}, \frac{\varphi}{\sqrt{3}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

89. $f(V_7) = V_3$ *ise* $f(V_{15}) = V_{16}$ *ve* $f(V_{23}) = V_{18}$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}}, -\frac{\varphi}{\sqrt{3}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

90. $f(V_7) = V_{13}$ *ise* $f(V_{15}) = V_1$ *ve* $f(V_{23}) = V_9$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}}, -\frac{\varphi}{\sqrt{3}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

91. $f(V_7) = V_{28}$ *ise* $f(V_{15}) = V_{20}$ *ve* $f(V_{23}) = V_{12}$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{\varphi}{\sqrt{3}}, 0, \frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

92. $f(V_7) = V_{21}$ *ise* $f(V_{15}) = V_4$ *ve* $f(V_{23}) = V_{19}$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{\varphi}{\sqrt{3}}, 0, \frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

93. $f(V_7) = V_9$ *ise* $f(V_{15}) = V_{13}$ *ve* $f(V_{23}) = V_1$ *ise dönme ekseni* $\left(-\frac{\varphi}{\sqrt{3}}, 0, \frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

94. $f(V_7) = V_5$ *ise* $f(V_{15}) = V_{27}$ *ve* $f(V_{23}) = V_{28}$ *ise dönme ekseni* $\left(-\frac{\varphi}{\sqrt{3}}, 0, \frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

95. $f(V_7) = V_{30}$ *ise* $f(V_{15}) = V_{29}$ *ve* $f(V_{23}) = V_6$ *ise dönme ekseni* $\left(0, \sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\right)$ *e olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

96. $f(V_7) = V_6$ *ise* $f(V_{15}) = V_{25}$ *ve* $f(V_{23}) = V_{26}$ *ise dönme ekseni* $\left(0, \sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

97. $f(V_7) = V_{26}$ *ise* $f(V_{15}) = V_{18}$ *ve* $f(V_{23}) = V_{10}$ *ise dönme ekseni* $\left(0, \sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

98. $f(V_7) = V_{10}$ *ise* $f(V_{15}) = V_2$ *ve* $f(V_{23}) = V_{14}$ *ise dönme ekseni* $\left(0, \sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\right)$ *olmk üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

99. $f(V_7) = V_4$ *ise* $f(V_{15}) = V_{19}$ *ve* $f(V_{23}) = V_{21}$ *ise dönme ekseni* $\left(0, -\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

100. $f(V_7) = V_{11}$ *ise* $f(V_{15}) = V_7$ *ve* $f(V_{23}) = V_1$ *ise dönme ekseni* $\left(0, -\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

101. $f(V_7) = V_{15}$ *ise* $f(V_{15}) = V_3$ *ve* $f(V_{23}) = V_{17}$ *ise dönme ekseni* $\left(0, -\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

102. $f(V_7) = V_{18}$ *ise* $f(V_{15}) = V_{10}$ *ve* $f(V_{23}) = V_{26}$ *ise dönme ekseni* $\left(0, -\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

103. $f(V_7) = V_2$ *ise* $f(V_{15}) = V_{14}$ *ve* $f(V_{23}) = V_{10}$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0, \sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

104. $f(V_7) = V_{12}$ *ise* $f(V_{15}) = V_2$ *ve* $f(V_{23}) = V_8$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0, \sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

105. $f(V_7) = V_{20}$ *ise* $f(V_{15}) = V_{12}$ *ve* $f(V_{23}) = V_{28}$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0, \sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

106. $f(V_7) = V_{22}$ *ise* $f(V_{15}) = V_{20}$ *ve* $f(V_{23}) = V_4$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0, \sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

107. $f(V_7) = V_{12}$ *ise* $f(V_{15}) = V_{28}$ *ve* $f(V_{23}) = V_{20}$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0, -\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\Pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

108. $f(V_7) = V_{24}$ *ise* $f(V_{15}) = V_{23}$ *ve* $f(V_{23}) = V_5$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0, -\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

109. $f(V_7) = V_3$ *ise* $f(V_{15}) = V_{17}$ *ve* $f(V_{23}) = V_{15}$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0, -\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

110. $f(V_7) = V_{26}$ *ise* $f(V_{15}) = V_6$ *ve* $f(V_{23}) = V_{25}$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0, -\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

111. $f(V_7) = V_{20}$ *ise* $f(V_{15}) = V_4$ *ve* $f(V_{23}) = V_{22}$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0\right)$ *eksenine göre* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

112. $f(V_7) = V_{19}$ *ise* $f(V_{15}) = V_{21}$ *ve* $f(V_{23}) = V_4$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

113. $f(V_7) = V_{13}$ *ise* $f(V_{15}) = V_{29}$ *ve* $f(V_{23}) = V_{21}$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

114. $f(V_7) = V_6$ *ise* $f(V_{15}) = V_{30}$ *ve* $f(V_{23}) = V_{29}$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

115. $f(V_7) = V_8$ *ise* $f(V_{15}) = V_{12}$ *ve* $f(V_{23}) = V_2$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, -\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

116. $f(V_7) = V_{23}$ *ise* $f(V_{15}) = V_5$ *ve* $f(V_{23}) = V_{24}$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, -\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

117. $f(V_7) = V_1$ *ise* $f(V_{15}) = V_{11}$ *ve* $f(V_{23}) = V_7$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, -\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

118. $f(V_7) = V_{29}$ *ise* $f(V_{15}) = V_{21}$ *ve* $f(V_{23}) = V_{13}$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, -\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

119. $f(V_7) = V_7$ *ise* $f(V_{15}) = V_{15}$ *ve* $f(V_{23}) = V_{23}$ *ise* f *birim dönüşümdür.*

120. $f(V_7) = V_{14}$ *ise* $f(V_{15}) = V_{22}$ *ve* $f(V_{23}) = V_{30}$ *ise* f *inversiyondur.*

Buna göre orijini koruyan f *izometrisi* $G(ID)$ *nin bir elemanıdır. Bir başka deyişle icosidodecahedron uzaklığını koruyan Öklidyen izometriler dışında bir izometri yoktur.*

Teorem 5.3 *$f : \mathbb{R}^3_{ID} \to \mathbb{R}^3_{ID}$ dönüşümü bir izometri olsun. $f = T_A \circ g$ olacak şekilde bir tek $T_A \in T(3)$ ve $g \in G(ID)$ vardır.*

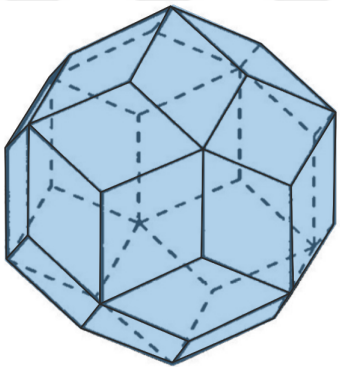
İspat *$A = (a_1, a_2, a_3)$ olmak üzere $f(O) = A$ olsun. Bu taktirde $g = T_{-A} \circ f$ olacak şekilde tanımlı g dönüşümü bir izometridir ve $g(O) = O$ olur. Böylece önerme 4.7 den dolayı $g \in G(ID)$ ve $f = T_A \circ g$ olur. İspatın tekliği aşikardır.*

Buna göre icosidodecahedron metriği ile donatılmış analitik $3-$uzayın izometrilerinin grubu icosidodecahedronun (Öklidyen) simetri grubu olan I_h ile $3 - boyutlu$ analitik uzayın tüm ötelemelerinin grubu olan $T(3)$ ün yarı-direkt çarpımıdır. Yani $\mathbb{R}^3_{ID}$ nun tüm izometrilerinin kümesi $T(3).G(ID)$ dur.

6. RHOMBİC TRİACONTAHEDRON UZAYI

6.1 Rhombic Triacontahedron Metriği ve Özellikleri

Rhombic triacontaheron 30 tane eş kenar dörtgen şeklinde yüze, 60 kenara ve iki tipten oluşan 32 köşeye sahiptir. Birinci tip köşede 3, ikinci tiptekilerde ise 5 tane yüz buluşmaktadır. Bir zonohedron olan rhombic triacontahedronun eşkenar dörtgen olan yüzlerinde uzun köşegenin kısa köşegene oranı $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ yani altın orandır. Ayrıca rhombic triacontahedron köşelerinde tüm Platonik cisimlerin (tetrahedron, hexahedron, octahedron, dodecahedron ve icosahedron) köşelerini içerdiğinden dolayı da oldukça ilginç bir cisimdir.



Şekil 6.1 Rhombic Triacontahedron

Birim küresi rhombic triacontahedron olan uzaklık fonksiyonu d_{RT} ile gösterilir ve bu uzaklık fonksiyonunun metrik aksiyomlarını sağladığı ve bazı özellikleri (Can, Gelişgen ve Kaya, 2015) kaynağından verilmektedir.

Tanım 6.1 *$P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ $\mathbb{R}^3$ te iki farklı nokta olsun. $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$altın oran olmak üzere*

$$d_{RT}(P_1, P_2) = \frac{\varphi}{2} \max \left\{ \begin{array}{l} |x_1 - x_2| + (2\varphi - 3) \max \{(\varphi + 1) |z_1 - z_2| + \varphi |y_1 - y_2|, |x_1 - x_2|\}, \\ |y_1 - y_2| + (2\varphi - 3) \max \{(\varphi + 1) |x_1 - x_2| + \varphi |z_1 - z_2|, |y_1 - y_2|\}, \\ |z_1 - z_2| + (2\varphi - 3) \max \{(\varphi + 1) |y_1 - y_2| + \varphi |x_1 - x_2|, |z_1 - z_2|\} \end{array} \right\}$$

biçiminde tanımlanan $d_{RT} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to [0, \infty)$ uzaklık fonksiyonuna rhombic triacontahedron uzaklık fonksiyonu denir.

Yardımcı Teorem 6.1 *$P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ $\mathbb{R}^3$ te iki farklı nokta olsun.Bu durumda*

$$d_{RT}(P_1, P_2) \geq \frac{\varphi}{2}\left(|x_1 - x_2| + (2\varphi - 3)\max\left\{(\varphi + 1)|z_1 - z_2| + \varphi|y_1 - y_2|, |x_1 - x_2|\right\}\right),$$
$$d_{RT}(P_1, P_2) \geq \frac{\varphi}{2}\left(|y_1 - y_2| + (2\varphi - 3)\max\left\{(\varphi + 1)|x_1 - x_2| + \varphi|z_1 - z_2|, |y_1 - y_2|\right\}\right),$$
$$d_{RT}(P_1, P_2) \geq \frac{\varphi}{2}\left(|z_1 - z_2| + (2\varphi - 3)\max\left\{(\varphi + 1)|y_1 - y_2| + \varphi|x_1 - x_2|, |z_1 - z_2|\right\}\right),$$

dır.

İspat *İspatı maksimum fonksiyonunun tanımından açıktır.*

Teorem 6.1 *$\mathbb{R}^3$ te d_{RT} uzaklık fonksiyonu metriktir ve bu metrikle donatılmış uzayın birim küresi rhombic triacontahedrondur.*

İspat *$d_{RT} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ rhombic triacontahedron uzaklık fonksiyonu ve P_1=(x_1, y_1, z_1),P_2=(x_2, y_2, z_2) ve P_3=(x_3, y_3, z_3) $\mathbb{R}^3$ te üç farklı nokta olsun. d_{RT} uzaklık fonksiyonu her $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^3$ için aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa $\mathbb{R}^3$ te bir metriktir*

. ***M1)*** $d_{RT}(P_1, P_2) \geq 0$ *ve* $d_{RT}(P_1, P_2) = 0 \Leftrightarrow P_1 = P_2$,
M2) $d_{RT}(P_1, P_2) = d_{RT}(P_2, P_1)$,
M3) $d_{RT}(P_1, P_3) \leq d_{RT}(P_1, P_2) + d_{RT}(P_2, P_3)$.

M1) *Mutlak değer her zaman negatif olmayan değerler üreteceğinden dolayı mutlak değerlerin pozitif sayılarla çarpılıp toplamasının maksimumu da negatif olmayan bir değerdir. Böylece ,*

$$d_{RT}(P_1, P_2) = \frac{\varphi}{2}\max\left\{\begin{array}{l} |x_1 - x_2| + (2\varphi - 3)\max\left\{\begin{array}{l}(\varphi + 1)|z_1 - z_2| + \\ \varphi|y_1 - y_2|, |x_1 - x_2|\end{array}\right\}, \\ |y_1 - y_2| + (2\varphi - 3)\max\left\{\begin{array}{l}(\varphi + 1)|x_1 - x_2| + \\ \varphi|z_1 - z_2|, |y_1 - y_2|\end{array}\right\}, \\ |z_1 - z_2| + (2\varphi - 3)\max\left\{\begin{array}{l}(\varphi + 1)|y_1 - y_2| + \\ \varphi|x_1 - x_2|, |z_1 - z_2|\end{array}\right\} \end{array}\right\} \geq 0$$

dır. Yani d_{RT} pozitif tanımlıdır.Eğer

$$d_{RT}(P_1, P_2) = \frac{\varphi}{2}\max\left\{\begin{array}{l} |x_1 - x_2| + (2\varphi - 3)\max\left\{\begin{array}{l}(\varphi + 1)|z_1 - z_2| + \\ \varphi|y_1 - y_2|, |x_1 - x_2|\end{array}\right\}, \\ |y_1 - y_2| + (2\varphi - 3)\max\left\{\begin{array}{l}(\varphi + 1)|x_1 - x_2| + \\ \varphi|z_1 - z_2|, |y_1 - y_2|\end{array}\right\}, \\ |z_1 - z_2| + (2\varphi - 3)\max\left\{\begin{array}{l}(\varphi + 1)|y_1 - y_2| + \\ \varphi|x_1 - x_2|, |z_1 - z_2|\end{array}\right\} \end{array}\right\} = 0$$

$$\Rightarrow |x_1 - x_2| = 0,\ |y_1 - y_2| = 0,\ |z_1 - z_2| = 0$$
$$\Rightarrow x_1 = x_2,\ y_1 = y_2,\ z_1 = z_2$$
$$\Rightarrow P_1 = P_2$$

olur. Tersine P_1=P_2 *ise* $|x_1-x_2|$=0, $|y_1-y_2|$=0 *ve* $|z_1-z_2|$=0 *olacağından* $d_{RT}(P_1,P_2)$=0 *olur.*

M2) *Mutlak değer tanımından* $|x_1-x_2|$=$|x_2-x_1|$, $|y_1-y_2|$=$|y_2-y_1|$ *ve* $|z_1-z_2|$=$|z_2-z_1|$ *dir. Buradan açıkça* $d_{RT}(P_1,P_2)$=$d_{RT}(P_2,P_1)$ *dir. Yani,* d_{RT} *simetriktir.*

M3) $P_1=(x_1,y_1,z_1), P_2=(x_2,y_2,z_2)$ *ve* $P_3=(x_3,y_3,z_3)\in\mathbb{R}^3$ *olsun.*

$$d_{RT}(P_1,P_3)\leq d_{RT}(P_1,P_2)+d_{RT}(P_2,P_3)$$

olduğu gösterilmelidir.

$$\begin{aligned}
&d_{RT}(P_1,P_3)\\
&=\tfrac{\varphi}{2}\max\left\{\begin{array}{l}|x_1-x_3|+(2\varphi-3)\max\{(\varphi+1)|z_1-z_3|+\varphi|y_1-y_3|,|x_1-x_3|\},\\ |y_1-y_3|+(2\varphi-3)\max\{(\varphi+1)|x_1-x_3|+\varphi|z_1-z_3|,|y_1-y_3|\},\\ |z_1-z_3|+(2\varphi-3)\max\{(\varphi+1)|y_1-y_3|+\varphi|x_1-x_3|,|z_1-z_3|\}\end{array}\right\}\\
&=\tfrac{\varphi}{2}\max\left\{\begin{array}{l}|x_1-x_2+x_2-x_3|+(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}(\varphi+1)|z_1-z_2+z_2-z_3|+\varphi|y_1-y_2+y_2-y_3|,\\ |x_1-x_2+x_2-x_3|\end{array}\right\},\\ |y_1-y_2+y_2-y_3|+(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}(\varphi+1)|x_1-x_2+x_2-x_3|+\varphi|z_1-z_2+z_2-z_3|,\\ |y_1-y_2+y_2-y_3|\end{array}\right\},\\ |z_1-z_2+z_2-z_3|+(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}(\varphi+1)|y_1-y_2+y_2-y_3|+\varphi|x_1-x_2+x_2-x_3|,\\ |z_1-z_2+z_2-z_3|\end{array}\right\}\end{array}\right\}\\
&\leq\tfrac{\varphi}{2}\max\left\{\begin{array}{l}|x_1-x_2|+|x_2-x_3|+(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}(\varphi+1)(|z_1-z_2|+|z_2-z_3|)+\\ \varphi(|y_1-y_2|+|y_2-y_3|),|x_1-x_2|+|x_2-x_3|\end{array}\right\},\\ |y_1-y_2|+|y_2-y_3|+(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}(\varphi+1)(|x_1-x_2|+|x_2-x_3|)+\\ \varphi(|z_1-z_2|+|z_2-z_3|),|y_1-y_2|+|y_2-y_3|\end{array}\right\},\\ |z_1-z_2|+|z_2-z_3|+(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}(\varphi+1)(|y_1-y_2|+|y_2-y_3|)+\\ \varphi(|x_1-x_2|+|x_2-x_3|),|z_1-z_2|+|z_2-z_3|\end{array}\right\}\end{array}\right\}\\
&\leq\tfrac{\varphi}{2}\max\left\{\begin{array}{l}|x_1-x_2|+(2\varphi-3)\max\{(\varphi+1)|z_1-z_2|+\varphi|y_1-y_2|,|x_1-x_2|\},\\ |y_1-y_2|+(2\varphi-3)\max\{(\varphi+1)|x_1-x_2|+\varphi|z_1-z_2|,|y_1-y_2|\},\\ |z_1-z_2|+(2\varphi-3)\max\{(\varphi+1)|y_1-y_2|+\varphi|x_1-x_2|,|z_1-z_2|\}\end{array}\right\}+\\
&\tfrac{\varphi}{2}\max\left\{\begin{array}{l}|x_2-x_3|+(2\varphi-3)\max\{(\varphi+1)|z_2-z_3|+\varphi|y_2-y_3|,|x_2-x_3|\},\\ |y_2-y_3|+(2\varphi-3)\max\{(\varphi+1)|x_2-x_3|+\varphi|z_2-z_3|,|y_2-y_3|\},\\ |z_2-z_3|+(2\varphi-3)\max\{(\varphi+1)|y_2-y_3|+\varphi|x_2-x_3|,|z_2-z_3|\}\end{array}\right\}\\
&=I
\end{aligned}$$

dır. Burada Yardımcı Teorem 5.1 den dolayı

$$d_{RT}(P_1,P_2)\geq\frac{\varphi}{2}\max\left\{\begin{array}{l}|x_1-x_2|+(2\varphi-3)\max\{(\varphi+1)|z_1-z_2|+\varphi|y_1-y_2|,|x_1-x_2|\},\\ |y_1-y_2|+(2\varphi-3)\max\{(\varphi+1)|x_1-x_2|+\varphi|z_1-z_2|,|y_1-y_2|\},\\ |z_1-z_2|+(2\varphi-3)\max\{(\varphi+1)|y_1-y_2|+\varphi|x_1-x_2|,|z_1-z_2|\}\end{array}\right\}$$

ve

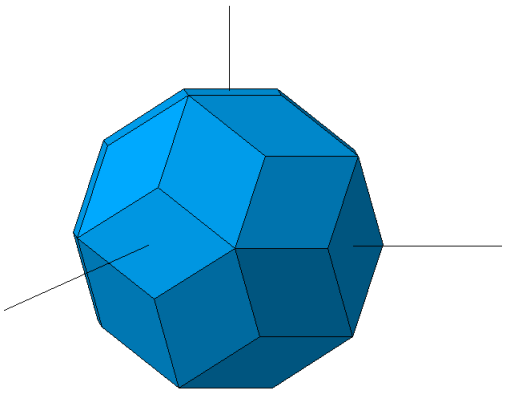
$$d_{RT}(P_2,P_3) \geq \frac{\varphi}{2}\max\left\{\begin{array}{l} |x_2-x_3|+(2\varphi-3)\max\left\{(\varphi+1)|z_2-z_3|+\varphi|y_2-y_3|,|x_2-x_3|\right\}, \\ |y_2-y_3|+(2\varphi-3)\max\left\{(\varphi+1)|x_2-x_3|+\varphi|z_2-z_3|,|y_2-y_3|\right\}, \\ |z_2-z_3|+(2\varphi-3)\max\left\{(\varphi+1)|y_2-y_3|+\varphi|x_2-x_3|,|z_2-z_3|\right\} \end{array}\right\}$$

olur. O halde $I \leq d_{RT}(P_1,P_2)+d_{RT}(P_2,P_3)$ *bulunur. Buna göre* $d_{RT}(P_1,P_3) \leq d_{RT}(P_1,P_2)+d_{RT}(P_2,P_3)$ *elde edilir. Yani rhombic triacontahedron uzaklık fonksiyonu üçgen eşitsizliğini sağlar.*

Sonuç olarak rhombic triacontahedron uzaklık fonksiyonu metriktir. Ayrıca bu metrikle donatılmış analitik $3-$*uzayda orijinden* 1 *birim rhombic triacontahedron uzaklığındaki noktaların kümesi*

$$S_{RT}=\left\{(x,y,z):d_{RT}(X,0)=\frac{\varphi}{2}\max\left\{\begin{array}{l} |x|+(2\varphi-3)\max\left\{(\varphi+1)|z|+\varphi|y|,|x|\right\}, \\ |y|+(2\varphi-3)\max\left\{(\varphi+1)|x|+\varphi|z|,|y|\right\}, \\ |z|+(2\varphi-3)\max\left\{(\varphi+1)|y|+\varphi|x|,|z|\right\} \end{array}\right\}=1\right\}$$

olup bu noktaların geometrik yeri Şekil6.2 de görüldüğü gibi rhombic triacontahedrondur.



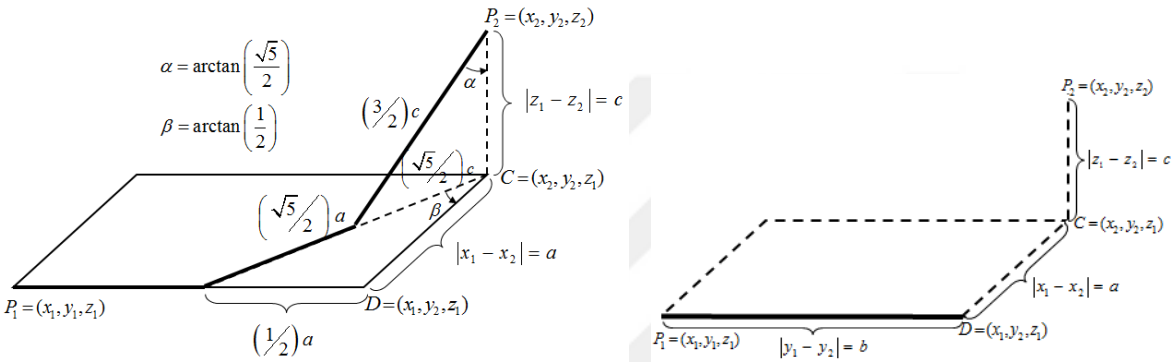
Şekil 6.2 Rhombic Triacontahedronun Koordinat Sistemine Yerleştirilmesi

Rhombic triacontahedron uzaklık fonksiyonu bir hayli karmaşık gözükmesine rağmen apsis, ordinat var kotlar farkı arasında bir yönlendirme vardır. Bu yönlendirme ise $|x_1-x_2|$-$|y_1-y_2|$-$|z_1-z_2|$-$|x_1-x_2|$ şeklindedir. Buna göre d_{RT} fonksiyonunda yer alan üç ifadeden herhangi birinde $|x_1-x_2|$ yerine $|y_1-y_2|$, $|y_1-y_2|$ yerine $|z_1-z_2|$ ve $|z_1-z_2|$ yerine $|x_1-x_2|$ yazıldığında diğer bir ifadeye ulaşılır. Geometrik olarak P_1 noktasından P_2 noktasına olan yol için iki farklı ihtimal vardır. Buna göre bu yollar aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

(i) Biri koordinat eksenlerinden birine paralel, diğerleri ise bir diğer koordinat eksenleri ile $\arctan(1/2)$ ve $\arctan(\sqrt{5}/2)$ radyanlık açı yapan üç doğru parçasının birleşimidir.

(ii) Koordinat eksenlerinden birine paralel bir doğru parçasıdır.

Böylece P_1 ve P_2 noktaları arasındaki rhombic triacontahedron uzaklığı (i) şıkkındaki yol için bahsedilen üç doğru parçasının Öklidyen uzunluklarının toplamının $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ katı, (ii) şıkkındaki yol için ise bahsedilen doğru parçasının Öklidyen uzunluğudur. (Bakınız Şekil6.3)



Şekil 6.3 Rhombic Triacontahedron Uzaklığına Göre İki Nokta Arasındaki Yollar

Sonuç 6.1 $\mathbb{R}^3_{RT}$ *de* (x_0, y_0, z_0) *merkezli ve* r *yarıçaplı küre*

$$\frac{\varphi}{2}\max\left\{\begin{array}{l} |x-x_0|+(2\varphi-3)\max\left\{(\varphi+1)|z-z_0|+\varphi|y-y_0|,|x-x_0|\right\}, \\ |y-y_0|+(2\varphi-3)\max\left\{(\varphi+1)|x-x_0|+\varphi|z-z_0|,|y-y_0|\right\}, \\ |z-z_0|+(2\varphi-3)\max\left\{(\varphi+1)|y-y_0|+\varphi|x-x_0|,|z-z_0|\right\} \end{array}\right\}=r$$

denklemi ile ifade edilen , köşe noktaları $((\varphi-1)r,0,r)$, $(r,(\varphi-1)r,0)$, $(0,r,(\varphi-1)r)$, $(0,(2-\varphi)r,r)$, $(r,0,(2-\varphi)r)$, $((2-\varphi)r,r,0)$, $((\varphi-1)r,(\varphi-1)r,(\varphi-1)r)$ *noktalarının her bir bileşeninin tüm muhtemel* $+/-$ *işaret değişikliklerinin* (x_0,y_0,z_0) *kadar ötelenmişinden oluşan* $30-$*yüzlü bir çokyüzlü olan rhombic triacontahedrondur.*

Bu bölümün diğer kısımlarında sıkça kullanılacağından dolayı merkezil birim kürenin köşe noktaları aşağıdaki şekilde isimlendirilmiştir;

$V_1=(\varphi-1,0,1)$, $V_2=(\varphi-1,0,-1)$, $V_3=(1-\varphi,0,1)$, $V_4=(1-\varphi,0,-1)$,
$V_5=(1,\varphi-1,0)$, $V_6=(1,1-\varphi,0)$, $V_7=(-1,\varphi-1,0)$, $V_8=(-1,1-\varphi,0)$,
$V_9=(0,1,\varphi-1)$, $V_{10}=(0,1,1-\varphi)$, $V_{11}=(0,-1,\varphi-1)$, $V_{12}=(0,-1,1-\varphi)$,

$V_{13} = (0, 2-\varphi, 1)$, $V_{14} = (0, 2-\varphi, -1)$, $V_{15} = (0, \varphi-2, 1)$, $V_{16} = (0, \varphi-2, -1)$,
$V_{17} = (1, 0, 2-\varphi)$, $V_{18} = (1, 0, \varphi-2)$, $V_{19} = (-1, 0, 2-\varphi)$, $V_{20} = (-1, 0, \varphi-2)$,
$V_{21} = (2-\varphi, 1, 0)$, $V_{22} = (2-\varphi, -1, 0)$, $V_{23} = (\varphi-2, 1, 0)$, $V_{24} = (\varphi-2, -1, 0)$,
$V_{25} = (\varphi-1, \varphi-1, \varphi-1)$, $V_{26} = (\varphi-1, \varphi-1, 1-\varphi)$, $V_{27} = (\varphi-1, 1-\varphi, \varphi-1)$,
$V_{28} = (\varphi-1, 1-\varphi, 1-\varphi)$, $V_{29} = (1-\varphi, \varphi-1, \varphi-1)$, $V_{30} = (1-\varphi, \varphi-1, 1-\varphi)$,
$V_{31} = (1-\varphi, 1-\varphi, \varphi-1)$, $V_{32} = (1-\varphi, 1-\varphi, 1-\varphi)$ dir.

Bir sonraki teoremde d_{RT} metriğinin iyi bilinen bazı uzaklık fonksiyonlarının genel hali olan d_m metriği ile ilişkisi verilecektir.

Teorem 6.2 *$P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ $\mathbb{R}^3$ de herhangi iki nokta olsun. $m = v = 0$ ve*

$$u = \frac{\frac{\varphi}{2} \max \left\{ \begin{array}{l} |x_1 - x_2| + (2\varphi - 3) \max \{(\varphi+1)|z_1 - z_2| + \varphi |y_1 - y_2|, |x_1 - x_2|\}, \\ |y_1 - y_2| + (2\varphi - 3) \max \{(\varphi+1)|x_1 - x_2| + \varphi |z_1 - z_2|, |y_1 - y_2|\}, \\ |z_1 - z_2| + (2\varphi - 3) \max \{(\varphi+1)|y_1 - y_2| + \varphi |x_1 - x_2|, |z_1 - z_2|\} \end{array} \right\}}{\max \{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\}}$$

olmak üzere $d_m(P_1, P_2) = d_{RT}(P_1, P_2)$ dir.

İspat *u, v ve m için verilen değerler d_m metriğinde yerine yazılırsa istenen eşitliğin sağlandığı kolaylıkla görülebilir.*

Aşağıdaki önerme $\mathbb{R}^3$ deki noktalar arasındaki Öklidyen ve rhombic triacontahedron uzaklıkları arasındaki geçiş bağıntısını ifade etmektedir.

Yardımcı Teorem 6.2 *$P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ verilsin P_1 ve P_2 noktalarından geçen doğru l, l nin doğrultu vektörü (p, q, r) ve*

$$\mu(P_1P_2) = \frac{\frac{\varphi}{2} \max \left\{ \begin{array}{l} |p| + (2\varphi - 3) \max \{(\varphi+1)|r| + \varphi |q|, |p|\}, \\ |q| + (2\varphi - 3) \max \{(\varphi+1)|p| + \varphi |r|, |q|\}, \\ |r| + (2\varphi - 3) \max \{(\varphi+1)|q| + \varphi |p|, |r|\} \end{array} \right\}}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$$

ise

$$d_{RT}(P_1, P_2) = \mu(P_1P_2)\, d_E(P_1, P_2)$$

dir.

İspat $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ *verilsin* P_1 *ve* P_2 *noktalarından geçen doğru* l *ve* l *nin doğrultu vektörü* (p, q, r) *ise* $\lambda \in \mathbb{R}$ *olmak üzere*

$$\frac{x_2 - x_1}{p} = \frac{y_2 - y_1}{q} = \frac{z_2 - z_1}{r} = \lambda$$

yazılabilir. Buradan $x_2 - x_1 = \lambda p$, $y_2 - y_1 = \lambda q$,$z_2 - z_1 = \lambda r$ *elde edilir. Böylece*

$$d_{RT}(P_1, P_2) = \lambda \frac{\varphi}{2} \max \left\{ \begin{array}{l} |p| + (2\varphi - 3) \max \{(\varphi + 1)|r| + \varphi |q|, |p|\}, \\ |q| + (2\varphi - 3) \max \{(\varphi + 1)|p| + \varphi |r|, |q|\}, \\ |r| + (2\varphi - 3) \max \{(\varphi + 1)|q| + \varphi |p|, |r|\} \end{array} \right\}$$

ve

$$d_E(P_1, P_2) = \lambda \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$$

bulunur.

$$\frac{d_{RT}(P_1, P_2)}{d_E(P_1, P_2)} = \frac{\lambda \frac{\varphi}{2} \max \left\{ \begin{array}{l} |p| + (2\varphi - 3) \max \{(\varphi + 1)|r| + \varphi |q|, |p|\}, \\ |q| + (2\varphi - 3) \max \{(\varphi + 1)|p| + \varphi |r|, |q|\}, \\ |r| + (2\varphi - 3) \max \{(\varphi + 1)|q| + \varphi |p|, |r|\} \end{array} \right\}}{\lambda \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$$

olup

$$\mu(P_1 P_2) = \frac{\frac{\varphi}{2} \max \left\{ \begin{array}{l} |p| + (2\varphi - 3) \max \{(\varphi + 1)|r| + \varphi |q|, |p|\}, \\ |q| + (2\varphi - 3) \max \{(\varphi + 1)|p| + \varphi |r|, |q|\}, \\ |r| + (2\varphi - 3) \max \{(\varphi + 1)|q| + \varphi |p|, |r|\} \end{array} \right\}}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$$

denilirse

$$d_{RT}(P_1, P_2) = \mu(P_1 P_2)\, d_E(P_1, P_2)$$

elde edilir.

Yukarıdaki yardımcı teorem herhangi bir doğru boyunca herhangi P_1 ve P_2 noktaları arasındaki d_{RT}-uzaklığının, aynı doğru boyunca P_1 ve P_2 noktaları arasındaki Öklidyen uzaklığın pozitif katı olduğu gösterir. Buna göre aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Sonuç 6.2 $\mathbb{R}^3$ *de* P_1, P_2, X *doğrudaş, üç farklı nokta ise*

$$d_E(P_1, X) = d_E(P_2, X) \iff d_{RT}(P_1, X) = d_{RT}(P_2, X)$$

dir.

Sonuç 6.3 *3 boyutlu uzayda* P_1, P_2, X *doğrudaş, üç farklı nokta ise*

$$\frac{d_E(X, P_1)}{d_E(X, P_2)} = \frac{d_{RT}(X, P_1)}{d_{RT}(X, P_2)}$$

olur. Yani bir doğru boyunca olan d_E, d_{RT} *uzaklıklarının oranı aynıdır.*

6.2 Rhombic Triacontahedron İzometri Grubu

Bu bölümde d_{RT} metriği ile donatılmış analitik $3-$uzayın ($\mathbb{R}^3_{RT}$) izometri grubu araştırılacaktır. d_{RT} uzaklığını koruyan izometrileri tespit etmek için önce hangi Öklidyen izometrilerin rhombic triacontahedron uzaklığını koruduğu araştırılacaktır. Daha sonra da, bu izometriler dışında izometrilerin olmadığı gösterilecektir.

$\alpha : \mathbb{R}^3_{RT} \to \mathbb{R}^3_{RT}$ dönüşüm olmak üzere her $X, Y \in \mathbb{R}^3_{RT}$ için

$$d_{RT}(X,Y) = d_{RT}(\alpha(X), \alpha(Y))$$

ise α dönüşümü $\mathbb{R}^3_{RT}$ da bir izometridir.

Aşağıda ifade edilen önermeler ile hangi Öklidyen izometrilerin rhombic triacontahedron uzayında da izometri oldukları gösterilmektedir.

Önerme 6.1 *$\mathbb{R}^3$ de her Öklidyen öteleme $\mathbb{R}^3_{RT}$ ün bir izometrisidir.*

İspat *$A = (a_1, a_2, a_3)$, $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere $T_A : \mathbb{R}^3_{RT} \to \mathbb{R}^3_{RT}, T_A(X) = A+X$ olacak şekilde reel uzayda bir öteleme olsun. $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3_c$ için*

$$\begin{aligned}
&d_{RT}(T_A(P_1), T_A(P_2)) = \\
&= \frac{\varphi}{2} \max \left\{ \begin{array}{l}
|a_1 + x_1 - a_1 - x_2| + \\
(2\varphi - 3) \max \left\{ \begin{array}{l} (\varphi+1)\,|a_3 + z_1 - a_3 - z_2| + \varphi\,|a_2 + y_1 - a_2 - y_2|\,, \\ |a_1 + x_1 - a_1 - x_2| \end{array} \right\}, \\
|a_2 + y_1 - a_2 - y_2| + \\
(2\varphi - 3) \max \left\{ \begin{array}{l} (\varphi+1)\,|a_1 + x_1 - a_1 - x_2| + \varphi\,|a_3 + z_1 - a_3 - z_2|\,, \\ |a_2 + y_1 - a_2 - y_2| \end{array} \right\}, \\
|a_3 + z_1 - a_3 - z_2| + \\
(2\varphi - 3) \max \begin{array}{l} (\varphi+1)\,|a_2 + y_1 - a_2 - y_2| + \varphi\,|a_1 + x_1 - a_1 - x_2|\,, \\ |a_3 + z_1 - a_3 - z_2| \end{array}
\end{array} \right\} \\
&= \frac{\varphi}{2} \max \left\{ \begin{array}{l}
|x_1 - x_2| + (2\varphi - 3) \max \{(\varphi + 1)\,|z_1 - z_2| + \varphi\,|y_1 - y_2|\,, |x_1 - x_2|\}\,, \\
|y_1 - y_2| + (2\varphi - 3) \max \{(\varphi + 1)\,|x_1 - x_2| + \varphi\,|z_1 - z_2|\,, |y_1 - y_2|\}\,, \\
|z_1 - z_2| + (2\varphi - 3) \max \{(\varphi + 1)\,|y_1 - y_2| + \varphi\,|x_1 - x_2|\,, |z_1 - z_2|\}
\end{array} \right\} \\
&= d_{RT}(P_1, P_2)
\end{aligned}$$

dir. Bundan dolayı T_A bir izometridir.

Yukarıdaki önerme gereğince $\mathbb{R}^3_{RT}$ uzayında dönme ve yansımaları bulmak için orijinden geçen düzlemleri düşünmek yeterli olacaktır. Aşağıdaki önermede $\mathbb{R}^3_{RT}$ de uzaklığı koruyan yansımalar ifade edilecektir.

Önerme 6.2 *$\mathbb{R}^3_{RT}$ de $\Delta : ax + by + cz = 0$ düzlemine göre yansımanın izometri olması için gerek ve yeter koşul düzlemin doğrultu vektörü (a, b, c) nin*

$$D = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (\pm 1, \pm\varphi, (\varphi - 1)), ((\varphi - 1), \pm 1, \pm\varphi), (\pm\varphi, (\varphi - 1), \pm 1)\}$$

vektör kümesi elemanlarına paralel olmasıdır.

İspat *$\Delta : ax+by+cz = 0$ birim normali (a, b, c) olan düzlem olmak üzere $\sigma_\Delta : \mathbb{R}^3_{RT} \to \mathbb{R}^3_{RT}$ Öklidyen yansıma*

$$\sigma_\Delta(x, y, z) = \begin{pmatrix} (1 - 2a^2)x - 2aby - 2acz, -2abx + (1 - 2b^2)y - 2bcz, \\ -2acx - 2bcy + (1 - 2c^2)z \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır. $\mathbb{R}^3_{RT}$ ün taban vektörlerini koruyan yansıma izometri olacağından,

rhombic triacontahedronun köşe noktaları da olan, $\mathbb{R}^3_{RT}$ ün $V_1 = (\varphi - 1, 0, 1), V_{16} = (1, 0, 2 - \varphi), V_{24} = (\varphi - 1, \varphi - 1, \varphi - 1)$ tabanını koruyan yansımaları tespit etmek izometrileri bulmak için yeterli olacaktır. Taban vektörlerinin Öklidyen yansımalar altında görüntüleri,

$$\sigma_\Delta(V_1) = ((\varphi - 1)(1 - 2a^2) - 2ac, -2ab(\varphi - 1) - 2bc, -2ac(\varphi - 1) + 1 - 2c^2)$$

$$\sigma_\Delta(V_{16}) = (1 - 2a^2 - 2ac(2 - \varphi), -2ab - 2bc(2 - \varphi), -2ac + (1 - 2c^2)(2 - \varphi))$$

$$\sigma_\Delta(V_{24}) = \begin{pmatrix} (1 - 2a^2)(\varphi - 1) - 2ab(\varphi - 1) - 2ac(\varphi - 1), \\ -2ab(\varphi - 1) - (1 - 2b^2)(\varphi - 1) - 2bc(\varphi - 1), \\ -2ac(\varphi - 1) - 2bc(\varphi - 1) + (1 - 2c^2)(\varphi - 1) \end{pmatrix}$$

olup açıkça $d_{RT}(O, V_1) = d_{RT}(O, V_{16}) = d_{RT}(O, V_{24}) = 1$ dir. Eğer yansıma d_{RT} uzaklığını koruyor ise taban vektörlerinin yansıma altındaki görüntüleri için uzaklık korunmalıdır. Yani

$$d_{RT}(\sigma_\Delta(O), \sigma_\Delta(V_1)) = d_{RT}(\sigma_\Delta(O), \sigma_\Delta(V_{16})) = d_{RT}(\sigma_\Delta(O), \sigma_\Delta(V_{24})) = 1$$

olmalıdır. Böylece

$$d_{RT}(\sigma_\Delta(O),\sigma_\Delta(V_1))) =$$
$$\frac{\varphi}{2}\max\left\{\begin{array}{l}
|(\varphi-1)(1-2a^2)-2ac|+\\
2(\varphi-1)\max\left\{\begin{array}{l}\varphi\,|2(1-\varphi)ab-2bc|+\\(\varphi+1)\,|2(1-\varphi)ac+1-2c^2|,\\|(\varphi-1)(1-2a^2)-2ac|\end{array}\right\},\\
|2(1-\varphi)ab-2bc|+\\
2(\varphi-1)\max\left\{\begin{array}{l}\varphi\,|2(1-\varphi)ac+1-2c^2|+\\(\varphi+1)\,|(\varphi-1)(1-2a^2)-2ac|,\\|2(1-\varphi)ab-2bc|\end{array}\right\},\\
|2(1-\varphi)ac+1-2c^2|+\\
2(\varphi-1)\max\left\{\begin{array}{l}\varphi\,|(\varphi-1)(1-2a^2)-2ac|+\\(\varphi+1)\,|2(1-\varphi)ab-2bc|,\\|2(1-\varphi)ac+1-2c^2|\end{array}\right\}
\end{array}\right\}=1$$

$$d_{RT}(\sigma_\Delta(O),\sigma_\Delta(V_{16})) =$$
$$\frac{\varphi}{2}\max\left\{\begin{array}{l}
|1-2a^2-2(2-\varphi)ac|+\\
(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}\varphi\,|-2ab-2(2-\varphi)bc|+\\(\varphi+1)\,|-2ac+(2-\varphi)(1-2c^2)|,\\|1-2a^2-2(2-\varphi)ac|\end{array}\right\},\\
|-2ab-2(2-\varphi)bc|+\\
(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}\varphi\,|-2ac-(2-\varphi)(1-2c^2)|+\\(\varphi+1)\,|1-2a^2-2(2-\varphi)ac|,\\|2ab-2(2-\varphi)bc|\end{array}\right\},\\
|-2ac+(2-\varphi)(1-2c^2)|+\\
(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}\varphi\,|1-2a^2-2(2-\varphi)ac|+\\(\varphi+1)\,|-2ab-2(2-\varphi)bc|,\\|-2ac+(2-\varphi)(1-2c^2)|\end{array}\right\}
\end{array}\right\}=1$$

$$d_{RT}(\sigma_\Delta(O),\sigma_\Delta(V_{24})) =$$
$$\frac{\varphi}{2}\max\left\{\begin{array}{l}
|(\varphi-1)(1-2a^2)-2(\varphi-1)ab-2(\varphi-1)ac|+\\
(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}\varphi\,|-2(\varphi-1)ab+(\varphi-1)(1-2b^2)-2(\varphi-1)bc|+\\(\varphi+1)\,|-2(\varphi-1)ac-2(\varphi-1)bc+(\varphi-1)(1-2c^2)|,\\|(\varphi-1)(1-2a^2)-2(\varphi-1)ab-2(\varphi-1)ac|\end{array}\right\},\\
|-2(\varphi-1)ab+(\varphi-1)(1-2b^2)-2(\varphi-1)bc|+\\
(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}\varphi\,|-2(\varphi-1)ac-2(\varphi-1)bc+(\varphi-1)(1-2c^2)|+\\(\varphi+1)\,|(\varphi-1)(1-2a^2)-2(\varphi-1)ab-2(\varphi-1)ac|,\\|-2(\varphi-1)ab+(\varphi-1)(1-2b^2)-2(\varphi-1)bc|\end{array}\right\},\\
|-2(\varphi-1)ac-2(\varphi-1)bc+(\varphi-1)(1-2c^2)|+\\
(2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l}\varphi\,|(\varphi-1)(1-2a^2)-2(\varphi-1)ab-2(\varphi-1)ac|+\\(\varphi+1)\,|-2(\varphi-1)ab+(\varphi-1)(1-2b^2)-2(\varphi-1)bc|,\\|-2(\varphi-1)ac-2(\varphi-1)bc+(\varphi-1)(1-2c^2)|\end{array}\right\}
\end{array}\right\}=1$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözülürse (a,b,c) *için* $\left(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{\varphi}{2},\frac{\varphi-1}{2}\right)$, $\left(\frac{\varphi-1}{2},\pm\frac{1}{2},\pm\frac{\varphi}{2}\right)$, $\left(\pm\frac{\varphi}{2},\frac{\varphi-1}{2},\pm\frac{1}{2}\right)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ *çözümleri elde edilir.*

Tersine normal vektörleri D *kümesindeki vektörlere paralel olacak şekildeki düzlemlere göre yansımaların uzaklığı koruduğu gösterilmelidir.* $\sigma_\Delta\ (X) = Y$ *olacak şekilde* X *ve* Y *noktaları için* (p_1,q_1,r_1) *ve* (p_2,q_2,r_2), OX *ve* OY *vektörlerinin yön vektörleri olsun.* $d_{RT}(O,X) = d_{RT}(O,Y)$ *olduğunu göstermek için* $\mu\,(OX) = \mu\,(OY)$ *olduğunu göstermek yeterlidir.* (p_1,q_1,r_1) *vektörünün verilen düzlemlere göre yansıma altındaki görüntüleri bulunursa;*

1. Durum: $1x+\varphi y+(1-\varphi)z=0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1,q_1,r_1) = (\tfrac{1}{2}p_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1-\tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}r_1,\ \tfrac{-1-\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{1}{2}r_1,\ \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{1}{2}q_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1),$$

2. Durum: $1x+\varphi y+-(1-\varphi)z=0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1,q_1,r_1) = (\tfrac{1}{2}p_1+\tfrac{-1-\sqrt{5}}{4}q_1-\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}r_1,\ \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}q_1-\tfrac{1}{2}r_1,\ \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}p_1-\tfrac{1}{2}q_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1),$$

3.Durum: -$1x+\varphi y+(1-\varphi)z=0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1,q_1,r_1) = (\tfrac{1}{2}p_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}r_1,\ \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{1}{2}r_1,\ \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{1}{2}q_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1),$$

4.Durum: -$1x+\varphi y+-(1-\varphi)z=0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1,q_1,r_1) = (\tfrac{1}{2}p_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}r_1,\ \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}q_1-\tfrac{1}{2}r_1,\ \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}p_1-\tfrac{1}{2}q_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1),$$

5.Durum: (1-$\varphi)x+1y+\varphi z=0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1,q_1,r_1) = (\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1-\tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{1}{2}r_1,\ \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{1}{2}q_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1,\ \tfrac{1}{2}p_1+\tfrac{-1-\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}r_1),$$

6.Durum: -(1-$\varphi)x+1y+\varphi z=0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1,q_1,r_1) = (\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}q_1-\tfrac{1}{2}r_1,\ \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{1}{2}q_1+\tfrac{-1-\sqrt{5}}{4}r_1,\ -\tfrac{1}{2}p_1-\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}r_1),$$

7.Durum: $(1-\varphi)x-1y+\varphi z=0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1,q_1,r_1) = (\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{1}{2}r_1,\ \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{1}{2}q_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1,\ \tfrac{1}{2}p_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}r_1),$$

8.Durum: $-(1-\varphi)x-1y+\varphi z=0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_{\Delta}(p_1,q_1,r_1)=(\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}q_1-\tfrac{1}{2}r_1,\ \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{1}{2}q_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1,\ -\tfrac{1}{2}p_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}r_1),$$

9.Durum: $\varphi x+(1-\varphi)y+1z=0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_{\Delta}(p_1,q_1,r_1)=(\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{1}{2}q_1-\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1,\ \tfrac{1}{2}p_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}r_1,\ -\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{1}{2}r_1),$$

10.Durum: $\varphi x+-(1-\varphi)y+1z=0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_{\Delta}(p_1,q_1,r_1)=(\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}p_1-\tfrac{1}{2}q_1-\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1,\ -\tfrac{1}{2}p_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}r_1,\ -\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{1}{2}r_1),$$

11.Durum: $\varphi x+(1-\varphi)y-1z=0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_{\Delta}(p_1,q_1,r_1)=(\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{1}{2}q_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1,\ \tfrac{1}{2}p_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}r_1,\ \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{1}{2}r_1),$$

12.Durum: $\varphi x+-(1-\varphi)y-1z=0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_{\Delta}(p_1,q_1,r_1)=(\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}p_1-\tfrac{1}{2}q_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1,\ -\tfrac{1}{2}p_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}r_1,\ \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{1}{2}r_1),$$

13.Durum: $1x=0$ *yansıma düzlemi için,*$\sigma_{\Delta}\left(p_1,q_1,r_1\right)=\left(-p_1,q_1,r_1\right)$,

14.Durum: $1y=0$ *yansıma düzlemi için,*$\sigma_{\Delta}\left(p_1,q_1,r_1\right)=\left(p_1,-q_1,r_1\right)$,

15.Durum: $1z=0$ *yansıma düzlemi için,*$\sigma_{\Delta}\left(p_1,q_1,r_1\right)=\left(p_1,q_1,-r_1\right)$.
sonuçları elde edilir. Bu sonuçlara göre Yardımcı Teorem 5.2 den dolayı $\mu\left(OX\right)=\mu\left(OY\right)$ *olduğu görülmektedir. Örneğin;* $x+\varphi y+\left(\varphi-1\right)z=0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\mu\left(OX\right)=\frac{\frac{\varphi}{2}\max\left\{\begin{array}{l}\left|p_1\right|+\left(2\varphi-3\right)\max\left\{\left(\varphi+1\right)\left|r_1\right|+\varphi\left|q_1\right|,\left|p_1\right|\right\},\\ \left|q_1\right|+\left(2\varphi-3\right)\max\left\{\left(\varphi+1\right)\left|p_1\right|+\varphi\left|r_1\right|,\left|q_1\right|\right\},\\ \left|r_1\right|+\left(2\varphi-3\right)\max\left\{\left(\varphi+1\right)\left|q_1\right|+\varphi\left|p_1\right|,\left|r_1\right|\right\}\end{array}\right\}}{\sqrt{p_1^2+q_1^2+r_1^2}}$$

$$\mu\left(OY\right)=\frac{\frac{\varphi}{2}\max\left\{\begin{array}{l}\left|p_2\right|+\left(2\varphi-3\right)\max\left\{\left(\varphi+1\right)\left|r_2\right|+\varphi\left|q_2\right|,\left|p_2\right|\right\},\\ \left|q_2\right|+\left(2\varphi-3\right)\max\left\{\left(\varphi+1\right)\left|p_2\right|+\varphi\left|r_2\right|,\left|q_2\right|\right\},\\ \left|r_2\right|+\left(2\varphi-3\right)\max\left\{\left(\varphi+1\right)\left|q_2\right|+\varphi\left|p_2\right|,\left|r_2\right|\right\}\end{array}\right\}}{\sqrt{p_2^2+q_2^2+r_2^2}}$$

dir. Burada

$$\begin{aligned}\sigma_{\Delta}(p_1,q_1,r_1) &= (p_2,q_2,r_2)\\ &= \left(\tfrac{1}{2}p_1-\tfrac{\varphi}{2}q_1-\tfrac{(\varphi-1)}{2}r_1,-\tfrac{\varphi}{2}p_1+\tfrac{(1-\varphi)}{2}q_1-2r_1,\tfrac{(1-\varphi)}{2}p_1-2q_1+\tfrac{\varphi}{2}r_1\right)\end{aligned}$$

olduğundan

$$\mu(OY)=\frac{\frac{\varphi}{2}\max\left\{\begin{array}{l}|p_2|+(2\varphi-3)\max\{(\varphi+1)|r_2|+\varphi|q_2|,|p_2|\},\\ |q_2|+(2\varphi-3)\max\{(\varphi+1)|p_2|+\varphi|r_2|,|q_2|\},\\ |r_2|+(2\varphi-3)\max\{(\varphi+1)|q_2|+\varphi|p_2|,|r_2|\}\end{array}\right\}}{\sqrt{p_2^2+q_2^2+r_2^2}}$$

ifadesinde

$$\begin{array}{l} p_2 \textit{ yerine } \tfrac{1}{2}p_1-\tfrac{\varphi}{2}q_1-\tfrac{(\varphi-1)}{2}r_1\\ q_2 \textit{ yerine } -\tfrac{\varphi}{2}p_1+\tfrac{(1-\varphi)}{2}q_1-2r_1\\ r_2 \textit{ yerine } \tfrac{(1-\varphi)}{2}p_1-2q_1+\tfrac{\varphi}{2}r_1\end{array}$$

yazılırsa $\mu(OX)=\mu(OY)$ *eşitliği görülmektedir. Böylece ispat tamamlanmış olur.*

Sonuç 6.4 S_{RT} *izometrik yansımaların kümesi orijinden geçen denklemleri aşağıda ifade edilmiş olan onbeş Öklidyen yansımadan oluşur.*

Yansıma düzlemleri;

$$\begin{array}{ll} D_1: x=0 & ,\ D_9: x-\varphi y+(\varphi-1)z=0\\ D_2: y=0 & ,\ D_{10}: -x+\varphi y+(\varphi-1)z=0\\ D_3: z=0 & ,\ D_{11}: -x-\varphi y+(\varphi-1)z=0\\ D_4: (\varphi-1)x+y+\varphi z=0 & ,\ D_{12}: \varphi x+(\varphi-1)y+z=0\\ D_5: (\varphi-1)x+y-\varphi z=0 & ,\ D_{13}: \varphi x+(\varphi-1)y-z=0\\ D_6: (\varphi-1)x-y+\varphi z=0 & ,\ D_{14}: -\varphi x+(\varphi-1)y+z=0\\ D_7: (\varphi-1)x-y-\varphi z=0 & ,\ D_{15}: -\varphi x+(\varphi-1)y-z=0\\ D_8: x+\varphi y+(\varphi-1)z=0 & \end{array}$$

olmak üzere rhombic triacontahedron birim küresinin köşe noktalarının yansıması kısaca Şekil6.4 deki tablodaki gibi özetlenebilir;

Yansıma Düzlemleri / Noktalar	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_8	D_9	D_{10}	D_{11}	D_{12}	D_{13}	D_{14}	D_{15}
V_1	V_3	V_1	V_2	V_{12}	V_5	V_{10}	V_6	V_{11}	V_9	V_1	V_1	V_8	V_1	V_1	V_7
V_2	V_4	V_2	V_1	V_5	V_{11}	V_6	V_9	V_2	V_2	V_{10}	V_{12}	V_2	V_8	V_7	V_2
V_3	V_1	V_3	V_4	V_8	V_{10}	V_7	V_{12}	V_3	V_3	V_{11}	V_9	V_3	V_5	V_6	V_3
V_4	V_2	V_4	V_3	V_9	V_8	V_{11}	V_7	V_{10}	V_{12}	V_4	V_4	V_5	V_4	V_4	V_6
V_5	V_7	V_6	V_5	V_2	V_1	V_5	V_5	V_{12}	V_5	V_5	V_{11}	V_4	V_3	V_9	V_{10}
V_6	V_8	V_5	V_6	V_6	V_6	V_2	V_1	V_6	V_{10}	V_9	V_6	V_{12}	V_{11}	V_3	V_4
V_7	V_5	V_8	V_7	V_7	V_7	V_3	V_4	V_7	V_{11}	V_{12}	V_7	V_9	V_{10}	V_2	V_1
V_8	V_6	V_7	V_8	V_3	V_4	V_8	V_8	V_9	V_8	V_8	V_{10}	V_1	V_2	V_{12}	V_{11}
V_9	V_9	V_{11}	V_{10}	V_4	V_9	V_9	V_2	V_8	V_1	V_6	V_3	V_7	V_9	V_5	V_9
V_{10}	V_{10}	V_{12}	V_9	V_{10}	V_3	V_1	V_{10}	V_4	V_6	V_2	V_8	V_{10}	V_7	V_{10}	V_5
V_{11}	V_{11}	V_9	V_{12}	V_{11}	V_2	V_4	V_{11}	V_1	V_7	V_3	V_5	V_{11}	V_6	V_{11}	V_8
V_{12}	V_{12}	V_{10}	V_{11}	V_1	V_{12}	V_{12}	V_3	V_5	V_4	V_7	V_2	V_6	V_{12}	V_8	V_{12}
V_{13}	V_{13}	V_{15}	V_{14}	V_{32}	V_{21}	V_{23}	V_{28}	V_{31}	V_{13}	V_{27}	V_{13}	V_{19}	V_{25}	V_{17}	V_{29}
V_{14}	V_{14}	V_{16}	V_{13}	V_{21}	V_{31}	V_{27}	V_{23}	V_{14}	V_{28}	V_{14}	V_{32}	V_{26}	V_{20}	V_{30}	V_{18}
V_{15}	V_{15}	V_{13}	V_{16}	V_{24}	V_{26}	V_{30}	V_{22}	V_{15}	V_{29}	V_{15}	V_{25}	V_{31}	V_{17}	V_{27}	V_{19}
V_{16}	V_{16}	V_{14}	V_{15}	V_{25}	V_{24}	V_{22}	V_{29}	V_{26}	V_{16}	V_{30}	V_{16}	V_{18}	V_{32}	V_{20}	V_{28}
V_{17}	V_{19}	V_{17}	V_{18}	V_{28}	V_{17}	V_{26}	V_{17}	V_{22}	V_{21}	V_{25}	V_{27}	V_{32}	V_{15}	V_{13}	V_{30}
V_{18}	V_{20}	V_{18}	V_{17}	V_{18}	V_{27}	V_{18}	V_{25}	V_{28}	V_{26}	V_{21}	V_{22}	V_{16}	V_{31}	V_{29}	V_{14}
V_{19}	V_{17}	V_{19}	V_{20}	V_{19}	V_{30}	V_{19}	V_{32}	V_{29}	V_{31}	V_{24}	V_{23}	V_{13}	V_{26}	V_{28}	V_{15}
V_{20}	V_{18}	V_{20}	V_{19}	V_{29}	V_{20}	V_{31}	V_{20}	V_{23}	V_{24}	V_{32}	V_{30}	V_{25}	V_{14}	V_{16}	V_{27}
V_{21}	V_{23}	V_{22}	V_{21}	V_{14}	V_{13}	V_{25}	V_{26}	V_{32}	V_{17}	V_{18}	V_{31}	V_{30}	V_{29}	V_{21}	V_{21}
V_{22}	V_{24}	V_{21}	V_{22}	V_{27}	V_{28}	V_{16}	V_{15}	V_{17}	V_{30}	V_{29}	V_{18}	V_{22}	V_{22}	V_{31}	V_{32}
V_{23}	V_{21}	V_{24}	V_{23}	V_{30}	V_{29}	V_{13}	V_{14}	V_{20}	V_{27}	V_{28}	V_{19}	V_{23}	V_{23}	V_{26}	V_{25}
V_{24}	V_{22}	V_{23}	V_{24}	V_{15}	V_{16}	V_{32}	V_{31}	V_{25}	V_{20}	V_{19}	V_{26}	V_{27}	V_{28}	V_{24}	V_{24}
V_{25}	V_{29}	V_{27}	V_{26}	V_{16}	V_{25}	V_{21}	V_{18}	V_{24}	V_{25}	V_{17}	V_{15}	V_{20}	V_{13}	V_{25}	V_{23}
V_{26}	V_{30}	V_{28}	V_{25}	V_{26}	V_{15}	V_{17}	V_{21}	V_{16}	V_{18}	V_{26}	V_{24}	V_{14}	V_{19}	V_{23}	V_{26}
V_{27}	V_{31}	V_{25}	V_{28}	V_{22}	V_{18}	V_{14}	V_{27}	V_{27}	V_{23}	V_{13}	V_{17}	V_{24}	V_{27}	V_{15}	V_{20}
V_{28}	V_{32}	V_{26}	V_{27}	V_{17}	V_{22}	V_{28}	V_{13}	V_{18}	V_{14}	V_{23}	V_{28}	V_{28}	V_{24}	V_{19}	V_{16}
V_{29}	V_{25}	V_{31}	V_{30}	V_{20}	V_{23}	V_{29}	V_{16}	V_{19}	V_{15}	V_{22}	V_{29}	V_{29}	V_{21}	V_{18}	V_{13}
V_{30}	V_{26}	V_{32}	V_{29}	V_{23}	V_{19}	V_{15}	V_{30}	V_{30}	V_{22}	V_{16}	V_{20}	V_{21}	V_{30}	V_{14}	V_{17}
V_{31}	V_{27}	V_{29}	V_{32}	V_{31}	V_{14}	V_{20}	V_{24}	V_{13}	V_{19}	V_{31}	V_{21}	V_{15}	V_{18}	V_{22}	V_{31}
V_{32}	V_{28}	V_{30}	V_{31}	V_{13}	V_{32}	V_{24}	V_{19}	V_{21}	V_{32}	V_{20}	V_{14}	V_{17}	V_{16}	V_{32}	V_{22}

Şekil 6.4 $\mathbb{R}^3_{RT}$ de Yansıma Düzlemlerine Göre Köşe Noktaların Görüntüleri

Önerme 6.3 $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *ve*

$$D_1 = \{(0, \pm 1, (\varphi - 1)), (\pm 1, (\varphi - 1), 0), (\pm 1, 0, \varphi)\}$$

$$D_2 = \left\{ \begin{array}{l} (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), ((\varphi-1), \pm 1, \pm\varphi), (\pm 1, \pm\varphi, \varphi - 1) \\ (\pm\varphi, \varphi - 1, \pm 1) \end{array} \right\}$$

$$D_3 = \left\{ \begin{array}{l} (1,1,1), (1,1,-1), (1,-1,1), (-1,1,1), (0, \varphi - 1, \pm\varphi), \\ (\varphi - 1, \pm\varphi, 0), (\pm\varphi, 0, \varphi - 1) \end{array} \right\}$$

olmak üzere

$R_1 = \{r_\theta \mid \theta \in \{2\pi/5, 4\pi/5, 6\pi/5, 8\pi/5\}$, *dönme ekseninin doğrultusu* D_1 *in elemanı*$\}$

$R_2 = \{r_\theta \mid \theta \in \{\pi\}$, *dönme ekseninin doğrultusu* D_2 *nin elemanı*$\}$

$R_3 = \{r_\theta \mid \theta = \{2\pi/3, 4\pi/3\}$, *dönme ekseninin doğrultusu* D_3 *ün elemanı*$\}$

kümeleri verilsin. Dönme ekseni orijinden geçen bir l *doğrusu olan* r_θ *dönmesinin bir izometri olması için gerek ve yeter koşul* $r_\theta \in R_{RT} = R_1 \cup R_2 \cup R_3$ *olmasıdır.*

İspat *Birim doğrultu vektörü* (p,q,r) *olan bir* l *doğrusu etrafında* r_θ *şeklinde ifade edilen Öklidyen dönmenin matris formu;*

$$\begin{bmatrix} \cos\theta + p^2(1-\cos\theta) & pq(1-\cos\theta) - r\sin\theta & pr(1-\cos\theta) + q\sin\theta \\ pq(1-\cos\theta) + r\sin\theta & \cos\theta + q^2(1-\cos\theta) & qr(1-\cos\theta) - p\sin\theta \\ pr(1-\cos\theta) - q\sin\theta & qr(1-\cos\theta) + p\sin\theta & \cos\theta - r^2(1-\cos\theta) \end{bmatrix}$$

biçimindedir.

l *eksenli bir dönme ,* l *doğrusu boyunca kesişen iki düzlemin yansımalarının birleşimi olduğundan ve Önerme 5.2 den dolayı* l *doğrusunun doğrultu vektörlerini* $(0,\pm1,(\varphi-1))$, $(\pm1,(\varphi-1),0)$, $(\pm1,0,\varphi)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $((\varphi-1),\pm1,\pm\varphi)$, $(\pm1,\pm\varphi,\varphi-1)$, $(\pm\varphi,\varphi-1,\pm1)$, $(1,1,1)$, $(1,1,-1)$, $(1,-1,1)$, $(-1,1,1)$, $(0,\varphi-1,\pm\varphi)$, $(\varphi-1,\pm\varphi,0)$, $(\pm\varphi,0,\varphi-1)$ *olarak alınabilir.*

$\mathbb{R}^3_{RT}$ *de izometrik dönmelerin bulunması için,* d_{RT} *birim küresinin kenarlarının uzunluklarını koruyan dönmelerin tespit edilmesi yeterlidir.* d_{RT} *birim küresinin* $V_5=(1,\varphi-1,0)$ *ve* $V_{17}=(1,0,2-\varphi)$ *köşe noktaları ele alınsın. Bu taktirde*

$$r_\theta(V_5) = \begin{pmatrix} \cos\theta + p^2(1-\cos\theta) + (\varphi-1)\left(pq(1-\cos\theta) - r\sin\theta\right), \\ pq(1-\cos\theta) + r\sin\theta + (\varphi-1)\left(\cos\theta + q^2(1-\cos\theta)\right), \\ pr(1-\cos\theta) - q\sin\theta + (\varphi-1)\left(qr(1-\cos\theta) + p\sin\theta\right) \end{pmatrix}$$

$$r_\theta(V_{17}) = \begin{pmatrix} \cos\theta + p^2(1-\cos\theta) + (2-\varphi)\left(pr(1-\cos\theta) + q\sin\theta\right), \\ pq(1-\cos\theta) + r\sin\theta + (2-\varphi)\left(qr(1-\cos\theta) - p\sin\theta\right), \\ pr(1-\cos\theta) - q\sin\theta + (2-\varphi)\left(\cos\theta - r^2(1-\cos\theta)\right) \end{pmatrix}$$

dir. Üstelik $V_5=(1,\varphi-1,0)$ *ve* $V_{17}=(1,0,2-\varphi)$ *için* $d_{RT}(V_5,V_{17})=\varphi-1$ *dir. O halde* $\theta\neq0$ *olmak üzere* r_θ *nın* d_{RT} *uzaklığını koruması için* $d_{RT}(r_\theta(V_5),r_\theta(V_{17}))=\varphi-1$ *olmalıdır.*

l *doğrusunun doğrultu vektörü* $(0,1,\varphi-1)$ *olarak alınırsa* $(p,q,r)=\left(0,\sqrt{\frac{2+\varphi}{5}},\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\right)$ *olur.* p,q,r *değerleri* $d_{RT}(r_\theta(V_5),r_\theta(V_{17}))=\varphi-1$ *de yerine yazılırsa;*
$\alpha_1=2\sqrt{\frac{7-4\varphi}{5}}\sin\theta$, $\alpha_2=\frac{-2\varphi+1}{5}$ *ve* $\alpha_3=\frac{4-3\varphi}{10}$ *olmak üzere*

$$\frac{\varphi}{2}\max\left\{\begin{array}{l} |\alpha_1| + (2\varphi-3)\max\left\{(\varphi+1)|\alpha_3| + \varphi|\alpha_2|, |\alpha_1|\right\}, \\ |\alpha_2| + (2\varphi-3)\max\left\{(\varphi+1)|\alpha_1| + \varphi|\alpha_3|, |\alpha_2|\right\}, \\ |\alpha_3| + (2\varphi-3)\max\left\{(\varphi+1)|\alpha_2| + \varphi|\alpha_1|, |\alpha_3|\right\} \end{array}\right\} = \varphi-1$$

olur. Bu denklem çözülürse $\theta=2\pi/5,4\pi/5,6\pi/5,8\pi/5$ *sonuçları elde edilir. Benzer şekilde, eğer* l *doğrusunun yön vektörü* $(0,-1,(\varphi-1)),(\pm1,(\varphi-1),0),(\pm1,0,\varphi)$ *olarak alınırsa*

$\theta = 2\pi/5, 4\pi/5, 6\pi/5, 8\pi/5$ *olur. Dolayısıyla* D_1 *deki altı yön vektörüyle yirmi dört dönme elde edilir.*

l doğrusunun yön vektörü $(1,0,0)$ *ise* $(p,q,r) = (1,0,0)$ *olur.* p,q,r *değerleri* $d_{RT}\left(r_\theta(V_5), r_\theta(V_{17})\right) = \varphi - 1$ *de yerine yazılırsa;*

$$\frac{\varphi}{2}\max\left\{\begin{array}{l} (2\varphi-3)((\varphi+1)\left|(2-\varphi)\cos\theta+(1-\varphi)\sin\theta\right|+ \\ \varphi\left|(\varphi-2)\sin\theta+(1-\varphi)\cos\theta\right|) \\ \left|(\varphi-2)\sin\theta+(1-\varphi)\cos\theta\right|+ \\ (2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l} \varphi\left|(2-\varphi)\cos\theta+(1-\varphi)\sin\theta\right|, \\ \left|(\varphi-2)\sin\theta+(1-\varphi)\cos\theta\right| \end{array}\right\}, \\ \left|(2-\varphi)\cos\theta+(1-\varphi)\sin\theta\right|+ \\ (2\varphi-3)\max\left\{\begin{array}{l} (\varphi+1)\left|(\varphi-2)\sin\theta+(1-\varphi)\cos\theta\right|, \\ \left|(2-\varphi)\cos\theta+(1-\varphi)\sin\theta\right| \end{array}\right\} \end{array}\right\} = \varphi - 1$$

denklemi bulunur. Bu denklem çözülürse $\theta = \pi$ *sonucuna ulaşılır. Benzer şekilde, eğer l nin yön vektörü* D_2 *nin* $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $((\varphi-1), \pm1, \pm\varphi)$, $(\pm1, \pm\varphi, \varphi-1)$, $(\pm\varphi, \varphi-1, \pm1)$ *vektörlerinden biri olarak alınırsa* $\theta = \pi$ *olarak bulunur. Dolayısıyla* D_2 *deki on beş yön vektörüyle on beş dönme elde edilir.*

l doğrusunun doğrultu vektörü $(1,1,1)$ *ise* $(p,q,r) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ *olur.* p,q,r *değerleri* $d_{RT}\left(r_\theta(V_5), r_\theta(V_{17})\right) = \varphi - 1$ *de yerine yazılırsa;*

$$\alpha_1 = \left(\frac{3-2\varphi}{3}\right)\left(1-\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta\right),$$

$$\alpha_2 = \left(\frac{-\varphi\cos\theta+\sqrt{3}\,(\varphi-2)\sin\theta-2\varphi+3}{3}\right)$$

ve

$$\alpha_3 = \left(\frac{(3-\varphi)\cos\theta+\sqrt{3}\,(1-\varphi)\sin\theta-2\varphi+3}{3}\right)$$

olmak üzere

$$\frac{\varphi}{2}\max\left\{\begin{array}{l} |\alpha_1|+(2\varphi-3)\max\left\{(\varphi+1)\left|\alpha_3\right|+\varphi\left|\alpha_2\right|, \left|\alpha_1\right|\right\}, \\ |\alpha_2|+(2\varphi-3)\max\left\{(\varphi+1)\left|\alpha_1\right|+\varphi\left|\alpha_3\right|, \left|\alpha_2\right|\right\}, \\ |\alpha_3|+(2\varphi-3)\max\left\{(\varphi+1)\left|\alpha_2\right|+\varphi\left|\alpha_1\right|, \left|\alpha_3\right|\right\} \end{array}\right\} = \varphi - 1$$

elde edilir. Bu denklem çözülürse $\theta = 2\pi/3, 4\pi/3$ *sonuçları bulunur. Benzer şekilde, eğer l doğrusunun yön vektörü* D_3 *ün* $(-1,1,1)$, $(1,-1,1)$, $(1,1,-1)$, $(0,\varphi-1,\pm\varphi)$, $(\varphi-1,\pm\varphi,0)$, $(\pm\varphi,0,\varphi-1)$ *vektörlerinden biri olarak alınırsa* $\theta = 2\pi/3,\ 4\pi/3$ *olur. Dolayısıyla* D_3 *deki on tane yön vektörüyle yirmi tane dönme elde edilir.*

Tersine $r_\theta(X) = Y$ olacak şekilde X ve Y noktalarıyla oluşturulan OX ve OY doğrularının doğrultuları sırasıyla (p_1, q_1, r_1) ve (p_2, q_2, r_2) olmak üzere $d_{RT}(O, X) = d_{RT}(O, Y)$ olduğunu göstermek için Yardımcı Teorem 5.2 den $\mu(OX) = \mu(OY)$ olduğu gösterilmelidir. Bu ise (p_1, q_1, r_1) vektörünün tüm durumlar için görüntüleri bulunarak kolaylıkla gösterilebilir. Örneğin dönme ekseninin doğrultu vektörü $(1, 0, 0)$ olsun. Bu durumda $\sigma_\Delta(p_1, q_1, r_1) = (p_2, q_2, r_2) = (p_1, -q_1, -r_1)$ elde edilir. Yardımcı Teorem 5.2 den

$$\mu(OX) = \frac{\frac{\varphi}{2}\max\left\{\begin{array}{l} |p_1| + (2\varphi - 3)\max\{(\varphi+1)|r_1| + \varphi|q_1|, |p_1|\}, \\ |q_1| + (2\varphi - 3)\max\{(\varphi+1)|p_1| + \varphi|r_1|, |q_1|\}, \\ |r_1| + (2\varphi - 3)\max\{(\varphi+1)|q_1| + \varphi|p_1|, |r_1|\} \end{array}\right\}}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2 + r_1^2}}$$

$$\mu(OY) = \frac{\frac{\varphi}{2}\max\left\{\begin{array}{l} |p_2| + (2\varphi - 3)\max\{(\varphi+1)|r_2| + \varphi|q_2|, |p_2|\}, \\ |q_2| + (2\varphi - 3)\max\{(\varphi+1)|p_2| + \varphi|r_2|, |q_2|\}, \\ |r_2| + (2\varphi - 3)\max\{(\varphi+1)|q_2| + \varphi|p_2|, |r_2|\} \end{array}\right\}}{\sqrt{p_2^2 + q_2^2 + r_2^2}}$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} \mu(OY) &= \frac{\frac{\varphi}{2}\max\left\{\begin{array}{l} |p_1| + (2\varphi - 3)\max\{(\varphi+1)|-r_1| + \varphi|-q_1|, |p_1|\}, \\ |-q_1| + (2\varphi - 3)\max\{(\varphi+1)|p_1| + \varphi|-r_1|, |-q_1|\}, \\ |-r_1| + (2\varphi - 3)\max\{(\varphi+1)|-q_1| + \varphi|p_1|, |-r_1|\} \end{array}\right\}}{\sqrt{p_1^2 + (-q_1)^2 + (-r_1)^2}} \\ &= \frac{\frac{\varphi}{2}\max\left\{\begin{array}{l} |p_1| + (2\varphi - 3)\max\{(\varphi+1)|r_1| + \varphi|q_1|, |p_1|\}, \\ |q_1| + (2\varphi - 3)\max\{(\varphi+1)|p_1| + \varphi|r_1|, |q_1|\}, \\ |r_1| + (2\varphi - 3)\max\{(\varphi+1)|q_1| + \varphi|p_1|, |r_1|\} \end{array}\right\}}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2 + r_1^2}} \\ &= \mu(OX) \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde diğer dönme eksenleri ve dönme açıları için de $\mu(OX) = \mu(OY)$ eşitliği gösterilebilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 6.5 *R_{RT}, orijinden geçen doğruları eksen kabul eden dönmelerin kümesi olmak üzere, tam olarak elli dokuz Öklidyen dönmeden oluşur.*

Şekil6.5 ve Şekil6.6 daki tablolarda dönme hareketleri (dönüşümleri) sonucunda rhombic triacontahedron birim küresinin köşe noktalarının görüntüleri verilmiştir.

Dönme Ekseni doğrultu vektörleri	Açılar	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8	V_9	V_{10}	V_{11}	V_{12}	V_{13}	V_{14}	V_{15}
$(0,1,\varphi-1)$	$\theta=2\pi/5$	V_5	V_4	V_1	V_8	V_{10}	V_2	V_3	V_{11}	V_9	V_7	V_6	V_{12}	V_{25}	V_{20}	V_{17}
	$\theta=4\pi/5$	V_{10}	V_8	V_5	V_{11}	V_7	V_4	V_1	V_6	V_9	V_3	V_2	V_{12}	V_{21}	V_{31}	V_{26}
	$\theta=6\pi/5$	V_7	V_{11}	V_{10}	V_6	V_3	V_8	V_5	V_2	V_9	V_1	V_4	V_{12}	V_{23}	V_{27}	V_{30}
	$\theta=8\pi/5$	V_3	V_6	V_7	V_2	V_1	V_{11}	V_{10}	V_4	V_9	V_5	V_8	V_{12}	V_{29}	V_{18}	V_{19}
$(0,-1,\varphi-1)$	$\theta=2\pi/5$	V_6	V_4	V_1	V_7	V_2	V_{12}	V_9	V_3	V_5	V_{10}	V_{11}	V_8	V_{17}	V_{30}	V_{27}
	$\theta=4\pi/5$	V_{12}	V_7	V_6	V_9	V_4	V_8	V_5	V_1	V_2	V_{10}	V_{11}	V_3	V_{28}	V_{23}	V_{22}
	$\theta=6\pi/5$	V_8	V_9	V_{12}	V_5	V_7	V_3	V_2	V_6	V_4	V_{10}	V_{11}	V_1	V_{32}	V_{21}	V_{24}
	$\theta=8\pi/5$	V_3	V_5	V_8	V_2	V_9	V_1	V_4	V_{12}	V_7	V_{10}	V_{11}	V_6	V_{19}	V_{26}	V_{31}
$(1,\varphi-1,0)$	$\theta=2\pi/5$	V_1	V_{10}	V_{11}	V_4	V_9	V_5	V_8	V_{12}	V_3	V_7	V_6	V_2	V_{15}	V_{30}	V_{27}
	$\theta=4\pi/5$	V_1	V_7	V_6	V_4	V_3	V_9	V_{12}	V_2	V_{11}	V_8	V_5	V_{10}	V_{27}	V_{20}	V_{17}
	$\theta=6\pi/5$	V_1	V_8	V_5	V_4	V_{11}	V_3	V_2	V_{10}	V_6	V_{12}	V_9	V_7	V_{17}	V_{32}	V_{25}
	$\theta=8\pi/5$	V_1	V_{12}	V_9	V_4	V_6	V_{11}	V_{10}	V_7	V_5	V_2	V_3	V_8	V_{25}	V_{16}	V_{13}
$(-1,\varphi-1,0)$	$\theta=2\pi/5$	V_{11}	V_2	V_3	V_{10}	V_6	V_{12}	V_9	V_7	V_1	V_5	V_8	V_4	V_{15}	V_{26}	V_{31}
	$\theta=4\pi/5$	V_8	V_2	V_3	V_5	V_{12}	V_4	V_1	V_9	V_{11}	V_6	V_7	V_{10}	V_{31}	V_{18}	V_{19}
	$\theta=6\pi/5$	V_7	V_2	V_3	V_6	V_4	V_{10}	V_{11}	V_1	V_8	V_{12}	V_9	V_5	V_{19}	V_{28}	V_{29}
	$\theta=8\pi/5$	V_9	V_2	V_3	V_{12}	V_{10}	V_5	V_8	V_{11}	V_7	V_4	V_1	V_6	V_{29}	V_{16}	V_{13}
$(1,0,\varphi)$	$\theta=2\pi/5$	V_6	V_{10}	V_{11}	V_7	V_5	V_2	V_3	V_8	V_1	V_9	V_{12}	V_4	V_{27}	V_{23}	V_{22}
	$\theta=4\pi/5$	V_2	V_9	V_{12}	V_3	V_5	V_{10}	V_{11}	V_8	V_6	V_1	V_4	V_7	V_{28}	V_{13}	V_{16}
	$\theta=6\pi/5$	V_{10}	V_1	V_4	V_{11}	V_5	V_9	V_{12}	V_8	V_2	V_6	V_7	V_3	V_{14}	V_{27}	V_{30}
	$\theta=8\pi/5$	V_9	V_6	V_7	V_{12}	V_5	V_1	V_4	V_8	V_{10}	V_2	V_3	V_{11}	V_{23}	V_{28}	V_{29}
$(-1,0,\varphi)$	$\theta=2\pi/5$	V_{11}	V_5	V_8	V_{10}	V_1	V_6	V_7	V_4	V_3	V_9	V_{12}	V_2	V_{31}	V_{21}	V_{24}
	$\theta=4\pi/5$	V_{12}	V_1	V_4	V_9	V_{11}	V_6	V_7	V_{10}	V_8	V_3	V_2	V_5	V_{32}	V_{13}	V_{16}
	$\theta=6\pi/5$	V_2	V_{11}	V_{10}	V_3	V_{12}	V_6	V_7	V_9	V_4	V_8	V_5	V_1	V_{14}	V_{31}	V_{26}
	$\theta=8\pi/5$	V_5	V_{12}	V_9	V_8	V_2	V_6	V_7	V_3	V_{10}	V_4	V_1	V_{11}	V_{21}	V_{32}	V_{25}
$(1,0,0)$	$\theta=\pi$	V_2	V_1	V_4	V_3	V_6	V_5	V_8	V_7	V_{12}	V_{11}	V_{10}	V_9	V_{16}	V_{15}	V_{14}
$(0,1,0)$	$\theta=\pi$	V_4	V_3	V_2	V_1	V_7	V_8	V_5	V_6	V_{10}	V_9	V_{12}	V_{11}	V_{14}	V_{13}	V_{16}
$(0,0,1)$	$\theta=\pi$	V_3	V_4	V_1	V_2	V_8	V_7	V_6	V_5	V_{11}	V_{12}	V_9	V_{10}	V_{15}	V_{16}	V_{13}
$(\varphi-1,1,\varphi)$	$\theta=\pi$	V_9	V_8	V_5	V_{12}	V_3	V_7	V_6	V_2	V_1	V_{11}	V_{10}	V_4	V_{25}	V_{24}	V_{21}
$(\varphi-1,1,-\varphi)$	$\theta=\pi$	V_8	V_{10}	V_{11}	V_5	V_4	V_7	V_6	V_1	V_{12}	V_2	V_3	V_9	V_{24}	V_{26}	V_{31}
$(\varphi-1,-1,\varphi)$	$\theta=\pi$	V_{11}	V_7	V_6	V_{10}	V_8	V_3	V_2	V_5	V_{12}	V_4	V_1	V_9	V_{22}	V_{30}	V_{27}
$(\varphi-1,-1,-\varphi)$	$\theta=\pi$	V_7	V_{12}	V_9	V_6	V_8	V_4	V_1	V_5	V_3	V_{11}	V_{10}	V_2	V_{29}	V_{22}	V_{23}
$(1,\varphi,\varphi-1)$	$\theta=\pi$	V_{10}	V_3	V_2	V_{11}	V_9	V_7	V_6	V_{12}	V_5	V_1	V_4	V_8	V_{26}	V_{15}	V_{14}
$(1,-\varphi,\varphi-1)$	$\theta=\pi$	V_{12}	V_3	V_2	V_9	V_8	V_{11}	V_{10}	V_5	V_4	V_7	V_6	V_1	V_{16}	V_{29}	V_{28}
$(-1,\varphi,\varphi-1)$	$\theta=\pi$	V_4	V_{11}	V_{10}	V_1	V_8	V_{12}	V_9	V_5	V_7	V_3	V_2	V_6	V_{30}	V_{15}	V_{14}
$(-1,-\varphi,\varphi-1)$	$\theta=\pi$	V_4	V_9	V_{12}	V_1	V_{10}	V_7	V_6	V_{11}	V_2	V_5	V_8	V_3	V_{16}	V_{25}	V_{32}
$(\varphi,\varphi-1,1)$	$\theta=\pi$	V_5	V_3	V_2	V_8	V_1	V_9	V_{12}	V_4	V_6	V_{11}	V_{10}	V_7	V_{18}	V_{31}	V_{26}
$(\varphi,\varphi-1,-1)$	$\theta=\pi$	V_4	V_5	V_8	V_1	V_2	V_{10}	V_{11}	V_3	V_{12}	V_6	V_7	V_9	V_{32}	V_{17}	V_{20}
$(-\varphi,\varphi-1,1)$	$\theta=\pi$	V_4	V_6	V_7	V_1	V_{12}	V_2	V_3	V_9	V_8	V_{11}	V_{10}	V_5	V_{20}	V_{27}	V_{30}
$(-\varphi,\varphi-1,-1)$	$\theta=\pi$	V_6	V_3	V_2	V_7	V_{11}	V_1	V_4	V_{10}	V_{12}	V_8	V_5	V_9	V_{28}	V_{19}	V_{18}
$(1,1,1)$	$\theta=2\pi/3$	V_5	V_7	V_6	V_8	V_9	V_{10}	V_{11}	V_{12}	V_1	V_3	V_2	V_4	V_{17}	V_{19}	V_{18}
	$\theta=4\pi/3$	V_9	V_{11}	V_{10}	V_{12}	V_1	V_3	V_2	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8	V_{21}	V_{22}	V_{23}
(-1,1,1)	$\theta=2\pi/3$	V_{10}	V_{12}	V_9	V_{11}	V_4	V_2	V_3	V_1	V_7	V_8	V_5	V_6	V_{23}	V_{24}	V_{21}
	$\theta=4\pi/3$	V_8	V_6	V_7	V_5	V_{11}	V_{12}	V_9	V_{10}	V_3	V_1	V_4	V_2	V_{19}	V_{17}	V_{20}
(1,-1,1)	$\theta=2\pi/3$	V_{11}	V_9	V_{12}	V_{10}	V_3	V_1	V_4	V_2	V_8	V_7	V_6	V_5	V_{24}	V_{23}	V_{22}
	$\theta=4\pi/3$	V_6	V_8	V_5	V_7	V_{12}	V_{11}	V_{10}	V_9	V_2	V_4	V_1	V_3	V_{18}	V_{20}	V_{17}
(1,1,-1)	$\theta=2\pi/3$	V_{12}	V_{10}	V_{11}	V_9	V_2	V_4	V_1	V_3	V_6	V_5	V_8	V_7	V_{22}	V_{21}	V_{24}
	$\theta=4\pi/3$	V_7	V_5	V_8	V_6	V_{10}	V_9	V_{12}	V_{11}	V_4	V_2	V_3	V_1	V_{20}	V_{18}	V_{19}
$(0,\varphi-1,\varphi)$	$\theta=2\pi/3$	V_9	V_4	V_1	V_{12}	V_7	V_{10}	V_{11}	V_6	V_3	V_8	V_5	V_2	V_{13}	V_{32}	V_{25}
	$\theta=4\pi/3$	V_3	V_{12}	V_9	V_2	V_{11}	V_8	V_5	V_{10}	V_1	V_6	V_7	V_4	V_{13}	V_{28}	V_{29}
$(0,\varphi-1,-\varphi)$	$\theta=2\pi/3$	V_{11}	V_4	V_1	V_{10}	V_{12}	V_8	V_5	V_9	V_6	V_2	V_3	V_7	V_{27}	V_{14}	V_{15}
	$\theta=4\pi/3$	V_3	V_{10}	V_{11}	V_2	V_7	V_9	V_{12}	V_6	V_8	V_4	V_1	V_5	V_{31}	V_{14}	V_{15}
$(\varphi-1,\varphi,0)$	$\theta=2\pi/3$	V_2	V_7	V_6	V_3	V_{10}	V_4	V_1	V_{11}	V_5	V_9	V_{12}	V_8	V_{18}	V_{29}	V_{28}
	$\theta=4\pi/3$	V_7	V_1	V_4	V_6	V_9	V_3	V_2	V_{12}	V_{10}	V_5	V_8	V_{11}	V_{30}	V_{17}	V_{20}
$(\varphi-1,-\varphi,0)$	$\theta=2\pi/3$	V_8	V_1	V_4	V_5	V_3	V_{11}	V_{10}	V_2	V_7	V_9	V_{12}	V_6	V_{20}	V_{25}	V_{32}
	$\theta=4\pi/3$	V_2	V_8	V_5	V_3	V_4	V_{12}	V_9	V_1	V_{10}	V_7	V_6	V_{11}	V_{26}	V_{19}	V_{18}
$(\varphi,0,\varphi-1)$	$\theta=2\pi/3$	V_6	V_9	V_{12}	V_7	V_1	V_5	V_8	V_4	V_{11}	V_3	V_2	V_{10}	V_{22}	V_{29}	V_{28}
	$\theta=4\pi/3$	V_5	V_{11}	V_{10}	V_8	V_6	V_1	V_4	V_7	V_2	V_{12}	V_9	V_3	V_{26}	V_{24}	V_{21}
$(-\varphi,0,\varphi-1)$	$\theta=2\pi/3$	V_{10}	V_6	V_7	V_{11}	V_2	V_5	V_8	V_3	V_4	V_{12}	V_9	V_1	V_{30}	V_{22}	V_{23}
	$\theta=4\pi/3$	V_{12}	V_5	V_8	V_9	V_6	V_2	V_3	V_7	V_{11}	V_1	V_4	V_{10}	V_{24}	V_{25}	V_{32}

Şekil 6.5 $\mathbb{R}^3_{RT}$ de Dönme Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri

Dönme Ekseni doğrultu vektörleri	Açılar	V_{16}	V_{17}	V_{18}	V_{19}	V_{20}	V_{21}	V_{22}	V_{23}	V_{24}	V_{25}	V_{26}	V_{27}	V_{28}	V_{29}	V_{30}	V_{31}	V_{32}
$(0,1,\varphi-1)$	$\theta=2\pi/5$	V_{32}	V_{26}	V_{14}	V_{15}	V_{31}	V_{23}	V_{28}	V_{29}	V_{22}	V_{21}	V_{30}	V_{18}	V_{16}	V_{13}	V_{19}	V_{27}	V_{24}
	$\theta=4\pi/5$	V_{24}	V_{30}	V_{20}	V_{17}	V_{27}	V_{29}	V_{16}	V_{13}	V_{28}	V_{23}	V_{19}	V_{14}	V_{32}	V_{25}	V_{15}	V_{18}	V_{22}
	$\theta=6\pi/5$	V_{22}	V_{19}	V_{31}	V_{26}	V_{18}	V_{13}	V_{32}	V_{25}	V_{16}	V_{29}	V_{15}	V_{20}	V_{24}	V_{21}	V_{17}	V_{14}	V_{28}
	$\theta=8\pi/5$	V_{28}	V_{15}	V_{27}	V_{30}	V_{14}	V_{25}	V_{24}	V_{21}	V_{32}	V_{13}	V_{17}	V_{31}	V_{22}	V_{23}	V_{26}	V_{20}	V_{16}
$(0,-1,\varphi-1)$	$\theta=2\pi/5$	V_{20}	V_{28}	V_{16}	V_{13}	V_{29}	V_{26}	V_{24}	V_{21}	V_{31}	V_{18}	V_{14}	V_{22}	V_{32}	V_{25}	V_{23}	V_{15}	V_{19}
	$\theta=4\pi/5$	V_{29}	V_{32}	V_{20}	V_{17}	V_{25}	V_{14}	V_{31}	V_{26}	V_{15}	V_{16}	V_{30}	V_{24}	V_{19}	V_{18}	V_{21}	V_{27}	V_{13}
	$\theta=6\pi/5$	V_{25}	V_{19}	V_{29}	V_{28}	V_{18}	V_{30}	V_{15}	V_{14}	V_{27}	V_{20}	V_{23}	V_{31}	V_{13}	V_{16}	V_{26}	V_{22}	V_{17}
	$\theta=8\pi/5$	V_{18}	V_{13}	V_{25}	V_{32}	V_{16}	V_{23}	V_{27}	V_{30}	V_{22}	V_{29}	V_{21}	V_{15}	V_{17}	V_{20}	V_{14}	V_{24}	V_{28}
$(1,\varphi-1,0)$	$\theta=2\pi/5$	V_{14}	V_{25}	V_{21}	V_{24}	V_{32}	V_{29}	V_{18}	V_{19}	V_{28}	V_{13}	V_{23}	V_{17}	V_{26}	V_{31}	V_{20}	V_{22}	V_{16}
	$\theta=4\pi/5$	V_{30}	V_{13}	V_{29}	V_{28}	V_{16}	V_{31}	V_{21}	V_{24}	V_{26}	V_{15}	V_{19}	V_{25}	V_{23}	V_{22}	V_{32}	V_{18}	V_{14}
	$\theta=6\pi/5$	V_{20}	V_{15}	V_{31}	V_{26}	V_{14}	V_{22}	V_{29}	V_{28}	V_{23}	V_{27}	V_{24}	V_{13}	V_{19}	V_{18}	V_{16}	V_{21}	V_{30}
	$\theta=8\pi/5$	V_{32}	V_{27}	V_{22}	V_{23}	V_{30}	V_{18}	V_{31}	V_{26}	V_{19}	V_{17}	V_{28}	V_{15}	V_{24}	V_{21}	V_{14}	V_{29}	V_{20}
$(-1,\varphi-1,0)$	$\theta=2\pi/5$	V_{14}	V_{22}	V_{28}	V_{29}	V_{23}	V_{17}	V_{32}	V_{25}	V_{20}	V_{27}	V_{18}	V_{24}	V_{16}	V_{13}	V_{21}	V_{19}	V_{30}
	$\theta=4\pi/5$	V_{26}	V_{32}	V_{16}	V_{13}	V_{25}	V_{22}	V_{30}	V_{27}	V_{23}	V_{24}	V_{28}	V_{20}	V_{14}	V_{15}	V_{17}	V_{29}	V_{21}
	$\theta=6\pi/5$	V_{18}	V_{30}	V_{14}	V_{15}	V_{27}	V_{32}	V_{21}	V_{24}	V_{25}	V_{20}	V_{16}	V_{23}	V_{26}	V_{31}	V_{22}	V_{13}	V_{17}
	$\theta=8\pi/5$	V_{28}	V_{21}	V_{26}	V_{31}	V_{24}	V_{30}	V_{17}	V_{20}	V_{27}	V_{23}	V_{14}	V_{25}	V_{18}	V_{19}	V_{32}	V_{15}	V_{22}
$(1,0,\varphi)$	$\theta=2\pi/5$	V_{30}	V_{18}	V_{26}	V_{31}	V_{19}	V_{25}	V_{16}	V_{13}	V_{32}	V_{17}	V_{21}	V_{28}	V_{14}	V_{15}	V_{29}	V_{24}	V_{20}
	$\theta=4\pi/5$	V_{29}	V_{26}	V_{21}	V_{24}	V_{31}	V_{17}	V_{30}	V_{27}	V_{20}	V_{18}	V_{25}	V_{14}	V_{23}	V_{22}	V_{15}	V_{32}	V_{19}
	$\theta=6\pi/5$	V_{15}	V_{21}	V_{25}	V_{32}	V_{24}	V_{18}	V_{29}	V_{28}	V_{19}	V_{26}	V_{17}	V_{23}	V_{13}	V_{16}	V_{22}	V_{20}	V_{31}
	$\theta=8\pi/5$	V_{22}	V_{25}	V_{17}	V_{20}	V_{32}	V_{26}	V_{15}	V_{14}	V_{31}	V_{21}	V_{18}	V_{13}	V_{27}	V_{30}	V_{16}	V_{19}	V_{24}
$(-1,0,\varphi)$	$\theta=2\pi/5$	V_{26}	V_{27}	V_{17}	V_{20}	V_{30}	V_{13}	V_{28}	V_{29}	V_{16}	V_{15}	V_{25}	V_{22}	V_{18}	V_{19}	V_{23}	V_{32}	V_{14}
	$\theta=4\pi/5$	V_{25}	V_{22}	V_{27}	V_{30}	V_{23}	V_{31}	V_{18}	V_{19}	V_{26}	V_{24}	V_{15}	V_{28}	V_{17}	V_{20}	V_{29}	V_{14}	V_{21}
	$\theta=6\pi/5$	V_{15}	V_{28}	V_{22}	V_{23}	V_{29}	V_{32}	V_{17}	V_{20}	V_{25}	V_{16}	V_{24}	V_{18}	V_{27}	V_{30}	V_{19}	V_{21}	V_{13}
	$\theta=8\pi/5$	V_{24}	V_{18}	V_{28}	V_{29}	V_{19}	V_{14}	V_{27}	V_{30}	V_{15}	V_{26}	V_{16}	V_{17}	V_{22}	V_{23}	V_{20}	V_{13}	V_{31}
$(1,0,0)$	$\theta=\pi$	V_{13}	V_{18}	V_{17}	V_{20}	V_{19}	V_{22}	V_{21}	V_{24}	V_{23}	V_{28}	V_{27}	V_{26}	V_{25}	V_{32}	V_{31}	V_{30}	V_{29}
$(0,1,0)$	$\theta=\pi$	V_{15}	V_{20}	V_{19}	V_{18}	V_{17}	V_{23}	V_{24}	V_{21}	V_{22}	V_{30}	V_{29}	V_{32}	V_{31}	V_{26}	V_{25}	V_{28}	V_{27}
$(0,0,1)$	$\theta=\pi$	V_{14}	V_{19}	V_{20}	V_{17}	V_{18}	V_{24}	V_{23}	V_{22}	V_{21}	V_{31}	V_{32}	V_{29}	V_{30}	V_{27}	V_{28}	V_{25}	V_{26}
$(\varphi-1,1,\varphi)$	$\theta=\pi$	V_{32}	V_{29}	V_{19}	V_{18}	V_{28}	V_{15}	V_{30}	V_{27}	V_{14}	V_{13}	V_{31}	V_{23}	V_{20}	V_{17}	V_{22}	V_{26}	V_{16}
$(\varphi-1,1,-\varphi)$	$\theta=\pi$	V_{21}	V_{20}	V_{30}	V_{27}	V_{17}	V_{16}	V_{29}	V_{28}	V_{13}	V_{32}	V_{14}	V_{19}	V_{23}	V_{22}	V_{18}	V_{15}	V_{25}
$(\varphi-1,-1,\varphi)$	$\theta=\pi$	V_{23}	V_{31}	V_{19}	V_{18}	V_{26}	V_{32}	V_{13}	V_{16}	V_{25}	V_{24}	V_{20}	V_{15}	V_{29}	V_{28}	V_{14}	V_{17}	V_{21}
$(\varphi-1,-1,-\varphi)$	$\theta=\pi$	V_{28}	V_{20}	V_{32}	V_{25}	V_{17}	V_{31}	V_{14}	V_{15}	V_{26}	V_{19}	V_{24}	V_{30}	V_{16}	V_{13}	V_{27}	V_{21}	V_{18}
$(1,\varphi,\varphi-1)$	$\theta=\pi$	V_{31}	V_{23}	V_{29}	V_{28}	V_{22}	V_{25}	V_{20}	V_{17}	V_{32}	V_{21}	V_{13}	V_{30}	V_{19}	V_{18}	V_{27}	V_{16}	V_{24}
$(1,-\varphi,\varphi-1)$	$\theta=\pi$	V_{13}	V_{24}	V_{31}	V_{26}	V_{21}	V_{20}	V_{27}	V_{30}	V_{17}	V_{32}	V_{19}	V_{22}	V_{15}	V_{14}	V_{23}	V_{18}	V_{25}
$(-1,\varphi,\varphi-1)$	$\theta=\pi$	V_{27}	V_{32}	V_{24}	V_{21}	V_{25}	V_{19}	V_{28}	V_{29}	V_{18}	V_{20}	V_{31}	V_{16}	V_{22}	V_{23}	V_{13}	V_{26}	V_{17}
$(-1,-\varphi,\varphi-1)$	$\theta=\pi$	V_{13}	V_{30}	V_{23}	V_{22}	V_{27}	V_{26}	V_{19}	V_{18}	V_{31}	V_{14}	V_{21}	V_{20}	V_{29}	V_{28}	V_{17}	V_{24}	V_{15}
$(\varphi,\varphi-1,1)$	$\theta=\pi$	V_{19}	V_{25}	V_{13}	V_{16}	V_{32}	V_{27}	V_{23}	V_{22}	V_{30}	V_{17}	V_{15}	V_{21}	V_{29}	V_{28}	V_{24}	V_{14}	V_{20}
$(\varphi,\varphi-1,-1)$	$\theta=\pi$	V_{25}	V_{14}	V_{26}	V_{31}	V_{15}	V_{28}	V_{23}	V_{22}	V_{29}	V_{16}	V_{18}	V_{30}	V_{21}	V_{24}	V_{27}	V_{19}	V_{13}
$(-\varphi,\varphi-1,1)$	$\theta=\pi$	V_{17}	V_{16}	V_{28}	V_{29}	V_{13}	V_{24}	V_{26}	V_{31}	V_{21}	V_{32}	V_{22}	V_{14}	V_{18}	V_{19}	V_{15}	V_{23}	V_{25}
$(-\varphi,\varphi-1,-1)$	$\theta=\pi$	V_{29}	V_{27}	V_{15}	V_{14}	V_{30}	V_{24}	V_{25}	V_{32}	V_{21}	V_{22}	V_{31}	V_{17}	V_{13}	V_{16}	V_{20}	V_{26}	V_{23}
$(1,1,1)$	$\theta=2\pi/3$	V_{20}	V_{21}	V_{23}	V_{22}	V_{24}	V_{13}	V_{14}	V_{15}	V_{16}	V_{25}	V_{29}	V_{26}	V_{30}	V_{27}	V_{31}	V_{28}	V_{32}
	$\theta=4\pi/3$	V_{24}	V_{13}	V_{15}	V_{14}	V_{16}	V_{17}	V_{19}	V_{18}	V_{20}	V_{25}	V_{27}	V_{29}	V_{31}	V_{26}	V_{28}	V_{30}	V_{32}
(-1,1,1)	$\theta=2\pi/3$	V_{22}	V_{14}	V_{16}	V_{13}	V_{15}	V_{20}	V_{18}	V_{19}	V_{17}	V_{30}	V_{32}	V_{26}	V_{28}	V_{29}	V_{31}	V_{25}	V_{27}
	$\theta=4\pi/3$	V_{18}	V_{24}	V_{22}	V_{23}	V_{21}	V_{15}	V_{16}	V_{13}	V_{14}	V_{31}	V_{27}	V_{32}	V_{28}	V_{29}	V_{25}	V_{30}	V_{26}
(1,-1,1)	$\theta=2\pi/3$	V_{21}	V_{15}	V_{13}	V_{16}	V_{14}	V_{19}	V_{17}	V_{20}	V_{18}	V_{31}	V_{29}	V_{27}	V_{25}	V_{32}	V_{30}	V_{28}	V_{26}
	$\theta=4\pi/3$	V_{19}	V_{22}	V_{24}	V_{21}	V_{23}	V_{16}	V_{15}	V_{14}	V_{13}	V_{28}	V_{32}	V_{27}	V_{31}	V_{26}	V_{30}	V_{25}	V_{29}
(1,1,-1)	$\theta=2\pi/3$	V_{23}	V_{16}	V_{14}	V_{15}	V_{13}	V_{18}	V_{20}	V_{17}	V_{19}	V_{28}	V_{26}	V_{32}	V_{30}	V_{27}	V_{25}	V_{31}	V_{29}
	$\theta=4\pi/3$	V_{17}	V_{23}	V_{21}	V_{24}	V_{22}	V_{14}	V_{13}	V_{16}	V_{15}	V_{30}	V_{26}	V_{29}	V_{25}	V_{32}	V_{28}	V_{31}	V_{27}
$(0,\varphi-1,\varphi)$	$\theta=2\pi/3$	V_{16}	V_{23}	V_{30}	V_{27}	V_{22}	V_{19}	V_{26}	V_{31}	V_{18}	V_{29}	V_{20}	V_{21}	V_{14}	V_{15}	V_{24}	V_{17}	V_{28}
	$\theta=4\pi/3$	V_{16}	V_{31}	V_{24}	V_{21}	V_{26}	V_{27}	V_{20}	V_{17}	V_{30}	V_{15}	V_{22}	V_{19}	V_{32}	V_{25}	V_{18}	V_{23}	V_{14}
$(0,\varphi-1,-\varphi)$	$\theta=2\pi/3$	V_{30}	V_{24}	V_{32}	V_{25}	V_{21}	V_{28}	V_{19}	V_{18}	V_{29}	V_{22}	V_{16}	V_{31}	V_{20}	V_{17}	V_{26}	V_{13}	V_{23}
	$\theta=4\pi/3$	V_{26}	V_{29}	V_{23}	V_{22}	V_{28}	V_{20}	V_{25}	V_{32}	V_{17}	V_{19}	V_{30}	V_{13}	V_{21}	V_{24}	V_{16}	V_{27}	V_{18}
$(\varphi-1,\varphi,0)$	$\theta=2\pi/3$	V_{19}	V_{14}	V_{30}	V_{27}	V_{15}	V_{21}	V_{32}	V_{25}	V_{24}	V_{26}	V_{23}	V_{16}	V_{20}	V_{17}	V_{13}	V_{22}	V_{31}
	$\theta=4\pi/3$	V_{27}	V_{29}	V_{13}	V_{16}	V_{28}	V_{21}	V_{31}	V_{26}	V_{24}	V_{23}	V_{25}	V_{19}	V_{15}	V_{14}	V_{18}	V_{32}	V_{22}
$(\varphi-1,-\varphi,0)$	$\theta=2\pi/3$	V_{17}	V_{31}	V_{15}	V_{14}	V_{26}	V_{29}	V_{22}	V_{23}	V_{28}	V_{19}	V_{13}	V_{24}	V_{27}	V_{30}	V_{21}	V_{16}	V_{18}
	$\theta=4\pi/3$	V_{31}	V_{16}	V_{32}	V_{25}	V_{13}	V_{30}	V_{22}	V_{23}	V_{27}	V_{14}	V_{20}	V_{28}	V_{24}	V_{21}	V_{29}	V_{17}	V_{15}
$(\varphi,0,\varphi-1)$	$\theta=2\pi/3$	V_{23}	V_{17}	V_{25}	V_{32}	V_{20}	V_{15}	V_{26}	V_{31}	V_{14}	V_{27}	V_{13}	V_{18}	V_{21}	V_{24}	V_{19}	V_{16}	V_{30}
	$\theta=4\pi/3$	V_{31}	V_{17}	V_{27}	V_{30}	V_{20}	V_{28}	V_{13}	V_{16}	V_{29}	V_{18}	V_{22}	V_{25}	V_{15}	V_{14}	V_{32}	V_{23}	V_{19}
$(-\varphi,0,\varphi-1)$	$\theta=2\pi/3$	V_{27}	V_{26}	V_{18}	V_{19}	V_{31}	V_{16}	V_{25}	V_{32}	V_{13}	V_{14}	V_{28}	V_{21}	V_{17}	V_{20}	V_{24}	V_{29}	V_{15}
	$\theta=4\pi/3$	V_{21}	V_{28}	V_{18}	V_{19}	V_{29}	V_{27}	V_{14}	V_{15}	V_{30}	V_{22}	V_{17}	V_{16}	V_{26}	V_{31}	V_{13}	V_{20}	V_{23}

Şekil 6.6 $\mathbb{R}^3_{RT}$ de Dönme Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri Devamı

Yardımcı Teorem 6.3 *(x, y, z) noktasını $(-x, -y, -z)$ noktasına dönüştüren dönüşüm olan $O = (0, 0, 0)$ orijine göre σ_0 inversiyonu $\mathbb{R}^3_{RT}$ ın bir izometrisidir.*

Şekil6.7 deki tablolarda inversiyon hareketi(dönüşümü) sonrasında birim kürenin köşe noktalarının görüntüleri verilmiştir.

İnversiyon Altında Nokta Görüntüleri	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8	V_9	V_{10}	V_{11}	V_{12}	V_{13}	V_{14}	V_{15}	V_{16}
$O = (0,0,0)$ σ_0	V_4	V_3	V_2	V_1	V_8	V_7	V_6	V_5	V_{12}	V_{11}	V_{10}	V_9	V_{16}	V_{15}	V_{14}	V_{13}
İnversiyon Altında Nokta Görüntüleri	V_{17}	V_{18}	V_{19}	V_{20}	V_{21}	V_{22}	V_{23}	V_{24}	V_{25}	V_{26}	V_{27}	V_{28}	V_{29}	V_{30}	V_{31}	V_{32}
$O = (0,0,0)$ σ_0	V_{20}	V_{19}	V_{18}	V_{17}	V_{24}	V_{23}	V_{22}	V_{21}	V_{32}	V_{31}	V_{30}	V_{29}	V_{28}	V_{27}	V_{26}	V_{25}

Şekil 6.7 $\mathbb{R}^3_{RT}$ de σ_O İnversiyonu Altında Köşe Noktaların Görüntüleri

Önerme 6.4 *$d_{RT}-$ uzaklığını invaryant bırakan, orijine göre dönme-yansımaların tümü orijine göre inversiyon hareketine (dönüşümüne) eşittir.*

İspat *$r_\theta \in R_{RT}$, Γ ve Δ , Π ye dik düzlemler olmak üzere bir dönme-yansıma $\rho := \sigma_\Pi \sigma_\Delta \sigma_\Gamma = \sigma_\Pi r_\theta$ biçiminde yazılabilir. O halde dönme ekseni yansıma düzlemine dik olmak zorundadır. Bu durumda Π düzlemi için Önerme 5.3 den otuz bir dönme ekseninden on beş durum incelenmelidir. Çünkü D_1 ve D_3 deki dönme eksenlerinden hiçbirisi Sonuç 5.4 de verilen yansıma düzlemlerinden herhangi birine dik değildir. Eğer Π düzlemi olarak $x = 0$ düzlemi alınırsa r_θ nın birim yön vektörü $(1, 0, 0)$ olur ve*

$$\rho := \sigma_\Pi r(x, y, z) = (-x, ycos\theta - zsin\theta, ysin\theta + zcos\theta)$$

elde edilir. $V_1 = (\varphi - 1, 0, 1)$ ve $V_{25} = (\varphi - 1, \varphi - 1, \varphi - 1)$ köşe noktaları için

$$\rho(\varphi - 1, 0, 1) = (1 - \varphi, \sin\theta, -\cos\theta) \text{ ve}$$
$$\rho(\varphi - 1, \varphi - 1, \varphi - 1) = (1 - \varphi, (\varphi - 1)\cos\theta - (\varphi - 1)\sin\theta, (\varphi - 1)\sin\theta + (\varphi - 1)\cos\theta)$$

bulunur.

$d_{RT}(V_1, V_{25}) = \varphi - 1$ olduğundan ve ρ uzaklığı koruyacağından $d_{RT}(\rho(V_1), \rho(V_{25})) = \varphi - 1$ olmalıdır. Böylece

$\alpha_2 = -(\varphi - 1)\cos\theta + (\varphi - 2)\sin\theta$ *ve* $\alpha_3 = -(\varphi - 1)\sin\theta - (\varphi - 2)\cos\theta$ *olmak üzere*

$$d_{RT}(\rho(V_1), \rho(V_{25})) = \frac{\varphi}{2}\max\left\{\begin{array}{l} (2\varphi - 3)\max\{(\varphi + 1)|\alpha_3| + \varphi|\alpha_2|\}, \\ |\alpha_2| + (2\varphi - 3)\max\{\varphi|\alpha_3|, |\alpha_2|\}, \\ |\alpha_3| + (2\varphi - 3)\max\{(\varphi + 1)|\alpha_2|, |\alpha_3|\} \end{array}\right\} = \varphi - 1$$

elde edilir. Bu denklem çözülürse $\theta \in \{0, \pi\}$ *elde edilir. Buradan da kolaylıkla* $\sigma_\Pi r_\pi = \sigma_0$ *olduğu görülebilir. Sonuç olarak bu durumda yeni bir dönme-yansıma yoktur. Benzer şekilde dönme eksenleri bir yansıma düzlemi normali olan* $\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\varphi}{2}, \frac{\varphi-1}{2}\right), \left(\frac{\varphi-1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\varphi}{2}\right), \left(\pm\frac{\varphi}{2}, \frac{\varphi-1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ *vektörleri için de aynı sonuçlar elde edilir.*

Şekil6.8 deki tabloda, bir yansıma düzleminin normali olup, aynı zamanda dönme ekseninin doğrultusu olanlar tespit edilmiş ve bu eksenlere göre dönme-yansıma hareketi (dönüşümü) yapılarak birim kürenin köşe noktalarının bu hareketlere (dönüşümlere) göre görüntüleri verilmiştir.

Yansıma Düzlemi Normali Olan Dönme Ekseni Doğrultu Vektörleri	$(1,0,0)$	$(0,1,0)$	$(0,0,1)$	$(\varphi-1,1,\varphi)$	$(\varphi-1,1,-\varphi)$	$(\varphi-1,-1,\varphi)$	$(\varphi-1,-1,-\varphi)$	$(1,\varphi,\varphi-1)$	$(1,-\varphi,\varphi-1)$	$(-1,\varphi,\varphi-1)$	$(-1,-\varphi,\varphi-1)$	$(\varphi,\varphi-1,1)$	$(\varphi,\varphi-1,-1)$	$(-\varphi,\varphi-1,1)$	$(-\varphi,\varphi-1,-1)$
Açılar	$\theta=\pi$	$\theta=\pi$	$\theta=\pi$	$\theta=\pi$	$\theta=\pi$	$\theta=\pi$	$\theta=\pi$	$\theta=\pi$	$\theta=\pi$	$\theta=\pi$	$\theta=\pi$	$\theta=\pi$	$\theta=\pi$	$\theta=\pi$	$\theta=\pi$
V_1	V_4	V_4	V_4	V_4	V_4	V_4	V_4	V_4	V_4	V_4	V_4	V_4	V_4	V_4	V_4
V_2	V_3	V_3	V_3	V_3	V_3	V_3	V_3	V_3	V_3	V_3	V_3	V_3	V_3	V_3	V_3
V_3	V_2	V_2	V_2	V_2	V_2	V_2	V_2	V_2	V_2	V_2	V_2	V_2	V_2	V_2	V_2
V_4	V_1	V_1	V_1	V_1	V_1	V_1	V_1	V_1	V_1	V_1	V_1	V_1	V_1	V_1	V_1
V_5	V_8	V_8	V_8	V_8	V_8	V_8	V_8	V_8	V_8	V_8	V_8	V_8	V_8	V_8	V_8
V_6	V_7	V_7	V_7	V_7	V_7	V_7	V_7	V_7	V_7	V_7	V_7	V_7	V_7	V_7	V_7
V_7	V_6	V_6	V_6	V_6	V_6	V_6	V_6	V_6	V_6	V_6	V_6	V_6	V_6	V_6	V_6
V_8	V_5	V_5	V_5	V_5	V_5	V_5	V_5	V_5	V_5	V_5	V_5	V_5	V_5	V_5	V_5
V_9	V_{12}	V_{12}	V_{12}	V_{12}	V_{12}	V_{12}	V_{12}	V_{12}	V_{12}	V_{12}	V_{12}	V_{12}	V_{12}	V_{12}	V_{12}
V_{10}	V_{11}	V_{11}	V_{11}	V_{11}	V_{11}	V_{11}	V_{11}	V_{11}	V_{11}	V_{11}	V_{11}	V_{11}	V_{11}	V_{11}	V_{11}
V_{11}	V_{10}	V_{10}	V_{10}	V_{10}	V_{10}	V_{10}	V_{10}	V_{10}	V_{10}	V_{10}	V_{10}	V_{10}	V_{10}	V_{10}	V_{10}
V_{12}	V_9	V_9	V_9	V_9	V_9	V_9	V_9	V_9	V_9	V_9	V_9	V_9	V_9	V_9	V_9
V_{13}	V_{16}	V_{16}	V_{16}	V_{16}	V_{16}	V_{16}	V_{16}	V_{16}	V_{16}	V_{16}	V_{16}	V_{16}	V_{16}	V_{16}	V_{16}
V_{14}	V_{15}	V_{15}	V_{15}	V_{15}	V_{15}	V_{15}	V_{15}	V_{15}	V_{15}	V_{15}	V_{15}	V_{15}	V_{15}	V_{15}	V_{15}
V_{15}	V_{14}	V_{14}	V_{14}	V_{14}	V_{14}	V_{14}	V_{14}	V_{14}	V_{14}	V_{14}	V_{14}	V_{14}	V_{14}	V_{14}	V_{14}
V_{16}	V_{13}	V_{13}	V_{13}	V_{13}	V_{13}	V_{13}	V_{13}	V_{13}	V_{13}	V_{13}	V_{13}	V_{13}	V_{13}	V_{13}	V_{13}
V_{17}	V_{20}	V_{20}	V_{20}	V_{20}	V_{20}	V_{20}	V_{20}	V_{20}	V_{20}	V_{20}	V_{20}	V_{20}	V_{20}	V_{20}	V_{20}
V_{18}	V_{19}	V_{19}	V_{19}	V_{19}	V_{19}	V_{19}	V_{19}	V_{19}	V_{19}	V_{19}	V_{19}	V_{19}	V_{19}	V_{19}	V_{19}
V_{19}	V_{18}	V_{18}	V_{18}	V_{18}	V_{18}	V_{18}	V_{18}	V_{18}	V_{18}	V_{18}	V_{18}	V_{18}	V_{18}	V_{18}	V_{18}
V_{20}	V_{17}	V_{17}	V_{17}	V_{17}	V_{17}	V_{17}	V_{17}	V_{17}	V_{17}	V_{17}	V_{17}	V_{17}	V_{17}	V_{17}	V_{17}
V_{21}	V_{24}	V_{24}	V_{24}	V_{24}	V_{24}	V_{24}	V_{24}	V_{24}	V_{24}	V_{24}	V_{24}	V_{24}	V_{24}	V_{24}	V_{24}
V_{22}	V_{23}	V_{23}	V_{23}	V_{23}	V_{23}	V_{23}	V_{23}	V_{23}	V_{23}	V_{23}	V_{23}	V_{23}	V_{23}	V_{23}	V_{23}
V_{23}	V_{22}	V_{22}	V_{22}	V_{22}	V_{22}	V_{22}	V_{22}	V_{22}	V_{22}	V_{22}	V_{22}	V_{22}	V_{22}	V_{22}	V_{22}
V_{24}	V_{21}	V_{21}	V_{21}	V_{21}	V_{21}	V_{21}	V_{21}	V_{21}	V_{21}	V_{21}	V_{21}	V_{21}	V_{21}	V_{21}	V_{21}
V_{25}	V_{32}	V_{32}	V_{32}	V_{32}	V_{32}	V_{32}	V_{32}	V_{32}	V_{32}	V_{32}	V_{32}	V_{32}	V_{32}	V_{32}	V_{32}
V_{26}	V_{31}	V_{31}	V_{31}	V_{31}	V_{31}	V_{31}	V_{31}	V_{31}	V_{31}	V_{31}	V_{31}	V_{31}	V_{31}	V_{31}	V_{31}
V_{27}	V_{30}	V_{30}	V_{30}	V_{30}	V_{30}	V_{30}	V_{30}	V_{30}	V_{30}	V_{30}	V_{30}	V_{30}	V_{30}	V_{30}	V_{30}
V_{28}	V_{29}	V_{29}	V_{29}	V_{29}	V_{29}	V_{29}	V_{29}	V_{29}	V_{29}	V_{29}	V_{29}	V_{29}	V_{29}	V_{29}	V_{29}
V_{29}	V_{28}	V_{28}	V_{28}	V_{28}	V_{28}	V_{28}	V_{28}	V_{28}	V_{28}	V_{28}	V_{28}	V_{28}	V_{28}	V_{28}	V_{28}
V_{30}	V_{27}	V_{27}	V_{27}	V_{27}	V_{27}	V_{27}	V_{27}	V_{27}	V_{27}	V_{27}	V_{27}	V_{27}	V_{27}	V_{27}	V_{27}
V_{31}	V_{26}	V_{26}	V_{26}	V_{26}	V_{26}	V_{26}	V_{26}	V_{26}	V_{26}	V_{26}	V_{26}	V_{26}	V_{26}	V_{26}	V_{26}
V_{32}	V_{25}	V_{25}	V_{25}	V_{25}	V_{25}	V_{25}	V_{25}	V_{25}	V_{25}	V_{25}	V_{25}	V_{25}	V_{25}	V_{25}	V_{25}

Şekil 6.8 $\mathbb{R}^3_{RT}$ de Dönme Yansıma Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri

Önerme 6.5 *d_{RT} uzaklığını koruyan, orijine göre kırk dört tane dönme-inversiyon vardır.*

İspat *$r_\theta \in R_{RT}$ olmak üzere bir dönme-inversiyon $\rho := \sigma_O\sigma_\Delta\sigma_\Gamma = \sigma_O r_\theta$ biçiminde bileşke olarak yazılabileceğinden Önerme 5.3 den, ispat otuz bir dönme ekseni için verilmelidir. r_θ dönme ekseninin doğrultusu $(0, 1, \varphi - 1)$ ise birim doğrultu vektörü $\left(0, \sqrt{\frac{2+\varphi}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\right)$ olur. Bu durumda*

$$\rho(x,y,z) = \begin{pmatrix} -x\cos\theta + \left(\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\sin\theta\right)y - \left(\sqrt{\frac{2+\varphi}{5}}\sin\theta\right)z, \\ -\left(\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\sin\theta\right)x - \left(\frac{2+\varphi}{5} + \frac{3-\varphi}{5}\cos\theta\right)y - \left(\left(\frac{2\varphi-1}{5}\right)(1-\cos\theta)\right)z, \\ \left(\sqrt{\frac{2+\varphi}{5}}\sin\theta\right)x - \left(\left(\frac{2\varphi-1}{5}\right)(1-\cos\theta)\right)y - \left(\frac{3-\varphi}{5} + \frac{2+\varphi}{5}\cos\theta\right)z \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $V_1 = (\varphi - 1, 0, 1)$ ve $V_{25} = (\varphi - 1, \varphi - 1, \varphi - 1)$ olmak üzere

$$\rho(\varphi-1,0,1) = \begin{pmatrix} -(\varphi-1)\cos\theta - \sqrt{\frac{2+\varphi}{5}}\sin\theta, \\ -\sqrt{\frac{7-4\varphi}{5}}\sin\theta + \frac{1-2\varphi}{5}\cos\theta + \frac{2\varphi-1}{5}, \\ \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\sin\theta - \frac{2+\varphi}{5}\cos\theta - \frac{3-\varphi}{5} \end{pmatrix}$$

$$\rho(\varphi-1,\varphi-1,\varphi-1) = \begin{pmatrix} (\varphi-1)\cos\theta + \left(\sqrt{\frac{7-4\varphi}{5}} - \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\right)\sin\theta, \\ \sqrt{\frac{7-4\varphi}{5}}\sin\theta + \frac{7-4\varphi}{5}\cos\theta - \frac{2+\varphi}{5}, \\ \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\sin\theta + \frac{4-3\varphi}{5}\cos\theta - \frac{2\varphi-1}{5} \end{pmatrix}$$

elde edilir. Burada $d_{RT}(V_1, V_{25})$=$\varphi - 1$ olduğundan ve ρ uzaklığı korumak zorunda olduğundan $d_{RT}(\rho(V_1), \rho(V_{25}))$=$\varphi - 1$ olmalıdır. Bu durumda $\alpha_3 = \frac{2\varphi-6}{5}\cos\theta + \frac{3\varphi-4}{5}$, $\alpha_2 = \frac{6\varphi-8}{5}\cos\theta + \frac{3-\varphi}{5}$ ve $\alpha_1 = \left(\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}} - \sqrt{\frac{2+\varphi}{5}} - \sqrt{\frac{7-4\varphi}{5}}\right)\sin\theta$ olmak üzere

$$d_{RT}(\rho(V_1), \rho(V_{25})) = \frac{\varphi}{2}\max\left\{\begin{array}{l} |\alpha_1| + (2\varphi-3)\max\{(\varphi+1)|\alpha_3| + \varphi|\alpha_2|, |\alpha_1|\}, \\ |\alpha_2| + (2\varphi-3)\max\{(\varphi+1)|\alpha_1| + \varphi|\alpha_3|, |\alpha_2|\}, \\ |\alpha_3| + (2\varphi-3)\max\{(\varphi+1)|\alpha_2| + \varphi|\alpha_1|, |\alpha_3|\} \end{array}\right\} = \varphi - 1$$

olur. Bu denklem çözülürse $\theta = 2\pi/5, 4\pi/5, 6\pi/5, 8\pi/5$ sonuçları bulunur. Benzer şekilde, r_θ, dönme ekseninin doğrultusu $(0, -1, (\varphi - 1))$, $(\pm 1, (\varphi - 1), 0)$, $(\pm 1, 0, \varphi)$ vektörleri olarak alınırsa $\theta = 2\pi/5, 4\pi/5, 6\pi/5, 8\pi/5$ olur. Böylece $d_{RT}-$uzaklığını koruyacak şekilde yirmi dört farklı dönme-inversiyon hareketi bulunur.

r_θ, dönme ekseni $(1, 1, 1)$ doğrultulu doğru ise r_θ nın birim yön vektörü $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ olur. Bu durumda $\rho(V_1)$ ve $\rho(V_{25})$ hesaplanıp $d_{RT}(\rho(V_1), \rho(V_{25})) = \varphi - 1$ de yerine yazılırsa $\alpha_1 = \frac{3-2\varphi}{3}\cos\theta + \frac{-\sqrt{3}}{3}\sin\theta + \frac{2\varphi-3}{3}$, $\alpha_2 = \frac{\varphi-3}{3}\cos\theta + \frac{\sqrt{3}(2-\varphi)}{3}\sin\theta + \frac{2\varphi-3}{3}$ ve $\alpha_3 = \frac{\varphi-3}{3}\cos\theta + \frac{\sqrt{3}(\varphi-1)}{3}\sin\theta + \frac{2\varphi-3}{3}$ olmak üzere

$$d_{RT}(\rho(V_1), \rho(V_{25})) = \frac{\varphi}{2}\max\left\{\begin{array}{l} |\alpha_1| + (2\varphi-3)\max\{(\varphi+1)|\alpha_3| + \varphi|\alpha_2|, |\alpha_1|\}, \\ |\alpha_2| + (2\varphi-3)\max\{(\varphi+1)|\alpha_1| + \varphi|\alpha_3|, |\alpha_2|\}, \\ |\alpha_3| + (2\varphi-3)\max\{(\varphi+1)|\alpha_2| + \varphi|\alpha_1|, |\alpha_3|\} \end{array}\right\} = \varphi - 1$$

denklemi elde edilir. Bu denklem çözülürse $\theta = 2\pi/3, 4\pi/3$ *olur. Benzer şekilde,*r_θ*, dönme ekseni doğrultusu* $(-1,1,1)$*,* $(1,-1,1)$*,* $(1,1,-1)$*,* $(0,\varphi-1,\pm\varphi)$*,* $(\varphi-1,\pm\varphi,0)$*,* $(\pm\varphi,0,\varphi-1)$ *vektörleri olarak alınırsa* $\theta = 2\pi/3, 4\pi/3$ *olur. Böylece* d_{RT}*−uzaklığını koruyacak şekilde yirmi farklı dönme-inversiyon hareketi bulunur.*

r_θ*, dönme ekseni* $(1,0,0)$ *doğrultulu doğru ise birim yön vektörü* $(1,0,0)$ *olur. Bu durumda* $V_1 = (\varphi-1,0,1)$*,* $V_9 = (0,1,\varphi-1)$*,* $V_{15} = (0,\varphi-2,1)$*,* $V_{21} = (\varphi-2,1,0)$ *ve* $V_{25} = (\varphi-1,\varphi-1,\varphi-1)$ *köşe noktaları için*

$$\begin{aligned}
&\rho(V_1) = \rho\,(\varphi-1,0,1) = (1-\varphi, \sin\theta, -\cos\theta)\\
&\rho(V_9) = \rho\,(0,1,\varphi-1) = (0, (\varphi-1)\sin\theta - \cos\theta, (1-\varphi)\cos\theta - \sin\theta)\\
&\rho(V_{15}) = \rho\,(0,\varphi-2,1) = (0, (2-\varphi)\cos\theta + \sin\theta, (2-\varphi)\sin\theta - \cos\theta)\\
&\rho(V_{21}) = \rho\,(\varphi-2,1,0) = (2-\varphi, -\cos\theta, -\sin\theta)\\
&\rho(V_{25}) = \rho\,(\varphi\text{-}1,\varphi\text{-}1,\varphi\text{-}1) = (1-\varphi, (1-\varphi)\cos\theta + (\varphi-1)\sin\theta, (1-\varphi)\sin\theta + (1-\varphi)\cos\theta)
\end{aligned}$$

olup $d_{RT}\,(V_1,V_{25}) = d_{RT}\,(V_9,V_{21}) = d_{RT}\,(V_1,V_{15}) = \varphi-1$ *olduğundan* $d_{RT}(\rho(V_1),\rho(V_{25})) = d_{RT}(\rho(V_9),\rho(V_{21})) = d_{RT}(\rho(V_1),\rho(V_{15})) = \varphi-1$ *olmalıdır. Böylece* $\alpha_2 = \sin\theta + (\varphi-1)\cos\theta - (\varphi-1)\sin\theta$ *ve* $\alpha_3 = -\cos\theta + (\varphi-1)\sin\theta + (\varphi-1)\cos\theta$ *olmak üzere*

$$d_{RT}(\rho(V_1),\rho(V_{25})) = \frac{\varphi}{2}\max\left\{\begin{array}{l}(2\varphi-3)\max\{(\varphi+1)\,|\alpha_3| + \varphi\,|\alpha_2|\}\,,\\ |\alpha_2| + (2\varphi-3)\max\{\varphi\,|\alpha_3|\,,|\alpha_2|\}\,,\\ |\alpha_3| + (2\varphi-3)\max\{(\varphi+1)\,|\alpha_2|\,,|\alpha_3|\}\end{array}\right\} = \varphi-1$$

$\beta_1 = \varphi-2$*,* $\beta_2 = (\varphi-1)\sin\theta$ *ve* $\beta_3 = (1-\varphi)\cos\theta$ *olmak üzere*

$$d_{RT}(\rho(V_9),\rho(V_{21})) = \frac{\varphi}{2}\max\left\{\begin{array}{l}|\beta_1| + (2\varphi-3)\max\{(\varphi{+}1)\,|\beta_3| + \varphi\,|\beta_2|\,,|\beta_1|\}\,,\\ |\beta_2| + (2\varphi-3)\max\{(\varphi{+}1)\,|\beta_1| + \varphi\,|\beta_3|\,,|\beta_2|\}\,,\\ |\beta_3| + (2\varphi-3)\max\{(\varphi{+}1)\,|\beta_2| + \varphi\,|\beta_1|\,,|\beta_3|\}\end{array}\right\} = \varphi-1$$

$\gamma_1 = \varphi-1$*,* $\gamma_2 = (2-\varphi)\cos\theta$ *ve* $\gamma_3 = (2-\varphi)\sin\theta$ *olmak üzere*

$$d_{RT}(\rho(V_1),\rho(V_{15})) = \frac{\varphi}{2}\max\left\{\begin{array}{l}|\gamma_1| + (2\varphi-3)\max\{(\varphi{+}1)\,|\gamma_3| + \varphi\,|\gamma_2|\,,|\gamma_1|\}\,,\\ |\gamma_2| + (2\varphi-3)\max\{(\varphi{+}1)\,|\gamma_1| + \varphi\,|\gamma_3|\,,|\gamma_2|\}\,,\\ |\gamma_3| + (2\varphi-3)\max\{(\varphi{+}1)\,|\gamma_2| + \varphi\,|\gamma_1|\,,|\gamma_3|\}\end{array}\right\} = \varphi-1$$

denklemlerine ulaşılır. Bu denklem sistemi çözülürse $\theta = \pi$ *sonucu bulunur. Benzer şekilde,* r_θ*, dönme ekseni doğrultusu* $(0,1,0)$*,* $(0,0,1)$*,* $((\varphi-1)\,,\pm1,\pm\varphi)$*,* $(\pm1,\pm\varphi,\varphi-1)$*,* $(\pm\varphi,\varphi-1,\pm1)$ *vektörleri olarak alınırsa* $\theta = \pi$ *olur. Bu durumda yeni bir dönme-inversiyon hareketi bulunmamaktadır. Çünkü* $\theta = \pi$ *için, dönme ekseni doğrultu vektörü bu vektörler olacak şekilde alınır ve dönme-inversiyon hareketi yapılırsa Şekil6.9 ve Şekil6.10 daki tablolarda verilen düzlemlere göre yansıma hareketleri bulunur.*

Dönme EkseniDoğrultu Vektörleri	Açılar	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8	V_9	V_{10}	V_{11}	V_{12}	V_{13}	V_{14}	V_{15}	V_{16}
$(0,1,\varphi-1)$	$\theta=2\pi/5$	V_8	V_1	V_4	V_5	V_{11}	V_3	V_2	V_{10}	V_{12}	V_6	V_7	V_9	V_{32}	V_{17}	V_{20}	V_{25}
	$\theta=4\pi/5$	V_{11}	V_5	V_8	V_{10}	V_6	V_1	V_4	V_7	V_{12}	V_2	V_3	V_9	V_{24}	V_{26}	V_{31}	V_{21}
	$\theta=6\pi/5$	V_6	V_{10}	V_{11}	V_7	V_2	V_5	V_8	V_3	V_{12}	V_4	V_1	V_9	V_{22}	V_{30}	V_{27}	V_{23}
	$\theta=8\pi/5$	V_2	V_7	V_6	V_3	V_4	V_{10}	V_{11}	V_1	V_{12}	V_8	V_5	V_9	V_{28}	V_{19}	V_{18}	V_{29}
$(0,1,1-\varphi)$	$\theta=2\pi/5$	V_7	V_1	V_4	V_6	V_3	V_9	V_{12}	V_2	V_8	V_{11}	V_{10}	V_5	V_{20}	V_{27}	V_{30}	V_{17}
	$\theta=4\pi/5$	V_9	V_6	V_7	V_{12}	V_1	V_5	V_8	V_4	V_3	V_{11}	V_{10}	V_2	V_{29}	V_{22}	V_{23}	V_{28}
	$\theta=6\pi/5$	V_5	V_{12}	V_9	V_8	V_6	V_2	V_3	V_7	V_1	V_{11}	V_{10}	V_4	V_{25}	V_{24}	V_{21}	V_{32}
	$\theta=8\pi/5$	V_2	V_8	V_5	V_3	V_{12}	V_4	V_1	V_9	V_6	V_{11}	V_{10}	V_7	V_{18}	V_{31}	V_{26}	V_{19}
$(1,0,\varphi)$	$\theta=2\pi/5$	V_4	V_{11}	V_{10}	V_1	V_{12}	V_8	V_5	V_9	V_2	V_6	V_7	V_3	V_{14}	V_{27}	V_{30}	V_{15}
	$\theta=4\pi/5$	V_4	V_6	V_7	V_1	V_2	V_{12}	V_9	V_3	V_{10}	V_5	V_8	V_{11}	V_{30}	V_{17}	V_{20}	V_{27}
	$\theta=6\pi/5$	V_4	V_5	V_8	V_1	V_{10}	V_2	V_3	V_{11}	V_7	V_9	V_{12}	V_6	V_{20}	V_{25}	V_{32}	V_{17}
	$\theta=8\pi/5$	V_4	V_9	V_{12}	V_1	V_7	V_{10}	V_{11}	V_6	V_8	V_3	V_2	V_5	V_{32}	V_{13}	V_{16}	V_{25}
$(1,0,-\varphi)$	$\theta=2\pi/5$	V_{10}	V_3	V_2	V_{11}	V_7	V_9	V_{12}	V_6	V_4	V_8	V_5	V_1	V_{14}	V_{31}	V_{26}	V_{15}
	$\theta=4\pi/5$	V_5	V_3	V_2	V_8	V_9	V_1	V_4	V_{12}	V_{10}	V_7	V_6	V_{11}	V_{26}	V_{19}	V_{18}	V_{31}
	$\theta=6\pi/5$	V_6	V_3	V_2	V_7	V_1	V_{11}	V_{10}	V_4	V_5	V_9	V_{12}	V_8	V_{18}	V_{29}	V_{28}	V_{19}
	$\theta=8\pi/5$	V_{12}	V_3	V_2	V_9	V_{11}	V_8	V_5	V_{10}	V_6	V_1	V_4	V_7	V_{28}	V_{13}	V_{16}	V_{29}
$(1,\varphi-1,0)$	$\theta=2\pi/5$	V_7	V_{11}	V_{10}	V_6	V_8	V_3	V_2	V_5	V_4	V_{12}	V_9	V_1	V_{30}	V_{22}	V_{23}	V_{27}
	$\theta=4\pi/5$	V_3	V_{12}	V_9	V_2	V_8	V_{11}	V_{10}	V_5	V_7	V_4	V_1	V_6	V_{29}	V_{16}	V_{13}	V_{28}
	$\theta=6\pi/5$	V_{11}	V_4	V_1	V_{10}	V_8	V_{12}	V_9	V_5	V_3	V_7	V_8	V_2	V_{15}	V_{30}	V_{27}	V_{14}
	$\theta=8\pi/5$	V_{12}	V_7	V_6	V_9	V_8	V_4	V_1	V_5	V_{11}	V_3	V_2	V_{10}	V_{27}	V_{29}	V_{28}	V_{23}
$(1,1-\varphi,0)$	$\theta=2\pi/5$	V_{10}	V_8	V_5	V_{11}	V_4	V_7	V_6	V_1	V_2	V_{12}	V_9	V_3	V_{26}	V_{24}	V_{21}	V_{31}
	$\theta=4\pi/5$	V_9	V_4	V_1	V_{12}	V_{10}	V_7	V_6	V_{11}	V_5	V_2	V_3	V_8	V_{25}	V_{16}	V_{13}	V_{32}
	$\theta=6\pi/5$	V_3	V_{10}	V_{11}	V_2	V_9	V_7	V_6	V_{19}	V_1	V_5	V_8	V_4	V_{15}	V_{26}	V_{31}	V_{14}
	$\theta=8\pi/5$	V_8	V_9	V_{12}	V_5	V_3	V_7	V_6	V_2	V_{11}	V_1	V_4	V_{10}	V_{24}	V_{25}	V_{32}	V_{21}
$(1,0,0)$	$\theta=\pi$	V_3	V_4	V_1	V_2	V_7	V_8	V_5	V_6	V_9	V_{10}	V_{11}	V_{12}	V_{13}	V_{14}	V_{15}	V_{16}
$(0,1,0)$	$\theta=\pi$	V_1	V_2	V_3	V_4	V_6	V_5	V_8	V_7	V_{11}	V_{12}	V_9	V_{10}	V_{15}	V_{16}	V_{13}	V_{14}
$(0,0,1)$	$\theta=\pi$	V_2	V_1	V_4	V_3	V_5	V_6	V_7	V_8	V_{10}	V_9	V_{12}	V_{11}	V_{14}	V_{13}	V_{16}	V_{15}
$(\varphi-1,1,\varphi)$	$\theta=\pi$	V_{12}	V_5	V_8	V_9	V_2	V_6	V_7	V_3	V_4	V_{10}	V_{11}	V_1	V_{32}	V_{21}	V_{24}	V_{25}
$(\varphi-1,1,-\varphi)$	$\theta=\pi$	V_5	V_{11}	V_{10}	V_8	V_1	V_6	V_7	V_4	V_9	V_3	V_2	V_{12}	V_{21}	V_{31}	V_{26}	V_{24}
$(\varphi-1,-1,\varphi)$	$\theta=\pi$	V_{10}	V_6	V_7	V_{11}	V_5	V_2	V_3	V_8	V_9	V_1	V_4	V_{12}	V_{23}	V_{27}	V_{30}	V_{22}
$(\varphi-1,-1,-\varphi)$	$\theta=\pi$	V_6	V_9	V_{12}	V_7	V_5	V_1	V_4	V_8	V_2	V_{10}	V_{11}	V_3	V_{28}	V_{23}	V_{22}	V_{29}
$(1,\varphi,\varphi-1)$	$\theta=\pi$	V_{11}	V_2	V_3	V_{10}	V_{12}	V_6	V_7	V_9	V_8	V_4	V_1	V_5	V_{31}	V_{14}	V_{15}	V_{26}
$(1,-\varphi,\varphi-1)$	$\theta=\pi$	V_9	V_2	V_3	V_{12}	V_5	V_{10}	V_{11}	V_8	V_1	V_6	V_7	V_4	V_{13}	V_{28}	V_{29}	V_{16}
$(-1,\varphi,\varphi-1)$	$\theta=\pi$	V_1	V_{10}	V_{11}	V_4	V_5	V_9	V_{12}	V_8	V_6	V_2	V_3	V_7	V_{27}	V_{14}	V_{15}	V_{30}
$(-1,-\varphi,\varphi-1)$	$\theta=\pi$	V_1	V_{12}	V_9	V_4	V_{11}	V_6	V_7	V_{10}	V_3	V_8	V_5	V_2	V_{13}	V_{32}	V_{25}	V_{16}
$(\varphi,\varphi-1,1)$	$\theta=\pi$	V_8	V_2	V_3	V_5	V_4	V_{12}	V_9	V_1	V_7	V_{10}	V_{11}	V_6	V_{19}	V_{26}	V_{31}	V_{18}
$(\varphi,\varphi-1,-1)$	$\theta=\pi$	V_1	V_8	V_5	V_4	V_3	V_{11}	V_{10}	V_2	V_9	V_7	V_6	V_{12}	V_{25}	V_{20}	V_{17}	V_{32}
$(-\varphi,\varphi-1,1)$	$\theta=\pi$	V_1	V_7	V_6	V_4	V_9	V_3	V_2	V_{12}	V_5	V_{10}	V_{11}	V_8	V_{17}	V_{30}	V_{27}	V_{20}
$(-\varphi,\varphi-1,-1)$	$\theta=\pi$	V_7	V_2	V_3	V_6	V_{10}	V_4	V_1	V_{11}	V_9	V_5	V_8	V_{12}	V_{29}	V_{18}	V_{19}	V_{28}
$(1,1,1)$	$\theta=2\pi/3$	V_8	V_6	V_7	V_5	V_{12}	V_{11}	V_{10}	V_9	V_4	V_2	V_3	V_1	V_{20}	V_{18}	V_{19}	V_{17}
	$\theta=4\pi/3$	V_{12}	V_{10}	V_{11}	V_9	V_4	V_2	V_3	V_1	V_8	V_7	V_6	V_5	V_{24}	V_{23}	V_{22}	V_{21}
(-1,1,1)	$\theta=2\pi/3$	V_{11}	V_9	V_{12}	V_{10}	V_1	V_3	V_2	V_4	V_6	V_5	V_8	V_7	V_{22}	V_{21}	V_{24}	V_{23}
	$\theta=4\pi/3$	V_5	V_7	V_6	V_8	V_{10}	V_9	V_{12}	V_{11}	V_2	V_4	V_1	V_3	V_{18}	V_{20}	V_{17}	V_{19}
(1,-1,1)	$\theta=2\pi/3$	V_{10}	V_{12}	V_9	V_{11}	V_2	V_4	V_1	V_3	V_5	V_6	V_7	V_8	V_{21}	V_{22}	V_{23}	V_{24}
	$\theta=4\pi/3$	V_7	V_5	V_8	V_6	V_9	V_{10}	V_{11}	V_{12}	V_3	V_1	V_4	V_2	V_{19}	V_{17}	V_{20}	V_{18}
(1,1,-1)	$\theta=2\pi/3$	V_9	V_{11}	V_{10}	V_{12}	V_3	V_1	V_4	V_2	V_7	V_8	V_5	V_6	V_{23}	V_{24}	V_{21}	V_{22}
	$\theta=4\pi/3$	V_6	V_8	V_5	V_7	V_{11}	V_{12}	V_9	V_{10}	V_1	V_3	V_2	V_4	V_{17}	V_{19}	V_{18}	V_{20}
$(0,\varphi-1,\varphi)$	$\theta=2\pi/3$	V_{12}	V_1	V_4	V_9	V_6	V_{11}	V_{10}	V_7	V_2	V_5	V_8	V_3	V_{16}	V_{25}	V_{32}	V_{13}
	$\theta=4\pi/3$	V_2	V_9	V_{12}	V_3	V_{10}	V_5	V_8	V_{11}	V_4	V_7	V_6	V_1	V_{16}	V_{29}	V_{28}	V_{13}
$(0,\varphi-1,-\varphi)$	$\theta=2\pi/3$	V_{10}	V_1	V_4	V_{11}	V_9	V_5	V_8	V_{12}	V_7	V_3	V_2	V_6	V_{30}	V_{15}	V_{14}	V_{27}
	$\theta=4\pi/3$	V_2	V_{11}	V_{10}	V_3	V_6	V_{12}	V_9	V_7	V_5	V_1	V_4	V_8	V_{26}	V_{15}	V_{14}	V_{31}
$(\varphi-1,\varphi,0)$	$\theta=2\pi/3$	V_3	V_6	V_7	V_2	V_{11}	V_1	V_4	V_{10}	V_8	V_{12}	V_9	V_5	V_{19}	V_{28}	V_{29}	V_{18}
	$\theta=4\pi/3$	V_6	V_4	V_1	V_7	V_{12}	V_2	V_3	V_9	V_{11}	V_8	V_5	V_{10}	V_{27}	V_{20}	V_{17}	V_{30}
$(\varphi-1,-\varphi,0)$	$\theta=2\pi/3$	V_5	V_4	V_1	V_8	V_2	V_{10}	V_{11}	V_3	V_6	V_{12}	V_9	V_7	V_{17}	V_{32}	V_{25}	V_{20}
	$\theta=4\pi/3$	V_3	V_5	V_8	V_2	V_1	V_9	V_{12}	V_4	V_{11}	V_6	V_7	V_{10}	V_{31}	V_{18}	V_{19}	V_{26}
$(\varphi,0,\varphi-1)$	$\theta=2\pi/3$	V_7	V_{12}	V_9	V_6	V_4	V_8	V_5	V_1	V_{10}	V_2	V_3	V_{11}	V_{23}	V_{28}	V_{29}	V_{22}
	$\theta=4\pi/3$	V_8	V_{10}	V_{11}	V_5	V_7	V_4	V_1	V_6	V_3	V_9	V_{12}	V_2	V_{31}	V_{21}	V_{24}	V_{26}
$(-\varphi,0,\varphi-1)$	$\theta=2\pi/3$	V_{11}	V_7	V_6	V_{10}	V_3	V_8	V_5	V_2	V_1	V_9	V_{12}	V_4	V_{27}	V_{23}	V_{22}	V_{30}
	$\theta=4\pi/3$	V_9	V_8	V_5	V_{12}	V_7	V_3	V_2	V_6	V_{10}	V_4	V_1	V_{11}	V_{21}	V_{32}	V_{25}	V_{24}

Şekil 6.9 $\mathbb{R}^3_{RT}$ de Dönme İnversiyon Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri

Dönme EkseniDoğrultu Vektörleri	Açılar	V_{17}	V_{18}	V_{19}	V_{20}	V_{21}	V_{22}	V_{23}	V_{24}	V_{25}	V_{26}	V_{27}	V_{28}	V_{29}	V_{30}	V_{31}	V_{32}
$(0,1,\varphi-1)$	$\theta=2\pi/5$	V_{31}	V_{15}	V_{14}	V_{26}	V_{22}	V_{29}	V_{28}	V_{23}	V_{24}	V_{27}	V_{19}	V_{13}	V_{16}	V_{18}	V_{30}	V_{21}
	$\theta=4\pi/5$	V_{27}	V_{17}	V_{20}	V_{30}	V_{28}	V_{13}	V_{16}	V_{29}	V_{22}	V_{18}	V_{15}	V_{25}	V_{32}	V_{14}	V_{19}	V_{23}
	$\theta=6\pi/5$	V_{18}	V_{26}	V_{31}	V_{19}	V_{16}	V_{25}	V_{32}	V_{13}	V_{28}	V_{14}	V_{17}	V_{21}	V_{24}	V_{20}	V_{15}	V_{29}
	$\theta=8\pi/5$	V_{14}	V_{30}	V_{27}	V_{15}	V_{32}	V_{21}	V_{24}	V_{25}	V_{16}	V_{20}	V_{26}	V_{23}	V_{22}	V_{31}	V_{17}	V_{13}
$(0,1,1-\varphi)$	$\theta=2\pi/5$	V_{29}	V_{13}	V_{16}	V_{28}	V_{31}	V_{21}	V_{24}	V_{26}	V_{19}	V_{15}	V_{23}	V_{25}	V_{32}	V_{22}	V_{14}	V_{18}
	$\theta=4\pi/5$	V_{25}	V_{17}	V_{20}	V_{32}	V_{15}	V_{26}	V_{31}	V_{14}	V_{13}	V_{27}	V_{21}	V_{18}	V_{19}	V_{24}	V_{30}	V_{16}
	$\theta=6\pi/5$	V_{18}	V_{28}	V_{29}	V_{19}	V_{27}	V_{14}	V_{15}	V_{30}	V_{17}	V_{22}	V_{26}	V_{16}	V_{13}	V_{31}	V_{23}	V_{20}
	$\theta=8\pi/5$	V_{16}	V_{32}	V_{25}	V_{13}	V_{22}	V_{30}	V_{27}	V_{23}	V_{28}	V_{24}	V_{14}	V_{20}	V_{17}	V_{15}	V_{21}	V_{29}
$(1,0,\varphi)$	$\theta=2\pi/5$	V_{32}	V_{24}	V_{21}	V_{25}	V_{28}	V_{19}	V_{18}	V_{29}	V_{16}	V_{22}	V_{20}	V_{31}	V_{26}	V_{17}	V_{23}	V_{13}
	$\theta=4\pi/5$	V_{16}	V_{28}	V_{29}	V_{13}	V_{26}	V_{24}	V_{21}	V_{31}	V_{14}	V_{18}	V_{32}	V_{22}	V_{23}	V_{25}	V_{19}	V_{15}
	$\theta=6\pi/5$	V_{14}	V_{26}	V_{31}	V_{15}	V_{23}	V_{28}	V_{29}	V_{22}	V_{30}	V_{21}	V_{16}	V_{18}	V_{19}	V_{13}	V_{24}	V_{27}
	$\theta=8\pi/5$	V_{30}	V_{23}	V_{22}	V_{27}	V_{19}	V_{26}	V_{31}	V_{18}	V_{20}	V_{29}	V_{14}	V_{21}	V_{24}	V_{15}	V_{28}	V_{17}
$(1,0,-\varphi)$	$\theta=2\pi/5$	V_{23}	V_{29}	V_{28}	V_{22}	V_{20}	V_{25}	V_{32}	V_{17}	V_{30}	V_{19}	V_{21}	V_{13}	V_{16}	V_{24}	V_{18}	V_{27}
	$\theta=4\pi/5$	V_{25}	V_{13}	V_{16}	V_{32}	V_{23}	V_{27}	V_{30}	V_{22}	V_{21}	V_{29}	V_{17}	V_{15}	V_{14}	V_{20}	V_{28}	V_{24}
	$\theta=6\pi/5$	V_{27}	V_{15}	V_{14}	V_{30}	V_{25}	V_{24}	V_{21}	V_{32}	V_{17}	V_{13}	V_{22}	V_{31}	V_{26}	V_{23}	V_{16}	V_{20}
	$\theta=8\pi/5$	V_{24}	V_{31}	V_{26}	V_{21}	V_{27}	V_{20}	V_{17}	V_{30}	V_{22}	V_{15}	V_{32}	V_{19}	V_{18}	V_{25}	V_{14}	V_{23}
$(1,\varphi-1,0)$	$\theta=2\pi/5$	V_{19}	V_{19}	V_{26}	V_{18}	V_{32}	V_{13}	V_{16}	V_{25}	V_{20}	V_{24}	V_{24}	V_{15}	V_{14}	V_{28}	V_{21}	V_{17}
	$\theta=4\pi/5$	V_{31}	V_{24}	V_{21}	V_{26}	V_{20}	V_{27}	V_{30}	V_{17}	V_{19}	V_{32}	V_{15}	V_{22}	V_{23}	V_{14}	V_{25}	V_{18}
	$\theta=6\pi/5$	V_{24}	V_{32}	V_{25}	V_{21}	V_{19}	V_{28}	V_{29}	V_{18}	V_{31}	V_{20}	V_{22}	V_{16}	V_{13}	V_{23}	V_{17}	V_{26}
	$\theta=8\pi/5$	V_{32}	V_{20}	V_{17}	V_{25}	V_{31}	V_{14}	V_{15}	V_{26}	V_{24}	V_{19}	V_{16}	V_{30}	V_{27}	V_{13}	V_{18}	V_{21}
$(1,1-\varphi,0)$	$\theta=2\pi/5$	V_{30}	V_{20}	V_{17}	V_{27}	V_{16}	V_{29}	V_{28}	V_{13}	V_{14}	V_{32}	V_{23}	V_{19}	V_{18}	V_{22}	V_{25}	V_{15}
	$\theta=4\pi/5$	V_{23}	V_{30}	V_{27}	V_{22}	V_{26}	V_{19}	V_{18}	V_{31}	V_{21}	V_{14}	V_{29}	V_{20}	V_{17}	V_{28}	V_{15}	V_{24}
	$\theta=6\pi/5$	V_{29}	V_{23}	V_{22}	V_{28}	V_{25}	V_{20}	V_{17}	V_{32}	V_{13}	V_{21}	V_{19}	V_{30}	V_{27}	V_{18}	V_{24}	V_{16}
	$\theta=8\pi/5$	V_{19}	V_{29}	V_{28}	V_{18}	V_{15}	V_{30}	V_{27}	V_{14}	V_{31}	V_{13}	V_{20}	V_{23}	V_{22}	V_{17}	V_{16}	V_{26}
$(1,0,0)$	$\theta=\pi$	V_{19}	V_{20}	V_{17}	V_{18}	V_{23}	V_{24}	V_{21}	V_{22}	V_{29}	V_{30}	V_{31}	V_{32}	V_{25}	V_{26}	V_{27}	V_{28}
$(0,1,0)$	$\theta=\pi$	V_{17}	V_{18}	V_{19}	V_{20}	V_{22}	V_{21}	V_{24}	V_{23}	V_{27}	V_{28}	V_{25}	V_{26}	V_{31}	V_{32}	V_{29}	V_{30}
$(0,0,1)$	$\theta=\pi$	V_{18}	V_{17}	V_{20}	V_{19}	V_{21}	V_{22}	V_{23}	V_{24}	V_{26}	V_{25}	V_{28}	V_{27}	V_{30}	V_{29}	V_{32}	V_{31}
$(\varphi-1,1,\varphi)$	$\theta=\pi$	V_{28}	V_{18}	V_{19}	V_{29}	V_{14}	V_{27}	V_{30}	V_{15}	V_{16}	V_{26}	V_{22}	V_{17}	V_{20}	V_{23}	V_{31}	V_{13}
$(\varphi-1,1,-\varphi)$	$\theta=\pi$	V_{17}	V_{27}	V_{30}	V_{20}	V_{13}	V_{28}	V_{29}	V_{16}	V_{25}	V_{15}	V_{18}	V_{22}	V_{23}	V_{19}	V_{14}	V_{32}
$(\varphi-1,-1,\varphi)$	$\theta=\pi$	V_{26}	V_{18}	V_{19}	V_{31}	V_{25}	V_{16}	V_{13}	V_{32}	V_{21}	V_{17}	V_{14}	V_{28}	V_{29}	V_{15}	V_{20}	V_{24}
$(\varphi-1,-1,-\varphi)$	$\theta=\pi$	V_{17}	V_{25}	V_{32}	V_{20}	V_{26}	V_{15}	V_{14}	V_{31}	V_{18}	V_{21}	V_{27}	V_{13}	V_{16}	V_{30}	V_{24}	V_{19}
$(1,\varphi,\varphi-1)$	$\theta=\pi$	V_{22}	V_{28}	V_{29}	V_{23}	V_{32}	V_{17}	V_{20}	V_{25}	V_{24}	V_{16}	V_{27}	V_{18}	V_{19}	V_{30}	V_{13}	V_{21}
$(1,-\varphi,\varphi-1)$	$\theta=\pi$	V_{21}	V_{26}	V_{31}	V_{24}	V_{17}	V_{30}	V_{27}	V_{20}	V_{25}	V_{18}	V_{23}	V_{14}	V_{15}	V_{22}	V_{19}	V_{32}
$(-1,\varphi,\varphi-1)$	$\theta=\pi$	V_{25}	V_{21}	V_{24}	V_{32}	V_{18}	V_{29}	V_{28}	V_{19}	V_{17}	V_{26}	V_{13}	V_{23}	V_{22}	V_{16}	V_{31}	V_{20}
$(-1,-\varphi,\varphi-1)$	$\theta=\pi$	V_{27}	V_{22}	V_{23}	V_{30}	V_{31}	V_{18}	V_{19}	V_{26}	V_{15}	V_{24}	V_{17}	V_{28}	V_{29}	V_{20}	V_{21}	V_{14}
$(\varphi,\varphi-1,1)$	$\theta=\pi$	V_{32}	V_{16}	V_{13}	V_{25}	V_{30}	V_{22}	V_{23}	V_{27}	V_{20}	V_{14}	V_{24}	V_{28}	V_{29}	V_{21}	V_{15}	V_{17}
$(\varphi,\varphi-1,-1)$	$\theta=\pi$	V_{15}	V_{31}	V_{26}	V_{14}	V_{29}	V_{22}	V_{23}	V_{28}	V_{13}	V_{19}	V_{27}	V_{24}	V_{21}	V_{30}	V_{18}	V_{16}
$(-\varphi,\varphi-1,1)$	$\theta=\pi$	V_{13}	V_{29}	V_{28}	V_{16}	V_{21}	V_{31}	V_{26}	V_{24}	V_{25}	V_{23}	V_{15}	V_{19}	V_{18}	V_{14}	V_{22}	V_{32}
$(-\varphi,\varphi-1,-1)$	$\theta=\pi$	V_{30}	V_{14}	V_{15}	V_{27}	V_{21}	V_{32}	V_{25}	V_{24}	V_{23}	V_{26}	V_{20}	V_{16}	V_{13}	V_{17}	V_{31}	V_{22}
(1,1,1)	$\theta=2\pi/3$	V_{24}	V_{22}	V_{23}	V_{21}	V_{16}	V_{15}	V_{14}	V_{13}	V_{32}	V_{28}	V_{31}	V_{27}	V_{30}	V_{26}	V_{29}	V_{25}
	$\theta=4\pi/3$	V_{16}	V_{14}	V_{15}	V_{13}	V_{20}	V_{18}	V_{19}	V_{17}	V_{32}	V_{30}	V_{28}	V_{26}	V_{31}	V_{29}	V_{27}	V_{25}
(-1,1,1)	$\theta=2\pi/3$	V_{15}	V_{13}	V_{16}	V_{14}	V_{17}	V_{19}	V_{18}	V_{20}	V_{27}	V_{25}	V_{31}	V_{29}	V_{28}	V_{26}	V_{32}	V_{30}
	$\theta=4\pi/3$	V_{21}	V_{23}	V_{22}	V_{24}	V_{14}	V_{13}	V_{16}	V_{15}	V_{26}	V_{30}	V_{25}	V_{29}	V_{28}	V_{32}	V_{27}	V_{31}
(1,-1,1)	$\theta=2\pi/3$	V_{14}	V_{16}	V_{13}	V_{15}	V_{18}	V_{20}	V_{17}	V_{19}	V_{26}	V_{28}	V_{30}	V_{32}	V_{25}	V_{27}	V_{29}	V_{31}
	$\theta=4\pi/3$	V_{23}	V_{21}	V_{24}	V_{22}	V_{13}	V_{14}	V_{15}	V_{16}	V_{29}	V_{25}	V_{30}	V_{26}	V_{31}	V_{27}	V_{32}	V_{28}
(1,1,-1)	$\theta=2\pi/3$	V_{13}	V_{15}	V_{14}	V_{16}	V_{19}	V_{17}	V_{20}	V_{18}	V_{29}	V_{31}	V_{25}	V_{27}	V_{30}	V_{32}	V_{26}	V_{28}
	$\theta=4\pi/3$	V_{22}	V_{24}	V_{21}	V_{23}	V_{15}	V_{16}	V_{13}	V_{14}	V_{27}	V_{31}	V_{28}	V_{32}	V_{25}	V_{29}	V_{26}	V_{30}
$(0,\varphi-1,\varphi)$	$\theta=2\pi/3$	V_{22}	V_{27}	V_{30}	V_{23}	V_{18}	V_{31}	V_{26}	V_{19}	V_{28}	V_{17}	V_{24}	V_{15}	V_{14}	V_{21}	V_{20}	V_{29}
	$\theta=4\pi/3$	V_{26}	V_{21}	V_{24}	V_{31}	V_{30}	V_{17}	V_{20}	V_{27}	V_{14}	V_{23}	V_{18}	V_{25}	V_{32}	V_{19}	V_{22}	V_{15}
$(0,\varphi-1,-\varphi)$	$\theta=2\pi/3$	V_{21}	V_{25}	V_{32}	V_{24}	V_{29}	V_{18}	V_{19}	V_{28}	V_{23}	V_{13}	V_{26}	V_{17}	V_{20}	V_{31}	V_{16}	V_{22}
	$\theta=4\pi/3$	V_{28}	V_{22}	V_{23}	V_{29}	V_{17}	V_{32}	V_{25}	V_{20}	V_{18}	V_{27}	V_{16}	V_{24}	V_{21}	V_{13}	V_{30}	V_{19}
$(\varphi-1,\varphi,0)$	$\theta=2\pi/3$	V_{15}	V_{27}	V_{30}	V_{14}	V_{24}	V_{25}	V_{32}	V_{21}	V_{31}	V_{22}	V_{13}	V_{17}	V_{20}	V_{16}	V_{23}	V_{26}
	$\theta=4\pi/3$	V_{28}	V_{16}	V_{13}	V_{29}	V_{24}	V_{26}	V_{31}	V_{21}	V_{22}	V_{32}	V_{18}	V_{14}	V_{15}	V_{19}	V_{25}	V_{23}
$(\varphi-1,-\varphi,0)$	$\theta=2\pi/3$	V_{26}	V_{14}	V_{15}	V_{31}	V_{28}	V_{23}	V_{22}	V_{29}	V_{18}	V_{16}	V_{21}	V_{30}	V_{27}	V_{24}	V_{13}	V_{19}
	$\theta=4\pi/3$	V_{13}	V_{25}	V_{32}	V_{16}	V_{27}	V_{23}	V_{22}	V_{30}	V_{15}	V_{17}	V_{29}	V_{21}	V_{24}	V_{28}	V_{20}	V_{14}
$(\varphi,0,\varphi-1)$	$\theta=2\pi/3$	V_{20}	V_{32}	V_{25}	V_{17}	V_{14}	V_{31}	V_{26}	V_{15}	V_{30}	V_{16}	V_{19}	V_{24}	V_{21}	V_{18}	V_{13}	V_{27}
	$\theta=4\pi/3$	V_{20}	V_{30}	V_{27}	V_{17}	V_{29}	V_{16}	V_{13}	V_{28}	V_{19}	V_{23}	V_{32}	V_{14}	V_{15}	V_{25}	V_{22}	V_{18}
$(-\varphi,0,\varphi-1)$	$\theta=2\pi/3$	V_{31}	V_{19}	V_{18}	V_{26}	V_{13}	V_{32}	V_{25}	V_{16}	V_{15}	V_{29}	V_{24}	V_{20}	V_{17}	V_{21}	V_{28}	V_{14}
	$\theta=4\pi/3$	V_{29}	V_{19}	V_{18}	V_{28}	V_{30}	V_{15}	V_{14}	V_{27}	V_{23}	V_{20}	V_{13}	V_{31}	V_{26}	V_{16}	V_{17}	V_{22}

Şekil 6.10 $\mathbb{R}^3_{RT}$ de Dönme İnversiyon Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri Devamı

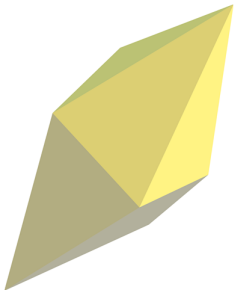
Buraya kadar olan kısımda Öklidyen 3-uzayın izometrilerinden hangilerinin $d_{RT}-$metriğini koruduğu bulunmuştur. Yani $\mathbb{R}^3$ te $d_{RT}-$metriğini koruyan yansımalar, dönmeler, inversiyonlar, dönme-yansımalar ve dönme-inversiyonlar tespit edilmiştir. Sonuç olarak on beş yansıma, altmış dönme, kırk dört dönme-inversiyon ve bir inversiyondan oluşan, $d_{RT}-$metriğine göre olan izometriler rhombic triacontahedronun Öklidyen simetri grubu olan I_h ın elemanlarıdır. Bu gruba rhombic triacontahedron grup denilsin ve $G(RT)$ ile gösterilsin. Açıkça $G(RT)$, I_h grubuna izomorftur. Bundan sonraki kısımda $\mathbb{R}^3$ te $d_{RT}-$metriğini koruyan, I_h grubunun elemanları dışında izometrilerin olmadığı gösterilecektir. Yani $\mathbb{R}^3_{RT}$ nin tüm izometrilerinin $T(3).G(RT)$ olduğu gösterilecektir.

Tanım 6.2 *$A = (a_1, a_2, a_3)$ ve $B = (b_1, b_2, b_3)$ $\mathbb{R}^3_{RT}$ uzayında farklı iki nokta olsun. Bu taktirde*

$$\{X \mid d_{RT}(A, X) + d_{RT}(B, X) = d_{RT}(A, B)\}$$

kümesine A, B noktalarının minimum uzaklık kümesi denir ve $[AB]$ ile gösterilir.

Genel olarak, $[AB]$ kümesi AB köşegenli bir sekizyüzlü oluşturur (Bakınız Şekil6.11).



Şekil 6.11 $\mathbb{R}^3_{RT}$ da Minimum Uzaklık Kümesi

Böylece buradaki minimum uzaklık kümesi $x - (2 - \varphi)y + (1 + \varphi)z = 0$, $-(2 - \varphi)x + (1 - \varphi)y + z = 0$, $x = 0$, $-(1 - \varphi)x + y - (2 - \varphi)z = 0$ düzlemleri ve bu düzlemlere paralel düzlemlerle oluşur.

Önerme 6.6 *$\phi : \mathbb{R}^3_{RT} \to \mathbb{R}^3_{RT}$ bir izometri ve $[AB]$ paralelyüz olsun. O halde*

$$\phi([AB]) = [\phi(A)\phi(B)]$$

olur.

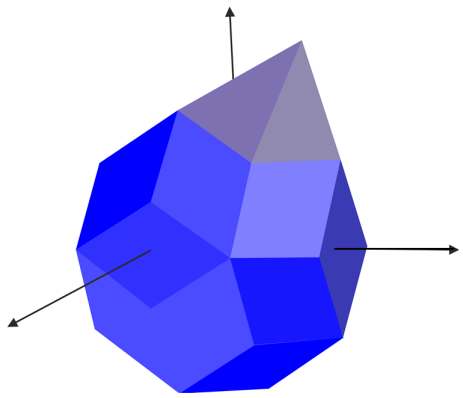
İspat *$Y \in \phi([AB])$ olsun.*

$$\begin{aligned} Y \in \phi([AB]) &\iff \exists X \in [AB] \ni Y = \phi(X) \\ &\iff d_{RT}(A,X) + d_{RT}(B,X) = d_{RT}(A,B) \\ &\iff d_{RT}(\phi(A),\phi(X)) + d_{RT}(\phi(B),\phi(X)) = d_{RT}(\phi(A),\phi(B)) \\ &\iff Y = \phi(X) \in [\phi(A)\phi(B)]\,. \end{aligned}$$

Sonuç 6.6 *$\phi : \mathbb{R}^3_{RT} \to \mathbb{R}^3_{RT}$ bir izometri ve $[AB]$ paralelyüz olsun. Bu durumda ϕ, $[AB]$ nin köşelerini köşelere dönüştürür ve kenar uzunluklarını korur.*

Önerme 6.7 *$f : \mathbb{R}^3_{RT} \to \mathbb{R}^3_{RT}$ dönüşümü $f(O) = O$ olacak şekilde bir izometri olsun. Bu taktirde $f \in G(RT)$ olur.*

İspat *$O = (0,0,0)$ ve $D = (\varphi - 1, 1, \varphi + 1)$ olmak üzere $[OD]$ sekizyüzlüsünü gözönüne alalım. Bu sekizyüzlünün köşe noktalarından dördü $V_1 = (\varphi - 1, 0, 1)$, $V_9 = (0, 1, \varphi - 1)$, $V_{13} = (0, 2 - \varphi, 1)$,$V_{25} = (\varphi - 1, \varphi - 1, \varphi - 1)$ olup bu noktalar aynı zamanda merkezil birim rhombic triacontahedron birim küresinin köşe noktalarıdır. Dahası bu dört nokta rhombic triacontahedronun her biri aynı eşkenar dörtgen biçiminde olan bir yüzünün köşe noktalarıdır (Bakınız Şekil6.12).*



Şekil 6.12 $\mathbb{R}^3_{RT}$ da Birim Küre Ve Minimum Uzaklık Kümesi

f izometrisi $[OD]$ sekizyüzlünün köşe noktalarını köşe noktalara dönüştürüp, kenar uzaklıklarını korduğundan ve $f(O) = O$ olduğundan dolayı V_1, V_9, V_{13} ve V_{25} noktalarını

rhombic triacontaheronun yine bir yüzünün köşe noktalarına dönüştürür. Ayrıca bu dönüştürme işlemi gerçekleşirken kenar uzunlukları korunacağından dolayı $i, j \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ *olmak üzere* $f(V_1) = V_i$ *ve de* $k, l \in \{13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31\}$ *ve* V_iV_k, V_iV_l, V_jV_k *ve* V_jV_l *rhombic triacontahedronun dört kenarı olmak üzere* $f(V_9) = V_j$, $f(V_{13}) = V_k$, $f(V_{25}) = V_l$ *olur. Açıkça ifade edilirse* f *izometrisi, rhombic triacontahedronun bir yüzünün köşe noktalarını yine bir yüzünün köşe noktalarına dönüştürür. O halde rhombic triacontahedron 30 tane eşkenar dörtgen biçiminde yüze sahip olduğundan bir yüzün dönüşebileceği 30 yüz ihtimali vardır. Ayrıca kenar uzunlukları ve dolayısıyla köşegen uzunlukları korunmak zorunda olduğundan* V_1 *noktasının bir yüz üzerinde dönüşebileceği nokta 2 farklı şekilde bellidir ve bu dönüşüm* V_9 *un dönüştüğü nokta ile yer değiştirmeden ibarettir. Bundan başka diğer iki köşenin noktaları olan* V_{13} *ve* V_{25} *için de iki ihtimal vardır. Bu taktirde rhombic triacontahedronun her bir yüzü için 4 ihtimal olduğundan dolayı bu noktaların dönüşebileceği 120 ihtimal vardır. Bu ihtimaller ise aşağıda tek tek sıralanmış ve her bir dönüşümün önceden tespit edilen hareketlerden hangisine karşılık geldiği ifade edilmiştir.*

1. $f(V_1) = V_3$ *ise* $f(V_9) = V_9$, $f(V_{13}) = V_{13}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{29}$ *ise* $\Delta : x = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *yansımasıdır.*

2. $f(V_1) = V_1$ *ise* $f(V_9) = V_{11}$, $f(V_{13}) = V_{15}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{27}$ *ise* $\Delta : y = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *yansımasıdır.*

3. $f(V_1) = V_2$ *ise* $f(V_9) = V_{10}$, $f(V_{13}) = V_{14}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{26}$ *ise* $\Delta : z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *yansımasıdır.*

4. $f(V_1) = V_{12}$ *ise* $f(V_9) = V_4$, $f(V_{13}) = V_{32}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{16}$ *ise* $\Delta : (\varphi - 1)\, x + y + \varphi z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *yansımasıdır.*

5. $f(V_1) = V_5$ *ise* $f(V_9) = V_9$, $f(V_{13}) = V_{21}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{25}$ *ise* $\Delta : (\varphi - 1)\, x + y - \varphi z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

6. $f(V_1) = V_{10}$ *ise* $f(V_9) = V_9$, $f(V_{13}) = V_{23}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{21}$ *ise* $\Delta : (\varphi - 1)\, x - y + \varphi z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

7. $f(V_1) = V_6$ *ise* $f(V_9) = V_2$, $f(V_{13}) = V_{28}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{18}$ *ise* $\Delta : (\varphi - 1)\, x - y - \varphi z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

8. $f(V_1) = V_{11}$ *ise* $f(V_9) = V_8$, $f(V_{13}) = V_{31}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{24}$ *ise* $\Delta : x + \varphi y + (\varphi - 1)\, z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

9. $f(V_1) = V_9$ *ise* $f(V_9) = V_1$, $f(V_{13}) = V_{13}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{25}$ *ise* $\Delta : x - \varphi y + (\varphi - 1)\, z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

10. $f(V_1) = V_1$ *ise* $f(V_9) = V_6$, $f(V_{13}) = V_{27}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{17}$ *ise* $\Delta : -x + \varphi y + (\varphi - 1)\, z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

11. $f(V_1) = V_1$ *ise* $f(V_9) = V_3$, $f(V_{13}) = V_{13}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{15}$ *ise* $\Delta : -x - \varphi y + (\varphi - 1)\, z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

12. $f(V_1) = V_8$ *ise* $f(V_9) = V_7$, $f(V_{13}) = V_{19}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{20}$ *ise* $\Delta : \varphi x + (\varphi - 1)\, y + z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

13. $f(V_1) = V_1$ *ise* $f(V_9) = V_9$, $f(V_{13}) = V_{25}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{13}$ *ise* $\Delta : \varphi x + (\varphi - 1)\, y - z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

14. $f(V_1) = V_1$ *ise* $f(V_9) = V_5$, $f(V_{13}) = V_{17}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{25}$ *ise* $\Delta : -\varphi x + (\varphi - 1)\, y + z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

15. $f(V_1) = V_7$ *ise* $f(V_9) = V_9$, $f(V_{13}) = V_{29}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{23}$ *ise* $\Delta : -\varphi x + (\varphi - 1)\, y - z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

16. $f(V_1) = V_2$ *ise* $f(V_9) = V_{12}$, $f(V_{13}) = V_{16}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{28}$ *ise dönme ekseni* $(1, 0, 0)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

17. $f(V_1) = V_4$ *ise* $f(V_9) = V_{10}$, $f(V_{13}) = V_{14}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{30}$ *ise dönme ekseni* $(0, 1, 0)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

18. $f(V_1) = V_3$ *ise* $f(V_9) = V_{11}$, $f(V_{13}) = V_{15}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{31}$ *ise dönme ekseni* $(0, 0, 1)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

19. $f(V_1) = V_5$ *ise* $f(V_9) = V_1$, $f(V_{13}) = V_{17}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{25}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

20. $f(V_1) = V_9$ *ise* $f(V_9) = V_5$, $f(V_{13}) = V_{21}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{25}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

21. $f(V_1) = V_{10}$ *ise* $f(V_9) = V_7$, $f(V_{13}) = V_{23}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{30}$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

22. $f(V_1) = V_8$ *ise* $f(V_9) = V_3$, $f(V_{13}) = V_{19}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{31}$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$*olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

23. $f(V_1) = V_{11}$ *ise* $f(V_9) = V_8$, $f(V_{13}) = V_{24}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{31}$ *ise dönme eksen* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

24. $f(V_1) = V_6$ *ise* $f(V_9) = V_2$, $f(V_{13}) = V_{18}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{28}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

25. $f(V_1) = V_{12}$ *ise* $f(V_9) = V_6$, $f(V_{13}) = V_{22}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{28}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

26. $f(V_1) = V_7$ *ise* $f(V_9) = V_4$, $f(V_{13}) = V_{20}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{30}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

27. $f(V_1) = V_9$ *ise* $f(V_9) = V_3$, $f(V_{13}) = V_{13}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{29}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}}, \frac{\varphi}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

28. $f(V_1) = V_3$ *ise* $f(V_9) = V_1$, $f(V_{13}) = V_{13}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{15}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}}, \frac{\varphi}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

29. $f(V_1) = V_{11}$ *ise* $f(V_9) = V_6$, $f(V_{13}) = V_{27}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{22}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}}, -\frac{\varphi}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

30. $f(V_1) = V_3$ *ise* $f(V_9) = V_8$, $f(V_{13}) = V_{31}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{19}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}}, -\frac{\varphi}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

31. $f(V_1) = V_2$ *ise* $f(V_9) = V_5$, $f(V_{13}) = V_{18}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{26}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}}, \frac{\varphi}{\sqrt{3}}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

32. $f(V_1) = V_7$ *ise* $f(V_9) = V_{10}$, $f(V_{13}) = V_{30}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{23}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}}, \frac{\varphi}{\sqrt{3}}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

33. $f(V_1) = V_8$ *ise* $f(V_9) = V_7$, $f(V_{13}) = V_{20}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{19}$ *ise dönme ekseni*$(\frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}}, -\frac{\varphi}{\sqrt{3}}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

34. $f(V_1) = V_2$ *ise* $f(V_9) = V_{10}$, $f(V_{13}) = V_{26}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{14}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}}, -\frac{\varphi}{\sqrt{3}}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

35. $f(V_1) = V_6$ *ise* $f(V_9) = V_{11}$, $f(V_{13}) = V_{22}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{27}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\varphi}{\sqrt{3}}, 0, \frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

36. $f(V_1) = V_5$ *ise* $f(V_9) = V_2$, $f(V_{13}) = V_{26}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{18}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\varphi}{\sqrt{3}}, 0, \frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

37. $f(V_1) = V_{10}$ *ise* $f(V_9) = V_4$, $f(V_{13}) = V_{30}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{14}$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{\varphi}{\sqrt{3}}, 0, \frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

38. $f(V_1) = V_{12}$ *ise* $f(V_9) = V_{11}$, $f(V_{13}) = V_{24}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{22}$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{\varphi}{\sqrt{3}}, 0, \frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

39. $f(V_1) = V_5$ *ise* $f(V_9) = V_9$, $f(V_{13}) = V_{25}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{21}$ *ise dönme ekseni* $\left(0, \sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönmedir.*

40. $f(V_1) = V_{10}$ *ise* $f(V_9) = V_9$, $f(V_{13}) = V_{21}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{23}$ *ise dönme ekseni* $\left(0, \sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönmedir.*

41. $f(V_1) = V_7$ *ise* $f(V_9) = V_9$, $f(V_{13}) = V_{23}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{29}$ *ise dönme ekseni* $\left(0, \sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönmedir.*

42. $f(V_1) = V_3$ *ise* $f(V_9) = V_9$, $f(V_{13}) = V_{29}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{13}$ *ise dönme ekseni* $\left(0, \sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönmedir.*

43. $f(V_1) = V_6$ *ise* $f(V_9) = V_5$, $f(V_{13}) = V_{17}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{18}$ *ise dönme ekseni* $\left(0, -\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönmedir.*

44. $f(V_1) = V_{12}$ *ise* $f(V_9) = V_2$, $f(V_{13}) = V_{28}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{16}$ *ise dönme ekseni* $\left(0, -\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönmedir.*

45. $f(V_1) = V_8$ *ise* $f(V_9) = V_4$, $f(V_{13}) = V_{32}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{20}$ *ise dönme ekseni* $\left(0, -\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönmedir.*

46. $f(V_1) = V_3$ *ise* $f(V_9) = V_7$, $f(V_{13}) = V_{19}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{29}$ *ise dönme ekseni* $\left(0, -\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönmedir.*

47. $f(V_1) = V_1$ *ise* $f(V_9) = V_3$, $f(V_{13}) = V_{15}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{13}$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönmedir.*

48. $f(V_1) = V_1$ *ise* $f(V_9) = V_{11}$, $f(V_{13}) = V_{27}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{15}$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönmedir.*

49. $f(V_1) = V_1$ *ise* $f(V_9) = V_6$, $f(V_{13}) = V_{17}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{27}$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönmedir.*

50. $f(V_1) = V_1$ *ise* $f(V_9) = V_5$, $f(V_{13}) = V_{25}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{17}$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönmedir.*

51. $f(V_1) = V_{11}$ *ise* $f(V_9) = V_1$, $f(V_{13}) = V_{15}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{27}$ *ise dönme ekseni* $\left(-\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönmedir.*

52. $f(V_1) = V_8$ *ise* $f(V_9) = V_{11}$, $f(V_{13}) = V_{31}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{24}$ *ise dönme ekseni* $\left(-\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönmedir.*

53. $f(V_1) = V_7$ *ise* $f(V_9) = V_8$, $f(V_{13}) = V_{19}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{20}$ *ise dönme ekseni* $\left(-\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönmedir.*

54. $f(V_1) = V_9$ *ise* $f(V_9) = V_7$, $f(V_{13}) = V_{29}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{23}$ *ise dönme ekseni* $\left(-\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönmedir.*

55. $f(V_1) = V_6$ *ise* $f(V_9) = V_1$, $f(V_{13}) = V_{27}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{17}$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0, \sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönmedir.*

56. $f(V_1) = V_2$ *ise* $f(V_9) = V_6$, $f(V_{13}) = V_{28}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{18}$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0, \sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönmedir.*

57. $f(V_1) = V_{10}$ *ise* $f(V_9) = V_2$, $f(V_{13}) = V_{14}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{26}$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0, \sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönmedir.*

58. $f(V_1) = V_9$ *ise* $f(V_9) = V_{10}$, $f(V_{13}) = V_{23}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{21}$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0, \sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönmedir.*

59. $f(V_1) = V_{11}$ *ise* $f(V_9) = V_3$, $f(V_{13}) = V_{31}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{15}$ *ise dönme ekseni* $\left(-\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0, \sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönmedir.*

60. $f(V_1) = V_{12}$ *ise* $f(V_9) = V_8$, $f(V_{13}) = V_{32}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{24}$ *ise dönme ekseni* $\left(-\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0, \sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönmedir.*

61. $f(V_1) = V_2$ *ise* $f(V_9) = V_4$, $f(V_{13}) = V_{14}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{16}$ *ise dönme ekseni* $\left(-\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0, \sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönmedir.*

62. $f(V_0) = V_5$ *ise* $f(V_9) = V_{10}$, $f(V_{13}) = V_{21}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{26}$ *ise dönme ekseni* $\left(-\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0, \sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}\right))$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönmedir.*

63. $f(V_1) = V_9$ *ise* $f(V_9) = V_1$, $f(V_{13}) = V_{25}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{13}$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{\varphi-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\varphi}{2}\right)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

64. $f(V_1) = V_8$ *ise* $f(V_9) = V_{12}$, $f(V_{13}) = V_{24}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{32}$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{\varphi-1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\varphi}{2}\right)$*olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

65. $f(V_1) = V_{11}$ *ise* $f(V_9) = V_{12}$, $f(V_{13}) = V_{22}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{24}$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{\varphi-1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\varphi}{2}\right)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

66. $f(V_1) = V_7$ *ise* $f(V_9) = V_3$, $f(V_{13}) = V_{29}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{19}$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{\varphi-1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{\varphi}{2}\right)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

67. $f(V_1) = V_{10}$ *ise* $f(V_9) = V_5$, $f(V_{13}) = V_{26}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{21}$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{1}{2}, \frac{\varphi}{2}, \frac{\varphi-1}{2}\right)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

68. $f(V_1) = V_{12}$ *ise* $f(V_9) = V_4$, $f(V_{13}) = V_{16}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{32}$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\varphi}{2}, \frac{\varphi-1}{2}\right)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

69. $f(V_1) = V_4$ *ise* $f(V_9) = V_7$, $f(V_{13}) = V_{30}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{20}$ *ise dönme ekseni* $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\varphi}{2}, \frac{\varphi-1}{2}\right)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

70. $f(V_1) = V_4$ *ise* $f(V_9) = V_2$, $f(V_{13}) = V_{16}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{14}$ *ise dönme ekseni* $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\varphi}{2}, \frac{\varphi-1}{2}\right)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

71. $f(V_1) = V_5$ *ise* $f(V_9) = V_6$, $f(V_{13}) = V_{18}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{17}$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{\varphi}{2}, \frac{\varphi-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$*olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

72. $f(V_1) = V_4$ *ise* $f(V_9) = V_{12}$, $f(V_{13}) = V_{32}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{16}$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{\varphi}{2}, \frac{\varphi-1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

73. $f(V_1) = V_4$ *ise* $f(V_9) = V_8$, $f(V_{13}) = V_{20}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{32}$ *ise dönme ekseni* $\left(-\frac{\varphi}{2}, \frac{\varphi-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

74. $f(V_1) = V_6$ *ise* $f(V_9) = V_{12}$, $f(V_{13}) = V_{28}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{22}$ *ise dönme ekseni* $\left(-\frac{\varphi}{2}, \frac{\varphi-1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

75. $f(V_1) = V_8$ *ise* $f(V_9) = V_4$, $f(V_{13}) = V_{20}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{32}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

76. $f(V_1) = V_{12}$ *ise* $f(V_9) = V_8$, $f(V_{13}) = V_{24}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{32}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

77. $f(V_1) = V_{11}$ *ise* $f(V_9) = V_6$, $f(V_{13}) = V_{22}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{27}$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

78. $f(V_1) = V_5$ *ise* $f(V_9) = V_2$, $f(V_{13}) = V_{18}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{26}$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

79. $f(V_1) = V_{10}$ *ise* $f(V_9) = V_5$, $f(V_{13}) = V_{21}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{26}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

80. $f(V_1) = V_7$ *ise* $f(V_9) = V_3$, $f(V_{13}) = V_{19}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{29}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

81. $f(V_1) = V_9$ *ise* $f(V_9) = V_7$, $f(V_{13}) = V_{23}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{29}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

82. $f(V_1) = V_6$ *ise* $f(V_9) = V_1$, $f(V_{13}) = V_{17}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{27}$ *ise dönme ekseni*$(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

83. $f(V_1) = V_{12}$ *ise* $f(V_9) = V_2$, $f(V_{13}) = V_{16}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{28}$ *ise dönme ekseni* $\left(0, \frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}}, \frac{\varphi}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

84. $f(V_1) = V_2$ *ise* $f(V_9) = V_4$, $f(V_{13}) = V_{16}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{14}$ *ise dönme ekseni* $\left(0, \frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}}, \frac{\varphi}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

85. $f(V_1) = V_{10}$ *ise* $f(V_9) = V_7$, $f(V_{13}) = V_{30}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{23}$ *ise dönme ekseni* $\left(0, \frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}}, -\frac{\varphi}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

86. $f(V_1) = V_2$ *ise* $f(V_9) = V_5$, $f(V_{13}) = V_{26}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{18}$ *ise dönme ekseni* $\left(0, \frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}}, -\frac{\varphi}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

87. $f(V_1) = V_3$ *ise* $f(V_9) = V_8$, $f(V_{13}) = V_{19}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{31}$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}}, \frac{\varphi}{\sqrt{3}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

88. $f(V_1) = V_6$ *ise* $f(V_9) = V_{11}$, $f(V_{13}) = V_{27}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{22}$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}}, \frac{\varphi}{\sqrt{3}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

89. $f(V_1) = V_5$ *ise* $f(V_9) = V_6$, $f(V_{13}) = V_{17}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{18}$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}}, -\frac{\varphi}{\sqrt{3}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

90. $f(V_1) = V_3$ *ise* $f(V_9) = V_{11}$, $f(V_{13}) = V_{31}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{15}$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}}, -\frac{\varphi}{\sqrt{3}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

91. $f(V_1) = V_7$ *ise* $f(V_9) = V_{10}$, $f(V_{13}) = V_{23}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{30}$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{\varphi}{\sqrt{3}}, 0, \frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

92. $f(V_1) = V_8$ *ise* $f(V_9) = V_3$, $f(V_{13}) = V_{31}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{19}$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{\varphi}{\sqrt{3}}, 0, \frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

93. $f(V_1) = V_{11}$ *ise* $f(V_9) = V_1$, $f(V_{13}) = V_{27}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{15}$ *ise dönme ekseni* $\left(-\frac{\varphi}{\sqrt{3}}, 0, \frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

94. $f(V_1) = V_9$ *ise* $f(V_9) = V_{10}$, $f(V_{13}) = V_{21}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{23}$ *ise dönme ekseni* $\left(-\frac{\varphi}{\sqrt{3}}, 0, \frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

95. $f(V_1) = V_8$ *ise* $f(V_9) = V_{12}$, $f(V_{13}) = V_{32}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{24}$ *ise dönme ekseni* $\left(0, \sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\right)$*e olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

96. $f(V_1) = V_{11}$ *ise* $f(V_9) = V_{12}$, $f(V_{13}) = V_{24}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{22}$ *ise dönme ekseni* $\left(0, \sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\right)$*olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

97. $f(V_1) = V_6$ *ise* $f(V_9) = V_{12}$, $f(V_{13}) = V_{22}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{28}$ *ise dönme ekseni* $\left(0, \sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

98. $f(V_1) = V_2$ *ise* $f(V_9) = V_{12}$, $f(V_{13}) = V_{28}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{16}$ *ise dönme ekseni* $\left(0, \sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\right)$ *olmk üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

99. $f(V_1) = V_7$ *ise* $f(V_9) = V_8$, $f(V_{13}) = V_{20}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{19}$ *ise dönme ekseni* $\left(0, -\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

100. $f(V_1) = V_9$ *ise* $f(V_9) = V_3$, $f(V_{13}) = V_{29}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{13}$ *ise dönme ekseni* $\left(0, -\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

101. $f(V_1) = V_5$ *ise* $f(V_9) = V_1$, $f(V_{13}) = V_{25}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{17}$ *ise dönme ekseni* $\left(0, -\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

102. $f(V_1) = V_2$ *ise* $f(V_9) = V_6$, $f(V_{13}) = V_{18}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{28}$ *ise dönme ekseni* $\left(0, -\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

103. $f(V_1) = V_4$ *ise* $f(V_9) = V_2$, $f(V_{13}) = V_{14}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{16}$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0, \sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

104. $f(V_1) = V_4$ *ise* $f(V_9) = V_{10}$, $f(V_{13}) = V_{30}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{14}$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0, \sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

105. $f(V_1) = V_4$ *ise* $f(V_9) = V_7$, $f(V_{13}) = V_{20}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{30}$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0, \sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

106. $f(V_1) = V_4$ *ise* $f(V_9) = V_8$, $f(V_{13}) = V_{32}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{20}$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0, \sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

107. $f(V_1) = V_{10}$ *ise* $f(V_9) = V_4$, $f(V_{13}) = V_{14}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{30}$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0, -\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

108. $f(V_1) = V_5$ *ise* $f(V_9) = V_{10}$, $f(V_{13}) = V_{26}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{21}$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0, -\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}\right)$*olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

109. $f(V_1) = V_6$ *ise* $f(V_9) = V_5$, $f(V_{13}) = V_{18}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{17}$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0, -\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

110. $f(V_1) = V_{12}$ *ise* $f(V_9) = V_6$, $f(V_{13}) = V_{28}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{22}$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0, -\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

111. $f(V_1) = V_7$ *ise* $f(V_9) = V_4$, $f(V_{13}) = V_{30}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{20}$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0\right)$*eksenine göre* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

112. $f(V_1) = V_3$ *ise* $f(V_9) = V_7$, $f(V_{13}) = V_{29}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{19}$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

113. $f(V_1) = V_{11}$ *ise* $f(V_9) = V_3$, $f(V_{13}) = V_{15}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{31}$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

114. $f(V_1) = V_{12}$ *ise* $f(V_9) = V_{11}$, $f(V_{13}) = V_{27}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{24}$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

115. $f(V_1) = V_{10}$ *ise* $f(V_9) = V_2$, $f(V_{13}) = V_{26}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{14}$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, -\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

116. $f(V_1) = V_9$ *ise* $f(V_9) = V_5$, $f(V_{13}) = V_{25}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{21}$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, -\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

117. $f(V_1) = V_3$ *ise* $f(V_9) = V_1$, $f(V_{13}) = V_{15}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{13}$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, -\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

118. $f(V_1) = V_8$ *ise* $f(V_9) = V_{11}$, $f(V_{13}) = V_{24}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{31}$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, -\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

119. $f(V_1) = V_1$ *ise* $f(V_9) = V_9$, $f(V_{13}) = V_{13}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{25}$ *ise* f *birim dönüşümdür.*

120. $f(V_1) = V_4$ *ise* $f(V_9) = V_{12}$, $f(V_{13}) = V_{16}$ *ve* $f(V_{25}) = V_{32}$ *ise* f *inversiyondur.*

Buna göre orijini koruyan f *izometrisi* $G(RT)$ *nin bir elemanıdır. Bir başka deyişle rhombic triacontahedron uzaklığını koruyan Öklidyen izometriler dışında bir izometri yoktur.*

Önerme 6.8 $f : \mathbb{R}^3_{RT} \to \mathbb{R}^3_{RT}$ *dönüşümü bir izometri olsun.* $f = T_A \circ g$ *olacak şekilde bir tek* $T_A \in T(3)$ *ve* $g \in G(RT)$ *vardır.*

İspat $A = (a_1, a_2, a_3)$ *olmak üzere* $f(O) = A$ *olsun. Bu taktirde* $g = T_{-A} \circ f$ *olacak şekilde tanımlı* g *dönüşümü bir izometridir ve* $g(O) = O$ *olur. Böylece Önerme 5.7 den dolayı* $g \in G(D)$ *ve* $f = T_A \circ g$ *olur. İspatın tekliği aşikardır.*

Buna göre rhombic triacontahedron metriği ile donatılmış analitik $3-$uzayın izometrilerinin grubu rhombic triacontahedronun (Öklidyen) simetri grubu olan I_h ile $3-$boyutlu analitik uzayın tüm ötelemelerinin grubu olan $T(3)$ ün yarı-direkt çarpımıdır. Yani $\mathbb{R}^3_{RT}$ nın tüm izometrilerinin kümesi $T(3).G(RT)$ dir.

7. DİSDYAKİS TRİACONTAHEDRON UZAYI

7.1 Disdyakis Triacontahedron Metriği ve Özellikleri

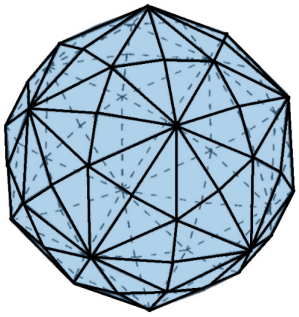
Truncated icosidodecahedronun duali olan disdyakis triacontahedron, hexakis icosahedron ya da kisrhombic triacontahedron 120 yüze sahip bir katalan cismidir. Rhombic triacontahedronun her bir yüzüne düzgün bir şekilde tek bir köşede buluşan 4 er üçgen yerleştirilirse disdyakis triacontahedron elde edilir, yani disdyakis triacontahedron rhombic triacontahedronun Kleetopudur. Bu cisim Katalan ve Arşimed cisimleri arasında en çok yüze sahip olanıdır.

Birim küresi disdyakis triacontahedron olan uzaklık fonksiyonu d_{DT} ile gösterilir ve bu uzaklık fonksiyonunun metrik aksiyomlarını sağladığı ve bazı özellikleri (Can, Çolak ve Gelişgen, 2015) kaynağından verilmektedir.

Tanım 7.1 *$P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ $\mathbb{R}^3$ te iki farklı nokta olsun. $|\alpha_1| = |x_1 - x_2|, |\alpha_2| = |y_1 - y_2|$ ve $|\alpha_3| = |z_1 - z_2|$ olmak üzere*

$$d_{DT}(P_1, P_2) = \max \left\{ \begin{array}{l} |\alpha_1| + \frac{4\varphi-5}{11} \max \left\{ \begin{array}{l} |\alpha_2| + |\alpha_3|, \\ (1-\varphi)|\alpha_1| + 2|\alpha_2| + (1+\varphi)|\alpha_3|, \\ -\varphi|\alpha_1| + (2+\varphi)|\alpha_2| + 2\varphi|\alpha_3|, \\ (1-2\varphi)|\alpha_1| + (1+\varphi)|\alpha_2| + 3\varphi|\alpha_3|, \\ 2(1-\varphi)|\alpha_1| + |\alpha_2| + (2\varphi+1)|\alpha_3| \end{array} \right\}, \\ |\alpha_2| + \frac{4\varphi-5}{11} \max \left\{ \begin{array}{l} |\alpha_1| + |\alpha_3|, \\ (1+\varphi)|\alpha_1| + (1-\varphi)|\alpha_2| + 2|\alpha_3|, \\ 2\varphi|\alpha_1| - \varphi|\alpha_2| + (2+\varphi)|\alpha_3|, \\ 3\varphi|\alpha_1| + (1-2\varphi)|\alpha_2| + (1+\varphi)|\alpha_3|, \\ (2\varphi+1)|\alpha_1| + 2(1-\varphi)|\alpha_2| + |\alpha_3| \end{array} \right\}, \\ |\alpha_3| + \frac{4\varphi-5}{11} \max \left\{ \begin{array}{l} |\alpha_1| + |\alpha_2|, \\ 2|\alpha_1| + (1+\varphi)|\alpha_2| + (1-\varphi)|\alpha_3|, \\ (2+\varphi)|\alpha_1| + 2\varphi|\alpha_2| - \varphi|\alpha_3|, \\ (1+\varphi)|\alpha_1| + 3\varphi|\alpha_2| + (1-2\varphi)|\alpha_3|, \\ |\alpha_1| + (2\varphi+1)|\alpha_2| + 2(1-\varphi)|\alpha_3| \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

biçiminde tanımlanan $d_{DT} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to [0, \infty)$ uzaklık fonksiyonuna disdyakis triacontahedron uzaklık fonksiyonu denir.



Şekil 7.1 Disdyakis Triacontahedron

Yardımcı Teorem 7.1 *$P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ $\mathbb{R}^3$ te iki farklı nokta olsun. Bu durumda*

$$d_{DT}(P_1, P_2) \geq |x_1 - x_2| + \tfrac{4\varphi-5}{11} \max \left\{ \begin{array}{l} |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|, \\ (1-\varphi)|x_1 - x_2| + 2|y_1 - y_2| + (1+\varphi)|z_1 - z_2|, \\ -\varphi|x_1 - x_2| + (2+\varphi)|y_1 - y_2| + 2\varphi|z_1 - z_2|, \\ (1-2\varphi)|x_1 - x_2| + (1+\varphi)|y_1 - y_2| + 3\varphi|z_1 - z_2|, \\ 2(1-\varphi)|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + (2\varphi+1)|z_1 - z_2| \end{array} \right\}$$

$$d_{DT}(P_1, P_2) \geq |y_1 - y_2| + \tfrac{4\varphi-5}{11} \max \left\{ \begin{array}{l} |x_1 - x_2| + |z_1 - z_2|, \\ (1+\varphi)|x_1 - x_2| + (1-\varphi)|y_1 - y_2| + 2|z_1 - z_2|, \\ 2\varphi|x_1 - x_2| - \varphi|y_1 - y_2| + (2+\varphi)|z_1 - z_2|, \\ 3\varphi|x_1 - x_2| + (1-2\varphi)|y_1 - y_2| + (1+\varphi)|z_1 - z_2|, \\ (2\varphi+1)|x_1 - x_2| + 2(1-\varphi)|y_1 - y_2| + |z_1 - z_2| \end{array} \right\}$$

$$d_{DT}(P_1, P_2) \geq |z_1 - z_2| + \tfrac{4\varphi-5}{11} \max \left\{ \begin{array}{l} |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|, \\ 2|x_1 - x_2| + (1+\varphi)|y_1 - y_2| + (1-\varphi)|z_1 - z_2|, \\ (2+\varphi)|x_1 - x_2| + 2\varphi|y_1 - y_2| - \varphi|z_1 - z_2|, \\ (1+\varphi)|x_1 - x_2| + 3\varphi|y_1 - y_2| + (1-2\varphi)|z_1 - z_2|, \\ |x_1 - x_2| + (2\varphi+1)|y_1 - y_2| + 2(1-\varphi)|z_1 - z_2| \end{array} \right\}$$

dır.

İspat *Maksimum fonksiyonun tanımından ispat aşikardır.*

Teorem 7.1 *$\mathbb{R}^3$ te d_{DT} uzaklık fonksiyonu metriktir ve bu metrikle donatılmış uzayın birim küresi disdyakis triacontahedrondur.*

İspat *$d_{DT} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ disdyakis triacontahedron uzaklık fonksiyonu ve P_1=(x_1, y_1, z_1), P_2=(x_2, y_2, z_2) ve P_3=(x_3, y_3, z_3) $\mathbb{R}^3$ te üç farklı nokta olsun. d_{DT} uzaklık fonksiyonu her $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^3$ için aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa $\mathbb{R}^3$ te bir metriktir.*

M1) $d_{DT}(P_1, P_2) \geq 0$ *ve* $d_{DT}(P_1, P_2) = 0 \Leftrightarrow P_1 = P_2$
M2) $d_{DT}(P_1, P_2) = d_{DT}(P_2, P_1)$
M3) $d_{DT}(P_1, P_3) \leq d_{DT}(P_1, P_2) + d_{DT}(P_2, P_3)$.

M1) *Mutlak değer her zaman negatif olmayan değerler üreteceğinden dolayı mutlak değerlerin pozitif sayılarla çarpılıp toplanmasının maksimumu da pozitiftir. Böylece,* $|\alpha_1| = |x_1 - x_2|, |\alpha_2| = |y_1 - y_2|$ *ve* $|\alpha_3| = |z_1 - z_2|$ *olmak üzere*

$$d_{DT}(P_1, P_2) = \max \left\{ \begin{array}{l} |\alpha_1| + \frac{4\varphi-5}{11} \max \left\{ \begin{array}{l} |\alpha_2| + |\alpha_3|, \\ (1-\varphi)|\alpha_1| + 2|\alpha_2| + (1+\varphi)|\alpha_3|, \\ -\varphi|\alpha_1| + (2+\varphi)|\alpha_2| + 2\varphi|\alpha_3|, \\ (1-2\varphi)|\alpha_1| + (1+\varphi)|\alpha_2| + 3\varphi|\alpha_3|, \\ 2(1-\varphi)|\alpha_1| + |\alpha_2| + (2\varphi+1)|\alpha_3| \end{array} \right\}, \\ |\alpha_2| + \frac{4\varphi-5}{11} \max \left\{ \begin{array}{l} |\alpha_1| + |\alpha_3|, \\ (1+\varphi)|\alpha_1| + (1-\varphi)|\alpha_2| + 2|\alpha_3|, \\ 2\varphi|\alpha_1| - \varphi|\alpha_2| + (2+\varphi)|\alpha_3|, \\ 3\varphi|\alpha_1| + (1-2\varphi)|\alpha_2| + (1+\varphi)|\alpha_3|, \\ (2\varphi+1)|\alpha_1| + 2(1-\varphi)|\alpha_2| + |\alpha_3| \end{array} \right\}, \\ \alpha_3 + \frac{4\varphi-5}{11} \max \left\{ \begin{array}{l} |\alpha_1| + |\alpha_2|, \\ 2|\alpha_1| + (1+\varphi)|\alpha_2| + (1-\varphi)|\alpha_3|, \\ (2+\varphi)|\alpha_1| + 2\varphi|\alpha_2| - \varphi|\alpha_3|, \\ (1+\varphi)|\alpha_1| + 3\varphi|\alpha_2| + (1-2\varphi)|\alpha_3|, \\ |\alpha_1| + (2\varphi+1)|\alpha_2| + 2(1-\varphi)|\alpha_3| \end{array} \right\} \end{array} \right\} \geq 0$$

dır. Yani d_{DT} *pozitif tanımlıdır.Eğer* $|\alpha_1| = |x_1 - x_2|, |\alpha_2| = |y_1 - y_2|$ *ve* $|\alpha_3| = |z_1 - z_2|$ *olmak üzere*

$$d_{DT}(P_1, P_2) = \max \left\{ \begin{array}{l} |\alpha_1| + \frac{4\varphi-5}{11} \max \left\{ \begin{array}{l} |\alpha_2| + |\alpha_3|, \\ (1-\varphi)|\alpha_1| + 2|\alpha_2| + (1+\varphi)|\alpha_3|, \\ -\varphi|\alpha_1| + (2+\varphi)|\alpha_2| + 2\varphi|\alpha_3|, \\ (1-2\varphi)|\alpha_1| + (1+\varphi)|\alpha_2| + 3\varphi|\alpha_3|, \\ 2(1-\varphi)|\alpha_1| + |\alpha_2| + (2\varphi+1)|\alpha_3| \end{array} \right\}, \\ |\alpha_2| + \frac{4\varphi-5}{11} \max \left\{ \begin{array}{l} |\alpha_1| + |\alpha_3|, \\ (1+\varphi)|\alpha_1| + (1-\varphi)|\alpha_2| + 2|\alpha_3|, \\ 2\varphi|\alpha_1| - \varphi|\alpha_2| + (2+\varphi)|\alpha_3|, \\ 3\varphi|\alpha_1| + (1-2\varphi)|\alpha_2| + (1+\varphi)|\alpha_3|, \\ (2\varphi+1)|\alpha_1| + 2(1-\varphi)|\alpha_2| + |\alpha_3| \end{array} \right\}, \\ |\alpha_3| + \frac{4\varphi-5}{11} \max \left\{ \begin{array}{l} |\alpha_1| + |\alpha_2|, \\ 2|\alpha_1| + (1+\varphi)|\alpha_2| + (1-\varphi)|\alpha_3|, \\ (2+\varphi)|\alpha_1| + 2\varphi|\alpha_2| - \varphi|\alpha_3|, \\ (1+\varphi)|\alpha_1| + 3\varphi|\alpha_2| + (1-2\varphi)|\alpha_3|, \\ |\alpha_1| + (2\varphi+1)|\alpha_2| + 2(1-\varphi)|\alpha_3| \end{array} \right\} \end{array} \right\} = 0$$

$\Rightarrow |x_1 - x_2| = 0,\ |y_1 - y_2| = 0,\ |z_1 - z_2| = 0$

$\Rightarrow x_1 = x_2,\ y_1 = y_2,\ z_1 = z_2$

$\Rightarrow P_1 = P_2$

dir. Tersine P_1=P_2 *ise* $|x_1-x_2|$=0, $|y_1-y_2|$=0 *ve* $|z_1-z_2|$=0 *olacağından* $d_{DT}(P_1,P_2)$=0 *olur.*

M2) *Mutlak değerden* $|x_1-x_2|$=$|x_2-x_1|$, $|y_1-y_2|$=$|y_2-y_1|$ *ve* $|z_1-z_2|$=$|z_2-z_1|$ *dir. Buradan açıkça* $d_{DT}(P_1,P_2)$=$d_{DT}(P_2,P_1)$ *dir. Yani,* d_{DT} *simetriktir.*

M3) $P_1=(x_1,y_1,z_1), P_2=(x_2,y_2,z_2)$ *ve* $P_3=(x_3,y_3,z_3)\in\mathbb{R}^3$ *olsun. Bu durumda*

$$d_{DT}(P_1,P_3)\leq d_{DT}(P_1,P_2)+d_{DT}(P_2,P_3)$$

olduğu gösterilmelidir.

$$d_{DT}(P_1,P_3)$$
$$=\max\left\{\begin{array}{l}
|x_1-x_3|+\frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}|y_1-y_3|+|z_1-z_3|,\\(1-\varphi)|x_1-x_3|+2|y_1-y_3|+(1+\varphi)|z_1-z_3|,\\-\varphi|x_1-x_3|+(2+\varphi)|y_1-y_3|+2\varphi|z_1-z_3|,\\(1-2\varphi)|x_1-x_3|+(1+\varphi)|y_1-y_3|+3\varphi|z_1-z_3|,\\2(1-\varphi)|x_1-x_3|+|y_1-y_3|+(2\varphi+1)|z_1-z_3|\end{array}\right\},\\
|y_1-y_3|+\frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}|x_1-x_3|+|z_1-z_3|,\\(1+\varphi)|x_1-x_3|+(1-\varphi)|y_1-y_3|+2|z_1-z_3|,\\2\varphi|x_1-x_3|-\varphi|y_1-y_3|+(2+\varphi)|z_1-z_3|,\\3\varphi|x_1-x_3|+(1-2\varphi)|y_1-y_3|+(1+\varphi)|z_1-z_3|,\\(2\varphi+1)|x_1-x_3|+2(1-\varphi)|y_1-y_3|+|z_1-z_3|\end{array}\right\},\\
|z_1-z_3|+\frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}|x_1-x_3|+|y_1-y_3|,\\2|x_1-x_3|+(1+\varphi)|y_1-y_3|+(1-\varphi)|z_1-z_3|,\\(2+\varphi)|x_1-x_3|+2\varphi|y_1-y_3|-\varphi|z_1-z_3|,\\(1+\varphi)|x_1-x_3|+3\varphi|y_1-y_3|+(1-2\varphi)|z_1-z_3|,\\|x_1-x_3|+(2\varphi+1)|y_1-y_3|+2(1-\varphi)|z_1-z_3|\end{array}\right\}
\end{array}\right\}$$

ifadesinde

$|x_1-x_3|$ *yerine* $|x_1-x_2+x_2-x_3|$,

$|y_1-y_3|$ *yerine* $|y_1-y_2+y_2-y_3|$ *ve*

$|z_1-z_3|$ *yerine* $|z_1-z_2+z_2-z_3|$ *yazılır*

$|x_1-x_2+x_2-x_3|\leq|x_1-x_2|+|x_2-x_3|$,

$|y_1-y_2+y_2-y_3|\leq|y_1-y_2|+|y_2-y_3|$ *ve*

$|z_1-z_2+z_2-z_3|\leq|z_1-z_2|+|z_2-z_3|$ *olduğu kullanılır*

$|\alpha_1|=|x_1-x_2|$, $|\alpha_2|=|x_2-x_3|$, $|\beta_1|=|y_1-y_2|$, $|\beta_2|=|y_2-y_3|$, $|\gamma_1|=|z_1-z_2|$, $|\gamma_2|=|z_2-z_3|$ *denilirse*

$$
\begin{aligned}
&d_{DT}(P_1,P_3)\\
&\leq \max\left\{\begin{array}{l}
|\alpha_1|+\frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}|\beta_1|+|\gamma_1|,(1-\varphi)|\alpha_1|+2|\beta_1|+\\(1+\varphi)|\gamma_1|,-\varphi|\alpha_1|+(2+\varphi)|\beta_1|+\\2\varphi|\gamma_1|,(1-2\varphi)|\alpha_1|+(1+\varphi)|\beta_1|+3\varphi|\gamma_1|,\\2(1-\varphi)|\alpha_1|+|\beta_1|+(2\varphi+1)|\gamma_1|\end{array}\right\},\\
|\beta_1|+\frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}|\alpha_1|+|\gamma_1|,(1+\varphi)|\alpha_1|+(1-\varphi)|\beta_1|+\\2|\gamma_1|,2\varphi|\alpha_1|-\varphi|\beta_1|+(2+\varphi)|\gamma_1|,3\varphi(|\alpha_1|)\\+(1-2\varphi)|\beta_1|+(1+\varphi)\gamma_1,(2\varphi+1)|\alpha_1|+\\2(1-\varphi)|\beta_1|+|\gamma_1|\end{array}\right\},\\
|\gamma_1|+\frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}|\alpha_1|+|\beta_1|,2|\alpha_1|+(1+\varphi)|\beta_1|+(1-\varphi)|\gamma_1|,\\(2+\varphi)|\alpha_1|+2\varphi|\beta_1|-\varphi|\gamma_1|,(1+\varphi)|\alpha_1|+\\3\varphi|\beta_1|+(1-2\varphi)|\gamma_1|,|\alpha_1|+(2\varphi+1)|\beta_1|+\\2(1-\varphi)|\gamma_1|\end{array}\right\}
\end{array}\right\}+\\
&\max\left\{\begin{array}{l}
|\alpha_2|+\frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}|\beta_2|+|\gamma_2|,(1-\varphi)|\alpha_2|+2|\beta_2|+(1+\varphi)|\gamma_2|,\\-\varphi|\alpha_2|+(2+\varphi)|\beta_2|+2\varphi|\gamma_2|,(1-2\varphi)|\alpha_2|+\\(1+\varphi)|\beta_2|+3\varphi|\gamma_2|,2(1-\varphi)|\alpha_2|+|\beta_2|+\\(2\varphi+1)|\gamma_2|\end{array}\right\},\\
|\beta_2|+\frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}|\alpha_2|+|\gamma_2|,(1+\varphi)|\alpha_2|+(1-\varphi)|\beta_2|+\\2|\gamma_2|,2\varphi|\alpha_2|-\varphi|\beta_2|+(2+\varphi)|\gamma_2|,3\varphi|\alpha_2|+\\(1-2\varphi)|\beta_2|+(1+\varphi)|\gamma_2|,\\(2\varphi+1)|\alpha_2|+2(1-\varphi)|\beta_2|+|\gamma_2|\end{array}\right\},\\
|\gamma_2|+\frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}|\alpha_2|+|\beta_2|,2|\alpha_2|+(1+\varphi)|\beta_2|+(1-\varphi)|\gamma_2|,\\(2+\varphi)|\alpha_2|+2\varphi|\beta_2|-\varphi|\gamma_2|,(1+\varphi)|\alpha_2|+\\3\varphi|\beta_2|+(1-2\varphi)|\gamma_2|,|\alpha_2|+(2\varphi+1)|\beta_2|+\\2(1-\varphi)|\gamma_2|\end{array}\right\}
\end{array}\right\}\\
&=I
\end{aligned}
$$

dır. Burada Yardımcı Teorem 6.1 den dolayı

$$
d_{DT}(P_1,P_2)\geq \max\left\{\begin{array}{l}
|\alpha_1|+\frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}|\beta_1|+|\gamma_1|,(1-\varphi)|\alpha_1|+2|\beta_1|+\\(1+\varphi)|\gamma_1|,-\varphi|\alpha_1|+(2+\varphi)|\beta_1|+\\2\varphi|\gamma_1|,(1-2\varphi)|\alpha_1|+(1+\varphi)|\beta_1|+3\varphi|\gamma_1|,\\2(1-\varphi)|\alpha_1|+|\beta_1|+(2\varphi+1)|\gamma_1|\end{array}\right\},\\
|\beta_1|+\frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}|\alpha_1|+|\gamma_1|,(1+\varphi)|\alpha_1|+(1-\varphi)|\beta_1|+\\2|\gamma_1|,2\varphi|\alpha_1|-\varphi|\beta_1|+(2+\varphi)|\gamma_1|,3\varphi(|\alpha_1|)+\\(1-2\varphi)|\beta_1|+(1+\varphi)\gamma_1,(2\varphi+1)|\alpha_1|+\\2(1-\varphi)|\beta_1|+|\gamma_1|\end{array}\right\},\\
|\gamma_1|+\frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}|\alpha_1|+|\beta_1|,2|\alpha_1|+(1+\varphi)|\beta_1|+(1-\varphi)|\gamma_1|,\\(2+\varphi)|\alpha_1|+2\varphi|\beta_1|-\varphi|\gamma_1|,(1+\varphi)|\alpha_1|+\\3\varphi|\beta_1|+(1-2\varphi)|\gamma_1|,|\alpha_1|+(2\varphi+1)|\beta_1|+\\2(1-\varphi)|\gamma_1|\end{array}\right\}
\end{array}\right\},
$$

ve

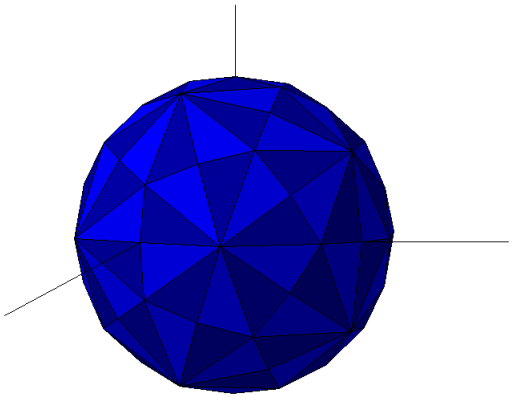
$$d_{DT}(P_2,P_3) \geq \max \left\{ \begin{array}{l} |\alpha_2| + \frac{4\varphi-5}{11} \max \left\{ \begin{array}{l} |\beta_2| + |\gamma_2|, (1-\varphi)|\alpha_2| + 2|\beta_2| + (1+\varphi)|\gamma_2|, \\ -\varphi|\alpha_2| + (2+\varphi)|\beta_2| + 2\varphi|\gamma_2|, (1-2\varphi)|\alpha_2| + \\ (1+\varphi)|\beta_2| + 3\varphi|\gamma_2|, 2(1-\varphi)|\alpha_2| + |\beta_2| + \\ (2\varphi+1)|\gamma_2| \end{array} \right\}, \\ |\beta_2| + \frac{4\varphi-5}{11} \max \left\{ \begin{array}{l} |\alpha_2| + |\gamma_2|, (1+\varphi)|\alpha_2| + (1-\varphi)|\beta_2| + \\ 2|\gamma_2|, 2\varphi|\alpha_2| - \varphi|\beta_2| + (2+\varphi)|\gamma_2|, 3\varphi|\alpha_2| + \\ (1-2\varphi)|\beta_2| + (1+\varphi)|\gamma_2|, \\ (2\varphi+1)|\alpha_2| + 2(1-\varphi)|\beta_2| + |\gamma_2| \end{array} \right\}, \\ |\gamma_2| + \frac{4\varphi-5}{11} \max \left\{ \begin{array}{l} |\alpha_2| + |\beta_2|, 2|\alpha_2| + (1+\varphi)|\beta_2| + (1-\varphi)|\gamma_2|, \\ (2+\varphi)|\alpha_2| + 2\varphi|\beta_2| - \varphi|\gamma_2|, (1+\varphi)|\alpha_2| + \\ 3\varphi|\beta_2| + (1-2\varphi)|\gamma_2|, |\alpha_2| + (2\varphi+1)|\beta_2| + \\ 2(1-\varphi)|\gamma_2| \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

olur. O halde $I \leq d_{DT}(P_1,P_2) + d_{DT}(P_2,P_3)$ *bulunur. Buna göre* $d_{DT}(P_1,P_3) \leq d_{DT}(P_1,P_2) + d_{DT}(P_2,P_3)$ *elde edilir. Yani disdyakis triacontahedron uzaklık fonksiyonu üçgen eşitsizliğini sağlar.*

Sonuç olarak disdyakis triacontahedron uzaklık fonksiyonu metriktir. Ayrıca bu metrikle donatılmış analitik $3-$*uzayda orijinden* 1 *birim disdyakis triacontahedron uzaklığındaki noktaların kümesi* $\alpha_1 = 1-\varphi$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 1+\varphi$, $\beta_1 = -\varphi$, $\beta_2 = 2+\varphi$, $\beta_3 = 2\varphi$, $\gamma_1 = 1-2\varphi$, $\gamma_2 = 1+\varphi$, $\gamma_3 = 3\varphi$, $\delta_1 = \frac{4\varphi-5}{11}$, $\delta_2 = 2(1-\varphi)$, $\delta_3 = 2\varphi+1$ *olmak üzere*

$$S_{DT} = \left\{ (x,y,z) : d_{DT}(X,0) = \max \left\{ \begin{array}{l} |x| + \delta_1 \max \left\{ \begin{array}{l} |y| + |z|, \\ \alpha_1|x| + \alpha_2|y| + \alpha_3|z|, \\ \beta_1|x| + \beta_2|y| + \beta_3|z|, \\ \gamma_1|x| + \gamma_2|y| + \gamma_3|z|, \\ \delta_2|x| + |y| + \delta_3|z| \end{array} \right\}, \\ |y| + \delta_1 \max \left\{ \begin{array}{l} |x| + |z|, \\ \alpha_3|x| + \alpha_1|y| + \alpha_2|z|, \\ \beta_3|x| + \beta_1|y| + \beta_2|z|, \\ \gamma_3|x| + \gamma_1|y| + \gamma_2|z|, \\ \delta_3|x| + \delta_2|y| + |z| \end{array} \right\}, \\ |z| + \delta_1 \max \left\{ \begin{array}{l} |x| + |y|, \\ \alpha_2|x| + \alpha_3|y| + \alpha_1|z|, \\ \beta_2|x| + \beta_3|y| + \beta_1|z|, \\ \gamma_2|x| + \gamma_3|y| + \gamma_1|z|, \\ |x| + \delta_3|y| + \delta_2|z| \end{array} \right\} \end{array} \right\} = 1 \right\}$$

olup bu noktaların geometrik yeri şekil7.2 de görüldüğü gibi disdyakis triacontahedrondur.



Şekil 7.2 Disdyakis Triacontahedronun Koordinat Sistemine Yerleştirilmesi

Disdyakis triacontahedron uzaklık fonksiyonu bir hayli karmaşık gözükmesine rağmen apsisler, ordinatlar ve kotlar farkı arasında bir yönlendirme vardır. Bu yönlendirme ise $|x_1 - x_2|$-$|y_1 - y_2|$-$|z_1 - z_2|$-$|x_1 - x_2|$ şeklindedir. Buna göre d_{DT} fonksiyonunda yer alan üç ifadeden herhangi birinde $|x_1 - x_2|$ yerine $|y_1 - y_2|$, $|y_1 - y_2|$ yerine $|z_1 - z_2|$ ve $|z_1 - z_2|$ yerine $|x_1 - x_2|$ yazıldığında diğer bir ifadeye ulaşılır. Geometrik olarak P_1 noktasından P_2 noktasına olan yol için beş farklı olasılık vardır. Buna göre bu yollar aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

(i) Biri koordinat eksenlerinden birine paralel diğerleri diğer koordinat eksenlerinden biri ile arctan $\left(\frac{10\sqrt{5}+18}{11}\right)$ radyanlık açı yapan üç doğru parçasının birleşimidir.

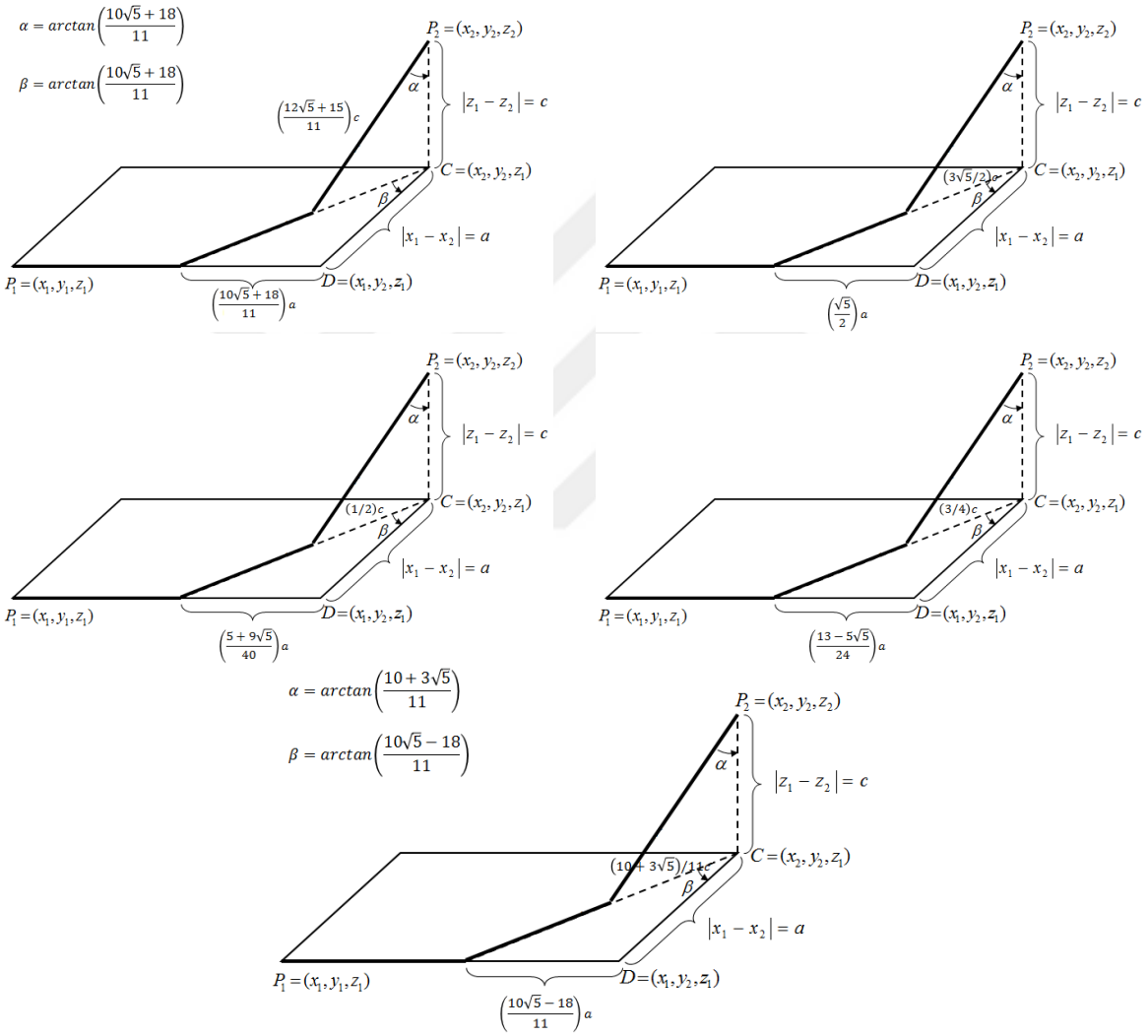
(ii) Biri koordinat eksenlerinden birine paralel diğerleri ise diğer koordinat eksenlerinden birisi ile arctan $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ ve arctan $\left(\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$ radyanlık açı yapan üç doğru parçasının birleşimidir.

(iii) Biri koordinat eksenlerinden birine paralel diğerleri ise diğer koordinat eksenlerinden birisi ile arctan $\left(\frac{1}{2}\right)$ ve arctan $\left(\frac{5+9\sqrt{5}}{40}\right)$ radyanlık açı yapan üç doğru parçasının birleşimidir.

(iv) Biri koordinat eksenlerinden birine paralel diğerleri ise diğer koordinat eksenlerinden birisi ile arctan $\left(\frac{3}{4}\right)$ ve arctan $\left(\frac{13-5\sqrt{5}}{24}\right)$ radyanlık açı yapan üç doğru parçasının birleşimidir.

(v) Biri koordinat eksenlerinden birine paralel diğerleri ise diğer koordinat eksenlerinden birisi ile arctan $\left(\frac{10\sqrt{5}-18}{11}\right)$ ve arctan $\left(\frac{10+3\sqrt{5}}{11}\right)$ radyanlık açı yapan üç doğru parçasının birleşimidir.

Böylece P_1 ve P_2 noktaları arasındaki disdyakis triacontahedron uzaklığı yukarıdaki durumlarda bahsedilen üç doğru parçasının Öklidyen uzunlukları toplamının (i) için kendisi, (ii) için $\frac{9+5\sqrt{5}}{22}$ katı, (iii) için $\frac{15+\sqrt{5}}{22}$ katı, (iv) için $\frac{1+3\sqrt{5}}{11}$ katı ve (v) için $\frac{5\sqrt{5}-2}{11}$ katıdır.



Şekil 7.3 Disdyakis Triacontahedron Uzaklığına Göre İki Nokta Arasındaki Yollar

Sonuç 7.1 $\mathbb{R}^3_{DT}$ *de* (x_0, y_0, z_0) *merkezli ve* r *yarıçaplı küre* $\alpha_1 = 1-\varphi$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 1+\varphi$, $\beta_1 = -\varphi$, $\beta_2 = 2+\varphi$, $\beta_3 = 2\varphi$, $\gamma_1 = 1-2\varphi$, $\gamma_2 = 1+\varphi$, $\gamma_3 = 3\varphi$, $\delta_1 = \frac{4\varphi-5}{11}$, $\delta_2 = 2(1-\varphi)$, $\delta_3 = 2\varphi+1$ *olmak üzere*

$$\max\left\{\begin{array}{l} |x-x_0|+\delta_1 \max\left\{\begin{array}{l} |y-y_0|+|z-z_0|, \\ \alpha_1|x-x_0|+\alpha_2|y-y_0|+\alpha_3|z-z_0|, \\ \beta_1|x-x_0|+\beta_2|y-y_0|+\beta_3|z-z_0|, \\ \gamma_1|x-x_0|+\gamma_2|y-y_0|+\gamma_3|z-z_0|, \\ \delta_2|x-x_0|+|y-y_0|+\delta_3|z-z_0| \end{array}\right\}, \\ |y-y_0|+\delta_1 \max\left\{\begin{array}{l} |x-x_0|+|z-z_0|, \\ \alpha_3|x-x_0|+\alpha_1|y-y_0|+\alpha_2|z-z_0|, \\ \beta_3|x-x_0|+\beta_1|y-y_0|+\beta_2|z-z_0|, \\ \gamma_3|x-x_0|+\gamma_1|y-y_0|+\gamma_2|z-z_0|, \\ \delta_3|x-x_0|+\delta_2|y-y_0|+|z-z_0| \end{array}\right\}, \\ |z-z_0|+\delta_1 \max\left\{\begin{array}{l} |x-x_0|+|y-y_0|, \\ \alpha_2|x-x_0|+\alpha_3|y-y_0|+\alpha_1|z-z_0|, \\ \beta_2|x-x_0|+\beta_3|y-y_0|+\beta_1|z-z_0|, \\ \gamma_2|x-x_0|+\gamma_3|y-y_0|+\gamma_1|z-z_0|, \\ |x-x_0|+\delta_3|y-y_0|+\delta_2|z-z_0| \end{array}\right\} \end{array}\right\}=r$$

denklemi ile ifade edilen , köşe noktaları $(0,0,r)$, $(r,0,0)$, $(0,r,0)$, $\left(0,\frac{5\varphi-7}{3}r,\frac{3\varphi-2}{3}r\right)$, $\left(\frac{3\varphi-2}{3}r,0,\frac{5\varphi-7}{3}r\right)$, $\left(\frac{5\varphi-7}{3}r,\frac{3\varphi-2}{3}r,0\right)$, $\left(\frac{3\varphi-2}{5}r,0,\frac{\varphi+3}{5}r\right)$, $\left(\frac{\varphi+3}{5}r,\frac{3\varphi-2}{5}r,0\right)$, $\left(0,\frac{\varphi+3}{5}r,\frac{3\varphi-2}{5}r\right)$, $\left(\frac{\varphi-1}{2}r,\frac{r}{2},\frac{\varphi}{2}r\right)$, $\left(\frac{\varphi}{2}r,\frac{\varphi-1}{2}r,\frac{r}{2}\right)$, $\left(\frac{r}{2},\frac{\varphi}{2}r,\frac{\varphi-1}{2}r\right)$, $\left(\frac{2\varphi-5}{3}r,\frac{2\varphi-5}{3}r,\frac{2\varphi-5}{3}r\right)$ *noktalarının her bir bileşeninin tüm muhtemel* $+/-$ *işaret değişikliklerinin* (x_0,y_0,z_0) *kadar ötelenmişinden oluşan* $120-$*yüzlü bir çokyüzlü olan disdyakis triacontahedrondur.*

Bu bölümün diğer kısımlarında sıkça kullanılacağından dolayı merkezil birim kürenin köşe noktaları aşağıdaki şekilde isimlendirilmiştir;

$V_1=(0,0,1)$, $V_2=(0,0,-1)$, $V_3=(1,0,0)$, $V_4=(-1,0,0)$, $V_5=(0,1,0)$,
$V_6=(0,-1,0)$, $V_7=\left(0,\frac{5\varphi-7}{3},\frac{3\varphi-2}{3}\right)$, $V_8=\left(0,\frac{5\varphi-7}{3},\frac{2-3\varphi}{3}\right)$, $V_9=\left(0,\frac{7-5\varphi}{3},\frac{3\varphi-2}{3}\right)$,
$V_{10}=\left(0,\frac{7-5\varphi}{3},\frac{2-3\varphi}{3}\right)$, $V_{11}=\left(\frac{3\varphi-2}{3},0,\frac{5\varphi-7}{3}\right)$, $V_{12}=\left(\frac{3\varphi-2}{3},0,\frac{7-5\varphi}{3}\right)$,
$V_{13}=\left(\frac{2-3\varphi}{3},0,\frac{5\varphi-7}{3}\right)$, $V_{14}=\left(\frac{2-3\varphi}{3},0,\frac{7-5\varphi}{3}\right)$, $V_{15}=\left(\frac{5\varphi-7}{3},\frac{3\varphi-2}{3},0\right)$,
$V_{16}=\left(\frac{5\varphi-7}{3},\frac{2-3\varphi}{3},0\right)$, $V_{17}=\left(\frac{7-5\varphi}{3},\frac{3\varphi-2}{3},0\right)$, $V_{18}=\left(\frac{7-5\varphi}{3},\frac{2-3\varphi}{3},0\right)$,
$V_{19}=\left(\frac{3\varphi-2}{5},0,\frac{\varphi+3}{5}\right)$, $V_{20}=\left(\frac{3\varphi-2}{5},0,\frac{-\varphi-3}{5}\right)$, $V_{21}=\left(\frac{2-3\varphi}{5},0,\frac{\varphi+3}{5}\right)$,
$V_{22}=\left(\frac{2-3\varphi}{5},0,\frac{-\varphi-3}{5}\right)$, $V_{23}=\left(\frac{\varphi+3}{5},\frac{3\varphi-2}{5},0\right)$, $V_{24}=\left(\frac{\varphi+3}{5},\frac{2-3\varphi}{5},0\right)$,
$V_{25}=\left(\frac{-\varphi-3}{5},\frac{3\varphi-2}{5},0\right)$, $V_{26}=\left(\frac{-\varphi-3}{5},\frac{2-3\varphi}{5},0\right)$, $V_{27}=\left(0,\frac{\varphi+3}{5},\frac{3\varphi-2}{5}\right)$,
$V_{28}=\left(0,\frac{\varphi+3}{5},\frac{2-3\varphi}{5}\right)$, $V_{29}=\left(0,\frac{-\varphi-3}{5},\frac{3\varphi-2}{5}\right)$, $V_{30}=\left(0,\frac{-\varphi-3}{5},\frac{2-3\varphi}{5}\right)$,
$V_{31}=\left(\frac{\varphi-1}{2},\frac{1}{2},\frac{\varphi}{2}\right)$, $V_{32}=\left(\frac{\varphi-1}{2},\frac{1}{2},\frac{-\varphi}{2}\right)$, $V_{33}=\left(\frac{\varphi-1}{2},\frac{-1}{2},\frac{\varphi}{2}\right)$, $V_{34}=\left(\frac{\varphi-1}{2},\frac{-1}{2},\frac{-\varphi}{2}\right)$,
$V_{35}=\left(\frac{1-\varphi}{2},\frac{1}{2},\frac{\varphi}{2}\right)$, $V_{36}=\left(\frac{1-\varphi}{2},\frac{1}{2},\frac{-\varphi}{2}\right)$, $V_{37}=\left(\frac{1-\varphi}{2},\frac{-1}{2},\frac{\varphi}{2}\right)$, $V_{38}=\left(\frac{1-\varphi}{2},\frac{-1}{2},\frac{-\varphi}{2}\right)$,
$V_{39}=\left(\frac{\varphi}{2},\frac{\varphi-1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $V_{40}=\left(\frac{\varphi}{2},\frac{\varphi-1}{2},\frac{-1}{2}\right)$, $V_{41}=\left(\frac{\varphi}{2},\frac{1-\varphi}{2},\frac{1}{2}\right)$, $V_{42}=\left(\frac{\varphi}{2},\frac{1-\varphi}{2},\frac{-1}{2}\right)$,
$V_{43}=\left(\frac{-\varphi}{2},\frac{\varphi-1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $V_{44}=\left(\frac{-\varphi}{2},\frac{\varphi-1}{2},\frac{-1}{2}\right)$, $V_{45}=\left(\frac{-\varphi}{2},\frac{1-\varphi}{2},\frac{1}{2}\right)$, $V_{46}=\left(\frac{-\varphi}{2},\frac{\varphi-1}{2},\frac{1}{2}\right)$,
$V_{47}=\left(\frac{1}{2},\frac{\varphi}{2},\frac{\varphi-1}{2}\right)$, $V_{48}=\left(\frac{1}{2},\frac{\varphi}{2},\frac{1-\varphi}{2}\right)$, $V_{49}=\left(\frac{1}{2},\frac{-\varphi}{2},\frac{\varphi-1}{2}\right)$, $V_{50}=\left(\frac{1}{2},\frac{-\varphi}{2},\frac{1-\varphi}{2}\right)$,

$V_{51}=\left(\frac{-1}{2},\frac{\varphi}{2},\frac{\varphi-1}{2}\right)$, $V_{52}=\left(\frac{-1}{2},\frac{\varphi}{2},\frac{1-\varphi}{2}\right)$, $V_{53}=\left(\frac{-1}{2},\frac{-\varphi}{2},\frac{\varphi-1}{2}\right)$, $V_{54}=\left(\frac{-1}{2},\frac{-\varphi}{2},\frac{1-\varphi}{2}\right)$,
$V_{55}=\left(\frac{5-2\varphi}{3},\frac{5-2\varphi}{3},\frac{5-2\varphi}{3}\right)$, $V_{56}=\left(\frac{5-2\varphi}{3},\frac{5-2\varphi}{3},\frac{2\varphi-5}{3}\right)$, $V_{57}=\left(\frac{5-2\varphi}{3},\frac{2\varphi-5}{3},\frac{5-2\varphi}{3}\right)$,
$V_{58}=\left(\frac{5-2\varphi}{3},\frac{2\varphi-5}{3},\frac{2\varphi-5}{3}\right)$, $V_{59}=\left(\frac{2\varphi-5}{3},\frac{5-2\varphi}{3},\frac{5-2\varphi}{3}\right)$, $V_{60}=\left(\frac{2\varphi-5}{3},\frac{5-2\varphi}{3},\frac{2\varphi-5}{3}\right)$,
$V_{61}=\left(\frac{2\varphi-5}{3},\frac{2\varphi-5}{3},\frac{5-2\varphi}{3}\right)$, $V_{62}=\left(\frac{2\varphi-5}{3},\frac{2\varphi-5}{3},\frac{2\varphi-5}{3}\right)$

Bir sonraki teoremde d_{DT} metriğinin iyi bilinen bazı uzaklık fonksiyonlarının genel hali olan d_m metriği ile illişkisi verilecektir.

Teorem 7.2 *$P_1=(x_1,y_1,z_1)$ ve $P_2=(x_2,y_2,z_2)$ $\mathbb{R}^3$ de herhangi iki nokta olsun. $m=v=0$ ve $|\alpha_1|=|x_1-x_2|$, $|\alpha_2|=|y_1-y_2|$ ve $|\alpha_3|=|z_1-z_2|$ denilirse*

$$u=\frac{\left.\begin{array}{l}\max\left\{\begin{array}{l}|\alpha_1|+\frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}|\alpha_2|+|\alpha_3|,\\(1-\varphi)|\alpha_1|+2|\alpha_2|+(1+\varphi)|\alpha_3|,\\-\varphi|\alpha_1|+(2+\varphi)|\alpha_2|+2\varphi|\alpha_3|,\\(1-2\varphi)|\alpha_1|+(1+\varphi)|\alpha_2|+3\varphi|\alpha_3|,\\2(1-\varphi)|\alpha_1|+|\alpha_2|+(2\varphi+1)|\alpha_3|\end{array}\right\},\\|\alpha_2|+\frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}|\alpha_1|+|\alpha_3|,\\(1+\varphi)|\alpha_1|+(1-\varphi)|\alpha_2|+2|\alpha_3|,\\2\varphi|\alpha_1|-\varphi|\alpha_2|+(2+\varphi)|\alpha_3|,\\3\varphi|\alpha_1|+(1-2\varphi)|\alpha_2|+(1+\varphi)|\alpha_3|,\\(2\varphi+1)|\alpha_1|+2(1-\varphi)|\alpha_2|+|\alpha_3|\end{array}\right\},\\|\alpha_3|+\frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}|\alpha_1|+|\alpha_2|,\\2|\alpha_1|+(1+\varphi)|\alpha_2|+(1-\varphi)|\alpha_3|,\\(2+\varphi)|\alpha_1|+2\varphi|\alpha_2|-\varphi|\alpha_3|,\\(1+\varphi)|\alpha_1|+3\varphi|\alpha_2|+(1-2\varphi)|\alpha_3|,\\|\alpha_1|+(2\varphi+1)|\alpha_2|+2(1-\varphi)|\alpha_3|\end{array}\right\}\end{array}\right\}\end{array}\right.}{\max\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|,|z_1-z_2|\}}$$

olmak üzere $d_m(P_1,P_2)=d_{DT}(P_1,P_2)$ dir.

İspat *u,v ve m için verilen değerler d_m metriğinde yerine yazılırsa istenen eşitliğin sağlandığı kolaylıkla görülebilir.*

Aşağıdaki önerme $\mathbb{R}^3$ deki noktalar arasındaki Öklidyen ve disdyakis triacontahedron uzaklıkları arasındaki geçiş bağıntısını ifade etmektedir.

Yardımcı Teorem 7.2 *$P_1=(x_1,y_1,z_1)$, $P_2=(x_2,y_2,z_2)\in\mathbb{R}^3$ verilsin. P_1 ve P_2 noktalarından geçen doğru l, l nin doğrultu vektörü (p,q,r),*

$$A=\max\left\{\begin{array}{l}|p|+\frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}|q|+|r|,\\(1-\varphi)|p|+2|q|+(1+\varphi)|r|,\\-\varphi|p|+(2+\varphi)|q|+2\varphi|r|,\\(1-2\varphi)|p|+(1+\varphi)|q|+3\varphi|r|,\\2(1-\varphi)|p|+|q|+(2\varphi+1)|r|\end{array}\right\},\\|q|+\frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}|p|+|r|,\\(1+\varphi)|p|+(1-\varphi)|q|+2|r|,\\2\varphi|p|-\varphi|q|+(2+\varphi)|r|,\\3\varphi|p|+(1-2\varphi)|q|+(1+\varphi)|r|,\\(2\varphi+1)|p|+2(1-\varphi)|q|+|r|\end{array}\right\},\\|\alpha_3|+\frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}|p|+|q|,\\2|p|+(1+\varphi)|q|+(1-\varphi)|r|,\\(2+\varphi)|p|+2\varphi|q|-\varphi|r|,\\(1+\varphi)|p|+3\varphi|q|+(1-2\varphi)|r|,\\|p|+(2\varphi+1)|q|+2(1-\varphi)|r|\end{array}\right\}\end{array}\right\}$$

ve $\mu(P_1P_2)=\frac{A}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$ *ise* $d_{DT}(P_1,P_2)=\mu(P_1P_2)\,d_E(P_1,P_2)$ *dir.*

İspat $P_1=(x_1,y_1,z_1)$, $P_2=(x_2,y_2,z_2)\in\mathbb{R}^3$ *verilsin* P_1 *ve* P_2 *noktalarından geçen doğru* l *ve* l *nin doğrultu vektörü* (p,q,r) *ise* $\lambda\in\mathbb{R}$ *olmak üzere*

$$\frac{x_2-x_1}{p}=\frac{y_2-y_1}{q}=\frac{z_2-z_1}{r}=\lambda$$

yazılabilir. Buradan $x_2-x_1=\lambda p$, $y_2-y_1=\lambda q$,$z_2-z_1=\lambda r$ *elde edilir. Böylece*

$$d_{DT}(P_1,P_2)=\lambda\max\left\{\begin{array}{l}|p|+\frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}|q|+|r|,\\(1-\varphi)|p|+2|q|+(1+\varphi)|r|,\\-\varphi|p|+(2+\varphi)|q|+2\varphi|r|,\\(1-2\varphi)|p|+(1+\varphi)|q|+3\varphi|r|,\\2(1-\varphi)|p|+|q|+(2\varphi+1)|r|\end{array}\right\},\\|q|+\frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}|p|+|r|,\\(1+\varphi)|p|+(1-\varphi)|q|+2|r|,\\2\varphi|p|-\varphi|q|+(2+\varphi)|r|,\\3\varphi|p|+(1-2\varphi)|q|+(1+\varphi)|r|,\\(2\varphi+1)|p|+2(1-\varphi)|q|+|r|\end{array}\right\},\\|\alpha_3|+\frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}|p|+|q|,\\2|p|+(1+\varphi)|q|+(1-\varphi)|r|,\\(2+\varphi)|p|+2\varphi|q|-\varphi|r|,\\(1+\varphi)|p|+3\varphi|q|+(1-2\varphi)|r|,\\|p|+(2\varphi+1)|q|+2(1-\varphi)|r|\end{array}\right\}\end{array}\right\}$$

ve $d_E(P_1,P_2)=\lambda\sqrt{p^2+q^2+r^2}$ *bulunur.*

$$\frac{d_{DT}\left(P_1,P_2\right)}{d_E(P_1,P_2)}=\frac{\lambda\max\left\{\begin{array}{l}|p|+\frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}|q|+|r|,\\(1-\varphi)|p|+2|q|+(1+\varphi)|r|,\\-\varphi|p|+(2+\varphi)|q|+2\varphi|r|,\\(1-2\varphi)|p|+(1+\varphi)|q|+3\varphi|r|,\\2(1-\varphi)|p|+|q|+(2\varphi+1)|r|\end{array}\right\},\\|q|+\frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}|p|+|r|,\\(1+\varphi)|p|+(1-\varphi)|q|+2|r|,\\2\varphi|p|-\varphi|q|+(2+\varphi)|r|,\\3\varphi|p|+(1-2\varphi)|q|+(1+\varphi)|r|,\\(2\varphi+1)|p|+2(1-\varphi)|q|+|r|\end{array}\right\},\\|\alpha_3|+\frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}|p|+|q|,\\2|p|+(1+\varphi)|q|+(1-\varphi)|r|,\\(2+\varphi)|p|+2\varphi|q|-\varphi|r|,\\(1+\varphi)|p|+3\varphi|q|+(1-2\varphi)|r|,\\|p|+(2\varphi+1)|q|+2(1-\varphi)|r|\end{array}\right\}\end{array}\right\}}{\lambda\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

olup

$$\mu\left(P_1P_2\right)=\frac{\max\left\{\begin{array}{l}|p|+\frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}|q|+|r|,\\(1-\varphi)|p|+2|q|+(1+\varphi)|r|,\\-\varphi|p|+(2+\varphi)|q|+2\varphi|r|,\\(1-2\varphi)|p|+(1+\varphi)|q|+3\varphi|r|,\\2(1-\varphi)|p|+|q|+(2\varphi+1)|r|\end{array}\right\},\\|q|+\frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}|p|+|r|,\\(1+\varphi)|p|+(1-\varphi)|q|+2|r|,\\2\varphi|p|-\varphi|q|+(2+\varphi)|r|,\\3\varphi|p|+(1-2\varphi)|q|+(1+\varphi)|r|,\\(2\varphi+1)|p|+2(1-\varphi)|q|+|r|\end{array}\right\},\\|\alpha_3|+\frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}|p|+|q|,\\2|p|+(1+\varphi)|q|+(1-\varphi)|r|,\\(2+\varphi)|p|+2\varphi|q|-\varphi|r|,\\(1+\varphi)|p|+3\varphi|q|+(1-2\varphi)|r|,\\|p|+(2\varphi+1)|q|+2(1-\varphi)|r|\end{array}\right\}\end{array}\right\}}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

denilirse

$$d_{DT}\left(P_1,P_2\right)=\mu\left(P_1P_2\right)d_E\left(P_1,P_2\right)$$

elde edilir.

Yukarıdaki yardımcı teorem herhangi bir doğru boyunca herhangi P_1 ve P_2 noktaları arasındaki d_{DT}-uzaklığının, aynı doğru boyunca P_1 ve P_2 noktaları arasındaki Öklidyen uzaklığın pozitif katı olduğu gösterir. Buna göre aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Sonuç 7.2 *$\mathbb{R}^3$ de P_1, P_2, X doğrudaş, üç farklı nokta ise*

$$d_E(P_1, X) = d_E(P_2, X) \iff d_{DT}(P_1, X) = d_{DT}(P_2, X)$$

dir.

Sonuç 7.3 *3 boyutlu uzayda P_1, P_2, X doğrudaş, üç farklı nokta ise*

$$\frac{d_E(X, P_1)}{d_E(X, P_2)} = \frac{d_{DT}(X, P_1)}{d_{DT}(X, P_2)}$$

olur. Yani bir doğru boyunca olan d_E, d_{DT} uzaklıklarının oranı aynıdır.

7.2 Disdyakis Triacontahedron İzometri Grubu

Bu bölümde d_{DT} metriği ile donatılmış analitik $3-$uzayın ($\mathbb{R}^3_{DT}$) izometri grubu araştırılacaktır. d_{DT} uzaklığını koruyan izometrileri tespit etmek için önce hangi Öklidyen izometrilerin disdyakis triacontahedron uzaklığını koruduğu araştırılacaktır. Daha sonra da, bu izometriler dışında izometrilerin olmadığı gösterilecektir.

$\alpha : \mathbb{R}^3_{DT} \to \mathbb{R}^3_{DT}$ dönüşüm olmak üzere her $X, Y \in \mathbb{R}^3_{DT}$ için

$$d_{DT}(X, Y) = d_{DT}(\alpha(X), \alpha(Y))$$

ise α dönüşümü $\mathbb{R}^3_{DT}$ de bir izometridir.

Aşağıda ifade edilen önermeler ile hangi Öklidyen izometrilerin disdyakis triacontahedron uzayında da izometri oldukları gösterilmektedir.

Önerme 7.1 *$\mathbb{R}^3$ de her Öklidyen öteleme $\mathbb{R}^3_{DT}$ un bir izometrisidir.*

İspat *$A = (a_1, a_2, a_3)$, $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere $T_A : \mathbb{R}^3_{DT} \to \mathbb{R}^3_{DT}$, $T_A(X)$=A+X olacak şekilde reel uzayda bir öteleme olsun. $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3_{DT}$ için*

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a_1 + x_1 - a_1 - x_2 \\ \alpha_2 &= a_2 + y_1 - a_2 - y_2 \\ \alpha_3 &= a_3 + z_1 - a_3 - z_2 \end{aligned} \qquad \textit{ve} \qquad \begin{aligned} \beta_1 &= x_1 - x_2 \\ \beta_2 &= y_1 - y_2 \\ \beta_3 &= z_1 - z_2 \end{aligned}$$

olmak üzere

$$
\begin{aligned}
&d_{DT}(T_A(P_1),T_A(P_2))\\
&= \max\left\{\begin{array}{l}
|\alpha_1| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}
|\alpha_2|+|\alpha_3|,\\
(1-\varphi)|\alpha_1|+2|\alpha_2|+(1+\varphi)|\alpha_3|,\\
-\varphi|\alpha_1|+(2+\varphi)|\alpha_2|+2\varphi|\alpha_3|,\\
(1-2\varphi)|\alpha_1|+(1+\varphi)|\alpha_2|+3\varphi|\alpha_3|,\\
2(1-\varphi)|\alpha_1|+|\alpha_2|+(2\varphi+1)|\alpha_3|
\end{array}\right\},\\
|\alpha_2| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}
|\alpha_1|+|\alpha_3|,\\
(1+\varphi)|\alpha_1|+(1-\varphi)|\alpha_2|+2|\alpha_3|,\\
2\varphi|\alpha_1|-\varphi|\alpha_2|+(2+\varphi)|\alpha_3|,\\
3\varphi|\alpha_1|+(1-2\varphi)|\alpha_2|+(1+\varphi)|\alpha_3|,\\
(2\varphi+1)|\alpha_1|+2(1-\varphi)|\alpha_2|+|\alpha_3|
\end{array}\right\},\\
|\alpha_3| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}
|\alpha_1|+|\alpha_2|,\\
2|\alpha_1|+(1+\varphi)|\alpha_2|+(1-\varphi)|\alpha_3|,\\
(2+\varphi)|\alpha_1|+2\varphi|\alpha_2|-\varphi|\alpha_3|,\\
(1+\varphi)|\alpha_1|+3\varphi|\alpha_2|+(1-2\varphi)|\alpha_3|,\\
|\alpha_1|+(2\varphi+1)|\alpha_2|+2(1-\varphi)|\alpha_3|
\end{array}\right\}
\end{array}\right\}\\
&= \max\left\{\begin{array}{l}
|\beta_1| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}
|\beta_2|+|\beta_3|,\\
(1-\varphi)|\beta_1|+2|\beta_2|+(1+\varphi)|\beta_3|,\\
-\varphi|\beta_1|+(2+\varphi)|\beta_2|+2\varphi|\beta_3|,\\
(1-2\varphi)|\beta_1|+(1+\varphi)|\beta_2|+3\varphi|\beta_3|,\\
2(1-\varphi)|\beta_1|+|\beta_2|+(2\varphi+1)|\beta_3|
\end{array}\right\},\\
|\beta_2| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}
|\beta_1|+|\beta_3|,\\
(1+\varphi)|\beta_1|+(1-\varphi)|\beta_2|+2|\beta_3|,\\
2\varphi|\beta_1|-\varphi|\beta_2|+(2+\varphi)|\beta_3|,\\
3\varphi|\beta_1|+(1-2\varphi)|\beta_2|+(1+\varphi)|\beta_3|,\\
(2\varphi+1)|\beta_1|+2(1-\varphi)|\beta_2|+|\beta_3|
\end{array}\right\},\\
|\beta_3| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}
|\beta_1|+|\beta_2|,\\
2|\beta_1|+(1+\varphi)|\beta_2|+(1-\varphi)|\beta_3|,\\
(2+\varphi)|\beta_1|+2\varphi|\beta_2|-\varphi|\beta_3|,\\
(1+\varphi)|\beta_1|+3\varphi|\beta_2|+(1-2\varphi)|\beta_3|,\\
|\beta_1|+(2\varphi+1)|\beta_2|+2(1-\varphi)|\beta_3|
\end{array}\right\}
\end{array}\right\}\\
&= d_{DT}(P_1,P_2)
\end{aligned}
$$

dir. Bundan dolayı T_A bir izometridir.

Yukarıdaki önermeden dolayı $\mathbb{R}^3_{DT}$ uzayında dönme ve yansımaları bulmak için orijinden geçen düzlemleri düşünmek yeterli olacaktır. Aşağıdaki önermede $\mathbb{R}^3_{DT}$ da uzaklığı koruyan yansımalar ifade edilecektir.

Önerme 7.2 *$\mathbb{R}^3_{DT}$ da $\Delta : ax+by+cz=0$ düzlemine göre yansımanın izometri olması için gerek ve yeter koşul düzlemin doğrultu vektörü (a,b,c) nin*

$D=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(\pm1,\pm\varphi,(\varphi-1)),((\varphi-1),\pm1,\pm\varphi),(\pm\varphi,(\varphi-1),\pm1)\}$

vektör kümesi elemanlarına paralel olmasıdır.

İspat *Δ:ax+by+cz=0 birim normali (a,b,c) olan düzlem olmak üzere $\sigma_\Delta : \mathbb{R}^3_{DT} \to \mathbb{R}^3_{DT}$ Öklidyen yansıma*

$\sigma_\Delta(x,y,z) = ((1-2a^2)x-2aby-2acz, -2abx+(1-2b^2)y-2bcz, -2acx-2bcy+(1-2c^2)z)$

şeklinde tanımlıdır. $\mathbb{R}^3_{DT}$ un taban vektörlerini koruyan yansıma izometri olacağından, disdyakis triacontahedronun köşe noktaları da olan, $\mathbb{R}^3_{DT}$ un $V_1=(0,0,1), V_3=(1,0,0), V_5=(0,1,0)$ tabanını koruyan yansımaları tespit etmek izometrileri bulmak için yeterli olacaktır. Taban vektörlerinin Öklidyen yansımalar altında görüntüleri

$$\sigma_\Delta(V_1) = (-2ac, -2bc, 1-2c^2)$$
$$\sigma_\Delta(V_3) = (1-2a^2, -2ab, -2ac)$$
$$\sigma_\Delta(V_5) = (-2ab, 1-2b^2, -2bc)$$

olur. Açıkça $d_{DT}(0,V_1) = d_{DT}(0,V_3) = d_{DT}(0,V_5) = 1$ dir. Eğer yansıma d_{DT} uzaklığını koruyor ise taban vektörlerinin yansıma altındaki görüntüleri için uzaklık korunmalıdır. Yani
$d_{DT}(\sigma_\Delta(O),\sigma_\Delta(V_1)) = d_{DT}(\sigma_\Delta(O),\sigma_\Delta(V_3)) = d_{DT}(\sigma_\Delta(O),\sigma_\Delta(V_5)) = 1$ olmalıdır. Böylece $\alpha_1 = 2ac$, $\alpha_2 = 2bc$ ve $\alpha_3 = 1-2c^2$ olmak üzere

$$d_{DT}(\sigma_\Delta(0),\sigma_\Delta(V_1)) =$$
$$\max\left\{\begin{array}{l}
|\alpha_1| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}
|\alpha_2|+|\alpha_3|, \\
(1-\varphi)|\alpha_1| + 2|\alpha_2| + (1+\varphi)|\alpha_3|, \\
-\varphi|\alpha_1| + (2+\varphi)|\alpha_2| + 2\varphi|\alpha_3|, \\
(1-2\varphi)|\alpha_1| + (1+\varphi)|\alpha_2| + 3\varphi|\alpha_3|, \\
2(1-\varphi)|\alpha_1| + |\alpha_2| + (2\varphi+1)|\alpha_3|
\end{array}\right\}, \\
|\alpha_2| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}
|\alpha_1|+|\alpha_3|, \\
(1+\varphi)|\alpha_1| + (1-\varphi)|\alpha_2| + 2|\alpha_3|, \\
2\varphi|\alpha_1| - \varphi|\alpha_2| + (2+\varphi)|\alpha_3|, \\
3\varphi|\alpha_1| + (1-2\varphi)|\alpha_2| + (1+\varphi)|\alpha_3|, \\
(2\varphi+1)|\alpha_1| + 2(1-\varphi)|\alpha_2| + |\alpha_3|
\end{array}\right\}, \\
|\alpha_3| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}
|\alpha_1|+|\alpha_2|, \\
2|\alpha_1| + (1+\varphi)|\alpha_2| + (1-\varphi)|\alpha_3|, \\
(2+\varphi)|\alpha_1| + 2\varphi|\alpha_2| - \varphi|\alpha_3|, \\
(1+\varphi)|\alpha_1| + 3\varphi|\alpha_2| + (1-2\varphi)|\alpha_3|, \\
|\alpha_1| + (2\varphi+1)|\alpha_2| + 2(1-\varphi)|\alpha_3|
\end{array}\right\}
\end{array}\right\} = 1$$

$\beta_1 = 1 - 2a^2$, $\beta_2 = 2ab$ *ve* $\beta_3 = 2ac$ *olmak üzere*

$$d_{DT}(\sigma_\Delta(0), \sigma_\Delta(V_3)) =$$
$$\max\left\{\begin{array}{l} |\beta_1| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l} |\beta_2| + |\beta_3|, \\ (1-\varphi)|\beta_1| + 2|\beta_2| + (1+\varphi)|\beta_3|, \\ -\varphi|\beta_1| + (2+\varphi)|\beta_2| + 2\varphi|\beta_3|, \\ (1-2\varphi)|\beta_1| + (1+\varphi)|\beta_2| + 3\varphi|\beta_3|, \\ 2(1-\varphi)|\beta_1| + |\beta_2| + (2\varphi+1)|\beta_3| \end{array}\right\}, \\ |\beta_2| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l} |\beta_1| + |\beta_3|, \\ (1+\varphi)|\beta_1| + (1-\varphi)|\beta_2| + 2|\beta_3|, \\ 2\varphi|\beta_1| - \varphi|\beta_2| + (2+\varphi)|\beta_3|, \\ 3\varphi|\beta_1| + (1-2\varphi)|\beta_2| + (1+\varphi)|\beta_3|, \\ (2\varphi+1)|\beta_1| + 2(1-\varphi)|\beta_2| + |\beta_3| \end{array}\right\}, \\ |\beta_3| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l} |\beta_1| + |\beta_2|, \\ 2|\beta_1| + (1+\varphi)|\beta_2| + (1-\varphi)|\beta_3|, \\ (2+\varphi)|\beta_1| + 2\varphi|\beta_2| - \varphi|\beta_3|, \\ (1+\varphi)|\beta_1| + 3\varphi|\beta_2| + (1-2\varphi)|\beta_3|, \\ |\beta_1| + (2\varphi+1)|\beta_2| + 2(1-\varphi)|\beta_3| \end{array}\right\} \end{array}\right\} = 1$$

$\gamma_1 = 2ab$, $\gamma_2 = 1 - 2b^2$ *ve* $\gamma_3 = 2bc$ *olmak üzere*

$$d_{DT}(\sigma_\Delta(0), \sigma_\Delta(V_5)) =$$
$$\max\left\{\begin{array}{l} |\gamma_1| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l} |\gamma_2| + |\gamma_3|, \\ (1-\varphi)|\gamma_1| + 2|\gamma_2| + (1+\varphi)|\gamma_3|, \\ -\varphi|\gamma_1| + (2+\varphi)|\gamma_2| + 2\varphi|\gamma_3|, \\ (1-2\varphi)|\gamma_1| + (1+\varphi)|\gamma_2| + 3\varphi|\gamma_3|, \\ 2(1-\varphi)|\gamma_1| + |\gamma_2| + (2\varphi+1)|\gamma_3| \end{array}\right\}, \\ |\gamma_2| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l} |\gamma_1| + |\gamma_3|, \\ (1+\varphi)|\gamma_1| + (1-\varphi)|\gamma_2| + 2|\gamma_3|, \\ 2\varphi|\gamma_1| - \varphi|\gamma_2| + (2+\varphi)|\gamma_3|, \\ 3\varphi|\gamma_1| + (1-2\varphi)|\gamma_2| + (1+\varphi)|\gamma_3|, \\ (2\varphi+1)|\gamma_1| + 2(1-\varphi)|\gamma_2| + |\gamma_3| \end{array}\right\}, \\ |\gamma_3| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l} |\gamma_1| + |\gamma_2|, \\ 2|\gamma_1| + (1+\varphi)|\gamma_2| + (1-\varphi)|\gamma_3|, \\ (2+\varphi)|\gamma_1| + 2\varphi|\gamma_2| - \varphi|\gamma_3|, \\ (1+\varphi)|\gamma_1| + 3\varphi|\gamma_2| + (1-2\varphi)|\gamma_3|, \\ |\gamma_1| + (2\varphi+1)|\gamma_2| + 2(1-\varphi)|\gamma_3| \end{array}\right\} \end{array}\right\} = 1$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözülürse (a, b, c) *için* $\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\varphi}{2}, \frac{\varphi-1}{2}\right)$, $\left(\frac{\varphi-1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\varphi}{2}\right)$, $\left(\pm\frac{\varphi}{2}, \frac{\varphi-1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ *çözümleri elde edilir.*

Tersine normal vektörleri D kümesindeki vektörlere paralel olacak şekildeki düzlemlere göre yansımaların uzaklığı koruduğu gösterilmelidir. $\sigma_\Delta\ (X) = Y$ olacak şekilde X ve Y noktaları için (p_1, q_1, r_1) ve (p_2, q_2, r_2), OX ve OY vektörlerinin yön vektörleri olsun. $d_{DT}(O, X) = d_{DT}(O, Y)$ olduğunu göstermek için $\mu\,(OX) = \mu\,(OY)$ olduğunu göstermek yeterlidir. (p_1, q_1, r_1) vektörünün verilen düzlemlere göre yansıma altındaki görüntüleri bulunursa;

1. Durum: $1x + \varphi y + (1 - \varphi)z = 0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1, q_1, r_1) = (\tfrac{1}{2}p_1 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1 - \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}r_1,\ \tfrac{-1-\sqrt{5}}{4}p_1 + \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}q_1 + \tfrac{1}{2}r_1,\ \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}p_1 + \tfrac{1}{2}q_1 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1),$$

2. Durum: $1x + \varphi y + -(1 - \varphi)z = 0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1, q_1, r_1) = (\tfrac{1}{2}p_1 + \tfrac{-1-\sqrt{5}}{4}q_1 - \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}r_1,\ \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1 + \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}q_1 - \tfrac{1}{2}r_1,\ \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}p_1 - \tfrac{1}{2}q_1 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1),$$

3.Durum: -$1x + \varphi y + (1 - \varphi)z = 0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1, q_1, r_1) = (\tfrac{1}{2}p_1 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1 + \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}r_1,\ \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1 + \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}q_1 + \tfrac{1}{2}r_1,\ \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}p_1 + \tfrac{1}{2}q_1 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1),$$

4.Durum: -$1x + \varphi y + -(1 - \varphi)z = 0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1, q_1, r_1) = (\tfrac{1}{2}p_1 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1 + \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}r_1,\ \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1 + \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}q_1 - \tfrac{1}{2}r_1,\ \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}p_1 - \tfrac{1}{2}q_1 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1),$$

5.Durum: (1-$\varphi)x + 1y + \varphi z = 0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1, q_1, r_1) = (\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1 - \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}q_1 + \tfrac{1}{2}r_1,\ \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}p_1 + \tfrac{1}{2}q_1 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1,\ \tfrac{1}{2}p_1 + \tfrac{-1-\sqrt{5}}{4}q_1 + \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}r_1),$$

6.Durum: -(1-$\varphi)x + 1y + \varphi z = 0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1, q_1, r_1) = (\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1 + \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}q_1 - \tfrac{1}{2}r_1,\ \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}p_1 + \tfrac{1}{2}q_1 + \tfrac{-1-\sqrt{5}}{4}r_1,\ -\tfrac{1}{2}p_1 - \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1 + \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}r_1),$$

7.Durum: $(1 - \varphi)x - 1y + \varphi z = 0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1, q_1, r_1) = (\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1 + \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}q_1 + \tfrac{1}{2}r_1,\ \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}p_1 + \tfrac{1}{2}q_1 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1,\ \tfrac{1}{2}p_1 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1 + \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}r_1),$$

8.Durum: $-(1 - \varphi)x - 1y + \varphi z = 0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_\Delta(p_1, q_1, r_1) = (\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1 + \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}q_1 - \tfrac{1}{2}r_1,\ \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}p_1 + \tfrac{1}{2}q_1 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1,\ -\tfrac{1}{2}p_1 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1 + \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}r_1),$$

9.Durum: $\varphi x+(1-\varphi)y+1z=0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_{\Delta}(p_1,q_1,r_1)=(\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{1}{2}q_1-\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1,\tfrac{1}{2}p_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}r_1,-\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{1}{2}r_1),$$

10.Durum: $\varphi x+-(1-\varphi)y+1z=0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_{\Delta}(p_1,q_1,r_1)=(\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}p_1-\tfrac{1}{2}q_1-\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1,-\tfrac{1}{2}p_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}r_1,-\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{1}{2}r_1),$$

11.Durum: $\varphi x+(1-\varphi)y-1z=0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_{\Delta}(p_1,q_1,r_1)=(\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{1}{2}q_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1,\tfrac{1}{2}p_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}r_1,\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{1}{2}r_1),$$

12.Durum: $\varphi x+-(1-\varphi)y-1z=0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\sigma_{\Delta}(p_1,q_1,r_1)=(\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}p_1-\tfrac{1}{2}q_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1,-\tfrac{1}{2}p_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}r_1,\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{1}{2}r_1),$$

13.Durum: $1x=0$ *yansıma düzlemi için,*$\sigma_{\Delta}\left(p_1,q_1,r_1\right)=\left(-p_1,q_1,r_1\right)$,

14.Durum: $1y=0$ *yansıma düzlemi için,*$\sigma_{\Delta}\left(p_1,q_1,r_1\right)=\left(p_1,-q_1,r_1\right)$,

15.Durum: $1z=0$ *yansıma düzlemi için,*$\sigma_{\Delta}\left(p_1,q_1,r_1\right)=\left(p_1,q_1,-r_1\right)$.
sonuçları elde edilir. Bu sonuçlara göre Yardımcı Teorem 6.2 den dolayı $\mu\left(OX\right)=\mu\left(OY\right)$ *olduğu görülmektedir. Örneğin;* $x+\varphi y+\left(\varphi-1\right)z=0$ *yansıma düzlemi için,*

$$\mu\left(OX\right)=\frac{\max\left\{\begin{array}{l}\left|p_1\right|+\frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}\left|q_1\right|+\left|r_1\right|,\\(1-\varphi)\left|p_1\right|+2\left|q_1\right|+(1+\varphi)\left|r_1\right|,\\-\varphi\left|p_1\right|+(2+\varphi)\left|q_1\right|+2\varphi\left|r_1\right|,\\(1-2\varphi)\left|p_1\right|+(1+\varphi)\left|q_1\right|+3\varphi\left|r_1\right|,\\2(1-\varphi)\left|p_1\right|+\left|q_1\right|+(2\varphi+1)\left|r_1\right|\end{array}\right\},\\\left|q_1\right|+\frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}\left|p_1\right|+\left|r_1\right|,\\(1+\varphi)\left|p_1\right|+(1-\varphi)\left|q_1\right|+2\left|r_1\right|,\\2\varphi\left|p_1\right|-\varphi\left|q_1\right|+(2+\varphi)\left|r_1\right|,\\3\varphi\left|p_1\right|+(1-2\varphi)\left|q_1\right|+(1+\varphi)\left|r_1\right|,\\(2\varphi+1)\left|p_1\right|+2(1-\varphi)\left|q_1\right|+\left|r_1\right|\end{array}\right\},\\\left|r_1\right|+\frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}\left|p_1\right|+\left|q_1\right|,\\2\left|p_1\right|+(1+\varphi)\left|q_1\right|+(1-\varphi)\left|r_1\right|,\\(2+\varphi)\left|p_1\right|+2\varphi\left|q_1\right|-\varphi\left|r_1\right|,\\(1+\varphi)\left|p_1\right|+3\varphi\left|q_1\right|+(1-2\varphi)\left|r_1\right|,\\\left|p_1\right|+(2\varphi+1)\left|q_1\right|+2(1-\varphi)\left|r_1\right|\end{array}\right\}\end{array}\right\}}{\sqrt{p_1^2+q_1^2+r_1^2}}$$

$$\mu(OY)=\frac{\left\{\begin{array}{l}\max\left\{\begin{array}{l}|p_2|+\frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}|q_2|+|r_2|,\\(1-\varphi)|p_2|+2|q_2|+(1+\varphi)|r_2|,\\-\varphi|p_2|+(2+\varphi)|q_2|+2\varphi|r_2|,\\(1-2\varphi)|p_2|+(1+\varphi)|q_2|+3\varphi|r_2|,\\2(1-\varphi)|p_2|+|q_2|+(2\varphi+1)|r_2|\end{array}\right\},\\|q_2|+\frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}|p_2|+|r_2|,\\(1+\varphi)|p_2|+(1-\varphi)|q_2|+2|r_2|,\\2\varphi|p_2|-\varphi|q_2|+(2+\varphi)|r_2|,\\3\varphi|p_2|+(1-2\varphi)|q_2|+(1+\varphi)|r_2|,\\(2\varphi+1)|p_2|+2(1-\varphi)|q_2|+|r_2|\end{array}\right\},\\|r_2|+\frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}|p_2|+|q_2|,\\2|p_2|+(1+\varphi)|q_2|+(1-\varphi)|r_2|,\\(2+\varphi)|p_2|+2\varphi|q_2|-\varphi|r_2|,\\(1+\varphi)|p_2|+3\varphi|q_2|+(1-2\varphi)|r_2|,\\|p_2|+(2\varphi+1)|q_2|+2(1-\varphi)|r_2|\end{array}\right\}\end{array}\right\}\end{array}\right\}}{\sqrt{p_2^2+q_2^2+r_2^2}}$$

dir. Burada

$$\begin{aligned}\sigma_\Delta(p_1,q_1,r_1)&=(p_2,q_2,r_2)\\&=\left(\tfrac{1}{2}p_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1-\tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}r_1,\tfrac{-1-\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{1-\sqrt{5}}{4}q_1+\tfrac{1}{2}r_1,\tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}p_1+\tfrac{1}{2}q_1+\tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1\right)\end{aligned}$$

olduğundan

$$\mu(OY)=\frac{\left\{\begin{array}{l}\max\left\{\begin{array}{l}|p_2|+\frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}|q_2|+|r_2|,\\(1-\varphi)|p_2|+2|q_2|+(1+\varphi)|r_2|,\\-\varphi|p_2|+(2+\varphi)|q_2|+2\varphi|r_2|,\\(1-2\varphi)|p_2|+(1+\varphi)|q_2|+3\varphi|r_2|,\\2(1-\varphi)|p_2|+|q_2|+(2\varphi+1)|r_2|\end{array}\right\},\\|q_2|+\frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}|p_2|+|r_2|,\\(1+\varphi)|p_2|+(1-\varphi)|q_2|+2|r_2|,\\2\varphi|p_2|-\varphi|q_2|+(2+\varphi)|r_2|,\\3\varphi|p_2|+(1-2\varphi)|q_2|+(1+\varphi)|r_2|,\\(2\varphi+1)|p_2|+2(1-\varphi)|q_2|+|r_2|\end{array}\right\},\\|r_2|+\frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}|p_2|+|q_2|,\\2|p_2|+(1+\varphi)|q_2|+(1-\varphi)|r_2|,\\(2+\varphi)|p_2|+2\varphi|q_2|-\varphi|r_2|,\\(1+\varphi)|p_2|+3\varphi|q_2|+(1-2\varphi)|r_2|,\\|p_2|+(2\varphi+1)|q_2|+2(1-\varphi)|r_2|\end{array}\right\}\end{array}\right\}\end{array}\right\}}{\sqrt{p_2^2+q_2^2+r_2^2}}$$

ifadesinde

$$p_2 \textit{ yerine } \tfrac{1}{2}p_1 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}q_1 - \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}r_1$$
$$q_2 \textit{ yerine } \tfrac{-1-\sqrt{5}}{4}p_1 + \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}q_1 + \tfrac{1}{2}r_1$$
$$r_2 \textit{ yerine } \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4}p_1 + \tfrac{1}{2}q_1 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}r_1$$

yazılırsa $\mu(OX) = \mu(OY)$ *eşitliği görülmektedir. Böylece ispat tamamlanmış olur.*

Sonuç 7.4 S_{DT} *izometrik yansımaların kümesi orijinden geçen denklemleri aşağıda ifade edilmiş olan onbeş Öklidyen yansımadan oluşur.*

$$\begin{array}{ccccc}
x=0 & , & y=0 & , & z=0 \\
(\varphi-1)x+y+\varphi z=0 & , & (\varphi-1)x+y-\varphi z=0 & , & (\varphi-1)x-y+\varphi z=0 \\
(\varphi-1)x-y-\varphi z=0 & , & x+\varphi y+(\varphi-1)z=0 & , & x-\varphi y+(\varphi-1)z=0 \\
-x+\varphi y+(\varphi-1)z=0 & , & -x-\varphi y+(\varphi-1)z=0 & , & \varphi x+(\varphi-1)y+z=0 \\
\varphi x+(\varphi-1)y-z=0 & , & -\varphi x+(\varphi-1)y+z=0 & , & -\varphi x+(\varphi-1)y-z=0
\end{array}$$

Noktaların yansıması, yansıma düzlemleri

$$\begin{array}{ll}
D_1 : x=0 & , \; D_9 : x-\varphi y+(\varphi-1)z=0 \\
D_2 : y=0 & , \; D_{10} : -x+\varphi y+(\varphi-1)z=0 \\
D_3 : z=0 & , \; D_{11} : -x-\varphi y+(\varphi-1)z=0 \\
D_4 : (\varphi-1)x+y+\varphi z=0 & , \; D_{12} : \varphi x+(\varphi-1)y+z=0 \\
D_5 : (\varphi-1)x+y-\varphi z=0 & , \; D_{13} : \varphi x+(\varphi-1)y-z=0 \\
D_6 : (\varphi-1)x-y+\varphi z=0 & , \; D_{14} : -\varphi x+(\varphi-1)y+z=0 \\
D_7 : (\varphi-1)x-y-\varphi z=0 & , \; D_{15} : -\varphi x+(\varphi-1)y-z=0 \\
D_8 : x+\varphi y+(\varphi-1)z=0 &
\end{array}$$

olmak üzere Şekil7.4 deki tablodaki gibi özetlenebilir;

Yansıma Düzlemleri / Noktalar	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_8	D_9	D_{10}	D_{11}	D_{12}	D_{13}	D_{14}	D_{15}
V_1	V_1	V_1	V_2	V_{54}	V_{48}	V_{52}	V_{50}	V_{37}	V_{35}	V_{33}	V_{31}	V_{45}	V_{39}	V_{41}	V_{43}
V_2	V_2	V_2	V_1	V_{47}	V_{53}	V_{49}	V_{51}	V_{32}	V_{34}	V_{36}	V_{38}	V_{40}	V_{46}	V_{44}	V_{42}
V_3	V_4	V_3	V_3	V_{42}	V_{41}	V_{40}	V_{39}	V_{50}	V_{48}	V_{47}	V_{49}	V_{38}	V_{37}	V_{35}	V_{36}
V_4	V_3	V_4	V_4	V_{43}	V_{44}	V_{45}	V_{46}	V_{51}	V_{53}	V_{54}	V_{52}	V_{31}	V_{32}	V_{34}	V_{33}
V_5	V_5	V_6	V_5	V_{36}	V_{35}	V_{31}	V_{32}	V_{46}	V_{41}	V_{42}	V_{45}	V_{52}	V_{51}	V_{48}	V_{47}
V_6	V_6	V_5	V_6	V_{33}	V_{34}	V_{38}	V_{37}	V_{39}	V_{44}	V_{43}	V_{40}	V_{49}	V_{50}	V_{53}	V_{54}
V_7	V_7	V_9	V_8	V_{62}	V_{15}	V_{17}	V_{58}	V_{61}	V_7	V_{57}	V_7	V_{13}	V_{55}	V_{11}	V_{59}
V_8	V_8	V_{10}	V_7	V_{15}	V_{61}	V_{57}	V_{17}	V_8	V_{58}	V_8	V_{62}	V_{56}	V_{14}	V_{60}	V_{12}
V_9	V_9	V_7	V_{10}	V_{18}	V_{56}	V_{60}	V_{16}	V_9	V_{59}	V_9	V_{55}	V_{61}	V_{11}	V_{57}	V_{13}
V_{10}	V_{10}	V_8	V_9	V_{55}	V_{18}	V_{16}	V_{59}	V_{56}	V_{10}	V_{60}	V_{10}	V_{12}	V_{62}	V_{14}	V_{58}
V_{11}	V_{13}	V_{11}	V_{12}	V_{58}	V_{11}	V_{56}	V_{11}	V_{16}	V_{15}	V_{55}	V_{57}	V_{62}	V_9	V_7	V_{60}
V_{12}	V_{14}	V_{12}	V_{11}	V_{12}	V_{57}	V_{12}	V_{55}	V_{58}	V_{56}	V_{15}	V_{16}	V_{10}	V_{61}	V_{59}	V_8
V_{13}	V_{11}	V_{13}	V_{14}	V_{13}	V_{60}	V_{13}	V_{62}	V_{59}	V_{61}	V_{18}	V_{17}	V_7	V_{56}	V_{58}	V_9
V_{14}	V_{12}	V_{14}	V_{13}	V_{59}	V_{14}	V_{61}	V_{14}	V_{17}	V_{18}	V_{62}	V_{60}	V_{55}	V_8	V_{10}	V_{57}
V_{15}	V_{17}	V_{16}	V_{15}	V_8	V_7	V_{55}	V_{56}	V_{62}	V_{11}	V_{12}	V_{61}	V_{60}	V_{59}	V_{15}	V_{15}
V_{16}	V_{18}	V_{15}	V_{16}	V_{57}	V_{58}	V_{10}	V_9	V_{11}	V_{60}	V_{59}	V_{12}	V_{16}	V_{16}	V_{61}	V_{62}
V_{17}	V_{15}	V_{18}	V_{17}	V_{60}	V_{59}	V_7	V_8	V_{14}	V_{57}	V_{58}	V_{13}	V_{17}	V_{17}	V_{56}	V_{55}
V_{18}	V_{16}	V_{17}	V_{18}	V_9	V_{10}	V_{62}	V_{61}	V_{55}	V_{14}	V_{13}	V_{56}	V_{57}	V_{58}	V_{18}	V_{18}
V_{19}	V_{21}	V_{19}	V_{20}	V_{30}	V_{23}	V_{28}	V_{24}	V_{29}	V_{27}	V_{19}	V_{19}	V_{26}	V_{19}	V_{19}	V_{25}
V_{20}	V_{22}	V_{20}	V_{19}	V_{23}	V_{29}	V_{24}	V_{27}	V_{20}	V_{20}	V_{28}	V_{30}	V_{20}	V_{26}	V_{25}	V_{20}
V_{21}	V_{19}	V_{21}	V_{22}	V_{26}	V_{28}	V_{25}	V_{30}	V_{21}	V_{21}	V_{29}	V_{27}	V_{21}	V_{23}	V_{24}	V_{21}
V_{22}	V_{20}	V_{22}	V_{21}	V_{27}	V_{26}	V_{29}	V_{25}	V_{28}	V_{30}	V_{22}	V_{22}	V_{23}	V_{22}	V_{22}	V_{24}
V_{23}	V_{25}	V_{24}	V_{23}	V_{20}	V_{19}	V_{23}	V_{23}	V_{30}	V_{23}	V_{23}	V_{29}	V_{22}	V_{21}	V_{27}	V_{28}
V_{24}	V_{26}	V_{23}	V_{24}	V_{24}	V_{24}	V_{20}	V_{19}	V_{24}	V_{28}	V_{27}	V_{24}	V_{30}	V_{29}	V_{21}	V_{22}
V_{25}	V_{23}	V_{26}	V_{25}	V_{25}	V_{25}	V_{21}	V_{22}	V_{25}	V_{29}	V_{30}	V_{25}	V_{27}	V_{28}	V_{20}	V_{19}
V_{26}	V_{24}	V_{25}	V_{26}	V_{21}	V_{22}	V_{26}	V_{26}	V_{27}	V_{26}	V_{26}	V_{28}	V_{19}	V_{20}	V_{30}	V_{29}
V_{27}	V_{27}	V_{29}	V_{28}	V_{22}	V_{27}	V_{27}	V_{20}	V_{26}	V_{19}	V_{24}	V_{21}	V_{25}	V_{27}	V_{23}	V_{27}
V_{28}	V_{28}	V_{30}	V_{27}	V_{28}	V_{21}	V_{19}	V_{28}	V_{22}	V_{24}	V_{20}	V_{26}	V_{28}	V_{25}	V_{28}	V_{23}
V_{29}	V_{29}	V_{27}	V_{30}	V_{29}	V_{20}	V_{22}	V_{29}	V_{19}	V_{25}	V_{21}	V_{23}	V_{29}	V_{24}	V_{29}	V_{26}
V_{30}	V_{30}	V_{28}	V_{29}	V_{19}	V_{30}	V_{30}	V_{21}	V_{23}	V_{22}	V_{25}	V_{20}	V_{24}	V_{30}	V_{26}	V_{30}
V_{31}	V_{35}	V_{33}	V_{32}	V_{38}	V_{47}	V_5	V_{42}	V_{53}	V_{31}	V_{41}	V_1	V_4	V_{31}	V_{39}	V_{51}
V_{32}	V_{36}	V_{34}	V_{31}	V_{48}	V_{37}	V_{41}	V_5	V_2	V_{42}	V_{32}	V_{54}	V_{32}	V_4	V_{52}	V_{40}
V_{33}	V_{37}	V_{31}	V_{34}	V_6	V_{40}	V_{36}	V_{49}	V_{33}	V_{51}	V_1	V_{39}	V_{53}	V_{41}	V_{33}	V_4
V_{34}	V_{38}	V_{32}	V_{33}	V_{39}	V_6	V_{50}	V_{35}	V_{40}	V_2	V_{52}	V_{34}	V_{42}	V_{54}	V_4	V_{34}
V_{35}	V_{31}	V_{37}	V_{36}	V_{46}	V_5	V_{51}	V_{34}	V_{45}	V_1	V_{49}	V_{35}	V_{43}	V_{47}	V_3	V_{35}
V_{36}	V_{32}	V_{38}	V_{35}	V_5	V_{45}	V_{33}	V_{52}	V_{36}	V_{50}	V_2	V_{46}	V_{48}	V_{44}	V_{36}	V_3
V_{37}	V_{33}	V_{35}	V_{38}	V_{53}	V_{32}	V_{44}	V_6	V_1	V_{43}	V_{37}	V_{47}	V_{37}	V_3	V_{49}	V_{45}
V_{38}	V_{34}	V_{36}	V_{37}	V_{31}	V_{54}	V_6	V_{43}	V_{48}	V_{38}	V_{44}	V_2	V_3	V_{38}	V_{46}	V_{50}
V_{39}	V_{43}	V_{41}	V_{40}	V_{34}	V_{39}	V_{48}	V_3	V_6	V_{47}	V_{39}	V_{33}	V_{46}	V_1	V_{31}	V_{52}
V_{40}	V_{44}	V_{42}	V_{39}	V_{40}	V_{33}	V_3	V_{47}	V_{34}	V_{40}	V_{48}	V_6	V_2	V_{45}	V_{51}	V_{32}
V_{41}	V_{45}	V_{39}	V_{42}	V_{50}	V_3	V_{32}	V_{41}	V_{49}	V_5	V_{31}	V_{41}	V_{54}	V_{33}	V_1	V_{44}
V_{42}	V_{46}	V_{40}	V_{41}	V_3	V_{49}	V_{42}	V_{31}	V_{42}	V_{32}	V_5	V_{50}	V_{34}	V_{53}	V_{43}	V_2
V_{43}	V_{39}	V_{45}	V_{44}	V_4	V_{52}	V_{43}	V_{38}	V_{43}	V_{37}	V_6	V_{51}	V_{35}	V_{48}	V_{42}	V_1
V_{44}	V_{40}	V_{46}	V_{43}	V_{51}	V_4	V_{37}	V_{44}	V_{52}	V_6	V_{38}	V_{44}	V_{47}	V_{36}	V_2	V_{41}
V_{45}	V_{41}	V_{43}	V_{46}	V_{45}	V_{36}	V_4	V_{54}	V_{35}	V_{45}	V_{53}	V_5	V_1	V_{40}	V_{50}	V_{37}
V_{46}	V_{42}	V_{44}	V_{45}	V_{35}	V_{46}	V_{53}	V_4	V_5	V_{54}	V_{46}	V_{36}	V_{39}	V_2	V_{38}	V_{49}
V_{47}	V_{51}	V_{49}	V_{48}	V_2	V_{31}	V_{47}	V_{40}	V_{54}	V_{39}	V_3	V_{37}	V_{44}	V_{35}	V_{47}	V_5
V_{48}	V_{52}	V_{50}	V_{47}	V_{32}	V_1	V_{39}	V_{48}	V_{38}	V_3	V_{40}	V_{53}	V_{36}	V_{43}	V_5	V_{48}
V_{49}	V_{53}	V_{47}	V_{50}	V_{49}	V_{42}	V_2	V_{33}	V_{41}	V_{52}	V_{35}	V_3	V_6	V_{49}	V_{37}	V_{46}
V_{50}	V_{54}	V_{48}	V_{49}	V_{41}	V_{50}	V_{34}	V_1	V_3	V_{36}	V_{51}	V_{42}	V_{50}	V_6	V_{45}	V_{38}
V_{51}	V_{47}	V_{53}	V_{52}	V_{44}	V_{51}	V_{35}	V_2	V_4	V_{33}	V_{50}	V_{43}	V_{51}	V_5	V_{40}	V_{31}
V_{52}	V_{48}	V_{54}	V_{51}	V_{52}	V_{43}	V_1	V_{36}	V_{44}	V_{49}	V_{34}	V_4	V_5	V_{52}	V_{32}	V_{39}
V_{53}	V_{49}	V_{51}	V_{54}	V_{37}	V_2	V_{46}	V_{53}	V_{31}	V_4	V_{45}	V_{48}	V_{33}	V_{42}	V_6	V_{53}
V_{54}	V_{50}	V_{52}	V_{53}	V_1	V_{38}	V_{54}	V_{45}	V_{47}	V_{46}	V_4	V_{32}	V_{41}	V_{34}	V_{54}	V_6
V_{55}	V_{59}	V_{57}	V_{56}	V_{10}	V_{55}	V_{15}	V_{12}	V_{18}	V_{55}	V_{11}	V_9	V_{14}	V_7	V_{55}	V_{17}
V_{56}	V_{60}	V_{58}	V_{55}	V_{56}	V_9	V_{11}	V_{15}	V_{10}	V_{12}	V_{56}	V_{18}	V_8	V_{13}	V_{17}	V_{56}
V_{57}	V_{61}	V_{55}	V_{58}	V_{16}	V_{12}	V_8	V_{57}	V_{57}	V_{17}	V_7	V_{11}	V_{18}	V_{57}	V_9	V_{14}
V_{58}	V_{62}	V_{56}	V_{57}	V_{11}	V_{16}	V_{58}	V_7	V_{12}	V_8	V_{17}	V_{58}	V_{58}	V_{18}	V_{13}	V_{10}
V_{59}	V_{55}	V_{61}	V_{60}	V_{14}	V_{17}	V_{59}	V_{10}	V_{13}	V_9	V_{16}	V_{59}	V_{59}	V_{15}	V_{12}	V_7
V_{60}	V_{56}	V_{62}	V_{59}	V_{17}	V_{13}	V_9	V_{60}	V_{60}	V_{16}	V_{10}	V_{14}	V_{15}	V_{60}	V_8	V_{11}
V_{61}	V_{57}	V_{59}	V_{62}	V_{61}	V_8	V_{14}	V_{18}	V_7	V_{13}	V_{61}	V_{15}	V_9	V_{12}	V_{16}	V_{61}
V_{62}	V_{58}	V_{60}	V_{61}	V_7	V_{62}	V_{18}	V_{13}	V_{15}	V_{62}	V_{14}	V_8	V_{11}	V_{10}	V_{62}	V_{16}

Şekil 7.4 $\mathbb{R}^3_{DT}$ de Yansıma Düzlemlerine Göre Köşe Noktaların Görüntüleri

Önerme 7.3 $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *olmak üzere,*

$$D_1 = \{(0, \pm 1, (\varphi - 1)), (\pm 1, (\varphi - 1), 0), (\pm 1, 0, \varphi)\}$$

$$D_2 = \left\{ \begin{array}{l} (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), ((\varphi-1), \pm 1, \pm\varphi), (\pm 1, \pm\varphi, \varphi - 1) \\ (\pm\varphi, \varphi - 1, \pm 1) \end{array} \right\}$$

$$D_3 = \left\{ \begin{array}{l} (1,1,1), (1,1,-1), (1,-1,1), (-1,1,1), (0, \varphi - 1, \pm\varphi), \\ (\varphi - 1, \pm\varphi, 0), (\pm\varphi, 0, \varphi - 1) \end{array} \right\}$$

ve

$R_1 = \{r_\theta \mid \theta \in \ \{2\pi/5\ ,\ 4\pi/5,\ 6\pi/5, 8\pi/5\}$ *, dönme ekseninin doğrultusu* D_1 *in elemanı*$\}$

$R_2 = \{r_\theta \mid \theta \in \ \{\pi\}$ *, dönme ekseninin doğrultusu* D_2 *nin elemanı*$\}$

$R_3 = \{r_\theta \mid \theta = \{2\pi/3, 4\pi/3\},$ *dönme ekseninin doğrultusu* D_3 *ün elemanı*$\}$

kümeleri verilsin. Orijinden geçen bir l *doğrusuna göre bir* r_θ *dönmesinin izometri olması için gerek ve yeter koşul* $r_\theta \in R_{DT} = R_1 \cup R_2 \cup R_3$ *olmasıdır.*

İspat *Birim doğrultu vektörü* (p, q, r) *olan bir* l *doğrusu etrafında* r_θ *şeklinde ifade edilen Öklidyen dönmenin matris formu;*

$$\begin{bmatrix} \cos\theta + p^2(1-\cos\theta) & pq(1-\cos\theta) - r\sin\theta & pr(1-\cos\theta) + q\sin\theta \\ pq(1-\cos\theta) + r\sin\theta & \cos\theta + q^2(1-\cos\theta) & qr(1-\cos\theta) - p\sin\theta \\ pr(1-\cos\theta) - q\sin\theta & qr(1-\cos\theta) + p\sin\theta & \cos\theta - r^2(1-\cos\theta) \end{bmatrix}$$

biçimindedir. l *eksenli bir dönme ,* l *doğrusu boyunca kesişen iki düzlemin yansımalarının birleşimi olduğundan* l *doğrusunun doğrultu vektörleri* $(0, \pm 1, (\varphi - 1))$*,* $(\pm 1, (\varphi - 1), 0)$*,* $(\pm 1, 0, \varphi)$*,* $(1,0,0)$*,* $(0,1,0)$*,* $(0,0,1)$*,* $((\varphi - 1), \pm 1, \pm\varphi)$*,* $(\pm 1, \pm\varphi, \varphi - 1)$*,* $(\pm\varphi, \varphi - 1, \pm 1)$*,* $(1,1,1)$*,* $(1,1,-1)$*,* $(1,-1,1)$*,* $(-1,1,1)$*,* $(0, \varphi - 1, \pm\varphi)$*,* $(\varphi - 1, \pm\varphi, 0)$*,* $(\pm\varphi, 0, \varphi - 1)$ *olarak alınabilir.*

$\mathbb{R}^3_{DT}$ *da izometrik dönmelerin bulunması için,* d_{DT} *birim küresinin kenarlarının uzunluklarını koruyan dönmelerin tespiti yeterlidir.* d_{DT} *birim küresinin* $V_1 = (0,0,1)$*,* $V_{19} = \left(\frac{3\varphi-2}{5}, 0, \frac{\varphi+3}{5}\right)$*,* $V_7 = \left(0, \frac{5\varphi-7}{3}, \frac{3\varphi-2}{3}\right)$*,* $V_{31} = \left(\frac{\varphi-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\varphi}{2}\right)$*,* $V_{27} = \left(0, \frac{\varphi+3}{5}, \frac{3\varphi-2}{3}\right)$ *ve* $V_{15} = \left(\frac{5\varphi-7}{3}, \frac{3\varphi-2}{3}, 0\right)$ *köşe noktaları göz önüne alınsın. Buna göre,*

$$
\begin{aligned}
r_\theta\left(V_1\right) &= \left(pr(1-\cos\theta)+q\sin\theta, qr(1-\cos\theta)-p\sin\theta, \cos\theta-r^2(1-\cos\theta)\right)\\
r_\theta\left(V_{19}\right) &= \begin{pmatrix} \frac{3\varphi-2}{5}\left(\cos\theta+p^2(1-\cos\theta)\right)+\left(\frac{\varphi+3}{5}\right)\left(pr(1-\cos\theta)+q\sin\theta\right), \\ \frac{3\varphi-2}{5}\left(pq(1-\cos\theta)+r\sin\theta\right)+\left(\frac{\varphi+3}{5}\right)\left(qr(1-\cos\theta)-p\sin\theta\right), \\ \frac{3\varphi-2}{5}\left(pr(1-\cos\theta)-q\sin\theta\right)+\left(\frac{\varphi+3}{5}\right)\left(\cos\theta-r^2(1-\cos\theta)\right) \end{pmatrix}\\
r_\theta\left(V_7\right) &= \begin{pmatrix} \frac{5\varphi-7}{3}\left(pq(1-\cos\theta)-r\sin\theta\right)+\left(\frac{3\varphi-2}{5}\right)\left(pr(1-\cos\theta)+q\sin\theta\right), \\ \frac{5\varphi-7}{3}\left(\cos\theta+q^2(1-\cos\theta)\right)+\left(\frac{3\varphi-2}{5}\right)\left(qr(1-\cos\theta)-p\sin\theta\right), \\ \frac{5\varphi-7}{3}\left(qr(1-\cos\theta)+p\sin\theta\right)+\left(\frac{3\varphi-2}{5}\right)\left(\cos\theta-r^2(1-\cos\theta)\right) \end{pmatrix}\\
r_\theta\left(V_{31}\right) &= \begin{pmatrix} \frac{\varphi-1}{2}\left(\cos\theta+p^2(1-\cos\theta)\right)+\frac{1}{2}\left(pq(1-\cos\theta)-r\sin\theta\right)+ \\ \frac{\varphi}{2}\left(pr(1-\cos\theta)+q\sin\theta\right), \\ \frac{\varphi-1}{2}\left(pq(1-\cos\theta)+r\sin\theta\right)+\frac{1}{2}\left(\cos\theta+q^2(1-\cos\theta)\right)+ \\ \frac{\varphi}{2}\left(qr(1-\cos\theta)-p\sin\theta\right), \\ \frac{\varphi-1}{2}\left(pr(1-\cos\theta)-q\sin\theta\right)+\frac{1}{2}\left(qr(1-\cos\theta)+p\sin\theta\right)+ \\ \frac{\varphi}{2}\left(\cos\theta-r^2(1-\cos\theta)\right) \end{pmatrix}\\
r_\theta\left(V_{27}\right) &= \begin{pmatrix} \frac{\varphi+3}{5}\left(pq(1-\cos\theta)-r\sin\theta\right)+\frac{3\varphi-2}{3}\left(pr(1-\cos\theta)+q\sin\theta\right), \\ \frac{\varphi+3}{5}\left(\cos\theta+q^2(1-\cos\theta)\right)+\frac{3\varphi-2}{3}\left(qr(1-\cos\theta)-p\sin\theta\right), \\ \frac{\varphi+3}{5}\left(qr(1-\cos\theta)+p\sin\theta\right)+\frac{3\varphi-2}{3}\left(\cos\theta-r^2(1-\cos\theta)\right) \end{pmatrix}\\
r_\theta\left(V_{15}\right) &= \begin{pmatrix} \frac{5\varphi-7}{3}\left(\cos\theta+p^2(1-\cos\theta)\right)+\frac{3\varphi-2}{3}\left(pq(1-\cos\theta)-r\sin\theta\right), \\ \frac{5\varphi-7}{3}\left(pq(1-\cos\theta)+r\sin\theta\right)+\frac{3\varphi-2}{3}\left(\cos\theta+q^2(1-\cos\theta)\right), \\ \frac{5\varphi-7}{3}\left(pr(1-\cos\theta)-q\sin\theta\right)+\frac{3\varphi-2}{3}\left(qr(1-\cos\theta)+p\sin\theta\right) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

dir. Ayrıca
$V_1=(0,0,1)$ *ve* $V_{19}=\left(\frac{3\varphi-2}{5},0,\frac{\varphi+3}{5}\right)$*için* $d_{DT}\left(V_1,V_{19}\right)=\frac{42\varphi-36}{55}$,
$V_7=\left(0,\frac{5\varphi-7}{3},\frac{3\varphi-2}{3}\right)$ *ve* $V_{31}=\left(\frac{\varphi-1}{2},\frac{1}{2},\frac{\varphi}{2}\right)$ *için* $d_{DT}\left(V_7,V_{31}\right)=\frac{26\varphi-38}{11}$ *ve*
$V_{27}=\left(0,\frac{\varphi+3}{5},\frac{3\varphi-2}{3}\right)$ *ve* $V_{15}=\left(\frac{5\varphi-7}{3},\frac{3\varphi-2}{3},0\right)$ *için* $d_{DT}\left(V_{27},V_{15}\right)=\frac{-4\varphi+16}{15}$ *dir. O halde* $\theta\neq 0$ *olmak üzere* r_θ*,* d_{DT} *uzaklığını koruyor ise* $d_{DT}(r_\theta\left(V_1\right),r_\theta\left(V_{19}\right))=\frac{42\varphi-36}{55}$*,* $d_{DT}(r_\theta\left(V_7\right),r_\theta\left(V_{31}\right))=\frac{26\varphi-38}{11}$ *ve* $d_{DT}(r_\theta\left(V_{27}\right),r_\theta\left(V_{15}\right))=\frac{-4\varphi+16}{15}$ *olmalıdır.*

l doğrusunun doğrultu vektörü $(0,1,\varphi-1)$ *olarak alınırsa* $(p,q,r)=\left(0,\sqrt{\frac{2+\varphi}{5}},\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\right)$ *olur.* p,q,r *değerleri* $d_{DT}\left(r_\theta(V_1),r_\theta(V_{19})\right)=\frac{42\varphi-36}{55}$*,* $d_{DT}\left(r_\theta(V_7),r_\theta(V_{31})\right)=\frac{26\varphi-38}{11}$ *ve* $d_{DT}\left(r_\theta(V_{27}),r_\theta(V_{15})\right)=\frac{-4\varphi+16}{15}$ *te yerine yazılırsa;*
$\alpha_1=\frac{1}{5}\sqrt{\frac{7-4\varphi}{5}}\sin\theta-\frac{3\varphi-2}{5}\cos\theta$*,* $\alpha_2=\frac{-2\varphi^2+5\varphi-2}{25}(1-\cos\theta)-\frac{1}{5}\sqrt{\frac{42-19\varphi}{5}}\sin\theta$ *ve* $\alpha_3=\frac{3-\varphi}{25}\cos\theta+\frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{\frac{23+4\varphi}{5}}\sin\theta+\frac{7-4\varphi}{25}$ *olmak üzere*

$$\max\left\{\begin{array}{l} |\alpha_1| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l} |\alpha_2|+|\alpha_3|, \\ (1-\varphi)|\alpha_1| + 2|\alpha_2| + (1+\varphi)|\alpha_3|, \\ -\varphi|\alpha_1| + (2+\varphi)|\alpha_2| + 2\varphi|\alpha_3|, \\ (1-2\varphi)|\alpha_1| + (1+\varphi)|\alpha_2| + 3\varphi|\alpha_3|, \\ 2(1-\varphi)|\alpha_1| + |\alpha_2| + (2\varphi+1)|\alpha_3| \end{array}\right\}, \\ |\alpha_2| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l} |\alpha_1|+|\alpha_3|, \\ (1+\varphi)|\alpha_1| + (1-\varphi)|\alpha_2| + 2|\alpha_3|, \\ 2\varphi|\alpha_1| - \varphi|\alpha_2| + (2+\varphi)|\alpha_3|, \\ 3\varphi|\alpha_1| + (1-2\varphi)|\alpha_2| + (1+\varphi)|\alpha_3|, \\ (2\varphi+1)|\alpha_1| + 2(1-\varphi)|\alpha_2| + |\alpha_3| \end{array}\right\}, \\ |\alpha_3| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l} |\alpha_1|+|\alpha_2|, \\ 2|\alpha_1| + (1+\varphi)|\alpha_2| + (1-\varphi)|\alpha_3|, \\ (2+\varphi)|\alpha_1| + 2\varphi|\alpha_2| - \varphi|\alpha_3|, \\ (1+\varphi)|\alpha_1| + 3\varphi|\alpha_2| + (1-2\varphi)|\alpha_3|, \\ |\alpha_1| + (2\varphi+1)|\alpha_2| + 2(1-\varphi)|\alpha_3| \end{array}\right\} \end{array}\right\} = \frac{42\varphi-36}{55}$$

$\beta_1 = \left(\frac{1}{6}\sqrt{7-4\varphi} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{1407-869\varphi}{5}}\right)\sin\theta - \frac{\varphi-1}{2}\cos\theta$, $\beta_2 = \frac{4\varphi-7}{15}(1-\cos\theta) - \sqrt{\frac{7-4\varphi}{20}}\sin\theta$ *ve* $\beta_3 = \frac{58\varphi-29}{60}\cos\theta + \sqrt{\frac{3-\varphi}{20}}\sin\theta + \frac{11-7\varphi}{15}$ *olmak üzere*

$$\max\left\{\begin{array}{l} |\beta_1| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l} |\beta_2|+|\beta_3|, \\ (1-\varphi)|\beta_1| + 2|\beta_2| + (1+\varphi)|\beta_3|, \\ -\varphi|\beta_1| + (2+\varphi)|\beta_2| + 2\varphi|\beta_3|, \\ (1-2\varphi)|\beta_1| + (1+\varphi)|\beta_2| + 3\varphi|\beta_3|, \\ 2(1-\varphi)|\beta_1| + |\beta_2| + (2\varphi+1)|\beta_3| \end{array}\right\}, \\ |\beta_2| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l} |\beta_1|+|\beta_3|, \\ (1+\varphi)|\beta_1| + (1-\varphi)|\beta_2| + 2|\beta_3|, \\ 2\varphi|\beta_1| - \varphi|\beta_2| + (2+\varphi)|\beta_3|, \\ 3\varphi|\beta_1| + (1-2\varphi)|\beta_2| + (1+\varphi)|\beta_3|, \\ (2\varphi+1)|\beta_1| + 2(1-\varphi)|\beta_2| + |\beta_3| \end{array}\right\}, \\ |\beta_3| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l} |\beta_1|+|\beta_2|, \\ 2|\beta_1| + (1+\varphi)|\beta_2| + (1-\varphi)|\beta_3|, \\ (2+\varphi)|\beta_1| + 2\varphi|\beta_2| - \varphi|\beta_3|, \\ (1+\varphi)|\beta_1| + 3\varphi|\beta_2| + (1-2\varphi)|\beta_3|, \\ |\beta_1| + (2\varphi+1)|\beta_2| + 2(1-\varphi)|\beta_3| \end{array}\right\} \end{array}\right\} = \frac{26\varphi-38}{11}$$

$\gamma_1 = \left(\frac{1}{15}\sqrt{\frac{1827-1129\varphi}{5}} + \frac{1}{5}\sqrt{\frac{23+4\varphi}{5}}\right)\sin\theta - \frac{5\varphi-7}{3}\cos\theta$,
$\gamma_2 = \frac{13-8\varphi}{15}\cos\theta - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{267-164\varphi}{5}}\sin\theta + \frac{10-4\varphi}{15}$ *ve*
$\gamma_3 = \frac{\varphi-8}{15}\cos\theta + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{103-36\varphi}{5}}\sin\theta + \frac{8\varphi+2}{15}$ *olmak üzere*

$$\max\left\{\begin{array}{l}
|\gamma_1|+\frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}|\gamma_2|+|\gamma_3|,\\(1-\varphi)|\gamma_1|+2|\gamma_2|+(1+\varphi)|\gamma_3|,\\-\varphi|\gamma_1|+(2+\varphi)|\gamma_2|+2\varphi|\gamma_3|,\\(1-2\varphi)|\gamma_1|+(1+\varphi)|\gamma_2|+3\varphi|\gamma_3|,\\2(1-\varphi)|\gamma_1|+|\gamma_2|+(2\varphi+1)|\gamma_3|\end{array}\right\},\\
|\gamma_2|+\frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}|\gamma_1|+|\gamma_3|,\\(1+\varphi)|\gamma_1|+(1-\varphi)|\gamma_2|+2|\gamma_3|,\\2\varphi|\gamma_1|-\varphi|\gamma_2|+(2+\varphi)|\gamma_3|,\\3\varphi|\gamma_1|+(1-2\varphi)|\gamma_2|+(1+\varphi)|\gamma_3|,\\(2\varphi+1)|\gamma_1|+2(1-\varphi)|\gamma_2|+|\gamma_3|\end{array}\right\},\\
|\gamma_3|+\frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}|\gamma_1|+|\gamma_2|,\\2|\gamma_1|+(1+\varphi)|\gamma_2|+(1-\varphi)|\gamma_3|,\\(2+\varphi)|\gamma_1|+2\varphi|\gamma_2|-\varphi|\gamma_3|,\\(1+\varphi)|\gamma_1|+3\varphi|\gamma_2|+(1-2\varphi)|\gamma_3|,\\|\gamma_1|+(2\varphi+1)|\gamma_2|+2(1-\varphi)|\gamma_3|\end{array}\right\}
\end{array}\right\}=\frac{-4\varphi+16}{15}$$

denklemlerine ulaşılır. Bu denklem sistemi çözülürse $\theta = 2\pi/5, 4\pi/5, 6\pi/5, 8\pi/5$ *sonuçları bulunur. Benzer şekilde, eğer l doğrusunun yön vektörü* $(0,-1,(\varphi-1))$*,* $(\pm1,(\varphi-1),0)$*,* $(\pm1,0,\varphi)$ *olarak alınırsa* $\theta = 2\pi/5, 4\pi/5, 6\pi/5, 8\pi/5$ *olur. Dolayısıyla* D_1 *deki altı yön vektörüyle yirmi dört dönme elde edilir.*

l doğrusunun yön vektörü $(1,0,0)$ *ise* $(p,q,r)=(1,0,0)$ *olur.* p,q,r *değerleri*

$$d_{DT}\left(r_\theta(V_1),r_\theta(V_{19})\right)=\tfrac{42\varphi-36}{55}, d_{DT}\left(r_\theta(V_7),r_\theta(V_{31})\right)=\tfrac{26\varphi-38}{11} ve d_{DT}\left(r_\theta(V_{27}),r_\theta(V_{15})\right)=\tfrac{-4\varphi+16}{15}$$

te yerine yazılırsa sırasıyla; $\alpha_1=\frac{2-3\varphi}{10}$*,* $\alpha_2=\frac{-2+\varphi}{5}\sin\theta$ *ve* $\alpha_3=\frac{2-\varphi}{5}\cos\theta$ *olmak üzere*

$$\max\left\{\begin{array}{l}
|\alpha_1|+\frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}|\alpha_2|+|\alpha_3|,\\(1-\varphi)|\alpha_1|+2|\alpha_2|+(1+\varphi)|\alpha_3|,\\-\varphi|\alpha_1|+(2+\varphi)|\alpha_2|+2\varphi|\alpha_3|,\\(1-2\varphi)|\alpha_1|+(1+\varphi)|\alpha_2|+3\varphi|\alpha_3|,\\2(1-\varphi)|\alpha_1|+|\alpha_2|+(2\varphi+1)|\alpha_3|\end{array}\right\},\\
|\alpha_2|+\frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}|\alpha_1|+|\alpha_3|,\\(1+\varphi)|\alpha_1|+(1-\varphi)|\alpha_2|+2|\alpha_3|,\\2\varphi|\alpha_1|-\varphi|\alpha_2|+(2+\varphi)|\alpha_3|,\\3\varphi|\alpha_1|+(1-2\varphi)|\alpha_2|+(1+\varphi)|\alpha_3|,\\(2\varphi+1)|\alpha_1|+2(1-\varphi)|\alpha_2|+|\alpha_3|\end{array}\right\},\\
|\alpha_3|+\frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}|\alpha_1|+|\alpha_2|,\\2|\alpha_1|+(1+\varphi)|\alpha_2|+(1-\varphi)|\alpha_3|,\\(2+\varphi)|\alpha_1|+2\varphi|\alpha_2|-\varphi|\alpha_3|,\\(1+\varphi)|\alpha_1|+3\varphi|\alpha_2|+(1-2\varphi)|\alpha_3|,\\|\alpha_1|+(2\varphi+1)|\alpha_2|+2(1-\varphi)|\alpha_3|\end{array}\right\}
\end{array}\right\}=\frac{42\varphi-36}{55}$$

$\beta_1 = \frac{1-\varphi}{2}$, $\beta_2 = \frac{10\varphi-17}{6}\cos\theta + \frac{-3\varphi+4}{6}\sin\theta$ *ve* $\beta_3 = \frac{3\varphi-4}{6}\cos\theta + \frac{10\varphi-17}{6}\sin\theta$ *olmak üzere*

$$\max\left\{\begin{array}{l} |\beta_1| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l} |\beta_2|+|\beta_3|, \\ (1-\varphi)|\beta_1|+2|\beta_2|+(1+\varphi)|\beta_3|, \\ -\varphi|\beta_1|+(2+\varphi)|\beta_2|+2\varphi|\beta_3|, \\ (1-2\varphi)|\beta_1|+(1+\varphi)|\beta_2|+3\varphi|\beta_3|, \\ 2(1-\varphi)|\beta_1|+|\beta_2|+(2\varphi+1)|\beta_3| \end{array}\right\}, \\ |\beta_2| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l} |\beta_1|+|\beta_3|, \\ (1+\varphi)|\beta_1|+(1-\varphi)|\beta_2|+2|\beta_3|, \\ 2\varphi|\beta_1|-\varphi|\beta_2|+(2+\varphi)|\beta_3|, \\ 3\varphi|\beta_1|+(1-2\varphi)|\beta_2|+(1+\varphi)|\beta_3|, \\ (2\varphi+1)|\beta_1|+2(1-\varphi)|\beta_2|+|\beta_3| \end{array}\right\}, \\ |\beta_3| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l} |\beta_1|+|\beta_2|, \\ 2|\beta_1|+(1+\varphi)|\beta_2|+(1-\varphi)|\beta_3|, \\ (2+\varphi)|\beta_1|+2\varphi|\beta_2|-\varphi|\beta_3|, \\ (1+\varphi)|\beta_1|+3\varphi|\beta_2|+(1-2\varphi)|\beta_3|, \\ |\beta_1|+(2\varphi+1)|\beta_2|+2(1-\varphi)|\beta_3| \end{array}\right\} \end{array}\right\} = \frac{26\varphi-38}{11}$$

$\gamma_1 = \frac{7-5\varphi}{3}$, $\gamma_2 = \frac{3\varphi-2}{5}\cos\theta + \frac{-12\varphi+19}{15}\sin\theta$ *ve* $\gamma_3 = \frac{-12\varphi+19}{15}\cos\theta - \frac{3\varphi-2}{5}\sin\theta$ *olmak üzere*

$$\max\left\{\begin{array}{l} |\gamma_1| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l} |\gamma_2|+|\gamma_3|, \\ (1-\varphi)|\gamma_1|+2|\gamma_2|+(1+\varphi)|\gamma_3|, \\ -\varphi|\gamma_1|+(2+\varphi)|\gamma_2|+2\varphi|\gamma_3|, \\ (1-2\varphi)|\gamma_1|+(1+\varphi)|\gamma_2|+3\varphi|\gamma_3|, \\ 2(1-\varphi)|\gamma_1|+|\gamma_2|+(2\varphi+1)|\gamma_3| \end{array}\right\}, \\ |\gamma_2| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l} |\gamma_1|+|\gamma_3|, \\ (1+\varphi)|\gamma_1|+(1-\varphi)|\gamma_2|+2|\gamma_3|, \\ 2\varphi|\gamma_1|-\varphi|\gamma_2|+(2+\varphi)|\gamma_3|, \\ 3\varphi|\gamma_1|+(1-2\varphi)|\gamma_2|+(1+\varphi)|\gamma_3|, \\ (2\varphi+1)|\gamma_1|+2(1-\varphi)|\gamma_2|+|\gamma_3| \end{array}\right\}, \\ |\gamma_3| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l} |\gamma_1|+|\gamma_2|, \\ 2|\gamma_1|+(1+\varphi)|\gamma_2|+(1-\varphi)|\gamma_3|, \\ (2+\varphi)|\gamma_1|+2\varphi|\gamma_2|-\varphi|\gamma_3|, \\ (1+\varphi)|\gamma_1|+3\varphi|\gamma_2|+(1-2\varphi)|\gamma_3|, \\ |\gamma_1|+(2\varphi+1)|\gamma_2|+2(1-\varphi)|\gamma_3| \end{array}\right\} \end{array}\right\} = \frac{-4\varphi+16}{15}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu sistem çözülürse $\theta = \pi$ *sonucu elde edilir. Benzer şekilde, eğer* l *nin yön vektörü* D_2 *nin* $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $((\varphi-1), \pm1, \pm\varphi)$, $(\pm1, \pm\varphi, \varphi-1)$, $(\pm\varphi, \varphi-1, \pm1)$ *vektörlerinden biri olarak alınırsa* $\theta = \pi$ *olarak bulunur. Dolayısıyla* D_2 *deki on beş yön vektörüyle on beş dönme elde edilir.*

l doğrusunun doğrultu vektörü $(1,1,1)$ *ise* $(p,q,r) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ *olur.* p,q,r *değerleri* $d_{DT}\left(r_\theta(V_1), r_\theta(V_{19})\right)$, $d_{DT}\left(r_\theta(V_7), r_\theta(V_{31})\right)$ *ve* $d_{DT}\left(r_\theta(V_{27}), r_\theta(V_{15})\right)$ *te yerine yazılırsa;* $\alpha_1 = \frac{-1-\varphi}{3}\cos\theta + \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{3}\varphi}{15}\sin\theta + \frac{4-4\varphi}{15}$, $\alpha_2 = \frac{-4+4\varphi}{15}\cos\theta - \frac{2\sqrt{3}\varphi}{15}\sin\theta + \frac{4-4\varphi}{15}$ *ve* $\alpha_3 = \frac{\varphi+2}{15}\cos\theta + \frac{-2\sqrt{3}+3\sqrt{3}\varphi}{15}\sin\theta + \frac{4-4\varphi}{15}$ *olmak üzere*

$$\max\left\{\begin{array}{l} |\alpha_1| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l} |\alpha_2|+|\alpha_3|, \\ (1-\varphi)|\alpha_1| + 2|\alpha_2| + (1+\varphi)|\alpha_3|, \\ -\varphi|\alpha_1| + (2+\varphi)|\alpha_2| + 2\varphi|\alpha_3|, \\ (1-2\varphi)|\alpha_1| + (1+\varphi)|\alpha_2| + 3\varphi|\alpha_3|, \\ 2(1-\varphi)|\alpha_1| + |\alpha_2| + (2\varphi+1)|\alpha_3| \end{array}\right\}, \\ |\alpha_2| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l} |\alpha_1|+|\alpha_3|, \\ (1+\varphi)|\alpha_1| + (1-\varphi)|\alpha_2| + 2|\alpha_3|, \\ 2\varphi|\alpha_1| - \varphi|\alpha_2| + (2+\varphi)|\alpha_3|, \\ 3\varphi|\alpha_1| + (1-2\varphi)|\alpha_2| + (1+\varphi)|\alpha_3|, \\ (2\varphi+1)|\alpha_1| + 2(1-\varphi)|\alpha_2| + |\alpha_3| \end{array}\right\}, \\ |\alpha_3| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l} |\alpha_1|+|\alpha_2|, \\ 2|\alpha_1| + (1+\varphi)|\alpha_2| + (1-\varphi)|\alpha_3|, \\ (2+\varphi)|\alpha_1| + 2\varphi|\alpha_2| - \varphi|\alpha_3|, \\ (1+\varphi)|\alpha_1| + 3\varphi|\alpha_2| + (1-2\varphi)|\alpha_3|, \\ |\alpha_1| + (2\varphi+1)|\alpha_2| + 2(1-\varphi)|\alpha_3| \end{array}\right\} \end{array}\right\} = \frac{42\varphi-36}{55}$$

$\beta_1 = \frac{7\varphi+11}{18}\cos\theta + \frac{13\sqrt{3}-7\sqrt{3}\varphi}{18}\sin\theta + \frac{13\varphi-21}{18}$, $\beta_2 = \frac{6-\varphi}{18}\cos\theta + \frac{-20\sqrt{3}+13\sqrt{3}\varphi}{18}\sin\theta + \frac{5\varphi-9}{9}$ *ve* $\beta_3 = \frac{14\varphi-21}{18}\cos\theta + \frac{-24\sqrt{3}+15\sqrt{3}\varphi}{36}\sin\theta + \frac{8\varphi-9}{9}$ *olmak üzere*

$$\max\left\{\begin{array}{l} |\beta_1| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l} |\beta_2|+|\beta_3|, \\ (1-\varphi)|\beta_1| + 2|\beta_2| + (1+\varphi)|\beta_3|, \\ -\varphi|\beta_1| + (2+\varphi)|\beta_2| + 2\varphi|\beta_3|, \\ (1-2\varphi)|\beta_1| + (1+\varphi)|\beta_2| + 3\varphi|\beta_3|, \\ 2(1-\varphi)|\beta_1| + |\beta_2| + (2\varphi+1)|\beta_3| \end{array}\right\}, \\ |\beta_2| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l} |\beta_1|+|\beta_3|, \\ (1+\varphi)|\beta_1| + (1-\varphi)|\beta_2| + 2|\beta_3|, \\ 2\varphi|\beta_1| - \varphi|\beta_2| + (2+\varphi)|\beta_3|, \\ 3\varphi|\beta_1| + (1-2\varphi)|\beta_2| + (1+\varphi)|\beta_3|, \\ (2\varphi+1)|\beta_1| + 2(1-\varphi)|\beta_2| + |\beta_3| \end{array}\right\}, \\ |\beta_3| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l} |\beta_1|+|\beta_2|, \\ 2|\beta_1| + (1+\varphi)|\beta_2| + (1-\varphi)|\beta_3|, \\ (2+\varphi)|\beta_1| + 2\varphi|\beta_2| - \varphi|\beta_3|, \\ (1+\varphi)|\beta_1| + 3\varphi|\beta_2| + (1-2\varphi)|\beta_3|, \\ |\beta_1| + (2\varphi+1)|\beta_2| + 2(1-\varphi)|\beta_3| \end{array}\right\} \end{array}\right\} = \frac{26\varphi-38}{11}$$

$\gamma_1 = \frac{-47\varphi+57}{45}\cos\theta + \frac{21\sqrt{3}\varphi-33\sqrt{3}}{45}\sin\theta + \frac{-28\varphi+48}{45}$,

$\gamma_2 = \frac{55\varphi-66}{45}\cos\theta + \frac{15\sqrt{3}\varphi-16\sqrt{3}}{45}\sin\theta + \frac{-28\varphi+73}{45}$ *ve*

$\gamma_3 = \frac{-8\varphi+9}{45}\cos\theta + \frac{-34\sqrt{3}\varphi+41\sqrt{3}}{45}\sin\theta + \frac{-28\varphi+48}{45}$ *olmak üzere*

$$\max\left\{\begin{array}{l} |\gamma_1| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l} |\gamma_2|+|\gamma_3|, \\ (1-\varphi)|\gamma_1|+2|\gamma_2|+(1+\varphi)|\gamma_3|, \\ -\varphi|\gamma_1|+(2+\varphi)|\gamma_2|+2\varphi|\gamma_3|, \\ (1-2\varphi)|\gamma_1|+(1+\varphi)|\gamma_2|+3\varphi|\gamma_3|, \\ 2(1-\varphi)|\gamma_1|+|\gamma_2|+(2\varphi+1)|\gamma_3| \end{array}\right\}, \\ |\gamma_2| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l} |\gamma_1|+|\gamma_3|, \\ (1+\varphi)|\gamma_1|+(1-\varphi)|\gamma_2|+2|\gamma_3|, \\ 2\varphi|\gamma_1|-\varphi|\gamma_2|+(2+\varphi)|\gamma_3|, \\ 3\varphi|\gamma_1|+(1-2\varphi)|\gamma_2|+(1+\varphi)|\gamma_3|, \\ (2\varphi+1)|\gamma_1|+2(1-\varphi)|\gamma_2|+|\gamma_3| \end{array}\right\}, \\ |\gamma_3| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l} |\gamma_1|+|\gamma_2|, \\ 2|\gamma_1|+(1+\varphi)|\gamma_2|+(1-\varphi)|\gamma_3|, \\ (2+\varphi)|\gamma_1|+2\varphi|\gamma_2|-\varphi|\gamma_3|, \\ (1+\varphi)|\gamma_1|+3\varphi|\gamma_2|+(1-2\varphi)|\gamma_3|, \\ |\gamma_1|+(2\varphi+1)|\gamma_2|+2(1-\varphi)|\gamma_3| \end{array}\right\} \end{array}\right\} = \frac{-4\varphi+16}{15}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözülürse $\theta = 2\pi/3$, $4\pi/3$ *sonuçları bulunur. Benzer şekilde, eğer* l *nin yön vektörü* D_3 *ün* $(-1,1,1)$, $(1,-1,1)$, $(1,1,-1)$, $(0,\varphi-1,\pm\varphi)$, $(\varphi-1,\pm\varphi,0)$, $(\pm\varphi,0,\varphi-1)$ *vektörlerinden biri olarak alınırsa* $\theta = 2\pi/3$, $4\pi/3$ *olur. Dolayısıyla* D_3 *deki on tane yön vektörüyle yirmi tane dönme elde edilir.*

Tersine $r_\theta(X) = Y$ *olacak şekilde* X *ve* Y *noktalarıyla oluşturulan* OX *ve* OY *doğrularının doğrultuları sırasıyla* (p_1,q_1,r_1) *ve* (p_2,q_2,r_2) *olmak üzere* $d_{DT}(O,X) = d_{DT}(O,Y)$ *olduğunu göstermek için Yardımcı Teorem 6.2 den* $\mu(OX) = \mu(OY)$ *olduğu gösterilmelidir. Bu ise* (p_1,q_1,r_1) *vektörünün tüm durumlar için görüntüleri bulunarak kolaylıkla gösterilebilir. Örneğin dönme ekseninin doğrultu vektörü* $(1,0,0)$ *olsun. Bu durumda* $\sigma_\Delta(p_1,q_1,r_1) = (p_2,q_2,r_2) = (p_1,-q_1,-r_1)$ *elde edilir. Yardımcı Teorem 6.2 den*

$$\mu(OX)=\frac{\max\left\{\begin{array}{l}|p_1|+\frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}|q_1|+|r_1|,\\(1-\varphi)|p_1|+2|q_1|+(1+\varphi)|r_1|,\\-\varphi|p_1|+(2+\varphi)|q_1|+2\varphi|r_1|,\\(1-2\varphi)|p_1|+(1+\varphi)|q_1|+3\varphi|r_1|,\\2(1-\varphi)|p_1|+|q_1|+(2\varphi+1)|r_1|\end{array}\right\},\\|q_1|+\frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}|p_1|+|r_1|,\\(1+\varphi)|p_1|+(1-\varphi)|q_1|+2|r_1|,\\2\varphi|p_1|-\varphi|q_1|+(2+\varphi)|r_1|,\\3\varphi|p_1|+(1-2\varphi)|q_1|+(1+\varphi)|r_1|,\\(2\varphi+1)|p_1|+2(1-\varphi)|q_1|+|r_1|\end{array}\right\},\\|r_1|+\frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}|p_1|+|q_1|,\\2|p_1|+(1+\varphi)|q_1|+(1-\varphi)|r_1|,\\(2+\varphi)|p_1|+2\varphi|q_1|-\varphi|r_1|,\\(1+\varphi)|p_1|+3\varphi|q_1|+(1-2\varphi)|r_1|,\\|p_1|+(2\varphi+1)|q_1|+2(1-\varphi)|r_1|\end{array}\right\}\end{array}\right\}}{\sqrt{p_1^2+q_1^2+r_1^2}}$$

$$\mu(OY)=\frac{\max\left\{\begin{array}{l}|p_2|+\frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}|q_2|+|r_2|,\\(1-\varphi)|p_2|+2|q_2|+(1+\varphi)|r_2|,\\-\varphi|p_2|+(2+\varphi)|q_2|+2\varphi|r_2|,\\(1-2\varphi)|p_2|+(1+\varphi)|q_2|+3\varphi|r_2|,\\2(1-\varphi)|p_2|+|q_2|+(2\varphi+1)|r_2|\end{array}\right\},\\|q_2|+\frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}|p_2|+|r_2|,\\(1+\varphi)|p_2|+(1-\varphi)|q_2|+2|r_2|,\\2\varphi|p_2|-\varphi|q_2|+(2+\varphi)|r_2|,\\3\varphi|p_2|+(1-2\varphi)|q_2|+(1+\varphi)|r_2|,\\(2\varphi+1)|p_2|+2(1-\varphi)|q_2|+|r_2|\end{array}\right\},\\|r_2|+\frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}|p_2|+|q_2|,\\2|p_2|+(1+\varphi)|q_2|+(1-\varphi)|r_2|,\\(2+\varphi)|p_2|+2\varphi|q_2|-\varphi|r_2|,\\(1+\varphi)|p_2|+3\varphi|q_2|+(1-2\varphi)|r_2|,\\|p_2|+(2\varphi+1)|q_2|+2(1-\varphi)|r_2|\end{array}\right\}\end{array}\right\}}{\sqrt{p_2^2+q_2^2+r_2^2}}$$

dir. Buradan

$$
\begin{aligned}
\mu(OY) &= \frac{\max\left\{\begin{array}{l}
|p_1| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}
|-q_1| + |-r_1|, \\
(1-\varphi)|p_1| + 2|-q_1| + (1+\varphi)|-r_1|, \\
-\varphi|p_1| + (2+\varphi)|-q_1| + 2\varphi|-r_1|, \\
(1-2\varphi)|p_1| + (1+\varphi)|-q_1| + 3\varphi|-r_1|, \\
2(1-\varphi)|p_1| + |-q_1| + (2\varphi+1)|-r_1|
\end{array}\right\}, \\
|-q_1| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}
|p_1| + |-r_1|, \\
(1+\varphi)|p_1| + (1-\varphi)|-q_1| + 2|-r_1|, \\
2\varphi|p_1| - \varphi|-q_1| + (2+\varphi)|-r_1|, \\
3\varphi|p_1| + (1-2\varphi)|-q_1| + (1+\varphi)|-r_1|, \\
(2\varphi+1)|p_1| + 2(1-\varphi)|-q_1| + |-r_1|
\end{array}\right\}, \\
|-r_1| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}
|p_1| + |-q_1|, \\
2|p_1| + (1+\varphi)|-q_1| + (1-\varphi)|-r_1|, \\
(2+\varphi)|p_1| + 2\varphi|-q_1| - \varphi|-r_1|, \\
(1+\varphi)|p_1| + 3\varphi|-q_1| + (1-2\varphi)|-r_1|, \\
|p_1| + (2\varphi+1)|-q_1| + 2(1-\varphi)|-r_1|
\end{array}\right\}
\end{array}\right\}}{\sqrt{p_1^2+q_1^2+r_1^2}} \\
&= \frac{\max\left\{\begin{array}{l}
|p_1| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}
|q_1| + |r_1|, \\
(1-\varphi)|p_1| + 2|q_1| + (1+\varphi)|r_1|, \\
-\varphi|p_1| + (2+\varphi)|q_1| + 2\varphi|r_1|, \\
(1-2\varphi)|p_1| + (1+\varphi)|q_1| + 3\varphi|r_1|, \\
2(1-\varphi)|p_1| + |q_1| + (2\varphi+1)|r_1|
\end{array}\right\}, \\
|q_1| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}
|p_1| + |r_1|, \\
(1+\varphi)|p_1| + (1-\varphi)|q_1| + 2|r_1|, \\
2\varphi|p_1| - \varphi|q_1| + (2+\varphi)|r_1|, \\
3\varphi|p_1| + (1-2\varphi)|q_1| + (1+\varphi)|r_1|, \\
(2\varphi+1)|p_1| + 2(1-\varphi)|q_1| + |r_1|
\end{array}\right\}, \\
|r_1| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}
|p_1| + |q_1|, \\
2|p_1| + (1+\varphi)|q_1| + (1-\varphi)|r_1|, \\
(2+\varphi)|p_1| + 2\varphi|q_1| - \varphi|r_1|, \\
(1+\varphi)|p_1| + 3\varphi|q_1| + (1-2\varphi)|r_1|, \\
|p_1| + (2\varphi+1)|q_1| + 2(1-\varphi)|r_1|
\end{array}\right\}
\end{array}\right\}}{\sqrt{p_1^2+q_1^2+r_1^2}} \\
&= \mu(OX)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Benzer şekilde diğer dönme eksenleri ve dönme açıları için de $\mu(OX) = \mu(OY)$ *eşitliği gösterilebilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.*

Sonuç 7.5 R_{DT}*, orijinden geçen doğruları eksen kabul eden dönmelerin kümesi olmak üzere, tam olarak elli dokuz Öklidyen dönmeden oluşur.*

Şekil7.5, Şekil7.6 ve Şekil7.7 deki daki tablolarda dönme hareketleri (dönüşümleri) sonucunda birim kürenin köşe noktalarının görüntüleri verilmiştir.

Dönme Ekseni doğrultu vektörleri	Açılar	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8	V_9	V_{10}	V_{11}	V_{12}	V_{13}	V_{14}	V_{15}	V_{16}	V_{17}	V_{18}	V_{19}	V_{20}
$(0,1,\varphi-1)$	$\theta=2\pi/5$	V_{39}	V_{46}	V_{32}	V_{37}	V_{51}	V_{50}	V_{55}	V_{14}	V_{11}	V_{62}	V_{56}	V_8	V_9	V_{61}	V_{17}	V_{58}	V_{59}	V_{16}	V_{23}	V_{22}
	$\theta=4\pi/5$	V_{48}	V_{53}	V_{44}	V_{41}	V_{35}	V_{34}	V_{15}	V_{61}	V_{56}	V_{18}	V_{60}	V_{14}	V_{11}	V_{57}	V_{59}	V_{10}	V_7	V_{58}	V_{28}	V_{26}
	$\theta=6\pi/5$	V_{52}	V_{49}	V_{45}	V_{40}	V_{31}	V_{38}	V_{17}	V_{57}	V_{60}	V_{16}	V_{13}	V_{61}	V_{56}	V_{12}	V_7	V_{62}	V_{55}	V_{10}	V_{25}	V_{29}
	$\theta=8\pi/5$	V_{43}	V_{42}	V_{33}	V_{36}	V_{47}	V_{54}	V_{59}	V_{12}	V_{13}	V_{58}	V_9	V_{57}	V_{60}	V_8	V_{55}	V_{18}	V_{15}	V_{62}	V_{21}	V_{24}
$(0,-1,\varphi-1)$	$\theta=2\pi/5$	V_{41}	V_{44}	V_{54}	V_{55}	V_{48}	V_{53}	V_{11}	V_{60}	V_{57}	V_{14}	V_{58}	V_{10}	V_7	V_{59}	V_{56}	V_{18}	V_{15}	V_{61}	V_{24}	V_{22}
	$\theta=4\pi/5$	V_{50}	V_{51}	V_{46}	V_{39}	V_{32}	V_{37}	V_{58}	V_{17}	V_{16}	V_{59}	V_{62}	V_{14}	V_{11}	V_{55}	V_8	V_{61}	V_{56}	V_9	V_{30}	V_{25}
	$\theta=6\pi/5$	V_{54}	V_{47}	V_{43}	V_{42}	V_{36}	V_{33}	V_{62}	V_{15}	V_{18}	V_{55}	V_{13}	V_{59}	V_{58}	V_{12}	V_{60}	V_9	V_8	V_{57}	V_{26}	V_{27}
	$\theta=8\pi/5$	V_{45}	V_{40}	V_{31}	V_{38}	V_{52}	V_{49}	V_{13}	V_{56}	V_{61}	V_{12}	V_7	V_{55}	V_{62}	V_{10}	V_{17}	V_{57}	V_{60}	V_{16}	V_{21}	V_{23}
$(1,\varphi-1,0)$	$\theta=2\pi/5$	V_{33}	V_{36}	V_{47}	V_{54}	V_{43}	V_{42}	V_9	V_{60}	V_{57}	V_8	V_{55}	V_{15}	V_{18}	V_{62}	V_{59}	V_{12}	V_{13}	V_{58}	V_{19}	V_{28}
	$\theta=4\pi/5$	V_{41}	V_{44}	V_{35}	V_{34}	V_{53}	V_{48}	V_{57}	V_{14}	V_{11}	V_{60}	V_7	V_{59}	V_{58}	V_{10}	V_{61}	V_{15}	V_{18}	V_{56}	V_{19}	V_{25}
	$\theta=6\pi/5$	V_{39}	V_{46}	V_{37}	V_{32}	V_{50}	V_{51}	V_{11}	V_{62}	V_{55}	V_{14}	V_9	V_{61}	V_{56}	V_8	V_{16}	V_{59}	V_{58}	V_{17}	V_{19}	V_{26}
	$\theta=8\pi/5$	V_{31}	V_{38}	V_{49}	V_{52}	V_{40}	V_{45}	V_{55}	V_{10}	V_7	V_{62}	V_{57}	V_{16}	V_{17}	V_{60}	V_{12}	V_{61}	V_{56}	V_{13}	V_{19}	V_{30}
$(-1,\varphi-1,0)$	$\theta=2\pi/5$	V_{37}	V_{32}	V_{50}	V_{51}	V_{39}	V_{46}	V_9	V_{56}	V_{61}	V_8	V_{16}	V_{58}	V_{59}	V_{17}	V_{11}	V_{62}	V_{55}	V_{14}	V_{29}	V_{20}
	$\theta=4\pi/5$	V_{45}	V_{40}	V_{38}	V_{31}	V_{49}	V_{52}	V_{61}	V_{12}	V_{13}	V_{56}	V_{62}	V_{10}	V_7	V_{55}	V_{16}	V_{60}	V_{57}	V_{17}	V_{26}	V_{20}
	$\theta=6\pi/5$	V_{43}	V_{42}	V_{36}	V_{33}	V_{54}	V_{47}	V_{13}	V_{58}	V_{59}	V_{12}	V_{60}	V_8	V_9	V_{57}	V_{62}	V_{15}	V_{18}	V_{55}	V_{25}	V_{20}
	$\theta=8\pi/5$	V_{35}	V_{34}	V_{48}	V_{53}	V_{44}	V_{41}	V_{59}	V_{10}	V_7	V_{58}	V_{15}	V_{56}	V_{61}	V_{18}	V_{60}	V_{11}	V_{14}	V_{57}	V_{27}	V_{20}
$(1,0,\varphi)$	$\theta=2\pi/5$	V_{49}	V_{52}	V_{40}	V_{45}	V_{31}	V_{38}	V_{57}	V_{17}	V_{16}	V_{60}	V_{12}	V_{56}	V_{61}	V_{13}	V_{55}	V_{10}	V_7	V_{62}	V_{24}	V_{28}
	$\theta=4\pi/5$	V_{34}	V_{35}	V_{48}	V_{53}	V_{41}	V_{44}	V_{58}	V_7	V_{10}	V_{59}	V_{56}	V_{15}	V_{18}	V_{61}	V_{11}	V_{60}	V_{57}	V_{14}	V_{20}	V_{27}
	$\theta=6\pi/5$	V_{36}	V_{33}	V_{47}	V_{54}	V_{42}	V_{43}	V_8	V_{57}	V_{60}	V_9	V_{15}	V_{55}	V_{62}	V_{18}	V_{12}	V_{59}	V_{58}	V_{13}	V_{28}	V_{19}
	$\theta=8\pi/5$	V_{51}	V_{50}	V_{39}	V_{46}	V_{32}	V_{37}	V_{17}	V_{58}	V_{59}	V_{16}	V_{55}	V_{11}	V_{14}	V_{62}	V_{56}	V_9	V_8	V_{61}	V_{27}	V_{24}
$(-1,0,\varphi)$	$\theta=2\pi/5$	V_{53}	V_{48}	V_{41}	V_{44}	V_{35}	V_{34}	V_{61}	V_{15}	V_{18}	V_{56}	V_{57}	V_{11}	V_{14}	V_{60}	V_7	V_{58}	V_{59}	V_{10}	V_{29}	V_{23}
	$\theta=4\pi/5$	V_{38}	V_{31}	V_{49}	V_{52}	V_{45}	V_{40}	V_{62}	V_7	V_{10}	V_{55}	V_{16}	V_{57}	V_{60}	V_{17}	V_{61}	V_{12}	V_{13}	V_{56}	V_{30}	V_{19}
	$\theta=6\pi/5$	V_{32}	V_{37}	V_{50}	V_{51}	V_{46}	V_{39}	V_8	V_{61}	V_{56}	V_9	V_{58}	V_{16}	V_{17}	V_{59}	V_{62}	V_{11}	V_{14}	V_{55}	V_{20}	V_{29}
	$\theta=8\pi/5$	V_{47}	V_{54}	V_{42}	V_{43}	V_{36}	V_{33}	V_{15}	V_{62}	V_{55}	V_{18}	V_{12}	V_{58}	V_{59}	V_{13}	V_8	V_{57}	V_{60}	V_9	V_{23}	V_{30}
$(1,0,0)$	$\theta=\pi$	V_2	V_1	V_3	V_4	V_6	V_5	V_{10}	V_9	V_8	V_7	V_{12}	V_{11}	V_{14}	V_{13}	V_{16}	V_{15}	V_{18}	V_{17}	V_{20}	V_{19}
$(0,1,0)$	$\theta=\pi$	V_2	V_1	V_4	V_3	V_5	V_6	V_8	V_7	V_{10}	V_9	V_{14}	V_{13}	V_{12}	V_{11}	V_{17}	V_{18}	V_{15}	V_{16}	V_{22}	V_{21}
$(0,0,1)$	$\theta=\pi$	V_1	V_2	V_4	V_3	V_6	V_5	V_9	V_{10}	V_7	V_8	V_{13}	V_{14}	V_{11}	V_{12}	V_{18}	V_{17}	V_{16}	V_{15}	V_{21}	V_{22}
$(\varphi-1,1,\varphi)$	$\theta=\pi$	V_{47}	V_{54}	V_{43}	V_{42}	V_{33}	V_{36}	V_{55}	V_{18}	V_{15}	V_{62}	V_{59}	V_{13}	V_{12}	V_{58}	V_9	V_{60}	V_{57}	V_8	V_{27}	V_{26}
$(\varphi-1,1,-\varphi)$	$\theta=\pi$	V_{53}	V_{48}	V_{44}	V_{41}	V_{34}	V_{35}	V_{18}	V_{56}	V_{61}	V_{15}	V_{14}	V_{60}	V_{57}	V_{11}	V_{10}	V_{59}	V_{58}	V_7	V_{26}	V_{28}
$(\varphi-1,-1,\varphi)$	$\theta=\pi$	V_{49}	V_{52}	V_{45}	V_{40}	V_{38}	V_{31}	V_{16}	V_{60}	V_{57}	V_{17}	V_{61}	V_{13}	V_{12}	V_{56}	V_{62}	V_7	V_{10}	V_{55}	V_{29}	V_{25}
$(\varphi-1,-1,-\varphi)$	$\theta=\pi$	V_{51}	V_{50}	V_{46}	V_{39}	V_{37}	V_{32}	V_{59}	V_{16}	V_{17}	V_{58}	V_{14}	V_{62}	V_{55}	V_{11}	V_{61}	V_8	V_9	V_{56}	V_{25}	V_{30}
$(1,\varphi,\varphi-1)$	$\theta=\pi$	V_{32}	V_{37}	V_{51}	V_{50}	V_{39}	V_{46}	V_{56}	V_9	V_8	V_{61}	V_{17}	V_{59}	V_{58}	V_{16}	V_{55}	V_{14}	V_{11}	V_{62}	V_{28}	V_{21}
$(1,-\varphi,\varphi-1)$	$\theta=\pi$	V_{34}	V_{35}	V_{53}	V_{48}	V_{44}	V_{41}	V_{10}	V_{59}	V_{58}	V_7	V_{18}	V_{61}	V_{56}	V_{15}	V_{14}	V_{57}	V_{60}	V_{11}	V_{30}	V_{21}
$(-1,\varphi,\varphi-1)$	$\theta=\pi$	V_{36}	V_{33}	V_{54}	V_{47}	V_{43}	V_{42}	V_{60}	V_9	V_8	V_{57}	V_{62}	V_{18}	V_{15}	V_{55}	V_{13}	V_{58}	V_{59}	V_{12}	V_{22}	V_{29}
$(-1,-\varphi,\varphi-1)$	$\theta=\pi$	V_{38}	V_{31}	V_{52}	V_{49}	V_{40}	V_{45}	V_{10}	V_{55}	V_{62}	V_7	V_{60}	V_{17}	V_{16}	V_{57}	V_{56}	V_{13}	V_{12}	V_{61}	V_{22}	V_{27}
$(\varphi,\varphi-1,1)$	$\theta=\pi$	V_{40}	V_{45}	V_{31}	V_{38}	V_{49}	V_{52}	V_{12}	V_{61}	V_{56}	V_{13}	V_{55}	V_7	V_{10}	V_{62}	V_{57}	V_{17}	V_{16}	V_{60}	V_{23}	V_{21}
$(\varphi,\varphi-1,-1)$	$\theta=\pi$	V_{46}	V_{39}	V_{32}	V_{37}	V_{50}	V_{51}	V_{62}	V_{11}	V_{14}	V_{55}	V_8	V_{56}	V_{61}	V_9	V_{58}	V_{17}	V_{16}	V_{59}	V_{22}	V_{23}
$(-\varphi,\varphi-1,1)$	$\theta=\pi$	V_{44}	V_{41}	V_{34}	V_{35}	V_{53}	V_{48}	V_{14}	V_{57}	V_{60}	V_{11}	V_{10}	V_{58}	V_{59}	V_7	V_{18}	V_{56}	V_{61}	V_{15}	V_{22}	V_{24}
$(-\varphi,\varphi-1,-1)$	$\theta=\pi$	V_{42}	V_{43}	V_{33}	V_{36}	V_{54}	V_{47}	V_{58}	V_{13}	V_{12}	V_{59}	V_{57}	V_9	V_8	V_{60}	V_{18}	V_{55}	V_{62}	V_{15}	V_{24}	V_{21}
$(1,1,1)$	$\theta=2\pi/3$	V_3	V_4	V_5	V_6	V_1	V_2	V_{11}	V_{13}	V_{12}	V_{14}	V_{15}	V_{17}	V_{16}	V_{18}	V_7	V_8	V_9	V_{10}	V_{23}	V_{25}
	$\theta=4\pi/3$	V_5	V_6	V_1	V_2	V_3	V_4	V_{15}	V_{16}	V_{17}	V_{18}	V_7	V_9	V_8	V_{10}	V_{11}	V_{13}	V_{12}	V_{14}	V_{27}	V_{29}
(-1,1,1)	$\theta=2\pi/3$	V_5	V_6	V_2	V_1	V_4	V_3	V_{17}	V_{18}	V_{15}	V_{16}	V_8	V_{10}	V_7	V_9	V_{14}	V_{12}	V_{13}	V_{11}	V_{28}	V_{30}
	$\theta=4\pi/3$	V_4	V_3	V_6	V_5	V_1	V_2	V_{13}	V_{11}	V_{14}	V_{12}	V_{18}	V_{16}	V_{17}	V_{15}	V_9	V_{10}	V_7	V_8	V_{26}	V_{24}
(1,-1,1)	$\theta=2\pi/3$	V_6	V_5	V_1	V_2	V_4	V_3	V_{18}	V_{17}	V_{16}	V_{15}	V_9	V_7	V_{10}	V_8	V_{13}	V_{11}	V_{14}	V_{12}	V_{29}	V_{27}
	$\theta=4\pi/3$	V_3	V_4	V_6	V_5	V_2	V_1	V_{12}	V_{14}	V_{11}	V_{13}	V_{16}	V_{18}	V_{15}	V_{17}	V_{10}	V_9	V_8	V_7	V_{24}	V_{26}
(1,1,-1)	$\theta=2\pi/3$	V_6	V_5	V_2	V_1	V_3	V_4	V_{16}	V_{15}	V_{18}	V_{17}	V_{10}	V_8	V_9	V_7	V_{12}	V_{14}	V_{11}	V_{13}	V_{30}	V_{28}
	$\theta=4\pi/3$	V_4	V_3	V_5	V_6	V_2	V_1	V_{14}	V_{12}	V_{13}	V_{11}	V_{17}	V_{15}	V_{18}	V_{16}	V_8	V_7	V_{10}	V_9	V_{25}	V_{23}
$(0,\varphi-1,\varphi)$	$\theta=2\pi/3$	V_{31}	V_{38}	V_{52}	V_{49}	V_{45}	V_{40}	V_7	V_{62}	V_{55}	V_{10}	V_{17}	V_{60}	V_{57}	V_{16}	V_{13}	V_{56}	V_{61}	V_{12}	V_{27}	V_{22}
	$\theta=4\pi/3$	V_{35}	V_{34}	V_{53}	V_{48}	V_{41}	V_{44}	V_7	V_{58}	V_{59}	V_{10}	V_{61}	V_{18}	V_{15}	V_{56}	V_{57}	V_{14}	V_{11}	V_{60}	V_{21}	V_{30}
$(0,\varphi-1,-\varphi)$	$\theta=2\pi/3$	V_{33}	V_{36}	V_{54}	V_{47}	V_{42}	V_{43}	V_{57}	V_8	V_9	V_{60}	V_{18}	V_{62}	V_{53}	V_{15}	V_{58}	V_{13}	V_{12}	V_{59}	V_{29}	V_{22}
	$\theta=4\pi/3$	V_{37}	V_{32}	V_{51}	V_{50}	V_{46}	V_{39}	V_{61}	V_8	V_9	V_{56}	V_{59}	V_{17}	V_{16}	V_{58}	V_{14}	V_{55}	V_{62}	V_{11}	V_{21}	V_{28}
$(\varphi-1,\varphi,0)$	$\theta=2\pi/3$	V_{42}	V_{43}	V_{36}	V_{33}	V_{47}	V_{54}	V_{12}	V_{59}	V_{58}	V_{13}	V_8	V_{60}	V_{57}	V_9	V_{15}	V_{62}	V_{55}	V_{18}	V_{20}	V_{25}
	$\theta=4\pi/3$	V_{44}	V_{41}	V_{35}	V_{34}	V_{48}	V_{53}	V_{60}	V_{11}	V_{14}	V_{57}	V_{59}	V_7	V_{10}	V_{58}	V_{15}	V_{61}	V_{56}	V_{18}	V_{25}	V_{19}
$(\varphi-1,-\varphi,0)$	$\theta=2\pi/3$	V_{46}	V_{39}	V_{37}	V_{32}	V_{51}	V_{50}	V_{14}	V_{55}	V_{62}	V_{11}	V_{61}	V_9	V_8	V_{56}	V_{59}	V_{16}	V_{17}	V_{58}	V_{26}	V_{19}
	$\theta=4\pi/3$	V_{40}	V_{45}	V_{38}	V_{31}	V_{52}	V_{49}	V_{56}	V_{13}	V_{12}	V_{61}	V_{10}	V_{62}	V_{55}	V_7	V_{60}	V_{16}	V_{17}	V_{57}	V_{20}	V_{26}
$(\varphi,0,\varphi-1)$	$\theta=2\pi/3$	V_{50}	V_{51}	V_{39}	V_{46}	V_{37}	V_{32}	V_{16}	V_{59}	V_{58}	V_{17}	V_{11}	V_{55}	V_{62}	V_{14}	V_9	V_{56}	V_{61}	V_8	V_{24}	V_{27}
	$\theta=4\pi/3$	V_{48}	V_{53}	V_{41}	V_{44}	V_{34}	V_{35}	V_{56}	V_{18}	V_{15}	V_{61}	V_{11}	V_{57}	V_{60}	V_{14}	V_{58}	V_7	V_{10}	V_{59}	V_{23}	V_{29}
$(-\varphi,0,\varphi-1)$	$\theta=2\pi/3$	V_{52}	V_{49}	V_{40}	V_{45}	V_{38}	V_{31}	V_{60}	V_{16}	V_{17}	V_{57}	V_{56}	V_{12}	V_{13}	V_{61}	V_{10}	V_{55}	V_{62}	V_7	V_{28}	V_{24}
	$\theta=4\pi/3$	V_{54}	V_{47}	V_{42}	V_{43}	V_{33}	V_{36}	V_{18}	V_{55}	V_{62}	V_{15}	V_{58}	V_{12}	V_{13}	V_{59}	V_{57}	V_8	V_9	V_{60}	V_{30}	V_{23}

Şekil 7.5 $\mathbb{R}^3_{DT}$ de Dönme Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri

Dönme Ekseni doğrultu vektörleri	Açılar	V_{21}	V_{22}	V_{23}	V_{24}	V_{25}	V_{26}	V_{27}	V_{28}	V_{29}	V_{30}	V_{31}	V_{32}	V_{33}	V_{34}	V_{35}	V_{36}	V_{37}	V_{38}	V_{39}	V_{40}
$(0,1,\varphi-1)$	$\theta=2\pi/5$	V_{19}	V_{26}	V_{28}	V_{20}	V_{21}	V_{29}	V_{27}	V_{25}	V_{24}	V_{30}	V_{47}	V_{44}	V_{3}	V_{38}	V_{31}	V_{4}	V_{41}	V_{54}	V_{48}	V_{36}
	$\theta=4\pi/5$	V_{23}	V_{29}	V_{25}	V_{22}	V_{19}	V_{24}	V_{27}	V_{21}	V_{20}	V_{30}	V_{5}	V_{45}	V_{32}	V_{54}	V_{47}	V_{37}	V_{40}	V_{6}	V_{52}	V_{4}
	$\theta=6\pi/5$	V_{28}	V_{24}	V_{21}	V_{26}	V_{23}	V_{20}	V_{27}	V_{19}	V_{22}	V_{30}	V_{51}	V_{33}	V_{44}	V_{6}	V_{5}	V_{45}	V_{36}	V_{50}	V_{43}	V_{37}
	$\theta=8\pi/5$	V_{25}	V_{20}	V_{19}	V_{29}	V_{28}	V_{22}	V_{27}	V_{23}	V_{26}	V_{30}	V_{35}	V_{3}	V_{45}	V_{50}	V_{51}	V_{40}	V_{4}	V_{34}	V_{1}	V_{41}
$(0,-1,\varphi-1)$	$\theta=2\pi/5$	V_{19}	V_{25}	V_{20}	V_{30}	V_{27}	V_{21}	V_{23}	V_{28}	V_{29}	V_{26}	V_{3}	V_{36}	V_{49}	V_{46}	V_{39}	V_{52}	V_{33}	V_{4}	V_{42}	V_{2}
	$\theta=4\pi/5$	V_{24}	V_{27}	V_{22}	V_{26}	V_{23}	V_{19}	V_{20}	V_{28}	V_{29}	V_{21}	V_{34}	V_{52}	V_{6}	V_{43}	V_{42}	V_{5}	V_{49}	V_{35}	V_{38}	V_{44}
	$\theta=6\pi/5$	V_{30}	V_{23}	V_{25}	V_{21}	V_{20}	V_{24}	V_{22}	V_{28}	V_{29}	V_{19}	V_{46}	V_{5}	V_{53}	V_{31}	V_{38}	V_{48}	V_{6}	V_{39}	V_{4}	V_{51}
	$\theta=8\pi/5$	V_{26}	V_{20}	V_{27}	V_{19}	V_{22}	V_{30}	V_{25}	V_{28}	V_{29}	V_{24}	V_{43}	V_{48}	V_{37}	V_{3}	V_{4}	V_{32}	V_{53}	V_{42}	V_{35}	V_{47}
$(1,\varphi-1,0)$	$\theta=2\pi/5$	V_{29}	V_{22}	V_{27}	V_{23}	V_{26}	V_{30}	V_{21}	V_{25}	V_{24}	V_{20}	V_{1}	V_{52}	V_{41}	V_{32}	V_{37}	V_{44}	V_{49}	V_{2}	V_{31}	V_{5}
	$\theta=4\pi/5$	V_{24}	V_{22}	V_{21}	V_{27}	V_{30}	V_{20}	V_{29}	V_{26}	V_{23}	V_{28}	V_{33}	V_{4}	V_{39}	V_{52}	V_{49}	V_{46}	V_{3}	V_{36}	V_{1}	V_{43}
	$\theta=6\pi/5$	V_{23}	V_{22}	V_{29}	V_{21}	V_{20}	V_{28}	V_{24}	V_{30}	V_{27}	V_{25}	V_{41}	V_{54}	V_{31}	V_{4}	V_{3}	V_{38}	V_{47}	V_{44}	V_{33}	V_{53}
	$\theta=8\pi/5$	V_{27}	V_{22}	V_{24}	V_{29}	V_{28}	V_{25}	V_{23}	V_{20}	V_{21}	V_{26}	V_{39}	V_{34}	V_{1}	V_{54}	V_{47}	V_{2}	V_{35}	V_{46}	V_{41}	V_{50}
$(-1,\varphi-1,0)$	$\theta=2\pi/5$	V_{21}	V_{28}	V_{24}	V_{30}	V_{27}	V_{25}	V_{19}	V_{23}	V_{26}	V_{22}	V_{33}	V_{40}	V_{53}	V_{2}	V_{1}	V_{48}	V_{45}	V_{36}	V_{49}	V_{42}
	$\theta=4\pi/5$	V_{21}	V_{23}	V_{30}	V_{22}	V_{19}	V_{27}	V_{29}	V_{24}	V_{25}	V_{28}	V_{53}	V_{42}	V_{4}	V_{32}	V_{37}	V_{3}	V_{43}	V_{48}	V_{54}	V_{34}
	$\theta=6\pi/5$	V_{21}	V_{24}	V_{22}	V_{28}	V_{29}	V_{19}	V_{26}	V_{30}	V_{27}	V_{23}	V_{4}	V_{34}	V_{51}	V_{40}	V_{45}	V_{50}	V_{35}	V_{3}	V_{44}	V_{2}
	$\theta=8\pi/5$	V_{21}	V_{30}	V_{28}	V_{23}	V_{26}	V_{29}	V_{25}	V_{22}	V_{19}	V_{24}	V_{51}	V_{2}	V_{31}	V_{42}	V_{43}	V_{38}	V_{1}	V_{50}	V_{5}	V_{32}
$(1,0,\varphi)$	$\theta=2\pi/5$	V_{29}	V_{25}	V_{23}	V_{20}	V_{21}	V_{26}	V_{19}	V_{27}	V_{30}	V_{22}	V_{41}	V_{5}	V_{50}	V_{36}	V_{33}	V_{51}	V_{6}	V_{44}	V_{3}	V_{48}
	$\theta=4\pi/5$	V_{30}	V_{21}	V_{23}	V_{28}	V_{29}	V_{26}	V_{24}	V_{19}	V_{22}	V_{25}	V_{42}	V_{31}	V_{2}	V_{51}	V_{50}	V_{1}	V_{38}	V_{43}	V_{40}	V_{47}
	$\theta=6\pi/5$	V_{22}	V_{29}	V_{23}	V_{27}	V_{30}	V_{26}	V_{20}	V_{24}	V_{25}	V_{21}	V_{32}	V_{41}	V_{52}	V_{1}	V_{2}	V_{49}	V_{44}	V_{37}	V_{48}	V_{39}
	$\theta=8\pi/5$	V_{25}	V_{30}	V_{23}	V_{19}	V_{22}	V_{26}	V_{28}	V_{20}	V_{21}	V_{29}	V_{5}	V_{42}	V_{35}	V_{49}	V_{52}	V_{34}	V_{43}	V_{6}	V_{47}	V_{3}
$(-1,0,\varphi)$	$\theta=2\pi/5$	V_{26}	V_{28}	V_{19}	V_{24}	V_{25}	V_{22}	V_{21}	V_{27}	V_{30}	V_{20}	V_{37}	V_{47}	V_{6}	V_{40}	V_{45}	V_{5}	V_{54}	V_{32}	V_{33}	V_{39}
	$\theta=4\pi/5$	V_{22}	V_{27}	V_{29}	V_{24}	V_{25}	V_{28}	V_{26}	V_{21}	V_{20}	V_{23}	V_{54}	V_{1}	V_{34}	V_{39}	V_{46}	V_{35}	V_{2}	V_{47}	V_{6}	V_{33}
	$\theta=6\pi/5$	V_{28}	V_{21}	V_{30}	V_{24}	V_{25}	V_{27}	V_{22}	V_{26}	V_{23}	V_{19}	V_{2}	V_{53}	V_{40}	V_{33}	V_{36}	V_{45}	V_{48}	V_{1}	V_{34}	V_{6}
	$\theta=8\pi/5$	V_{27}	V_{26}	V_{20}	V_{24}	V_{25}	V_{21}	V_{28}	V_{22}	V_{19}	V_{29}	V_{48}	V_{38}	V_{39}	V_{6}	V_{5}	V_{46}	V_{31}	V_{53}	V_{40}	V_{34}
$(1,0,0)$	$\theta=\pi$	V_{22}	V_{21}	V_{24}	V_{23}	V_{26}	V_{25}	V_{30}	V_{29}	V_{28}	V_{27}	V_{34}	V_{33}	V_{32}	V_{31}	V_{38}	V_{37}	V_{36}	V_{35}	V_{42}	V_{41}
$(0,1,0)$	$\theta=\pi$	V_{20}	V_{19}	V_{25}	V_{26}	V_{23}	V_{24}	V_{28}	V_{27}	V_{30}	V_{29}	V_{36}	V_{35}	V_{38}	V_{37}	V_{32}	V_{31}	V_{34}	V_{33}	V_{44}	V_{43}
$(0,0,1)$	$\theta=\pi$	V_{19}	V_{20}	V_{26}	V_{25}	V_{24}	V_{23}	V_{29}	V_{30}	V_{27}	V_{28}	V_{37}	V_{38}	V_{35}	V_{36}	V_{33}	V_{34}	V_{31}	V_{32}	V_{45}	V_{46}
$(\varphi-1,1,\varphi)$	$\theta=\pi$	V_{23}	V_{30}	V_{21}	V_{25}	V_{24}	V_{20}	V_{19}	V_{29}	V_{28}	V_{22}	V_{31}	V_{53}	V_{5}	V_{46}	V_{39}	V_{6}	V_{48}	V_{38}	V_{35}	V_{45}
$(\varphi-1,1,-\varphi)$	$\theta=\pi$	V_{29}	V_{23}	V_{22}	V_{25}	V_{24}	V_{19}	V_{30}	V_{20}	V_{21}	V_{27}	V_{54}	V_{32}	V_{45}	V_{5}	V_{6}	V_{40}	V_{37}	V_{47}	V_{46}	V_{36}
$(\varphi-1,-1,\varphi)$	$\theta=\pi$	V_{24}	V_{28}	V_{26}	V_{21}	V_{20}	V_{23}	V_{30}	V_{22}	V_{19}	V_{27}	V_{6}	V_{44}	V_{33}	V_{51}	V_{50}	V_{36}	V_{41}	V_{5}	V_{53}	V_{4}
$(\varphi-1,-1,-\varphi)$	$\theta=\pi$	V_{27}	V_{24}	V_{26}	V_{22}	V_{19}	V_{23}	V_{21}	V_{29}	V_{28}	V_{20}	V_{43}	V_{6}	V_{52}	V_{34}	V_{35}	V_{49}	V_{5}	V_{42}	V_{4}	V_{54}
$(1,\varphi,\varphi-1)$	$\theta=\pi$	V_{20}	V_{29}	V_{27}	V_{25}	V_{24}	V_{30}	V_{23}	V_{19}	V_{22}	V_{26}	V_{48}	V_{1}	V_{36}	V_{45}	V_{40}	V_{33}	V_{2}	V_{53}	V_{5}	V_{35}
$(1,-\varphi,\varphi-1)$	$\theta=\pi$	V_{20}	V_{27}	V_{26}	V_{29}	V_{28}	V_{23}	V_{22}	V_{25}	V_{24}	V_{19}	V_{38}	V_{43}	V_{50}	V_{1}	V_{2}	V_{51}	V_{42}	V_{31}	V_{54}	V_{45}
$(-1,\varphi,\varphi-1)$	$\theta=\pi$	V_{28}	V_{19}	V_{26}	V_{30}	V_{27}	V_{23}	V_{25}	V_{21}	V_{20}	V_{24}	V_{44}	V_{37}	V_{2}	V_{49}	V_{52}	V_{1}	V_{32}	V_{41}	V_{46}	V_{53}
$(-1,-\varphi,\varphi-1)$	$\theta=\pi$	V_{30}	V_{19}	V_{28}	V_{25}	V_{24}	V_{29}	V_{20}	V_{23}	V_{26}	V_{21}	V_{2}	V_{47}	V_{46}	V_{35}	V_{34}	V_{39}	V_{54}	V_{1}	V_{36}	V_{5}
$(\varphi,\varphi-1,1)$	$\theta=\pi$	V_{20}	V_{26}	V_{19}	V_{27}	V_{30}	V_{22}	V_{24}	V_{29}	V_{28}	V_{25}	V_{3}	V_{37}	V_{48}	V_{43}	V_{42}	V_{53}	V_{32}	V_{4}	V_{39}	V_{1}
$(\varphi,\varphi-1,-1)$	$\theta=\pi$	V_{26}	V_{19}	V_{20}	V_{28}	V_{29}	V_{21}	V_{30}	V_{24}	V_{25}	V_{27}	V_{38}	V_{3}	V_{44}	V_{47}	V_{54}	V_{41}	V_{4}	V_{31}	V_{2}	V_{40}
$(-\varphi,\varphi-1,1)$	$\theta=\pi$	V_{25}	V_{19}	V_{30}	V_{20}	V_{21}	V_{27}	V_{26}	V_{29}	V_{28}	V_{23}	V_{46}	V_{49}	V_{36}	V_{3}	V_{4}	V_{33}	V_{52}	V_{39}	V_{38}	V_{50}
$(-\varphi,\varphi-1,-1)$	$\theta=\pi$	V_{20}	V_{25}	V_{29}	V_{19}	V_{22}	V_{28}	V_{30}	V_{26}	V_{23}	V_{27}	V_{50}	V_{45}	V_{3}	V_{35}	V_{34}	V_{4}	V_{40}	V_{51}	V_{49}	V_{37}
(1,1,1)	$\theta=2\pi/3$	V_{24}	V_{26}	V_{27}	V_{28}	V_{29}	V_{30}	V_{19}	V_{21}	V_{20}	V_{22}	V_{39}	V_{43}	V_{40}	V_{44}	V_{41}	V_{45}	V_{42}	V_{46}	V_{47}	V_{51}
	$\theta=4\pi/3$	V_{28}	V_{30}	V_{19}	V_{21}	V_{20}	V_{22}	V_{23}	V_{24}	V_{25}	V_{26}	V_{47}	V_{49}	V_{51}	V_{53}	V_{48}	V_{50}	V_{52}	V_{54}	V_{31}	V_{33}
(-1,1,1)	$\theta=2\pi/3$	V_{27}	V_{29}	V_{22}	V_{20}	V_{21}	V_{19}	V_{25}	V_{26}	V_{23}	V_{24}	V_{52}	V_{54}	V_{48}	V_{50}	V_{51}	V_{53}	V_{47}	V_{49}	V_{36}	V_{38}
	$\theta=4\pi/3$	V_{25}	V_{23}	V_{29}	V_{30}	V_{27}	V_{28}	V_{21}	V_{19}	V_{22}	V_{20}	V_{45}	V_{41}	V_{46}	V_{42}	V_{43}	V_{39}	V_{44}	V_{40}	V_{53}	V_{39}
(1,-1,1)	$\theta=2\pi/3$	V_{30}	V_{28}	V_{21}	V_{19}	V_{22}	V_{20}	V_{26}	V_{25}	V_{24}	V_{23}	V_{53}	V_{51}	V_{49}	V_{47}	V_{54}	V_{52}	V_{50}	V_{48}	V_{37}	V_{35}
	$\theta=4\pi/3$	V_{23}	V_{25}	V_{30}	V_{29}	V_{28}	V_{27}	V_{20}	V_{22}	V_{19}	V_{21}	V_{42}	V_{46}	V_{41}	V_{45}	V_{40}	V_{44}	V_{39}	V_{43}	V_{50}	V_{54}
(1,1,-1)	$\theta=2\pi/3$	V_{29}	V_{27}	V_{20}	V_{22}	V_{19}	V_{21}	V_{24}	V_{23}	V_{26}	V_{25}	V_{50}	V_{48}	V_{54}	V_{52}	V_{49}	V_{47}	V_{53}	V_{51}	V_{34}	V_{32}
	$\theta=4\pi/3$	V_{26}	V_{24}	V_{28}	V_{27}	V_{30}	V_{29}	V_{22}	V_{20}	V_{21}	V_{19}	V_{44}	V_{40}	V_{43}	V_{39}	V_{46}	V_{42}	V_{45}	V_{41}	V_{52}	V_{48}
$(0,\varphi-1,\varphi)$	$\theta=2\pi/3$	V_{19}	V_{30}	V_{25}	V_{28}	V_{29}	V_{24}	V_{21}	V_{26}	V_{23}	V_{20}	V_{35}	V_{46}	V_{47}	V_{2}	V_{1}	V_{54}	V_{39}	V_{34}	V_{51}	V_{44}
	$\theta=4\pi/3$	V_{27}	V_{20}	V_{29}	V_{26}	V_{23}	V_{28}	V_{19}	V_{24}	V_{25}	V_{22}	V_{1}	V_{50}	V_{43}	V_{38}	V_{31}	V_{42}	V_{51}	V_{2}	V_{37}	V_{6}
$(0,\varphi-1,-\varphi)$	$\theta=2\pi/3$	V_{19}	V_{28}	V_{30}	V_{26}	V_{23}	V_{27}	V_{24}	V_{20}	V_{21}	V_{25}	V_{49}	V_{2}	V_{37}	V_{44}	V_{41}	V_{32}	V_{1}	V_{52}	V_{6}	V_{38}
	$\theta=4\pi/3$	V_{29}	V_{20}	V_{25}	V_{27}	V_{30}	V_{24}	V_{26}	V_{22}	V_{19}	V_{23}	V_{45}	V_{36}	V_{1}	V_{48}	V_{53}	V_{2}	V_{33}	V_{40}	V_{43}	V_{52}
$(\varphi-1,\varphi,0)$	$\theta=2\pi/3$	V_{24}	V_{21}	V_{28}	V_{22}	V_{19}	V_{29}	V_{23}	V_{27}	V_{30}	V_{26}	V_{40}	V_{51}	V_{34}	V_{4}	V_{3}	V_{35}	V_{50}	V_{45}	V_{32}	V_{52}
	$\theta=4\pi/3$	V_{22}	V_{24}	V_{27}	V_{21}	V_{20}	V_{30}	V_{28}	V_{23}	V_{26}	V_{29}	V_{52}	V_{39}	V_{4}	V_{33}	V_{36}	V_{3}	V_{46}	V_{49}	V_{51}	V_{31}
$(\varphi-1,-\varphi,0)$	$\theta=2\pi/3$	V_{22}	V_{23}	V_{21}	V_{29}	V_{28}	V_{20}	V_{25}	V_{27}	V_{30}	V_{24}	V_{4}	V_{31}	V_{54}	V_{41}	V_{44}	V_{47}	V_{38}	V_{3}	V_{45}	V_{1}
	$\theta=4\pi/3$	V_{23}	V_{21}	V_{22}	V_{30}	V_{27}	V_{19}	V_{28}	V_{25}	V_{24}	V_{29}	V_{32}	V_{4}	V_{42}	V_{53}	V_{48}	V_{43}	V_{3}	V_{37}	V_{2}	V_{46}
$(\varphi,0,\varphi-1)$	$\theta=2\pi/3$	V_{30}	V_{25}	V_{19}	V_{23}	V_{26}	V_{22}	V_{29}	V_{21}	V_{20}	V_{28}	V_{49}	V_{35}	V_{42}	V_{5}	V_{6}	V_{43}	V_{34}	V_{52}	V_{41}	V_{31}
	$\theta=4\pi/3$	V_{28}	V_{26}	V_{24}	V_{19}	V_{22}	V_{25}	V_{20}	V_{30}	V_{27}	V_{21}	V_{40}	V_{6}	V_{47}	V_{37}	V_{32}	V_{54}	V_{5}	V_{45}	V_{3}	V_{49}
$(-\varphi,0,\varphi-1)$	$\theta=2\pi/3$	V_{25}	V_{29}	V_{20}	V_{23}	V_{26}	V_{21}	V_{22}	V_{30}	V_{27}	V_{19}	V_{36}	V_{50}	V_{5}	V_{41}	V_{44}	V_{6}	V_{51}	V_{33}	V_{32}	V_{42}
	$\theta=4\pi/3$	V_{26}	V_{27}	V_{24}	V_{20}	V_{21}	V_{25}	V_{29}	V_{19}	V_{22}	V_{28}	V_{6}	V_{39}	V_{38}	V_{48}	V_{53}	V_{31}	V_{46}	V_{5}	V_{50}	V_{3}

Şekil 7.6 $\mathbb{R}^3_{DT}$ de Dönme Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri Devamı

Dönme Ekseni doğrultu vektörleri	Açılar	V_{41}	V_{42}	V_{43}	V_{44}	V_{45}	V_{46}	V_{47}	V_{48}	V_{49}	V_{50}	V_{51}	V_{52}	V_{53}	V_{54}	V_{55}	V_{56}	V_{57}	V_{58}	V_{59}	V_{60}	V_{61}	V_{62}
$(0,1,\varphi-1)$	$\theta=2\pi/5$	V_{40}	V_{2}	V_{1}	V_{45}	V_{33}	V_{53}	V_{5}	V_{52}	V_{42}	V_{34}	V_{35}	V_{43}	V_{49}	V_{6}	V_{15}	V_{60}	V_{12}	V_{9}	V_{7}	V_{13}	V_{57}	V_{18}
	$\theta=4\pi/5$	V_{36}	V_{46}	V_{39}	V_{33}	V_{3}	V_{41}	V_{51}	V_{43}	V_{2}	V_{38}	V_{31}	V_{1}	V_{42}	V_{50}	V_{17}	V_{13}	V_{8}	V_{62}	V_{55}	V_{9}	V_{12}	V_{16}
	$\theta=6\pi/5$	V_{4}	V_{53}	V_{48}	V_{3}	V_{32}	V_{42}	V_{35}	V_{1}	V_{46}	V_{54}	V_{47}	V_{39}	V_{2}	V_{34}	V_{59}	V_{9}	V_{14}	V_{18}	V_{15}	V_{11}	V_{8}	V_{58}
	$\theta=8\pi/5$	V_{37}	V_{49}	V_{52}	V_{32}	V_{44}	V_{2}	V_{31}	V_{39}	V_{53}	V_{6}	V_{5}	V_{48}	V_{46}	V_{38}	V_{7}	V_{11}	V_{61}	V_{16}	V_{17}	V_{56}	V_{14}	V_{10}
$(0,-1,\varphi-1)$	$\theta=2\pi/5$	V_{50}	V_{38}	V_{31}	V_{51}	V_{1}	V_{43}	V_{40}	V_{32}	V_{6}	V_{54}	V_{47}	V_{5}	V_{37}	V_{45}	V_{12}	V_{8}	V_{16}	V_{62}	V_{55}	V_{17}	V_{9}	V_{13}
	$\theta=4\pi/5$	V_{54}	V_{4}	V_{3}	V_{47}	V_{41}	V_{31}	V_{2}	V_{36}	V_{53}	V_{45}	V_{40}	V_{48}	V_{33}	V_{1}	V_{10}	V_{60}	V_{18}	V_{13}	V_{12}	V_{15}	V_{57}	V_{7}
	$\theta=6\pi/5$	V_{45}	V_{35}	V_{34}	V_{40}	V_{50}	V_{3}	V_{44}	V_{52}	V_{37}	V_{1}	V_{2}	V_{32}	V_{49}	V_{41}	V_{14}	V_{17}	V_{61}	V_{7}	V_{10}	V_{56}	V_{16}	V_{11}
	$\theta=8\pi/5$	V_{1}	V_{39}	V_{46}	V_{2}	V_{54}	V_{34}	V_{51}	V_{5}	V_{33}	V_{41}	V_{44}	V_{36}	V_{6}	V_{50}	V_{59}	V_{15}	V_{9}	V_{11}	V_{14}	V_{8}	V_{18}	V_{58}
$(1,\varphi-1,0)$	$\theta=2\pi/5$	V_{39}	V_{48}	V_{53}	V_{46}	V_{6}	V_{38}	V_{35}	V_{51}	V_{3}	V_{40}	V_{45}	V_{4}	V_{50}	V_{34}	V_{7}	V_{17}	V_{11}	V_{56}	V_{61}	V_{14}	V_{16}	V_{10}
	$\theta=4\pi/5$	V_{31}	V_{51}	V_{50}	V_{38}	V_{42}	V_{2}	V_{37}	V_{45}	V_{47}	V_{5}	V_{6}	V_{54}	V_{40}	V_{32}	V_{9}	V_{13}	V_{62}	V_{17}	V_{16}	V_{55}	V_{12}	V_{8}
	$\theta=6\pi/5$	V_{1}	V_{45}	V_{40}	V_{2}	V_{48}	V_{36}	V_{49}	V_{6}	V_{35}	V_{43}	V_{42}	V_{34}	V_{5}	V_{52}	V_{57}	V_{18}	V_{7}	V_{13}	V_{12}	V_{10}	V_{15}	V_{60}
	$\theta=8\pi/5$	V_{33}	V_{6}	V_{5}	V_{36}	V_{51}	V_{44}	V_{3}	V_{42}	V_{37}	V_{53}	V_{48}	V_{32}	V_{43}	V_{4}	V_{11}	V_{58}	V_{9}	V_{18}	V_{15}	V_{8}	V_{59}	V_{14}
$(-1,\varphi-1,0)$	$\theta=2\pi/5$	V_{6}	V_{34}	V_{35}	V_{5}	V_{43}	V_{52}	V_{41}	V_{3}	V_{54}	V_{38}	V_{31}	V_{47}	V_{4}	V_{44}	V_{57}	V_{12}	V_{18}	V_{10}	V_{7}	V_{15}	V_{13}	V_{60}
	$\theta=4\pi/5$	V_{46}	V_{2}	V_{1}	V_{39}	V_{35}	V_{47}	V_{6}	V_{50}	V_{44}	V_{36}	V_{33}	V_{41}	V_{51}	V_{5}	V_{18}	V_{58}	V_{14}	V_{8}	V_{9}	V_{11}	V_{59}	V_{15}
	$\theta=6\pi/5$	V_{52}	V_{32}	V_{37}	V_{49}	V_{1}	V_{41}	V_{46}	V_{38}	V_{5}	V_{48}	V_{53}	V_{6}	V_{31}	V_{39}	V_{14}	V_{10}	V_{17}	V_{56}	V_{61}	V_{16}	V_{7}	V_{11}
	$\theta=8\pi/5$	V_{47}	V_{40}	V_{45}	V_{54}	V_{37}	V_{6}	V_{52}	V_{36}	V_{39}	V_{3}	V_{4}	V_{46}	V_{33}	V_{49}	V_{17}	V_{8}	V_{55}	V_{12}	V_{13}	V_{62}	V_{9}	V_{16}
$(1,0,\varphi)$	$\theta=2\pi/5$	V_{42}	V_{32}	V_{37}	V_{43}	V_{53}	V_{4}	V_{39}	V_{47}	V_{34}	V_{2}	V_{1}	V_{35}	V_{54}	V_{46}	V_{11}	V_{15}	V_{58}	V_{8}	V_{9}	V_{59}	V_{18}	V_{14}
	$\theta=4\pi/5$	V_{32}	V_{5}	V_{6}	V_{37}	V_{54}	V_{45}	V_{3}	V_{39}	V_{36}	V_{52}	V_{49}	V_{33}	V_{46}	V_{4}	V_{12}	V_{55}	V_{8}	V_{17}	V_{16}	V_{9}	V_{62}	V_{13}
	$\theta=6\pi/5$	V_{5}	V_{31}	V_{38}	V_{6}	V_{46}	V_{53}	V_{40}	V_{3}	V_{51}	V_{35}	V_{34}	V_{50}	V_{4}	V_{45}	V_{56}	V_{11}	V_{17}	V_{7}	V_{10}	V_{16}	V_{14}	V_{61}
	$\theta=8\pi/5$	V_{31}	V_{41}	V_{44}	V_{38}	V_{4}	V_{54}	V_{48}	V_{40}	V_{1}	V_{33}	V_{36}	V_{2}	V_{45}	V_{53}	V_{15}	V_{12}	V_{7}	V_{57}	V_{60}	V_{10}	V_{13}	V_{18}
$(-1,0,\varphi)$	$\theta=2\pi/5$	V_{49}	V_{3}	V_{4}	V_{52}	V_{46}	V_{36}	V_{1}	V_{31}	V_{50}	V_{42}	V_{43}	V_{51}	V_{38}	V_{2}	V_{9}	V_{55}	V_{16}	V_{12}	V_{13}	V_{17}	V_{62}	V_{8}
	$\theta=4\pi/5$	V_{50}	V_{41}	V_{44}	V_{51}	V_{36}	V_{5}	V_{53}	V_{37}	V_{42}	V_{3}	V_{4}	V_{43}	V_{32}	V_{48}	V_{18}	V_{9}	V_{58}	V_{11}	V_{14}	V_{59}	V_{8}	V_{15}
	$\theta=6\pi/5$	V_{42}	V_{49}	V_{52}	V_{43}	V_{5}	V_{35}	V_{38}	V_{54}	V_{3}	V_{41}	V_{44}	V_{4}	V_{47}	V_{31}	V_{10}	V_{18}	V_{12}	V_{57}	V_{60}	V_{13}	V_{15}	V_{7}
	$\theta=8\pi/5$	V_{3}	V_{50}	V_{51}	V_{4}	V_{35}	V_{45}	V_{32}	V_{2}	V_{41}	V_{49}	V_{52}	V_{44}	V_{1}	V_{37}	V_{56}	V_{10}	V_{11}	V_{16}	V_{17}	V_{14}	V_{7}	V_{61}
$(1,0,0)$	$\theta=\pi$	V_{40}	V_{39}	V_{46}	V_{45}	V_{44}	V_{43}	V_{50}	V_{49}	V_{48}	V_{47}	V_{54}	V_{53}	V_{52}	V_{51}	V_{58}	V_{57}	V_{56}	V_{55}	V_{62}	V_{61}	V_{60}	V_{59}
$(0,1,0)$	$\theta=\pi$	V_{46}	V_{45}	V_{40}	V_{39}	V_{42}	V_{41}	V_{52}	V_{51}	V_{54}	V_{53}	V_{48}	V_{47}	V_{50}	V_{49}	V_{60}	V_{59}	V_{62}	V_{61}	V_{56}	V_{55}	V_{58}	V_{57}
$(0,0,1)$	$\theta=\pi$	V_{43}	V_{44}	V_{41}	V_{42}	V_{39}	V_{40}	V_{53}	V_{54}	V_{51}	V_{52}	V_{49}	V_{50}	V_{47}	V_{48}	V_{61}	V_{62}	V_{59}	V_{60}	V_{57}	V_{58}	V_{55}	V_{56}
$(\varphi-1,1,\varphi)$	$\theta=\pi$	V_{51}	V_{4}	V_{3}	V_{50}	V_{40}	V_{34}	V_{1}	V_{37}	V_{52}	V_{44}	V_{41}	V_{49}	V_{32}	V_{2}	V_{7}	V_{61}	V_{17}	V_{14}	V_{11}	V_{16}	V_{56}	V_{10}
$(\varphi-1,1,-\varphi)$	$\theta=\pi$	V_{4}	V_{52}	V_{49}	V_{3}	V_{33}	V_{39}	V_{38}	V_{2}	V_{43}	V_{51}	V_{50}	V_{42}	V_{1}	V_{31}	V_{62}	V_{8}	V_{13}	V_{17}	V_{16}	V_{12}	V_{9}	V_{55}
$(\varphi-1,-1,\varphi)$	$\theta=\pi$	V_{37}	V_{43}	V_{42}	V_{32}	V_{3}	V_{48}	V_{54}	V_{46}	V_{1}	V_{35}	V_{34}	V_{2}	V_{39}	V_{47}	V_{18}	V_{14}	V_{9}	V_{59}	V_{58}	V_{8}	V_{11}	V_{15}
$(\varphi-1,-1,-\varphi)$	$\theta=\pi$	V_{44}	V_{38}	V_{31}	V_{41}	V_{47}	V_{3}	V_{45}	V_{53}	V_{36}	V_{2}	V_{1}	V_{33}	V_{48}	V_{40}	V_{13}	V_{18}	V_{60}	V_{10}	V_{7}	V_{57}	V_{15}	V_{12}
$(1,\varphi,\varphi-1)$	$\theta=\pi$	V_{52}	V_{43}	V_{42}	V_{49}	V_{34}	V_{6}	V_{47}	V_{31}	V_{44}	V_{4}	V_{3}	V_{41}	V_{38}	V_{54}	V_{15}	V_{7}	V_{60}	V_{13}	V_{12}	V_{57}	V_{10}	V_{18}
$(1,-\varphi,\varphi-1)$	$\theta=\pi$	V_{6}	V_{37}	V_{32}	V_{5}	V_{40}	V_{47}	V_{46}	V_{4}	V_{49}	V_{33}	V_{36}	V_{52}	V_{3}	V_{39}	V_{62}	V_{13}	V_{16}	V_{9}	V_{8}	V_{17}	V_{12}	V_{55}
$(-1,\varphi,\varphi-1)$	$\theta=\pi$	V_{38}	V_{6}	V_{5}	V_{31}	V_{48}	V_{39}	V_{4}	V_{45}	V_{34}	V_{50}	V_{51}	V_{35}	V_{40}	V_{3}	V_{14}	V_{61}	V_{10}	V_{16}	V_{17}	V_{7}	V_{56}	V_{11}
$(-1,-\varphi,\varphi-1)$	$\theta=\pi$	V_{44}	V_{51}	V_{50}	V_{41}	V_{6}	V_{33}	V_{32}	V_{48}	V_{4}	V_{43}	V_{42}	V_{3}	V_{53}	V_{37}	V_{8}	V_{15}	V_{14}	V_{59}	V_{58}	V_{11}	V_{18}	V_{9}
$(\varphi,\varphi-1,1)$	$\theta=\pi$	V_{47}	V_{35}	V_{34}	V_{54}	V_{2}	V_{46}	V_{41}	V_{33}	V_{5}	V_{51}	V_{50}	V_{6}	V_{36}	V_{44}	V_{11}	V_{9}	V_{15}	V_{59}	V_{58}	V_{18}	V_{8}	V_{14}
$(\varphi,\varphi-1,-1)$	$\theta=\pi$	V_{36}	V_{48}	V_{53}	V_{33}	V_{45}	V_{1}	V_{34}	V_{42}	V_{52}	V_{5}	V_{6}	V_{49}	V_{43}	V_{35}	V_{10}	V_{12}	V_{60}	V_{15}	V_{18}	V_{57}	V_{13}	V_{7}
$(-\varphi,\varphi-1,1)$	$\theta=\pi$	V_{2}	V_{42}	V_{43}	V_{1}	V_{51}	V_{31}	V_{54}	V_{6}	V_{32}	V_{40}	V_{45}	V_{37}	V_{5}	V_{47}	V_{62}	V_{16}	V_{8}	V_{12}	V_{13}	V_{9}	V_{17}	V_{55}
$(-\varphi,\varphi-1,-1)$	$\theta=\pi$	V_{41}	V_{1}	V_{2}	V_{44}	V_{32}	V_{52}	V_{6}	V_{53}	V_{39}	V_{31}	V_{38}	V_{46}	V_{48}	V_{5}	V_{16}	V_{61}	V_{11}	V_{7}	V_{10}	V_{14}	V_{56}	V_{17}
$(1,1,1)$	$\theta=2\pi/3$	V_{48}	V_{52}	V_{49}	V_{53}	V_{50}	V_{54}	V_{31}	V_{35}	V_{32}	V_{36}	V_{33}	V_{37}	V_{34}	V_{38}	V_{55}	V_{59}	V_{56}	V_{60}	V_{57}	V_{61}	V_{58}	V_{62}
	$\theta=4\pi/3$	V_{35}	V_{37}	V_{32}	V_{34}	V_{36}	V_{38}	V_{39}	V_{41}	V_{43}	V_{45}	V_{40}	V_{42}	V_{44}	V_{46}	V_{55}	V_{57}	V_{59}	V_{61}	V_{56}	V_{58}	V_{60}	V_{62}
(-1,1,1)	$\theta=2\pi/3$	V_{32}	V_{34}	V_{35}	V_{37}	V_{31}	V_{33}	V_{44}	V_{46}	V_{40}	V_{42}	V_{43}	V_{45}	V_{39}	V_{41}	V_{60}	V_{62}	V_{56}	V_{58}	V_{59}	V_{61}	V_{55}	V_{57}
	$\theta=4\pi/3$	V_{54}	V_{50}	V_{51}	V_{47}	V_{52}	V_{48}	V_{37}	V_{33}	V_{38}	V_{34}	V_{35}	V_{31}	V_{36}	V_{32}	V_{61}	V_{57}	V_{62}	V_{58}	V_{59}	V_{55}	V_{60}	V_{56}
(1,-1,1)	$\theta=2\pi/3$	V_{33}	V_{31}	V_{38}	V_{36}	V_{34}	V_{32}	V_{45}	V_{43}	V_{41}	V_{39}	V_{46}	V_{44}	V_{42}	V_{40}	V_{61}	V_{59}	V_{57}	V_{55}	V_{62}	V_{60}	V_{58}	V_{56}
	$\theta=4\pi/3$	V_{49}	V_{53}	V_{48}	V_{52}	V_{47}	V_{51}	V_{34}	V_{38}	V_{33}	V_{37}	V_{32}	V_{36}	V_{31}	V_{35}	V_{58}	V_{62}	V_{57}	V_{61}	V_{56}	V_{60}	V_{55}	V_{59}
(1,1,-1)	$\theta=2\pi/3$	V_{38}	V_{36}	V_{33}	V_{31}	V_{37}	V_{35}	V_{42}	V_{40}	V_{46}	V_{44}	V_{41}	V_{39}	V_{45}	V_{43}	V_{58}	V_{56}	V_{62}	V_{60}	V_{57}	V_{55}	V_{61}	V_{59}
	$\theta=4\pi/3$	V_{51}	V_{47}	V_{54}	V_{50}	V_{53}	V_{49}	V_{36}	V_{32}	V_{35}	V_{31}	V_{38}	V_{34}	V_{37}	V_{33}	V_{60}	V_{56}	V_{59}	V_{55}	V_{62}	V_{58}	V_{61}	V_{57}
$(0,\varphi-1,\varphi)$	$\theta=2\pi/3$	V_{5}	V_{36}	V_{33}	V_{6}	V_{41}	V_{50}	V_{53}	V_{4}	V_{48}	V_{32}	V_{37}	V_{53}	V_{3}	V_{42}	V_{59}	V_{14}	V_{15}	V_{8}	V_{9}	V_{18}	V_{11}	V_{58}
	$\theta=4\pi/3$	V_{45}	V_{54}	V_{47}	V_{40}	V_{5}	V_{32}	V_{33}	V_{49}	V_{4}	V_{46}	V_{39}	V_{3}	V_{52}	V_{36}	V_{9}	V_{16}	V_{13}	V_{62}	V_{55}	V_{12}	V_{17}	V_{8}
$(0,\varphi-1,-\varphi)$	$\theta=2\pi/3$	V_{53}	V_{46}	V_{39}	V_{48}	V_{31}	V_{5}	V_{50}	V_{34}	V_{45}	V_{4}	V_{3}	V_{40}	V_{35}	V_{51}	V_{16}	V_{10}	V_{61}	V_{14}	V_{11}	V_{56}	V_{7}	V_{17}
	$\theta=4\pi/3$	V_{35}	V_{5}	V_{6}	V_{34}	V_{49}	V_{42}	V_{4}	V_{44}	V_{31}	V_{47}	V_{54}	V_{38}	V_{41}	V_{3}	V_{13}	V_{60}	V_{7}	V_{15}	V_{18}	V_{10}	V_{57}	V_{12}
$(\varphi-1,\varphi,0)$	$\theta=2\pi/3$	V_{2}	V_{44}	V_{41}	V_{1}	V_{49}	V_{37}	V_{48}	V_{5}	V_{38}	V_{46}	V_{39}	V_{31}	V_{6}	V_{53}	V_{56}	V_{17}	V_{10}	V_{14}	V_{11}	V_{7}	V_{16}	V_{61}
	$\theta=4\pi/3$	V_{43}	V_{1}	V_{2}	V_{42}	V_{38}	V_{50}	V_{5}	V_{47}	V_{45}	V_{37}	V_{32}	V_{40}	V_{54}	V_{6}	V_{17}	V_{55}	V_{13}	V_{9}	V_{8}	V_{12}	V_{62}	V_{16}
$(\varphi-1,-\varphi,0)$	$\theta=2\pi/3$	V_{53}	V_{33}	V_{36}	V_{48}	V_{2}	V_{40}	V_{43}	V_{35}	V_{6}	V_{49}	V_{52}	V_{5}	V_{34}	V_{42}	V_{13}	V_{7}	V_{18}	V_{57}	V_{60}	V_{15}	V_{10}	V_{12}
	$\theta=4\pi/3$	V_{34}	V_{54}	V_{47}	V_{35}	V_{39}	V_{1}	V_{36}	V_{44}	V_{50}	V_{6}	V_{5}	V_{51}	V_{41}	V_{33}	V_{8}	V_{14}	V_{58}	V_{18}	V_{15}	V_{59}	V_{11}	V_{9}
$(\varphi,0,\varphi-1)$	$\theta=2\pi/3$	V_{3}	V_{47}	V_{54}	V_{4}	V_{38}	V_{44}	V_{33}	V_{1}	V_{40}	V_{48}	V_{53}	V_{45}	V_{2}	V_{36}	V_{57}	V_{7}	V_{12}	V_{15}	V_{18}	V_{13}	V_{10}	V_{60}
	$\theta=4\pi/3$	V_{39}	V_{33}	V_{36}	V_{46}	V_{52}	V_{4}	V_{42}	V_{50}	V_{31}	V_{1}	V_{2}	V_{38}	V_{51}	V_{43}	V_{12}	V_{16}	V_{55}	V_{9}	V_{8}	V_{62}	V_{17}	V_{13}
$(-\varphi,0,\varphi-1)$	$\theta=2\pi/3$	V_{48}	V_{3}	V_{4}	V_{53}	V_{43}	V_{37}	V_{2}	V_{34}	V_{42}	V_{39}	V_{46}	V_{54}	V_{35}	V_{1}	V_{8}	V_{58}	V_{15}	V_{11}	V_{14}	V_{18}	V_{59}	V_{9}
	$\theta=4\pi/3$	V_{34}	V_{40}	V_{45}	V_{35}	V_{4}	V_{51}	V_{49}	V_{41}	V_{2}	V_{32}	V_{37}	V_{1}	V_{44}	V_{52}	V_{16}	V_{11}	V_{10}	V_{56}	V_{61}	V_{7}	V_{14}	V_{17}

Şekil 7.7 $\mathbb{R}^3_{DT}$ de Dönme Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri Devamı

Yardımcı Teorem 7.3 *(x, y, z) noktasını $(-x, -y, -z)$ noktasına dönüştüren dönüşüm olan $O = (0, 0, 0)$ orijine göre σ_0 inversiyonu $\mathbb{R}^3_{DT}$ un bir izometrisidir.*

Şekil7.8 deki tablolarda inversiyon hareketi(dönüşümü) sonrasında birim kürenin köşe noktalarının görüntüleri verilmiştir.

İnversiyon Altında Nokta Görüntüleri	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8	V_9	V_{10}	V_{11}	V_{12}	V_{13}	V_{14}	V_{15}	V_{16}
$O = (0,0,0)$ σ_0	V_2	V_1	V_4	V_3	V_6	V_5	V_{10}	V_9	V_8	V_7	V_{14}	V_{13}	V_{12}	V_{11}	V_{18}	V_{17}
İnversiyon Altında Nokta Görüntüleri	V_{17}	V_{18}	V_{19}	V_{20}	V_{21}	V_{22}	V_{23}	V_{24}	V_{25}	V_{26}	V_{27}	V_{28}	V_{29}	V_{30}	V_{31}	V_{32}
$O = (0,0,0)$ σ_0	V_{16}	V_{15}	V_{22}	V_{21}	V_{20}	V_{19}	V_{26}	V_{25}	V_{24}	V_{23}	V_{30}	V_{29}	V_{28}	V_{27}	V_{38}	V_{37}
İnversiyon Altında Nokta Görüntüleri	V_{33}	V_{34}	V_{35}	V_{36}	V_{37}	V_{38}	V_{39}	V_{40}	V_{41}	V_{42}	V_{43}	V_{44}	V_{45}	V_{46}	V_{47}	V_{48}
$O = (0,0,0)$ σ_0	V_{36}	V_{35}	V_{34}	V_{33}	V_{32}	V_{31}	V_{46}	V_{45}	V_{44}	V_{43}	V_{42}	V_{41}	V_{40}	V_{39}	V_{54}	V_{53}
İnversiyon Altında Nokta Görüntüleri	V_{49}	V_{50}	V_{51}	V_{52}	V_{53}	V_{54}	V_{55}	V_{56}	V_{57}	V_{58}	V_{59}	V_{60}	V_{61}	V_{62}		
$O = (0,0,0)$ σ_0	V_{52}	V_{51}	V_{50}	V_{49}	V_{48}	V_{47}	V_{62}	V_{61}	V_{60}	V_{59}	V_{58}	V_{57}	V_{56}	V_{55}		

Şekil 7.8 $\mathbb{R}^3_{DT}$ de σ_O İnversiyonu Altında Köşe Noktaların Görüntüleri

Önerme 7.4 *$d_{DT}-$ uzaklığını invaryant bırakan, orijine göre dönme-yansımaların tümü orijine göre inversiyon hareketine (dönüşümüne) eşittir.*

İspat *$r_\theta \in R_{DT}$, Γ ve Δ , Π ye dik düzlemler olmak üzere bir dönme-yansıma $\rho := \sigma_\Pi \sigma_\Delta \sigma_\Gamma = \sigma_\Pi r_\theta$ biçiminde yazılabilir. Bu durumda Π düzlemi için Teorem 6.3 de ifade edilen otuz bir dönme ekseninden on beş durum incelenmelidir. Çünkü D_1 ve D_3 deki dönme eksenlerinden hiçbirisi Sonuç 6.4 de verilen yansıma düzlemlerinden herhangi birine dik değildir. Eğer Π düzlemi olarak $x = 0$ düzlemi alınırsa r_θ nın birim yön vektörü $(1, 0, 0)$ olur ve*

$$\rho := \sigma_\Pi r(x, y, z) = (-x, ycos\theta - zsin\theta, ysin\theta + zcos\theta)$$

elde edilir.
$V_1 = (0, 0, 1)$, $V_{19} = \left(\frac{3\varphi-2}{5}, 0, \frac{\varphi+3}{5}\right)$, $V_7 = \left(0, \frac{5\varphi-7}{3}, \frac{3\varphi-2}{3}\right)$, $V_{31} = \left(\frac{\varphi-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\varphi}{2}\right)$, $V_{27} = \left(0, \frac{\varphi+3}{5}, \frac{3\varphi-2}{3}\right)$ *ve* $V_{15} = \left(\frac{5\varphi-7}{3}, \frac{3\varphi-2}{3}, 0\right)$ *köşe noktaları için*

$$\rho(V_1) = \rho\left(0,0,1\right) = \left(0, -\sin\theta, \cos\theta\right)$$
$$\rho(V_{19}) = \rho\left(\tfrac{3\varphi-2}{5}, 0, \tfrac{\varphi+3}{5}\right) = \left(\tfrac{-3\varphi+2}{5}, -\left(\tfrac{3+\varphi}{5}\right)\sin\theta, \left(\tfrac{3+\varphi}{5}\right)\cos\theta\right)$$
$$\rho(V_7) = \rho\left(0, \tfrac{5\varphi-7}{3}, \tfrac{3\varphi-2}{3}\right) = \left(0, \left(\tfrac{5\varphi-7}{3}\right)\cos\theta - \left(\tfrac{3\varphi-2}{3}\right)\sin\theta, \left(\tfrac{5\varphi-7}{3}\right)\sin\theta + \left(\tfrac{3\varphi-2}{3}\right)\cos\theta\right)$$
$$\rho(V_{31}) = \rho\left(\tfrac{\varphi-1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{\varphi}{2}\right) = \left(\tfrac{1-\varphi}{2}, \tfrac{1}{2}\cos\theta - \tfrac{\varphi}{2}\sin\theta, \tfrac{\varphi}{2}\cos\theta + \tfrac{1}{2}\sin\theta\right)$$
$$\rho(V_{27}) = \rho\left(0, \tfrac{\varphi+3}{5}, \tfrac{3\varphi-2}{3}\right) = \left(0, \left(\tfrac{3+\varphi}{5}\right)\cos\theta - \left(\tfrac{3\varphi-2}{5}\right)\sin\theta, \left(\tfrac{3\varphi-2}{5}\right)\cos\theta + \left(\tfrac{3+\varphi}{5}\right)\sin\theta\right)$$
$$\rho(V_{15}) = \rho\left(\tfrac{5\varphi-7}{3}, \tfrac{3\varphi-2}{3}, 0\right) = \left(\tfrac{7-5\varphi}{3}, \left(\tfrac{3\varphi-2}{3}\right)\cos\theta, \left(\tfrac{3\varphi-2}{3}\right)\sin\theta\right)$$

olur.

$$d_{DT}\left(V_1, V_{19}\right) = \frac{42\varphi - 36}{55}, d_{DT}\left(V_7, V_{31}\right) = \frac{26\varphi - 38}{11}, d_{DT}\left(V_{27}, V_{15}\right) = \frac{-4\varphi + 16}{15}$$

olduğundan ve ρ uzaklığı koruyacağından

$$d_{DT}(\rho\left(V_1\right), \rho\left(V_{19}\right)) = \frac{42\varphi - 36}{55}, d_{DT}(\rho\left(V_7\right), \rho\left(V_{31}\right)) = \frac{26\varphi - 38}{11}$$

ve

$$d_{DT}(\rho\left(V_{27}\right), \rho\left(V_{15}\right)) = \frac{-4\varphi + 16}{15}$$

olup sırasıyla
$\alpha_1 = \frac{3\varphi-2}{5}$, $\alpha_2 = \frac{\varphi-2}{5}\sin\theta$ *ve* $\alpha_3 = \frac{2-\varphi}{5}\cos\theta$ *olmak üzere*

$$\max\left\{\begin{array}{l}
|\alpha_1| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}
|\alpha_2| + |\alpha_3|, \\
(1-\varphi)|\alpha_1| + 2|\alpha_2| + (1+\varphi)|\alpha_3|, \\
-\varphi|\alpha_1| + (2+\varphi)|\alpha_2| + 2\varphi|\alpha_3|, \\
(1-2\varphi)|\alpha_1| + (1+\varphi)|\alpha_2| + 3\varphi|\alpha_3|, \\
2(1-\varphi)|\alpha_1| + |\alpha_2| + (2\varphi+1)|\alpha_3|
\end{array}\right\}, \\
|\alpha_2| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}
|\alpha_1| + |\alpha_3|, \\
(1+\varphi)|\alpha_1| + (1-\varphi)|\alpha_2| + 2|\alpha_3|, \\
2\varphi|\alpha_1| - \varphi|\alpha_2| + (2+\varphi)|\alpha_3|, \\
3\varphi|\alpha_1| + (1-2\varphi)|\alpha_2| + (1+\varphi)|\alpha_3|, \\
(2\varphi+1)|\alpha_1| + 2(1-\varphi)|\alpha_2| + |\alpha_3|
\end{array}\right\}, \\
|\alpha_3| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}
|\alpha_1| + |\alpha_2|, \\
2|\alpha_1| + (1+\varphi)|\alpha_2| + (1-\varphi)|\alpha_3|, \\
(2+\varphi)|\alpha_1| + 2\varphi|\alpha_2| - \varphi|\alpha_3|, \\
(1+\varphi)|\alpha_1| + 3\varphi|\alpha_2| + (1-2\varphi)|\alpha_3|, \\
|\alpha_1| + (2\varphi+1)|\alpha_2| + 2(1-\varphi)|\alpha_3|
\end{array}\right\}
\end{array}\right\} = \frac{42\varphi - 36}{55}$$

$\beta_1 = \frac{\varphi-1}{2}$, $\beta_2 = \frac{10\varphi-17}{6}\cos\theta + \frac{4-3\varphi}{6}\sin\theta$ *ve* $\beta_3 = \frac{3\varphi-4}{6}\cos\theta + \frac{10\varphi-17}{6}\sin\theta$ *olmak üzere*

$$\max\left\{\begin{array}{l}
|\beta_1|+\frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}|\beta_2|+|\beta_3|,\\(1-\varphi)|\beta_1|+2|\beta_2|+(1+\varphi)|\beta_3|,\\-\varphi|\beta_1|+(2+\varphi)|\beta_2|+2\varphi|\beta_3|,\\(1-2\varphi)|\beta_1|+(1+\varphi)|\beta_2|+3\varphi|\beta_3|,\\2(1-\varphi)|\beta_1|+|\beta_2|+(2\varphi+1)|\beta_3|\end{array}\right\},\\
|\beta_2|+\frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}|\beta_1|+|\beta_3|,\\(1+\varphi)|\beta_1|+(1-\varphi)|\beta_2|+2|\beta_3|,\\2\varphi|\beta_1|-\varphi|\beta_2|+(2+\varphi)|\beta_3|,\\3\varphi|\beta_1|+(1-2\varphi)|\beta_2|+(1+\varphi)|\beta_3|,\\(2\varphi+1)|\beta_1|+2(1-\varphi)|\beta_2|+|\beta_3|\end{array}\right\},\\
|\beta_3|+\frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}|\beta_1|+|\beta_2|,\\2|\beta_1|+(1+\varphi)|\beta_2|+(1-\varphi)|\beta_3|,\\(2+\varphi)|\beta_1|+2\varphi|\beta_2|-\varphi|\beta_3|,\\(1+\varphi)|\beta_1|+3\varphi|\beta_2|+(1-2\varphi)|\beta_3|,\\|\beta_1|+(2\varphi+1)|\beta_2|+2(1-\varphi)|\beta_3|\end{array}\right\}
\end{array}\right\}=\frac{26\varphi-38}{11}$$

$\gamma_1=\frac{5\varphi-7}{3}$, $\gamma_2=\frac{-12\varphi+19}{15}\cos\theta-\frac{3\varphi-2}{5}\sin\theta$ *ve* $\gamma_3=\frac{3\varphi-2}{5}\cos\theta+\frac{-12\varphi+19}{15}\sin\theta$ *olmak üzere*

$$\max\left\{\begin{array}{l}
|\gamma_1|+\frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}|\gamma_2|+|\gamma_3|,\\(1-\varphi)|\gamma_1|+2|\gamma_2|+(1+\varphi)|\gamma_3|,\\-\varphi|\gamma_1|+(2+\varphi)|\gamma_2|+2\varphi|\gamma_3|,\\(1-2\varphi)|\gamma_1|+(1+\varphi)|\gamma_2|+3\varphi|\gamma_3|,\\2(1-\varphi)|\gamma_1|+|\gamma_2|+(2\varphi+1)|\gamma_3|\end{array}\right\},\\
|\gamma_2|+\frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}|\gamma_1|+|\gamma_3|,\\(1+\varphi)|\gamma_1|+(1-\varphi)|\gamma_2|+2|\gamma_3|,\\2\varphi|\gamma_1|-\varphi|\gamma_2|+(2+\varphi)|\gamma_3|,\\3\varphi|\gamma_1|+(1-2\varphi)|\gamma_2|+(1+\varphi)|\gamma_3|,\\(2\varphi+1)|\gamma_1|+2(1-\varphi)|\gamma_2|+|\gamma_3|\end{array}\right\},\\
|\gamma_3|+\frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l}|\gamma_1|+|\gamma_2|,\\2|\gamma_1|+(1+\varphi)|\gamma_2|+(1-\varphi)|\gamma_3|,\\(2+\varphi)|\gamma_1|+2\varphi|\gamma_2|-\varphi|\gamma_3|,\\(1+\varphi)|\gamma_1|+3\varphi|\gamma_2|+(1-2\varphi)|\gamma_3|,\\|\gamma_1|+(2\varphi+1)|\gamma_2|+2(1-\varphi)|\gamma_3|\end{array}\right\}
\end{array}\right\}=\frac{-4\varphi+16}{15}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklem sistemi çözülürse $\theta\in\{0,\pi\}$ *elde edilir. Buradan da kolaylıkla* $\sigma_\Pi r_\pi=\sigma_0$ *olduğu görülebilir. Sonuç olarak bu durumda yeni bir dönme-yansıma yoktur. Benzer şekilde dönme eksenleri bir yansıma düzlemi normali olan* $\left(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{\varphi}{2},\frac{\varphi-1}{2}\right)$, $\left(\frac{\varphi-1}{2},\pm\frac{1}{2},\pm\frac{\varphi}{2}\right)$, $\left(\pm\frac{\varphi}{2},\frac{\varphi-1}{2},\pm\frac{1}{2}\right)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ *vektörleri için de aynı sonuçlar elde edilir.*

Şekil7.9 ve Şekil7.10 daki tablolarda, bir yansıma düzleminin normali olup, aynı zamanda dönme ekseninin doğrultusu olanlar tespit edilmiş ve bu eksenlere göre dönme-yansıma hareketi(dönüşümü) yapılarak birim kürenin köşe noktalarının bu hareketlere (dönüşümlere) göre görüntüleri verilmiştir.

Düzlemi Normali Olan Dönme	(1,0,0)	(0,1,0)	(0,0,1)	$(\varphi-1,1,\varphi)$	$(\varphi-1,1,-\varphi)$	$(\varphi-1,-1,\varphi)$	$(\varphi-1,-1,-\varphi)$	$(1,\varphi,\varphi-1)$	$(1,-\varphi,\varphi-1)$	$(-1,\varphi,\varphi-1)$	$(-1,-\varphi,\varphi-1)$	$(\varphi,\varphi-1,1)$	$(\varphi,\varphi-1,-1)$	$(-\varphi,\varphi-1,1)$	$(-\varphi,\varphi-1,-1)$
Açılar	$\theta=\pi$	$\theta=\pi$	$\theta=\pi$	$\theta=\pi$	$\theta=\pi$	$\theta=\pi$	$\theta=\pi$	$\theta=\pi$	$\theta=\pi$	$\theta=\pi$	$\theta=\pi$	$\theta=\pi$	$\theta=\pi$	$\theta=\pi$	$\theta=\pi$
V_1	V_2	V_2	V_2	V_2	V_2	V_2	V_2	V_2	V_2	V_2	V_2	V_2	V_2	V_2	V_2
V_2	V_1	V_1	V_1	V_1	V_1	V_1	V_1	V_1	V_1	V_1	V_1	V_1	V_1	V_1	V_1
V_3	V_4	V_4	V_4	V_4	V_4	V_4	V_4	V_4	V_4	V_4	V_4	V_4	V_4	V_4	V_4
V_4	V_3	V_3	V_3	V_3	V_3	V_3	V_3	V_3	V_3	V_3	V_3	V_3	V_3	V_3	V_3
V_5	V_6	V_6	V_6	V_6	V_6	V_6	V_6	V_6	V_6	V_6	V_6	V_6	V_6	V_6	V_6
V_6	V_5	V_5	V_5	V_5	V_5	V_5	V_5	V_5	V_5	V_5	V_5	V_5	V_5	V_5	V_5
V_7	V_{10}	V_{10}	V_{10}	V_{10}	V_{10}	V_{10}	V_{10}	V_{10}	V_{10}	V_{10}	V_{10}	V_{10}	V_{10}	V_{10}	V_{10}
V_8	V_9	V_9	V_9	V_9	V_9	V_9	V_9	V_9	V_9	V_9	V_9	V_9	V_9	V_9	V_9
V_9	V_8	V_8	V_8	V_8	V_8	V_8	V_8	V_8	V_8	V_8	V_8	V_8	V_8	V_8	V_8
V_{10}	V_7	V_7	V_7	V_7	V_7	V_7	V_7	V_7	V_7	V_7	V_7	V_7	V_7	V_7	V_7
V_{11}	V_{14}	V_{14}	V_{14}	V_{14}	V_{14}	V_{14}	V_{14}	V_{14}	V_{14}	V_{14}	V_{14}	V_{14}	V_{14}	V_{14}	V_{14}
V_{12}	V_{13}	V_{13}	V_{13}	V_{13}	V_{13}	V_{13}	V_{13}	V_{13}	V_{13}	V_{13}	V_{13}	V_{13}	V_{13}	V_{13}	V_{13}
V_{13}	V_{12}	V_{12}	V_{12}	V_{12}	V_{12}	V_{12}	V_{12}	V_{12}	V_{12}	V_{12}	V_{12}	V_{12}	V_{12}	V_{12}	V_{12}
V_{14}	V_{11}	V_{11}	V_{11}	V_{11}	V_{11}	V_{11}	V_{11}	V_{11}	V_{11}	V_{11}	V_{11}	V_{11}	V_{11}	V_{11}	V_{11}
V_{15}	V_{18}	V_{18}	V_{18}	V_{18}	V_{18}	V_{18}	V_{18}	V_{18}	V_{18}	V_{18}	V_{18}	V_{18}	V_{18}	V_{18}	V_{18}
V_{16}	V_{17}	V_{17}	V_{17}	V_{17}	V_{17}	V_{17}	V_{17}	V_{17}	V_{17}	V_{17}	V_{17}	V_{17}	V_{17}	V_{17}	V_{17}
V_{17}	V_{16}	V_{16}	V_{16}	V_{16}	V_{16}	V_{16}	V_{16}	V_{16}	V_{16}	V_{16}	V_{16}	V_{16}	V_{16}	V_{16}	V_{16}
V_{18}	V_{15}	V_{15}	V_{15}	V_{15}	V_{15}	V_{15}	V_{15}	V_{15}	V_{15}	V_{15}	V_{15}	V_{15}	V_{15}	V_{15}	V_{15}
V_{19}	V_{22}	V_{22}	V_{22}	V_{22}	V_{22}	V_{22}	V_{22}	V_{22}	V_{22}	V_{22}	V_{22}	V_{22}	V_{22}	V_{22}	V_{22}
V_{20}	V_{21}	V_{21}	V_{21}	V_{21}	V_{21}	V_{21}	V_{21}	V_{21}	V_{21}	V_{21}	V_{21}	V_{21}	V_{21}	V_{21}	V_{21}
V_{21}	V_{20}	V_{20}	V_{20}	V_{20}	V_{20}	V_{20}	V_{20}	V_{20}	V_{20}	V_{20}	V_{20}	V_{20}	V_{20}	V_{20}	V_{20}
V_{22}	V_{19}	V_{19}	V_{19}	V_{19}	V_{19}	V_{19}	V_{19}	V_{19}	V_{19}	V_{19}	V_{19}	V_{19}	V_{19}	V_{19}	V_{19}
V_{23}	V_{26}	V_{26}	V_{26}	V_{26}	V_{26}	V_{26}	V_{26}	V_{26}	V_{26}	V_{26}	V_{26}	V_{26}	V_{26}	V_{26}	V_{26}
V_{24}	V_{25}	V_{25}	V_{25}	V_{25}	V_{25}	V_{25}	V_{25}	V_{25}	V_{25}	V_{25}	V_{25}	V_{25}	V_{25}	V_{25}	V_{25}
V_{25}	V_{24}	V_{24}	V_{24}	V_{24}	V_{24}	V_{24}	V_{24}	V_{24}	V_{24}	V_{24}	V_{24}	V_{24}	V_{24}	V_{24}	V_{24}
V_{26}	V_{23}	V_{23}	V_{23}	V_{23}	V_{23}	V_{23}	V_{23}	V_{23}	V_{23}	V_{23}	V_{23}	V_{23}	V_{23}	V_{23}	V_{23}
V_{27}	V_{30}	V_{30}	V_{30}	V_{30}	V_{30}	V_{30}	V_{30}	V_{30}	V_{30}	V_{30}	V_{30}	V_{30}	V_{30}	V_{30}	V_{30}
V_{28}	V_{29}	V_{29}	V_{29}	V_{29}	V_{29}	V_{29}	V_{29}	V_{29}	V_{29}	V_{29}	V_{29}	V_{29}	V_{29}	V_{29}	V_{29}
V_{29}	V_{28}	V_{28}	V_{28}	V_{28}	V_{28}	V_{28}	V_{28}	V_{28}	V_{28}	V_{28}	V_{28}	V_{28}	V_{28}	V_{28}	V_{28}
V_{30}	V_{27}	V_{27}	V_{27}	V_{27}	V_{27}	V_{27}	V_{27}	V_{27}	V_{27}	V_{27}	V_{27}	V_{27}	V_{27}	V_{27}	V_{27}
V_{31}	V_{38}	V_{38}	V_{38}	V_{38}	V_{38}	V_{38}	V_{38}	V_{38}	V_{38}	V_{38}	V_{38}	V_{38}	V_{38}	V_{38}	V_{38}

Şekil 7.9 $\mathbb{R}^3_{DT}$ de Dönme Yansıma Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri

Düzlemi Normali Olan Dönme	$(1,0,0)$	$(0,1,0)$	$(0,0,1)$	$(\varphi-1,1,\varphi)$	$(\varphi-1,1,-\varphi)$	$(\varphi-1,-1,\varphi)$	$(\varphi-1,-1,-\varphi)$	$(1,\varphi,\varphi-1)$	$(1,-\varphi,\varphi-1)$	$(-1,\varphi,\varphi-1)$	$(-1,-\varphi,\varphi-1)$	$(\varphi,\varphi-1,1)$	$(\varphi,\varphi-1,-1)$	$(-\varphi,\varphi-1,1)$	$(-\varphi,\varphi-1,-1)$
Açılar	$\theta=\pi$	$\theta=\pi$	$\theta=\pi$	$\theta=\pi$	$\theta=\pi$	$\theta=\pi$	$\theta=\pi$	$\theta=\pi$	$\theta=\pi$	$\theta=\pi$	$\theta=\pi$	$\theta=\pi$	$\theta=\pi$	$\theta=\pi$	$\theta=\pi$
V_{32}	V_{37}	V_{37}	V_{37}	V_{37}	V_{37}	V_{37}	V_{37}	V_{37}	V_{37}	V_{37}	V_{37}	V_{37}	V_{37}	V_{37}	V_{37}
V_{33}	V_{36}	V_{36}	V_{36}	V_{36}	V_{36}	V_{36}	V_{36}	V_{36}	V_{36}	V_{36}	V_{36}	V_{36}	V_{36}	V_{36}	V_{36}
V_{34}	V_{35}	V_{35}	V_{35}	V_{35}	V_{35}	V_{35}	V_{35}	V_{35}	V_{35}	V_{35}	V_{35}	V_{35}	V_{35}	V_{35}	V_{35}
V_{35}	V_{34}	V_{34}	V_{34}	V_{34}	V_{34}	V_{34}	V_{34}	V_{34}	V_{34}	V_{34}	V_{34}	V_{34}	V_{34}	V_{34}	V_{34}
V_{36}	V_{33}	V_{33}	V_{33}	V_{33}	V_{33}	V_{33}	V_{33}	V_{33}	V_{33}	V_{33}	V_{33}	V_{33}	V_{33}	V_{33}	V_{33}
V_{37}	V_{32}	V_{32}	V_{32}	V_{32}	V_{32}	V_{32}	V_{32}	V_{32}	V_{32}	V_{32}	V_{32}	V_{32}	V_{32}	V_{32}	V_{32}
V_{38}	V_{31}	V_{31}	V_{31}	V_{31}	V_{31}	V_{31}	V_{31}	V_{31}	V_{31}	V_{31}	V_{31}	V_{31}	V_{31}	V_{31}	V_{31}
V_{39}	V_{46}	V_{46}	V_{46}	V_{46}	V_{46}	V_{46}	V_{46}	V_{46}	V_{46}	V_{46}	V_{46}	V_{46}	V_{46}	V_{46}	V_{46}
V_{40}	V_{45}	V_{45}	V_{45}	V_{45}	V_{45}	V_{45}	V_{45}	V_{45}	V_{45}	V_{45}	V_{45}	V_{45}	V_{45}	V_{45}	V_{45}
V_{41}	V_{44}	V_{44}	V_{44}	V_{44}	V_{44}	V_{44}	V_{44}	V_{44}	V_{44}	V_{44}	V_{44}	V_{44}	V_{44}	V_{44}	V_{44}
V_{42}	V_{43}	V_{43}	V_{43}	V_{43}	V_{43}	V_{43}	V_{43}	V_{43}	V_{43}	V_{43}	V_{43}	V_{43}	V_{43}	V_{43}	V_{43}
V_{43}	V_{42}	V_{42}	V_{42}	V_{42}	V_{42}	V_{42}	V_{42}	V_{42}	V_{42}	V_{42}	V_{42}	V_{42}	V_{42}	V_{42}	V_{42}
V_{44}	V_{41}	V_{41}	V_{41}	V_{41}	V_{41}	V_{41}	V_{41}	V_{41}	V_{41}	V_{41}	V_{41}	V_{41}	V_{41}	V_{41}	V_{41}
V_{45}	V_{40}	V_{40}	V_{40}	V_{40}	V_{40}	V_{40}	V_{40}	V_{40}	V_{40}	V_{40}	V_{40}	V_{40}	V_{40}	V_{40}	V_{40}
V_{46}	V_{39}	V_{39}	V_{39}	V_{39}	V_{39}	V_{39}	V_{39}	V_{39}	V_{39}	V_{39}	V_{39}	V_{39}	V_{39}	V_{39}	V_{39}
V_{47}	V_{54}	V_{54}	V_{54}	V_{54}	V_{54}	V_{54}	V_{54}	V_{54}	V_{54}	V_{54}	V_{54}	V_{54}	V_{54}	V_{54}	V_{54}
V_{48}	V_{53}	V_{53}	V_{53}	V_{53}	V_{53}	V_{53}	V_{53}	V_{53}	V_{53}	V_{53}	V_{53}	V_{53}	V_{53}	V_{53}	V_{53}
V_{49}	V_{52}	V_{52}	V_{52}	V_{52}	V_{52}	V_{52}	V_{52}	V_{52}	V_{52}	V_{52}	V_{52}	V_{52}	V_{52}	V_{52}	V_{52}
V_{50}	V_{51}	V_{51}	V_{51}	V_{51}	V_{51}	V_{51}	V_{51}	V_{51}	V_{51}	V_{51}	V_{51}	V_{51}	V_{51}	V_{51}	V_{51}
V_{51}	V_{50}	V_{50}	V_{50}	V_{50}	V_{50}	V_{50}	V_{50}	V_{50}	V_{50}	V_{50}	V_{50}	V_{50}	V_{50}	V_{50}	V_{50}
V_{52}	V_{49}	V_{49}	V_{49}	V_{49}	V_{49}	V_{49}	V_{49}	V_{49}	V_{49}	V_{49}	V_{49}	V_{49}	V_{49}	V_{49}	V_{49}
V_{53}	V_{48}	V_{48}	V_{48}	V_{48}	V_{48}	V_{48}	V_{48}	V_{48}	V_{48}	V_{48}	V_{48}	V_{48}	V_{48}	V_{48}	V_{48}
V_{54}	V_{47}	V_{47}	V_{47}	V_{47}	V_{47}	V_{47}	V_{47}	V_{47}	V_{47}	V_{47}	V_{47}	V_{47}	V_{47}	V_{47}	V_{47}
V_{55}	V_{62}	V_{62}	V_{62}	V_{62}	V_{62}	V_{62}	V_{62}	V_{62}	V_{62}	V_{62}	V_{62}	V_{62}	V_{62}	V_{62}	V_{62}
V_{56}	V_{61}	V_{61}	V_{61}	V_{61}	V_{61}	V_{61}	V_{61}	V_{61}	V_{61}	V_{61}	V_{61}	V_{61}	V_{61}	V_{61}	V_{61}
V_{57}	V_{60}	V_{60}	V_{60}	V_{60}	V_{60}	V_{60}	V_{60}	V_{60}	V_{60}	V_{60}	V_{60}	V_{60}	V_{60}	V_{60}	V_{60}
V_{58}	V_{59}	V_{59}	V_{59}	V_{59}	V_{59}	V_{59}	V_{59}	V_{59}	V_{59}	V_{59}	V_{59}	V_{59}	V_{59}	V_{59}	V_{59}
V_{59}	V_{58}	V_{58}	V_{58}	V_{58}	V_{58}	V_{58}	V_{58}	V_{58}	V_{58}	V_{58}	V_{58}	V_{58}	V_{58}	V_{58}	V_{58}
V_{60}	V_{57}	V_{57}	V_{57}	V_{57}	V_{57}	V_{57}	V_{57}	V_{57}	V_{57}	V_{57}	V_{57}	V_{57}	V_{57}	V_{57}	V_{57}
V_{61}	V_{56}	V_{56}	V_{56}	V_{56}	V_{56}	V_{56}	V_{56}	V_{56}	V_{56}	V_{56}	V_{56}	V_{56}	V_{56}	V_{56}	V_{56}
V_{62}	V_{55}	V_{55}	V_{55}	V_{55}	V_{55}	V_{55}	V_{55}	V_{55}	V_{55}	V_{55}	V_{55}	V_{55}	V_{55}	V_{55}	V_{55}

Şekil 7.10 $\mathbb{R}^3_{DT}$ de Dönme Yansıma Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri Devamı

Önerme 7.5 *d_{DT} uzaklığını koruyan, orijine göre kırk dört tane dönme-inversiyon vardır.*

İspat *$r_\theta \in R_{DT}$ olmak üzere bir dönme-inversiyon $\rho := \sigma_O\sigma_\Delta\sigma_\Gamma = \sigma_O r_\theta$ biçiminde bileşke olarak yazılabileceğinden Önerme 6.3 den dolayı ispat otuz bir dönme ekseni için verilmelidir. r_θ dönme ekseninin doğrultusu $(0, 1, \varphi - 1)$ vektör ise birim doğrultu vektörü $\left(0, \sqrt{\frac{2+\varphi}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\right)$ olur. Bu durumda*

$$\sigma_O r_\theta(x,y,z) = \begin{pmatrix} -x\cos\theta + \left(\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\sin\theta\right)y - \left(\sqrt{\frac{2+\varphi}{5}}\sin\theta\right)z, \\ -\left(\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\sin\theta\right)x - \left(\frac{2+\varphi}{5} + \frac{3-\varphi}{5}\cos\theta\right)y - \left(\left(\frac{2\varphi-1}{5}\right)(1-\cos\theta)\right)z, \\ \left(\sqrt{\frac{2+\varphi}{5}}\sin\theta\right)x - \left(\left(\frac{2\varphi-1}{5}\right)(1-\cos\theta)\right)y - \left(\frac{3-\varphi}{5} + \frac{2+\varphi}{5}\cos\theta\right)z \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanır. O halde
$V_1 = (0,0,1)$, $V_{19} = \left(\frac{3\varphi-2}{5}, 0, \frac{\varphi+3}{5}\right)$, $V_7 = \left(0, \frac{5\varphi-7}{3}, \frac{3\varphi-2}{3}\right)$, $V_{31} = \left(\frac{\varphi-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\varphi}{2}\right)$, $V_{27} = \left(0, \frac{\varphi+3}{5}, \frac{3\varphi-2}{3}\right)$ *ve* $V_{15} = \left(\frac{5\varphi-7}{3}, \frac{3\varphi-2}{3}, 0\right)$ *köşe noktaları için*

$$\rho(V_1) = \left(-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\sin\theta, \frac{2\varphi-1}{5}(\cos\theta - 1), \frac{\varphi-3}{5} - \frac{\varphi+2}{5}\cos\theta\right)$$

$$\rho(V_{19}) = \begin{pmatrix} \frac{2-3\varphi}{5}\cos\theta - \frac{1}{5}\sqrt{\frac{27+31\varphi}{5}}\sin\theta, -\frac{1}{5}\sqrt{\frac{42-19\varphi}{5}}\sin\theta + \frac{14\varphi-2}{25}\cos\theta - \frac{14\varphi-2}{25}, \\ \frac{1}{5}\sqrt{\frac{4\varphi+23}{5}}\sin\theta + \frac{2-\varphi}{5}\cos\theta + \frac{\varphi-8}{25} \end{pmatrix}$$

$$\rho(V_7) = \left(\left[\frac{1}{3}\sqrt{\frac{267-164\varphi}{5}} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{23+4\varphi}{5}}\right]\sin\theta, \frac{84-38\varphi}{45}\cos\theta - \frac{6\varphi+7}{15}, \frac{7-5\varphi}{3}\cos\theta + \frac{2\varphi-5}{3}\right)$$

$$\rho(V_{31}) = \begin{pmatrix} \frac{1-\varphi}{2}\cos\theta + \left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3+4\varphi}{5}}\right]\sin\theta, -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7-4\varphi}{10}}\sin\theta + \frac{1+3\varphi}{10}\cos\theta - \frac{3\varphi+6}{10}, \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\sin\theta + \frac{3\varphi-4}{20}\cos\theta + \frac{3-6\varphi}{8} \end{pmatrix}$$

$$\rho(V_{27}) = \left(\left[\frac{1}{5}\sqrt{\frac{8\varphi+47}{10}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{23+4\varphi}{5}}\right]\sin\theta, \frac{6-\varphi}{25}\cos\theta - \frac{4\varphi+21}{25}, \frac{7\varphi-1}{25}\cos\theta + \frac{11-22\varphi}{25}\right)$$

$$\rho(V_{15}) = \begin{pmatrix} \frac{7-5\varphi}{3}\cos\theta + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{23+4\varphi}{5}}\sin\theta, -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{267-164\varphi}{5}}\sin\theta + \frac{9-8\varphi}{15}\cos\theta + \frac{1-7\varphi}{15}, \\ \frac{1}{3}\sqrt{\frac{103-61\varphi}{5}}\sin\theta + \frac{16-2\varphi}{15}\cos\theta + \frac{2\varphi-16}{15} \end{pmatrix}$$

olur.
$d_{DT}(V_1, V_{19}) = \frac{42\varphi-36}{55}$, $d_{DT}(V_7, V_{31}) = \frac{26\varphi-38}{11}$ *ve* $d_{DT}(V_{27}, V_{15}) = \frac{-4\varphi+16}{15}$ *olduğundan ve* ρ *uzaklığı koruyacağından dolayı* $d_{DT}(\rho(V_1), \rho(V_{19})) = \frac{42\varphi-36}{55}$, $d_{DT}(\rho(V_7), \rho(V_{31})) = \frac{26\varphi-38}{11}$ *ve* $d_{DT}(\rho(V_{27}), \rho(V_{15})) = \frac{-4\varphi+16}{15}$ *olmalıdır. Buna göre sırasıyla*
$\alpha_1 = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{7-4\varphi}{5}}\sin\theta + \frac{3\varphi-2}{5}\cos\theta$, $\alpha_2 = \frac{8\varphi-9}{25}\sin\theta + \frac{6\varphi-8}{25}\cos\theta + \frac{8-6\varphi}{25}$ *ve*

$\alpha_3 = -\frac{1}{5}\sqrt{\frac{4\varphi+23}{5}}\sin\theta + \frac{13-\varphi}{25}\cos\theta + \frac{4\varphi-7}{25}$ *olmak üzere*

$$\max\left\{\begin{array}{l} |\alpha_1| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l} |\alpha_2|+|\alpha_3|, \\ (1-\varphi)|\alpha_1|+2|\alpha_2|+(1+\varphi)|\alpha_3|, \\ -\varphi|\alpha_1|+(2+\varphi)|\alpha_2|+2\varphi|\alpha_3|, \\ (1-2\varphi)|\alpha_1|+(1+\varphi)|\alpha_2|+3\varphi|\alpha_3|, \\ 2(1-\varphi)|\alpha_1|+|\alpha_2|+(2\varphi+1)|\alpha_3| \end{array}\right\}, \\ |\alpha_2| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l} |\alpha_1|+|\alpha_3|, \\ (1+\varphi)|\alpha_1|+(1-\varphi)|\alpha_2|+2|\alpha_3|, \\ 2\varphi|\alpha_1|-\varphi|\alpha_2|+(2+\varphi)|\alpha_3|, \\ 3\varphi|\alpha_1|+(1-2\varphi)|\alpha_2|+(1+\varphi)|\alpha_3|, \\ (2\varphi+1)|\alpha_1|+2(1-\varphi)|\alpha_2|+|\alpha_3| \end{array}\right\}, \\ |\alpha_3| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l} |\alpha_1|+|\alpha_2|, \\ 2|\alpha_1|+(1+\varphi)|\alpha_2|+(1-\varphi)|\alpha_3|, \\ (2+\varphi)|\alpha_1|+2\varphi|\alpha_2|-\varphi|\alpha_3|, \\ (1+\varphi)|\alpha_1|+3\varphi|\alpha_2|+(1-2\varphi)|\alpha_3|, \\ |\alpha_1|+(2\varphi+1)|\alpha_2|+2(1-\varphi)|\alpha_3| \end{array}\right\} \end{array}\right\} = \frac{42\varphi-36}{55}$$

$\beta_1 = \left[\frac{1}{3}\sqrt{\frac{267-164\varphi}{5}} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{23+4\varphi}{5}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\varphi+3}{5}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\right]\sin\theta + \frac{\varphi-1}{2}\cos\theta,$
$\beta_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7-4\varphi}{10}}\sin\theta + \frac{3\varphi-19}{30}\cos\theta + \frac{4-3\varphi}{30}$ *ve* $\beta_3 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\sin\theta + \frac{167-124\varphi}{60}\cos\theta + \frac{38\varphi-59}{30}$
olmak üzere

$$\max\left\{\begin{array}{l} |\beta_1| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l} |\beta_2|+|\beta_3|, \\ (1-\varphi)|\beta_1|+2|\beta_2|+(1+\varphi)|\beta_3|, \\ -\varphi|\beta_1|+(2+\varphi)|\beta_2|+2\varphi|\beta_3|, \\ (1-2\varphi)|\beta_1|+(1+\varphi)|\beta_2|+3\varphi|\beta_3|, \\ 2(1-\varphi)|\beta_1|+|\beta_2|+(2\varphi+1)|\beta_3| \end{array}\right\}, \\ |\beta_2| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l} |\beta_1|+|\beta_3|, \\ (1+\varphi)|\beta_1|+(1-\varphi)|\beta_2|+2|\beta_3|, \\ 2\varphi|\beta_1|-\varphi|\beta_2|+(2+\varphi)|\beta_3|, \\ 3\varphi|\beta_1|+(1-2\varphi)|\beta_2|+(1+\varphi)|\beta_3|, \\ (2\varphi+1)|\beta_1|+2(1-\varphi)|\beta_2|+|\beta_3| \end{array}\right\}, \\ |\beta_3| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l} |\beta_1|+|\beta_2|, \\ 2|\beta_1|+(1+\varphi)|\beta_2|+(1-\varphi)|\beta_3|, \\ (2+\varphi)|\beta_1|+2\varphi|\beta_2|-\varphi|\beta_3|, \\ (1+\varphi)|\beta_1|+3\varphi|\beta_2|+(1-2\varphi)|\beta_3|, \\ |\beta_1|+(2\varphi+1)|\beta_2|+2(1-\varphi)|\beta_3| \end{array}\right\} \end{array}\right\} = \frac{26\varphi-38}{11}$$

$\gamma_1 = \frac{5\varphi-7}{3}\cos\theta + \left(\frac{9-8\varphi}{25} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{41-17\varphi}{5}}\right)\sin\theta$, $\gamma_2 = \frac{37\varphi-21}{75}\cos\theta + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{269-168\varphi}{5}}\sin\theta + \frac{23\varphi-74}{75}$ *ve* $\gamma_3 = \frac{31\varphi-53}{75}\cos\theta - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{103-61\varphi}{5}}\sin\theta + \frac{113-76\varphi}{75}$ *olmak üzere*

$$\max\left\{\begin{array}{l} |\gamma_1| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l} |\gamma_2|+|\gamma_3|, \\ (1-\varphi)|\gamma_1| + 2|\gamma_2| + (1+\varphi)|\gamma_3|, \\ -\varphi|\gamma_1| + (2+\varphi)|\gamma_2| + 2\varphi|\gamma_3|, \\ (1-2\varphi)|\gamma_1| + (1+\varphi)|\gamma_2| + 3\varphi|\gamma_3|, \\ 2(1-\varphi)|\gamma_1| + |\gamma_2| + (2\varphi+1)|\gamma_3| \end{array}\right\}, \\ |\gamma_2| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l} |\gamma_1|+|\gamma_3|, \\ (1+\varphi)|\gamma_1| + (1-\varphi)|\gamma_2| + 2|\gamma_3|, \\ 2\varphi|\gamma_1| - \varphi|\gamma_2| + (2+\varphi)|\gamma_3|, \\ 3\varphi|\gamma_1| + (1-2\varphi)|\gamma_2| + (1+\varphi)|\gamma_3|, \\ (2\varphi+1)|\gamma_1| + 2(1-\varphi)|\gamma_2| + |\gamma_3| \end{array}\right\}, \\ |\gamma_3| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l} |\gamma_1|+|\gamma_2|, \\ 2|\gamma_1| + (1+\varphi)|\gamma_2| + (1-\varphi)|\gamma_3|, \\ (2+\varphi)|\gamma_1| + 2\varphi|\gamma_2| - \varphi|\gamma_3|, \\ (1+\varphi)|\gamma_1| + 3\varphi|\gamma_2| + (1-2\varphi)|\gamma_3|, \\ |\gamma_1| + (2\varphi+1)|\gamma_2| + 2(1-\varphi)|\gamma_3| \end{array}\right\} \end{array}\right\} = \frac{-4\varphi+16}{15}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklem sistemi çözülürse $\theta = 2\pi/5$, $4\pi/5$,$6\pi/5$, $8\pi/5$ *sonuçları bulunur. Benzer şekilde,* r_θ, *dönme ekseninin doğrultusu* $(0,-1,(\varphi-1))$, $(\pm1,(\varphi-1),0)$, $(\pm1,0,\varphi)$ *vektörleri olarak alınırsa* $\theta = 2\pi/5$, $4\pi/5$, $6\pi/5$, $8\pi/5$ *olur. Böylece* $d_{DT}-$*uzaklığını koruyacak şekilde yirmi dört farklı dönme-inversiyon hareketi bulunur.*

r_θ, *dönme ekseni* $(1,1,1)$ *doğrultulu doğru ise* r_θ *nın birim yön vektörü* $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ *olur. Bu durumda* $\rho(V_1)$, $\rho(V_{19})$, $\rho(V_7)$, $\rho(V_{31})$, $\rho(V_{27})$ *ve* $\rho(V_{15})$ *hesaplanıp* $d_{DT}(\rho(V_1),\rho(V_{19})) = \frac{42\varphi-36}{55}$, $d_{DT}(\rho(V_7),\rho(V_{31})) = \frac{26\varphi-38}{11}$ *ve* $d_{DT}(\rho(V_{27}),\rho(V_{15})) = \frac{-4\varphi+16}{15}$ *te yerine yazılırsa sırasıyla* $\alpha_1 = \frac{5\varphi-2}{15}\cos\theta + \frac{(\varphi-2)\sqrt{3}}{15}\sin\theta + \frac{4\varphi-4}{15}$, $\alpha_2 = \frac{4-4\varphi}{15}\cos\theta + \frac{2\sqrt{3}\varphi}{15}\sin\theta + \frac{4\varphi-4}{15}$ *ve*

$\alpha_3 = \frac{-\varphi-2}{15}\cos\theta + \frac{(2-3\varphi)\sqrt{3}}{15}\sin\theta + \frac{4\varphi-4}{15}$ *olmak üzere*

$$\max\left\{\begin{array}{l} |\alpha_1| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l} |\alpha_2|+|\alpha_3|, \\ (1-\varphi)|\alpha_1|+2|\alpha_2|+(1+\varphi)|\alpha_3|, \\ -\varphi|\alpha_1|+(2+\varphi)|\alpha_2|+2\varphi|\alpha_3|, \\ (1-2\varphi)|\alpha_1|+(1+\varphi)|\alpha_2|+3\varphi|\alpha_3|, \\ 2(1-\varphi)|\alpha_1|+|\alpha_2|+(2\varphi+1)|\alpha_3| \end{array}\right\}, \\ |\alpha_2| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l} |\alpha_1|+|\alpha_3|, \\ (1+\varphi)|\alpha_1|+(1-\varphi)|\alpha_2|+2|\alpha_3|, \\ 2\varphi|\alpha_1|-\varphi|\alpha_2|+(2+\varphi)|\alpha_3|, \\ 3\varphi|\alpha_1|+(1-2\varphi)|\alpha_2|+(1+\varphi)|\alpha_3|, \\ (2\varphi+1)|\alpha_1|+2(1-\varphi)|\alpha_2|+|\alpha_3| \end{array}\right\}, \\ |\alpha_3| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l} |\alpha_1|+|\alpha_2|, \\ 2|\alpha_1|+(1+\varphi)|\alpha_2|+(1-\varphi)|\alpha_3|, \\ (2+\varphi)|\alpha_1|+2\varphi|\alpha_2|-\varphi|\alpha_3|, \\ (1+\varphi)|\alpha_1|+3\varphi|\alpha_2|+(1-2\varphi)|\alpha_3|, \\ |\alpha_1|+(2\varphi+1)|\alpha_2|+2(1-\varphi)|\alpha_3| \end{array}\right\} \end{array}\right\} = \frac{42\varphi-36}{55}$$

$\beta_1 = \frac{19\varphi-27}{18}\cos\theta + \frac{(7\varphi-13)\sqrt{3}}{18}\sin\theta + \frac{9-5\varphi}{9}$, $\beta_2 = \frac{-20\varphi+33}{18}\cos\theta + \frac{(6\varphi-7)\sqrt{3}}{18}\sin\theta + \frac{9-5\varphi}{9}$ *ve* $\beta_3 = \frac{\varphi-6}{18}\cos\theta + \frac{(20-13\varphi)\sqrt{3}}{18}\sin\theta + \frac{9-5\varphi}{9}$ *olmak üzere*

$$\max\left\{\begin{array}{l} |\beta_1| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l} |\beta_2|+|\beta_3|, \\ (1-\varphi)|\beta_1|+2|\beta_2|+(1+\varphi)|\beta_3|, \\ -\varphi|\beta_1|+(2+\varphi)|\beta_2|+2\varphi|\beta_3|, \\ (1-2\varphi)|\beta_1|+(1+\varphi)|\beta_2|+3\varphi|\beta_3|, \\ 2(1-\varphi)|\beta_1|+|\beta_2|+(2\varphi+1)|\beta_3| \end{array}\right\}, \\ |\beta_2| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l} |\beta_1|+|\beta_3|, \\ (1+\varphi)|\beta_1|+(1-\varphi)|\beta_2|+2|\beta_3|, \\ 2\varphi|\beta_1|-\varphi|\beta_2|+(2+\varphi)|\beta_3|, \\ 3\varphi|\beta_1|+(1-2\varphi)|\beta_2|+(1+\varphi)|\beta_3|, \\ (2\varphi+1)|\beta_1|+2(1-\varphi)|\beta_2|+|\beta_3| \end{array}\right\}, \\ |\beta_3| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l} |\beta_1|+|\beta_2|, \\ 2|\beta_1|+(1+\varphi)|\beta_2|+(1-\varphi)|\beta_3|, \\ (2+\varphi)|\beta_1|+2\varphi|\beta_2|-\varphi|\beta_3|, \\ (1+\varphi)|\beta_1|+3\varphi|\beta_2|+(1-2\varphi)|\beta_3|, \\ |\beta_1|+(2\varphi+1)|\beta_2|+2(1-\varphi)|\beta_3| \end{array}\right\} \end{array}\right\} = \frac{26\varphi-38}{11}$$

$\gamma_1 = \frac{47\varphi-57}{45}\cos\theta + \frac{(25-21\varphi)\sqrt{3}}{45}\sin\theta + \frac{28\varphi-48}{45}$, $\gamma_2 = \frac{8\varphi-9}{45}\cos\theta + \frac{(34\varphi-42)\sqrt{3}}{45}\sin\theta + \frac{28\varphi-48}{45}$ *ve* $\gamma_3 = \frac{66-55\varphi}{45}\cos\theta + \frac{(16-13\varphi)\sqrt{3}}{45}\sin\theta + \frac{28\varphi-48}{45}$ *olmak üzere*

$$\max\left\{\begin{array}{l} |\gamma_1| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l} |\gamma_2|+|\gamma_3|, \\ (1-\varphi)|\gamma_1|+2|\gamma_2|+(1+\varphi)|\gamma_3|, \\ -\varphi|\gamma_1|+(2+\varphi)|\gamma_2|+2\varphi|\gamma_3|, \\ (1-2\varphi)|\gamma_1|+(1+\varphi)|\gamma_2|+3\varphi|\gamma_3|, \\ 2(1-\varphi)|\gamma_1|+|\gamma_2|+(2\varphi+1)|\gamma_3| \end{array}\right\}, \\ |\gamma_2| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l} |\gamma_1|+|\gamma_3|, \\ (1+\varphi)|\gamma_1|+(1-\varphi)|\gamma_2|+2|\gamma_3|, \\ 2\varphi|\gamma_1|-\varphi|\gamma_2|+(2+\varphi)|\gamma_3|, \\ 3\varphi|\gamma_1|+(1-2\varphi)|\gamma_2|+(1+\varphi)|\gamma_3|, \\ (2\varphi+1)|\gamma_1|+2(1-\varphi)|\gamma_2|+|\gamma_3| \end{array}\right\}, \\ |\gamma_3| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l} |\gamma_1|+|\gamma_2|, \\ 2|\gamma_1|+(1+\varphi)|\gamma_2|+(1-\varphi)|\gamma_3|, \\ (2+\varphi)|\gamma_1|+2\varphi|\gamma_2|-\varphi|\gamma_3|, \\ (1+\varphi)|\gamma_1|+3\varphi|\gamma_2|+(1-2\varphi)|\gamma_3|, \\ |\gamma_1|+(2\varphi+1)|\gamma_2|+2(1-\varphi)|\gamma_3| \end{array}\right\} \end{array}\right\} = \frac{-4\varphi+16}{15}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözülürse $\theta = 2\pi/3$, $4\pi/3$ *sonuçları bulunur. Benzer şekilde,* r_θ *dönme ekseninin doğrultusu* $(-1,1,1)$, $(1,-1,1)$, $(1,1,-1)$, $(0,\varphi-1,\pm\varphi)$, $(\varphi-1,\pm\varphi,0)$, $(\pm\varphi,0,\varphi-1)$ *vektörleri olarak alınırsa* $\theta = 2\pi/3$, $4\pi/3$ *olur. Böylece* $d_{DT}-$*uzaklığını koruyacak şekilde yirmi farklı dönme-inversiyon hareketi bulunur.*

r_θ, *dönme ekseni* $(1,0,0)$ *doğrultulu doğru ise* r_θ *nın birim yön vektörü* $(1,0,0)$ *olur. Bu durumda* $V_1 = (0,0,1)$, $V_{19} = \left(\frac{3\varphi-2}{5}, 0, \frac{\varphi+3}{5}\right)$, $V_7 = \left(0, \frac{5\varphi-7}{3}, \frac{3\varphi-2}{3}\right)$, $V_{31} = \left(\frac{\varphi-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\varphi}{2}\right)$, $V_{27} = \left(0, \frac{\varphi+3}{5}, \frac{3\varphi-2}{3}\right)$ *ve* $V_{15} = \left(\frac{5\varphi-7}{3}, \frac{3\varphi-2}{3}, 0\right)$ *köşe noktaları için*

$$\begin{array}{l} \rho(V_1) = (0, \sin\theta, \cos\theta) \\ \rho(V_{19}) = \left(\frac{2-3\varphi}{5}, \frac{\varphi+3}{5}\sin\theta, -\frac{\varphi+3}{5}\cos\theta\right) \\ \rho(V_7) = \left(0, \frac{3\varphi-2}{3}\sin\theta + \frac{7-5\varphi}{3}\cos\theta, \frac{7-5\varphi}{3}\sin\theta - \frac{3\varphi-2}{3}\cos\theta\right) \\ \rho(V_{31}) = \left(\frac{1-\varphi}{2}, \frac{\varphi}{2}\sin\theta - \frac{1}{2}\cos\theta, \frac{-1}{2}\sin\theta - \frac{\varphi}{2}\cos\theta\right) \\ \rho(V_{27}) = \left(0, \frac{3\varphi-2}{5}\sin\theta - \frac{\varphi+3}{5}\cos\theta, -\frac{\varphi+3}{5}\sin\theta - \frac{3\varphi-2}{5}\cos\theta\right) \\ \rho(V_{15}) = \left(\frac{7-5\varphi}{3}, \frac{2-3\varphi}{3}\sin\theta, \frac{3\varphi-2}{3}\cos\theta\right) \end{array}$$

olur.

$d_{DT}(V_1, V_{19}) = \frac{42\varphi-36}{55}$, $d_{DT}(V_7, V_{31}) = \frac{26\varphi-38}{11}$ *ve* $d_{DT}(V_{27}, V_{15}) = \frac{-4\varphi+16}{15}$ *olduğundan ve* ρ *uzaklığı koruyacağından* $d_{DT}(\rho(V_1), \rho(V_{19})) = \frac{42\varphi-36}{55}$, $d_{DT}(\rho(V_7), \rho(V_{31})) = \frac{26\varphi-38}{11}$ *ve* $d_{DT}(\rho(V_{27}), \rho(V_{15})) = \frac{-4\varphi+16}{15}$ *olmalıdır. O halde sırasıyla*

$\alpha_1 = \frac{3\varphi-2}{5}$, $\alpha_2 = \frac{2-\varphi}{5}\sin\theta$ *ve* $\alpha_3 = \frac{\varphi-2}{5}\cos\theta$ *olmak üzere*

$$\max\left\{\begin{array}{l} |\alpha_1| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l} |\alpha_2|+|\alpha_3|, \\ (1-\varphi)|\alpha_1|+2|\alpha_2|+(1+\varphi)|\alpha_3|, \\ -\varphi|\alpha_1|+(2+\varphi)|\alpha_2|+2\varphi|\alpha_3|, \\ (1-2\varphi)|\alpha_1|+(1+\varphi)|\alpha_2|+3\varphi|\alpha_3|, \\ 2(1-\varphi)|\alpha_1|+|\alpha_2|+(2\varphi+1)|\alpha_3| \end{array}\right\}, \\ |\alpha_2| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l} |\alpha_1|+|\alpha_3|, \\ (1+\varphi)|\alpha_1|+(1-\varphi)|\alpha_2|+2|\alpha_3|, \\ 2\varphi|\alpha_1|-\varphi|\alpha_2|+(2+\varphi)|\alpha_3|, \\ 3\varphi|\alpha_1|+(1-2\varphi)|\alpha_2|+(1+\varphi)|\alpha_3|, \\ (2\varphi+1)|\alpha_1|+2(1-\varphi)|\alpha_2|+|\alpha_3| \end{array}\right\}, \\ |\alpha_3| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l} |\alpha_1|+|\alpha_2|, \\ 2|\alpha_1|+(1+\varphi)|\alpha_2|+(1-\varphi)|\alpha_3|, \\ (2+\varphi)|\alpha_1|+2\varphi|\alpha_2|-\varphi|\alpha_3|, \\ (1+\varphi)|\alpha_1|+3\varphi|\alpha_2|+(1-2\varphi)|\alpha_3|, \\ |\alpha_1|+(2\varphi+1)|\alpha_2|+2(1-\varphi)|\alpha_3| \end{array}\right\} \end{array}\right\} = \frac{42\varphi-36}{55}$$

$\beta_1 = \frac{\varphi-1}{2}$, $\beta_2 = \frac{3\varphi-4}{6}\sin\theta + \frac{17-10\varphi}{6}\cos\theta$ *ve* $\beta_3 = \frac{17-10\varphi}{6}\sin\theta + \frac{4-3\varphi}{6}\cos\theta$ *olmak üzere*

$$\max\left\{\begin{array}{l} |\beta_1| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l} |\beta_2|+|\beta_3|, \\ (1-\varphi)|\beta_1|+2|\beta_2|+(1+\varphi)|\beta_3|, \\ -\varphi|\beta_1|+(2+\varphi)|\beta_2|+2\varphi|\beta_3|, \\ (1-2\varphi)|\beta_1|+(1+\varphi)|\beta_2|+3\varphi|\beta_3|, \\ 2(1-\varphi)|\beta_1|+|\beta_2|+(2\varphi+1)|\beta_3| \end{array}\right\}, \\ |\beta_2| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l} |\beta_1|+|\beta_3|, \\ (1+\varphi)|\beta_1|+(1-\varphi)|\beta_2|+2|\beta_3|, \\ 2\varphi|\beta_1|-\varphi|\beta_2|+(2+\varphi)|\beta_3|, \\ 3\varphi|\beta_1|+(1-2\varphi)|\beta_2|+(1+\varphi)|\beta_3|, \\ (2\varphi+1)|\beta_1|+2(1-\varphi)|\beta_2|+|\beta_3| \end{array}\right\}, \\ |\beta_3| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l} |\beta_1|+|\beta_2|, \\ 2|\beta_1|+(1+\varphi)|\beta_2|+(1-\varphi)|\beta_3|, \\ (2+\varphi)|\beta_1|+2\varphi|\beta_2|-\varphi|\beta_3|, \\ (1+\varphi)|\beta_1|+3\varphi|\beta_2|+(1-2\varphi)|\beta_3|, \\ |\beta_1|+(2\varphi+1)|\beta_2|+2(1-\varphi)|\beta_3| \end{array}\right\} \end{array}\right\} = \frac{26\varphi-38}{11}$$

$\gamma_1 = \frac{5\varphi-7}{3}$, $\gamma_2 = \frac{3\varphi-2}{5}\sin\theta + \frac{12\varphi-19}{15}\cos\theta$ *ve* $\gamma_3 = \frac{12\varphi-19}{15}\sin\theta + \frac{2-3\varphi}{5}\cos\theta$ *olmak üzere*

$$\max\left\{\begin{array}{l} |\gamma_1| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l} |\gamma_2|+|\gamma_3|, \\ (1-\varphi)|\gamma_1| + 2|\gamma_2| + (1+\varphi)|\gamma_3|, \\ -\varphi|\gamma_1| + (2+\varphi)|\gamma_2| + 2\varphi|\gamma_3|, \\ (1-2\varphi)|\gamma_1| + (1+\varphi)|\gamma_2| + 3\varphi|\gamma_3|, \\ 2(1-\varphi)|\gamma_1| + |\gamma_2| + (2\varphi+1)|\gamma_3| \end{array}\right\}, \\ |\gamma_2| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l} |\gamma_1|+|\gamma_3|, \\ (1+\varphi)|\gamma_1| + (1-\varphi)|\gamma_2| + 2|\gamma_3|, \\ 2\varphi|\gamma_1| - \varphi|\gamma_2| + (2+\varphi)|\gamma_3|, \\ 3\varphi|\gamma_1| + (1-2\varphi)|\gamma_2| + (1+\varphi)|\gamma_3|, \\ (2\varphi+1)|\gamma_1| + 2(1-\varphi)|\gamma_2| + |\gamma_3| \end{array}\right\}, \\ |\gamma_3| + \frac{4\varphi-5}{11}\max\left\{\begin{array}{l} |\gamma_1|+|\gamma_2|, \\ 2|\gamma_1| + (1+\varphi)|\gamma_2| + (1-\varphi)|\gamma_3|, \\ (2+\varphi)|\gamma_1| + 2\varphi|\gamma_2| - \varphi|\gamma_3|, \\ (1+\varphi)|\gamma_1| + 3\varphi|\gamma_2| + (1-2\varphi)|\gamma_3|, \\ |\gamma_1| + (2\varphi+1)|\gamma_2| + 2(1-\varphi)|\gamma_3| \end{array}\right\} \end{array}\right\} = \frac{-4\varphi+16}{15}$$

denklemlerine ulaşılır. Bu denklem sistemi çözülürse $\theta = \pi$ *sonucu bulunur. Benzer şekilde,* r_θ *dönme ekseninin doğrultusu* $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $((\varphi-1), \pm1, \pm\varphi)$, $(\pm1, \pm\varphi, \varphi-1)$, $(\pm\varphi, \varphi-1, \pm1)$ *vektörleri olarak alınırsa* $\theta = \pi$ *olur. Bu durumda yeni bir dönme-inversiyon hareketi bulunmamaktadır. Çünkü* $\theta = \pi$ *için, dönme ekseni doğrultu vektörü bu vektörler olacak şekilde alınır ve dönme-inversiyon hareketi yapılırsa Şekil7.11, Şekil7.12 ve Şekil7.13 deki tablolarda verilen düzlemlere göre yansıma hareketleri bulunur.*

Dönme Ekseni Doğrultu Vektörleri	Açılar	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8	V_9	V_{10}	V_{11}	V_{12}	V_{13}	V_{14}	V_{15}	V_{16}	V_{17}	V_{18}	V_{19}	V_{20}
$(0,1,\varphi-1)$	$\theta=2\pi/5$	V_{46}	V_{39}	V_{37}	V_{32}	V_{50}	V_{51}	V_{62}	V_{11}	V_{14}	V_{55}	V_{61}	V_9	V_8	V_{56}	V_{16}	V_{59}	V_{58}	V_{17}	V_{26}	V_{19}
	$\theta=4\pi/5$	V_{53}	V_{48}	V_{41}	V_{44}	V_{34}	V_{35}	V_{18}	V_{56}	V_{61}	V_{15}	V_{57}	V_{11}	V_{14}	V_{60}	V_{58}	V_7	V_{10}	V_{59}	V_{29}	V_{23}
	$\theta=6\pi/5$	V_{49}	V_{52}	V_{40}	V_{45}	V_{38}	V_{31}	V_{16}	V_{60}	V_{57}	V_{17}	V_{12}	V_{56}	V_{60}	V_{13}	V_{10}	V_{55}	V_{62}	V_7	V_{24}	V_{28}
	$\theta=8\pi/5$	V_{42}	V_{43}	V_{36}	V_{33}	V_{54}	V_{47}	V_{58}	V_{13}	V_{12}	V_{59}	V_8	V_{60}	V_{57}	V_9	V_{62}	V_{15}	V_{18}	V_{55}	V_{20}	V_{25}
$(0,1,1-\varphi)$	$\theta=2\pi/5$	V_{44}	V_{41}	V_{35}	V_{34}	V_{53}	V_{48}	V_{14}	V_{57}	V_{60}	V_{11}	V_{59}	V_7	V_{10}	V_{58}	V_{61}	V_{15}	V_{18}	V_{56}	V_{25}	V_{19}
	$\theta=4\pi/5$	V_{51}	V_{50}	V_{39}	V_{46}	V_{37}	V_{32}	V_{59}	V_{16}	V_{17}	V_{58}	V_{55}	V_{11}	V_{14}	V_{62}	V_9	V_{56}	V_{61}	V_8	V_{27}	V_{24}
	$\theta=6\pi/5$	V_{47}	V_{54}	V_{42}	V_{43}	V_{33}	V_{36}	V_{55}	V_{18}	V_{15}	V_{62}	V_{12}	V_{58}	V_{59}	V_{13}	V_{57}	V_8	V_9	V_{60}	V_{23}	V_{30}
	$\theta=8\pi/5$	V_{40}	V_{45}	V_{38}	V_{31}	V_{49}	V_{52}	V_{12}	V_{61}	V_{56}	V_{13}	V_{10}	V_{62}	V_{55}	V_7	V_{16}	V_{60}	V_{57}	V_{17}	V_{20}	V_{26}
$(1,0,\varphi)$	$\theta=2\pi/5$	V_{36}	V_{33}	V_{54}	V_{47}	V_{42}	V_{43}	V_8	V_{57}	V_{60}	V_9	V_{62}	V_{18}	V_{15}	V_{55}	V_{58}	V_{13}	V_{12}	V_{59}	V_{22}	V_{29}
	$\theta=4\pi/5$	V_{44}	V_{41}	V_{34}	V_{35}	V_{48}	V_{53}	V_{60}	V_{11}	V_{14}	V_{57}	V_{10}	V_{58}	V_{59}	V_7	V_{56}	V_{18}	V_{15}	V_{61}	V_{22}	V_{24}
	$\theta=6\pi/5$	V_{46}	V_{39}	V_{32}	V_{37}	V_{51}	V_{50}	V_{14}	V_{55}	V_{62}	V_{11}	V_8	V_{56}	V_{61}	V_9	V_{17}	V_{58}	V_{59}	V_{16}	V_{22}	V_{23}
	$\theta=8\pi/5$	V_{38}	V_{31}	V_{52}	V_{49}	V_{45}	V_{40}	V_{62}	V_7	V_{10}	V_{55}	V_{60}	V_{17}	V_{16}	V_{57}	V_{13}	V_{56}	V_{61}	V_{12}	V_{22}	V_{27}
$(1,0,-\varphi)$	$\theta=2\pi/5$	V_{32}	V_{37}	V_{51}	V_{50}	V_{46}	V_{39}	V_8	V_{61}	V_{56}	V_9	V_{17}	V_{59}	V_{58}	V_{16}	V_{14}	V_{55}	V_{62}	V_{11}	V_{28}	V_{21}
	$\theta=4\pi/5$	V_{40}	V_{45}	V_{31}	V_{38}	V_{52}	V_{49}	V_{56}	V_{13}	V_{12}	V_{61}	V_{55}	V_7	V_{10}	V_{62}	V_{17}	V_{57}	V_{60}	V_{16}	V_{23}	V_{21}
	$\theta=6\pi/5$	V_{42}	V_{43}	V_{33}	V_{36}	V_{47}	V_{54}	V_{12}	V_{59}	V_{58}	V_{13}	V_{57}	V_9	V_8	V_{60}	V_{55}	V_{18}	V_{15}	V_{62}	V_{24}	V_{21}
	$\theta=8\pi/5$	V_{34}	V_{35}	V_{53}	V_{48}	V_{41}	V_{44}	V_{58}	V_7	V_{10}	V_{59}	V_{18}	V_{61}	V_{56}	V_{15}	V_{57}	V_{14}	V_{11}	V_{60}	V_{30}	V_{21}
$(1,\varphi-1,0)$	$\theta=2\pi/5$	V_{52}	V_{49}	V_{45}	V_{40}	V_{38}	V_{31}	V_{60}	V_{16}	V_{17}	V_{57}	V_{31}	V_{61}	V_{56}	V_{12}	V_{62}	V_7	V_{10}	V_{55}	V_{25}	V_{29}
	$\theta=4\pi/5$	V_{35}	V_{34}	V_{53}	V_{49}	V_{44}	V_{41}	V_{59}	V_{10}	V_7	V_{58}	V_{61}	V_{18}	V_{15}	V_{56}	V_{14}	V_{57}	V_{60}	V_{11}	V_{21}	V_{30}
	$\theta=6\pi/5$	V_{33}	V_{36}	V_{54}	V_{47}	V_{43}	V_{42}	V_9	V_{60}	V_{57}	V_8	V_{18}	V_{62}	V_{55}	V_{15}	V_{13}	V_{58}	V_{59}	V_{12}	V_{29}	V_{22}
	$\theta=8\pi/5$	V_{50}	V_{51}	V_{46}	V_{39}	V_{37}	V_{32}	V_{16}	V_{59}	V_{58}	V_{17}	V_{62}	V_{14}	V_{11}	V_{55}	V_{61}	V_8	V_9	V_{56}	V_{30}	V_{25}
$(1,1-\varphi,0)$	$\theta=2\pi/5$	V_{48}	V_{53}	V_{44}	V_{41}	V_{34}	V_{35}	V_{56}	V_{18}	V_{15}	V_{61}	V_{60}	V_{14}	V_{11}	V_{57}	V_{10}	V_{59}	V_{58}	V_7	V_{28}	V_{26}
	$\theta=4\pi/5$	V_{31}	V_{38}	V_{52}	V_{49}	V_{40}	V_{45}	V_{55}	V_{10}	V_7	V_{62}	V_{17}	V_{60}	V_{57}	V_{16}	V_{56}	V_{13}	V_{12}	V_{61}	V_{27}	V_{22}
	$\theta=6\pi/5$	V_{37}	V_{32}	V_{51}	V_{50}	V_{39}	V_{46}	V_9	V_{56}	V_{61}	V_8	V_{59}	V_{17}	V_{16}	V_{58}	V_{55}	V_{14}	V_{11}	V_{62}	V_{21}	V_{28}
	$\theta=8\pi/5$	V_{54}	V_{47}	V_{43}	V_{42}	V_{33}	V_{36}	V_{18}	V_{55}	V_{62}	V_{15}	V_{13}	V_{59}	V_{58}	V_{12}	V_9	V_{60}	V_{57}	V_8	V_{26}	V_{27}
$(1,0,0)$	$\theta=\pi$	V_1	V_2	V_4	V_3	V_5	V_6	V_7	V_8	V_9	V_{10}	V_{13}	V_{14}	V_{11}	V_{12}	V_{17}	V_{18}	V_{15}	V_{16}	V_{21}	V_{22}
$(0,1,0)$	$\theta=\pi$	V_1	V_2	V_3	V_4	V_6	V_5	V_9	V_{10}	V_7	V_8	V_{11}	V_{12}	V_{13}	V_{14}	V_{16}	V_{15}	V_{18}	V_{17}	V_{19}	V_{20}
$(0,0,1)$	$\theta=\pi$	V_2	V_1	V_3	V_4	V_5	V_6	V_8	V_7	V_{10}	V_9	V_{12}	V_{11}	V_{14}	V_{13}	V_{15}	V_{16}	V_{17}	V_{18}	V_{20}	V_{19}
$(\varphi-1,1,\varphi)$	$\theta=\pi$	V_{54}	V_{47}	V_{42}	V_{43}	V_{36}	V_{33}	V_{62}	V_{15}	V_{18}	V_{55}	V_{58}	V_{12}	V_{13}	V_{59}	V_8	V_{57}	V_{60}	V_9	V_{30}	V_{23}
$(\varphi-1,1,-\varphi)$	$\theta=\pi$	V_{48}	V_{53}	V_{41}	V_{44}	V_{35}	V_{34}	V_{15}	V_{61}	V_{56}	V_{18}	V_{11}	V_{57}	V_{60}	V_{14}	V_7	V_{58}	V_{59}	V_{10}	V_{23}	V_{29}
$(\varphi-1,-1,\varphi)$	$\theta=\pi$	V_{52}	V_{49}	V_{40}	V_{45}	V_{31}	V_{38}	V_{17}	V_{57}	V_{60}	V_{16}	V_{56}	V_{12}	V_{13}	V_{61}	V_{55}	V_{10}	V_7	V_{62}	V_{28}	V_{24}
$(\varphi-1,-1,-\varphi)$	$\theta=\pi$	V_{50}	V_{51}	V_{39}	V_{46}	V_{32}	V_{37}	V_{58}	V_{17}	V_{16}	V_{59}	V_{11}	V_{55}	V_{62}	V_{14}	V_{56}	V_9	V_8	V_{61}	V_{24}	V_{27}
$(1,\varphi,\varphi-1)$	$\theta=\pi$	V_{37}	V_{32}	V_{50}	V_{51}	V_{46}	V_{39}	V_{61}	V_8	V_9	V_{56}	V_{16}	V_{58}	V_{59}	V_{17}	V_{62}	V_{11}	V_{14}	V_{55}	V_{29}	V_{20}
$(1,-\varphi,\varphi-1)$	$\theta=\pi$	V_{35}	V_{34}	V_{48}	V_{53}	V_{41}	V_{44}	V_7	V_{58}	V_{59}	V_{10}	V_{15}	V_{56}	V_{61}	V_{18}	V_{11}	V_{60}	V_{57}	V_{14}	V_{27}	V_{20}
$(-1,\varphi,\varphi-1)$	$\theta=\pi$	V_{33}	V_{36}	V_{47}	V_{54}	V_{42}	V_{43}	V_{57}	V_8	V_9	V_{60}	V_{55}	V_{15}	V_{18}	V_{62}	V_{12}	V_{59}	V_{58}	V_{13}	V_{19}	V_{28}
$(-1,-\varphi,\varphi-1)$	$\theta=\pi$	V_{31}	V_{38}	V_{49}	V_{52}	V_{45}	V_{40}	V_7	V_{62}	V_{55}	V_{10}	V_{57}	V_{16}	V_{17}	V_{60}	V_{61}	V_{12}	V_{13}	V_{56}	V_{19}	V_{30}
$(\varphi,\varphi-1,1)$	$\theta=\pi$	V_{45}	V_{40}	V_{38}	V_{31}	V_{52}	V_{49}	V_{13}	V_{56}	V_{61}	V_{12}	V_{62}	V_{10}	V_7	V_{55}	V_{60}	V_{16}	V_{17}	V_{57}	V_{26}	V_{20}
$(\varphi,\varphi-1,-1)$	$\theta=\pi$	V_{39}	V_{46}	V_{37}	V_{32}	V_{51}	V_{50}	V_{55}	V_{14}	V_{11}	V_{62}	V_9	V_{61}	V_{56}	V_8	V_{59}	V_{16}	V_{17}	V_{58}	V_{19}	V_{26}
$(-\varphi,\varphi-1,1)$	$\theta=\pi$	V_{41}	V_{44}	V_{35}	V_{34}	V_{48}	V_{53}	V_{11}	V_{60}	V_{57}	V_{14}	V_7	V_{59}	V_{58}	V_{10}	V_{15}	V_{61}	V_{56}	V_{18}	V_{19}	V_{25}
$(-\varphi,\varphi-1,-1)$	$\theta=\pi$	V_{43}	V_{42}	V_{36}	V_{33}	V_{47}	V_{54}	V_{59}	V_{12}	V_{13}	V_{58}	V_{60}	V_8	V_9	V_{57}	V_{15}	V_{62}	V_{55}	V_{18}	V_{25}	V_{20}
(1,1,1)	$\theta=2\pi/3$	V_4	V_3	V_6	V_5	V_2	V_1	V_{14}	V_{12}	V_{13}	V_{11}	V_{18}	V_{16}	V_{17}	V_{15}	V_{10}	V_9	V_8	V_7	V_{26}	V_{24}
	$\theta=4\pi/3$	V_6	V_5	V_2	V_1	V_4	V_3	V_{18}	V_{17}	V_{16}	V_{15}	V_{10}	V_8	V_9	V_7	V_{14}	V_{12}	V_{13}	V_{11}	V_{30}	V_{28}
(-1,1,1)	$\theta=2\pi/3$	V_6	V_5	V_1	V_2	V_3	V_4	V_{16}	V_{15}	V_{18}	V_{17}	V_9	V_7	V_{10}	V_8	V_{11}	V_{13}	V_{12}	V_{14}	V_{29}	V_{27}
	$\theta=4\pi/3$	V_3	V_4	V_5	V_6	V_2	V_1	V_{12}	V_{14}	V_{11}	V_{13}	V_{15}	V_{17}	V_{16}	V_{18}	V_8	V_7	V_{10}	V_9	V_{23}	V_{25}
(1,-1,1)	$\theta=2\pi/3$	V_5	V_6	V_2	V_1	V_3	V_4	V_{15}	V_{16}	V_{17}	V_{18}	V_8	V_{10}	V_7	V_9	V_{12}	V_{14}	V_{11}	V_{13}	V_{28}	V_{30}
	$\theta=4\pi/3$	V_4	V_3	V_5	V_6	V_1	V_2	V_{13}	V_{11}	V_{14}	V_{12}	V_{17}	V_{15}	V_{18}	V_{16}	V_7	V_8	V_9	V_{10}	V_{25}	V_{23}
(1,1,-1)	$\theta=2\pi/3$	V_5	V_6	V_1	V_2	V_4	V_3	V_{17}	V_{18}	V_{15}	V_{16}	V_7	V_9	V_8	V_{10}	V_{13}	V_{11}	V_{14}	V_{12}	V_{27}	V_{29}
	$\theta=4\pi/3$	V_3	V_4	V_6	V_5	V_1	V_2	V_{11}	V_{13}	V_{12}	V_{14}	V_{16}	V_{18}	V_{15}	V_{17}	V_9	V_{10}	V_7	V_8	V_{24}	V_{26}
$(0,\varphi-1,\varphi)$	$\theta=2\pi/3$	V_{38}	V_{31}	V_{49}	V_{52}	V_{40}	V_{45}	V_{10}	V_{55}	V_{62}	V_7	V_{16}	V_{57}	V_{60}	V_{17}	V_{12}	V_{61}	V_{56}	V_{13}	V_{30}	V_{19}
	$\theta=4\pi/3$	V_{34}	V_{35}	V_{47}	V_{53}	V_{44}	V_{41}	V_{10}	V_{59}	V_{58}	V_7	V_{56}	V_{15}	V_{18}	V_{61}	V_{60}	V_{11}	V_{14}	V_{57}	V_{20}	V_{27}
$(0,\varphi-1,-\varphi)$	$\theta=2\pi/3$	V_{36}	V_{33}	V_{47}	V_{54}	V_{43}	V_{42}	V_{60}	V_9	V_8	V_{57}	V_{15}	V_{55}	V_{62}	V_{18}	V_{59}	V_{12}	V_{13}	V_{58}	V_{28}	V_{19}
	$\theta=4\pi/3$	V_{32}	V_{37}	V_{50}	V_{51}	V_{39}	V_{46}	V_{56}	V_9	V_8	V_{61}	V_{58}	V_{16}	V_{17}	V_{59}	V_{11}	V_{62}	V_{55}	V_{14}	V_{20}	V_{29}
$(\varphi-1,\varphi,0)$	$\theta=2\pi/3$	V_{43}	V_{42}	V_{33}	V_{36}	V_{54}	V_{47}	V_{13}	V_{58}	V_{59}	V_{12}	V_9	V_{57}	V_{60}	V_8	V_{18}	V_{55}	V_{62}	V_{15}	V_{21}	V_{24}
	$\theta=4\pi/3$	V_{41}	V_{44}	V_{34}	V_{35}	V_{53}	V_{48}	V_{57}	V_{14}	V_{11}	V_{60}	V_{58}	V_{10}	V_7	V_{59}	V_{18}	V_{56}	V_{61}	V_{15}	V_{24}	V_{22}
$(\varphi-1,-\varphi,0)$	$\theta=2\pi/3$	V_{39}	V_{46}	V_{32}	V_{37}	V_{50}	V_{51}	V_{11}	V_{62}	V_{55}	V_{14}	V_{56}	V_8	V_9	V_{61}	V_{58}	V_{17}	V_{16}	V_{59}	V_{23}	V_{22}
	$\theta=4\pi/3$	V_{45}	V_{40}	V_{31}	V_{38}	V_{49}	V_{52}	V_{61}	V_{12}	V_{13}	V_{56}	V_7	V_{55}	V_{62}	V_{10}	V_{57}	V_{17}	V_{16}	V_{60}	V_{21}	V_{23}
$(\varphi,0,\varphi-1)$	$\theta=2\pi/3$	V_{51}	V_{50}	V_{46}	V_{39}	V_{32}	V_{37}	V_{17}	V_{58}	V_{59}	V_{16}	V_{14}	V_{62}	V_{55}	V_{11}	V_8	V_{61}	V_{56}	V_9	V_{25}	V_{30}
	$\theta=4\pi/3$	V_{53}	V_{48}	V_{44}	V_{41}	V_{35}	V_{34}	V_{61}	V_{15}	V_{18}	V_{56}	V_{14}	V_{60}	V_{57}	V_{11}	V_{59}	V_{10}	V_7	V_{58}	V_{26}	V_{28}
$(-\varphi,0,\varphi-1)$	$\theta=2\pi/3$	V_{49}	V_{52}	V_{45}	V_{40}	V_{31}	V_{38}	V_{57}	V_{17}	V_{16}	V_{60}	V_{61}	V_{13}	V_{12}	V_{56}	V_7	V_{62}	V_{55}	V_{10}	V_{29}	V_{25}
	$\theta=4\pi/3$	V_{47}	V_{54}	V_{43}	V_{42}	V_{36}	V_{33}	V_{15}	V_{62}	V_{55}	V_{18}	V_{59}	V_{13}	V_{12}	V_{58}	V_{60}	V_9	V_8	V_{57}	V_{27}	V_{26}

Şekil 7.11 $\mathbb{R}^3_{DT}$ de Dönme İnversiyon Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri

Dönme Ekseni Doğrultu	Açılar	V_{21}	V_{22}	V_{23}	V_{24}	V_{25}	V_{26}	V_{27}	V_{28}	V_{29}	V_{30}	V_{31}	V_{32}	V_{33}	V_{34}	V_{35}	V_{36}	V_{37}	V_{38}	V_{39}	V_{40}
$(0,1,\varphi-1)$	$\theta=2\pi/5$	V_{22}	V_{23}	V_{29}	V_{21}	V_{20}	V_{28}	V_{30}	V_{24}	V_{25}	V_{27}	V_{54}	V_{41}	V_{4}	V_{31}	V_{38}	V_{3}	V_{44}	V_{47}	V_{53}	V_{33}
	$\theta=4\pi/5$	V_{26}	V_{28}	V_{24}	V_{19}	V_{22}	V_{25}	V_{30}	V_{20}	V_{21}	V_{27}	V_{6}	V_{40}	V_{37}	V_{47}	V_{54}	V_{32}	V_{45}	V_{5}	V_{49}	V_{3}
	$\theta=6\pi/5$	V_{29}	V_{25}	V_{20}	V_{23}	V_{26}	V_{21}	V_{30}	V_{22}	V_{19}	V_{27}	V_{50}	V_{36}	V_{41}	V_{5}	V_{6}	V_{44}	V_{33}	V_{51}	V_{42}	V_{32}
	$\theta=8\pi/5$	V_{24}	V_{21}	V_{22}	V_{28}	V_{29}	V_{19}	V_{30}	V_{26}	V_{23}	V_{27}	V_{34}	V_{4}	V_{40}	V_{51}	V_{50}	V_{45}	V_{3}	V_{35}	V_{2}	V_{44}
$(0,1,1-\varphi)$	$\theta=2\pi/5$	V_{22}	V_{24}	V_{21}	V_{27}	V_{30}	V_{20}	V_{26}	V_{29}	V_{28}	V_{23}	V_{4}	V_{33}	V_{52}	V_{39}	V_{46}	V_{49}	V_{36}	V_{3}	V_{43}	V_{1}
	$\theta=4\pi/5$	V_{25}	V_{30}	V_{19}	V_{23}	V_{26}	V_{22}	V_{21}	V_{29}	V_{28}	V_{20}	V_{35}	V_{49}	V_{5}	V_{42}	V_{43}	V_{6}	V_{52}	V_{34}	V_{31}	V_{41}
	$\theta=6\pi/5$	V_{27}	V_{26}	V_{24}	V_{20}	V_{21}	V_{25}	V_{19}	V_{29}	V_{28}	V_{22}	V_{39}	V_{6}	V_{48}	V_{38}	V_{31}	V_{53}	V_{5}	V_{46}	V_{3}	V_{50}
	$\theta=8\pi/5$	V_{23}	V_{21}	V_{30}	V_{22}	V_{19}	V_{27}	V_{24}	V_{29}	V_{28}	V_{25}	V_{42}	V_{53}	V_{32}	V_{4}	V_{3}	V_{37}	V_{48}	V_{43}	V_{34}	V_{54}
$(1,0,\varphi)$	$\theta=2\pi/5$	V_{28}	V_{19}	V_{30}	V_{26}	V_{23}	V_{27}	V_{20}	V_{24}	V_{25}	V_{21}	V_{2}	V_{49}	V_{44}	V_{37}	V_{32}	V_{41}	V_{52}	V_{1}	V_{38}	V_{6}
	$\theta=4\pi/5$	V_{25}	V_{19}	V_{20}	V_{30}	V_{27}	V_{21}	V_{28}	V_{23}	V_{26}	V_{29}	V_{36}	V_{3}	V_{46}	V_{49}	V_{52}	V_{39}	V_{4}	V_{33}	V_{2}	V_{42}
	$\theta=6\pi/5$	V_{26}	V_{19}	V_{28}	V_{20}	V_{21}	V_{29}	V_{25}	V_{27}	V_{30}	V_{24}	V_{44}	V_{47}	V_{38}	V_{3}	V_{4}	V_{31}	V_{54}	V_{41}	V_{36}	V_{48}
	$\theta=8\pi/5$	V_{30}	V_{19}	V_{25}	V_{28}	V_{29}	V_{24}	V_{26}	V_{21}	V_{20}	V_{23}	V_{46}	V_{35}	V_{2}	V_{47}	V_{54}	V_{1}	V_{34}	V_{39}	V_{44}	V_{51}
$(1,0,-\varphi)$	$\theta=2\pi/5$	V_{20}	V_{29}	V_{25}	V_{27}	V_{30}	V_{24}	V_{22}	V_{26}	V_{23}	V_{19}	V_{36}	V_{45}	V_{48}	V_{1}	V_{2}	V_{53}	V_{40}	V_{33}	V_{52}	V_{43}
	$\theta=4\pi/5$	V_{20}	V_{26}	V_{27}	V_{19}	V_{22}	V_{30}	V_{28}	V_{25}	V_{24}	V_{29}	V_{48}	V_{43}	V_{3}	V_{37}	V_{32}	V_{4}	V_{42}	V_{53}	V_{47}	V_{35}
	$\theta=6\pi/5$	V_{20}	V_{25}	V_{19}	V_{29}	V_{28}	V_{22}	V_{23}	V_{27}	V_{30}	V_{26}	V_{3}	V_{35}	V_{50}	V_{45}	V_{40}	V_{51}	V_{34}	V_{4}	V_{41}	V_{1}
	$\theta=8\pi/5$	V_{20}	V_{27}	V_{29}	V_{26}	V_{23}	V_{28}	V_{24}	V_{19}	V_{22}	V_{25}	V_{50}	V_{1}	V_{38}	V_{43}	V_{42}	V_{31}	V_{2}	V_{51}	V_{6}	V_{37}
$(1,\varphi-1,0)$	$\theta=2\pi/5$	V_{28}	V_{24}	V_{26}	V_{21}	V_{20}	V_{23}	V_{22}	V_{30}	V_{27}	V_{19}	V_{44}	V_{6}	V_{51}	V_{33}	V_{36}	V_{50}	V_{5}	V_{41}	V_{4}	V_{53}
	$\theta=4\pi/5$	V_{27}	V_{20}	V_{26}	V_{29}	V_{28}	V_{23}	V_{25}	V_{22}	V_{19}	V_{24}	V_{43}	V_{38}	V_{1}	V_{50}	V_{51}	V_{2}	V_{31}	V_{42}	V_{45}	V_{54}
	$\theta=6\pi/5$	V_{19}	V_{28}	V_{26}	V_{30}	V_{27}	V_{23}	V_{21}	V_{25}	V_{24}	V_{20}	V_{37}	V_{44}	V_{49}	V_{2}	V_{1}	V_{52}	V_{41}	V_{32}	V_{53}	V_{46}
	$\theta=8\pi/5$	V_{24}	V_{27}	V_{26}	V_{22}	V_{19}	V_{23}	V_{29}	V_{21}	V_{20}	V_{28}	V_{6}	V_{43}	V_{34}	V_{52}	V_{49}	V_{35}	V_{42}	V_{5}	V_{54}	V_{4}
$(1,1-\varphi,0)$	$\theta=2\pi/5$	V_{23}	V_{29}	V_{22}	V_{25}	V_{24}	V_{19}	V_{20}	V_{30}	V_{27}	V_{21}	V_{32}	V_{54}	V_{5}	V_{45}	V_{40}	V_{6}	V_{47}	V_{37}	V_{36}	V_{46}
	$\theta=4\pi/5$	V_{19}	V_{30}	V_{28}	V_{25}	V_{24}	V_{29}	V_{23}	V_{20}	V_{21}	V_{26}	V_{47}	V_{2}	V_{35}	V_{46}	V_{39}	V_{34}	V_{1}	V_{54}	V_{5}	V_{36}
	$\theta=6\pi/5$	V_{29}	V_{20}	V_{27}	V_{25}	V_{24}	V_{30}	V_{19}	V_{23}	V_{26}	V_{22}	V_{1}	V_{48}	V_{45}	V_{36}	V_{33}	V_{40}	V_{53}	V_{2}	V_{35}	V_{5}
	$\theta=8\pi/5$	V_{30}	V_{23}	V_{21}	V_{25}	V_{24}	V_{20}	V_{29}	V_{19}	V_{22}	V_{28}	V_{53}	V_{31}	V_{46}	V_{5}	V_{6}	V_{39}	V_{38}	V_{48}	V_{45}	V_{35}
$(1,0,0)$	$\theta=\pi$	V_{19}	V_{20}	V_{25}	V_{26}	V_{23}	V_{24}	V_{27}	V_{28}	V_{29}	V_{30}	V_{35}	V_{36}	V_{37}	V_{38}	V_{31}	V_{32}	V_{33}	V_{34}	V_{43}	V_{44}
$(0,1,0)$	$\theta=\pi$	V_{21}	V_{22}	V_{24}	V_{23}	V_{26}	V_{25}	V_{29}	V_{30}	V_{27}	V_{28}	V_{33}	V_{34}	V_{31}	V_{32}	V_{37}	V_{38}	V_{35}	V_{36}	V_{41}	V_{42}
$(0,0,1)$	$\theta=\pi$	V_{22}	V_{21}	V_{23}	V_{24}	V_{25}	V_{26}	V_{28}	V_{27}	V_{30}	V_{29}	V_{32}	V_{31}	V_{34}	V_{33}	V_{36}	V_{35}	V_{38}	V_{37}	V_{40}	V_{39}
$(\varphi-1,1,\varphi)$	$\theta=\pi$	V_{26}	V_{27}	V_{20}	V_{24}	V_{25}	V_{21}	V_{22}	V_{28}	V_{29}	V_{19}	V_{38}	V_{48}	V_{6}	V_{39}	V_{46}	V_{5}	V_{53}	V_{31}	V_{34}	V_{40}
$(\varphi-1,1,-\varphi)$	$\theta=\pi$	V_{28}	V_{26}	V_{19}	V_{24}	V_{25}	V_{22}	V_{27}	V_{21}	V_{20}	V_{30}	V_{47}	V_{37}	V_{40}	V_{6}	V_{5}	V_{45}	V_{32}	V_{54}	V_{39}	V_{33}
$(\varphi-1,-1,\varphi)$	$\theta=\pi$	V_{25}	V_{29}	V_{23}	V_{20}	V_{21}	V_{26}	V_{27}	V_{19}	V_{22}	V_{30}	V_{5}	V_{41}	V_{36}	V_{50}	V_{51}	V_{33}	V_{44}	V_{6}	V_{48}	V_{3}
$(\varphi-1,-1,-\varphi)$	$\theta=\pi$	V_{30}	V_{25}	V_{23}	V_{19}	V_{22}	V_{26}	V_{20}	V_{28}	V_{29}	V_{21}	V_{42}	V_{5}	V_{49}	V_{35}	V_{34}	V_{52}	V_{6}	V_{43}	V_{3}	V_{47}
$(1,\varphi,\varphi-1)$	$\theta=\pi$	V_{21}	V_{28}	V_{30}	V_{24}	V_{25}	V_{27}	V_{26}	V_{22}	V_{19}	V_{23}	V_{53}	V_{2}	V_{33}	V_{40}	V_{45}	V_{36}	V_{1}	V_{48}	V_{6}	V_{34}
$(1,-\varphi,\varphi-1)$	$\theta=\pi$	V_{21}	V_{30}	V_{23}	V_{28}	V_{29}	V_{26}	V_{19}	V_{24}	V_{25}	V_{22}	V_{31}	V_{42}	V_{51}	V_{2}	V_{1}	V_{50}	V_{43}	V_{38}	V_{47}	V_{40}
$(-1,\varphi,\varphi-1)$	$\theta=\pi$	V_{29}	V_{22}	V_{23}	V_{27}	V_{30}	V_{26}	V_{24}	V_{20}	V_{21}	V_{25}	V_{41}	V_{32}	V_{1}	V_{52}	V_{49}	V_{2}	V_{37}	V_{44}	V_{39}	V_{48}
$(-1,-\varphi,\varphi-1)$	$\theta=\pi$	V_{27}	V_{22}	V_{29}	V_{24}	V_{25}	V_{28}	V_{21}	V_{26}	V_{23}	V_{20}	V_{1}	V_{54}	V_{39}	V_{34}	V_{35}	V_{46}	V_{47}	V_{2}	V_{33}	V_{6}
$(\varphi,\varphi-1,1)$	$\theta=\pi$	V_{21}	V_{23}	V_{22}	V_{30}	V_{27}	V_{19}	V_{25}	V_{28}	V_{29}	V_{24}	V_{4}	V_{32}	V_{53}	V_{42}	V_{43}	V_{48}	V_{37}	V_{3}	V_{46}	V_{2}
$(\varphi,\varphi-1,-1)$	$\theta=\pi$	V_{23}	V_{22}	V_{21}	V_{29}	V_{28}	V_{20}	V_{27}	V_{25}	V_{24}	V_{30}	V_{31}	V_{4}	V_{41}	V_{54}	V_{47}	V_{44}	V_{3}	V_{38}	V_{1}	V_{45}
$(-\varphi,\varphi-1,1)$	$\theta=\pi$	V_{24}	V_{22}	V_{27}	V_{21}	V_{20}	V_{30}	V_{23}	V_{28}	V_{29}	V_{26}	V_{39}	V_{52}	V_{33}	V_{4}	V_{3}	V_{36}	V_{49}	V_{46}	V_{31}	V_{51}
$(-\varphi,\varphi-1,-1)$	$\theta=\pi$	V_{21}	V_{24}	V_{28}	V_{22}	V_{19}	V_{29}	V_{27}	V_{23}	V_{26}	V_{30}	V_{51}	V_{40}	V_{4}	V_{34}	V_{35}	V_{3}	V_{45}	V_{50}	V_{52}	V_{32}
$(1,1,1)$	$\theta=2\pi/3$	V_{25}	V_{23}	V_{30}	V_{29}	V_{28}	V_{27}	V_{22}	V_{20}	V_{21}	V_{19}	V_{46}	V_{42}	V_{45}	V_{41}	V_{44}	V_{40}	V_{43}	V_{39}	V_{54}	V_{50}
	$\theta=4\pi/3$	V_{29}	V_{27}	V_{22}	V_{20}	V_{21}	V_{19}	V_{26}	V_{25}	V_{24}	V_{23}	V_{54}	V_{52}	V_{50}	V_{48}	V_{53}	V_{51}	V_{49}	V_{57}	V_{38}	V_{36}
(-1,1,1)	$\theta=2\pi/3$	V_{30}	V_{28}	V_{19}	V_{21}	V_{20}	V_{22}	V_{24}	V_{23}	V_{26}	V_{25}	V_{49}	V_{47}	V_{53}	V_{51}	V_{50}	V_{48}	V_{54}	V_{52}	V_{33}	V_{31}
	$\theta=4\pi/3$	V_{24}	V_{26}	V_{28}	V_{27}	V_{30}	V_{29}	V_{20}	V_{22}	V_{19}	V_{21}	V_{40}	V_{44}	V_{39}	V_{43}	V_{42}	V_{46}	V_{41}	V_{45}	V_{48}	V_{52}
(1,-1,1)	$\theta=2\pi/3$	V_{27}	V_{29}	V_{20}	V_{22}	V_{19}	V_{21}	V_{23}	V_{24}	V_{25}	V_{26}	V_{48}	V_{50}	V_{52}	V_{54}	V_{47}	V_{49}	V_{51}	V_{53}	V_{32}	V_{34}
	$\theta=4\pi/3$	V_{26}	V_{24}	V_{27}	V_{28}	V_{29}	V_{30}	V_{21}	V_{19}	V_{22}	V_{20}	V_{43}	V_{39}	V_{44}	V_{40}	V_{45}	V_{41}	V_{46}	V_{42}	V_{51}	V_{47}
(1,1,-1)	$\theta=2\pi/3$	V_{28}	V_{30}	V_{21}	V_{19}	V_{22}	V_{20}	V_{25}	V_{26}	V_{23}	V_{24}	V_{51}	V_{53}	V_{47}	V_{49}	V_{52}	V_{54}	V_{48}	V_{50}	V_{35}	V_{37}
	$\theta=4\pi/3$	V_{23}	V_{25}	V_{29}	V_{30}	V_{27}	V_{28}	V_{19}	V_{21}	V_{20}	V_{22}	V_{41}	V_{45}	V_{42}	V_{46}	V_{39}	V_{43}	V_{40}	V_{44}	V_{49}	V_{53}
$(0,\varphi-1,\varphi)$	$\theta=2\pi/3$	V_{22}	V_{27}	V_{24}	V_{29}	V_{28}	V_{25}	V_{20}	V_{23}	V_{26}	V_{21}	V_{34}	V_{39}	V_{54}	V_{1}	V_{2}	V_{47}	V_{46}	V_{35}	V_{50}	V_{41}
	$\theta=4\pi/3$	V_{30}	V_{21}	V_{28}	V_{23}	V_{26}	V_{29}	V_{22}	V_{25}	V_{24}	V_{19}	V_{2}	V_{51}	V_{42}	V_{31}	V_{38}	V_{43}	V_{50}	V_{1}	V_{32}	V_{5}
$(0,\varphi-1,-\varphi)$	$\theta=2\pi/3$	V_{22}	V_{29}	V_{27}	V_{23}	V_{26}	V_{30}	V_{25}	V_{21}	V_{20}	V_{24}	V_{52}	V_{1}	V_{32}	V_{41}	V_{44}	V_{37}	V_{2}	V_{49}	V_{5}	V_{31}
	$\theta=4\pi/3$	V_{28}	V_{21}	V_{24}	V_{30}	V_{27}	V_{25}	V_{23}	V_{19}	V_{22}	V_{26}	V_{40}	V_{33}	V_{2}	V_{53}	V_{48}	V_{1}	V_{36}	V_{45}	V_{42}	V_{49}
$(\varphi-1,\varphi,0)$	$\theta=2\pi/3$	V_{25}	V_{20}	V_{29}	V_{19}	V_{22}	V_{28}	V_{26}	V_{30}	V_{27}	V_{23}	V_{45}	V_{50}	V_{35}	V_{3}	V_{4}	V_{34}	V_{51}	V_{40}	V_{37}	V_{49}
	$\theta=4\pi/3$	V_{19}	V_{25}	V_{30}	V_{20}	V_{21}	V_{27}	V_{29}	V_{26}	V_{23}	V_{28}	V_{49}	V_{46}	V_{3}	V_{36}	V_{33}	V_{4}	V_{39}	V_{52}	V_{50}	V_{38}
$(\varphi-1,-\varphi,0)$	$\theta=2\pi/3$	V_{19}	V_{26}	V_{20}	V_{28}	V_{29}	V_{21}	V_{24}	V_{30}	V_{27}	V_{25}	V_{3}	V_{38}	V_{47}	V_{44}	V_{41}	V_{54}	V_{31}	V_{4}	V_{40}	V_{2}
	$\theta=4\pi/3$	V_{26}	V_{20}	V_{19}	V_{27}	V_{30}	V_{22}	V_{29}	V_{24}	V_{25}	V_{28}	V_{27}	V_{3}	V_{43}	V_{48}	V_{53}	V_{42}	V_{4}	V_{32}	V_{1}	V_{39}
$(\varphi,0,\varphi-1)$	$\theta=2\pi/3$	V_{27}	V_{24}	V_{22}	V_{26}	V_{23}	V_{19}	V_{28}	V_{20}	V_{21}	V_{29}	V_{52}	V_{34}	V_{43}	V_{6}	V_{5}	V_{42}	V_{35}	V_{49}	V_{44}	V_{38}
	$\theta=4\pi/3$	V_{29}	V_{23}	V_{25}	V_{22}	V_{19}	V_{24}	V_{21}	V_{27}	V_{30}	V_{20}	V_{45}	V_{5}	V_{54}	V_{32}	V_{37}	V_{47}	V_{6}	V_{40}	V_{4}	V_{52}
$(-\varphi,0,\varphi-1)$	$\theta=2\pi/3$	V_{24}	V_{28}	V_{21}	V_{26}	V_{23}	V_{20}	V_{19}	V_{27}	V_{30}	V_{22}	V_{33}	V_{51}	V_{6}	V_{44}	V_{41}	V_{5}	V_{50}	V_{36}	V_{37}	V_{43}
	$\theta=4\pi/3$	V_{23}	V_{30}	V_{25}	V_{21}	V_{20}	V_{24}	V_{28}	V_{22}	V_{19}	V_{29}	V_{5}	V_{46}	V_{31}	V_{53}	V_{48}	V_{38}	V_{39}	V_{6}	V_{51}	V_{4}

Şekil 7.12 $\mathbb{R}^3_{DT}$ de Dönme İnversiyon Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri Devamı

Dönme Ekseni Doğrultu	Açılar	V_{41}	V_{42}	V_{43}	V_{44}	V_{45}	V_{46}	V_{47}	V_{48}	V_{49}	V_{50}	V_{51}	V_{52}	V_{53}	V_{54}	V_{55}	V_{56}	V_{57}	V_{58}	V_{59}	V_{60}	V_{61}	V_{62}
$(0,1,\varphi-1)$	$\theta=2\pi/5$	V_{45}	V_{1}	V_{2}	V_{40}	V_{36}	V_{48}	V_{6}	V_{49}	V_{43}	V_{35}	V_{34}	V_{42}	V_{52}	V_{5}	V_{18}	V_{57}	V_{13}	V_{7}	V_{10}	V_{12}	V_{60}	V_{15}
	$\theta=4\pi/5$	V_{33}	V_{39}	V_{46}	V_{36}	V_{4}	V_{52}	V_{50}	V_{42}	V_{1}	V_{31}	V_{38}	V_{2}	V_{43}	V_{51}	V_{16}	V_{12}	V_{9}	V_{55}	V_{62}	V_{8}	V_{13}	V_{17}
	$\theta=6\pi/5$	V_{3}	V_{48}	V_{53}	V_{4}	V_{37}	V_{43}	V_{34}	V_{2}	V_{39}	V_{47}	V_{54}	V_{46}	V_{1}	V_{35}	V_{58}	V_{8}	V_{11}	V_{15}	V_{18}	V_{14}	V_{9}	V_{59}
	$\theta=8\pi/5$	V_{32}	V_{52}	V_{49}	V_{37}	V_{41}	V_{1}	V_{38}	V_{46}	V_{48}	V_{5}	V_{6}	V_{53}	V_{39}	V_{31}	V_{10}	V_{14}	V_{56}	V_{17}	V_{16}	V_{61}	V_{11}	V_{7}
$(0,1,1-\varphi)$	$\theta=2\pi/5$	V_{51}	V_{31}	V_{38}	V_{50}	V_{2}	V_{42}	V_{45}	V_{37}	V_{5}	V_{47}	V_{54}	V_{6}	V_{32}	V_{40}	V_{13}	V_{9}	V_{17}	V_{55}	V_{62}	V_{16}	V_{8}	V_{12}
	$\theta=4\pi/5$	V_{47}	V_{3}	V_{4}	V_{54}	V_{44}	V_{38}	V_{1}	V_{33}	V_{48}	V_{40}	V_{45}	V_{53}	V_{36}	V_{2}	V_{7}	V_{57}	V_{11}	V_{12}	V_{13}	V_{18}	V_{60}	V_{10}
	$\theta=6\pi/5$	V_{40}	V_{34}	V_{35}	V_{45}	V_{51}	V_{4}	V_{41}	V_{49}	V_{32}	V_{2}	V_{1}	V_{37}	V_{52}	V_{44}	V_{11}	V_{16}	V_{56}	V_{10}	V_{7}	V_{61}	V_{17}	V_{14}
	$\theta=8\pi/5$	V_{2}	V_{46}	V_{39}	V_{1}	V_{47}	V_{35}	V_{50}	V_{6}	V_{36}	V_{44}	V_{41}	V_{33}	V_{5}	V_{51}	V_{58}	V_{18}	V_{8}	V_{14}	V_{11}	V_{9}	V_{15}	V_{59}
$(1,0,\varphi)$	$\theta=2\pi/5$	V_{46}	V_{53}	V_{48}	V_{39}	V_{5}	V_{31}	V_{34}	V_{50}	V_{4}	V_{45}	V_{40}	V_{3}	V_{51}	V_{35}	V_{10}	V_{16}	V_{14}	V_{61}	V_{56}	V_{11}	V_{17}	V_{7}
	$\theta=4\pi/5$	V_{38}	V_{50}	V_{51}	V_{31}	V_{43}	V_{1}	V_{32}	V_{40}	V_{54}	V_{6}	V_{5}	V_{47}	V_{45}	V_{37}	V_{8}	V_{12}	V_{62}	V_{16}	V_{17}	V_{55}	V_{13}	V_{9}
	$\theta=6\pi/5$	V_{2}	V_{40}	V_{45}	V_{1}	V_{53}	V_{33}	V_{52}	V_{5}	V_{34}	V_{42}	V_{43}	V_{35}	V_{6}	V_{49}	V_{60}	V_{15}	V_{10}	V_{12}	V_{13}	V_{7}	V_{18}	V_{57}
	$\theta=8\pi/5$	V_{36}	V_{5}	V_{6}	V_{33}	V_{50}	V_{41}	V_{4}	V_{43}	V_{32}	V_{48}	V_{53}	V_{37}	V_{42}	V_{3}	V_{14}	V_{59}	V_{8}	V_{15}	V_{18}	V_{9}	V_{58}	V_{11}
$(1,0,-\varphi)$	$\theta=2\pi/5$	V_{5}	V_{35}	V_{34}	V_{6}	V_{42}	V_{49}	V_{44}	V_{4}	V_{47}	V_{31}	V_{38}	V_{54}	V_{3}	V_{41}	V_{60}	V_{13}	V_{15}	V_{7}	V_{10}	V_{18}	V_{12}	V_{57}
	$\theta=4\pi/5$	V_{39}	V_{1}	V_{2}	V_{46}	V_{34}	V_{54}	V_{5}	V_{51}	V_{41}	V_{33}	V_{36}	V_{44}	V_{50}	V_{6}	V_{15}	V_{59}	V_{11}	V_{9}	V_{8}	V_{14}	V_{58}	V_{18}
	$\theta=6\pi/5$	V_{49}	V_{37}	V_{32}	V_{52}	V_{2}	V_{44}	V_{39}	V_{31}	V_{6}	V_{53}	V_{48}	V_{5}	V_{38}	V_{46}	V_{11}	V_{7}	V_{16}	V_{61}	V_{56}	V_{17}	V_{10}	V_{14}
	$\theta=8\pi/5$	V_{54}	V_{45}	V_{40}	V_{47}	V_{32}	V_{5}	V_{49}	V_{33}	V_{46}	V_{4}	V_{3}	V_{39}	V_{36}	V_{52}	V_{16}	V_{9}	V_{62}	V_{13}	V_{12}	V_{55}	V_{8}	V_{17}
$(1,\varphi-1,0)$	$\theta=2\pi/5$	V_{43}	V_{37}	V_{32}	V_{42}	V_{48}	V_{3}	V_{46}	V_{54}	V_{35}	V_{1}	V_{2}	V_{34}	V_{47}	V_{39}	V_{14}	V_{18}	V_{59}	V_{9}	V_{8}	V_{58}	V_{15}	V_{11}
	$\theta=4\pi/5$	V_{37}	V_{6}	V_{5}	V_{32}	V_{47}	V_{40}	V_{4}	V_{46}	V_{33}	V_{49}	V_{52}	V_{36}	V_{39}	V_{3}	V_{13}	V_{62}	V_{9}	V_{16}	V_{17}	V_{8}	V_{55}	V_{12}
	$\theta=6\pi/5$	V_{6}	V_{38}	V_{31}	V_{5}	V_{39}	V_{48}	V_{45}	V_{4}	V_{50}	V_{34}	V_{35}	V_{51}	V_{3}	V_{40}	V_{61}	V_{14}	V_{16}	V_{10}	V_{7}	V_{17}	V_{11}	V_{56}
	$\theta=8\pi/5$	V_{38}	V_{44}	V_{41}	V_{31}	V_{3}	V_{47}	V_{53}	V_{45}	V_{2}	V_{36}	V_{33}	V_{1}	V_{40}	V_{48}	V_{18}	V_{13}	V_{10}	V_{60}	V_{57}	V_{7}	V_{12}	V_{15}
$(1,1-\varphi,0)$	$\theta=2\pi/5$	V_{52}	V_{4}	V_{3}	V_{49}	V_{39}	V_{33}	V_{2}	V_{38}	V_{51}	V_{43}	V_{42}	V_{50}	V_{31}	V_{1}	V_{8}	V_{62}	V_{17}	V_{13}	V_{12}	V_{16}	V_{55}	V_{9}
	$\theta=4\pi/5$	V_{51}	V_{44}	V_{41}	V_{50}	V_{33}	V_{6}	V_{48}	V_{32}	V_{43}	V_{4}	V_{3}	V_{42}	V_{37}	V_{53}	V_{15}	V_{8}	V_{59}	V_{14}	V_{11}	V_{58}	V_{9}	V_{18}
	$\theta=6\pi/5$	V_{43}	V_{52}	V_{49}	V_{42}	V_{6}	V_{34}	V_{31}	V_{47}	V_{4}	V_{44}	V_{41}	V_{3}	V_{54}	V_{38}	V_{7}	V_{15}	V_{13}	V_{60}	V_{57}	V_{12}	V_{18}	V_{10}
	$\theta=8\pi/5$	V_{4}	V_{51}	V_{50}	V_{3}	V_{34}	V_{40}	V_{37}	V_{1}	V_{44}	V_{52}	V_{49}	V_{41}	V_{2}	V_{32}	V_{61}	V_{7}	V_{14}	V_{17}	V_{16}	V_{11}	V_{10}	V_{56}
$(1,0,0)$	$\theta=\pi$	V_{45}	V_{46}	V_{39}	V_{40}	V_{41}	V_{42}	V_{51}	V_{52}	V_{53}	V_{54}	V_{47}	V_{48}	V_{49}	V_{50}	V_{59}	V_{60}	V_{61}	V_{62}	V_{55}	V_{56}	V_{57}	V_{58}
$(0,1,0)$	$\theta=\pi$	V_{39}	V_{40}	V_{45}	V_{46}	V_{43}	V_{44}	V_{49}	V_{50}	V_{47}	V_{48}	V_{53}	V_{54}	V_{51}	V_{52}	V_{57}	V_{58}	V_{55}	V_{56}	V_{61}	V_{62}	V_{39}	V_{60}
$(0,0,1)$	$\theta=\pi$	V_{42}	V_{41}	V_{44}	V_{43}	V_{46}	V_{45}	V_{48}	V_{47}	V_{50}	V_{49}	V_{52}	V_{51}	V_{54}	V_{53}	V_{56}	V_{55}	V_{58}	V_{57}	V_{60}	V_{59}	V_{62}	V_{61}
$(\varphi-1,1,\varphi)$	$\theta=\pi$	V_{50}	V_{3}	V_{4}	V_{51}	V_{45}	V_{35}	V_{2}	V_{32}	V_{49}	V_{41}	V_{44}	V_{52}	V_{37}	V_{1}	V_{10}	V_{56}	V_{16}	V_{11}	V_{14}	V_{17}	V_{61}	V_{7}
$(\varphi-1,1,-\varphi)$	$\theta=\pi$	V_{3}	V_{49}	V_{52}	V_{4}	V_{36}	V_{46}	V_{31}	V_{1}	V_{42}	V_{50}	V_{51}	V_{43}	V_{2}	V_{38}	V_{55}	V_{9}	V_{12}	V_{16}	V_{17}	V_{13}	V_{8}	V_{62}
$(\varphi-1,-1,\varphi)$	$\theta=\pi$	V_{32}	V_{42}	V_{43}	V_{37}	V_{4}	V_{53}	V_{47}	V_{39}	V_{2}	V_{34}	V_{35}	V_{1}	V_{46}	V_{54}	V_{15}	V_{11}	V_{8}	V_{58}	V_{59}	V_{9}	V_{14}	V_{18}
$(\varphi-1,-1,-\varphi)$	$\theta=\pi$	V_{41}	V_{31}	V_{38}	V_{44}	V_{54}	V_{4}	V_{40}	V_{48}	V_{33}	V_{1}	V_{2}	V_{36}	V_{53}	V_{45}	V_{12}	V_{15}	V_{57}	V_{7}	V_{10}	V_{60}	V_{18}	V_{13}
$(1,\varphi,\varphi-1)$	$\theta=\pi$	V_{49}	V_{42}	V_{43}	V_{52}	V_{35}	V_{5}	V_{54}	V_{38}	V_{41}	V_{3}	V_{4}	V_{44}	V_{31}	V_{47}	V_{18}	V_{10}	V_{57}	V_{12}	V_{13}	V_{60}	V_{7}	V_{15}
$(1,-\varphi,\varphi-1)$	$\theta=\pi$	V_{5}	V_{32}	V_{37}	V_{6}	V_{45}	V_{54}	V_{39}	V_{3}	V_{52}	V_{36}	V_{33}	V_{49}	V_{4}	V_{46}	V_{55}	V_{12}	V_{17}	V_{8}	V_{9}	V_{16}	V_{13}	V_{62}
$(-1,\varphi,\varphi-1)$	$\theta=\pi$	V_{31}	V_{5}	V_{6}	V_{38}	V_{53}	V_{46}	V_{3}	V_{40}	V_{35}	V_{51}	V_{50}	V_{34}	V_{45}	V_{4}	V_{11}	V_{56}	V_{7}	V_{17}	V_{16}	V_{10}	V_{61}	V_{14}
$(-1,-\varphi,\varphi-1)$	$\theta=\pi$	V_{41}	V_{50}	V_{51}	V_{44}	V_{5}	V_{36}	V_{37}	V_{53}	V_{3}	V_{42}	V_{43}	V_{4}	V_{48}	V_{32}	V_{9}	V_{18}	V_{11}	V_{58}	V_{59}	V_{14}	V_{15}	V_{8}
$(\varphi,\varphi-1,1)$	$\theta=\pi$	V_{54}	V_{34}	V_{35}	V_{47}	V_{1}	V_{39}	V_{44}	V_{36}	V_{6}	V_{50}	V_{51}	V_{5}	V_{33}	V_{41}	V_{14}	V_{8}	V_{18}	V_{58}	V_{59}	V_{15}	V_{9}	V_{11}
$(\varphi,\varphi-1,-1)$	$\theta=\pi$	V_{33}	V_{53}	V_{48}	V_{36}	V_{40}	V_{2}	V_{35}	V_{43}	V_{49}	V_{6}	V_{5}	V_{52}	V_{42}	V_{34}	V_{7}	V_{13}	V_{57}	V_{18}	V_{15}	V_{60}	V_{12}	V_{10}
$(-\varphi,\varphi-1,1)$	$\theta=\pi$	V_{1}	V_{43}	V_{42}	V_{2}	V_{50}	V_{38}	V_{47}	V_{5}	V_{37}	V_{45}	V_{40}	V_{32}	V_{6}	V_{54}	V_{55}	V_{17}	V_{9}	V_{13}	V_{12}	V_{8}	V_{16}	V_{62}
$(-\varphi,\varphi-1,-1)$	$\theta=\pi$	V_{44}	V_{2}	V_{1}	V_{41}	V_{37}	V_{49}	V_{5}	V_{48}	V_{46}	V_{38}	V_{31}	V_{39}	V_{53}	V_{6}	V_{17}	V_{56}	V_{14}	V_{10}	V_{7}	V_{11}	V_{61}	V_{16}
$(1,1,1)$	$\theta=2\pi/3$	V_{53}	V_{49}	V_{52}	V_{48}	V_{51}	V_{47}	V_{38}	V_{34}	V_{37}	V_{33}	V_{36}	V_{32}	V_{35}	V_{31}	V_{62}	V_{58}	V_{61}	V_{57}	V_{60}	V_{56}	V_{59}	V_{55}
	$\theta=4\pi/3$	V_{34}	V_{32}	V_{37}	V_{35}	V_{33}	V_{31}	V_{46}	V_{44}	V_{42}	V_{40}	V_{45}	V_{43}	V_{41}	V_{39}	V_{62}	V_{60}	V_{58}	V_{56}	V_{61}	V_{59}	V_{57}	V_{55}
$(-1,1,1)$	$\theta=2\pi/3$	V_{37}	V_{35}	V_{34}	V_{32}	V_{38}	V_{36}	V_{41}	V_{39}	V_{45}	V_{43}	V_{42}	V_{40}	V_{46}	V_{44}	V_{57}	V_{55}	V_{61}	V_{59}	V_{58}	V_{56}	V_{62}	V_{60}
	$\theta=4\pi/3$	V_{47}	V_{51}	V_{50}	V_{54}	V_{49}	V_{53}	V_{32}	V_{36}	V_{31}	V_{35}	V_{34}	V_{38}	V_{33}	V_{37}	V_{56}	V_{60}	V_{55}	V_{59}	V_{58}	V_{62}	V_{57}	V_{61}
$(1,-1,1)$	$\theta=2\pi/3$	V_{36}	V_{38}	V_{31}	V_{33}	V_{35}	V_{37}	V_{40}	V_{42}	V_{44}	V_{46}	V_{39}	V_{41}	V_{43}	V_{45}	V_{56}	V_{58}	V_{60}	V_{62}	V_{55}	V_{57}	V_{59}	V_{61}
	$\theta=4\pi/3$	V_{52}	V_{48}	V_{53}	V_{49}	V_{54}	V_{50}	V_{35}	V_{31}	V_{36}	V_{32}	V_{37}	V_{33}	V_{38}	V_{34}	V_{59}	V_{55}	V_{60}	V_{56}	V_{61}	V_{57}	V_{62}	V_{58}
$(1,1,-1)$	$\theta=2\pi/3$	V_{31}	V_{33}	V_{36}	V_{38}	V_{32}	V_{34}	V_{43}	V_{45}	V_{39}	V_{41}	V_{44}	V_{46}	V_{40}	V_{42}	V_{59}	V_{61}	V_{55}	V_{57}	V_{60}	V_{62}	V_{56}	V_{58}
	$\theta=4\pi/3$	V_{50}	V_{54}	V_{47}	V_{51}	V_{48}	V_{52}	V_{33}	V_{37}	V_{34}	V_{38}	V_{31}	V_{35}	V_{32}	V_{36}	V_{57}	V_{61}	V_{58}	V_{62}	V_{55}	V_{59}	V_{56}	V_{60}
$(0,\varphi-1,\varphi)$	$\theta=2\pi/3$	V_{6}	V_{33}	V_{36}	V_{5}	V_{44}	V_{51}	V_{52}	V_{3}	V_{53}	V_{37}	V_{32}	V_{48}	V_{4}	V_{43}	V_{58}	V_{11}	V_{18}	V_{9}	V_{8}	V_{15}	V_{14}	V_{59}
	$\theta=4\pi/3$	V_{40}	V_{47}	V_{54}	V_{45}	V_{6}	V_{37}	V_{36}	V_{52}	V_{3}	V_{30}	V_{46}	V_{4}	V_{49}	V_{33}	V_{8}	V_{17}	V_{12}	V_{55}	V_{62}	V_{13}	V_{16}	V_{9}
$(0,\varphi-1,-\varphi)$	$\theta=2\pi/3$	V_{48}	V_{39}	V_{46}	V_{53}	V_{38}	V_{6}	V_{51}	V_{35}	V_{40}	V_{3}	V_{4}	V_{45}	V_{34}	V_{50}	V_{17}	V_{7}	V_{56}	V_{11}	V_{14}	V_{61}	V_{10}	V_{16}
	$\theta=4\pi/3$	V_{34}	V_{6}	V_{5}	V_{35}	V_{52}	V_{43}	V_{3}	V_{41}	V_{38}	V_{54}	V_{47}	V_{31}	V_{44}	V_{4}	V_{12}	V_{57}	V_{10}	V_{18}	V_{15}	V_{7}	V_{60}	V_{13}
$(\varphi-1,\varphi,0)$	$\theta=2\pi/3$	V_{1}	V_{41}	V_{44}	V_{2}	V_{52}	V_{32}	V_{53}	V_{6}	V_{31}	V_{39}	V_{46}	V_{38}	V_{5}	V_{48}	V_{61}	V_{16}	V_{7}	V_{11}	V_{14}	V_{10}	V_{17}	V_{56}
	$\theta=4\pi/3$	V_{42}	V_{2}	V_{1}	V_{43}	V_{31}	V_{51}	V_{6}	V_{54}	V_{40}	V_{32}	V_{37}	V_{45}	V_{47}	V_{5}	V_{16}	V_{62}	V_{12}	V_{8}	V_{9}	V_{13}	V_{55}	V_{17}
$(\varphi-1,-\varphi,0)$	$\theta=2\pi/3$	V_{48}	V_{36}	V_{33}	V_{53}	V_{1}	V_{45}	V_{42}	V_{34}	V_{5}	V_{52}	V_{49}	V_{6}	V_{35}	V_{43}	V_{12}	V_{10}	V_{15}	V_{60}	V_{57}	V_{18}	V_{7}	V_{13}
	$\theta=4\pi/3$	V_{35}	V_{47}	V_{54}	V_{34}	V_{46}	V_{2}	V_{33}	V_{41}	V_{51}	V_{5}	V_{6}	V_{50}	V_{44}	V_{36}	V_{9}	V_{11}	V_{59}	V_{15}	V_{18}	V_{58}	V_{14}	V_{8}
$(\varphi,0,\varphi-1)$	$\theta=2\pi/3$	V_{4}	V_{54}	V_{47}	V_{3}	V_{31}	V_{41}	V_{36}	V_{2}	V_{45}	V_{53}	V_{48}	V_{40}	V_{1}	V_{33}	V_{60}	V_{10}	V_{13}	V_{18}	V_{15}	V_{12}	V_{7}	V_{57}
	$\theta=4\pi/3$	V_{46}	V_{36}	V_{33}	V_{39}	V_{49}	V_{3}	V_{43}	V_{51}	V_{38}	V_{2}	V_{1}	V_{31}	V_{50}	V_{42}	V_{13}	V_{17}	V_{62}	V_{8}	V_{9}	V_{55}	V_{16}	V_{12}
$(-\varphi,0,\varphi-1)$	$\theta=2\pi/3$	V_{53}	V_{4}	V_{3}	V_{48}	V_{42}	V_{32}	V_{1}	V_{35}	V_{54}	V_{46}	V_{39}	V_{47}	V_{34}	V_{2}	V_{9}	V_{59}	V_{18}	V_{14}	V_{11}	V_{15}	V_{58}	V_{8}
	$\theta=4\pi/3$	V_{35}	V_{45}	V_{40}	V_{34}	V_{3}	V_{50}	V_{52}	V_{44}	V_{1}	V_{37}	V_{32}	V_{2}	V_{41}	V_{49}	V_{17}	V_{14}	V_{7}	V_{61}	V_{56}	V_{10}	V_{11}	V_{16}

Şekil 7.13 $\mathbb{R}^3_{DT}$ de Dönme İnversiyon Hareketi Altında Köşe Noktaların Görüntüleri Devamı

Buraya kadar olan kısımda Öklidyen 3-uzayın izometrilerinden hangilerinin $d_{DT}-$metriğini koruduğu bulunmuştur. Yani $\mathbb{R}^3$ te $d_{DT}-$metriğini koruyan yansımalar,

dönmeler, inversiyonlar, dönme-yansımalar ve dönme-inversiyonlar tespit edilmiştir. Sonuç olarak on beş yansıma, altmış dönme, kırk dört dönme-inversiyon ve bir inversiyondan oluşan, $d_{DT}-$metriğine göre olan izometriler disdyakis triacontahedronun Öklidyen simetri grubu olan I_h ın elemanlarıdır. Bu gruba disdyakis triacontahedron grup denilsin ve $G(DT)$ ile gösterilsin. Açıkça $G(DT)$, I_h grubuna izomorftur. Bundan sonraki kısımda $\mathbb{R}^3$ te $d_{DT}-$metriğini koruyan, I_h grubunun elemanları dışında izometrilerin olmadığı gösterilecektir. Yani $\mathbb{R}^3_{DT}$ nin tüm izometrilerinin $T(3).G(DT)$ olduğu gösterilecektir.

Tanım 7.2 *$A = (a_1, a_2, a_3)$ ve $B = (b_1, b_2, b_3)$ $\mathbb{R}^3_{DT}$ uzayında farklı iki nokta olsun. Bu taktirde*

$$\{X \mid d_{DT}(A, X) + d_{DT}(B, X) = d_{DT}(A, B)\}$$

kümesine A, B noktalarının minimum uzaklık kümesi denir ve $[AB]$ ile gösterilir.

Genel olarak, $[AB]$ kümesi AB köşegenli bir paralelyüz oluşturur (Bakınız Şekil7.14).

Şekil 7.14 $\mathbb{R}^3_{DT}$ da Minimum Uzaklık Kümesi

Böylece buradaki minimum uzaklık kümesi $\left(\frac{7-5\varphi}{6}\right)x - \left(\frac{2\varphi-5}{6}\right)y + \left(\frac{7\varphi-12}{6}\right)z = 0$, $\left(\frac{16\varphi-29}{15}\right)x - \left(\frac{13\varphi-16}{15}\right)y + \left(\frac{13-3\varphi}{15}\right)z = 0$, $\left(\frac{\varphi+3}{10}\right)x + \left(\frac{5-2\varphi}{10}\right)y - \left(\frac{3\varphi-2}{10}\right)z = 0$ düzlemleri ve bu düzlemlere paralel düzlemlerden oluşur.

Önerme 7.6 *$\phi : \mathbb{R}^3_{DT} \to \mathbb{R}^3_{DT}$ bir izometri ve $[AB]$ paralelyüz olsun. O halde*

$$\phi([AB]) = [\phi(A)\phi(B)]$$

olur.

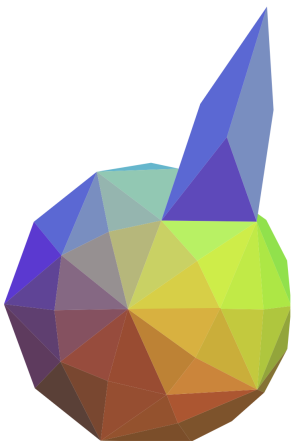
İspat *$Y \in \phi([AB])$ olsun.*

$$\begin{aligned} Y \in \phi([AB]) &\iff \exists X \in [AB] \ni Y = \phi(X) \\ &\iff d_{DT}(A,X) + d_{DT}(B,X) = d_{DT}(A,B) \\ &\iff d_{DT}(\phi(A),\phi(X)) + d_{DT}(\phi(B),\phi(X)) = d_{DT}(\phi(A),\phi(B)) \\ &\iff Y = \phi(X) \in [\phi(A)\phi(B)]\,. \end{aligned}$$

Sonuç 7.6 *$\phi : \mathbb{R}^3_{DT} \to \mathbb{R}^3_{DT}$ bir izometri ve $[AB]$ paralelyüz olsun. Bu durumda ϕ, $[AB]$ nin köşelerini köşelere dönüştürür ve kenar uzunluklarını korur.*

Önerme 7.7 *$f : \mathbb{R}^3_{DT} \to \mathbb{R}^3_{DT}$ dönüşümü $f(O) = O$ olacak şekilde bir izometri olsun. Bu taktirde $f \in G(DT)$ olur.*

İspat *$O = (0,0,0)$ ve $D = \left(\frac{\varphi-1}{2}, \frac{2\varphi+11}{10}, \frac{11\varphi-4}{10}\right)$ olmak üzere $[OD]$ paralelyüzünü gözönüne alalım. Bu paralelyüzün köşe noktalarından üçü $V_{31} = \left(\frac{\varphi-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\varphi}{2}\right)$, $V_{55} = \left(\frac{5-2\varphi}{3}, \frac{5-2\varphi}{3}, \frac{5-2\varphi}{3}\right)$, $V_{27} = \left(0, \frac{\varphi+3}{5}, \frac{3\varphi-2}{5}\right)$ olup bu noktalar aynı zamanda merkezil birim disdyakis triacontahedron birim küresinin köşe noktalarıdır. Dahası bu üç nokta disdyakis triacontahedronun her biri aynı çeşit kenar üçgen biçiminde olan bir yüzünün köşe noktalarıdır (Bakınız Şekil7.15).*



Şekil 7.15 $\mathbb{R}^3_{DT}$ da Birim Küre Ve Minimum Uzaklık Kümesi

f izometrisi $[OD]$ paralelyüzün köşe noktalarını köşe noktalara dönüştürüp, kenar uzaklıklarını korduğundan ve $f(O) = O$ olduğundan dolayı V_{31}, V_{55} ve V_{27} noktalarını

disdyakis triacontahedronun yine bir yüzünün köşe noktalarına dönüştürür. Ayrıca bu dönüştürme işlemi gerçekleşirken kenar uzunlukları korunacağından dolayı $i \in \{1,2,3,4,5,6,31,32,33,34,35,36,37,38,39,40,41,42,43,44,45,46,47,48,49,50,51,52,53,54\}$, $j \in \{7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,55,56,\ 57,58,59,60,61,62\}$ *ve* $k \in \{19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30\}$ *için* V_iV_j, V_iV_k, V_jV_k *disdyakis triacontahedronun üç kenarı olmak üzere* $f(V_{31}) = V_i$, $f(V_{55}) = V_j$, $f(V_{27}) = V_k$ *olur. Açıkça ifade edilirse* f *izometrisi, disdyakis triacontahedronun bir yüzünün köşe noktalarını yine bir yüzünün köşe noktalarına dönüştürür. O halde disdyakis triacontahedron 120 tane çeşitkenar üçgen biçiminde yüze sahip olduğundan bir yüzün dönüşebileceği 120 yüz ihtimali vardır. Ayrıca kenar uzunlukları korunmak zorunda olduğundan* V_{31}, V_{55} *ve* V_{27} *noktalarının bir yüz üzerinde dönüşebileceği noktalar tek bir şekilde bellidir. Bu taktirde disdyakis triacontahedronun her bir yüzü için 1 ihtimal olduğundan dolayı bu noktaların dönüşebileceği 120 ihtimal vardır. Bu ihtimaller ise aşağıda tek tek sıralanmış ve her bir dönüşümün önceden tespit edilen hareketlerden hangisine karşılık geldiği ifade edilmiştir.*

1. $f(V_{31}) = V_{35}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{59}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{27}$ *ise* $\Delta : x = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *yansımasıdır.*

2. $f(V_{31}) = V_{33}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{57}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{29}$ *ise* $\Delta : y = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *yansımasıdır.*

3. $f(V_{31}) = V_{32}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{56}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{28}$ *ise* $\Delta : z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *yansımasıdır.*

4. $f(V_{31}) = V_{38}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{10}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{22}$ *ise* $\Delta : (\varphi - 1)\,x + y + \varphi z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *yansımasıdır.*

5. $f(V_{31}) = V_{47}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{55}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{27}$ *ise* $\Delta : (\varphi - 1)\,x + y - \varphi z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

6. $f(V_{31}) = V_5$ *ise* $f(V_{55}) = V_{15}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{27}$ *ise* $\Delta : (\varphi - 1)\,x - y + \varphi z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

7. $f(V_{31}) = V_{42}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{12}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{20}$ *ise* $\Delta : (\varphi - 1)\,x - y - \varphi z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

8. $f(V_{31}) = V_{53}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{18}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{26}$ *ise* $\Delta : x + \varphi y + (\varphi - 1)\,z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

9. $f(V_{31}) = V_{31}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{55}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{19}$ *ise* $\Delta : x - \varphi y + (\varphi - 1)\, z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

10. $f(V_{31}) = V_{41}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{11}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{24}$ *ise* $\Delta : -x + \varphi y + (\varphi - 1)\, z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

11. $f(V_{31}) = V_{1}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{9}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{21}$ *ise* $\Delta : -x - \varphi y + (\varphi - 1)\, z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

12. $f(V_{31}) = V_{4}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{14}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{25}$ *ise* $\Delta : \varphi x + (\varphi - 1)\, y + z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

13. $f(V_{31}) = V_{31}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{7}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{27}$ *ise* $\Delta : \varphi x + (\varphi - 1)\, y - z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

14. $f(V_{31}) = V_{39}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{55}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{23}$ *ise* $\Delta : -\varphi x + (\varphi - 1)\, y + z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

15. $f(V_{31}) = V_{51}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{17}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{27}$ *ise* $\Delta : -\varphi x + (\varphi - 1)\, y - z = 0$ *düzlemi olmak üzere* $f = \sigma_\Delta$ *göre yansımasıdır.*

16. $f(V_{31}) = V_{34}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{58}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{30}$ *ise dönme ekseni* $(1, 0, 0)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

17. $f(V_{31}) = V_{36}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{60}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{28}$ *ise dönme ekseni* $(0, 1, 0)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

18. $f(V_{31}) = V_{37}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{61}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{29}$ *ise dönme ekseni* $(0, 0, 1)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

19. $f(V_{31}) = V_{39}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{55}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{19}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

20. $f(V_{31}) = V_{47}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{55}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{23}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

21. $f(V_{31}) = V_{52}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{60}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{25}$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

22. $f(V_{31}) = V_{45}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{61}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{21}$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$*olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

23. $f(V_{31}) = V_{53}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{61}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{26}$ *ise dönme eksen* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

24. $f(V_{31}) = V_{42}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{58}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{20}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

25. $f(V_{31}) = V_{50}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{58}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{24}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

26. $f(V_{31}) = V_{44}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{60}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{22}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

27. $f(V_{31}) = V_{35}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{59}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{21}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}}, \frac{\varphi}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

28. $f(V_{31}) = V_{1}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{9}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{19}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}}, \frac{\varphi}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

29. $f(V_{31}) = V_{49}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{16}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{24}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}}, -\frac{\varphi}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

30. $f(V_{31}) = V_{45}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{13}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{26}$ *ise dönme ekseni* $(0, \frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}}, -\frac{\varphi}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

31. $f(V_{31}) = V_{40}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{56}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{23}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}}, \frac{\varphi}{\sqrt{3}}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

32. $f(V_{31}) = V_{52}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{17}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{28}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}}, \frac{\varphi}{\sqrt{3}}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

33. $f(V_{31}) = V_{4}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{13}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{25}$ *ise dönme ekseni*$(\frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}}, -\frac{\varphi}{\sqrt{3}}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

34. $f(V_{31}) = V_{32}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{8}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{28}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}}, -\frac{\varphi}{\sqrt{3}}, 0)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

35. $f(V_{31}) = V_{49}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{57}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{29}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\varphi}{\sqrt{3}}, 0, \frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

36. $f(V_{31}) = V_{40}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{12}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{20}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{\varphi}{\sqrt{3}}, 0, \frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

37. $f(V_{31}) = V_{36}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{8}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{22}$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{\varphi}{\sqrt{3}}, 0, \frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönmedir.*

38. $f(V_{31}) = V_{6}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{16}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{29}$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{\varphi}{\sqrt{3}}, 0, \frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönmedir.*

39 .$f(V_{31}) = V_{47}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{15}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{27}$ *ise dönme ekseni* $\left(0, \sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönmedir.*

40. $f(V_{31}) = V_{5}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{17}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{27}$ *ise dönme ekseni* $\left(0, \sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönmedir.*

41. $f(V_{31}) = V_{51}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{59}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{27}$ *ise dönme ekseni* $\left(0, \sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönmedir.*

42. $f(V_{31}) = V_{35}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{7}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{27}$ *ise dönme ekseni* $\left(0, \sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönmedir.*

43. $f(V_{31}) = V_{3}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{12}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{23}$ *ise dönme ekseni* $\left(0, -\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönmedir.*

44. $f(V_{31}) = V_{34}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{10}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{20}$ *ise dönme ekseni* $\left(0, -\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönmedir.*

45. $f(V_{31}) = V_{46}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{14}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{22}$ *ise dönme ekseni* $\left(0, -\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönmedir.*

46. $f(V_{31}) = V_{43}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{39}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{25}$ *ise dönme ekseni* $\left(0, -\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönmedir.*

47. $f(V_{31}) = V_{1}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{7}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{21}$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönmedir.*

48. $f(V_{31}) = V_{33}$ *ise* $f(V_{55}) = V_9$ *ve* $f(V_{27}) = V_{29}$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönmedir.*

49. $f(V_{31}) = V_{41}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{57}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{24}$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönmedir.*

50. $f(V_{31}) = V_{39}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{11}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{23}$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönmedir.*

51. $f(V_{31}) = V_{33}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{57}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{19}$ *ise dönme ekseni* $\left(-\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönmedir.*

52. $f(V_{31}) = V_{53}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{18}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{29}$ *ise dönme ekseni* $\left(-\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönmedir.*

53. $f(V_{31}) = V_4$ *ise* $f(V_{55}) = V_{14}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{26}$ *ise dönme ekseni* $\left(-\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönmedir.*

54. $f(V_{31}) = V_{51}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{17}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{25}$ *ise dönme ekseni* $\left(-\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönmedir.*

55. $f(V_{31}) = V_{41}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{11}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{19}$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0, \sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönmedir.*

56. $f(V_{31}) = V_{42}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{12}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{24}$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0, \sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönmedir.*

57. $f(V_{31}) = V_{32}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{56}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{20}$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0, \sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönmedir.*

58. $f(V_{31}) = V_5$ *ise* $f(V_{55}) = V_{15}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{28}$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0, \sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönmedir.*

59. $f(V_{31}) = V_{37}$ *ise* $f(V_{55}) = V_9$ *ve* $f(V_{27}) = V_{21}$ *ise dönme ekseni* $\left(-\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0, \sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönmedir.*

60. $f(V_{31}) = V_{54}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{18}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{26}$ *ise dönme ekseni* $\left(-\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0, \sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönmedir.*

61. $f(V_{31}) = V_2$ *ise* $f(V_{55}) = V_{10}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{22}$ *ise dönme ekseni* $\left(-\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0, \sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönmedir.*

62. $f(V_{31}) = V_{48}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{56}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{28}$ *ise dönme ekseni* $\left(-\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0, \sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}\right))$ *olmak üzere* $f = r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönmedir.*

63. $f(V_{31}) = V_{31}$ *ise* $f(V_{55}) = V_7$ *ve* $f(V_{27}) = V_{19}$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{\varphi-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\varphi}{2}\right)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

64. $f(V_{31}) = V_{54}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{62}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{30}$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{\varphi-1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\varphi}{2}\right)$*olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

65. $f(V_{31}) = V_6$ *ise* $f(V_{55}) = V_{18}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{30}$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{\varphi-1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\varphi}{2}\right)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

66. $f(V_{31}) = V_{43}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{13}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{21}$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{\varphi-1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{\varphi}{2}\right)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

67. $f(V_{31}) = V_{48}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{15}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{23}$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{1}{2}, \frac{\varphi}{2}, \frac{\varphi-1}{2}\right)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

68. $f(V_{31}) = V_{38}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{62}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{22}$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\varphi}{2}, \frac{\varphi-1}{2}\right)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

69. $f(V_{31}) = V_{44}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{14}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{25}$ *ise dönme ekseni* $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\varphi}{2}, \frac{\varphi-1}{2}\right)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

70. $f(V_{31}) = V_2$ *ise* $f(V_{55}) = V_8$ *ve* $f(V_{27}) = V_{20}$ *ise dönme ekseni* $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\varphi}{2}, \frac{\varphi-1}{2}\right)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

71. $f(V_{31}) = V_3$ *ise* $f(V_{55}) = V_{11}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{24}$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{\varphi}{2}, \frac{\varphi-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$*olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

72. $f(V_{31}) = V_{38}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{10}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{30}$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{\varphi}{2}, \frac{\varphi-1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

73. $f(V_{31}) = V_{46}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{62}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{26}$ *ise dönme ekseni* $\left(-\frac{\varphi}{2}, \frac{\varphi-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ *olmak üzere* $f = r_\pi$ *dönmedir.*

74. $f(V_{31}) = V_{50}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{16}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{30}$ *ise dönme ekseni* $\left(-\frac{\varphi}{2}, \frac{\varphi-1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ *olmak üzere* $f = r_{\pi}$ *dönmedir.*

75. $f(V_{31}) = V_{46}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{62}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{22}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

76. $f(V_{31}) = V_{54}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{62}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{26}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

77. $f(V_{31}) = V_{49}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{57}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{24}$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

78. $f(V_{31}) = V_{40}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{56}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{20}$ *ise dönme ekseni* $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

79. $f(V_{31}) = V_{48}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{56}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{23}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

80. $f(V_{31}) = V_{43}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{59}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{21}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

81. $f(V_{31}) = V_{51}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{59}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{25}$ *ise dönme ekseni* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

82. $f(V_{31}) = V_{41}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{57}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{19}$ *ise dönme ekseni*$(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

83. $f(V_{31}) = V_{34}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{58}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{20}$ *ise dönme ekseni* $\left(0, \frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}}, \frac{\varphi}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

84. $f(V_{31}) = V_{2}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{8}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{22}$ *ise dönme ekseni* $\left(0, \frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}}, \frac{\varphi}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

85. $f(V_{31}) = V_{52}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{17}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{25}$ *ise dönme ekseni* $\left(0, \frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}}, -\frac{\varphi}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

86. $f(V_{31}) = V_{40}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{12}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{23}$ *ise dönme ekseni*$\left(0, \frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}}, -\frac{\varphi}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

87. $f(V_{31}) = V_{45}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{61}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{26}$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}}, \frac{\varphi}{\sqrt{3}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

88. $f(V_{31}) = V_{49}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{16}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{29}$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}}, \frac{\varphi}{\sqrt{3}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

89. $f(V_{31}) = V_{3}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{12}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{24}$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}}, -\frac{\varphi}{\sqrt{3}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

90. $f(V_{31}) = V_{27}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{9}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{29}$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}}, -\frac{\varphi}{\sqrt{3}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

91. $f(V_{31}) = V_{52}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{60}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{28}$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{\varphi}{\sqrt{3}}, 0, \frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

92. $f(V_{31}) = V_{45}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{13}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{21}$ *ise dönme ekseni* $\left(\frac{\varphi}{\sqrt{3}}, 0, \frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

93. $f(V_{31}) = V_{33}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{9}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{19}$ *ise dönme ekseni* $\left(-\frac{\varphi}{\sqrt{3}}, 0, \frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

94. $f(V_{31}) = V_{5}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{17}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{28}$ *ise dönme ekseni* $\left(-\frac{\varphi}{\sqrt{3}}, 0, \frac{(\varphi-1)}{\sqrt{3}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{3}}$ *dönme inversiyonudur.*

95. $f(V_{31}) = V_{54}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{18}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{30}$ *ise dönme ekseni* $\left(0, \sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\right)$*e olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

96. $f(V_{31}) = V_{6}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{16}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{30}$ *ise dönme ekseni* $\left(0, \sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\right)$*olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

97. $f(V_{31}) = V_{50}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{58}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{30}$ *ise dönme ekseni* $\left(0, \sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

98. $f(V_{31}) = V_{34}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{10}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{30}$ *ise dönme ekseni* $\left(0, \sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\right)$ *olmk üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

99. $f(V_{31}) = V_4$ *ise* $f(V_{55}) = V_{13}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{26}$ *ise dönme ekseni* $\left(0, -\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

100. $f(V_{31}) = V_{35}$ *ise* $f(V_{55}) = V_7$ *ve* $f(V_{27}) = V_{21}$ *ise dönme ekseni* $\left(0, -\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

101. $f(V_{31}) = V_{39}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{11}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{19}$ *ise dönme ekseni* $\left(0, -\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

102. $f(V_{31}) = V_{42}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{58}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{24}$ *ise dönme ekseni* $\left(0, -\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

103. $f(V_{31}) = V_2$ *ise* $f(V_{55}) = V_{10}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{20}$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0, \sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

104. $f(V_{31}) = V_{36}$ *ise* $f(V_{55}) = V_8$ *ve* $f(V_{27}) = V_{28}$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0, \sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

105. $f(V_{31}) = V_{44}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{60}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{25}$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0, \sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

106. $f(V_{31}) = V_{46}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{14}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{26}$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0, \sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

107. $f(V_{31}) = V_{36}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{60}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{22}$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0, -\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

108. $f(V_{31}) = V_{48}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{15}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{28}$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0, -\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

109. $f(V_{31}) = V_3$ *ise* $f(V_{55}) = V_{11}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{23}$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0, -\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

110. $f(V_{31}) = V_{50}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{16}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{24}$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0, -\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

111. $f(V_{31}) = V_{44}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{14}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{22}$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0\right)$ *eksenine göre* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

112. $f(V_{31}) = V_{43}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{13}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{25}$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

113. $f(V_{31}) = V_{37}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{61}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{21}$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

114. $f(V_{31}) = V_{6}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{18}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{29}$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, \sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

115. $f(V_{31}) = V_{32}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{8}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{20}$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, -\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{2\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

116. $f(V_{31}) = V_{47}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{15}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{23}$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, -\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{4\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

117. $f(V_{31}) = V_{1}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{17}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{19}$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, -\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{6\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

118. $f(V_{31}) = V_{53}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{61}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{29}$ *ise dönme ekseni* $\left(\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}, -\sqrt{\frac{3-\varphi}{5}}, 0\right)$ *olmak üzere* $f = \sigma_O r_{\frac{8\pi}{5}}$ *dönme inversiyonudur.*

119. $f(V_{31}) = V_{31}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{55}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{27}$ *ise* f *birim dönüşümdür.*

120. $f(V_{31}) = V_{38}$ *ise* $f(V_{55}) = V_{62}$ *ve* $f(V_{27}) = V_{30}$ *ise* f *inversiyondur.*

Buna göre orijini koruyan f *izometrisi* $G(DT)$ *nin bir elemanıdır. Bir başka deyişle disdyakis triacontahedron uzaklığını koruyan Öklidyen izometriler dışında bir izometri yoktur.*

Teorem 7.3 $f : \mathbb{R}^3_{DT} \to \mathbb{R}^3_{DT}$ *dönüşümü bir izometri olsun.* $f = T_A \circ g$ *olacak şekilde bir tek* $T_A \in T(3)$ *ve* $g \in G(DT)$ *vardır.*

İspat $A = (a_1, a_2, a_3)$ *olmak üzere* $f(O) = A$ *olsun. Bu taktirde* $g = T_{-A} \circ f$ *olacak şekilde tanımlı* g *dönüşümü bir izometridir ve* $g(O) = O$ *olur. Böylece Önerme 6.7 den dolayı* $g \in G(DT)$ *ve* $f = T_A \circ g$ *olur. İspatın tekliği aşikardır.*

Buna göre disdyakis triacontahedron metriği ile donatılmış analitik $3-$uzayın izometrilerinin grubu disdyakis triacontahedron (Öklidyen) simetri grubu olan I_h ile $3-boyutlu$ analitik uzayın tüm ötelemelerinin grubu olan $T(3)$ ün yarı-direkt çarpımıdır. Yani $\mathbb{R}^3_{DT}$ nun tüm izometrilerinin kümesi $T(3).G(DT)$ dir.

8. DUAL KONVEKS ÇOKYÜZLÜLER

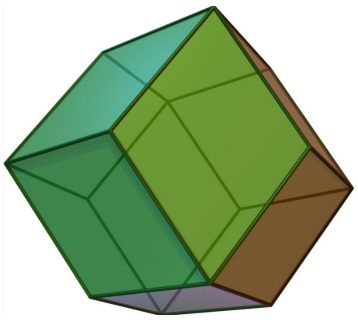
8.1 Çokyüzlülerde Dualite

Duallik ilişkisine sahip iki çokyüzlü karşılaştırıldığında ayrıt sayılarının aynı olduğu, yüz ile köşe sayılarının ise karşılıklı yer değiştirdikleri görülür. (Örneğin, küp ile sekiz yüzlünün oniki olan ayrıt sayıları aynı iken altı ve sekiz olan yüz sayıları ile köşe sayıları karşılıklı olarak yer değiştirmektedir.) Ayrıca aralarında duallik ilişkisi bulunan çokyüzlülerden herhangi birisinin yüzlerinin simetri merkezleri birleştirildiğinde diğer çokyüzlü elde edilir. Aynı işlem yeni oluşan çokyüzlü için de tekrar edilirse birinciye benzer bir çokyüzlü elde edilir (Ermiş, 2014) Katalan cisimleri Arşimed cisimlerinin dualleri alınarak oluşturulmuş düzgün olmayan konveks çokyüzlülerdir. Dolayısıyla Katalan cisimlerinin dualleri de Arşimed cisimleridir. Ayrıca dual cisimler aynı simetri grubuna sahiptirler.

Şu ana kadar bazı Katalan ve Arşimed cisimlerinin daha önce bulunmamış metrikleri verilmiş ve izometri grupları belirlenmiştir. Bu bölümde ise Arşimed ve Katalan cisimleri arasındaki ilişki gereğince tamamlayıcı olması adına, bahsedilen cisimlerin daha önceden üzerinde çalışılmış dual cisimlerinden kısaca bahsedilecektir.

8.2 Rhombic Dodecahedron

Cuboctahedron 8 i üçgensel 6 sı karesel toplam 14 yüze, herbirinde 2 üçgen ve 2 karenin kesiştiği 12 eş köşeye ve 24 eş ayrıta sahip bir Arşimed cismidir. Bu cismin duali olan Katalan cisim ise Rhombic dodecahedrondur. 12 tane eşkenar dörtgen şeklinde yüze, 24 ayrıta, birinci tip köşelerde üç, ikinci tip köşelerde dört yüzü kesişen 14 köşeye sahiptir. (Şekil8.1)



Şekil 8.1 Rhombic Dodecahedron

Rhombic dodecahedron ile ilgili bu kısımda yer alan bilgiler (Erçınar,G.Z, 2015) yüksek lisans tezinden özetlenerek verilmiştir.

Tanım 8.1 *$\mathbb{R}^3$ de $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ noktaları verilsin. Bu taktirde,*

$$d_{RD}(P_1, P_2) = \max\{|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|, |x_1 - x_2| + |z_1 - z_2|, |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|\}$$

şeklinde tanımlanan $d_{RD} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to [0, \infty)$ fonksiyonuna P_1 ve P_2 noktaları arasındaki rhombic dodecahedron uzaklık fonksiyonu denir.

Bu metrikle döşenmiş analitik 3-uzayda $\mathbb{R}^3_{RD}$ ile gösterilmek üzere bu uzayın izometri grubu aşağıda verilen ispatsız önerme ve teoremlerle özetlenecektir.

Önerme 8.1 *$\mathbb{R}^3$ te her Öklidyen öteleme $\mathbb{R}^3_{RD}$ ün bir izometrisidir.*

Yukarıdaki önermeden $\mathbb{R}^3_{RD}$ uzayında dönme ve yansımaları bulmak için orijinden geçen düzlemleri düşünmek yeterli olacaktır.

Önerme 8.2 *$\mathbb{R}^3_{RD}$ de $\Delta = ax + by + cz = 0$ düzlemine göre yansımanın izometri olması için gerek ve yeter koşul düzlemin doğrultu vektörü(a, b, c) nin*

$$D = \left\{ (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,0), (-1,1,0), (1,0,1), (1,0,-1), (0,1,1), (0,1,-1) \right\}$$

elemanlarına paralel olmasıdır.

Önerme 8.3 *Orijinden geçen bir l doğrusuna göre bir r_θ dönmesinin izometri olması için gerek ve yeter koşul*

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\} \\ D_2 &= \{(1,1,1), (-1,1,1), (1,-1,1), (1,1,-1)\} \\ D_3 &= \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1), (1,-1,0), (1,0,-1), (0,1,-1)\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} R_1 &= \{r_\theta \mid \theta \in \{\pi/2, \pi, 3\pi/2\}, \text{ dönme ekseninin doğrultu vektörü } D_1 \text{ in elemanı}\} \\ R_2 &= \{r_\theta \mid \theta \in \{2\pi/3, 4\pi/3\}, \text{ dönme ekseninin doğrultu vektörü } D_2 \text{ nin elemanı}\} \\ R_3 &= \{r_\theta \mid \theta = \pi, \text{ dönme ekseninin doğrultu vektörü } D_3 \text{ ün elemanı}\} \end{aligned}$$

olmak üzere $r_\theta \in \mathbb{R}_{RD} = R_1 \cup R_2 \cup R_3$ olmasıdır

Yardımcı Teorem 8.1 *Orijine göre inversiyon da uzaklığı korur. Yani inversiyon bir izometridir.*

Önerme 8.4 d_{RD} *uzaklığını invaryant bırakan orijine göre altı tane dönme yansıması vardır.*

Önerme 8.5 d_{RD} *uzaklığını değişmez bırakan orijine göre sekiz tane dönme inversiyonu vardır.*

Buraya kadar olan kısımda O_h ocatahedral grubun dokuz yansıma, yirmi üç dönme, altı dönme yansıma, sekiz dönme-inversiyon ve bir inversiyondan oluşmakta olduğu gösterilmiştir. Yani rhombic dodecahedronun Öklidyen simetri grubu olduğu görülmektedir.

$\mathbb{R}^3_{RD}$ nin tüm izometrilerinin $T(3)O_h$ kümesinin elemanı olduğu aşağıdaki iki teoremle ifade edilmiştir.

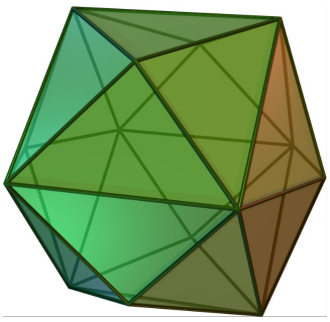
Teorem 8.1 $f : \mathbb{R}^3_{RD} \to \mathbb{R}^3_{RD}$, $f(O) = O$ *özelliğinde bir izometri olmak üzere* $f \in O_h$ *dır.*

Teorem 8.2 $f : \mathbb{R}^3_{RD} \to \mathbb{R}^3_{RD}$ *bir izometri olsun. Bu taktirde* $f = T_A \circ g$ *olacak şekilde bir tek* $T_A \in T(3)$ *ve* $g \in O_h$ *vardır.*

Buna göre $\mathbb{R}^3_{RD}$ ün izometri grubu O_h ocathedral grup ile $T(3)$ analitik 3-uzayın tüm ötelemelerinin grubunun yarı direkt çarpımıdır.

8.3 Tetrakis Hexahedron

Tetrakis Hexahedron, ikiz kenar üçgenlerin birleşmesinden oluşan 24 yüzlüdür. Toplamda 14 köşe ve 36 ayrıta sahiptir (Şekil8.2). Bu Katalan cisim sekizi altıgen altısı kare olan 14 yüze, 36 ayrıta ve 24 köşeye sahip truncated octahedronun dualidir.



Şekil 8.2 Tetrakis Hexahedron

Ayrıca tetrakis hexahedron 48 tane simetriye sahip olup, simetri grubu O_h ile gösterilir. En küçük kenar uzunluğu 1 birim olup, yüzey alanı $S = \frac{16}{3}\sqrt{5}br^2$ hacmi ise $V = \frac{32}{9}\ br^3$dür. Tetrakis hexahedron, kübün yüzeyi üzerine bir nokta eklenerek oluşmuş kübün kleetopu olan bir yapıdır.

Birim küresi tetrakis hexahedron olan uzaklık fonksiyonu d_{TH} ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 8.2 *$P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ $\mathbb{R}^3$ de iki farklı nokta olsun.*

$$d_{TH}(P_1, P_2) = \left(\sqrt{3} - 1\right) \max \left\{ \begin{array}{c} |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|, \\ |x_1 - x_2| + |z_1 - z_2|, \\ |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2| \end{array} \right\} + \left(2 - \sqrt{3}\right) \max \left\{ \begin{array}{c} |x_1 - x_2|, \\ |y_1 - y_2|, \\ |z_1 - z_2| \end{array} \right\}$$

şeklinde tanımlanan $d_{TH} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to [0, \infty)$ fonksiyonuna analitik 3-uzayda P_1 ve P_2 noktaları arasındaki Tetrakis Hexahedron uzaklık fonksiyonu denir.

Ayrıca $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$mid(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha + \beta - \gamma - \max\{\alpha, \beta, \gamma\} - \min\{\alpha, \beta, \gamma\}$$

şeklinde tanımlanan $mid : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna orta değer fonksiyonu adı verilsin. Buna göre $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere P_1 ve P_2 noktaları arasındaki tetrakis hexahedron uzaklığı

$$\begin{aligned} d_{TH}(P_1, P_2) = \ & \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|, \} \\ & + \left(\sqrt{3} - 1\right) mid\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\} \end{aligned}$$

şeklinde de verilebilir.

Bu metrikle döşenmiş analitik 3-uzayda $\mathbb{R}^3_{TH}$ ile gösterilmek üzere bu uzayın izometri grubu aşağıda verilen ispatsız önerme ve teoremlerle özetlenecektir.

Önerme 8.6 *$\mathbb{R}^3$de her Öklidyen öteleme $\mathbb{R}^3_{TH}$ ün bir izometrisidir.*

Yukarıdaki önermeden $\mathbb{R}^3_{TH}$ uzayında dönme ve yansımaları bulmak için orijinden geçen düzlemleri düşünmek yeterli olacaktır.

Önerme 8.7 $\mathbb{R}^3_{TH}$ *de* $\Delta = ax + by + cz = 0$ *düzlemine göre yansımanın izometri olması için gerek ve yeter koşul düzlemin doğrultu vektörü* (a, b, c) *nin*

$$D=\left\{ (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,0), (-1,1,0), (1,0,1), (1,0,-1), (0,1,1), (0,1,-1) \right\}$$

elemanlarına paralel olmasıdır.

Önerme 8.8 *Orijinden geçen bir* l *doğrusuna göre bir* r_θ *dönmesinin izometri olması için gerek ve yeter koşul*

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\} \\ D_2 &= \{(1,1,1),\ (-1,1,1), (1,-1,1),\ (1,1,-1)\} \\ D_3 &= \{(1,1,0),\ (1,0,1), (0,1,1),\ (1,-1,0),\ (1,0,-1),\ (0,1,-1)\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} R_1 &= \{r_\theta \mid \theta \in \{\pi/2\,,\ \pi, 3\pi/2\}\text{, dönme ekseninin doğrultu vektörü } D_1 \text{ in elemanı}\} \\ R_2 &= \{r_\theta \mid \theta \in \ \{2\pi/3\,,\ 4\pi/3\}\text{, dönme ekseninin doğrultu vektörü } D_2 \text{ nin elemanı}\} \\ R_3 &= \{r_\theta \mid \theta = \pi\text{, dönme ekseninin doğrultu vektörü } D_3 \text{ ün elemanı}\} \end{aligned}$$

olmak üzere $r_\theta \in R_{TH} = R_1 \cup R_2 \cup R_3$ *olmasıdır*

Yardımcı Teorem 8.2 *Orijine göre inversiyon da uzaklığı korur. Yani inversiyon bir izometridir.*

Önerme 8.9 d_{TH} *uzaklığını invaryant bırakan orijine göre altı tane dönme yansıması vardır.*

Önerme 8.10 d_{TH} *uzaklığını değişmez bırakan orijine göre sekiz tane dönme inversiyonu vardır.*

Buraya kadar olan kısımda O_h ocatahedral grubun dokuz yansıma, yirmi üç dönme, altı dönme yansıma, sekiz dönme-inversiyon ve bir inversiyondan oluşmakta olduğu gösterilmiştir. Yani tetrakis hexahedron Öklidyen simetri grubu olduğu görülmektedir.

$\mathbb{R}^3_{TH}$ nin tüm izometrilerinin $T(3)O_h$ kümesinin elemanı olduğu aşağıdaki iki teoremle ifade edilmiştir.

Teorem 8.3 $f : \mathbb{R}^3_{TH} \to \mathbb{R}^3_{TH}$, $f(O) = O$ *özelliğinde bir izometri olmak üzere* $f \in O_h$ *dır.*

Teorem 8.4 *$f : \mathbb{R}^3_{TH} \to \mathbb{R}^3_{TH}$ dönüşümü bir izometri olsun. $f = T_A \circ g$ olacak şekilde bir tek $T_A \in T(3)$ ve $g \in G(TH)$ vardır.*

Buna göre $\mathbb{R}^3_{TH}$ ın izometri grubu O_h ocathedral grup ile $T(3)$ analitik 3-uzayın tüm ötelemelerinin grubunun yarı direkt çarpımıdır.

Ayrıca 4. ve 5. bölümlerde ayrıntılı olarak incelenen, bir Arşimed cismi olan icosidodecahedron ile bir Katalan cismi olan rhombic triacontahedron birbirinin duali olan cisimlerdir. $\mathbb{R}^3_{ID}$ ve $\mathbb{R}^3_{RT}$ nın izometri grupları I_h icosahedral grup ile $T(3)$ analitik $3-$uzayın tüm ötelemelerinin grubunun yarı direkt çarpımıdır.

6. bölümde incelenen disdyakis triacontahedron Arşimed cisminin duali olan Katalan cismi ise truncated icosidodecahedrondur. Disdyakis triacontahedron her bir yüzü çeşit kenar üçgen şeklinde olan 120 yüze, 180 ayrıta ve 62 köşeye sahip bir cisimdir. Truncated icosidodecahedron ise 30 kare, 20 düzgün altıgen ve 12 düzgün ongen şeklinde olan toplam 62 yüze 120 köşeye ve 180 ayrıta sahiptir. Her bir yüzü nokta simetrisine (ya da denk olarak $180°$ dönme simetrisine) sahip olduğundan bir zonohedrondur. Truncated icosidodecahedronu birim küre kabul eden metrik ve bu metrik ile ilgili çalışmalar devam etmektedir.

9. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu bölüme kadar, $\mathbb{R}^3$ te Arşimed cisimleri olarak isimlendirilen yarı düzgün çokyüzlüler ile bu cisimlerin duali olan Katalan cisimler olarak adlandırılan düzgün olmayan çokyüzlülerden ve bu cisimlerin bir çok bilim dalındaki kullanım alanlarından, uygulamalarından, matematiksel yapılarından bahsedilmiştir. Böylece $\mathbb{R}^3$ te bu cisimler hakkında detaylı bir inceleme yapılmıştır.

Daha önceden yapılan metrik geometri çalışmaları incelendiğinde, bazı Katalan cisimlerin bazı metriklerin birim küreleri olduğu görülmektedir. Bu çalışmada da daha önceden tanımlanmamış, birim küreleri cuboctahedron, truncated octahedron, icosidodecahedron, rhombic triacontahedron ve disdyakis triacontahedron olan metrikler bulunmuştur. Ayrıca bu cisimlerden bazıları Katalan bazıları da Arşimed cismidir. Sahip oldukları konveks yapıları ve simetri özelliklerinden dolayı bu cisimler matematiksel alanın dışında diğer bilim dalları için de geçmişten günümüze ilgi odağı olmuşlardır. Bu tezle, bulunan metriklerin kartezyen formları sayesinde Katalan ve Arşimed Cisimleri üzerinde, matematiksel olarak ve diğer bilim dalları açısından daha etkili ve kolay bir şekilde çalışılması öngörülmektedir.

Son olarak da bulunan bu metriklerle donatılmış analitik 3-uzayının izometri gruplarının ilgili uzayın birim küresi olan Katalan veya Arşimed cismin Öklidyen simetri grubu ile Öklidyen tüm ötelemelerin grubu olan $T(3)$ ün yarı direkt çarpımı olduğu gösterilmiştir.

Özetlemek gerekirse, bu tezde iki Katalan Cisim ve üç Arşimed Cisminin metrikleri ve bu metriklerle donatılmış 3-boyutlu uzayın izometri grupları belirlenmiştir. Ayrıca Öklidyen uzayda yapılan çalışmaların bu metriklerle donatılmış uzaylardaki uygulamaları ile ilgili sorular açık problemlerdir ve bu konuda çalışmalarımız devam etmektedir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Akça, Z. ve Kaya, R., 2004, On the Norm in Higher Dimensional Taxicab Spaces, Hadronic Journal Supplement, 19, 491-501.

Akça, Z. ve Kaya, R., 1997, On the Taxicab Trigonometry, Journal of Inst. of Math. &Comp. Sci., 10, 3, 151-159.

Akça, Z. ve Kaya, R., 2004, On The Distance Formulae in Three Dimensional Taxicab Space, Hadronic Journal, 27**,** 5, 521-532.

Alexandrov, A. D., 2000, Convex Polyhedra, Springer, 7-16p.

Atiyah, M. ve Sutcliffe, P., 2003, Polyhedra in Physics, Chemistry and Geometry, Milan Journal of Mathematics, 71:33-58.

Bayar, A. ve Ekmekçi, S., 2006, On the Chinese Checker Sine and Cosine Functions, Internationnal Journal of Mathematics and Analysis, 1, 3, 249-259.

Bozkurt, G., 2016, $\mathbb{R}^3$ de "Öklidyen, Taksi ve Çin Dama Metrikleri Ayrdımıyla oluşan Metrikler" Üzerine, PhD Thesis, Eskişehir Osmangazi University.

Bulgarean, V., 2013, The Group Isodp(Rn) with p 6 =2, Automation Computers Applied Mathematics Scientific Journal, 22-1:69-74.

Can, Z., Gelişgen, Ö. ve Kaya, R., 2015, On the Metrics Induced by Icosidodecahedron and Rhombic Triacontahedron, Scientific and Professional Journal of the Croatian Society for Geometry and Graphics (KoG), Vol.19, 17-23.

Can, Z., Çolak, Z. ve Gelişgen, Ö., 2015, A Note On The Metrics Induced By Triakis Icosahedron And Disdyakis Triacontahedron, Eurasian Academy of Sciences Eurasian Life Sciences Journal / Avrasya Fen Bilimleri Dergisi Vol.1, 1-11.

Catalan, Eugène, 1865, Memoriè sur la Thèorie des Polyèdres. J. I'Ecole Polytechnique, Paris, 41, 1-71.

Chen, G. , 1992, Lines and Circles in Taxicab Geometry, M.S. thesis, Department of Mathematics and Computer Science, Centered Missouri State University, 43p.

Coxeter, H. S. M., 1961, Introduction to Geometry, John Wiley&Sons Inst., 443p.

Cromwell, Peter R., 1997, Polyhedra, Cambridege Universıty Press,1-7p.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Çolakoğlu, H., B., 2009, Taksi, Maksimum, Çin Dama ve Alfa Düzlemlerinin Bazı Özellikleri ve Genelleştirilmesi, ESOGÜ , PhD Thesis.

Çolakoğlu, H., B. ve Kaya R., 2011, A generalization of some well-known distances and related isometries, Mathematical Communications, 16, 21-35.

Colakoğlu, H.B., Gelisgen, O. ve Kaya, R., 2013, Area formulas for triangle in alpha plane, Mathematical Communications, 18-1:123-132.

Erçınar, G.Z., 2015, Birim küresi Rhombic Dodecahedron Olan Metriğin Araştırılması, Master Thesis, Eskişehir Osmangazi University.

Ermiş, T., Gelisgen, O. ve Kaya, R., 2012, On Taxicab Incircle and Circumcircle of a Triangle, Scientific and Professional Journal of the Croatian Society for Geometry and Graphics (KoG), 16:3-12.

Ermiş, T., 2014, Düzgün Çokyüzlülerin Metrik Geometriler İle İlişkileri Üzerine , ESOGÜ , PhD Thesis.

Ermiş, T. ve Kaya, R., On the Isometries of 3-Dimensional Maximum Space, Konuralp Journal Of Mathematics, Vol.3, No.1, pp.103-114, 2015.

Field, J.V., 1997, Rediscovering the Archimedean Polyhedra: Piero della Francesca,Luca Pacioli, Leonardo da Vinci, Albrecht Dürer, Daniele Barbaro, and Johannes Kepler, Archive for History of Exact Sciences, 18. VI. 1997, Volume 50,Issue 3-4, pp 241-289)

Gelişgen, Ö. ve Kaya, R., 2006, Generalization of α-Distance to n-Dimensional Space, Scientific and Professional Journal of the Croatian Society for Geometry and Graphics (KoG), 10, 33-37.

Gelişgen, Ö. ve Kaya, R., 2006, CC – Analog of the Theorem of Pythagoras, Algebras, Groups and Geometries, 23, 2, 179-188.

Gelişgen,Ö., Kaya,R. ve Özcan,M., 2006, Distance Formulae in the Chinese Checker Space, International Journal of Pure and Applied Mathematical (IJPAM), 26, 1, 35-44.

Gelişgen, Ö. ve Kaya, R., 2006, On $\alpha-$Distance in Three Dimensional Space, Applied Sciences,8, 65-69.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Gelişgen, Ö., ve Kaya, R., 2015, The Isometry Group of Chinese Checker Space, International Electronic Journal of Geometry, Vol.8, No:2, 82-96.

Gelişgen Ö. , Kaya R., 2009, The Taxicab Space Group, Acta Mathematica Hungarica, Acta Mathematica Hungarica, Vol. 122, No.1 - 2, 187 - 200.

Gelişgen, Ö., ve Can, Z., 2015, On The Family of Metrics For Some Platonic And Archimedean Polyhedra, ESOGU preprint, 1-9.

Kaya, R., 2002, Analitik Geometri, Bilim ve Teknik Yayınevi, 439p.

Kaya, R., Gelişgen, Ö., Ekmekçi, S. ve Bayar, A., Group of Isometries of the CC-Plane, Missouri Journal of Mathematical Sciences, 01/2006, 18(3):221-233.

Kaya, R., Gelişgen, Ö., Ekmekçi, S. ve Bayar, A., On the Group of Isometries of the Plane with Generalized Absolute Value Metric, Rocky Mountain Journal of Mathematics, Volume 39, Number 2, 2009.

Koca, M., Koca N. ve Koç, R., 2010, Catalan solids derived from three-dimensional-root systems and quarternions, Journal of Mathematical Physics, 51:043501.

Krause, E.F., 1975, Taxicab Geometry, Addison - Wesley Publishing Company, Menlo Park, CA, 88p.

Milmann, R. S. ve Parker, G. D., 1991, Geometry a Metric Approach with Models, Springer, 370p.

Martin, G. E. , Transformation Geometry, Springer-Verlag, 1997.

Martin, G. E., 1998, The Foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane, Springer, 509p.

Milmann, R. S. ve Parker, G. D., 1991, Geometry a Metric Approach with Models, Springer, 370p.

Minkowski, H., 1967, Gesammelte Abhandlungen, Chelsa Publishing Co. New York, 836p.

Minkowski, H., 1896 sur les proprie'te's des nombers entiers qui sont de'rive'es de I'ntuition de I'espace, Nouvelles Annales de Mathe 'matiques, 3e Se'rie 15 (1896); aso in: Gesammelte Abhandlungen 1, Band XII, pp. 271:277.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Riemann, B., 1868, U" ber die Hypothensen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, Abh. ko¨nigl. Ges. Wiss. Go¨ttingen 13.

Salihova, S. , Maksimum Metrik Geometri Üzerine , ESOGÜ, PhD Thesis, 2006.

Schattschneider, D. J., 1984, The Taxicab Group, Amer. Math. Monthly 91, 423-428.

Schein, S ve Gayed J. M. , Feb. 25, 2014, Fourth Class Of Convex Equilateral Polyhedron With Polyhedral Symmetry Related To Fullerenes And Viruses , Proceeding Of The National Academy Of The Sciences Of The United States Of America , Vol. 111, No. 8, 2923

So, S.S., 2002, Recent Developments in Taxicab Geometry, Cubo Mathematica Educational, 4, 2, 79-96.

Stanley J. Schein, James Maurice Gayed, Proceedings of the National Academy of Sciences, Vol. 185 No. 6, March 22, 2014

Thompson, A. C., 1996, Minkowski Geometry, Cambridge University Press, 346p

Tian, S., 2005, Alpha Distance-A Generalization of Chinese Checker Distance and Taxicab Distance, Missouri Journal of Mathematical Sciences, 17, 1, 35-40.

http://anlamak.com/platon'un-beş-katı-cismi.html

https://en.wikipedia.org/wiki/Luca_Pacioli

http://cubemeister.com/polyhedra

https://en.wikipedia.org/wiki/Archimedean_solid

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Zeynep CAN

Uyruğu: T.C

Doğum Yeri, Tarihi: Eskişehir, 13.07.1982

Medeni Hali: Evli

İş Adresi: Aksaray Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, AKSARAY

E-posta: zeynepcan@aksaray.edu.tr

Eğitim Bilgileri

Doktora:

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı (2011-2016)

Yüksek Lisans:

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü (Cebir) (2004-2007)

Lisans

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü (2000-2004)

İş Deneyimi:

MAT-FKB Özel Gelişim Okulları Matematik Öğretmenliği (2007-2009)

Aksaray Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü (03.11.2009-)

Zeynep CAN