

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GÖZ HAREKETLERİNİN GEOMETRİSİ

Alper ÇAY

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2016

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Alper ÇAY tarafından hazırlanan " **Göz Hareketlerinin Geometrisi** " adlı tez çalışması 21/06/2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof.Dr.Yusuf YAYLI

Jüri Üyeleri:

Başkan: Prof. Dr. F. Nejat EKMEKÇİ
Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Yusuf YAYLI
Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Üye : Doç. Dr. Evren ZIPLAR
Çankırı Karatekin Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. İbrahim DEMİR
Enstitü Müdürü

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

21/06/2016

Alper ÇAY

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GÖZ HAREKETLERİNİN GEOMETRİSİ

Alper ÇAY

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof.Dr.Yusuf YAYLI

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmış ve tez konusu hakkında genel bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde, tezin diğer bölümlerinde kullanılacak olan ön bilgiler ve bazı kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde göz hareketlerinin pozisyonlarını belirlemede kullanılan temel tanımlar verilmiş ve bu hareketleri temsil etmek için başvurulmuş dönme matrisleri, kuaterniyonlar ve dönme vektörleri gibi matematiksel araçlar tanıtılmıştır.

Dördüncü bölümde göz hareketlerinin geometrisi üç boyutlu dönme uzayında ve onun bir alt manifoldu olan Listing manifoldu üzerinde incelenmiş, üç boyutlu dönme uzayının üzerindeki Riemann metrik elde edilerek bu metriktен de List üzerindeki Riemann metrik elde edilmiştir. Göz hareketlerini yöneten iki önemli kanun olan Listing ve Donder kanunları ifade edilmiş ve göz hareketlerinin Lie cebirindeki karşılıkları verilmiştir. Yine bu bölümde Mori ve Maeda'nın "üç boyutlu ortogonal eksenlerin bakış açıları ve görselleştirilmesi" adlı makalesinden alıntı yapılarak bakış açısına örnek verilmiş, bu örnek küre metriği kullanılarak da çözülmüş ve bakış açısı hareket cinsinden yorumlanmıştır.

Beşinci bölümde bu çalışmanın sonuçları ve önemli kullanım alanları üzerinde durulmuştur.

Haziran 2016, 39 sayfa

Anahtar Kelimeler: Sakkadik göz hareketleri, Dönmeler, Listing kanunu, Listing düzlemi, Kuaterniyonlar.

ABSTRACT

Master Thesis

GEOMETRY OF EYE MOVEMENTS

Alper ÇAY

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof.Dr.Yusuf YAYLI

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is devoted to the introduction and general information about the subject of the thesis.

In the second chapter, preliminaries and some definitions that will be needed for other section of the thesis are given.

In the third chapter, the basic definitions that are used in determination of the position of the eye movements are given, and some mathematical instruments are introduced such as rotation matrices, quaternions and rotation vectors that are taken as references to represent those movements.

In the fourth chapter, the geometry of the eye movements are examined on the three dimensional rotation space and on Listing manifold which is its submanifold, Riemannian metric that is on three dimensional space is derived and from this metric, Riemannian metric that is on the List is derived. Being the two important laws that govern the eye movements, Listing and Donder laws are expressed and the equivalents of the eye movements in Lie algebra are given. Again in this chapter by citing the article of Mori and Maeda called "Three visual angles of three dimensional orthogonal axes and their visualization" the visual angle is exemplified, this example is analyzed by also using sphere metric and the visual angle is interpreted in terms of movement.

In the fifth chapter, the result of this study and some important usage areas are deliberated.

June 2016, 39 pages

Key Words: Saccadic eye movements, Rotations, Listing's law, Listing's plane, Quaternions.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasında beni yönlendiren, araştırmalarımın her aşamasında bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyerek çalışmanın ilerlemesine katkıda bulunan danışman hocam Sayın Prof.Dr.Yusuf YAYLI (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'ya, destekleriyle hep yanımda olan hocalarım Sayın Doç.Dr.İsmail GÖK (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'e ve Sayın Prof.Dr.Nejat EKMEKÇİ (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'ye teşekkürlerimi sunarım. Tezin yazılması sürecinde yardımlarına başvurduğum Beyhan YILMAZ, Derya KAHVECİ, Çağla RAMİS, Osman ATEŞ ve Erdem KOCAKUCAKLI' ya emeklerinden dolayı teşekkürü bir borç bilirim. Derslere gidiş gelişlerimde gösterdikleri kolaylıktan dolayı Daire Başkanım Sayın Veli ALTUNDAĞ'a, koordinatörüm Sayın Hasan YILMAZ'a ve mesai arkadaşlarıma çok teşekkür ederim. Bu yola çıkmama vesile olan Sayın Prof.Dr.Fahrettin ASLAN'a da ayrıca teşekkür ederim. Binbir fedakarlıkla bizi topluma kazandıran, hakları ödenmez olan sevgili anne babama da ne kadar teşekkür etsem azdır. Kız kardeşlerime de destek ve ilgilerinden ötürü teşekkür ederim. Son olarak yine bu yola çıkmama vesile olan ve bu uzun süreçte gösterdiği her türlü fedakarlık ve sabırdan dolayı sevgili hayat arkadaşım F.Rahşan OSKAYÇAY'a da en derin minnettarlıklarımı sunarım.

Alper ÇAY
Ankara, Haziran 2016

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI

ETİK	i
ÖZET	ii
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
3. GÖZ HAREKETLERİNİN KİNEMATİK PRENSİPLERİ.....	5
3.1 Dönmeler ve Temsilleri	5
3.1.1 Dönme matrisleri.....	6
3.1.2 Kuaterniyonlar	10
3.1.3 Dönme vektörleri (Rotasyonel vektörler)	12
4. GÖZ HAREKETLERİNİN GEOMETRİSİ.....	14
4.1 Notasyon ve Terminoloji.....	15
4.2 List Üzerindeki Riemann Metrik	23
4.3 Bakış Açısının Küre Metriği Ve Hareket Cinsinden Yorumu.....	28
4.3.1 Üç boyutlu ortogonal eksenlerin bakış açıları.....	28
4.3.2 Üç boyutlu ortogonal eksenlerin bakış açıları yasası.....	29
4.3.3 Bakış açısının hareket cinsinden yorumlanması.....	34
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	37
KAYNAKLAR.....	38
ÖZGEÇMİŞ.....	39

SİMGELER DİZİNİ

g	Bilineer form
R	Dönme matrisi
r	Dönme vektörü
Q	Kuaterniyonlar uzayı
S^n	n -boyutlu hiper küre
$\angle oAPB$	O bakış noktasından $\angle APB$ açısının görüs açısı
$\mathbb{RP}^n$	Projektif uzay
R_x	Sağ öteleme
L_x	Sol öteleme

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1 Baş ve göz sabit sağ el koordinat sistemleri (Polpitiya ve Ghosh tarihsiz)	6
Şekil 3.2 Gözün referans pozisyonu a dan b ye θ açılık dönmesi (Haslwanter 1995)	7
Şekil 3.3 Üç boyutlu göz pozisyonunun bir vektör ile tasviri (Haslwanter 1995).....	10
Şekil 4.1 Göz primer bakış yönünde baş sabitken Listing düzlemi(Ghosh vd. 2014)..	15
Şekil 4.2 Gövde sabit, baş primer pozisyonda iken Donder yüzeyi (Ghosh vd. 2014).	23
Şekil 4.3 Bakış açısının tanımı (Mori ve Maeda 2005)	28
Şekil 4.4 $\angle AOB$ açısının bakış açısı $\angle V$ küresel açısıdır (Mori ve Maeda 2005).....	29
Şekil 4.5 Birim küre üzerindeki a,b,c bakış açıları (Mori ve Maeda 2005).....	30
Şekil 4.6 Bakılan açı ve bakış açısı.....	34

1. GİRİŞ

Gözleri hareket ettiren sistemin (okulomotor sistem) modellenmesi ve kontrolü 19.yy dan beri bilim insanlarının dikkatini çekmektedir. Konu üzerine yapılan ilk çalışmalardan bazıları Listing, Helmholtz ve Donder gibi seçkin bilim insanları tarafından yürütülmüştür. Bu bilim insanları başın sabit olduğu durumlarda okulomotor sistemin üç serbestlik derecesinin tamamını seçmediğini, buna karşılık kısıtlanmış bir dönme uzayında hareket ettiğini gözlemlemişlerdir. Bununla birlikte gözler belli fizyolojik sınırlar içerisinde üç serbestlik derecesi ile dönebilir fakat baş sabitken böyle yapmazlar. Bu olgu göz için "Listing kanunu" olarak adlandırılır. Listing kanunu gözün dönme eksenlerinin primer bakış yönünden uzakta "Listing düzlemi" olarak adlandırılan sabit bir düzlemde yattığını ifade eder. Listing kanunu aynı zamanda bakış yönünün tamamıyla göz oryantasyonunu belirlediğini vurgular. Bu kısıtlanmış dönme uzayını "List" olarak isimlendireceğiz ki bu uzay gözlerin doğal konfigürasyon uzayı olan $SO(3)$ ün bir alt manifoldudur.

İnsan baş ve gözünün dönme hareketi dış torklar tarafından faaliyete geçirilen mükemmel bir küre olarak modellenir. Özellikle gözler altı extraoküler kas tarafından hareket ettirilir. Gözlerin dönme hareketlerinin yanısıra az da olsa bir öteleme hareketi de mevcuttur fakat dikkate alınmaz. Dönme merkezi sabit kabul edildiğinden gözler altı değil üç serbestlik derecesine sahiptir. Bu tezde göz hareketleri başın sabit ve hareketsiz olduğu durumlarda sunulmuştur. Baş hareketleri için, dönme eksenleri 19.yy da Donder tarafından bulunan ve "Donder kanunu" olarak isimlendirilen bir kanunla "Donder yüzeyi" denilen eyer şekilli bir kümeye kısıtlanır. Donder yüzeyi , Listing düzleminin torsiyonel yön boyunca hafife bozulmasıyla elde edilir. Sakkadik ya da hızlı göz hareketleri olarak tanımlanabilecek ve bakılan nesnelerin görüntüsünün gözün görme merkezi olan "fovea" ya düşmesini sağlayan hareketler için Donder kanunu Listing kanununa indirgenir. Bir başka deyişle Donder kanunu Listing kanunun genelleştirilmiş olarak görülebilir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde tezin sonraki bölümlerinde kullanılacak olan ön bilgiler ve bazı temel kavramlara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde göz hareketlerinin incelenmesi ve araştırılmasında kullanılan matematiksel araçlardan olan dönme matrisleri, kuaterniyonlar ve dönme vektörleri verilmiştir.

Dördüncü bölümde göz hareketlerinin geometrisi $SO(3)$ üzerinde ve bunun alt manifoldu olan Listing manifoldu üzerinde incelenmiş ve $SO(3)$ üzerindeki Riemann metrik elde edilerek bu metriktan List üzerindeki metrik elde olunmuştur. Göz hareketlerini yöneten iki önemli kanun olan Listing ve Donder kanunları ifade edilmiş ve göz hareketlerinin Lie cebirindeki karşılıkları verilmiştir. Bu bölümde ayrıca Mori ve Maeda'nın "Ortogonal eksenlerin bakış açıları ve bunların görselleştirilmesi" isimli makalesinde tanımlanan bakış açısına bir örnek verilmiş ve bakış açısı makalede verilen bakış açısı formülünün yanısıra küre metriği kullanmak gibi farklı yöntemlerle hesaplanmıştır. Son olarak bakış açısının hareket cinsinden bir yorumuna yer verilmiştir.

Beşinci bölümde bu çalışmanın sonuçları ve önemli kullanım alanları verilmiştir. İnsan gözünün kinematığı 20.yy'ın ikinci yarısına doğru yeniden ilgi bulmuş ve fizik ve tıpta yoğun bir şekilde araştırılmaya başlanmıştır. Göz hareketlerinin doğasını veya daha genel manada baş ve göz koordinasyonunu anlamak insan benzeri robotik baş/göz inşaa etmekte ve göz hastalıklarının tedavisinde yardımcı olacaktır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1 (Sakkadik Göz Hareketleri veya Sakkade): İlgiilenilen nesneleri görme alanının merkezine getiren kısa ve hızlı göz hareketlerine "Sakkade" veya "Sakkadik Göz Hareketleri" denir (Handzel ve Flash 1996). Normal bir görüşte her seviye birkaç sakkade gerçekleşir ve sakkadeler sırasında görsel bilgi alınmaz (<https://en.wikipedia.org>, 2016).

Tanım 2.2 (Sabitlemeler): Gözün sakkadeler arasındaki duraklama noktalarına "Sabitlemeler (Fiksasyonlar)" denir. Görme sakkadeler arasındaki sabitlemelerde alınan bilgiye bağlıdır (Findlay ve Walker 2016).

Tanım 2.3 (Okulomotor Sistem): Göz yuvarlarının hareketlerini kontrol eden sisteme "Okulomotor Sistem" denir. Okulomotor sistemin ana görevi görüntüleri görme alanının merkezine düşürmektir (www.sharp-sided.org, 2016).

Tanım 2.4 (Konfigürasyon Uzayı Ve Serbestlik Derecesi): Mümkün olan bütün konfigürasyonlara "Konfigürasyon Uzayı" denir. Verilen bir nesnenin konfigürasyonu n parametre ile belirleniyorsa nesne " n serbestlik derecesine sahiptir" denir. Kısacası serbestlik derecesi konfigürasyon uzayının boyutu olarak tanımlanır. 3 boyutlu bir uzayda katı bir nesne 6 serbestlik derecesine sahiptir. Bunlardan üçü konumu, üçü de yönü belirler (Şahin 2012).

Tanım 2.5 (Genel Lineer Grup): Bir F cisim üzerinde determinantı sıfırdan farklı olan $n \times n$ matrislerin cümlesinin matris çarpma işlemine göre oluşturduğu gruba "Genel Lineer Grup" denir ve $GL(n, F)$ ile gösterilir (Hacısalıhoğlu 1996).

Tanım 2.6 (Ortogonal Grup): $O(3) = \{A \in GL(3) : A^T.A = A.A^T = I\}$ cümlesi standart matris çarpımı ile bir gruptur. Bu gruba "Ortogonal Grup" denir (Doğan 2009).

Tanım 2.7 (Özel Ortogonal Grup): $O(3)$ ortogonal grubunun bir alt grubu olarak tanımlanan $SO(3) = \{R \in GL(3) : R^T R = R R^T = I, \det(R) = 1\}$ grubuna $O(3)$ ortogonal grubu içinde "Özel Ortogonal Grup" denir (Doğan 2009).



3. GÖZ HAREKETLERİNİN KİNEMATİK PRENSİPLERİ

Nörobilim aksiyomatik olarak organize edilseydi Öklid geometrisi veya Newton fiziğine benzer şekilde Okulodinamiğin ilk kanunu gözün katı bir cisim olarak 3 serbestlik derecesi ile döndüğü olurdu (Fetter vd. 1997).

3.1 Dönmeler ve Temsilleri

Göz pozisyonlarını tasvir edebilmek için ilk önce gözün bazı pozisyonlarını tanımlamak gerekir

Tanım 3.1 (Referans Göz Pozisyonu): Baş dik ve sabit ve bakılan nesne tam karşıda iken gözlerin pozisyonuna "Referans Göz Pozisyonu" denir. (Polpitiya ve Ghosh tarihsiz). Referans göz pozisyonu "Primer Pozisyon" olarak da isimlendirilir.

Tanım 3.2 (Anlık Göz Pozisyonu): Gözün referans pozisyonundan 3 - boyutlu bir dönme sonrası aldığı pozisyona "Anlık Göz Pozisyonu" denir (Polpitiya ve Ghosh tarihsiz).

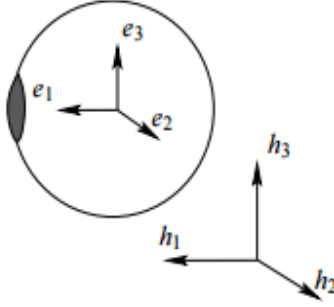
Tanım 3.3 (Sekonder Pozisyon):Gözün primer pozisyonundan baş - sabit yatay veya düşey eksen etrafında döndüğünde ulaştığı pozisyona " Sekonder Pozisyon" denir (Quaia ve Optican 2001).

Tanım 3.4 (Üçüncül Pozisyon): Gözün yatay veya düşey meridyenden uzaktaki dönüşü " Üçüncül (tertiary) Pozisyon" olarak adlandırılır (Quaia ve Optican 2001).

Teorem 3.1 Her göz pozisyonuna referans pozisyonundan sabit bir eksen etrafındaki tek bir dönme ile ulaşılabilir (Euler 1775).

3.1.1 Dönme matrisleri

3 boyutta hareketi tanımlamak için ilk önce baş - sabit $\{h_1, h_2, h_3\}$ ve göz - sabit $\{e_1, e_2, e_3\}$ sağ el koordinat sistemini kurmak gerekir (Şekil 3.1).



Şekil 3.1. Baş ve göz sabit sağ el koordinat sistemleri (Polpitiya ve Ghosh tarihsiz)

Göz referans pozisyonunda iken h_1 bakış doğrusu ile h_2 interaural eksen (kulaklardan geçen eksen) ve h_3 düşey eksen ile çıkarılır. Göz referans pozisyonunda iken göz - sabit koordinat sistemi ile baş - sabit koordinat sistemi çakışık haldedir. (Polpitiya ve Ghosh, tarihsiz, şekil 3.2 a) $R \in SO(3)$ ve $1 \leq i \leq 3$ olmak üzere referans pozisyonundan herhangi yeni bir pozisyona göz - sabit koordinat sisteminin yatay dönmesi şekil 3.2 b de gösterildiği gibi

$$e_i = R.h_i$$

eşitliği ile verilir.

e_i vektörlerinin bileşenleri baş - sabit koordinat sistemi $\{h_1, h_2, h_3\}$ ile bağlantılı olarak ifade edilir ve R dönme matrisi gözüün yöneliminden bağımsız olarak uzayda sabit bir eksen etrafındaki bir dönmeyi tasvir eder ve anlık göz pozisyonunu tamamiyle belirler (Haslwanter 1995).

Tanım 3.5 (Pür Yatay Göz Hareketi): h_3 eksen etrafındaki θ açılılık dönmeye "Pür Yatay Göz Hareketi" denir ve bu dönmeye karşılık gelen matris

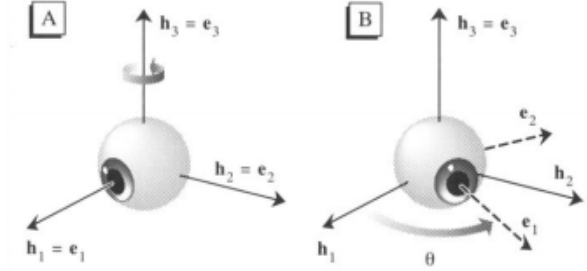
$$R_3(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ile verilir (Haslwanter 1995).

Tanım 3.6 (Pür Düşey Göz Hareketi): h_2 eksenini etrafındaki ϕ açılıklı dönmeye "Pür Düşey Göz Hareketi" denir ve bu dönmeye karşılık gelen matris

$$R_2(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix}$$

ile verilir (Haslwanter 1995).



Şekil 3.2. Gözün referans pozisyonu a dan b ye θ açılıklı dönmesi (Haslwanter 1995)

Bir boyutlu hareketler için göz - sabit veya baş - sabit eksenler etrafında yapılan dönmeler arasında ayırım yoktur. Çünkü göz - sabit ve baş - sabit koordinat sistemleri göz referans pozisyonunda iken çakışık ve gözü etrafında döndüğü eksen göz - sabit ve baş - sabit sistemde aynıdır (Haslwanter 1995).

Tanım 3.7 (Pür Torsiyonal Göz Hareketi): h_1 eksenini etrafındaki ψ açılıklı dönmeye "Pür Torsiyonal Göz Hareketi" denir ve bu dönmeye karşılık gelen matris

$$R_1(\psi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix}$$

ile verilir (Haslwanter 1995).

Bu tanımlarla birlikte pozitif θ, ϕ ve ψ değerleri sol yönlü, aşağı yönlü ve saat ibresi yönündeki göz hareketlerine karşılık gelir (Haslwanter 1995).

Tanım 3.8 (Aktif Dönmeler): 3 boyutta baş - sabit eksenler etrafındaki dönmeler genellikle "Aktif Dönmeler" veya "Nesnenin Dönmesi" olarak isimlendirilirler. Ardışık dönmelerin ardışık eksenleri nesnenin önceki dönmelerinden etkilenmezler (Haslwanter 1995).

Tanım 3.9 (Pasif Dönmeler): 3 boyutta göz - sabit eksenler etrafındaki dönmeler genellikle "Pasif Dönmeler" veya "Koordinat Sisteminin Dönmesi" olarak isimlendirilirler. Her bir dönme sonraki dönmelerin etrafında gerçekleşeceği koordinat eksenlerini değiştirir (Haslwanter 1995).

Gözün iyi tanımlanmış bir sırada yatay ve dikey hareketlerinin bileşimi bakış doğrultusunu tek bir biçimde karakterize etmekle birlikte gözün üç boyuttaki pozisyonunu tamamen belirlemek için bakış doğrultusu etrafındaki torsiyon hareketinin de belirtilmesi gerekir (Haslwanter 1995).

Tanım 3.10 (Gimbal Sistemler): Göz pozisyonunu tanımlamak için üç göz dönmesinin bileşimini kullanan sistemler genellikle pasif dönmeleri kullanırlar. Koordinat sistemlerinin bu türden dönmeleri "Gimbal Sistemler" denilen ve pasif dönmeler hiyerarşisinin otomatik olarak uygulandığı düzenekler kullanılarak kolay bir şekilde tanımlanabilir (Haslwanter 1995).

Tanım 3.11 (Fick Dizileri ve Fick Açıları): Sırasıyla yatay, düşey ve son olarakta torsiyonal dönmelerin gerçekleştirildiği dönme serilerine dönmelerin "Fick Dizileri" denir ve ilk olarak Fick tarafından kullanılmıştır. Belirtilen sırayla bu dönmelere karşılık gelen θ, ϕ ve ψ açılarına "Fick Açıları" denir (Haslwanter 1995).

Bir Fick dönme dizisine karşılık gelen dönme matrisi

$$R_{Fick} = R_3(\theta_F).R_2(\phi_F).R_1(\psi_F)$$

şeklindedir.

Fick gimballi düşey eksen içine yuvalanmış yatay bir eksene sahiptir. Buradaki dönmelerin sırası keyfidir ve farklı bir dönme serisi ile değiştirilebilir. Von Helmholtz (1866) dönmenin yatay eksen etrafındaki dönmeye başlamasının daha iyi olabileceğini düşünmüştür. Başın yalpalama hareketindeki değişimler gözün yatay hareketinin tanımını güçleştirirken gözün düşey hareketi, interaural eksen etrafındaki göz hareketi olarak kolay bir şekilde tanımlanabilir (Haslwanter 1995).

Tanım 3.12 (Helmholtz Dizileri): Sırasıyla düşey, yatay ve son olarakta torsiyonal dönmelerin gerçekleştirildiği dönme serilerine dönmelerin "Helmholtz Dizileri" denir (Haslwanter 1995).

Bir Helmholtz dönme dizisine karşılık gelen dönme matrisi

$$R_{Helmholtz} = R_2(\phi_H).R_3(\theta_H).R_1(\psi_H)$$

şeklindedir.

Helmholtz gimballi yatay eksen içinde yuvalanmış düşey eksene sahiptir. Göz pozisyonunun R dönme matrisi tarafından karakterize edildiği ve R_{Fick} ve $R_{Helmholtz}$ matrislerinin aynı dönme matrisinin farklı parametizasyonlarını verdiğine dikkat edilmelidir (Haslwanter 1995).

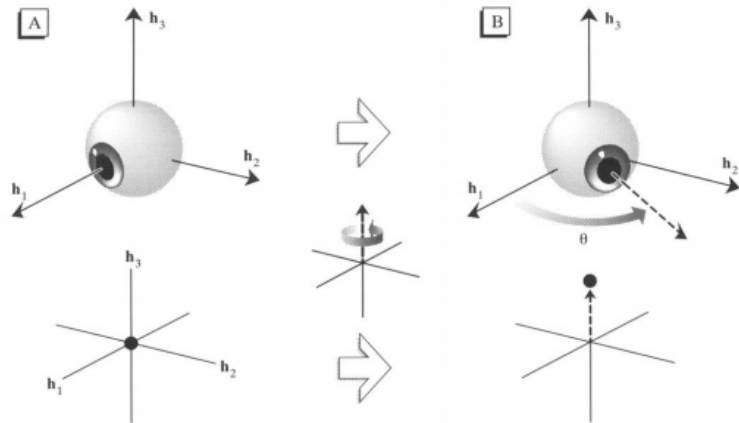
Tanım 3.13 (Retinal Horizon): Gözün dönme merkezinden geçen yatay düzleme "Retinal Horizon" denir. Bu düzlem $\{e_1, e_2, e_3\}$ göz -sabit sisteminde e_1e_2 düzlemidir ve bu düzlem göz ile hareket eder (Zatsiorsky 1998).

Tanım 3.14 (False Torsiyon): Retinal horizon ile dış uzayın gerçek horizon düzlemi arasında kalan açıya "False Torsiyon" denir (Zatsiorsky 1998).

Gözün sekonder pozisyonlarında false torsiyon sıfırdır. Fakat gözün üçüncül pozisyonlarında (tertiary pozisyon) false torsiyon sıfırdan farklıdır. Fick gimballerinde hem torsiyon (aktüel torsiyon) hem de false torsiyon sıfıra eşittir. Helmholtz gimballerinde ise bir false torsiyon oluşur (Zatsiorsky 1998).

3.1.2 Kuaterniyonlar

Bir göz dönmesini karakterize etmenin daha etkin bir yolu yönü dönme eksenini tarafından verilen ve uzunluğu dönmenin açısal ölçümü ile orantılı olan bir vektör kullanmaktır Şekil 3.3.a'da üstte göz referans pozisyonunda ve bu pozisyon alttaki sıfır vektörüne karşılık gelmektedir. Şekil 3.3.b'de göz h_3 ekseninde yatay olarak dönerek anlık bir pozisyona ulaşıyor. Bu pozisyon h_3 ekseninde boyuna uzunluğu dönme açısı ile orantılı bir vektör ile altta temsil edilmektedir. Göz pozisyonu tüm vektörle değil de sadece vektörün bitim noktası ile tasvir edilmektedir.



Şekil 3.3. Üç boyutlu göz pozisyonunun bir vektör ile tasviri (Haslwanter 1995)

Böyle bir vektör sadece 3 parametrelidir ve dönmelerin ardışık çarpımlarını içermez. Vektörün yönlendirilmesi sağ el kuralı ile verilir yani sola, aşağı veya saat yönündeki bir göz hareketi sırasıyla yukarıyı, solu veya ileri gösteren bir vektörle tasvir edilir. Bu tanımlamada torsiyon bakış doğrultusu etrafındaki bir dönme olarak tanımlanmaz fakat total göz pozisyonunu karakterize eden vektörün h_1 bileşeni olarak tanımlanır. Dönmelerin bu tarz iki tür tarifi okulomotor literatürde kuaterniyonlar ve dönme vektörleri olarak sunulur (Haslwanter 1995).

Tanım 3.15 (Kuaterniyonlar): Bir n eksenini etrafında θ derecelik bir dönmeyi tek bir şekilde karakterize eden q kuaterniyonu

$$I = \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$q = q_0 + q_1 \cdot \vec{i} + q_2 \cdot \vec{j} + q_3 \cdot \vec{k} = q_0 + \mathbf{q}I$$

şeklinde verilir ve q kuaterniyonun skaler ve vektörel kısımları sırasıyla $s_q = \text{scal}(q) =$

q_0 , $v_q = \text{vec}(q) = q_1 \cdot \vec{i} + q_2 \cdot \vec{j} + q_3 \cdot \vec{k}$ olmak üzere $q = s_q + v_q$ şeklinde ifade edilir.

Burada i, j, k birimleri

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, i \cdot j = k, j \cdot i = -k, j \cdot k = i, k \cdot j = -i, k \cdot i = j, i \cdot k = -j$$

eşitliklerini sağlar.

s_q ve v_q aşağıdaki özellikleri sağlar;

i) $s_q = \cos(\theta/2)$

ii) $\|v_q\| = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} = \sin(\theta/2)$

iii) v_q , n dönme eksenine paraleldir.

v_q , şekil 3.3 b' de gösterilen göz pozisyonunu tarif eder (Haslwanter 1995).

Tanım 3.16 (Birim Kuaterniyon): Tanım 3.1.15'teki özellikleri sağlayan q kuaterniyonu için $\|q\| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} = 1$ dir ve q , "Birim Kuaterniyon" olarak isimlendirilir. Bir kuaterniyon birim kuaterniyon değilse bileşimli bir dönmeyi temsil eder (Haslwanter 1995).

Tanım 3.17 (Birim Kuaterniyonun Tersi): Bir q birim kuaterniyonun tersi $q^{-1} = s_q - v_q$ ile verilir (Haslwanter 1995).

Tanım 3.18 Bir q kuaterniyonu ve bir R dönme matrisinin her ikisi de bir x vektörünün bir n eksen etrafında θ açılık dönmelerini tasvir ederler ve aralarındaki ilişki

$$q \circ (x.I) \circ q^{-1} = (R.x).I$$

ile verilir. Eşitliğin sol tarafı tamamen kuaterniyonlardan oluşmasına rağmen skaler kısım 0 olarak değerlendirilir (Haslwanter 1995).

Tanım 3.19 p ve q kuaterniyonlarının çarpımı

$$pq = s_p.s_q - \langle \vec{v}_p, \vec{v}_q \rangle + s_p.\vec{v}_q + s_q.\vec{v}_p + \vec{v}_p \wedge \vec{v}_q$$

şeklinde tanımlanır ve $p \times q \neq q \times p$ dir. Bu yüzden $p \times q$ ve $q \times p$ kuaterniyonları gözün farklı yönelimlerine karşılık gelir (Haslwanter 1995).

3.1.3 Dönme vektörleri (Rotasyonel vektörler)

Bir birim kuaterniyonun skaler kısmı dönme vektörleri kullanarak yok edilebilir.

Tanım 3.20 (Dönme Vektörü): Bir n eksenı etrafında θ açılık bir dönmeı tasvir eden bir q kuaterniyonuna karşılık gelen r dönme vektörü

$$r = \frac{v_q}{s_q} = \tan(\theta/2) \cdot \frac{v_q}{\|v_q\|} = \tan(\theta/2) \cdot n$$

eşitliğı ile verilir (Haslwanter 1995).

Tanım 3.21 Bir r dönme vektörü ile bir R dönme matrisi arasında

$$r = \frac{1}{1 + (R_{11} + R_{22} + R_{33})} \cdot \begin{pmatrix} R_{32} - R_{23} \\ R_{13} - R_{31} \\ R_{21} - R_{12} \end{pmatrix}$$

eşitliğı vardır (Haslwanter 1995).

Tanım 3.22 : r_q ve r_p dönme vektörlerinin çarpımı

$$r_q \circ r_p = \frac{r_q + r_p + r_q \wedge r_p}{1 - r_q \cdot r_p}$$

ile verilir (Haslwanter 1995).

4. GÖZ HAREKETLERİNİN GEOMETRİSİ

Bu bölümde göz hareketlerinin kısıtlandığı konfigürasyon uzayı olan Listing Uzayının geometrisi analiz edilecektir. Gözün dönme hareketini sağlayan altı kasın tam bir koordinasyon içinde çalışabilmesi çeşitli göz hastalıklarının tedavisinde önemli bir konudur. Diğer kompleks insan hareket sistemleri ile karşılaştırıldığında gözlerin 3 - serbestlik derecesi ile dönmesi gözlerin bu sistemlere nazaran daha basit bir sistem olarak ele alınmasını kolaylaştırmıştır (Polpitiya vd. 2004). Örneğin 2-boyutlu insan yürüyüşünü inceleyebilmek için 24 kas ve tendonu gözönüne almak gerekir (Nielsen 2003). Burada yapılan analizde gözlerin sadece dönme hareketleri ele alınacaktır. Bu hareketlerin yanısıra gözlerin düşük düzeyde de olsa başa göre öteleme hareketi de mevcuttur (Bolina ve Monteiro 1998).

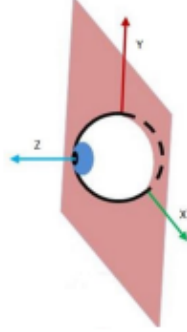
Gözleri mükemmel küreler olarak kabul edersek 3×3 lük dönme matrislerinin uzayı olan $SO(3)$ gözlerin doğal konfigürasyon uzayıdır. Fakat fizyolojik açıdan bakıldığında gözün sadece bakış doğrultu vektörü birinci derecede önemlidir. Gözün herbir bakış yönüne konfigürasyon uzayında dönme matrisleri karşılık gelir. Fakat burada belirli bir bakış yönü için hangi dönme matrisinin kullanılacağı konusunda bir belirsizlik vardır. Bu belirsizliğe Listing Kanunu kesin bir cevap verir (Polpitiya vd. 2004).

Tanım 4.1 (Listing Kanunu): Tüm dönme matrislerinin dönme eksenleri standart (ya da frontal) bakış doğrultusuna diktir (Polipitiya 2004).

Listing, göz dönmelerinin 2 serbestlik derecesine kısıtlandığını ve gözlerin oryantasyonunun gözlerin bakış yönü tarafından belirlendiğini gözlemlemiştir (Ghosh vd. 2014).

Tanım 4.2 (Listing Düzlemi): Primer pozisyondan uzakta, gözün tüm mümkün oryantasyonları gözün bir dönme eksenine etrafında döndürülmesi ile elde edilir ve bu eksenler "Listing Düzlemi" adı verilen sabit bir düzleme kısıtlanmıştır (Ghosh vd.

2014). Bu düzlem şekil4.1’de gösterilmektedir.



Şekil 4.1. Göz primer bakış yönünde baş sabitken Listing düzlemi (Ghosh vd. 2014)

Böylece gözlerin hareketleri gözlerin doğal konfigürasyon uzayı olan $SO(3)$ nün kısıtlanmış 2 - boyutlu alt manifoldu olan Listing uzayında ele alınabilir. Listing uzayı incelenirken şu varsayımlarda bulunulacaktır:

- Göz mükemmel bir küredir.
- Bütün göz hareketleri Listing kanununa uyar.

İkinci varsayımımızın hareketin sadece başlangıç ve bitiş noktalarında değil tüm göz hareketi boyunca geçerli olduğuna dikkat edilmelidir (Polpitiya vd. 2004).

4.1 Notasyon ve Terminoloji

Kuaterniyonlar uzayı Q ile gösterilir ve her $a \in Q$ kuaterniyonu

$$a = a_0 \vec{1} + a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$$

şeklinde yazılabilir ve

$$Scal(a) = a_0, Vec(a) = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$$

ile ifade edilir. Vektörel kısım $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ ile özdeşleştirilebilir. O zaman

$$\begin{aligned} Vec & : Q \longrightarrow \mathbb{R}^3 & ve & Scal : Q \longrightarrow \mathbb{R} \\ a & \longrightarrow (a_1, a_2, a_3) & & a \longrightarrow a_0 \end{aligned}$$

olarak yazılabilir (Polpitiya vd. 2004).

Tanım 4.3 (S^3 Birim Küresi):

$$S^3 = \{(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^4 \mid a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1\}$$

şeklinde tanımlı küreye $\mathbb{R}^4$ uzayının S^3 birim küresi denir. Birim kuaterniyonlar uzayı S^3 birim küresi ile özdeşleştirilir. O zaman S^3 birim küresi

$$S^3 = \left\{ q = a_0 + a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k} \mid q \times \bar{q} = 1 \right\}$$

şeklinde yazılabilir (Polpitiya vd. 2004).

Tanım 4.4 (Kuaterniyonun Ekseni): $\alpha \in [0, \pi]$ ve $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{R}^3$ te bir birim vektör olmak üzere her $q \in S^3$ birim kuaterniyonu

$$q = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \vec{1} + \vec{n} \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\vec{n}$ birim vektörüne "Kuaterniyonun Ekseni" ya da "Dönme Ekseni" denir (Polpitiya vd. 2004).

Tanım 4.5 S^3 birim kuaterniyonlar cümlesi ile $SO(3)$ arasındaki standart dönüşüm $rot : S^3 \longrightarrow SO(3)$ ile gösterilir ve bu dönüşüm q birim kuaterniyonunu $\vec{n}$ ekseni etrafında saatin tersi yönünde α açılık bir dönmeye dönüştürür. Bu dönüşüm

$$rot(q)(v_1, v_2, v_3) = vec(q \cdot (v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k}) \cdot q^{-1})$$

şeklinde veya

$$Q = rot(q) = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 \cdot q_2 - q_0 \cdot q_3) & 2(q_1 \cdot q_3 + q_0 \cdot q_2) \\ 2(q_1 \cdot q_2 + q_0 \cdot q_3) & q_0^2 + q_2^2 - q_1^2 - q_3^2 & 2(q_2 \cdot q_3 - q_0 \cdot q_1) \\ 2(q_1 \cdot q_3 - q_0 \cdot q_2) & 2(q_2 \cdot q_3 + q_0 \cdot q_1) & q_0^2 + q_3^2 - q_1^2 - q_2^2 \end{bmatrix}$$

ile verilir (Polpitiya vd. 2004).

Buradaki Q matrisi katı cismin anlık oryantasyonunu temsil eder. Q nun kolonları ortonormaldir ve bunlar dönen cisme iliştilirilmiş koordinatlar olarak yorumlanabilir ve üçüncü kolonun dönen cisim göz iken bakış yönü olduğu kabul edilir. Yukarıda verilen rot dönüşümü örtendir fakat 1 - 1 değildir. Çünkü q ve $-q$ nun görüntüleri aynıdır (Ghosh vd. 2014).

Teorem 4.1 Listing manifoldu $\mathbb{RP}^2$ projektif uzayına difeomorfiktir (Polpitiya vd. 2004).

Her bir oryantasyon $SO(3)$ üzerindeki bir nokta olarak görülebileceğinden göz hareketleri $SO(3)$ dönme uzayındaki yörüngeler olarak tasvir edilebilir. $SO(3)$ deki noktaların parametizasyonu rot dönüşümü vasıtasıyla $\mathbb{R}^4$ teki birim küre S^3 ün parametizasyonundan yukarıda olduğu gibi kolayca elde edilebilmektedir (Ghosh vd. 2014).

Tanım 4.6 (Riemann Metriği ve Riemann Manifoldu): M bir diferensiyellenebilir manifold ve manifold üzerindeki diferensiyellenebilir vektör alanlarının kümesi $\chi(M)$ olsun. Bu durumda

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$

ile tanımlı g bilinear formu simetrik ve pozitif tanımlı ise , yani $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$(a) \ g(X, Y) = g(Y, X)$$

$$(b) \ g(X, X) \geq 0 \text{ ve } \forall X \text{ için } g(X, X) = 0 \iff X = 0$$

şartları sağlanıyorsa g formuna "Riemann Metriği" veya " Metrik Tensör" adı verilir. Bu durumda (M, g) ikilisine "Riemann Manifoldu" denir (Şahin 2012). M bir Riemann manifoldu ise her $T_p M$ için $p \in M$ üzerinde bir $\langle, \rangle_p$ iç çarpımı vardır.

Tanım 4.7 (Lie Grup): G bir grup ve $x, y \in G$ olmak üzere $f : G \times G \longrightarrow G$ ye $(x, y) \longrightarrow x.y^{-1}$ ile verilen dönüşüm diferensiyellenebilir olacak biçimde, bir diferensiyellenebilir yapıyla birlikte verilen G grubuna "Lie Grubu" denir (Do Carmo 1992). Burada G diferensiyellenebilir bir manifolddur. Örneğin; $GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det(A) \neq 0\}$ standart matris çarpımıyla bir Lie grubudur.

Tanım 4.8 (Sol ve Sağ Öteleme): G bir Lie grubu ve $x \in G$ olsun. $\forall x \in G$ için

$$L_x : G \longrightarrow G$$

$$y \longrightarrow L_x(y) = x.y$$

dönüşümüne G üzerinde "Sol Öteleme",

$$R_x : G \longrightarrow G$$

$$y \longrightarrow R_x(y) = y.x$$

dönüşümüne de G üzerinde "Sağ Öteleme" denir (Do Carmo 1992). Bunlar Lie gruplarındaki difeomorfizmlerdir.

Tanım 4.9 (Sol ve Sağ İnvaryant Metrik): G üzerindeki bir Riemann metriği için $x, y \in G$, $u, v \in T_y G$ olmak üzere

$$\langle u, v \rangle_y = \langle d(L_x)_y.u, d(L_x)_y.v \rangle_{L_x(y)}$$

şeklinde tanımlı metriğe "Sol İnvaryant Metrik",

$$\langle u, v \rangle_y = \langle d(R_x)_y.u, d(R_x)_y.v \rangle_{R_x(y)}$$

şeklinde tanımlı metriğe de "Sağ İnvaryant Metrik" denir (Do Carmo 1992). Burada L_x ve R_x birer izometridir.

Tanım 4.10 (Bi - İnvaryant Metrik): G grubu üzerindeki Riemann metrik hem sağ hem de sol invaryant metrik ise metriğe "Bi - İnvaryant Metrik" denir. Örneğin; $SO(3)$ dönme grupları cümlesi bi - invaryant metriğe sahiptir. Daha genel olarak kompakt irtibatlı bir G Lie grubu bir bi - invaryant metriğe sahiptir (Do Carmo 1992). $SO(3)$ topolojik olarak kompakttır. Bir Lie grup üzerinde bir bi-

invariant metrik olması güçlü bir özelliktir. Bu durumda Lie çarpımı çok basite indirgenebilmektedir.

Tanım 4.11 (Lie Parantez Operatörü ve Lie Cebri): $gl = \{V, \oplus, R, +, \cdot, \otimes\}$ bir reel vektör uzayı olsun.

$[\cdot, \cdot] : gl \times gl \longrightarrow gl$ parantez operatörü için

$$(\alpha, \beta) \longrightarrow [\alpha, \beta]$$

(i) $[\cdot, \cdot]$ anti simetrik

(ii) $[\cdot, \cdot]$ iki lineer

(iii) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ (Jakobi Özdeşliği)

özelliklerini sağlıyorsa $[\cdot, \cdot]$ operatörüne "Lie Parantez Operatörü (Lie Çarpım Operatörü)" , $(gl, [\cdot, \cdot])$ ikilisine de bir "Lie Cebri" denir (Hacısalıhoğlu 1980).

Tanım 4.12 (Sol ve Sağ İnvaryant Vektör Alanları): Bir G Lie grubu üzerinde diferensiyellenebilir bir vektör alanı X olsun. Eğer her $x \in G$ için $dL_x X = X$ oluyorsa X vektör alanına "Sol İnvaryant Vektör Alanı" denir. Burada $dL_x = (L_x)_*$ türev dönüşümüdür. Benzer şekilde sağ invaryant vektör alanı da tanımlanabilir (Do Carmo 1992).

Teorem 4.2 G bir Lie grubu ve $e \in G$ birim eleman olsun $\chi_L(G)$, G üzerindeki bütün sol invaryant vektör alanlarının uzayı olmak üzere

$$\alpha : \chi_L(G) \longrightarrow T_e(G)$$

dönüşümü bir lineer izomorfizmdir (Hacısalıhoğlu 1980).

$$[\cdot, \cdot] : \chi_L(G) \times \chi_L(G) \longrightarrow \chi_L(G)$$

$$(X, Y) \longrightarrow [X, Y]_g(f) = X_g(Y(f)) - Y_g(X(f));$$

$\forall g \in G, \forall f \in C^\infty(G)$ parantez operatörüyle birlikte $\chi_L(G)$ bir Lie cebridir. $\alpha : \chi_L(G) \longrightarrow T_e(G)$ bir lineer izomorfizm olduğundan $T_e(G)$ de bir Lie cebri olur. Yani bir G Lie grubunun e birim noktasındaki tanjant uzayı $T_e(G)$, G Lie grubunun Lie cebri olur (Doğan 2009).

Örnek 4.1 $G = S^1$ bir Lie grubudur. S^1 'in birim noktadaki teğet uzayı $T_e G$ bu grubun Lie cebridir.

Örnek 4.2 $G = S^3 = \left\{ q = a_0 + a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k} \mid N_q = q \times \bar{q} = 1 \right\}$

kuaterniyon çarpımına göre bir Lie gruptur. S^3 ün Lie cebri bir pür kuaterniyondur. Yani

$$T_e S^3 = \left\{ \vec{V} \mid \vec{V} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k} \right\}$$

dır.

$SO(3)$ topolojik yapısıyla 3 - boyutlu bir topolojik manifolddur. Bu yüzden bir matris Lie grubudur. Bir Lie grubuna karşılık gelen Lie cebri grubun birim noktasındaki tanjant uzayı olduğundan $T_I(SO(3))$, $SO(3)$ Lie grubunun Lie cebri olur. Bu Lie cebrine $so(3)$ diyelim (Doğan 2009).

Tanım 4.13

$$so(3) = \left\{ \Omega \in R_3^3 : \Omega = \begin{bmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{bmatrix}, \Omega^T = -\Omega \right\}$$

$SO(3)$ Lie grubunun Lie cebri olarak tanımlanır (Doğan 2009).

Tanım 4.14 (Tanjant Operatör): $SO(3)$ Lie grubunun tanjant operatörü $\Omega = \dot{A} \cdot A^T = \dot{A} \cdot A^{-1}$ antisimetrik operatördür (Doğan 2009).

Tanım 4.15 (Açısal Hız Matrisi): $A \in SO(3)$ için

$$A : J \subset \mathbb{R} \longrightarrow SO(3)$$

$$t \longrightarrow A(t)$$

eğrisini alalım. Ω matrisine $A(t)$ dönmesinin "Açısal Hız Matrisi" denir (Doğan 2009).

Şimdi $so(3)$ Lie cebirinin standart bazını elde edelim. $S \in so(3)$ olsun. Bu durumda

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{bmatrix} = w_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + w_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + w_3 \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S = w_1.L_1 + w_2.L_2 + w_3.L_3 \implies so(3) = S_p \{L_1, L_2, L_3\}$$

olur.

Burada L_1, L_2, L_3 matrisleri sırasıyla x, y, z eksenleri etrafındaki ani dönmeleri temsil eder (Doğan 2009).

Tanım 4.16 $\{\delta_{l,m}\}$ kronoker delta fonksiyonunu göstermek üzere

$$\Omega(l_k) = \begin{bmatrix} 0 & \delta_{3,k} & -\delta_{2,k} \\ -\delta_{3,k} & 0 & \delta_{1,k} \\ \delta_{2,k} & -\delta_{1,k} & 0 \end{bmatrix}$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda, örneğin x - eksen etrafındaki dönmeyi, yani $y-z$ düzlemindeki dönmeyi,

$\Omega(e_1) = L_1^t = L_x$ ile ifade ederiz.

Teorem 4.3 Bir dönme 3 - boyutta bir eksen ve bu eksen etrafındaki bir dönme açısı ile parametrize edilebilir. Bu eksen ve dönme açısına karşılık gelen matris, I birim matrisi olmak üzere Taylor seri açılımı ile

$$e^{\theta.L_x} = e^{\theta.\Omega(e_1)} = I + \theta.L_x + \frac{1}{2!}(\theta.L_x)^2 + \dots + \frac{1}{n!}(\theta.L_x)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

şeklinde verilir (Handzel ve Flash 1996).

Böylece her dönme matrisi üstel dönüşüm vasıtasıyla

$$R(\theta) = \exp(\theta_x.L_x + \theta_y.L_y + \theta_z.L_z)$$

şeklinde elde edilebilir. Bu eşitlikte $\theta_x = 0$ alarak

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta . \sin \phi & \sin \theta . \cos \phi \\ -\sin \theta . \sin \phi & \cos \theta + (1 - \cos \theta) . \cos^2 \phi & \cos \phi . \sin \phi . (1 - \cos \theta) \\ -\sin \theta . \cos \phi & \cos \phi . \sin \phi . (1 - \cos \theta) & \cos \theta + (1 - \cos \theta) . \sin^2 \phi \end{pmatrix}$$

torsiyonsuz dönme matrisi elde ederiz. Burada $\theta = \sqrt{\theta_y^2 + \theta_z^2}$ total dönme açısı (θ, ϕ) Listing düzlemindeki kutupsal koordinatlardır. R matrisinin soldan ilk sütunu birim kürenin parametizasyonundan oluşmaktadır (Handzel ve Flash 1996).

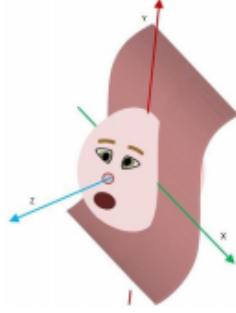
Burada $\text{span}\{L_y, L_z\} = l$ Listing düzlemini oluştururken $\text{span}\{L_x\} = h$ gözün torsiyon eksenini oluşturur ve $g = so(3) = h \oplus l$ şeklinde yazılabilir. Bu eşitlik Lie cebri diliyle gözün genel pozisyonunu ifade eder. $e \in G = SO(3)$ dönme grubunda gözün primer pozisyonuna karşılık gelirken $H = SO(2)$ göz torsiyonuna karşılık gelir (Handzel ve Flash 1996).

Göz orbit içindeki hareket aralığında herhangi bir açısal pozisyonuna serbestçe ulaşabilir. Göz kasları gözü herhangi bir eksen etrafında döndürebilir. Bununla birlikte normal görüş şartları altında göz yapabildiği bütün hareketleri gerçekleştirmez. Gözün hareketlerini yöneten kanunlardan biri de Donder Kanunu'dur (Zatsiorsky 1998).

Tanım 4.17 (Donder Kanunu): Gözün oryantasyonu, bakış yönü tarafından tek başına belirlenir. Bir başka ifadeyle torsiyon açısı bakış yönünü belirleyen açılarının bir fonksiyonudur. Torsiyon açısı gözün mevcut pozisyonuna ulaşırken aldığı önceki pozisyonlara bağlı değildir. Buna göre göz 3 - boyutlu hareket etmek yerine 2 - boyutlu hareket eder yani gözün serbestlik derecesi 2'ye düşer. Donder Kanunu baş sabit ve dik ve gözler sonsuzdaki bir hedefe bakarken sağlanır (Halswanter 1995).

Göz hareket problemini bütünleyici olarak Donder anlık baş hareketleri altında insan başının erişebileceği mümkün oryantasyonlar üzerine çalıştı ve primer baş

pozisyonundan uzakta baş dönmelerinin eksenlerinin "Donder Yüzeyi" adı verilen sabit bir yüzeye sınırlandırıldığını ortaya koydu (Şekil 4.2). Esas olarak Donder'in baş hareketleri yasası, Listing'in göz hareketleri yasasını geneller. Listing düzlemi sabitlenmiştir ve genellikle sabite sahipken (başın oryantasyonundaki değişiklik ile Listing düzlemi hafifçe eğilir fakat burada bunu ihmal edeceğiz.) Donder yüzeyi de sabitlenmiş kabul edilir ama bir denekten başka bir deneye değişir (Ghosh vd. 2014).



Şekil 4.2. Gövde sabit, baş primer pozisyonda iken Donder yüzeyi (Ghosh vd. 2014)

4.2 List Üzerindeki Riemann Metrik

Literatürde göz hareketlerini tasvir etmek için eksen - açı (axis - angel) parametizasyonu kullanılmıştır. Bu yüzden hesaplar gerçekleştirilirken eksen - açı lokal koordinat sistemi kullanılacaktır. (θ, α, ϕ) lokal koordinatlarından θ listing düzlemindeki dönme ekseninin kutupsal koordinat açısını gösterirken, ϕ eksen etrafındaki dönme açısını, α ise eksenin Listing düzleminden sapma açısını göstermektedir. $\alpha = 0$ iken dönme eksenini Listing düzlemine kısıtlanmıştır. Burada $(\theta, \alpha, \phi) \in [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 2\pi]$ alacağız. $\phi = 0$ veya $\phi = 2\pi$ olduğu durumlarda dönme θ açısından bağımsız olarak özdeşliğe karşılık gelmektedir (Polpitiya vd. 2004).

Tanım 4.18 (Submersiyon): M ve N sırasıyla m ve n boyutlu ($n \geq m$) manifoldlar ve $F : M \rightarrow N$ dönüşümü örten olsun. Eğer $p \in M$ noktasında, $F_{*p} : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ dönüşümünün rankı n ise F dönüşümüne "Submersiyon" veya "Sığdırma" denir (Şahin 2012).

List üzerine $SO(3)$ ten indirilen Riemann metriği hesaplamak için Polpitiya vd. 2004 ve Ghosh vd. 2014 makalelerindeki bu konu ile ilgili hesaplamaları takip edilecektir. Göz dönmeleri baş sabit iken $SO(3)$ ün List alt manifolduna kısıtlanır. Hareket denklemlerini yazabilmek için hareketteki gözün kinetik ve potansiyel enerjisi bilinmelidir. Kinetik enerji $SO(3)$ üzerindeki Riemann metrikten indirilen List üzerindeki indirilmiş Riemann metrik tarafından verilir. Riemann metrik göz küresinin eylemsizlik momentinden türetilir. Burada göz mükemmel bir küre olarak varsayılacak ve eylemsizlik tensörü $I_{3 \times 3}$ birim matrisinin $\frac{1}{4}$ katı olarak seçilecektir. Bu

$$\Omega(e_k) = \begin{bmatrix} 0 & \delta_{3,k} & -\delta_{2,k} \\ -\delta_{3,k} & 0 & \delta_{1,k} \\ \delta_{2,k} & -\delta_{1,k} & 0 \end{bmatrix}$$

ve $\{\delta_{l,m}\}$ kroneker delta fonksiyonu olmak üzere $\langle \Omega(e_i), \Omega(e_j) \rangle_I = \delta_{i,j}$ ile verilen $SO(3)$ üzerindeki sol invaryant metrik ile ilintilidir. $SO(3)$ üzerindeki sol invaryant metrik S^3 ve $SO(3)$ arasında verilen izometrik submersiyon rot ile hesaplanabilir.

$i, j, k \in T_{\vec{1}}S^3$ ün bir ortonormal bazıdır ve

$$rot \left(\begin{bmatrix} \cos(\frac{t}{2}) \\ \sin(\frac{t}{2}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = e^{t.\Omega(e_1)}$$

$$rot \left(\begin{bmatrix} \cos(\frac{t}{2}) \\ 0 \\ \sin(\frac{t}{2}) \\ 0 \end{bmatrix} \right) = e^{t.\Omega(e_2)}$$

$$rot \left(\begin{bmatrix} \cos(\frac{t}{2}) \\ 0 \\ 0 \\ \sin(\frac{t}{2}) \end{bmatrix} \right) = e^{t.\Omega(e_3)}$$

eşitlikleri yazılabilir. Bunu

$$rot_{*\vec{1}} : T_{\vec{1}}S^3 \longrightarrow T_I SO(3)$$

birim noktadaki tanjant dönüşüm olmak üzere

$$rot_{*\vec{1}} \vec{i} = 2\Omega(e_1), \quad rot_{*\vec{1}} \vec{j} = 2\Omega(e_2)$$

ve

$$rot_{*\vec{1}} \vec{k} = 2\Omega(e_3)$$

olması izler. Böylece $\left\{ rot_{*\vec{1}} \vec{i} / 2, rot_{*\vec{1}} \vec{j} / 2, rot_{*\vec{1}} \vec{k} / 2 \right\}$ kümesi $T_I(SO(3))$ ün bir ortonormal çatısı olur.

Rot dönüşümü sol ötemeler altında eş değişkenli ve $SO(3)$ üzerindeki Riemann metriğinin yanısıra S^3 üzerindeki Riemann metrik sol invaryant olduğundan rot_{*q} q noktasındaki tanjant dönüşüm olmak üzere $\left\{ rot_{*q} \vec{i} / 2, rot_{*q} \vec{j} / 2, rot_{*q} \vec{k} / 2 \right\}$ kümesi her $q \in S^3$ için $T_{rot(q)}SO(3)$ ün bir ortonormal bazıdır.

$$\begin{array}{ccc} S^3 & \xrightarrow{rot} & SO(3) \\ \downarrow & & \downarrow \\ T_q S^3 & \xrightarrow{rot_*} & T_{rot(q)} SO(3) \end{array}$$

Şimdi List üzerine $SO(3)$ ten indirilen Riemann metriği hesaplamak için $T_q S^3$ ün $\left\{ q. \vec{i} / 2, q. \vec{j} / 2, q. \vec{k} / 2 \right\}$ ortonormal çatısını kullanalım.

$$g_{11} = \left\langle \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \theta} \right\rangle$$

$$g_{12} = \left\langle \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \phi} \right\rangle$$

$$g_{22} = \left\langle \frac{\partial}{\partial \phi}, \frac{\partial}{\partial \phi} \right\rangle$$

olarak tanımlayalım. S^3 üzerindeki koordinat dönüşümünü

$$\rho(\theta, \alpha, \phi) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\phi}{2}) \\ \sin(\frac{\phi}{2}) \cos \theta \cos \alpha \\ \sin(\frac{\phi}{2}) \sin \theta \cos \alpha \\ \sin(\frac{\phi}{2}) \sin \alpha \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\rho : [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 2\pi] \longrightarrow S^3$$

şeklinde tanımlayalım. $rot \circ \rho(\theta, \alpha, \phi)$ bileşke dönüşümü

$$\begin{pmatrix} \cos \theta \cos \alpha \\ \sin \theta \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$$

ekseni etrafında bir dönme verir. Burada $\alpha = 0$ alırsak ρ ve ρ_* dönüşimleri

$$\begin{array}{ccc} List & \xrightarrow{\rho} & S^3 \\ \downarrow & & \downarrow \end{array}$$

$$T_{(\theta, \phi)} List \xrightarrow{\rho_*} T_{\rho(\theta, \phi)} S^3$$

şeklinde gösterilebilir.

$SO(3)$ üzerindeki Riemann metriği hesaplayabilmek için $\rho_*\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)$, $\rho_*\left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\right)$, $\rho_*\left(\frac{\partial}{\partial \phi}\right)$ değerlerini bulalım.

$$\rho_*\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(\phi/2) \sin \theta \cos \alpha \\ \sin(\phi/2) \cos \theta \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho_*\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(\phi/2)\cos\theta\sin\alpha \\ -\sin(\phi/2)\sin\theta\sin\alpha \\ \sin(\phi/2)\cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\rho_*\left(\frac{\partial}{\partial\phi}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sin(\phi/2) \\ \frac{1}{2}\cos(\phi/2)\cos\theta\cos\alpha \\ \frac{1}{2}\cos(\phi/2)\sin\theta\cos\alpha \\ \frac{1}{2}\cos(\phi/2)\sin\alpha \end{pmatrix}$$

Buradan

$$g_{11} = \left\langle \frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial\theta} \right\rangle = \sin^2(\phi/2)\cos^2\alpha$$

$$g_{22} = \left\langle \frac{\partial}{\partial\alpha}, \frac{\partial}{\partial\alpha} \right\rangle = \sin^2(\phi/2)$$

$$g_{33} = \left\langle \frac{\partial}{\partial\phi}, \frac{\partial}{\partial\phi} \right\rangle = \frac{1}{4}$$

elde olunur. ($i, j = 1, 2, 3$ ve $i \neq j$ için $g_{ij} = 0$)

Böylece $SO(3)$ üzerindeki Riemann metrik

$$g = \sin^2(\phi/2) \cdot \cos^2(\alpha) \cdot d\theta^2 + \sin^2(\phi/2) d\alpha^2 + \frac{1}{4} \cdot d\phi^2$$

olarak bulunur. $\alpha = 0$ alırsak List üzerindeki Riemann metrik

$$g = \sin^2(\phi/2) d\theta^2 + \frac{1}{4} \cdot d\phi^2$$

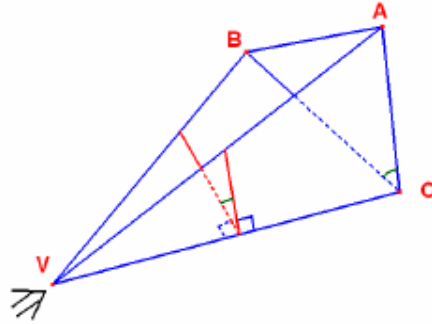
olarak bulunur.

4.3 Bakış Açısının Küre Metriği Ve Hareket Cinsinden Yorumu

Bu bölümde Mori ve Maeda 2005 makalesindeki bakış açısı tanımı , ortogonal eksenlerin bakış açıları yasası ve bunun bir uygulaması olarak bir örnek verilecektir. Verilen örnek farklı bir yoldan ve kürenin kendi metriği kullanılarak da çözülecek, sonrasında bakış açısının hareket ile bir yorumu sunulacaktır.

4.3.1 Üç boyutlu ortogonal eksenlerin bakış açıları

Tanım 4.19 (Bakış Açısı) Üç boyutlu Öklid uzayında bir açı $\angle AOB$ olsun. $\angle AOB$ açısına bir $V \in R^3$ noktasından bakalım. Bu durumda $\angle AOB$ açısının bakış açısı , $\angle AOB$ dörtyüzlüsünün AOV ve BOV yüzleri ile belli iki düzlemli açı olarak tanımlanır. Şekil 4.3 de bakış açısı gösterilmektedir . $\angle AOB$ açısının bakış açısını görüş noktasını da belirtmek için $\angle vAOB$ şeklinde gösterebiliriz.

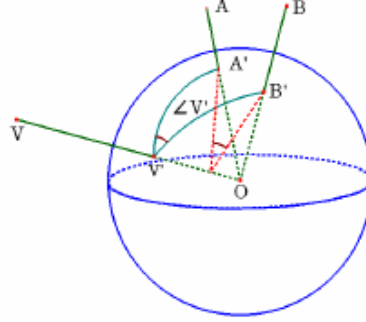


Şekil 4.3. Bakış açısının tanımı (Mori ve Maeda 2005)

Bir açıdan bir çok bilgi elde ederiz. Örneğin gözlemci her hareket ettiğinde $\angle AOB$ bakış açısı değişir. $(0 \leq \text{bakış açısı} \leq \pi \text{ radyan})$ Genel olarak bakış açısı görüntü ekranı denilen bir yüzey yardımıyla anlaşılır. Görüntü ekranı Öklid uzayında bir küredir ve bakış açısı bu küre üzerinde ölçülür.

Teorem 4.4 Üç boyutlu Öklid uzayında keyfi V, A ve B noktalarının O merkezli birim küre üzerindeki merkezi iz düşüm noktaları V', A', B' olsun. Bu taktirde

$\angle AOB$ açısının bakış açısı $V'A'B'$ küresel üçgeninin $\angle V'$ açısına eşittir (Şekil 4.4).



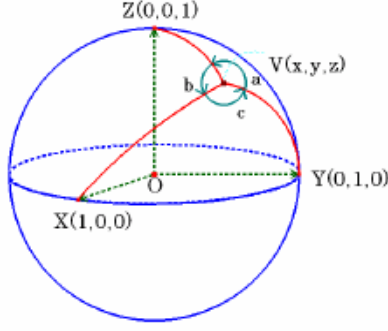
Şekil 4.4. $\angle AOB$ açısının bakış açısı $\angle V'$ küresel açısıdır (Mori ve Maeda 2005)

İspat: $\vec{a}$ vektörü $V'A'$ yayına V' de teğet olsun. ($\vec{b}$ vektörü de $V'B'$ yayına V' de teğet olsun.) Küresel üçgenin tanımından $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri arasındaki açı $\angle V'$ küresel açısına eşittir. AOV ve BOV düzlemlerinin kesiştiği yerde $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri OV doğrusuna diktir. Bu ise bakış açısının tanımı demektir. Böylece $V'A'B'$ küresel üçgeninin $\angle V'$ açısı $\angle AOB$ açısının bakış açısıdır.

4.3.2 Üç boyutlu ortogonal eksenlerin bakış açıları yasası

Bakış açılarını yönlü olarak ele alalım. $\angle BAC$ açısı, S^2 birim küresi üzerinde, küre dışından bakıldığında AB den AC ye saat yönünün tersinde ölçülen yönlendirilmiş bir açı olsun. Bakış açısı aralığı $[0, 2\pi)$ dir. Bu noktadan sonra, $V(x, y, z)$ görüş noktasının küre üzerinde olduğunu farzedelim. Bu V görüş noktasından $O = (0, 0, 0)$, $X = (1, 0, 0)$, $Y = (0, 1, 0)$ ve $Z = (0, 0, 1)$ olmak üzere $O - XYZ$ ortogonal eksenlerinin $\angle YOZ$, $\angle ZOX$ ve $\angle XOY$ açlarına bakalım. a, b, c açıları sırası ile $\angle YOZ$, $\angle ZOX$ ve $\angle XOY$ açılarının bakış açıları olsun. O zaman birim küre üzerinde $a = \angle YVZ$, $b = \angle ZVX$ ve $c = \angle XVY$ olur (Şekil 4.5).

Teorem 4.5 V görüş noktası eksenler $(x, y, z \neq \pm 1)$ üzerinde değilse o zaman üç boyutlu ortogonal eksenlerin bakış açıları aşağıdaki denklemi sağlar:



Şekil 4.5. Birim küre üzerindeki a,b,c bakış açıları (Mori ve Maeda 2005)

$$\tan a = \frac{-x}{yz}, \quad \tan b = \frac{-y}{zx}, \quad \tan c = \frac{-z}{xy}$$

İspat : İlk olarak $x \cdot \sin a \geq 0$ olduğunu kontrol etmek kolaydır. Küresel bir üçgende kenarlar için kosinüs teoremini hatırlayalım: ABC üçgeni S^2 küresi üzerinde AB, BC ve AC kenar uzunlukları sırasıyla c, a, b ve A, B, C açıları sırasıyla α, β, γ olan bir üçgen olsun. O zaman

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \gamma$$

eşitliği sağlanır. Şimdi VYZ küresel üçgenine kenarlar için kosinüs teoremini uygularsak

$$\cos YZ = \cos VY \cdot \cos VZ + \sin VY \cdot \sin VZ \cdot \cos a$$

$$\cos \frac{\pi}{2} = y \cdot z + \sin(\arccos y) \cdot \sin(\arccos z) \cos a$$

$$\cos a = \frac{-yz}{\sqrt{1-y^2} \cdot \sqrt{1-z^2}}, \quad \sin a = \frac{x}{\sqrt{1-y^2} \cdot \sqrt{1-z^2}}$$

elde edilir. Burada $\sin a$ ile x in aynı işaretli olması olgusunu kullandık. Bunun sonucu olarak

$$\tan a = \frac{-x}{yz}$$

olur. diğer eşitlikler de benzer şekilde gösterilebilir. Şimdi bakış açısına bir örnek verelim.

Örnek 4.1: $O = (0, 0, 0), A = (1, 0, 0), B = (0, 1, 0)$ olmak üzere birim küre üzerindeki $P = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ noktasındaki göz ile AOB dik açısına bakıldığında bakış açısının kaç derece olacağını bulalım.

1.Yol. Teorem 5.2 yi kullanalım. $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$ verildiğinden a bakış açımız $\tan c = \frac{-z}{xy} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = -\sqrt{3}$ olup $a = 120^\circ$ olur.

2.Yol. P ve A noktalarından geçen büyük çember yayını bulalım. P, A, O noktalarından geçen düzlem ile $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ birim küresini kesiştirirsek $y = z$ olduğundan $x^2 + 2z^2 = 1$ çemberini buluruz. Bu çemberi bir t parametresine göre parametrik olarak $\alpha(t) = (\cos t, \frac{\sin t}{\sqrt{2}}, \frac{\sin t}{\sqrt{2}})$ şeklinde ifade edelim.

$\alpha(t_o) = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ ise $\cos t_o = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ve $\sin t_o = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ olur.

$\alpha'(t) = (-\sin t, \frac{\cos t}{\sqrt{2}}, \frac{\cos t}{\sqrt{2}})$ olduğundan $P(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ noktasındaki teğet vektör

$\alpha'(t_o) = (-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$ olur.

Şimdi de P ve B noktalarından geçen büyük çember yayını bulalım. P, O ve B noktalarından geçen düzlem ile $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ birim küresini kesiştirirsek $x = z$ olduğundan $2x^2 + y^2 = 1$ çemberini buluruz. Bu çemberi bir t parametresine göre parametrik olarak $\beta(t) = (\frac{\sin t}{\sqrt{2}}, \cot t, \frac{\sin t}{\sqrt{2}})$ şeklinde ifade edelim.

$\beta'(t) = (\frac{\cos t}{\sqrt{2}}, -\sin t, \frac{\cos t}{\sqrt{2}})$ olduğundan $P(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ noktasındaki teğet vektör

$\beta'(t_o) = (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$ olur. $\alpha'(t_o)$ ve $\beta'(t_o)$ vektörleri arasındaki açı bakış açısı olacağından

$$\cos a = \frac{\langle \alpha'(t_o), \beta'(t_o) \rangle}{\|\alpha'(t_o)\| \cdot \|\beta'(t_o)\|} = \frac{-1}{2} \text{ ise } a = 120^\circ \text{ bulunur.}$$

Örnek 4.2: Önceki örnekteki bakış açısını kürenin kendi metriğini kullanarak bulalım. Küre metriği

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$$

eşitliği ile verilir.

Burada

$$g_{11} = 1 = \langle \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \theta} \rangle, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = \sin^2 \theta = \langle \frac{\partial}{\partial \phi}, \frac{\partial}{\partial \phi} \rangle$$

dir. Kürenin θ ve ϕ ye göre bir parametizasyonu

$$\rho(\theta, \phi) = (\sin \theta \cdot \cos \phi, \sin \theta \cdot \sin \phi, \cos \theta)$$

olmak üzere $\rho(\theta, \phi) = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ olsun. Buradan

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \quad \cos \phi = \sin \phi = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ve

$$g_{22} = \sin^2 \theta = \langle \frac{\partial}{\partial \phi}, \frac{\partial}{\partial \phi} \rangle = \frac{2}{3}$$

olur.

$$\rho_*\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right) = (\cos \theta \cdot \cos \phi, \cos \theta \cdot \sin \phi, -\sin \theta) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\|\rho_*\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\| = 1$$

$$\rho_*\left(\frac{\partial}{\partial \phi}\right) = (-\sin \theta \cdot \sin \phi, \sin \theta \cdot \cos \phi, 0) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) = \frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\|\rho_*(\frac{\partial}{\partial\phi})\| = \frac{2}{3} \text{ ve } \langle \frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial\phi} \rangle = 0$$

olur.

Şimdi $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörleri kürenin herhangi bir teğet düzleminde iki vektör olsun.

Bu vektörleri $\partial\theta$ ve $\partial\phi$ bazları cinsinden ifade edelim. Yani

$$\vec{u} = \lambda_1 \cdot \frac{\partial}{\partial\phi} + \lambda_2 \cdot \frac{\partial}{\partial\theta} \text{ ve } \vec{v} = c_1 \cdot \frac{\partial}{\partial\phi} + c_2 \cdot \frac{\partial}{\partial\theta}$$

eşitliklerini sağlayan $\lambda_1, \lambda_2, c_1, c_2$ reel sayılarını bulalım.

Örnek 5.1 den $\vec{u} = \alpha'(t_o)$ ve $\vec{v} = \beta'(t_o)$ alalım.

$$(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}) = \lambda_1 \cdot (\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0) + \lambda_2 \cdot (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}})$$

eşitliğinden $\lambda_1 = \frac{3}{2\sqrt{2}}$ ve $\lambda_2 = \frac{-1}{2}$ bulunur. Benzer şekilde

$$(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}) = c_1 \cdot (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0) + c_2 \cdot (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})$$

eşitliğinden $c_1 = -\frac{3}{2\sqrt{2}}$ ve $c_2 = \frac{-1}{2}$ bulunur. Bu durumda

$$\vec{u} = \frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\partial}{\partial\phi} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$\vec{v} = -\frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\partial}{\partial\phi} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial\theta}$$

bulunur.

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\partial}{\partial\phi} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial\theta}, -\frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\partial}{\partial\phi} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial\theta} \rangle$$

ve gerekli işlemler yapılırsa $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \frac{-1}{2}$ bulunur.

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} = 1 \text{ ve } \|\vec{v}\| = 1$$

olur. $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörleri arasındaki a açısı bakış açısı olmak üzere

$$\cos a = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{-1}{2}$$

olup $a = 120^\circ$ bulunur.

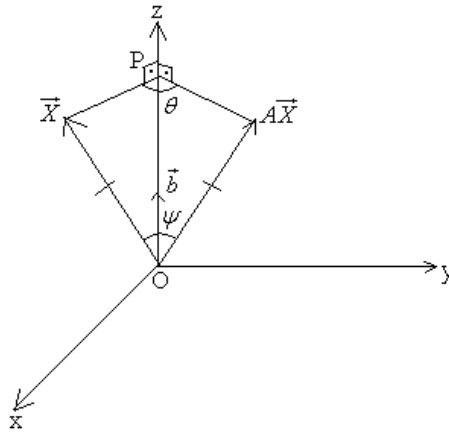
Bu örnekte kullanılan küre metriği yerine

$$g = \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)d\theta + \frac{1}{4}d\phi^2$$

List metriği kullanılarak da bakış açısı $a = 120^\circ$ olarak bulunabilir.

4.3.3 Bakış açısının hareket cinsinden yorumlanması

Verdiğimiz örneklerde ve Mori ve Maeda 2005 makalesinde küre üzerindeki noktalardan dik açılardan bakış açıları bulunabilmektedir. Bakış açılarının hareket ile yorumlanması 90° den farklı açılardan da bakış açılarının hesaplanmasını olanaklı kılar. Şekil 4.6 da P noktası birim küre üzerinde bir nokta, OP bakış doğrultusu (gaze), $\vec{X}$ birim vektör ve A dönme matrisi olsun. $\vec{X}$ vektörünü bakış doğrultusu etrafında θ açısı kadar döndürelim. Bu durumda $\vec{X}$ ve $A\vec{X}$ vektörleri arasında oluşan ψ açısı baktığımız açı iken θ açısı bu açının bakış açısı olur.



Şekil 4.6. Bakılan açı ve bakış açısı

Şimdi baktığımız açı ile bakış açısı arasındaki bağıntıyı bulalım.

Teorem 4.6 Dönme ekseninin (bakış doğrultusu) karşılık geldiği anti simetrik matris S , dönme açısı θ ise A dönme matrisi

$$A = I_3 + \sin \theta . S + (1 - \cos \theta) . S^2$$

ile verilir (McCarthy 1990).

S matrisine karşılık gelen birim eksen $\vec{b}$ olmak üzere yukardaki eşitliğin her iki tarafını $\vec{X}$ vektörü ile çarpalım.

$$A\vec{X} = (I_3 + \sin \theta . S + (1 - \cos \theta) . S^2) . \vec{X}$$

$$= \vec{X} + \sin \theta (\vec{b} \wedge \vec{X}) + (1 - \cos \theta) \vec{b} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{X})$$

Son eşitliği $\vec{X}$ ile iç çarpalım:

$$\langle A\vec{X}, \vec{X} \rangle = 1 + \sin \theta \langle \vec{b} \wedge \vec{X}, \vec{X} \rangle + (1 - \cos \theta) \langle \vec{b} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{X}), \vec{X} \rangle$$

$$\langle A\vec{X}, \vec{X} \rangle = 1 + (1 - \cos \theta) \langle \vec{b} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{X}), \vec{X} \rangle$$

$$\cos \psi = 1 + (1 - \cos \theta) (\langle \vec{b}, \vec{X} \rangle \langle \vec{b} - \vec{X}, \vec{b} - \vec{X} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle \langle \vec{X}, \vec{X} \rangle)$$

$$\cos \psi = 1 + (1 - \cos \theta) (\langle \vec{b}, \vec{X} \rangle \langle \vec{b} - \vec{X}, \vec{X} \rangle)$$

$$\cos \psi = 1 + (1 - \cos \theta) (\langle \vec{b}, \vec{X} \rangle^2 - 1)$$

$$\cos \psi = (1 - \cos \theta) \langle \vec{b}, \vec{X} \rangle^2 + \cos \theta$$

olur.

$\vec{b}$ ve $\vec{X}$ vektörleri arasındaki açı γ olmak üzere

$$\cos \psi = (1 - \cos \theta) \cdot \cos^2 \gamma + \cos \theta$$

ve sonuç olarak

$$\cos \psi = \cos^2 \gamma + \cos \theta \cdot \sin^2 \gamma$$

eşitliği elde edilir.

Bu eşitliği kullanarak Örnek 5.1 i tekrar çözelim.

Örnek 4.3: Küre üzerindeki $P(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ noktasından AOB dik açısına bakıldığında oluşan bakış açısını bulalım.

Burada $\angle AOB = \psi = 90^\circ$ ve dönme eksenimiz $\vec{b} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ olmak üzere $\vec{X} = (1, 0, 0)$ vektörünü $\vec{b}$ etrafında θ bakış açısı kadar döndürelim.

$$\angle \vec{b}, \vec{X} = \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ ve } \sin \gamma = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

olur.

$$\cos \psi = \cos^2 \gamma + \cos \theta \cdot \sin^2 \gamma$$

$$\cos 90^\circ = \frac{1}{3} + \cos \theta \cdot \frac{2}{3} = 0$$

ise

$$\cos \theta = \frac{-1}{2} \text{ ve } \theta = 120^\circ$$

bulunur.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında 20.yy'ın ikinci yarısına doğru yeniden ilgi odağı haline gelen ve fizik,tıp,fizyoloji,robotik gibi bir çok alanda yoğun bir şekilde araştırılan ve insan hareketlerinin özel bir araştırma sahası olan göz hareketleri incelenmiştir. Bakış açıları küre metriği kullanılarak hesaplanmış ve bu açıların hareket geometrisi ile karşılıkları verilmiştir. Ülkemizde çok az çalışılan göz kinematığı için bu tez çalışmasının zengin bir kaynak olacağı düşünülmektedir.



KAYNAKLAR

- Anonymous. 2016. Web Sitesi: <https://en.wikipedia.org/wiki/Saccade>, Eriřim Tarihi 30.04.2016.
- Bolina, O. and Monteiro, L.H.A. 1998. A note on eye movement.
- Doğan, F. 2009. Lie gruplar tizerinde invaryant metrikler. Yıksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 51, Ankara.
- Do Carmo, M.P. 1992. Riemann Geometry. Springer-Verlag, 325 p., Boston.
- Fetter, M., Haslwanter, T., Misslich, M. and Tweed, D. 1997. Three-Dimensional Kinematics of Eye, Head and Limb Movements, by CRC Press.
- Findlay, J., Walker, R. Web Sitesi: http://www.scholarpedia.org/article/Human_saccadic_eye_movements, Eriřim Tarihi 30.04.2016.
- Ghosh, B.K., Wijayasinghe, I.B., Kahagalage, S.D., 2014. A geometric approach to head/eye control, IEEE Access.
- Hacısalıhoğlu, H.H. 1980. Yıksek Diferensiyel Geometriye Giriş, Fırat Üniversitesi Fen Fakóltesi Yayınları, 439 s.
- Hacısalıhoğlu, H.H. 1996. Lineer Cebir, Ankara Üniversitesi Fen Fakóltesi, Ankara.
- Haslwanter, T., 1995. Mathematics of three-dimensional eye rotations, Vision Res. Vol. 35, No. 12, pp 1727-1739
- McCarthy, J.M. 1990. Introduction to Theoretical Kinematics, MIT Press Cambridge, Mass
- Mori, M. and Maeda, Y., 2005. Three visual angles of three dimensional orthogonal axes and their visualization.
- Nielsen, J.B., 2003. How we walk: central control of muscle activity during human walking, Neurosci., vol. 9 no. 3, pp. 195-204, Jun 2003.
- Polpitiya, A.D., Ghosh, B.K., Martin, C.F., Dayawansa, W.P., 2004. Mechanics of the eye movement: geometry of the listing space, Proceeding of the 2004 American Control Conference Boston, Massachusetts June 30-July 2, 2004.
- Polpitiya, A.D. and Ghosh, B.K. (tarihsiz) Modeling the dynamics of oculomotor system in three dimensions.
- Quaia, C., Optican, L.M., 2001. Three-Dimensional Rotations of the Eye, Laboratory of Sensorimotor research National Eye Institute, NIH Bethesda, MD, USA.
- şahin, B. 2012. Manifoldların Diferensiyel Geometrisi. Nobel yayınevi, 294, Ankara.
- Zatsiorsky, V. 1998. Kinematics of Human Motion. Human Kinetics, 432, USA.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Alper ÇAY

Doğum Yeri : Kayseri

Doğum Tarihi : 09/02/1970

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):

Lise : Kayseri Lisesi

Lisans : Erciyes Üniversitesi, Fen Fakültesi Matematik Bölümü 2004

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi FBE Matematik Anabilim Dalı (Eylül 2014
- Haziran 2016)

Çalıştığı Kurum : Maden Tetkik ve Arama Genel Müdürlüğü (MTA)