

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(DOKTORA TEZİ)

ASAL HALKALARIN ÖZEL TİP  
DÖNÜŞÜMLERİNİ İHTİVA EDEN BAZI  
ÖZDEŞLİKLER

NIHAN BAYDAR YARBİL

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Nurcan ARGAC

İkinci Danışmanı: Prof. Dr. Ajda FOŠNER

Matematik Anabilim Dalı

Sunuş Tarihi: 29.07.2016

Bornova-İzmir

2016



**Nihan BAYDAR YARBİL** tarafından DOKTORA tezi olarak sunulan “**Asal halkaların özel tip dönüşümlerini ihtiva eden bazı özdeşlikler**” başlıklı bu çalışma E.Ü. Fen Bilimleri Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi’nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve **29.07.2016** tarihinde yapılan tez savunma sınavında oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

**Jüri üyeleri**

**İmza**

**Jüri Başkanı : Prof. Dr. Nurcan ARGAÇ**

**Raportör Üye : Prof. Dr. Emine ALBAŞ**

**Üye : Prof. Dr. Semra DOĞRUÖZ**

**Üye : Prof. Dr. Hatice KANDAMAR**

**Üye : Prof. Dr. Neşet AYDIN**



**EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**  
**ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI**

E.Ü. Lisanüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili hükümleri uyarınca Doktora Tezi olarak sunduğum “**Asal halkaların özel tip dönüşümlerini ihtiva eden bazı özdeşlikler**” başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, döküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu çalışmayla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarımı ihlal edici bir davranışımın olmadığını, bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

29/07/2016

Nihan BAYDAR YARBİL



## ÖZET

**ASAL HALKALARIN ÖZEL TİP DÖNÜŞÜMLERİNİ İHTİVA  
EDEN BAZI ÖZDEŞLİKLER**

BAYDAR YARBİL, Nihan

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Nurcan ARGAÇ

İkinci Danışmanı: Prof. Dr. Ajda FOŠNER

29.07.2016, 95 sayfa

Bu tez esas olarak beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde tez konusu tanıtılmış olup, konu ile ilgili yapı taşı niteliğindeki çalışmalar özetlenmiştir.

İkinci bölümde tezin akışına uygun olarak okunurluğu kolaylaştırmak adına bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Ayrıca bir halkanın sağlayabileceği, bilinen tüm özdeşlikler tanıtılarak, halkanın yapısal özellikleri ile arasındaki geçişe ışık tutan sonuçlar sunulmuştur.

Üçüncü bölümde bir asal halkanın değişmeli olmayan bir Lie ideali üzerinde otomorfizma ihtiva eden bir diferansiyel özdeşliğin sıfırlayan koşulları incelenmiş ve özdeşliği oluşturan dönüşüm ile halkanın yapısı hakkında elde edilen sonuçlar verilmiştir. Dördüncü bölüm, üçüncü bölümün devamı niteliğindedir. Üçüncü bölümde ele alınan diferansiyel özdeşliğin merkezi olma durumu ele alınmış ve önemli sonuçlar verilmiştir. Üçüncü ve dördüncü bölümlerde polinom özdeşliği ve genelleştirilmiş polinom özdeşliği teorileri araç olarak kullanılmıştır.

Beşinci bölümde literatüre daha önce iki farklı şekilde sunulmuş olan genelleştirilmiş Lie türev kavramı ele alınmış ve fonksiyonel özdeşlik teorisi araç olarak kullanılmıştır. Literatürde genelleştirilmiş Lie türev kavramına ilişkin yer alan iki tanımı kapsayan bir fonksiyonel özdeşlik tanımlanmış ve

halka üzerinde belirli koşullar altında bu özdeşliği oluşturan dönüşümlerin karakterizasyonuna ulaşılmıştır.

Asal halkaların özel tip dönüşümlerini ihtiva eden özdeşliklerin çalışılması-  
sındaki amaç bu özdeşliği sağlayan halkanın yapısıyla ilgili fikir sahibi olmak  
veya bunun mümkün olmadığı durumlarda özdeşliği oluşturan dönüşümlerin  
biçimini belirlemektir.

Tezde yer alan ispatlar polinom özdeşliği, genelleştirilmiş polinom özdeşliği  
ve fonksiyonel özdeşlik teorilerinin kullanım yöntemlerini detaylı olarak sergi-  
lemekte ve elde edilen sonuçlar literatürde yer alan bir çok sonucu genellemek-  
tedir.

**Anahtar sözcükler:** Asal halka, (genelleştirilmiş)  $\alpha$ -türev, maksimal sağ  
kesirler halkası, genelleştirilmiş Lie türev, (genelleştirilmiş) polinom özdeşlik, fonk-  
siyonel özdeşlik, diferansiyel özdeşlik.

**ABSTRACT****SOME IDENTITIES INVOLVING SPECIAL TYPES OF  
MAPPINGS OF PRIME RINGS**

BAYDAR YARBİL, Nihan

PhD. in Mathematics Department

Supervisor: Prof. Dr. Nurcan ARGAÇ

Cosupervisor: Prof. Dr. Ajda FOŠNER

29.07.2016, 95 pages.

This thesis mainly consists of five chapters.

In the first chapter, the subject of the thesis is introduced and the cornerstone works related to this subject are summarized.

In the second chapter, due to the flow of the thesis, some basic definitions and theorems are given for facilitating of the reading process. Moreover all well known identities, that can be satisfied by the ring, are introduced and the flashing results about the transition between these notions to the structure of the ring are given.

In the third chapter, the annihilating condition of a differential identity involving an automorphism on a noncommutative Lie ideal of a prime ring is examined and some results concerning the structure of the ring and the form of the maps involved in the identity are given. The fourth chapter is more of the continuation of the third chapter. The central case of the differential identity handled in the third chapter is examined and some important results are stated. In the third and forth chapters, both polynomial identity theory and generalized polynomial identity theory are used as tools.

In the fifth chapter, the notion of generalized Lie derivation, which is defined in two different ways before, is handled and functional identity theory is used in the proofs. A functional identity that contains two definitions related

to the generalized Lie derivations is defined and the characterization of the maps involved in this functional identity under some certain conditions on rings are determined.

The main goal in examining the identities involving special types of mappings of prime rings is to give the characterization of the structure of the ring if it is possible, otherwise to determine the form of the mappings involved in this identity.

The proofs took place in the thesis are mostly displaying the detailed applications of polynomial identity theory, generalized polynomial identity theory and functional identity theory. The conclusions of the thesis are generalizing most of the related theorems in the literature.

**Key words:** Prime ring, (generalized)  $\alpha$ -derivation, maximal right ring of quotients, generalized Lie derivations, (generalized) polynomial identity, functional identity, differential identity.

## TEŞEKKÜR

Bu çalışma boyunca değerli görüşlerinden ve birikiminden faydalandığım, hayat görüşüme her anlamda derinden etki eden sevgili danışman hocam sayın Prof. Dr. Nurcan ARGAÇ' a, tezin oluşturulması ve sonuçlandırılması sırasında bilgi ve önerilerini esirgemeyen sayın Prof. Dr. Emine ALBAŞ ve sayın Prof. Dr. Semra DOĞRUÖZ' e, seminerlerimde yardımlarını esirgemeyen sayın Doç. Dr. Çağrı DEMİR' e fikirlerime ışık tutarak sağladıkları katkılardan dolayı içtenlikle teşekkür ederim.

Her koşulda bana duyduğu güvenle desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, fedakarlığıyla beni daha çok çalışmaya sevk eden değerli hayat arkadaşım Sercan YARBİL' e, öğrenim hayatım boyunca başarılı olacağıma inanan ve desteklerini her zaman yanımda hissettiğim sevgili babam Ersoy BAYDAR, annem Düriye BAYDAR, biricik ağabeyim Mert BAYDAR' a ve tüm sevdiklerime göstermiş oldukları sabır ve anlayıştan dolayı minnettarlıklarımı sunarım.

Ayrıca, doktora öğrenimim boyunca bana burs veren TÜBİTAK' a teşekkürü bir borç bilirim.



## İÇİNDEKİLER

|                                                                                                                     | <u>Sayfa</u> |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| ÖZET . . . . .                                                                                                      | vii          |
| ABSTRACT . . . . .                                                                                                  | ix           |
| TEŞEKKÜR . . . . .                                                                                                  | xi           |
| SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ . . . . .                                                                            | xiv          |
| SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ (Devam) . . . . .                                                                    | xv           |
| 1 GİRİŞ . . . . .                                                                                                   | 1            |
| 2 ÖN BİLGİLER . . . . .                                                                                             | 4            |
| 2.1 Temel Kavramlar . . . . .                                                                                       | 4            |
| 2.2 Adi Türevli Halkalar . . . . .                                                                                  | 21           |
| 2.3 Genelleştirilmiş türevli halkalar . . . . .                                                                     | 22           |
| 2.4 Genelleştirilmiş $(\alpha, \beta)$ -türevli Halkalar . . . . .                                                  | 25           |
| 3 ASAL HALKALARIN LİE İDEALLERİ<br>ÜZERİNDE GENELLEŞTİRİLMİŞ<br>$\alpha$ -TÜREVLERİN SIFIRLAYAN KOŞULLARI . . . . . | 28           |
| 4 ASAL HALKALARIN GENELLEŞTİRİLMİŞ $\alpha$ -TÜREVLERİNİN<br>MERKEZİ KUVVETLERİNİN SIFIRLAYAN KOŞULLARI . . . .     | 43           |
| 5 ASAL HALKALARIN GENELLEŞTİRİLMİŞ LİE TÜREVLERİ                                                                    | 66           |
| 6 SONUÇ . . . . .                                                                                                   | 85           |
| ÖZGEÇMİŞ . . . . .                                                                                                  | 94           |

## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

| <u>Simgeler</u> | <u>Açıklama</u>                                                 |
|-----------------|-----------------------------------------------------------------|
| $Ann_l(A)$      | $A$ kümesinin sol sıfırlayanı                                   |
| $Ann_r(A)$      | $A$ kümesinin sağ sıfırlayanı                                   |
| $End_R({}_R M)$ | ${}_R M$ sol $R$ -modülünün sol $R$ -homomorfizmalarının kümesi |
| $Aut(R)$        | $R$ halkasının otomorfizmalar grubu                             |
| $dim_D V$       | $V$ $D$ -vektör uzayının boyutu                                 |
| $M_n(D)$        | $D$ bölümlü halkası üzerindeki $n \times n$ matrisler halkası   |
| $D(R)$          | $R$ halkasının yoğun sağ ideallerinin kümesi                    |
| $\oplus$        | direkt toplam                                                   |
| $Soc(R)$        | $R$ halkasının “socle” si                                       |
| $Z(R)$          | $R$ halkasının merkezi                                          |
| $Q(R)$          | $R$ halkasının Martindale kesirler halkası                      |
| $Q_s(R)$        | $R$ halkasının simetrik Martindale kesirler halkası             |
| $U(R)$          | $R$ halkasının Utumi kesirler halkası                           |

## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ (Devam)

| <u>Simgeler</u> | <u>Açıklama</u>                            |
|-----------------|--------------------------------------------|
| $C$             | $R$ halkasının genişletilmiş merkezi       |
| $R_C$           | $R$ halkasının merkezi kapanışı            |
| $s_n$           | $n$ değişkenli standart özdeşlik           |
| $K\{X\}$        | $X$ kümesi üzerindeki serbest $K$ -cebiri  |
| $*$             | Serbest çarpım                             |
| $[x, y]$        | $x$ ve $y$ elemanlarının komütatör çarpımı |
| $\otimes$       | tensör çarpım                              |
| $char R$        | $R$ halkasının karakteristiği              |
| $rank(r)$       | $r$ elemanının rankı                       |
| $deg(r)$        | $r$ elemanının cebirsellik derecesi        |
| $L_a$           | $a$ elemanı ile sol çarpım dönüşümü        |
| $R_a$           | $a$ elemanı ile sağ çarpım dönüşümü        |
| $deg_i(h)$      | $i$ ' nci $h$ monomialinin derecesi        |



# 1. GİRİŞ

Asal halkaların türevleri üzerine ilk çalışma 1957 yılında E. C. Posner tarafından yapılmıştır. Posner bu çalışmada bir  $d$  türevinin halka üzerindeki sıfırlayan koşulunu ve halkanın herhangi bir elemanı ile  $d$  türevinin değişmeli olma durumundaki diferansiyel özdeşlikleri ele alarak halkanın değişmeliliğini incelemiştir. Ayrıca, yine aynı çalışmada halkanın karakteristiği ikiden farklı olduğunda  $R$  halkasının sıfırdan farklı iki türevinin bileşkesinin bir türev olması halinde türevlerden birinin sıfır olduğu sonucuna varmıştır. Bu çalışma, daha sonraki yıllarda asal halkaların değişmeliliğinin araştırıldığı bir çok probleme ışık tutmuştur. Ancak, Posner'in kullandığı tekniklerin günümüz tekniklerine göre başlangıç seviyesinde olduğu söylenebilir.

Bir asal halkanın toplamsal endomorfizmalarını ele alan problemleri çalışmak son elli yıl içerisinde oldukça popüler bir konu olmuştur. Halkanın toplamsal endomorfizmaları dendiğinde akıllara sadece türev, genelleştirilmiş türev gibi dönüşümler gelmemelidir. Bunlara ek olarak otomorfizmalar, merkezleyen dönüşümler, Lie dönüşümler, Lie homomorfizmaları, Lie merkezleyen dönüşümler, Lie türevler ve genelleştirilmiş Lie türevler de sıklıkla üzerinde çalışılan dönüşümlerdir.

1978' de I. N. Herstein, 1981' de Giambruno ve Herstein, 1995' te M. Brešar' ın çalışmaları türevli asal halkalar alanındaki ilk çalışmalar arasında yer almaktadır. Genelleştirilmiş türevlere ait ilk cebirsel inceleme B. Hvala tarafından yapılmıştır ([Hvala , 1998](#)).

Türevli asal halkalar teorisinin gelişmesiyle birlikte daha kapsamlı teknikler de bu tür çalışmalarda yer almaya başlamıştır. Araştırmaların çoğunda belirli bir özdeşlik sağlayan asal ve yarı asal halkaların göz önüne alınıyor olması, konunun daha genel bir şekilde ele alınması gerekliliğini ortaya çıkarmıştır. Halkanın toplamsal dönüşümlerini ihtiva eden bir özdeşlik ele alındığında, özdeşliğin ihtiva ettiği dönüşümlerin yapısına bağlı olarak polinom özdeşliği, genelleştirilmiş polinom özdeşliği veya fonksiyonel özdeşlik teorilerinin

den yararlanılmaktadır. Polinom özdeşliği teorisi ilk olarak 1943' te Kaplansky' nin çalışmalarıyla başlamış ve genelleştirilmiş polinom özdeşliği teorisi de 1965' te Amitsur tarafından ele alınmıştır. Fonksiyonel özdeşlik teorisinin çıkış noktası ise şüphesiz 1998 yılında K. I. Beidar tarafından yapılan çalışmadır (Beidar , 1998). Fonksiyonel özdeşlik teorisi polinom ve genelleştirilmiş polinom özdeşliği teorilerine göre daha yeni ve yapısal sonuçları daha kullanışlıdır.

1960' ta E. C. Posner polinom özdeşliği sağlayan asal halkalara ilişkin ve 1969' da W. S. Martindale genelleştirilmiş polinom özdeşliği sağlayan asal halkalara ilişkin oldukça kullanışlı olan sınıflama teoremlerini vermişlerdir (Posner , 1960, Martindale W. S. , 1969). Elde edilen bu sonuçlar polinom veya genelleştirilmiş polinom özdeşliği sağlayan asal halkalar ile bilinen halka yapıları arasında geçişi sağlayarak, ilgili problemlerin çözülebilirliklerini arttırmıştır. 1975' te V. Kharchenko tarafından genelleştirilmiş otomorfizmalı özdeşlikleri sağlayan asal halkalar incelenmiştir (Kharchenko , 1975). Ayrıca, 1978' de V. Kharchenko diferansiyel özdeşliklere ilişkin ilk çalışmayı yapmış ve ünlü teoremini ispatlamıştır (Kharchenko , 1978).

Asal halkaların türevlerinin ve otomorfizmalarının Utumi kesirler halkasına tek türlü genişletilmesi teoremi 1992' de V. Kharchenko tarafından ispatlanmıştır (Kharchenko , 1992). Genelleştirilmiş türevlere ilişkin sonuçlar,  $\alpha, \beta$  keyfi halka otomorfizmaları olmak üzere  $(\alpha, \beta)$ -türevlerin ve genelleştirilmiş  $(\alpha, \beta)$ -türevlerin çalışılmasına olanak sağlamıştır. Genelleştirilmiş  $\alpha$ -türevler genelleştirilmiş türevlerin bir genellemesi olduğundan, bu tip problemlere dayalı çalışmalar literatürdeki bir çok kavramın geniş bir genellemesi niteliğindedir. 2003' te J. C. Chang' in genelleştirilmiş  $\alpha$ -türevlerin karakterizasyonuna ve ayrıca 2005' te C. L. Chuang ve T. K. Lee' nin  $\alpha$ - türevlere ait çalışmaları literatürde oldukça önemli bir yer tutmaktadır (Chang , 2003, Chuang , 2005). Genelleştirilmiş  $\alpha$ -türev ihtiva eden bir özdeşlik ele alındığında otomorfizmalı diferansiyel özdeşliklerin kullanımını gerektiren alt durumlarla karşılaşılmaktadır. Bu alandaki tekniklerin anlaşılabilirliğini sağlayan çalışmalar, 1992' de C. L. Chuang tarafından literatüre kazandırılmıştır (Chuang , 1992, Chuang , 1993).

Asal halkaların özel tip dönüşümlerini ihtiva eden özdeşlikleri ele almaktaki asıl amaç halkanın yapısı ile ilgili bir sonuca varmaktır. Bunun mümkün olmadığı durumlarda ise özdeşliğin ihtiva ettiği dönüşümlerin biçimini belirlemektir. Tez, polinom özdeşliği, genelleştirilmiş polinom ve fonksiyonel özdeşlik teorilerinin uygulamalarını detaylı olarak sergilemekte ve literatürde yer alan sonuçların gelişmiş düzeyde bir genellemesini vermektedir.

Tez kapsamında üç farklı özdeşlik ele alınmıştır. Üç ve dördüncü bölümlerde halkanın değişmeli olmayan Lie ideali üzerinde bir diferansiyel özdeşlik incelenmiştir. İspat teknikleri polinom özdeşliği teorisi ve genelleştirilmiş polinom özdeşliği teorisinin derin uygulamalarını içermektedir. Beşinci bölümde ise halka üzerinde bir fonksiyonel özdeşlik ele alınmış ve daha sonra bu özdeşlik bir asal cebirin merkezi olmayan Lie alt cebirine genişletilmiştir. Her bölümde öncelikle literatür özeti verilecek ve ardından ele alınan problem sunulacaktır.

## 2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde tezin okunurluğunu kolaylaştırmak adına temel tanım ve teoremlere yer verilecektir.

### 2.1. Temel Kavramlar

**Tanım 2.1**  $R$  bir halka olsun. Her  $r \in R$  için  $nr = 0$  olacak şekilde bir pozitif  $n$  tamsayısı var ise bu şekildeki  $n$  tamsayılarının en küçüğüne  $R$  **halkasının karakteristiği** denir ve  $\text{char} R = n$  ile gösterilir.

**Tanım 2.2**  $R$  bir halka ve  $n$  negatif olmayan bir tamsayı olsun. Her  $r \in R$  için  $nr = 0$  olduğunda  $n = 0$  veya  $r = 0$  oluyorsa  $R$  halkasına  **$n$ -burulmasız halka** denir.

**Önerme 2.1** (*Dummit and Foote , 2004*)  $G$  bir grup ve  $H, K$   $G$  nin iki alt grubu olsun.  $H \cup K$  nin  $G$  grubunun bir alt grubu olması için gerek ve yeter bir koşul  $H \subseteq K$  veya  $K \subseteq H$  olmasıdır.

**Tanım 2.3**  $R$  bir halka ve  $A$ ,  $R$  nin boştan farklı bir alt kümesi olsun.

$$Z(A) = \{r \in R : \forall x \in A \text{ için } rx = xr\}$$

kümesine  $A$  altkümesinin  $R$  halkasındaki **merkezleyeni** denir. Özel olarak  $A = R$  alınırsa  $Z(R)$  ye  $R$  halkasının **merkezi** denir.

**Tanım 2.4** (*Hungerford , 1974*)  $K$  birimli, değişmeli bir halka ve  $R$  herhangi bir halka olsun.  $(R, +)$  birimsel bir  $K$ -modül ve her  $a \in K$ ,  $s, t \in R$  için  $a(st) = (as)t = s(at)$  eşitlikleri sağlanıyorsa  $R$ ,  $K$  değişmeli halkası üzerinde bir **cebirdir** veya  $R$  bir  **$K$ -cebirdir** denir.

**Tanım 2.5** (*Hungerford , 1974*)  $R$  bir halka ve  ${}_R M$  bir sol  $R$ -modül olsun.  $RM \neq (0)$  ve  ${}_R M$  modülünün hiçbir öz alt modülü yok ise o zaman  ${}_R M$  modülüne **basit (indirgenemez) modül** denir.  $R^2 \neq (0)$  ve  $R$  halkasının iki yanlı hiçbir öz ideali yok ise o zaman  $R$  halkasına **basit halka** denir.

**Tanım 2.6** (*Hungerford , 1974*)  ${}_R M$  sol  $R$ -modülünün boştan farklı bir alt kümesi  $A$  olsun.

$$\text{Ann}_l(A) = \{r \in R : \forall a \in A \text{ için } ra = 0\}$$

kümesine  $A$  nın **sol sıfırlayanı** denir. Benzer şekilde

$$\text{Ann}_r(A) = \{r \in R : \forall a \in A \text{ için } ar = 0\}$$

kümesi de  $A$  nın **sağ sıfırlayanı** olarak adlandırılır.

**Tanım 2.7** (*Hungerford* , 1974)  ${}_R M$  bir sol  $R$ -modül olsun.

$\text{Ann}_l(M) = (0)$  ise  $M$  ye sol “**faithful**” modül denir. Eğer  $R$  halkası basit, “faithful” bir sol  $R$ -modüle sahip ise o zaman  $R$  ye **primitif halka** denir.

**Tanım 2.8** (*Hungerford* , 1974)  $D$  bir bölümlü halka,  ${}_D V$  bir sol vektör uzayı ve  $R$ ,  $\text{End}_D V$  halkasının bir alt halkası olsun.  $n$  pozitif bir tamsayı olmak üzere  $V$  vektör uzayının lineer bağımsız her  $\{u_1, \dots, u_n\}$  alt kümesi ve herhangi bir  $\{v_1, \dots, v_n\}$  alt kümesi için  $\phi(u_i) = v_i, i \in \{1, \dots, n\}$  olacak şekilde bir  $\phi \in R$  var ise  $R$  halkasına  $V$  vektör uzayının **endomorfizmalarının yoğun alt halkası** denir.

**Teorem 2.1** (*Hungerford* , 1974, Theorem 9.1.12)(Jacobson Yoğunluk Teoremi)  $R$  bir primitif halka,  $M$  basit, “faithful” bir  $R$ -modül olsun.  $M$ ,  $D = \text{End}_R(M)$  bölümlü halkası üzerinde bir vektör uzayı olarak ele alınırsa  $R$  halkası  $M$  nin endomorfizmalarının bir yoğun alt halkasına izomorftur.

**Teorem 2.2** (*Hungerford* , 1974, Theorem 9.1.9)  $R$ , bir  $D$  bölümlü halkası üzerindeki sol (sağ) vektör uzayının endomorfizmalarının bir yoğun alt halkası olsun. O zaman,  $R$  nin bir sol (sağ) Artin halkası olması için gerek ve yeter bir koşul  $\dim_D V$  nin sonlu olmasıdır. Bu durumda  $R = \text{End}_D V$  dir.

**Teorem 2.3** (*Hungerford* , 1974, Theorem 9.1.14)(Wedderburn-Artin Teoremi)  $R$  bir Artin halkası olmak üzere aşağıdaki koşullar denktir:

(i)  $R$  basit bir halkadır.

(ii)  $R$  primitif bir halkadır.

(iii)  $R$ , bir  $D$  bölümlü halkası üzerindeki sıfırdan farklı  $V$  vektör uzayının yoğun endomorfizmalar halkasına izomorftur.

(iv) Bir pozitif  $n$  tamsayısı ve bölümlü bir  $D$  halkası için  $R$ ,  $D$  üzerinde  $n \times n$  matrisler halkası  $M_n(D)$  ye izomorftur.

**Teorem 2.4** ([Hungerford , 1974](#)) (Wedderburn Teoremi)  $D$  bir sonlu bölümlü halka olsun. O zaman  $D$  bir cisimdir.

**Önerme 2.2** ([Beidar et al. , 1996](#), Corollary 4.2.2)  $D$ , merkezi  $C$  üzerinde sonlu boyutlu bir bölümlü cebir ve  $F$ ,  $D$  nin maksimal alt cismi olsun. O zaman  $D \otimes_C F \cong M_n(F)$ ,  $\dim_C(D) = n^2$  ve  $\dim_C(F) = n$  olacak şekilde bir  $n$  pozitif tamsayısı vardır.

**Tanım 2.9**  $L$ , bir  $R$  halkasının toplamsal bir alt grubu olsun. Eğer  $[L, R] \subseteq L$  ise  $L$  ye bir **Lie ideal** denir.

**Uyarı 2.1**  $R$  bir halka,  $Z(R)$   $R$  nin merkezi ve  $L$ ,  $R$  nin bir Lie ideali olsun. Eğer  $L$ ,  $Z(R)$  de kapsanmıyor ise o zaman  $L$  ye **merkezi olmayan Lie ideal** denir.

**Yardımcı Özellik 2.1** ([Herstein , 1969](#), Lemma 1.4)  $R$  karakteristiği ikiden farklı bir asal halka ve  $L$ ,  $R$  halkasının merkezi olmayan bir Lie ideali ise o zaman  $R$  nin  $0 \neq [I, R] \subseteq L$  olacak şekilde sıfırdan farklı bir  $I = R[L, L]R$  ideali vardır.

**Yardımcı Özellik 2.2** ([Herstein , 1969](#), Lemma 1.10) Bir  $R$  halkasının idempotentleri ile üretilen toplamsal alt grubu  $E$ ,  $R$  halkasının bir Lie idealini teşkil eder.  $R$  bir basit halka ve aşık olmaya sahip bir idempotent elemana sahip ise o zaman  $[R, R] \subseteq [E, R] \subseteq E$  dir.

**Tanım 2.10** ([Beidar et al. , 1996](#))  $R$  bir halka olsun. Her  $a \in R$  için  $axa = a$  olacak şekilde bir  $x \in R$  varsa  $R$  halkasına (**von Neumann**) **regüler halka** denir.

**Tanım 2.11** ([McCoy , 1964](#))  $R$  bir halka,  $P$   $R$  nin bir ideali ve  $P \neq R$  olsun.  $R$  halkasının herhangi  $I, J$  idealleri için  $IJ \subseteq P$  iken  $I \subseteq P$  veya  $J \subseteq P$  oluyorsa  $P$  idealine  $R$  halkasının bir **asal ideal** denir.

**Teorem 2.5** ([McCoy , 1964](#), Theorem 4.3)  $R$  halkasının bir  $P \neq R$  ideali için aşağıdakiler denktir:

- (i)  $P$  asal idealdir.

(ii)  $a, b \in R$  için  $(a)(b) \subseteq P$  ise  $a \in P$  veya  $b \in P$  dir.

(iii)  $a, b \in R$  için  $aRb \subseteq P$  ise  $a \in P$  veya  $b \in P$  dir.

(iv)  $R$  halkasının  $I, J$  sağ (sol) idealleri için  $IJ \subseteq P$  ise  $I \subseteq P$  veya  $J \subseteq P$  dir.

**Önerme 2.3** (*McCoy , 1964, Theorem 4.12*) Herhangi bir  $R$  halkası için aşağıdakiler denktir:

(i)  $a, b \in R$  için  $aRb = (0)$  ise  $a = 0$  veya  $b = 0$  dır.

(ii)  $R$  nin  $I, J$  sağ (sol) idealleri için  $IJ = (0)$  ise  $I = 0$  veya  $J = 0$  dır.

(iii)  $R$  nin  $I, J$  idealleri için  $IJ = (0)$  ise  $I = 0$  veya  $J = 0$  dır.

**Tanım 2.12** Bir  $R$  halkası Önerme 2.3 teki denk koşullardan birini sağlıyor ise o zaman  $R$  halkasına bir **asal halka** denir. Her primitif halka asaldır.

**Önerme 2.4** (*Hungerford , 1974*)  $R$  bir halka ve  $P$ ,  $R$  nin bir asal ideali olsun. O zaman,  $R/P$  bir asal halkadır.

**Yardımcı Özellik 2.3** (*Beidar et al. , 1996*)  $R$  bir asal halka ve  $a, b \in R$  olsun.  $a \in Z(R)$  ve  $ab \in Z(R)$  ise  $b \in Z(R)$  veya  $a = 0$  dır.

**Tanım 2.13** (*McCoy , 1964*)  $R$  bir halka ve  $Q$ ,  $R$  nin bir ideali olsun.  $R$  halkasının herhangi bir  $I$  ideali için  $I^2 \subseteq Q$  iken  $I \subseteq Q$  oluyorsa  $Q$  idealine  $R$  nin bir **yarı asal ideali** denir. Asal bir ideal her zaman bir yarı asal idealdir.

**Önerme 2.5** (*McCoy , 1964, Theorem 4.12*)  $R$  halkasının bir  $Q \neq R$  ideali için aşağıdakiler denktir:

(i)  $Q$  yarı asal idealdir.

(ii)  $a \in R$  için  $(a)^2 \subseteq Q$  ise  $a \in Q$  dur.

(iii)  $a \in R$  için  $aRa \subseteq Q$  ise  $a \in Q$  dur.

(iv)  $R$  nin  $I$  sağ (sol) ideali için  $I^2 \subseteq Q$  ise  $I \subseteq Q$  dur.

**Önerme 2.6** (*McCoy , 1964*)  $R$  bir halka olsun. O zaman aşağıdakiler denktir:

- (i)  $a \in R$  için  $aRa = (0)$  ise  $a = 0$  dır.
- (ii)  $R$  nin  $I$  sağ (sol) idealleri için  $I^2 = (0)$  ise  $I = 0$  dır.
- (iii)  $R$  nin  $I$  idealleri için  $I^2 = (0)$  ise  $I = 0$  dır.
- (iv)  $R$  nin sıfırdan farklı nilpotent ideali yoktur.

**Tanım 2.14** Bir  $R$  halkası Önerme 2.6 daki denklemlerden birini sağlıyor ise  $R$  halkasına bir **yarı asal halka** denir. Her asal halka bir yarı halka asal halkadır.

**Tanım 2.15**  $R$  bir halka ve  $I$ ,  $R$  halkasının sıfırdan farklı bir sağ ideali olsun. Her  $r_1, r_2 \in R$  için  $r_1 r \neq 0$  ve  $r_2 r \in I$  olacak şekilde bir  $r \in R$  varsa  $I$  idealine **yoğun sağ ideal** denir.

**Önerme 2.7** (Beidar et al. , 1996, Remark 2.1.5)  $R$  bir yarı asal halka ve  $I$   $R$  nin bir ideali olsun. O zaman,

- (i)  $\text{Ann}_l(I) = \text{Ann}_r(I)$ .
- (ii)  $\text{Ann}_l(I) \cap I = (0)$ .
- (iii)  $I + \text{Ann}_l(I)$   $R$  halkasının bir yoğun sağ idealidir.

**Yardımcı Özellik 2.4** (Beidar et al. , 1996)  $R$  bir asal halka ve  $I$ ,  $R$  halkasının sağ (sol) ideali olsun. O zaman  $\text{Ann}_r(I) = (0)$  ( $\text{Ann}_l(I) = (0)$ ) dır.

**Tanım 2.16** (Beidar et al. , 1996)  $R$  bir halka ve  $I$   $R$  nin sıfırdan farklı bir sağ ideali olsun.  $R$  halkasının sıfırdan farklı her  $J$  sağ ideali için  $I \cap J \neq (0)$  ise  $I$  ya  $R$  halkasının bir **“essential” sağ ideali** denir.

**Uyarı 2.2** Yoğun bir sağ ideal “essential” idealdir. Ayrıca, bir  $R$  asal halkasında sıfırdan farklı her ideal “essential” idealdir.

**Önerme 2.8** (Beidar et al. , 1996, Proposition 4.3.3)  $R$  herhangi bir halka,  $I$ ,  $R$  halkasının bir minimal ideali ve  $I^2 \neq (0)$  olsun. O zaman  $I = Re$  olacak şekilde bir  $e \in I$  idempotenti vardır. Üstelik  $eRe$  bir bölümlü halkadır. Ayrıca  $R$  bir yarı asal halka ve  $f \in R$  bir idempotent olsun.  $fRf$  bölümlü bir halka teşkil ediyorsa  $Rf$ ,  $R$  halkasının bir minimal sol idealidir.

**Tanım 2.17** (*Rowen , 1980*)  $R$  bir halka,  $M$  bir basit “faithful”  $R$ -modül olsun.  $D = \text{End}_R(M)$  bölümlü halkası ve her  $x \in R$  için  $xM$ ,  $M$  nin bir alt  $D$ -vektör uzayı olmak üzere  $\text{rank}(x) = \dim_D(xM)$  boyutuna  $x$  elemanının  $M$ -**rankı** denir.

**Yardımcı Özellik 2.5** (*Rowen , 1980*)  $R$  bir halka ve  $x, y \in R$  olsun. O zaman

$$\text{rank}(x + y) \leq \text{rank}(x) + \text{rank}(y)$$

$$\text{rank}(xy) \leq \text{rank}(x)$$

$$\text{rank}(xy) \leq \text{rank}(y)$$

dir.

**Yardımcı Özellik 2.6** (*Rowen , 1980*)  $R$  bir yarı asal halka,  $M$  bir basit “faithful”  $R$ - modül olsun.  $x \in R$  için  $\text{rank}(x) = 1$  ise  $Rx$ ,  $R$  halkasının bir minimal sol idealidir.

**Tanım 2.18** (*Beidar et al. , 1996*) Bir  $R$  halkasının tüm minimal sol (sağ) ideallerinin toplamına  $R$  halkasının **sol “socle”** ı (**sağ “socle”**) denir ve  $\text{Soc}_l(R)$  ( $\text{Soc}_r(R)$ ) ile gösterilir. Genel halde bir  $R$  halkasının sol ve sağ “socle” larının eşit olması beklenmez. Ancak  $R$  bir yarı asal halka ise  $\text{Soc}_l(R) = \text{Soc}_r(R)$  olur ve bu durumda  $\text{Soc}(R)$  ile gösterilir.  $\text{Soc}(R)$ ,  $R$  halkasının bir idealidir.

**Tanım 2.19** (*Rowen , 1988*)  $R$  bir yarı asal halka,  $e \in R$  bir idempotent eleman olsun.  $\text{rank}(e) = 1$  ise  $e$  elemanına **minimal idempotent** denir.

**Uyarı 2.3** (*Beidar et al. , 1996*) Bir yarı asal  $R$  halkası minimal idempotente sahip ise o zaman  $R$  sıfırdan farklı bir “socle” a sahiptir. Üstelik  $e \in R$ ,  $R$  halkasının bir minimal idempotenti ise  $eRe$  bir bölümlü halkadır.

**Tanım 2.20** (*Beidar et al. , 1996*)  $R$  bir yarı asal halka ise

$$\text{Soc}(R) = \{r \in R : \text{rank}(r) < \infty\}$$

dir.

**Yardımcı Özellik 2.7** (*Rowen* , 1988, Lemma 2.1.24)  $R$  bir asal halka ve  $\text{Soc}(R) \neq 0$  olsun. O zaman  $\text{Soc}(R) = \bigcap \{R \text{ nin sıfırdan farklı idealleri}\}$  dir.

**Teorem 2.6** (*Beidar et al.* , 1996, Theorem 4.3.7)  $R$  sıfırdan farklı “socle” a sahip primitif bir halka,  $V$  herhangi bir indirgenemez “faithful”  $R$ -modül ve  $e \in R$ ,  $R$  halkasının bir minimal idempotent elemanı olsun.  $D = \text{End}_R(V_R)$  (ilgili bölümlü halka) ve  $S = eRe$  ile gösterilsin. O zaman

(i)  $D$  ile  $S$  halka olarak izomorftur.

(ii)  $R$  halkasının sıfırdan farklı her sağ (sol) ideali bir minimal idempotent içerir.

(iii)  $\text{Soc}(R)$ ,  $\text{End}({}_D V)$  halkasının bir sağ idealidir.

(iv)  $\text{Soc}(R)$ ,  $R$  halkasının her sağ (sol) “essential” idealinde kapsanır.

(v)  $\text{Soc}(R)$ ,  $R$  halkasının tek minimal idealidir.

(vi)  $\text{Soc}(R)$  bir basit halkadır.

**Önerme 2.9** (*McCoy* , 1964, Corollary 7.9 and Theorem 7.13)  $R$  minimal bir sağ ideale sahip bir basit halka ise  $\text{Soc}(R)$  regülerdir.

## Utumi Kesirler Halkası

$R$  bir yarı asal halka ve  $D(R)$ ,  $R$  halkasının yoğun ideallerinin kümesi olsun.

$$\mathcal{T} = \{(f; I) \mid I \in D(R) \text{ ve } f : I_R \rightarrow R_R \text{ bir sağ } R\text{-modül homomorfizması}\}$$

kümesi üzerinde  $(f; I), (g; J) \in \mathcal{T}$  için aşağıdaki şekilde tanımlanan  $\approx$  bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

$(f; I) \approx (g; J) :\Leftrightarrow L \subseteq I \cap J$  olacak şekilde bir  $L \in D(R)$  vardır ve  $L$  üzerinde

$$f = g \text{ dir.}$$

Bir  $(f; I) \in \mathcal{T}$  elemanının  $\approx$  bağıntısına göre denklik sınıfını  $[f; I]$  ile gösterelim ve bu denklik sınıfları üzerindeki toplama ve çarpma işlemlerini aşağıdaki gibi tanımlıyalım:

$$[f; I] + [g; J] = [f + g; I \cap J] \quad (2.1)$$

$$[f; I][g; J] = [fg; g^{-1}(I)] \quad (2.2)$$

**Tanım 2.21** (*Beidar et al. , 1996*) (2.1) ve (2.2) de tanımlanan işlemlerle  $\mathcal{T}$  kümesinin elemanlarının denklik sınıflarının kümesi bir halka teşkil eder ve bu halkaya  $R$  halkasının **maksimal sağ kesirler halkası** (**sağ Utumi kesirler halkası**) denir ve  $U(R)$  ile gösterilir.

**Önerme 2.10** (*Beidar et al. [1996], Proposition 2.1.7*) Herhangi bir  $R$  yarı asal halkasının maksimal sağ kesirler halkası izomorfizmaya bağlı olarak aşağıdaki koşulları sağlayan bir  $U(R)$  halkası olarak karakterize edilebilir:

- (i)  $R, U(R)$  nin bir alt halkasıdır.
- (ii) Her  $q \in U(R)$  için  $qI \subseteq R$  olacak şekilde bir  $I \in D(R)$  vardır.
- (iii) Her  $q \in U(R)$  ve  $I \in D(R)$  için  $qI = (0)$  ise  $q = 0$  dır.
- (iv) Her  $I \in D(R)$ ,  $\varphi : I_R \rightarrow R_R$  sağ  $R$ -modül dönüşümü ve her  $x \in I$  için  $\varphi(x) = qx$  olacak şekilde bir  $q \in U(R)$  vardır.

### Martindale Kesirler Halkası

$R$  bir yarı asal halka olsun.

$$\mathcal{N} = \{I \mid I, R \text{ nin bir ideali ve } Ann_l(I) = (0)\}$$

kümesi çarpım ve sonlu arakesit altında kapalıdır.

$$\mathcal{M} = \{(f; I) \mid I \in \mathcal{N}, f : I_R \rightarrow R_R \text{ sağ } R\text{-modül homomorfizması}\}$$

kümesini göz önüne alalım.  $\mathcal{M}$  kümesi üzerinde  $(f; I), (g; J) \in \mathcal{M}$  için aşağıdaki şekilde tanımlanan  $\approx$  bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

$$(f; I) \approx (g; J) :\Leftrightarrow L \subseteq I \cap J \text{ olacak şekilde bir } L \in \mathcal{N} \text{ vardır ve } L \text{ üzerinde } f = g \text{ dir.}$$

Bir  $(f; I) \in \mathcal{M}$  elemanın  $\approx$  bağıntısına göre denklik sınıfını  $\{f; I\}$  ile gösterelim ve bu denklik sınıfları üzerindeki toplama ve çarpma işlemlerini aşağıdaki gibi tanımlıyalım:

$$\{f; I\} + \{g; J\} = \{f + g; JI\} \quad (2.3)$$

$$\{f; I\}\{g; J\} = \{fg; JI\} \quad (2.4)$$

**Tanım 2.22** (*Beidar et al. , 1996*) (2.3) ve (2.4) de tanımlanan işlemlerle  $\mathcal{M}$  kümesinin elemanlarının denklik sınıflarının kümesi bir halka teşkil eder. Bu halkaya  $R$  halkasının **iki yanlı (sağ) Martindale kesirler halkası** denir ve  $Q(R)$  ile gösterilir.

**Önerme 2.11** (*Beidar et al. , 1996, Proposition 2.2.1*) Herhangi bir  $R$  yarı asal halkasının iki yanlı sağ kesirler halkası izomorfizmaya bağlı olarak aşağıdaki özellikleri sağlayan  $Q(R)$  halkası olarak karakterize edilebilir.

- (i)  $R, Q(R)$  nin bir alt halkasıdır.
- (ii) Her  $q \in Q(R)$  için  $qI \subseteq R$  olacak şekilde bir  $I \in \mathcal{N}$  vardır.
- (iii) Her  $q \in Q(R)$  ve  $I \in \mathcal{N}$  için  $qI = (0)$  ise  $q = 0$  dır.
- (iv) Her  $I \in \mathcal{N}$ ,  $\varphi : I_R \rightarrow R_R$  sağ  $R$ -modül dönüşümü ve her  $x \in I$  için  $\varphi(x) = qx$  olacak şekilde bir  $q \in Q(R)$  vardır.

**Tanım 2.23** (*Beidar et al. , 1996*)  $R$  bir yarı asal halka ve  $Q(R)$ ,  $R$  nin Martindale kesirler halkası olmak üzere  $Q(R)$  nin

$$Q_s(R) = \{q \in U(R) \mid \text{bazı } J \in \mathcal{N} \text{ için } qJ \cup Jq \subseteq R\}$$

alt halkasına  $R$  halkasının **simetrik (Martindale) kesirler halkası** denir.

**Tanım 2.24** (*Beidar et al. , 1996*)  $R$  halkasının Martindale kesirler halkası  $Q(R)$  olmak üzere  $Q(R)$  halkasının merkezine  $R$  nin **genişletilmiş merkezi** denir ve  $C$  ile gösterilir.  $R$  bir yarı asal halka ise

$$C = Z(Q_s(R)) = Z(Q(R)) = \{q \in U(R) \mid \text{her } r \in R \text{ için } qr = rq\}$$

dir.

**Tanım 2.25** (*Beidar et al. , 1996*)  $R$  bir yarı asal halka olsun.  $RC$ ,  $U(R)$  nin  $R$  halkasını içeren bir alt halkasıdır ve  $R_C = RC + C$  ye  $R$  halkasının **merkezi kapanışı** denir. Eğer  $R = R_C$  ise o zaman  $R$  halkasına **merkezi kapalı halka** denir.

**Tanım 2.26** (*Jacobson , 1975*)  $K$  bir cisim ve  $R$  bir basit  $K$ -cebiri olsun.  $R$ ,  $K$ -cebirinin merkezi  $Z(R)$  bir cisimdir. Eğer  $R$  nin merkezi  $Z(R) = K.1$  ise  $R$  ye  $K$  üzerinde **merkezi basit cebir** denir.

**Yardımcı Özellik 2.8** (*Beidar et al. , 1996*)  $R$  bir asal halka ise o zaman  $U(R)$ ,  $Q(R)$ ,  $Q_s(R)$  ve  $R_C$  asal halkalardır ve ayrıca  $C$  bir cisimdir.

**Tanım 2.27** (*Brešar , 2014*) Bir merkezi kapalı  $R$  asal halkası, genişletilmiş merkezi  $C$  üzerinde bir cebir teşkil ediyorsa  $R$  halkasına **merkezi kapalı asal cebir** denir.

Merkezi kapalı asal cebir kavramı, merkezi basit cebir kavramının bir genellemesi olarak düşünülebilir. Örneğin  $V$  bir  $F$  cismi üzerinde sonsuz boyutlu bir vektör uzayı olsun.  $End_F(V)$  basit değildir, fakat bir merkezi kapalı asal cebirdir.

**Yardımcı Özellik 2.9** (*Brešar , 2014*) Herhangi bir  $R$  asal halkasının merkezi kapanışı  $R_C$ ,  $C$  üzerinde merkezi kapalı bir asal cebirdir.

**Yardımcı Özellik 2.10** (*Martindale W. S. , 1969, Theorem 1*)  $R$  bir asal halka ve  $I$ ,  $R$  nin sıfırdan farklı bir ideali olsun.  $a, b \in Q(R)$  olmak üzere her  $x \in I$  için  $axb = bxa$  ise o zaman  $a$  ve  $b$  elemanları  $C$  üzerinde lineer bağımlıdır.

**Yardımcı Özellik 2.11** (*Martindale W. S. , 1969, Theorem 2*)  $R$  bir asal halka ve  $I$ ,  $R$  nin sıfırdan farklı bir ideali olsun.  $a_i, b_i \in Q(R)$  olmak üzere her  $x \in I$  için  $\sum_{i=1}^n a_i x b_i = 0$  olsun. Eğer  $a_1, \dots, a_n$  elemanları  $C$  üzerinde lineer bağımsız ise o zaman her  $i \in \{1, \dots, n\}$  için  $b_i = 0$  dır. Benzer şekilde  $b_1, \dots, b_n$  elemanları  $C$  üzerinde lineer bağımsız ise o zaman her  $i \in \{1, \dots, n\}$  için  $a_i = 0$  dır.

**Teorem 2.7** (*Brešar , 2014, Theorem 7.4.3*)  $R$  bir asal halka ve  $I, R$  nin sıfırdan farklı bir ideali olsun.  $a_i, b_i, c_i, d_i \in Q(R)$  olmak üzere her  $x \in I$  için

$$\sum_{i=1}^n a_i x b_i = \sum_{j=1}^m c_j x d_j$$

olduğunu kabul edelim.  $a_1, \dots, a_n$  elemanları  $C$  üzerinde lineer bağımsız ise o zaman her bir  $b_i, d_1, \dots, d_m$  elemanlarının bir  $C$ -lineer birleşimidir. Benzer şekilde  $b_1, \dots, b_n$  elemanları  $C$  üzerinde lineer bağımsız ise o zaman her bir  $a_i, c_1, \dots, c_m$  elemanlarının bir  $C$ -lineer birleşimidir.

## Özdeşlikli Halkalar

Bu kısımda, tezde ele alınan problemlerin temelini oluşturan halkanın özel tip dönüşümlerini ihtiva eden özdeşliklere ait kavram ve sonuçlara yer verilecektir. Bu kapsamda polinom özdeşliği, genelleştirilmiş polinom özdeşliği, diferansiyel özdeşlik ve fonksiyonel özdeşlik kavramları tanıtılacaktır. Polinom Özdeşliği ve Genelleştirilmiş Polinom Özdeşliği Teorisine nazaran Fonksiyonel Özdeşlik Teorisi daha yakın zamanda çalışılmaya başlanmıştır.

**Tanım 2.28** (*Jacobson , 1964*)  $X = \{\xi_1, \xi_2, \dots\}$  herhangi bir sayılabilir küme olmak üzere,  $X$  kümesinin elemanlarından oluşan  $\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n$  şeklindeki sonlu dizilere **kelime** denir.  $X$  kümesi üzerinde çarpma işlemi “yan yana koyma” olarak tanımlıdır.  $X$  ile üretilen birimli serbest yarı grup  $F\langle X \rangle$  olsun.  $K$  birimli, değişmeli bir halka olmak üzere  $K\{X\}$ ,  $F\langle X \rangle$  i taban kabul eden serbest  $K$ -modülünü gösterebilir. Bu durumda  $K\{X\}$  bir  $K$ -cebirdir ve bu cebire  $X$  üzerindeki **serbest  $K$ -cebir** denir.

Uygunluk açısından  $(\xi_1 \dots \xi_n)$  dizisini  $(X_1, \dots, X_n)$  ile gösterelim. Eğer  $X = \{X_1, \dots, X_n\}$  ise  $K\{X\}$  serbest cebiri  $K\{X_1, \dots, X_n\}$  ile gösterilir.

**Tanım 2.29** (*Rowen , 1980*)  $K\{X\}$  serbest cebirinin elemanlarına **polinom** denir.  $X_i \in X$  ve  $\alpha_i \in K$  olmak üzere her  $f \in K\{X\}$  polinomu  $f = \sum \alpha_i X_i$  yapısındadır. Burada  $\alpha_i \neq 0$  ise  $\alpha_i X_i$  terimine  $f$  polinomunun bir **monomiali** denir.

**Tanım 2.30** (*Rowen , 1980*)  $f \in K\{X\}$  ve  $f$  polinomunun her  $h$  monomiali için  $\deg^i(f) = \max\{\deg_i(h)\}$  ve sıfırdan farklı her  $h$  monomiali için de

$\deg_i(f) = \min\{\deg_i(h)\}$  olsun. O zaman  $h, f$  polinomunun herhangi bir monomiali olmak üzere  $f$  **polinomunun derecesi**  $\deg(f) = \max\{\deg(h)\}$  olarak tanımlanır.

**Tanım 2.31** (Rowen , 1980) Herhangi bir  $f \in K\{X\}$  polinomu için

- $\deg^i(f) = \deg_i(f)$  ise  $f$  ye  $X_i$  ye göre **homojen**,
- $\deg^i(f) = \deg_i(f) = 1$  ise  $f$  ye  $X_i$  ye göre **doğrusal**,
- Her bir  $i$  için  $f$  polinomu  $X_i$  de doğrusal ise veya  $\deg^i(f) = 0$  ise  $f$  polinomuna **çoklu doğrusal polinom** denir.

**Tanım 2.32** (Rowen , 1980)  $f \in K\{X_1, \dots, X_n\}$  ise  $f = f(x_1, \dots, x_n)$  şeklinde yazılır.  $R$  bir  $K$ -cebiri olsun. Her  $r_i \in R$  için  $f(r_1, \dots, r_n) = 0$  ise  $f$  ye bir **polinom özdeşliği** ve  $R$  halkasına da bir **polinom özdeşliği halkası** denir.

**Tanım 2.33** (Jacobson , 1964)  $\{1, 2, \dots, n\}$  kümesi üzerindeki simetrik grup  $S_n$  ve  $\sigma \in S_n$  olsun.  $f \in K\{X\}$  bir çoklu doğrusal polinom ise  $\lambda_\sigma \in K$  için

$$f = \sum_{\sigma \in S_n} \lambda_\sigma X_{\sigma(1)} \dots X_{\sigma(n)}$$

formundadır.

**Tanım 2.34** (Rowen , 1980)  $R$  bir halka,  $n \geq 2$  bir tam sayı ve  $S_n, \{1, 2, \dots, n\}$  kümesi üzerindeki simetrik grup olsun.  $\text{sgn} : S_n \rightarrow \{-1, 1\}$  işaret fonksiyonu olmak üzere her  $x_1, \dots, x_n \in R$  için

$$s_n = s_n(X_1, \dots, X_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) X_{\sigma(1)} \dots X_{\sigma(n)}$$

ile tanımlı polinoma  $n$  **değişkenli standart polinom** denir.

**Örnek 2.1**  $R$  bir halka olsun. Her  $X_1, X_2, X_3 \in R$  için

$$\begin{aligned} s_3(X_1, X_2, X_3) &= \sum_{\sigma \in S_3} \text{sgn}(\sigma) X_{\sigma(1)} X_{\sigma(2)} X_{\sigma(3)} \\ &= X_1 X_2 X_3 - X_2 X_1 X_3 - X_3 X_2 X_1 - X_1 X_3 X_2 + X_2 X_3 X_1 + X_3 X_1 X_2 \end{aligned}$$

3 değişkenli standart polinomdur.

**Teorem 2.8** (*Posner* , 1960, Theorem) Bir  $R$  asal halkasının genişletilmiş merkezi  $C$  ve merkezi kapanışı  $R_C$  olsun.  $R$  halkasının  $C$  üzerinde bir polinom özdeşliği halkası olması için gerek ve yeter bir koşul  $\dim_C(R_C) < \infty$  olmasıdır.

**Teorem 2.9** (*Martindale W. S.* , 1969, Theorem 5) (*Amitsur-Levitzki Teoremi*)  $M_n(K)$ , herhangi bir  $K$  değişmeli cebiri üzerindeki matrisler halkası olsun. O zaman,  $M_n(K)$  halkası  $s_{2n}$  standart polinom özdeşliğini sağlar.

**Tanım 2.35** (*Beidar et al.* , 1996)  $R$  bir yarı asal halka ve  $X$ , değişmeli olmayan bilinmeyenlerin sayılabilir bir kümesi olsun.  $T = Q(R) *_C C\{X\}$  serbest çarpımını ele alalım.  $T$  kümesinin elemanlarına **genelleştirilmiş polinom** denir.  $q_i \in Q(R)$  ve  $y_i \in X$  olmak üzere,  $m = q_0 y_1 q_1 y_2 q_2 \dots y_n q_n$  tipindeki elemanlara **monomial**,  $q_i$  elemanlarına da  $m$  monomialinin **katsayıları** denir.  $T$  kümesinin her  $f$  elemanı, monomiallerinin sonlu toplamı şeklindedir ve bu gösterim tek türdür.  $f = f(x_1, \dots, x_n) \in T$  olmak üzere her  $r_1, \dots, r_n \in R$  için  $f(r_1, \dots, r_n) = 0$  ise  $f$  polinomuna bir **genelleştirilmiş polinom özdeşliği** ve  $R$  halkasına da bir **genelleştirilmiş polinom özdeşliği halkası** denir.

Eğer  $f \in T = Q(R) *_C C\{X\}$ ,  $T$  serbest çarpımının sıfırı ise o zaman  $f$ , aşıkâr genelleştirilmiş polinom özdeşlik, aksi halde aşıkâr olmayan genelleştirilmiş polinom özdeşlik olarak adlandırılır.

**Teorem 2.10** (*Martindale W. S.* , 1969, Theorem 3) (*Martindale Teoremi*) Bir  $R$  asal halkasının genişletilmiş merkezi  $C$  ve merkezi kapanışı  $R_C$  olsun.  $R$  halkasının bir genelleştirilmiş polinom özdeşliği halkası olması için gerek ve yeter bir koşul  $eR_C$  minimal sağ ideal ve  $eR_C e$   $C$  üzerinde sonlu boyutlu bölümlü cebir olacak şekilde  $R_C$  nin bir  $e$  idempotent elemanını içeren bir primitif halka olmasıdır. Dolayısıyla  $\text{Soc}(R) \neq 0$  dır.

**Teorem 2.11** (*Martindale W. S.* , 1969, Theorem 4) (*Kaplansky Teoremi*)  $R$ , genişletilmiş merkezi  $C$  olan bir asal halka olsun.  $R$  halkasının  $C$  üzerinde bir polinom özdeşliği halkası olması için gerek ve yeter bir koşul  $R$  nin  $C$  üzerinde sonlu boyutlu, merkezi basit cebir olmasıdır.

**Teorem 2.12** (*Chuang* , 1988, Theorem 2)  $R$  bir asal halka ve  $U(R)$ ,  $R$  nin Utumi kesirler halkası olsun.  $U(R)$  halkasının herhangi bir yoğun alt modülü  $M$  için,  $M$  ve  $U(R)$  aynı genelleştirilmiş polinom özdeşliklerini sağlar.

**Önerme 2.12** (*Chuang , 1988, Lemma 2*)  $U(R)$ , bir  $R$  asal halkasının  $Utumi$  kesirler halkası ve  $B$ ,  $U(R)$  nin  $C$  üzerindeki bir bazı olsun.  $\alpha_i \in C$ ,  $q_i \in B$  ve  $y_i \in \{X_1, \dots, X_n\}$  için  $m_i = q_0 y_1 \dots y_n q_n$  ler monomialler olmak üzere,  $T = U(R) *_C C\{X\}$  serbest çarpımının bir elemanı  $g = \sum_i \alpha_i m_i$  formundadır. Bu durumda  $g = \sum_i \alpha_i m_i$  genelleştirilmiş polinomunun  $T$  serbest çarpımında sıfır olması için gerek ve yeter bir koşul her  $i$  için  $\alpha_i = 0$  olmasıdır. Sonuç olarak  $h_i(X_1, \dots, X_n), k_i(X_1, \dots, X_n) \in T$  için

$$g_1(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n X_i h_i(X_1, \dots, X_n)$$

ve

$$g_2(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n X_i k_i(X_1, \dots, X_n)$$

olmak üzere  $a_1, a_2 \in U(R)$  elemanları  $C$  üzerinde lineer bağımsız ve

$$a_1 g_1(X_1, \dots, X_n) + a_2 g_2(X_1, \dots, X_n) = 0 \in T$$

ise o zaman  $g_1(X_1, \dots, X_n)$  ve  $g_2(X_1, \dots, X_n)$  in her ikisi de  $T$  de sıfırdır.

**Önerme 2.13** (*Lee , 1999, Lemma 2*)  $R$  polinom özdeşliği halkası olmayan bir asal halka ve  $L$ ,  $R$  halkasının değişmeli olmayan bir Lie ideali olsun. O zaman  $L$  ve  $R$  katsayıları  $U(R)$  de olan aynı genelleştirilmiş polinom özdeşliklerini sağlar.

**Yardımcı Özellik 2.12** (*Wong , 1996*)  $D$  bölümlü halkası üzerinde sonsuz boyutlu bir vektör uzayı  ${}_D V$  olsun.  $End_D V$  halkasının bir yoğun althalkası  $R$  ve katsayıları  $End_D V$  halkasında olan bir genelleştirilmiş polinom özdeşliği  $\varphi(X)$  olsun. Her  $x_1, \dots, x_n \in R$  için  $f(x_i)$  bir çoklu doğrusal polinom ve  $\varphi(f(x_1, \dots, x_n)) = 0$  ise o zaman her  $x \in End_D V$  için  $\varphi(x) = 0$  dır.

**Önerme 2.14** (*Lee and Wong , 1995, Proposition*)  $k$  sonsuz bir cisim ve  $k$  üzerinde bir cebir  $R$  olsun.  $K$ ,  $k$  cisminin bir cisim genişlemesi olmak üzere  $R$  cebri bir  $\psi(X_1, \dots, X_n)$  genelleştirilmiş polinom özdeşliğini sağlıyor ise o zaman  $R \otimes_k K$  cebri de bu genelleştirilmiş polinom özdeşliğini sağlar.

**Tanım 2.36**  $R$  herhangi bir halka ve  $d : R \rightarrow R$  bir toplamsal dönüşüm olsun. Her  $x, y \in R$  için  $d(xy) = d(x)y + xd(y)$  ise  $d$  dönüşümüne bir **türev** denir. Bir  $b \in R$  için  $d(x) = [b, x]$  oluyorsa  $d$  türevine  $b \in R$  ile belirlenen bir **iç türev** denir.

**Tanım 2.37** (*Beidar et al. , 1996*)  $d$ , bir  $R$  asal halkasının sıfırdan farklı bir türevi ve  $I$ ,  $R$  halkasının sıfırdan farklı bir ideali olsun.  $f \in Q(R) *_C C\{X\}$  olmak üzere her  $r_i \in I$  için

$$f(r_1, \dots, r_n, d(r_1), \dots, d(r_n)) = 0$$

ise  $f(r_1, \dots, r_n, d(r_1), \dots, d(r_n))$  ifadesine  $I$  ideali üzerinde bir **diferansiyel özdeşlik** denir.

**Teorem 2.13** (*Lee , 1992, Theorem 2*)  $R$  bir yarı asal halka ve  $U(R)$ ,  $R$  nin Utumi kesirler halkası olsun.  $U(R)_R$  halkasının bir yoğun alt modülü  $I$  ise o zaman  $I$  ve  $U(R)$  aynı diferansiyel özdeşlikleri sağlar.

**Teorem 2.14** (*Lee , 1999, Theorem 3*)  $R$  polinom özdeşliği halkası olmayan bir asal halka ve  $L$ ,  $R$  halkasının değişmeli olmayan bir Lie ideali olsun. O zaman,  $L$  ve  $R$  katsayıları  $U(R)$  halkasında olan aynı diferansiyel özdeşlikleri sağlar .

**Yardımcı Özellik 2.13** (*Chuang , 1992*)  $R$  bir asal halka ve  $I$ ,  $R$  nin iki yanlı ideali olsun. O zaman  $I, R$  ve  $Q(R)$  katsayıları  $Q(R)$  halkasında olan, otomorfizma ihtiva eden aynı genelleştirilmiş diferansiyel özdeşlikleri sağlar.

**Tanım 2.38** (*Brešar et al. , 2007*) Bir  $S$  halkasının boştan farklı bir  $R$  alt kümesi için  $m \geq 1$  bir tamsayı ve  $i \in \{1, \dots, n\}$  olmak üzere  $F_i : R^m \rightarrow S$  fonksiyonlar olsun.  $X = \{X_1, Y_1, X_2, Y_2, \dots\}$  sayılabilir bir küme ve  $\mathbb{Z}\langle X \rangle$ ,  $\mathbb{Z}$  üzerinde bir serbest cebir olsun.  $n \geq 0$  için

$$f = f(X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_n)$$

polinomunun en yüksek dereceli en az bir monomialinin katsayısının 1 olduğunu kabul edelim.  $F_1, \dots, F_n$  fonksiyonları ve her  $r_1, \dots, r_m \in R$  için

$$f(r_1, \dots, r_m, F_1(r_1, \dots, r_m), \dots, F_n(r_1, \dots, r_m)) = 0$$

ise o zaman  $f$  ye  $R$  üzerinde bir **fonksiyonel özdeşlik** denir. Eğer

$f \in S *_Z \mathbb{Z}\langle X \rangle$  ise  $f$  ye bir **genelleştirilmiş fonksiyonel özdeşlik** denir.

**Teorem 2.15** (*Beidar , 1998, Theorem 1.2*) Bir  $R$  asal halkasının sırasıyla bir Lie ideali ve Martindale kesirler halkası  $L$  ve  $Q(R)$  olsun. Sabit pozitif

bir  $m$  tamsayısı için,  $F : L^{m-1} \rightarrow Q(R)$  bir toplamsal dönüşüm olmak üzere  $x_1, x_2, \dots, x_m \in L$ ,  $1 \leq i \leq m$  için  $\bar{x}_i = (x_1, \dots, x_i)$  ve

$$F^i(\bar{x}_m) = F^i(x_1, \dots, x_m) = F(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m)$$

olsun. Her  $\bar{x}_m \in L^m$  ve  $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$  için  $F_i, G_j : L^{m-1} \rightarrow Q(R)$  dönüşümler  $(m-1)$ -toplamsal olmak üzere

$$\sum_{i=1}^m F_i^i(\bar{x}_m)x_i + \sum_{j=1}^m x_j G_j^j(\bar{x}_m) = 0$$

olduğunu kabul edelim. Eğer

(i)  $\deg(L) > m$ , ya da

(ii)  $L = R$  and  $\deg(R) > m-1$ ,

ise o zaman  $1 \leq i \neq j \leq m$  için tek türlü belirlenen  $(m-2)$ -toplamsal  $p_{ij} : L^{m-2} \rightarrow Q(R)$  dönüşümleri,  $1 \leq i \leq m$  için  $(m-1)$ -toplamsal  $\lambda_i : L \rightarrow C$  dönüşümleri vardır ve her  $\bar{x}_m \in R^m$  için

$$F_i^i(\bar{x}_m) = \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ i \neq j}} x_j p_{ij}^{ij}(\bar{x}_m) + \lambda_i^i(\bar{x}_m)$$

$$G_j^j(\bar{x}_m) = - \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ j \neq i}} p_{ij}^{ij}(\bar{x}_m)x_i - \lambda_j^j(\bar{x}_m)$$

dir.

**Tanım 2.39** ([Beidar , 1998](#))  $R$  genişletilmiş merkezi  $C$  olan bir asal halka olsun.  $x \in R$  elemanı  $C$  üzerinde cebirsel ise o zaman  $x$  elemanının **cebirsellik derecesi**  $\deg(x)$  ile, cebirsel değil ise  $\infty$  ile gösterilir. Bu durumda halkanın derecesi

$$\deg(R) = \max\{\deg(x) : x \in R\}$$

ile tanımlıdır.

**Önerme 2.15** ([Brešar et al. , 2007](#)) Herhangi bir  $R$  halkasının  $s_{2n}$  standart polinom özdeşliğini sağlaması için gerek ve yeter bir koşul  $\deg(R) \leq n$  olmasıdır.

**Yardımcı Özellik 2.14** (*Beidar and Chebotar , 2000, Lemma 2.1*)  $R$  bir asal halka ve  $L$   $R$  nin merkezi olmayan bir Lie ideali olsun. O zaman  $\deg(L) = \deg(R)$  dir.

**Önerme 2.16** (*Brešar , 1995, Corollary 4.9*)  $I$ , bir  $R$  asal halkasının bir ideali olsun.  $f_1, f_2 : I \rightarrow R$  toplamsal dönüşümler olmak üzere her  $x \in I$  için

$$f_1(x)x = xf_2(x)$$

olsun. O zaman her  $x \in I$  için  $f_1(x) = xa + \zeta(x)$  ve  $f_2(x) = ax + \zeta(x)$  olacak şekilde bir  $a \in Q_s(R)$  ve  $\zeta : R \rightarrow C$  toplamsal dönüşümü vardır.

**Yardımcı Özellik 2.15** (*Brešar , 1995, Lemma 4.4*)  $R$  bir asal halka ve  $I$ ,  $R$  nin sıfırdan farklı bir ideali olsun.  $R$  halkasının Martindale kesirler halkası  $Q(R)$  olmak üzere  $f_1, f_2 : I \rightarrow Q(R)$  dönüşümleri, her  $x, y \in I$  için

$$(i) \quad xf_1(y) + yf_2(x) = 0,$$

$$(ii) \quad f_1(x)y + f_2(y)x = 0$$

koşullarından birini sağlıyorsa o zaman  $f_1 = f_2 = 0$  veya  $R$  değişmeli bir halkadır.

**Teorem 2.16** (*Felzenswalb , 1978, Theorem 2*)  $R$  sıfırdan farklı bir nil sağ ideali olmayan bir halka ve  $I$ ,  $R$  nin bir sağ ideali olsun.  $a \in R$  olmak üzere her  $x \in I$  için  $n(x) \geq 1$  ve  $ax^{n(x)} = 0$  ise o zaman  $aI = Ia = 0$  dır.

**Teorem 2.17** (*Lee , 1996, Corollary*)  $R$  sıfırdan farklı bir nil sağ ideal içermeyen bir asal halka,  $L$ ,  $R$  nin değişmeli olmayan bir Lie ideali ve  $a, b \in R$  olsun. Her  $x \in L$  için  $n(x) \geq 1$  olmak üzere  $(ax)^{n(x)}b = 0$  (  $(xa)^{n(x)}b = 0$  ) ise o zaman  $a = 0$  veya  $b = 0$  (  $ab = 0$  ) dır.

Teorem 2.17 in ispatı incelendiğinde ispatın sağ ve sol simetrik olduğu görülür. Dolayısıyla aşağıdaki teorem, Teorem 2.17 in özel bir sonucudur.

**Teorem 2.18**  $R$  sıfırdan farklı bir nil sol ideal içermeyen bir asal halka,  $L$ ,  $R$  nin değişmeli olmayan bir Lie ideali ve  $a, b \in R$  olsun. Her  $x \in L$  için  $n(x) \geq 1$  olmak üzere  $a(xb)^{n(x)} = 0$  (  $a(bx)^{n(x)} = 0$  ) ise o zaman  $a = 0$  veya  $b = 0$  (  $ab = 0$  ) dır.

## 2.2. Adi Türevli Halkalar

**Tanım 2.40**  $R$  bir halka ve  $d : R \rightarrow R$  bir toplamsal dönüşüm olsun. Her  $x, y \in R$  için

$$d(xy) = d(x)y + xd(y)$$

ise o zaman  $d$  dönüşümüne bir **türev** denir.

**Teorem 2.19** (*Bergen, Herstein and Kerr* , 1981, Lemma 6)  $R$  karakteristiği ikiden farklı bir asal halka ve  $d$ ,  $R$  nin sıfırdan farklı bir türevi olsun. Eğer  $L$ ,  $R$  nin  $d(L) \subset Z(R)$  olacak şekilde bir Lie ideali ise o zaman  $L \subset Z(R)$  dir.

**Teorem 2.20** (*Kharchenko* , 1975, Theorem)  $d$ , bir  $R$  asal halkasının sıfırdan farklı bir türevi ve  $I$ ,  $R$  halkasının sıfırdan farklı bir ideali olsun. Her  $x_1, \dots, x_n \in I$  için  $f(x_1, \dots, x_n, d(x_1), \dots, d(x_n)) = 0$  olsun. O zaman aşağıdakilerden biri sağlanır:

(i) Her  $x \in R$  için  $d(x) = [q, x]$  olacak şekilde uygun bir  $q \in Q(R)$  vardır, yani  $d$  bir iç türevdir ve  $I$ ,  $f(X_1, \dots, X_n, [q, X_1], \dots, [q, X_n]) = 0$  polinom özdeşliğini sağlar.

(ii)  $I$  ideali  $f(X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n) = 0$  genelleştirilmiş polinom özdeşliğini sağlar.

**Teorem 2.21** (*Richoux* , 1979, Theorem)  $R$  bir asal halka ve  $n$  pozitif bir tamsayı olsun.  $\text{char} R = 0$  veya  $\text{char} R > n$  olduğunu kabul edelim. Her  $a_1, a_1, \dots, a_{n+1} \in R$  ve  $x \in R$  için  $a_1 x a_2 x \dots a_n x a_{n+1} = 0$  ise o zaman bazı  $1 \leq i \leq n+1$  için  $a_i = 0$  dir.

**Teorem 2.22** (*Lee and Lee* , 1983)  $R$ ,  $Z(R)$  merkezine sahip, karakteristiği ikiden farklı bir asal halka ve  $L$ ,  $R$  halkasının bir Lie ideali olsun.  $d$   $R$  halkasının sıfırdan farklı bir türevi olmak üzere her  $x \in L$  için  $\text{ad}(x) \in Z(R)$  ise o zaman ya  $a = 0$  ya da  $L \subseteq Z(R)$  dir.

**Teorem 2.23** (*Chang and Lee* , 1998, Theorem 2)  $R$  değişmeli olmayan bir asal halka ve  $d$   $R$  halkasının sıfırdan farklı bir türevi olsun.  $0 \neq a \in R$  ve  $n$  sabit pozitif bir tamsayı olmak üzere her  $x \in R$  için  $\text{ad}(x)^n \in Z(R)$  ise o zaman  $\dim_C R_C = 4$  tür.

**Teorem 2.24** (*Chang and Lee , 1998, Main Theorem*)  $R$  bir asal halka ve  $L$ ,  $R$  halkasının değişmeli olmayan bir Lie ideali olsun.  $R$  halkasının sıfırdan farklı bir türevi  $d$  olmak üzere  $0 \neq a \in R$  olsun. Bir  $n$  sabit pozitif tamsayısı ve her  $x \in L$  için  $\text{ad}(x)^n \in Z(R)$  ise o zaman  $\dim_C R_C = 4$  tür.

**Tanım 2.41**  $R$  herhangi bir halka ve  $\delta : R \rightarrow R$  bir toplamsal dönüşüm olsun. Her  $x, y \in R$  için

$$\delta([x, y]) = [\delta(x), y] + [x, \delta(y)]$$

ise  $\delta$  dönüşümüne bir **Lie türev** adı verilir.

### 2.3. Genelleştirilmiş türevli halkalar

**Tanım 2.42** (*Hvala , 1998*)  $R$  herhangi bir halka,  $g : R \rightarrow R$  bir toplamsal dönüşüm ve  $d$ ,  $R$  nin bir türevi olsun. Her  $x, y \in R$  için  $g(xy) = g(x)y + xd(y)$  ise  $g$  ye  $d$  türeviyle belirlenen bir **genelleştirilmiş türev** denir.  $b, c \in R$  için  $g(x) = bx + xc$  yapısında ise  $g$  ye **genelleştirilmiş iç türev** adı verilir.

Her türev bir genelleştirilmiş türevdir. Fakat, tersi dođru değildir.

**Tanım 2.43**  $R$  herhangi bir halka,  $f : R \rightarrow R$  bir toplamsal dönüşüm ve  $\alpha, \beta \in \text{Aut}(R)$  olsun. Her  $x, y \in R$  için  $f(xy) = f(x)\alpha(y) + \beta(x)f(y)$  ise  $f$  ye bir  $(\alpha, \beta)$ -**türev** denir. Eğer özel olarak  $\alpha$ ,  $R$  halkasının birim otomorfizması ise  $f$  dönüşümüne bir  $\beta$ -**türev** denir.

**Tanım 2.44**  $R$  herhangi bir halka,  $\beta \in \text{Aut}(R)$  ve  $f : R \rightarrow R$  bir  $\beta$ -türev olsun. Uygun bir  $a \in R$  ve her  $x \in R$  için  $f(x) = ax - \beta(x)a$  yapısında ise o zaman  $f$  ye bir **iç  $\beta$ -türev** denir.

**Teorem 2.25** (*Lee , 1999, Theorem 2 and Theorem 4*)  $R$  bir sol “faithful” halka ve  $R$  nin Utumi kesirler halkası  $U(R)$  olsun. O zaman  $R$  halkasının yoğun bir ideali üzerindeki her  $g$  genelleştirilmiş türevi,  $U(R)$  halkasına tek türlü genişletilebilirdir. Ayrıca uygun bir  $a \in U(R)$  elemanı ve  $U(R)$  halkasının bir  $d$  türevi için  $g(x) = ax + d(x)$  formundadır. Üstelik  $a$  elemanı ve  $d$  türevi  $g$  genelleştirilmiş türevi ile tek türlü belirlenir.

**Teorem 2.26** (*Hvala , 1998*)  $R$  karakteristiği ikiden farklı bir asal halka ve  $g_1, g_2 : R \rightarrow R$  genelleştirilmiş türevler olsunlar. Her  $x \in R$  için

$[g_1(x), g_2(x)] = 0$  ise o zaman her  $x \in R$  için  $g_1(x) = \lambda g_2(x)$  olacak şekilde bir  $\lambda \in C$  vardır.

**Tanım 2.45** (*Nakajima* , 2000)  $N : R \rightarrow R$  bir toplamsal dönüşüm olsun.  $\delta : R \rightarrow R$  bir toplamsal dönüşüm olmak üzere uygun bir  $r \in R$  ve her  $x, y \in R$  için

$$N([x, y]) = [N(x), y] + [x, \delta(y)] + xry - yrx$$

ise  $N$  dönüşümüne **Nakajima anlamında genelleştirilmiş Lie türev** denir.

**Tanım 2.46** (*Hvala* , 2007)  $H : R \rightarrow R$  toplamsal dönüşüm olsun.  $\delta : R \rightarrow R$  toplamsal dönüşüm olmak üzere her  $x, y \in R$  için

$$H([x, y]) = H(x)y - H(y)x + x\delta(y) - y\delta(x)$$

koşulu sağlanıyorsa  $H$  dönüşümüne **Hvala anlamında genelleştirilmiş Lie türev** denir.

**Teorem 2.27** (*Hvala* , 2007, Theorem 1)  $R$  karakteristiği ikiden farklı bir asal halka,  $\deg(R) > 3$  ve  $H : R \rightarrow R$  bir genelleştirilmiş Lie türev, yani  $\delta : R \rightarrow R$  bir toplamsal dönüşüm olmak üzere her  $x, y \in R$  için

$$H([x, y]) = H(x)y - H(y)x + x\delta(y) - y\delta(x)$$

olsun. O zaman  $g : R \rightarrow R_C$  bir genelleştirilmiş türev ve  $\zeta : R \rightarrow C$  toplamsal dönüşüm olmak üzere  $H$  dönüşümü her  $x \in R$  için

$$H(x) = g(x) + \zeta(x)$$

formundadır. Üstelik  $\zeta([R, R]) = 0$  ve  $\delta$  bir Lie türevdir.

**Yardımcı Özellik 2.16** (*Xu, Ma and Niu* , 2007, Lemma 2.1)  $R$  bir asal halka ve  $I$ ,  $R$  nin sıfırdan farklı bir ideali olsun.  $a, b \in U(R) - \{0\}$ ,  $n$  sabit pozitif bir tamsayı ve  $g$ ,  $R$  halkasının sıfırdan farklı bir genelleştirilmiş türevi olmak üzere

- (i) her  $x \in I$  için  $a(g(x)b)^n = 0$  ise o zaman her  $x \in R$  için  $g(x) = a_1x + xb_1$  olacak şekilde  $a_1, b_1 \in U(R)$  vardır ve  $b_1b = 0$  dır. Üstelik  $ba_1 = 0$  veya  $aa_1 = 0$  dır.

(ii) her  $x \in I$  için  $a(g(x)b)^n \in C$  olsun.  $a(g(x_0)b)^n \neq 0$  olacak şekilde bir  $x_0 \in I$  var ise o zaman  $\dim_C R_C \leq 4$  tür.

**Uyarı 2.4**  $R$  bir asal halka ve  $g, R$  halkasının  $c, d \in U(R)$  olmak üzere her  $x \in R$  için  $g(x) = cx - xd$  yapısına sahip bir genelleştirilmiş iç türevi olsun. Aynı zamanda  $a_1, b_1 \in U(R)$  olmak üzere her  $x \in R$  için  $g(x) = a_1x - xb_1$  formunda ise o zaman her  $x \in R$  için  $cx - xd = a_1x - xb_1$  olur. Teorem 2.7 den  $b_1 = d + \mu$  ve  $a_1 = c + \mu$  olacak şekilde bir  $\mu \in C$  vardır. Bu durum Yardımcı Özellik 2.16 ile birlikte kullanılırsa, yani her  $x \in R$  için  $a(g(x)b)^n \in C$  ise o zaman  $\dim_C R_C > 4$  iken aşağıdaki koşullardan biri geçerli olacak şekilde bir  $\mu \in C$  vardır:

(i)  $a = 0$ ,

(ii)  $b = 0$ ,

(iii)  $(d + \mu)b = 0$  ve  $b(c + \mu) = 0$ ,

(iv)  $(d + \mu)b = 0$  ve  $a(c + \mu) = 0$  dır.

**Yardımcı Özellik 2.17** (Chang , 2009, Lemma 1)  $R$  bir asal halka,  $a, b \in R$  ve  $n$  sabit pozitif bir tamsayı olsun.

(i) Her  $x \in R$  için  $a(bx)^n = 0$  ise o zaman  $ab = 0$  dır.

(ii) Her  $x \in R$  için  $a(xb)^n = 0$  ise o zaman  $a = 0$  veya  $b = 0$  dır.

**Yardımcı Özellik 2.18** (Albaş , 2011, Lemma 1)  $R$  karakteristiği ikiden farklı, değişmeli olmayan asal halka ve  $g, R$  halkasının  $d$  türeviyle belirlenen bir genelleştirilmiş türevi olsun. Her  $x, y \in R$  için  $g([x, y]) = [g(x), g(y)]$  ise o zaman  $d = 0$  veya  $d = I$ , birim dönüşümdür.

**Teorem 2.28** (Scudo , 2014, Theorem)  $R$  karakteristiği ikiden farklı genişletilmiş merkezi  $C$  olan bir asal halka ve  $C$  üzerinde  $n$  değişkenli bir çoklu doğrusal polinom  $f(x_1, \dots, x_n)$  olsun.  $f(R) = \{f(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in R\}$  ve  $R$  halkasının sıfırdan farklı bir genelleştirilmiş türevi  $g$  olsun.  $g, f(R)$  kümesi üzerinde bir Lie homomorfizması olarak hareket ediyorsa her  $x \in R$  için  $g(x) = x$  dir.

## 2.4. Genelleştirilmiş $(\alpha, \beta)$ -türevli Halkalar

Bu bölüm boyunca  $\alpha, \beta \in \text{Aut}(R)$  olacaktır.

**Tanım 2.47**  $R$  herhangi bir halka,  $\alpha, \beta \in \text{Aut}(R)$  ve  $f : R \rightarrow R$  bir  $(\alpha, \beta)$ -türev olsun.  $G : R \rightarrow R$  dönüşümü her  $x, y \in R$  için

$$G(xy) = G(x)\alpha(y) + \beta(x)f(y)$$

ise  $G$  dönüşümüne,  $f$  ile belirli bir **genelleştirilmiş  $(\alpha, \beta)$ -türev** denir. Eğer  $\alpha = I$ , birim otomorfizma, ise  $G$  ye  $f$  ile belirli bir **genelleştirilmiş  $\beta$ -türev** denir.

**Tanım 2.48**  $R$  herhangi bir halka,  $\beta \in \text{Aut}(R)$  ve  $G : R \rightarrow R$  dönüşümü  $R$  halkasının  $f$  ile belirlenen genelleştirilmiş  $\beta$ -türevi olsun. Eğer uygun  $b, c \in R$  için  $G(x) = bx - \beta(x)c$  yapısında ise o zaman  $G$  ye bir **genelleştirilmiş iç  $\beta$ -türev** denir.

**Tanım 2.49**  $R$  herhangi bir halka ve  $\alpha \in \text{Aut}(R)$  olsun. Her  $x \in R$  için  $\alpha(x) = qxq^{-1}$  olacak şekilde  $q \in Q(R)$  var ise o zaman  $\alpha$  otomorfizmasına bir  **$X^1$ -iç otomorfizma**, aksi halde bir  **$X$ -dış otomorfizma** denir.

**Tanım 2.50**  $C$ , bir  $R$  halkasının genişletilmiş merkezi ve  $\alpha \in \text{Aut}(R)$  olsun.  $n$  sabit pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$\text{char } R = 0 \text{ iken, her } \lambda \in C \text{ için } \alpha(\lambda) = \lambda,$$

$$\text{char } R = p \geq 2 \text{ iken, her } \lambda \in C \text{ için } \alpha(\lambda) = \lambda^{p^n}$$

ise o zaman  $\alpha$  ya bir **Frobenius otomorfizması** denir.

**Teorem 2.29** ([Kharchenko](#), 1975, p. 140)  $R$ , genişletilmiş merkezi  $C$  olan bir asal genelleştirilmiş polinom özdeşliği halkası ve  $\alpha \in \text{Aut}(R)$  olsun. Her  $\lambda \in C$  için  $\alpha(\lambda) = \lambda$  ise o zaman  $\alpha$  bir  $X$ -iç otomorfizmadır.

**Yardımcı Özellik 2.19** ([Kharchenko](#), 1992, Lemma 1)  $R$  bir asal halka,  $\alpha \in \text{Aut}(R)$  ve  $f$ ,  $R$  halkasının bir  $\alpha$ -türevi olsun. O zaman  $\alpha$  otomorfizması ve  $f$   $\alpha$ -türevi,  $Q(R)$  ve  $U(R)$  halkalarına tek türlü genişletilebilir.

<sup>1</sup> V. K. Kharchenko' nun isminin Rusça versiyonun ilk harfinden gelmektedir.

**Tanım 2.51** (*Jacobson , 1964*)  $D$  bir bölümlü halka,  $V_D$  bir sağ vektör uzayı ve  $T \in \text{End}(V_D)$  olsun. Her  $v \in V$  ve  $\lambda \in D$  için  $T(v\lambda) = T(v)\alpha(\lambda)$  olacak şekilde bir  $\alpha \in \text{Aut}(D)$  var ise o zaman  $T$  ye **yarı-doğrusal dönüşüm** denir.

**Teorem 2.30** (*Jacobson , 1964, p. 79*)  $R$  sıfırdan farklı “socle” a sahip bir primitif halka,  ${}_R V$  bir indirgenemez “faithful” sol  $R$ -modül ve  $D = \text{End}({}_R V)$  olsun. O zaman  $\alpha \in \text{Aut}(R)$  olmak üzere her  $r \in R$  için  $\alpha(r) = \text{Tr} T^{-1}$  olacak şekilde bir yarı-doğrusal otomorfizma  $T \in \text{End}(V)$  vardır.

**Teorem 2.31** (*Chuang , 1992*)  $R$  bir asal halka ve  $I$ ,  $R$  nin bir ideali olsun. O zaman  $I$ ,  $R$  ve  $Q(R)$ ,  $Q(R)$  üzerinde  $\alpha$ -türevli aynı genelleştirilmiş polinom özdeşliklerini sağlar.

**Teorem 2.32** (*Chuang , 1992, Theorem 3*)  $R$  bir asal halka ve  $\alpha$ ,  $R$  nin bir  $X$ -dış otomorfizması olsun.  $x_i, y_i$  ler farklı değişkenler ve  $R$  halkası

$$\psi(X_1, \dots, X_n, \alpha(X_1), \dots, \alpha(X_n))$$

genelleştirilmiş polinom özdeşliğini sağlıyor ise o zaman

$$\psi(X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n)$$

$R$  halkası için aşıkâr olmayan bir genelleştirilmiş polinom özdeşliğidir, yani  $R$  bir genelleştirilmiş polinom özdeşliği halkasıdır.

**Teorem 2.33** (*Chuang , 1993, Theorem 2*)  $R$  bir asal halka ve  $\alpha \in \text{Aut}(R)$  olsun.  $\alpha$  nın bir Frobenius otomorfizması olmadığı durumda,  $x_i, y_i$  ler farklı değişkenler olmak üzere

$$\psi(x_1, \dots, x_n, \alpha(x_1), \dots, \alpha(x_n)) = 0$$

genelleştirilmiş polinom özdeşliği  $R$  halkasının

$$\psi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = 0$$

genelleştirilmiş polinom özdeşliğini verir.

**Yardımcı Özellik 2.20** (*Chang , 2003, Lemma 2*)  $R$  bir asal halka ve  $G$ ,  $R$  nin bir genelleştirilmiş  $\alpha$ -türevi olsun. O zaman  $G$  genelleştirilmiş  $\alpha$ -türevi

$Q(R)$  Martindale kesirler halkasına tek türlü genişletilir ve  $f$  bir  $\alpha$ -türev olmak üzere her  $x \in R$  için

$$G(x) = G(1)x + f(x)$$

yapısındadır.

**Teorem 2.34** (*Chuang , 2005, Theorem 1*)  $R$  bir asal halka,  $\alpha \in \text{Aut}(R)$  ve  $f$ ,  $R$  halkasının bir  $X$ -dış  $\alpha$ -türevi olsun. O zaman,  $x_i, y_i$  ler farklı değişkenler olmak üzere  $R$  halkası  $\psi(x_i, f(x_i))$  genelleştirilmiş polinom özdeşliğini sağlıyorsa o zaman  $R$  halkası  $\psi(x_i, y_i) = 0$  genelleştirilmiş polinom özdeşliğini sağlar.

**Teorem 2.35** (*Chuang , 2005, Theorem 1*)  $R$  bir asal halka,  $\alpha \in \text{Aut}(R)$  ve  $f$ ,  $R$  nin sıfırdan farklı bir  $\alpha$ -türevi olsun.

$$\psi(X_1, \dots, X_n, f(X_1), \dots, f(X_n))$$

$R$  için otomorfizma ihtiva eden bir diferansiyel özdeşlik ise o zaman  $f$  bir iç  $\alpha$ -türevdir ya da  $R$ ,

$$\psi(X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n)$$

genelleştirilmiş polinom özdeşliğini sağlar.

### 3. ASAL HALKALARIN LİE İDEALLERİ ÜZERİNDE GENELLEŞTİRİLMİŞ $\alpha$ -TÜREVLERİN SIFIRLAYAN KOŞULLARI

Bu bölümde,  $R$  asal halkasının değişmeli olmayan bir Lie ideali üzerinde genelleştirilmiş  $\alpha$ -türev ihtiva eden bir diferansiyel özdeşlik ele alınacaktır. Bu bağlamda literatürde yer alan sonuçların değişmeli olmayan Lie ideallere sıfırlayan koşulları ile bir genişlemesine yer verilecektir.

Bu bölüm boyunca  $R$  bir asal halka ve  $n \geq 1$  sabit pozitif bir tamsayı olsun. Herhangi  $x, y \in R$  elemanlarının komütatörü  $[x, y] = xy - yx$  ile tanımlıdır.

[Herstein , 1968](#),  $R$  halkasının bir türevi  $d$  olmak üzere her  $x \in R$  için  $d(x)^n = 0$  ise  $d = 0$  olduğunu göstermiştir. I. N. Herstein' in sonucunu genelleştiren bir çok sonuç daha sonraki yıllarda önemli matematikçiler tarafından elde edilmiştir.

[Brešar , 1990](#),  $R$  halkasının sıfırdan farklı bir türevi  $d$  ve  $a \in R$  olmak üzere her  $x \in R$  için  $ad(x)^n = 0$  ise  $\text{char} R \neq (n-1)!$  iken  $a = 0$  olduğunu ispatlamıştır.

Son zamanlarda ise C. L. Chang şu teoremi ispatlamıştır:

**Teorem 3.1** ([Chang , 2009](#), Theorem B)  $R$  bir asal halka,  $a \in R$  ve  $\alpha \in \text{Aut}(R)$  olsun.  $G$ ,  $R$  halkasının sıfırdan farklı bir genelleştirilmiş  $\alpha$ -türevi olmak üzere her  $x \in R$  için  $aG(x)^n = 0$  olsun. O zaman her  $x \in R$  için  $aG(x) = 0$  dır.

Ayrıca yine bu bölüm boyunca aksi belirtilmedikçe  $\alpha \in \text{Aut}(R)$ ,  $Q(R)$  ve  $U(R)$  birimli asal halkalar ve  $C$  bir cisimdir (bkz. Yardımcı Özellik 2.8). Yardımcı Özellik 2.19 dan  $R$  halkasının otomorfizma, türev ve  $\alpha$ -türevlerinin ve ayrıca Yardımcı Özellik 2.20 den  $R$  halkasının genelleştirilmiş her  $\alpha$ -türevinin,  $U(R)$  ve  $Q(R)$  halkalarına tek türlü genişletildiği bilinmektedir.

Bu motivasyonlar ışığında aşağıdaki problem incelenecektir:

**Problem:**  $L$ ,  $R$  asal halkasının değişmeli olmayan bir Lie ideali olsun.  $G$   $R$  nin sıfırdan farklı bir genelleştirilmiş  $\alpha$ -türevi olmak üzere her  $x \in L$  için

$$aG(x)^n = 0$$

olduğunu kabul edelim. O zaman  $G$  genelleştirilmiş  $\alpha$ -türevi veya  $R$  halkasının yapısı hakkında nasıl bir çıkarım yapılabilir?

Problemin çözümüne olanak sağlayan yardımcı özelliklerin ispatında karşımıza çıkan bir alt durum olarak öncelikle, halkanın komütatörleri üzerinde sağlanan aşağıdaki özdeşlikler incelenecektir.

**Yardımcı Özellik 3.1**  $R$  değişmeli olmayan bir asal halka,  $a, b \in R$  ve  $n$  sabit pozitif bir tamsayı olsun.

(i) Her  $x, y \in R$  için  $a([x, y]b)^n = 0$  ise o zaman  $a = 0$  ya da  $b = 0$  dır.

(ii) Her  $x, y \in R$  için  $a(b[x, y])^n = 0$  ise o zaman  $ab = 0$  dır.

**İspat.**  $R$  bir asal halka olduğundan  $R$  nin sıfırdan farklı nilpotent ideali yoktur. Dolayısıyla  $R$  nin sınırlı indeksli nil ideale sahip olması, sınırlı indeksli nilpotent ideale sahip olmasını gerektirdiğinden Teorem 2.18 gereğince  $n(x) = n$  sabit pozitif tamsayı olarak alınabilir. Bu durumda Teroem 2.18 den ispat biter.  $\square$

Yardımcı Özellik 3.2 ve Yardımcı Özellik 3.3 te sırasıyla  $\alpha \in \text{Aut}(R)$  nin bir  $X$ -iç otomorfizma olması durumu halkanın komütatörleri ve değişmeli olmayan bir Lie ideali üzerinde ele alınacaktır.

**Yardımcı Özellik 3.2**  $R$  değişmeli olmayan bir asal halka ve  $n$  sabit pozitif bir tamsayı olsun.  $a, b, c, q \in R$  ve  $q$  tersinir olmak üzere her  $x, y \in R$  için

$$a(b[x, y] - q[x, y]q^{-1}c)^n = 0$$

olsun.  $R$  nin aşıkâr olmayan bir genelleştirilmiş polinom özdeşliği sağlamadığını kabul edelim. O zaman aşağıdaki koşullardan biri sağlanır:

(i)  $a = 0$ ,

(ii)  $q^{-1}c \in C$  ve  $a(b - c) = 0$  dir.

**İspat.**  $a \neq 0$  olsun. İlk olarak  $q^{-1}c \notin C$  olduğunu kabul edelim.  $X, Y$  değişmeli olmayan değişkenler ve  $C\{X, Y\}$  serbest  $C$ -cebir olmak üzere  $C$  üzerindeki serbest çarpım  $T = Q(R) *_C C\{X, Y\}$  olsun.  $R$  aşikâr olmayan bir genelleştirilmiş polinom özdeşliği sağlamadığından

$$a(b[X, Y] - q[X, Y]q^{-1}c)^n = 0 \in T,$$

yani  $T$  serbest çarpımının sıfırdır. Bu özdeşlikten

$$\begin{aligned} ab[X, Y](b[X, Y] - q[X, Y]q^{-1}c)^{n-1} - \\ aq[X, Y]q^{-1}c(b[X, Y] - q[X, Y]q^{-1}c)^{n-1} = 0 \in T \end{aligned} \quad (3.1)$$

elde edilir. Şimdi  $ab$  ve  $aq$  nun  $C$ -lineer bağımsız olduklarını kabul edelim. O zaman Önerme 2.12 ten

$$H(X, Y) = ab[X, Y](b[X, Y] - q[X, Y]q^{-1}c)^{n-1} = 0 \in T \quad (3.2)$$

ve

$$K(X, Y) = aq[X, Y]q^{-1}c(b[X, Y] - q[X, Y]q^{-1}c)^{n-1} = 0 \in T \quad (3.3)$$

elde edilir.  $ab \neq 0$  ve  $q^{-1}c \notin C$  olduğundan  $ab[X, Y](q[X, Y]q^{-1}c)$  monomiali (3.2) özdeşliğinde aşikâr değildir. Böylece  $H(X, Y)$   $R$  için aşikâr olmayan bir genelleştirilmiş polinom özdeşliği olur, bu ise bir çelişkidir. Benzer şekilde  $aq \neq 0$  ve  $q^{-1}c \notin C$  olduğundan  $a(q[x, y]q^{-1}c)^n$  monomiali (3.3) özdeşliğinde aşikâr değildir. Dolayısıyla  $K(X, Y)$ ,  $R$  için aşikâr olmayan bir genelleştirilmiş polinom özdeşliği olup, aynı çelişki elde edilir. O halde  $ab$  ve  $aq$  elemanları  $C$ -lineer bağımlı, yani bir  $\lambda \in C$  için  $ab = \lambda aq$  olmalıdır. Bu durumda (3.1) özdeşliğinden aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

Eğer  $\lambda \neq 0$  ise o zaman

$$\begin{aligned} \lambda aq[X, Y](b[X, Y] - q[X, Y]q^{-1}c)^{n-1} - \\ aq[X, Y]q^{-1}c(b[X, Y] - q[X, Y]q^{-1}c)^{n-1} = 0 \in T \end{aligned} \quad (3.4)$$

dir.  $\lambda \neq 0$ ,  $aq \neq 0$  ve  $q^{-1}c \notin C$  olduğundan  $\lambda aq[X, Y](q[X, Y]q^{-1}c)^{n-1}$  monomiali (3.4) özdeşliğinde aşikâr değildir, dolayısıyla  $R$  nin bir genelleştirilmiş polinom özdeşliği halkası olduğu çelişkisine ulaşılır.

Eğer  $\lambda = 0$  ise o zaman

$$aq[X, Y]q^{-1}c(b[X, Y] - q[X, Y]q^{-1}c)^{n-1} = 0 \in T \quad (3.5)$$

dir.  $q^{-1}c \notin C$  ve  $aq \neq 0$  olduğundan  $a(q[X, Y]q^{-1}c)^n$  monomiali (3.5) özdeşliğinde aşıkâr değildir ve yine  $R$  nin bir genelleştirilmiş polinom özdeşliği halkası olduğu çelişkisine ulaşılır. Öyleyse  $q^{-1}c \in C$  olmalıdır. O zaman her  $x, y \in R$  için

$$a(b[x, y] - q(q^{-1}c[x, y]))^n = a((b - c)[x, y])^n = 0$$

dir. Bu durumda Yardımcı Özellik 3.1 (ii) den  $a(b - c) = 0$  olduğu görülür.  $\square$

**Yardımcı Özellik 3.3**  *$R$  bir asal halka,  $L, R$  nin değişmeli olmayan bir Lie ideali ve  $n$  sabit pozitif bir tamsayı olsun.  $a, b, c, q \in R$  ve  $q$  tersinir olmak üzere her  $x \in L$  için  $a(bx - qxq^{-1}c)^n = 0$  ise o zaman  $\dim_C R_C = 4$  olmadığında ya  $a = 0$  ya da  $q^{-1}c \in C$  ve  $a(b - c) = 0$  dır.*

**İspat.**  $a \neq 0$  olduğunu kabul edelim. Yardımcı Özellik 2.1 den  $I = R[L, L]R \leq R$  ve  $0 \neq [I, R] \subseteq L$  dir. O zaman her  $x \in [I, R]$  için

$$a(bx - qxq^{-1}c)^n = 0 \quad (3.6)$$

dir.  $I, R$  ve  $Q(R)$ ,  $Q(R)$  üzerinde aynı genelleştirilmiş polinom özdeşliklerini sağladığından Teorem 2.31 gereğince her  $x \in [Q(R), Q(R)]$  için de (3.6) sağlanır. Bu nedenle  $R$  halkası ve  $I$  ideali yerine  $Q(R)$  halkasını alabiliriz.  $Q(R)$  merkezi kapalı bir asal halka olduğundan  $R$  halkası da merkezi kapalı bir asal halka olur. Eğer  $R$  bir genelleştirilmiş polinom özdeşliği halkası değil ise o zaman Yardımcı Özellik 3.2 den ispat biter. O halde  $R$  halkasının bir genelleştirilmiş polinom özdeşliği halkası olduğunu kabul edelim. O zaman Teorem 2.8 ve Teorem 2.10 dan  $R$ , bir  $D$  bölümlü halkası üzerindeki  $V$  vektör uzayının lineer dönüşümlerinin bir yoğun alt halkasına izomorf olan bir primitif halkadır. Bu durumda  $V$  vektör uzayının  $D$  üzerindeki boyutunun sonlu ve sonsuz olma durumlarının incelenmesi gerekmektedir.

• 1. Durum:  $\dim_D V = \infty$  olsun. O zaman Yardımcı Özellik 2.12 den her  $x \in R$  için  $a(bx - qxq^{-1}c)^n = 0$  sağlanır. Özellikle  $x$  yerine  $q^{-1}x$

alınırsa her  $x \in R$  için  $a(bq^{-1}x - xq^{-1}c)^n = 0$  olur ve böylece Teorem 3.1 den  $a(bq^{-1}x - xq^{-1}c) = 0$  elde edilir. Bu durumda her  $x \in R$  için  $abq^{-1}x - axq^{-1}c = 0$  dır ve Teorem 2.7 den  $q^{-1}c \in C$  dir. Böylece  $f(x) = (b-c)x$  ve her  $x \in R$  için  $a((b-c)x)^n = 0$  dır. O zaman Teorem 2.16 dan  $a(b-c) = 0$  olduğu görülür.

• 2. Durum:  $\dim_D V < \infty$  olsun. Bu durumda  $R$  halkasının,  $m$  sabit pozitif tamsayısı için  $D$  bölümlü halkası üzerindeki  $m \times m$  matrisler halkası,  $D_m$  ye izomorftur. Eğer  $C$  sonlu ise o zaman  $D, C$  üzerinde sonlu boyutlu olduğundan bir sonlu halkadır ve Teorem 2.4 ten  $D$  bir cisimdir. Bu durumda  $R \cong C_m$  olur. Diğer yandan, eğer  $C$  sonsuz ve  $F, D$  nin maksimal alt cismi ise standart argüman ile Önerme 2.14 ten her  $x, y \in R \otimes_C F$  için

$$a(b[x, y] - q[x, y]q^{-1}c)^n = 0$$

dır. Fakat  $k = m[F : C]$  olmak üzere

$$R \otimes_C F \cong D_m \otimes_C F \cong F_k$$

ve  $R$  değişmeli olmadığından  $k > 1$  dir. Böylece  $C$  cisminin sonlu veya sonsuz olması durumlarına göre  $R$  halkası yerine  $k > 1$  için  $F_k$  halkası alınabilir.

$\dim_C R_C \neq 4$  kabul edelim. O zaman  $k \geq 3$  olmalıdır.  $V$  nin  $F$ -lineer dönüşümlerinin vektör uzayı  $k$ -boyutlu olsun. Herhangi bir  $v \in V$  için  $v$  ile  $q^{-1}cv$  vektörlerinin  $F$ -lineer bağımsız olduğunu kabul edelim. O zaman  $\dim_F V \geq 3$  olduğundan  $v, q^{-1}cv, w$  vektörleri  $F$ -lineer bağımsız olacak şekilde bir  $w \in V$  seçilebilir.  $R$  halkasının yoğunluğundan Teorem 2.1 ve Tanım 2.8 gereğince

$$xq^{-1}cv = 0, xv = 0,$$

$$yq^{-1}cv = w, yv = 0, xw = q^{-1}v$$

olacak şekilde  $x, y \in R$  elemanları vardır. Bu da  $[x, y]v = 0$  ve

$$[x, y]q^{-1}cv = xyq^{-1}c - yxq^{-1}cv = xw = q^{-1}v$$

olmasını gerektirir. Burada

$$(b[x, y] - q[x, y]q^{-1}c)v = -v$$

dir. O zaman,

$$\begin{aligned} 0 &= a(b[x, y] - q[x, y]q^{-1}c)^n v \\ &= (-1)^n av \end{aligned}$$

bulunur ve  $av = 0$  dir. O halde  $av \neq 0$  ise  $v$  ile  $q^{-1}cv$  vektörleri  $F$ -linear bağımlıdır.  $a \neq 0$  olduğundan  $av_0 \neq 0$  olacak şekilde bir  $v_0 \in V$  vardır. O zaman  $v_0$  ve  $q^{-1}cv_0$  vektörleri  $F$ -linear bağımlıdır ve  $q^{-1}cv_0 = \lambda v_0$  olacak şekilde bir  $\lambda \in F$  vardır. Bir önceki ispata göre  $v \in V$  için  $v$  ve  $v_0$  vektörlerinin  $F$  üzerinde linear bağımsız olduklarını ve  $av = 0$  olduğunu kabul edelim.  $\dim_F V \geq 3$  olduğundan  $F$  üzerinde linear bağımsız olacak şekilde  $v, v_0, w$  vektörleri seçilebilir. Öncelikle  $aw \neq 0$  kabul edelim. O zaman  $a(v + v_0) = av_0 \neq 0$  ve  $a(v + w) = aw \neq 0$  dir. Böylece

$$\begin{aligned} q^{-1}cw &= \beta w, \\ q^{-1}c(v + v_0) &= \gamma(v + v_0), \\ q^{-1}c(v + w) &= \delta(v + w) \end{aligned}$$

olacak şekilde  $\beta, \gamma, \delta \in F$  vardır. Bu eşitlikler  $q^{-1}cv_0 = \lambda v_0$  ile birlikte ele alınırsa

$$q^{-1}cv + q^{-1}cv_0 = \gamma v + \gamma v_0$$

denkleminde

$$q^{-1}cv = \gamma v + (\gamma - \lambda)v_0$$

bulunur. Ayrıca,

$$q^{-1}cv + q^{-1}cw = \delta v + \delta w$$

olduğu kullanılarak

$$(\gamma - \delta)v + (\gamma - \lambda)v_0 + (\beta - \delta)w = 0$$

elde edilir.  $\{v, v_0, w\}$  kümesi  $F$  üzerinde linear bağımsız olduğundan  $\lambda = \gamma = \delta = \beta$  dir. Bu durumda  $q^{-1}cv = \lambda v$  dir ve  $v$  ile  $q^{-1}cv$  vektörlerinin  $F$  üzerinde linear bağımlı olduğu görülür. Şimdi  $aw = 0$  olduğunu kabul edelim.  $w$  yerine  $w + v_0$  alınırsa

$$0 = aw = a(w + v_0) = av_0$$

çelişmesine ulaşılır. O halde yukarıdaki muhakemelerden  $v$  ile  $q^{-1}cv$  vektörlerinin  $F$  üzerinde her  $v \in V$  için linear bağımlı, yani  $q^{-1}cv = \eta v$  olacak şekilde bir

$\eta \in F$  var olduğu görülür. O zaman,  $(q^{-1}c - \eta)v = 0$  dır ve  $V$  vektör uzayının  $Q(R)$  üzerindeki hareketi “faithful” olduğundan  $q^{-1}c \in F$  dir. Sonuç olarak, her  $x, y \in R$  için  $a((b - c)[x, y])^n = 0$  olur ve Yardımcı Özellik 3.1 den ispat biter.  $\square$

Bir sonraki yardımcı özellikte Yardımcı Özellik 3.3 ün,  $R$  halkasının herhangi bir  $\alpha$  otomorfizmasına genişletilmesine yer verilecektir.

**Yardımcı Özellik 3.4**  *$R$  bir asal halka ve  $L$ ,  $R$  nin değişmeli olmayan bir Lie ideali ve  $n$  sabit pozitif bir tamsayı olsun.  $a, b, c \in R$  ve  $\alpha \in \text{Aut}(R)$  olmak üzere her  $x \in L$  için  $a(bx - \alpha(x)c)^n = 0$  ise o zaman ya  $a = 0$  ya da  $\dim_C R_C \neq 4$  iken her  $x \in R$  için  $a(bx - \alpha(x)c) = 0$  dır.*

**İspat.** Eğer  $a = 0$  veya  $R$  bir tamlık bölgesi ise ispat biter. O zaman  $R$  halkasının bir tamlık bölgesi olmadığını ve  $a \neq 0$  olduğunu kabul edelim. Yardımcı Özellik 2.1 den  $I = R[L, L]R \leq R$  ve  $0 \neq [I, R] \subseteq L$  dir. O halde her  $x \in [I, R]$  için

$$a(bx - \alpha(x)c)^n = 0 \quad (3.7)$$

olur. Teorem 2.31 den (3.7) her  $x \in [Q(R), Q(R)]$  için sağlanır. Ayrıca  $Q(R)$  ve  $I$  ideali bir asal halka olduğundan  $R$  ve  $I$  yerine  $Q(R)$  halkası alınabilir.  $Q(R)$  merkezi kapalı bir asal halka olduğundan  $R$  halkası da merkezi kapalı bir asal halkadır.  $\alpha$  nın bir  $X$ -iç otomorfizma olması durumunda her  $x \in R$  için  $\alpha(x) = qxq^{-1}$  olacak şekilde bir tersinir  $q \in Q(R)$  vardır. O zaman (3.7) den her  $x \in [R, R]$  için

$$a(bx - qxq^{-1}c)^n = 0$$

elde edilir. Bu durumda Yardımcı Özellik 3.3 ten ispat tamamlanır. O zaman  $\alpha$  nın  $X$ -dış otomorfizma olduğunu kabul edelim. O zaman her  $x \in [R, R]$  için

$$a(bx - \alpha(x)c)^n = 0 \quad (3.8)$$

dir. Eğer  $b = 0$  ya da  $c = 0$  ise Yardımcı Özellik 3.1 den ispat biter. Şimdi  $b \neq 0$  ve  $c \neq 0$  olduğunu kabul edelim ve Önerme 2.12 gereğince  $R$  bir genelleştirilmiş polinom özdeşliği halkasıdır. Bu durumda Teorem 2.10 dan  $R$ , sıfırdan farklı bir “socle” a sahip bir primitif halkadır.  $R$  bir tamlık bölgesi olmadığından  $R$

sıfırdan farklı idempotent elemanlara sahiptir.  $e \in R$  bir idempotent olsun.  $x \in [R, R]$  yerine  $[\alpha^{-1}(1-e)xe, \alpha^{-1}(1-e)ye]$  alınırsa (3.8) den her  $x, y \in R$  için,

$$\begin{aligned} 0 &= a \left( b[\alpha^{-1}(1-e)xe, \alpha^{-1}(1-e)ye] - [(1-e)\alpha(x)\alpha(e), (1-e)\alpha(y)\alpha(e)]c \right)^n (1-e) \\ &= a \left( [(1-e)\alpha(x)\alpha(e), (1-e)\alpha(y)\alpha(e)]c \right)^n (1-e) \end{aligned} \quad (3.9)$$

elde edilir. (3.9) denkleminde

$$[(1-e)\alpha(x)\alpha(e), (1-e)\alpha(y)\alpha(e)]c = A$$

diyelim. O zaman  $aA^n(1-e) = 0$  dir.

$$A(1-e) = (1-e) \left( \alpha(x)\alpha(e)(1-e)\alpha(y) - \alpha(y)\alpha(e)(1-e)\alpha(x) \right) \alpha(e)c(1-e)$$

olduğundan (3.9) dan

$$\begin{aligned} 0 &= a \left( b[\alpha^{-1}(1-e)xe, \alpha^{-1}(1-e)ye] - [(1-e)\alpha(x)\alpha(e), (1-e)\alpha(y)\alpha(e)]c \right)^n (1-e) \\ &= a \left( [(1-e)\alpha(x)\alpha(e), (1-e)\alpha(y)\alpha(e)]c \right)^n (1-e) \\ &= a \left( A^{n-1}.A \right) (1-e) \\ &= aA^{n-1} [(1-e)\alpha(x)\alpha(e), (1-e)\alpha(y)\alpha(e)]c(1-e) \\ &= aA^{n-1}(1-e) (\alpha(x)\alpha(e)(1-e)\alpha(y) - \alpha(y)\alpha(e)(1-e)\alpha(x)) \alpha(e)c(1-e) \end{aligned}$$

elde edilir. Her bir adımda  $A(1-e)$  değeri yerine yazılarak devam edilirse her  $x, y \in R$  için

$$a(1-e) \left( (\alpha(x)\alpha(e)(1-e)\alpha(y)) - (\alpha(y)\alpha(e)(1-e)\alpha(x)) \alpha(e)c(1-e) \right)^n$$

bulunur. Bu durumda her  $x, y \in R$  için

$$0 = a(1-e)((x\alpha(e)(1-e)y - y\alpha(e)(1-e)x)\alpha(e)c(1-e))^n \quad (3.10)$$

olur. O zaman Uyarı 2.4 gereğince her  $x \in R$  ve uygun bir  $\lambda \in C$  için aşağıdakilerden biri geçerlidir:

$$(i) \ a(1-e) = 0,$$

$$(ii) \ \alpha(e)c(1-e) = 0,$$

$$(iii) \quad \alpha(e)c(1-e)x\alpha(e)(1-e) = \lambda\alpha(e)c(1-e) \text{ ve} \\ \alpha(e)(1-e)x\alpha(e)c(1-e) = \lambda\alpha(e)c(1-e),$$

$$(iv) \quad a(1-e)x\alpha(e)(1-e) = \lambda a(1-e) \text{ ve} \\ \alpha(e)(1-e)x\alpha(e)c(1-e) = \lambda\alpha(e)c(1-e).$$

Şimdi (iii) nin geçerli olduğunu kabul edelim. O zaman (3.10) dan her  $x, y \in R$  ve uygun bir  $\lambda \in C$  için

$$\begin{aligned} 0 &= a(1-e)(x\lambda\alpha(e)c(1-e) - y\lambda\alpha(e)c(1-e)) \\ &= a(1-e)(\lambda(x-y)\alpha(e)c(1-e))^n \\ &= \lambda^n a(1-e)((x-y)\alpha(e)c(1-e))^n \end{aligned}$$

elde edilir. Özel olarak  $y = 0$  alınırsa her  $x \in R$  için  $\lambda^n a(1-e)(x\alpha(e)c(1-e))^n = 0$  dır.  $R$  bir asal halka olduğundan ya  $\lambda = 0$  ya  $a(1-e) = 0$  ya da  $\alpha(e)c(1-e) = 0$  dır. Aynı işlemlerle (iv) in geçerli olduğu kabul edilir ve (3.10) denkleminde kullanılırsa  $R$  asal bir halka olduğundan ya  $\lambda = 0$  ya  $a(1-e) = 0$  ya da  $\alpha(e)c(1-e) = 0$  sonucuna varılır.

Eğer  $\lambda = 0$  ise o zaman her  $x \in R$  için,

- (iii) den  $\alpha(e)c(1-e)x\alpha(e)(1-e) = 0$  ve  $\alpha(e)(1-e)x\alpha(e)c(1-e) = 0$ ,
- (iv) den  $a(1-e)x\alpha(e)(1-e) = 0$  ve  $\alpha(e)(1-e)x\alpha(e)c(1-e) = 0$

bulunur. Her iki durumda da  $R$  halkasının asallığından ya  $a(1-e) = 0$  ya  $\alpha(e)c(1-e) = 0$  ya da  $\alpha(e)(1-e) = 0$  sonucuna ulaşılır.

Şimdi  $e \in R$  idempotenti için  $\alpha(e)(1-e) = 0$  olduğunu kabul edelim. (3.8) de  $x$  yerine  $[\alpha^{-1}(1-e)xe, ye]$  alalım. O zaman her  $x, y \in R$  için

$$\begin{aligned} 0 &= a(b[\alpha^{-1}(1-e)xe, ye] - [(1-e)\alpha(x)\alpha(e), \alpha(y)\alpha(e)]c)^n(1-e) \\ &= a(1-e)(\alpha(x)\alpha(e)\alpha(y)\alpha(e)c(1-e))^n \end{aligned}$$

bulunur. O halde Teorem 2.16 ışığında  $a(1-e) = 0$  ya da

$$\alpha(e)R\alpha(e)c(1-e) = 0$$

dır.  $R$  halkasının asallığından  $\alpha(e)c(1-e) = 0$  ya da  $a(1-e) = 0$  olduğu görülür.

Chang , 2009 Lemma 4 ün ispatındaki benzer teknikleri kullanarak aşağıdaki gibi devam edelim. Aşikâr olmayan bir  $e \in R$  idempotenti için  $a(1-e) = 0$  olsun. Her  $x \in R$  için  $e + (1-e)xe \in R$  elemanı da bir idempotent ve

$$a(e + (1-e)xe) = ae = a \neq 0$$

olduğundan,

$$\alpha(1-e - (1-e)xe)c(e + (1-e)xe) = 0 \quad (3.11)$$

dır. Diğer yandan,  $R$  halkasındaki tüm idempotent elemanlar için  $\alpha(e)c(1-e) = 0$  sağlandığından (3.11) denklemi de sağlanır. (3.11) den her  $x, y \in R$  için

$$\alpha(1-e)ce - \alpha(1-e)\alpha(x)\alpha(e)ce + \alpha(1-e)c(1-e)xe - \alpha(1-e)\alpha(x)\alpha(e)c(1-e)xe = 0 \quad (3.12)$$

elde edilir. Özel olarak (3.12) de  $x = 0$  alınırsa  $\alpha(e)ce = ce$  dir. Bu (3.12) de kullanılırsa her  $x \in R$  için

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha(1-e)c(1-e)x - \alpha(1-e)\alpha(x)\alpha(e)ce - \alpha(1-e)\alpha(x)\alpha(e)c(1-e)xe \\ &= (1-\alpha(e))c(1-e)xe - (1-\alpha(e))\alpha(x)ce - (1-\alpha(e))\alpha(x)\alpha(e)c(1-e)xe \end{aligned} \quad (3.13)$$

olur.

(3.13) denklemi lineerleştirilirse her  $x, y \in R$  için

$$\begin{aligned} 0 &= (1-\alpha(e))c(1-e)(x+y)e - (1-\alpha(e))\alpha(x+y)ce \\ &\quad - (1-\alpha(e))\alpha(x+y)\alpha(e)c(1-e)(x+y)e \\ &= (1-\alpha(e))c(1-e)xe + (1-\alpha(e))c(1-e)ye - (1-\alpha(e))\alpha(x)ce \\ &\quad - (1-\alpha(e))\alpha(y)ce - (1-\alpha(e))\alpha(x)\alpha(e)c(1-e)xe \\ &\quad - (1-\alpha(e))\alpha(x)\alpha(e)c(1-e)ye - (1-\alpha(e))\alpha(y)\alpha(e)c(1-e)xe \\ &\quad - (1-\alpha(e))\alpha(y)\alpha(e)c(1-e)ye \\ &= (1-\alpha(e))(\alpha(x)\alpha(e)c(1-e)y + \alpha(y)\alpha(e)c(1-e)x)e \end{aligned}$$

elde edilir.  $\alpha$  bir  $X$ -dış otomorfizma olduğundan [Kharchenko , 1975](#) den her  $x, y, z, w \in R$  için

$$(1 - \alpha(e))(z\alpha(e)c(1 - e)y + w\alpha(e)c(1 - e)x)e = 0$$

bulunur. Son denklemde özel olarak  $y = 0$  alınırsa her  $x, w \in R$  için

$$(1 - \alpha(e))w\alpha(e)c(1 - e)xe = 0$$

denkleminde ulaşılır.  $R$  asal olduğundan  $1 - \alpha(e) = 0$  veya  $\alpha(e)c(1 - e) = 0$  sonucuna varılır. O halde  $1 \neq \alpha(e)$  olduğundan,

$$\alpha(e)c(1 - e) = 0$$

olmalıdır. Öyleyse (3.13) denklemi  $\alpha(e)c(1 - e) = 0$  ile birlikte, her  $x \in R$  için

$$c(1 - e)xe - (1 - \alpha(e))\alpha(x)ce = 0$$

olmasını gerektirir. Tekrar [Kharchenko , 1975](#) den her  $x, t \in R$  için

$$c(1 - e)xe - (1 - \alpha(e))tce = 0 \quad (3.14)$$

bulunur. (3.14) te özel olarak  $t = 0$  alınırsa  $c(1 - e)xe = 0$  dir. O zaman  $R$  asal olduğundan  $c(1 - e) = 0$  dir. Benzer şekilde (3.14) te  $x = 0$  alınırsa  $(1 - \alpha(e))tce = 0$  ve  $1 \neq \alpha(e)$  olduğundan  $ce = 0$  olmalıdır. O halde  $c = ce = 0$  dir. Bu ise  $c \neq 0$  seçilişiyle çelişir, ispat tamamlanır.  $\square$

Aşağıdaki yardımcı özellik Teorem 3.2 nin ispatında kullanılacaktır.

**Yardımcı Özellik 3.5** ([Chang , 2009, Lemma 4](#))  $R$  bir asal halka,  $a, b, c \in R$  ve  $\alpha \in \text{Aut}(R)$  olsun.  $n$  sabit pozitif bir tamsayı olmak üzere her  $x \in R$  için  $a(bx - \alpha(x)c)^n = 0$  ise o zaman her  $x \in R$  için  $a(bx - \alpha(x)c) = 0$  dir.

**Teorem 3.2**  $R$ , değişmeli olmayan bir Lie ideali  $L$  olan bir asal halka ve  $G$ ,  $R$  nin bir genelleştirilmiş  $\alpha$ -türevi olsun.  $a \in R$  ve  $n$  sabit pozitif bir tamsayı olmak üzere, her  $x \in L$  için  $aG(x)^n = 0$  olsun. O zaman  $\dim_C R_C \neq 4$  ise her  $x \in R$  için  $aG(x) = 0$  dir.

**İspat.** Eğer  $a = 0$  ise o zaman ispatlanacak birşey yoktur.  $a \neq 0$  olduğunu kabul edelim. O halde Yardımcı Özellik 2.1 den  $I = R[L, L]R$  ve  $0 \neq [I, R] \subseteq L$

dir. Yardımcı Özellik 2.20 gereğince  $f$ ,  $R$  halkasının bir  $\alpha$ -türevi olmak üzere her  $x \in R$  için  $G(x) = sx + f(x)$  olacak şekilde bir  $s = G(1) \in U(R)$  vardır. Hipotezden her  $x \in L$  için

$$a(sx + f(x))^n = 0 \quad (3.15)$$

dir. (3.15) özdeşliği her  $x \in [I, R]$  için de sağlanır. Teorem 2.31 den  $I, R$  ve  $Q(R)$ ,  $Q(R)$  üzerinde aynı genelleştirilmiş polinom özdeşliklerini sağlar ve böylece (3.15) her  $x \in [Q(R), Q(R)]$  için de sağlanır. O halde  $I$  ideali ve  $R$  halkası yerine  $Q(R)$  alınabilir. Eğer  $f$  bir  $X$ -iç türev ise o zaman her  $x \in R$  için  $f(x) = bx - \alpha(x)b$  olacak şekilde bir  $b \in Q(R)$  vardır. (3.15) özdeşliği her  $x \in [R, R]$  için

$$a((s + b)x - \alpha(x)b)^n = 0$$

şeklinde yeniden yazılırsa Yardımcı Özellik 3.4 ten ispat biter.

Son olarak  $f$  nin bir dış  $\alpha$ -türev olduğunu kabul edelim. (3.15) den her  $x, y \in R$  için

$$\begin{aligned} 0 &= a(s[x, y] + f([x, y]))^n \\ &= a(s[x, y] + f(xy) - f(yx))^n \\ &= a(s[x, y] + f(x)y + \alpha(x)f(y) - f(y)x - \alpha(y)f(x))^n \end{aligned}$$

olur. Teorem 2.35 gereğince her  $x, y, z, u \in R$  için

$$a(s[x, y] + zy + \alpha(x)u - ux - \alpha(y)z)^n = 0 \quad (3.16)$$

olmalıdır. (3.16) da  $x = 0$  alınırsa her  $y, z \in R$  için  $a(zy - \alpha(y)z)^n = 0$  bulunur. Yardımcı Özellik 3.5 ten her  $y, z \in R$  için

$$a(zy - \alpha(y)z) = 0 \quad (3.17)$$

dir. (3.17) sağdan  $r$  ile çarpılarak, her  $r, y, z \in R$  için

$$azy - a\alpha(y)zr = 0 \quad (3.18)$$

bulunur. Diğer yandan (3.17) denkleminde  $y$  yerine  $yr$  yazılarak her  $r, y, z \in R$  için

$$azy - a\alpha(yr)z = 0 \quad (3.19)$$

elde edilir. (3.18) ile (3.19) kıyaslanırsa her  $r, z, y \in R$  için

$$a\alpha(y)(\alpha(r)z - zr) = 0$$

olduğu görülür.  $a \neq 0$  ve  $R$  asal olduğundan her  $r, z \in R$  için  $\alpha(r)z = zr$  dir. Yardımcı Özellik 2.19 dan her  $r, z \in Q(R)$  için  $\alpha(r)z = zr$  olur. Özel olarak  $z = 1 \in Q(R)$  alınır  $\alpha(r) = r$  elde edilir ve bu durumda her  $r, z \in R$  için  $rz = zr$  bulunur. Bu ise  $Q(R)$  halkasının ve dolayısıyla  $R$  halkasının değişmeli bir halka olduğunu gösterir ki bu bir çelişkidir.  $\square$

**Sonuç 3.1**  $R$  bir asal halka ve  $L$ ,  $R$  nin değişmeli olmayan bir Lie ideali ve  $n$  sabit pozitif bir tamsayı olsun.  $a \in R$  ve  $G$ ,  $R$  halkasının sıfırdan farklı bir genelleştirilmiş  $\alpha$ -türevi olmak üzere her  $x \in L$  için  $aG(x)^n = 0$  olsun. O zaman,  $a = 0$  veya  $\dim_C R_C \neq 4$  iken,  $q \in Q(R)$  olmak üzere her  $x \in R$  için  $G(x) = qx$  dir ve  $aq = 0$  dır.

**İspat.** Her  $x \in L$  için  $aG(x)^n = 0$  olduğunu kabul edelim. O zaman Teorem 3.2 den her  $x \in R$  için  $\dim_C R_C = 4$  olmadığında  $aG(x) = 0$  dır. Böylece  $f$ ,  $R$  halkasının bir  $\alpha$ -türev olmak üzere her  $x, y \in R$  için

$$0 = aG(xy) = a(G(x)y + \alpha(x)f(y)) = a\alpha(x)f(y)$$

dir.  $R$  halkasının asallığı kullanılarak  $a = 0$  veya  $f = 0$  sonucuna ulaşılır. Eğer  $f = 0$  ise o zaman Yardımcı Özellik 2.20 den her  $x \in R$  için  $G(x) = qx$  olacak şekilde uygun bir  $q \in Q(R)$  vardır. Buradan her  $x \in R$  için  $a(qx) = 0$  sonucuna ulaşılır. Bu da  $aq = 0$  olmasını gerektirir ve ispat biter.  $\square$

$R$  halkasının herhangi bir  $\alpha$ -türevi  $f$  bir genelleştirilmiş  $\alpha$ -türev olduğundan aşağıdaki sonuç doğal olarak ortaya çıkmaktadır:

**Sonuç 3.2**  $R$  bir asal halka ve  $L$ ,  $R$  halkasının değişmeli olmayan bir Lie ideali olsun.  $a \in R$  ve  $f$ ,  $R$  halkasının bir  $\alpha$ -türevi olmak üzere  $n$  sabit pozitif bir tamsayısı ve her  $x \in L$  için  $af(x)^n = 0$  ise o zaman  $\dim_C R_C = 4$  olmadığında  $a = 0$  veya  $f = 0$  dır.

Aşağıdaki örnekte görüldüğü gibi Teorem 3.2 de halkanın asallığı kaldırılamaz bir koşuldur.

**Örnek 3.1**  $F$  bir cisim ve  $R = \left\{ \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & w \end{pmatrix} \mid u, v, w \in F \right\}$  halkasının bir

tersinir elemanı  $q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in R$  ve her  $x \in R$  için

$$\alpha(x) = qxq^{-1} = \begin{pmatrix} u & u - v + w \\ 0 & w \end{pmatrix}$$

olsun.  $c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in R$  olmak üzere

$$G(x) = cx - \alpha(x)d = \begin{pmatrix} 0 & u - v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$$

$G$  dönüşümü  $R$  halkasının sıfırdan farklı bir genelleştirilmiş  $\alpha$ -türevidir.  $a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$  seçilirse,  $n$  sabit pozitif tamsayısı olmak üzere her  $x \in R$  için  $aG(x)^n = 0$ , fakat  $u = v$  olmadıkça

$$aG(x) = \begin{pmatrix} 0 & u - v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

olduğu kolayca görülebilir.

Ayrıca aşağıdaki örnekte görüldüğü gibi Teorem 3.2 de Lie idealin değişmeli olması durumunda sonuç geçerli değildir.

**Örnek 3.2**  $F$  bir cisim ve  $\text{char } F = 2$  olsun.

$$R = \begin{pmatrix} F & F \\ F & F \end{pmatrix}$$

asal halkasını göz önüne alalım.  $R$  nin  $L = \left\{ \begin{pmatrix} \beta & \lambda \\ \lambda & \beta \end{pmatrix} : \lambda, \beta \in F \right\}$  Lie ideali

değişmelidir.  $q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in R$  bir tersinir eleman olmak üzere her

$$x = \begin{pmatrix} u & v \\ z & w \end{pmatrix} \in R \text{ için}$$

$$\alpha(x) = qxq^{-1} = \begin{pmatrix} u+z & u+v+z+w \\ z & z+w \end{pmatrix}$$

$$\text{olsun. } c = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R \text{ için}$$

$$G(x) = cx - \alpha(x)d = \begin{pmatrix} u & u+v+z \\ u+z & v+z+w \end{pmatrix}$$

$R$  nin sıfırdan farklı bir genelleştirilmiş  $\alpha$ -türevidir.  $a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  seçilirse,  
 $n$  sabit pozitif tamsayısı ve her  $x \in L$  için  $aG(x)^n = 0$  fakat

$$aG(x) = \begin{pmatrix} u+z & v+z+w \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

dır.

## 4. ASAL HALKALARIN GENELLEŞTİRİLMİŞ $\alpha$ -TÜREVLERİNİN MERKEZİ KUVVET- LERİNİN SIFIRLAYAN KOŞULLARI

Bu bölümde bir asal halkanın değişmeli olmayan bir Lie ideali üzerinde otomorfizma ihtiva eden merkezi bir diferansiyel özdeşlik incelenecektir.

Bu bölüm boyunca  $R$  bir asal halka,  $n$  sabit pozitif bir tamsayı ve  $\alpha \in \text{Aut}(R)$ ,  $Q(R)$  ve  $U(R)$  birimli asal halkalar olsun. Sırasıyla  $Z(R)$  ve  $C$ ,  $R$  halkasının merkezi ve genişletilmiş merkezi olsun.

Brešar , 1990 sonucunun bir genellemesi Lee and Lin , 1996 tarafından verilmiştir. Lee and Lin , 1996 aynı özdeşliği merkezi olmayan bir Lie ideal üzerinde ele almışlar ve karakteristik koşulunu kaldırarak aynı sonuca ulaşmışlardır. Özetle, Lee and Lin şu teoremi ispatlamışlardır: Bir  $R$  asal halkasının merkezi olmayan bir Lie ideali  $L$  olmak üzere  $d$   $R$  nin sıfırdan farklı bir türevi ve  $0 \neq a \in R$  olsun. Bir  $n$  sabit pozitif tamsayısı ve her  $x \in L$  için  $ad(x)^n \in Z(R)$  ise o zaman  $\dim_C R_C = 4$  dir.

J. C. Chang aşağıdaki teoremi ispatlamıştır:

**Teorem 4.1** (*Chang , 2009, Theorem B*)  $R$  bir asal halka ve  $I$ ,  $R$  nin sıfırdan farklı bir ideali,  $\alpha$ ,  $R$  nin bir otomorfizması ve  $G$ ,  $R$  nin sıfırdan farklı bir genelleştirilmiş  $\alpha$ -türevi olsun. Bir  $n$  sabit pozitif tamsayısı ve her  $x \in I$  için  $G(x)^n \in Z(R)$  ise  $R$  halkası değişmeli ya da 4 boyutlu basit cebir içinde bir mertebedir.

Bu kesimde Chang , 2009 sonucunun halka üzerinde ve daha sonra da değişmeli olmayan bir Lie ideal üzerinde sıfırlayan koşulu incelenecektir. Bir başka ifadeyle aşağıdaki iki problem ele alınacaktır:

**Problem:**  $R$  değişmeli olmayan bir asal halka,  $L$ ,  $R$  nin değişmeli olmayan bir Lie ideali ve  $a \in R$  olsun.  $G$ ,  $R$  halkasının sıfırdan farklı bir genelleştirilmiş  $\alpha$ -türevi ve  $n$  sabit pozitif bir tamsayı olmak üzere

(i) her  $x \in R$  için  $aG(x)^n \in Z(R)$  ise,

(ii) her  $x \in L$  için  $aG(x)^n \in Z(R)$  ise

o zaman  $G$  genelleştirilmiş  $\alpha$ -türevi veya  $R$  halkasının yapısı hakkında ne söylenebilir?

Yardımcı Özellik 4.2 nin ispatında aşağıdaki sonuca ihtiyaç duyulmaktadır:

**Yardımcı Özellik 4.1** (*Chang [2009], Lemma 3*)  $R$  merkezi  $Z(R)$  olan bir asal halka,  $a, b, c, q \in R$  ve  $q \in R$  tersinir olsun.  $n$  sabit pozitif bir tamsayı olmak üzere her  $x \in R$  için  $a(q(bx - xc))^n = 0$  ise o zaman her  $x \in R$  için  $a(q(bx - xc)) = 0$  dir.

$\alpha \in \text{Aut}(R)$  otomorfizmasının bir iç otomorfizma olması durumunda yukarıdaki problem (i), halka üzerinde aşağıdaki yardımcı özelliğe indirgenmiştir:

**Yardımcı Özellik 4.2**  $R$  merkezi  $Z(R)$  olan, değişmeli olmayan bir asal halka,  $a, b, c, q \in R$  ve  $q$  tersinir olsun.  $a \neq 0$  ve  $n$  sabit pozitif bir tamsayı olmak üzere her  $x \in R$  için  $a(bx - qxq^{-1}c)^n \in Z(R)$  ise o zaman  $q^{-1}c \in Z(R)$  ve  $a(b - c) = 0$  veya  $\dim_C R_C = 4$  dir.

**İspat.**  $\dim_C R_C > 4$  olduğunu kabul edelim. Eğer  $Z(R) = 0$  ise o zaman her  $x \in R$  için  $a(bx - qxq^{-1}c)^n = 0$  dir. Yardımcı Özellik 4.1 den her  $x \in R$  için  $abx - aqxq^{-1}c = 0$  dir. O zaman Teorem 2.7 gereğince uygun bir  $\lambda \in C$  için  $ab = \lambda aq$  dir. Böylece  $aqR(\lambda - q^{-1}c) = 0$  olup,  $R$  halkasının asallığından  $aq = 0$  veya  $q^{-1}c \in C$  elde edilir.  $a \neq 0$  olduğundan  $q^{-1}c \in C$  olur. Bu durumda hipotezden her  $x \in R$  için  $a((b - c)x)^n = 0$  olup, Yardımcı Özellik 2.17 den  $a(b - c) = 0$  bulunur.

O halde  $Z(R) \neq 0$  olduğunu kabul edelim.  $q^{-1}c \notin Z(R)$  olsun. O zaman  $R$ ,

$$a(bx - qxq^{-1}c)^n y - ya(bx - qxq^{-1}c)^n = 0$$

genelleştirilmiş polinom özdeşliğini sağlar. Teorem 2.10 dan  $Q(R)$  sıfırdan farklı  $H$  “socle” na sahip bir primitif halkadır ve  $Q(R)$  halkasının ilgili

bölümlü halkası  $D$ ,  $C$  üzerinde sonlu boyutludur. O zaman  $Q(R)$ ,  $End({}_D V)$  endomorfizmalar halkasının bir yoğun alt halkasına izomorftur.

• 1. Durum:  $\dim_D V = \infty$  olsun. O zaman  $H$  sonlu ranklı elemanlardan oluştuğundan ve  $C$  deki sıfırdan farklı her eleman tersinir olduğundan

$$H \cap C = (0)$$

dır. Böylece her  $x \in H$  için

$$0 = a(bx - qxq^{-1}c)^n = a(q(q^{-1}bx - xq^{-1}c))^n \quad (4.1)$$

elde edilir ve (4.1) her  $x \in Q(R)$  için de sağlanır. Yardımcı Özellik 4.1 den her  $x \in R$  için  $a(bx - qxq^{-1}c) = 0$  olduğu görülür, böylece  $abx - aqxq^{-1}c = 0$  dir. Teorem 2.7 den  $ab = \lambda aq$  olacak şekilde uygun bir  $\lambda \in C$  vardır. Dolayısıyla her  $x \in R$  için  $aqx(\lambda - q^{-1}c) = 0$  dir.  $R$  bir asal halka olduğundan  $a = 0$  veya  $q^{-1}c \in C$  bulunur, bu ise bir çelişkidir.

• 2. Durum:  $\dim_D V < \infty$  olsun. O zaman  $m$  bir pozitif tamsayı ve  $D$  üzerindeki  $m \times m$  matrisler halkası  $D_m$  olmak üzere  $Q(R) \cong D_m$  dir. Eğer  $C$  sonlu ise o zaman  $D$ ,  $C$  üzerinde sonlu boyutlu olacağından Teorem 2.4 den  $D$  bir cisimdir. Bu durumda  $Q(R) \cong C_m$  olur. Diğer yandan eğer  $C$  sonsuz ve  $F$   $D$  bölümlü halkasının maksimal alt cismi ise standart bir argüman ile Önerme 2.14 den her  $x, y \in Q(R) \otimes_C F$  için  $a(bx - qxq^{-1}c)^n = 0$  dir. Ayrıca bir  $k$  pozitif tamsayısı için  $Q(R) \otimes_C F \cong D_m \otimes_C F \cong (D \otimes_C F)_m \cong F_k$  dir.  $C$  sonlu iken  $R$  halkasını  $Q(R)$  ile,  $C$  sonsuz iken  $R$  halkasını  $Q(R) \otimes_C F$  ile yer değiştirerek  $R \cong F_k$  alabiliriz.  $R$  değişmeli olmayan bir halka olduğundan her iki durumda da  $k > 1$  için  $R \cong F_k$  alınabilir.

$k = 2$  için  $Q(R) \cong F_2$  olup,  $R$  halkası 4-boyutlu merkezi basit cebir üzerinde bir merteye olur. Bu ise  $\dim_C R_C > 4$  ile çelişir. O halde,  $k \geq 3$  kabul edelim. Eğer  $x \in Q(R)$  için  $\text{rank}(x) = 1$  ise o zaman  $bx$  ve  $qxq^{-1}$  elemanlarının rankları en fazla 1 dir. O zaman Yardımcı Özellik 2.5 gereğince

$$\begin{aligned} \text{rank}(a(bx - qxq^{-1}c)^n) &\leq \text{rank}(a(bx - qxq^{-1}c)) \\ &\leq \text{rank}(bx - qxq^{-1}c) \\ &\leq \text{rank}(bx) + \text{rank}(qxq^{-1}c) \end{aligned}$$

$$\leq 1 + 1 = 2$$

dir.  $\text{rank}(a(bx - qxq^{-1}c)^n) \leq 2$  ve  $k \geq 3$  olduğundan rankı 1 olan herhangi bir  $x \in Q(R)$  için  $a(bx - qxq^{-1}c)^n = 0$  sonucuna varılır.  $q^{-1}c \notin F$  olduğundan  $v$  ve  $q^{-1}cv$  vektörleri  $F$ -lineer bağımsız olacak şekilde uygun bir  $v \in V$  vardır. O halde,  $\text{rank}(x) = 1$  olacak şekilde bir  $x \in Q(R)$  için  $xv = 0$  ve  $xq^{-1}cv = q^{-1}v$  seçilebilir. O zaman  $(bx - qxq^{-1})v = -v$  olduğundan

$$\begin{aligned} 0 &= a(bx - qxq^{-1}c)^n v \\ &= (-1)^n av \end{aligned}$$

elde edilir.  $V$  vektör uzayının  $Q(R)$  üzerindeki hareketi “faithful” olduğundan  $a = 0$  bulunur. Bu ise bir çelişkidir. Öyleyse  $q^{-1}c \in Z(R)$  olmalıdır. Bu durumda her  $x \in R$  için  $a((b - c)x)^n \in Z(R)$  dir.  $\dim_C R_C > 4$  olduğundan Yardımcı Özellik 2.16 (ii) gereğince her  $x \in R$  için  $a((b - c)x)^n = 0$  olmalıdır. Bu durumda Yardımcı Özellik 2.17 (i) den  $a(b - c) = 0$  olup, ispat tamamlanır.  $\square$

Problemi çözüme ulaştıracak yardımcı özelliklerin bir kısmında aşağıdaki yardımcı özellik bir alt durum olarak karşımıza çıkacağından, öncelikle aşağıdaki merkezi özdeşlikler ele alınacaktır.

**Yardımcı Özellik 4.3**  *$R$  değişmeli olmayan bir asal halka,  $\dim_C R_C > 4$ ,  $a, b, c \in R$  ve  $n$  sabit pozitif bir tamsayı olsun.*

(i) *Her  $x, y \in R$  için  $a([x, y]b)^n \in Z(R)$  ise o zaman  $a = 0$  veya  $b = 0$  dır.*

(ii) *Her  $x, y \in R$  için  $a(b[x, y])^n \in Z(R)$  ise o zaman  $ab = 0$  dır.*

**İspat.** (i)  $a \neq 0$  ve  $b \neq 0$  olduğunu kabul edelim.  $R$  bir polinom özdeşliği halkası değil ise o zaman Önerme 2.13 ten her  $x \in R$  için  $a(xb)^n \in Z(R)$  dir. Bu durumda  $\dim_C R_C > 4$  olduğundan Yardımcı Özellik 2.16 (ii) gereğince her  $x \in R$  için  $a(xb)^n = 0$  olur. O zaman Yardımcı Özellik 2.17 (ii) den  $a = 0$  veya  $b = 0$  olmalıdır. Bu ise bir çelişkidir.

Şimdi  $R$  nin bir polinom özdeşliği halkası olduğunu kabul edelim. O zaman  $R_C$ ,  $C$  üzerinde sonlu boyutlu bir merkezi basit cebirdir.  $\bar{C}$ ,  $C$  cisminin merkezi kapanışı olmak üzere  $C$  nin sonsuz olması durumunda  $F = \bar{C}$  ve  $C$  nin sonlu olması durumunda da  $F = C$  alınabilir. O zaman  $k > 1$  için  $R_C \otimes_C F = M_k(F)$  dir ve her  $x, y \in R_C \otimes_C F$  için

$$a([x, y]b)^n \in C \quad (4.2)$$

sağlanır. Eğer her  $x, y \in R_C \otimes_C F$  için  $a([x, y]b)^n = 0$  ise o zaman Yardımcı Özellik 3.1 den  $a = 0$  veya  $b = 0$  olduğu çelişkisine ulaşılır. O zaman  $a([x_0, y_0]b)^n \neq 0$  olacak şekilde uygun  $x_0, y_0 \in R_C \otimes_C F$  elemanları vardır ve  $C$  bir cisim olduğundan  $a([x_0, y_0]b)^n$  tersinirdir ve böylece  $a$  tersinirdir.

$e \in R_C \otimes_C F$ , rankı 1 olan bir idempotent eleman olsun. O zaman (4.2) de  $x$  yerine  $e$  ve  $y$  yerine  $ey(1 - e)$  alınırsa her  $y \in R_C \otimes_C F$  için

$$a(ey(1 - e)b)^n \in C$$

elde edilir. Yardımcı Özellik 2.5 den

$$\begin{aligned} \text{rank}(a(eyb(1 - e))^n) &\leq \text{rank}((ey(1 - e)b)^n) \\ &\leq \text{rank}(ey(1 - e)b) \\ &\leq \text{rank}(eyb) + \text{rank}(eyeb) \\ &= 2 \end{aligned}$$

bulunur.  $\dim_C R_C > 4$  olduğundan her  $y \in R_C \otimes_C F$  için

$$a(ey(1 - e)b)^n = 0 \quad (4.3)$$

olmalıdır. (4.3) özdeşliği sağdan  $e$  ile çarpılırsa

$$ae(y(1 - e)be)^n = 0$$

bulunur. O zaman  $ae = 0$  veya  $(1 - e)be = 0$  dir.  $a$  tersinir olduğundan  $ae = 0$  olması durumunda  $e = 0$  bulunur, bu ise bir çelişkidir. Öyleyse keyfi bir  $e \in R_C \otimes_C F$  idempotent elemanı için  $(1 - e)be = 0$  dir. O zaman  $1 - e \in R_C \otimes_C F$

için de  $eb(1 - e) = 0$  olduğu görülür. Bu durumda  $eb = ebe = be$  dir.  $R$  halkasının tüm idempotentleri ile doğrulan toplamsal alt grubu  $E$  olmak üzere  $E$ ,  $R$  nin değişmeli olmayan bir Lie idealidir (bkz. [Herstein , 1969](#)). O zaman,  $[b, E] = 0$  olduğundan  $b \in C$  olmalıdır.  $b \neq 0$  kabul ettiğimizden  $b \in C$  tersinirdir. O halde her  $x, y \in R_C \otimes_C F$  için

$$a([x, y]b)^n = b^n a([x, y])^n \in C$$

olup,  $b \in C$  elemanının tersinirliği kullanılırsa  $a([x, y])^n \in C$  sonucuna varılır. O zaman  $y_0 \in R_C \otimes_C F$  için  $a([x, y_0])^n \in C$  olup,  $d = [-, y_0]$  türevi için

$$ad(x)^n \in C$$

olur. Bu durumda Teorem 2.23 ten  $a = 0$  veya  $d = 0$  elde edilir.  $a \neq 0$  kabul ettiğimizden  $d = 0$  olmalıdır. Böylece  $d$  nin tanımından  $y_0 \in C$  olur. Bu durum her keyfi  $y$  elemanı için tekrarlanırsa  $R_C$  halkasının dolayısıyla  $R$  halkasının değişmeli olduğu sonucuna varılır, ancak bu bir çelişkidir. Öyleyse kabulümüz yanlıştır,  $a = 0$  veya  $b = 0$  olmalıdır.

(ii) (i) şikkındaki teknikleri kullanarak benzer seçilişlerle  $ab = 0$  olduğu görülür.  $\square$

Aşağıdaki Yardımcı Özellik 4.5 te  $\alpha \in \text{Aut}(R)$  otomorfizmasının bir  $X$ -iç otomorfizma olduğu durumda, özdeşlik halkanın komütatörleri üzerinde ele alınmıştır. Ayrıca bu yardımcı özelliğin ispatında aşağıdaki sonuca ihtiyaç duyulacaktır:

**Yardımcı Özellik 4.4** ([Chang , 2011, Lemma 1](#)) Bir  $D$  bölümlü halkası üzerinde bir vektör uzayı  $V$  ve  $R = \text{Hom}_D(V_D, V_D)$  olsun.  $k > 1$  için  $\dim_D(V_D) = k$  ve  $b \in R$  olsun.  $R$  halkasının rankı 1 olan her  $t$  idempotent elemanı için  $bt = tb$  ise o zaman  $b \in Z(R)$  dir.

**Yardımcı Özellik 4.5**  $R$  merkezi  $Z(R)$  olan, değişmeli olmayan bir asal halka ve  $a, b, c, q \in R$  için  $q$  tersinir olsun.  $a \neq 0$  olmak üzere bir pozitif  $n$  tamsayısı ve her  $x \in [R, R]$  için  $a(bx - qxq^{-1}c)^n \in Z(R)$  ise o zaman ya  $q^{-1}c \in Z(R)$  ve  $a(b - c) = 0$  ya da  $\dim_C R_C = 4$  tür.

**İspat.**  $\dim_C R_C > 4$  olduğunu kabul edelim. Eğer  $R$  bir polinom özdeşliği halkası değil ise o zaman Önerme 2.13 ten her  $x \in R$  için

$$a(bx - qxq^{-1}c)^n \in Z(R)$$

dir. Bu durumda Yardımcı Özellik 4.2 den ispat biter. Eğer  $R$  bir polinom özdeşliği halkası ise o zaman Teorem 2.11 den  $R_C, C$  üzerinde bir sonlu boyutlu, merkezi basit cebir ve  $D$  bir bölümlü halka olmak üzere  $k > 1$  için  $k$ -boyutlu  $V_D$  vektör uzayının lineer dönüşümlerinin halkasıdır. Teorem 2.12 den her  $x \in [R_C, R_C]$  için

$$a(bx - qxq^{-1}c)^n \in C \quad (4.4)$$

olur.  $e \in R_C$  idempotenti için  $\text{rank}(e) = 1$  olsun. (4.4) de  $x$  yerine  $[q^{-1}(1 - e)xe, q^{-1}(1 - e)ye]$  yazılırsa her  $x, y \in R_C$  için

$$a(b[q^{-1}(1 - e)xe, q^{-1}(1 - e)ye] - q[q^{-1}(1 - e)xe, q^{-1}(1 - e)ye]q^{-1}c)^n \in C$$

elde edilir.

Yardımcı Özellik 2.5 ten,

$$\begin{aligned} & \text{rank}\left(a(b[q^{-1}(1 - e)xe, q^{-1}(1 - e)ye] - q[q^{-1}(1 - e)xe, q^{-1}(1 - e)ye]q^{-1}c)^n\right) \\ & \leq \text{rank}\left((b[q^{-1}(1 - e)xe, q^{-1}(1 - e)ye] - q[q^{-1}(1 - e)xe, q^{-1}(1 - e)ye]q^{-1}c)^n\right) \\ & \leq \text{rank}\left(b[q^{-1}(1 - e)xe, q^{-1}(1 - e)ye] - q[q^{-1}(1 - e)xe, q^{-1}(1 - e)ye]q^{-1}c\right) \\ & \leq \text{rank}\left(bq^{-1}(1 - e)xeq^{-1}(1 - e)ye - bq^{-1}(1 - e)yeq^{-1}(1 - e)xe \right. \\ & \quad \left. - q^{-1}(1 - e)xeq^{-1}(1 - e)yeq^{-1}c + (1 - e)yeq^{-1}(1 - e)xeq^{-1}c\right) \\ & \leq \text{rank}\left(bq^{-1}(1 - e)xeq^{-1}(1 - e)ye\right) + \text{rank}\left(bq^{-1}(1 - e)yeq^{-1}(1 - e)xe\right) \\ & \quad + \text{rank}\left(q^{-1}(1 - e)xeq^{-1}(1 - e)yeq^{-1}c\right) + \text{rank}\left((1 - e)yeq^{-1}(1 - e)xeq^{-1}c\right) \\ & \leq 4 \end{aligned}$$

bulunur.  $\dim_C R_C > 4$  olduğundan

$$a(b[q^{-1}(1 - e)xe, q^{-1}(1 - e)ye] - q[q^{-1}(1 - e)xe, q^{-1}(1 - e)ye]q^{-1}c)^n = 0 \quad (4.5)$$

olduğu görülür. (4.5) sağdan  $1 - e$  ile çarpılırsa her  $x, y \in R_C$  için

$$a(1-e)((yeq^{-1}(1-e)x - xeq^{-1}(1-e)y)eq^{-1}c(1-e))^n = 0 \quad (4.6)$$

bulunur.  $x$  değişkenini sabit tutalım.  $g(y) = yeq^{-1}(1-e)x - xeq^{-1}(1-e)y$  dersek (4.6) dan  $a(1-e)(g(y)eq^{-1}c(1-e))^n = 0$  bulunur. Bu durumda Uyarı 2.4 gereğince her  $y \in R_C$  ve uygun bir  $\lambda \in C$  için aşağıdaki koşullardan biri geçerlidir:

$$(i) \ a(1-e) = 0,$$

$$(ii) \ eq^{-1}c(1-e),$$

$$(iii) \ eq^{-1}(1-e)yeq^{-1}c(1-e) = -\lambda eq^{-1}c(1-e) \text{ ve} \\ eq^{-1}c(1-e)yeq^{-1}(1-e) = -\lambda eq^{-1}c(1-e),$$

$$(iv) \ eq^{-1}(1-e)yeq^{-1}c(1-e) = -\lambda eq^{-1}c(1-e) \text{ ve} \\ a(1-e)yeq^{-1}(1-e) = -\lambda a(1-e).$$

Şimdi (iii) nin geçerli olduğunu kabul edelim. O zaman (4.6) den her  $x, y \in R_C$  ve uygun bir  $\lambda \in C$  için

$$\begin{aligned} 0 &= a(1-e)(-y\lambda eq^{-1}c(1-e) + x\lambda eq^{-1}c(1-e))^n \\ &= a(1-e)(\lambda(-y+x)eq^{-1}c(1-e))^n \\ &= \lambda^n a(1-e)((x-y)eq^{-1}c(1-e))^n \end{aligned}$$

elde edilir. Özel olarak  $y = 0$  alınırsa her  $x \in R_C$  için

$$\lambda^n a(1-e)(xeq^{-1}c(1-e))^n = 0$$

dir.  $R_C$  bir asal halka olduğundan ya  $\lambda = 0$  ya  $a(1-e) = 0$  ya da  $eq^{-1}c(1-e) = 0$  dir. Eğer  $\lambda = 0$  ise o zaman  $eq^{-1}(1-e) = 0$  olur. Aynı işlemlerle, (iv) ün geçerli olduğu kabul edilir ve (4.6) da kullanılırsa ya  $\lambda = 0$  ya  $a(1-e) = 0$  ya da  $eq^{-1}c(1-e) = 0$  sonucuna varılır. Eğer  $\lambda = 0$  ise o zaman her  $x \in R_C$  için,

- (iii) den  $eq^{-1}(1-e)xeq^{-1}c(1-e) = 0$  ve  $eq^{-1}c(1-e)xeq^{-1}(1-e) = 0$ ,
- (iv) den  $eq^{-1}(1-e)xeq^{-1}c(1-e) = 0$  ve  $a(1-e)xeq^{-1}(1-e) = 0$

bulunur. Her iki durumda da  $R_C$  nin asallığından ya  $a(1-e) = 0$  ya  $eq^{-1}(1-e) = 0$  ya da  $eq^{-1}c(1-e) = 0$  olur. Şimdi  $e \in R_C$  idempotenti için  $eq^{-1}(1-e) = 0$  olduğunu kabul edelim. (4.4) te  $x$  yerine  $[q^{-1}(1-e)xe, ye]$  alınırsa her  $x, y \in R_C$  için

$$a(b[q^{-1}(1-e)xe, ye] - q[q^{-1}(1-e)xe, ye]q^{-1}c)^n \in C$$

ve buradan da

$$a(bq^{-1}(1-e)xeye - (1-e)xeyeq^{-1}c)^n = 0 \quad (4.7)$$

bulunur. (4.7) sağdan  $(1-e)$  ile çarpılırsa  $a(1-e)(xeyeq^{-1}c(1-e))^n = 0$  olup, Teorem 2.16 gereğince  $a(1-e) = 0$  veya her  $y \in R_C$  için  $eyeq^{-1}c(1-e) = 0$  olmalıdır. O zaman  $R_C$  asal olduğundan  $eq^{-1}c(1-e) = 0$  elde edilir. Böylece ya  $a(1-e) = 0$  ya da  $eq^{-1}c(1-e) = 0$  olmalıdır.

Aşık olmayan bir  $e \in R_C$  idempotenti için  $a(1-e) = 0$  olduğunu kabul edelim. Her  $x \in R_C$  için  $(1-e) + ex(1-e) \in R_C$  de bir idempotent ve  $a(e - ex(1-e)) \neq 0$  olduğundan her  $x \in R_C$  için

$$((1-e) + ex(1-e))q^{-1}c(e - ex(1-e)) = 0$$

dır. Özel olarak  $x = 0$  alınırsa  $(1-e)q^{-1}ce = 0$  bulunur. O zaman rankı 1 olan herhangi bir  $e \in R_C$  idempotenti için

$$eq^{-1}c = eq^{-1}ce = q^{-1}ce$$

dır.  $E$ ,  $R$  halkasının rankı 1 olan tüm idempotentleri ile üretilen bir toplamsal alt grubu olsun. O halde her  $e \in E$  için

$$[e, q^{-1}c] = 0$$

ve ayrıca  $E$   $R$  nin değişmeli olmayan bir Lie idealidir. O zaman Yardımcı Özellik 4.4 ten  $q^{-1}c \in C$  olup, her  $x \in [R_C, R_C]$  için  $a((b-c)x)^n \in C$  sonucuna

varılır ve Yardımcı Özellik 4.3 (ii) den ispat biter.  $\square$

Yardımcı Özellik 4.7 de aşağıdaki Yardımcı Özellik merkezi olma durumuna genişletilerek, bu bölümde ele alınan esas problemin  $\alpha$  nın  $R$  halkasının herhangi bir otomorfizması olması durumunda halka üzerindeki hali incelenecektir.

**Yardımcı Özellik 4.6** (*Chang, 2009, Lemma 4*)  $R$  bir asal halka,  $a, b, c \in R$  ve  $\alpha \in \text{Aut}(R)$  olsun. Her  $x \in R$  için  $a(bx - \alpha(x)c)^n = 0$  ise o zaman her  $x \in R$   $a(bx - \alpha(x)c) = 0$  dır.

**Yardımcı Özellik 4.7**  $R$  merkezi  $Z(R)$  olan bir asal halka ve  $a, b, c \in R$  olsun.  $a \neq 0$  ve  $\alpha \in \text{Aut}(R)$  olsun.  $n$  sabit pozitif bir tamsayı olmak üzere her  $x \in R$  için  $a(bx - \alpha(x)c)^n \in Z(R)$  ise o zaman ya  $\dim_C RC = 4$  ya da her  $x \in R$  için  $a(bx - \alpha(x)c) = 0$  dir.

**İspat.**  $\dim_C RC > 4$  olduğunu kabul edelim. Her  $x \in R$  için

$$a(bx - \alpha(x)c)^n \in Z(R)$$

olsun. Eğer  $b = 0$  veya  $c = 0$  ise o zaman her  $x \in R$  için sırasıyla  $a(-\alpha(x)c)^n \in Z(R)$  veya  $a(bx)^n \in Z(R)$  olur ki bu durumda Yardımcı Özellik 2.16 den ispat biter. O halde  $b \neq 0$  ve  $c \neq 0$  kabul edelim.

Eğer  $Z(R) = 0$  ise o zaman her  $x \in R$  için  $a(bx - \alpha(x)c)^n = 0$  olup, Yardımcı Özellik 4.6 dan ispat tamamlanır. O zaman  $Z(R) \neq 0$  olduğunu kabul edelim.  $\alpha$   $R$  halkasının bir  $X$ -iç otomorfizması ise o zaman uygun bir  $q \in Q(R)$  ve her  $x \in R$  için  $\alpha(x) = qxq^{-1}$  dir. Hipotezden her  $x \in R$  için  $a(bx - qxq^{-1}c)^n \in Z(R)$  dir. O halde Yardımcı Özellik 4.2 den  $q^{-1}c \in C$  ve  $a(b - c) = 0$  sonucuna varılır. Öyleyse  $a(bx - \alpha(x)c) = 0$  dır.

Şimdi  $\alpha$  nın  $R$  halkasının bir  $X$ -dış otomorfizması olduğunu kabul edelim. Hipotezden her  $x, y \in R$  için

$$a(bx - \alpha(x)c)^n y - ya(bx - \alpha(x)c)^n = 0 \quad (4.8)$$

dir. Teorem 2.31 den her  $x, y \in Q(R)$  için de (4.8) sağlanır, bir başka ifadeyle

$Q(R)$  halkası (4.8) genelleştirilmiş polinom özdeşliğini sağlar. Böylece Teorem 2.10 dan  $Q(R)$ , sıfırdan farklı bir  $H$  “socle” na sahip bir primitif halkadır ve  $D$  bir bölümlü halka olmak üzere  $Q(R)$ ,  $V_D$  vektör uzayının endomorfizmalar halkası  $End_D(V)$  nin bir yoğun alt halkasına izomorftur.

• 1. Durum:  $dim_D V = \infty$  olsun.  $H$  sonlu ranka sahip elemanlar içerdiğinden her  $x \in H$

$$a(bx - \alpha(x)c)^n = 0 \quad (4.9)$$

dir. Dolayısıyla Teorem 2.31 den her  $x \in Q(R)$  ve  $x \in R$  için de (4.9) sağlanır. O zaman Yardımcı Özellik 4.6 nın ispatında  $\alpha$  nın dış otomorfizma olduğu durumda  $c = 0$  elde edildiğinden, bu bir çelişkidir.

• 2. Durum  $dim_D V < \infty$  olduğunu kabul edelim. O halde  $D$  bölümlü halkası üzerindeki  $V_D$  vektör uzayı için  $D_k$ ,  $k \times k$  matrisler halkası olmak üzere  $Q(R) \cong End(_D V) \cong D_k$  olur. Teorem 2.30 gereğince her  $x \in Q(R)$  için  $\alpha(x) = TxT^{-1}$  olacak şekilde uygun bir  $T \in End(_D V)$  yarı-linear otomorfizması vardır. Böylece her  $x \in Q(R)$  için

$$a(bx - TxT^{-1}c)^n \in C \quad (4.10)$$

dir.

$k > 2$  olsun. Öncelikle  $v$  ve  $T^{-1}cv$  vektörlerinin her  $v \in V$  için  $D$ -lineer bağımlı olduklarını kabul edelim. Bu durumda uygun bir  $\lambda \in C$  için  $T^{-1}cv = \lambda v$  dir. O zaman her  $x \in Q(R)$  ve  $v \in V$  için

$$\begin{aligned} (bx - \alpha(x)c)v &= (bx - TxT^{-1}c)v \\ &= bxv - TxT^{-1}cv \\ &= bxv - Tx\lambda v \\ &= bxv - TT^{-1}cxv \\ &= (b - c)xv \end{aligned}$$

olur.  $Q(R)$  halkasının  $V$  üzerindeki hareketi “faithful” olduğundan her  $x \in Q(R)$  için

$$bx - \alpha(x)c = bx - TxT^{-1}c = (b - c)x$$

dir. (4.10) her  $x \in Q(R)$  için  $a((b-c)x)^n \in C$  olur. Böylece Yardımcı Özellik 2.16 (ii) den  $a(b-c) = 0$  ve her  $x \in R$  ve  $v \in V$  için

$$\begin{aligned} a(bx - \alpha(x)c)v &= a(bx - TxT^{-1}c)v \\ &= a(b-c)xv \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Yine  $Q(R)$  halkasının  $V$  üzerindeki hareketi “faithful” olduğundan her  $x \in R$  için  $a(bx - \alpha(x)c) = 0$  sonucuna varılır.

Şimdi  $v_0$  ve  $T^{-1}cv_0$  vektörleri  $D$ -lineer bağımsız olacak şekilde bir  $v_0 \in V$  olduğunu kabul edelim. O zaman  $Q(R)$  nin yoğunluğundan  $x \in Q(R)$  için  $\text{rank}(x) = 1$  olmak üzere

$$\begin{aligned} xv_0 &= 0 \\ xT^{-1}cv_0 &= T^{-1}v_0 \end{aligned}$$

alınabilir. Böylece

$$a(bx - TxT^{-1}c)v_0 = a(bxv_0 - TxT^{-1}cv_0) = -av_0$$

ve

$$a(bx - TxT^{-1}c)^n v_0 = (-1)^n av_0 \quad (4.11)$$

bulunur.  $\text{rank}(x) = 1$  olduğundan

$$\begin{aligned} \text{rank}\left(a(bx - TxT^{-1})^n\right) &\leq \text{rank}\left(a(bx - TxT^{-1})\right) \\ &\leq \text{rank}(abx) + \text{rank}(aTxT^{-1}) \\ &\leq 2 \end{aligned}$$

elde edilir.  $k > 2$  olduğundan her  $x \in Q(R)$  için  $a(bx - TxT^{-1})^n = 0$  bulunur. Sonuç olarak (4.11) den  $av_0 = 0$  oluşu  $a = 0$  olmasını gerektirir ki bu bir çelişkidir. Öyleyse  $\dim_D V \leq 2$  olmalıdır.

Eğer  $C$  sonlu ise o zaman  $D$  bölümlü halkası  $C$  üzerinde sonlu boyutlu olduğundan Teorem 2.4 ten  $D$  bir cisimdir. Bu durumda  $Q(R)$  halkasının değişmeli olduğu çelişkisine ulaşılır. O halde  $C$  sonsuz olmalıdır. Bu durumda

$\alpha \in \text{Aut}(R)$  otomorfizmasının Frobenius otomorfizması olup olmaması durumlarına göre incelenmelidir.

Öncelikle  $\alpha \in \text{Aut}(R)$  nin bir Frobenius otomorfizması olmadığını kabul edelim. O zaman her  $x, y \in Q(R)$  için Teorem 2.33 ten

$$a(bx - yc)^n \in C$$

elde edilir. Özellikle  $y = x$  alınırsa her  $x \in Q(R)$  için

$$a(bx - xc)^n \in C$$

olduğu görülür. O zaman Yardımcı Özellik 2.16 (ii) den her  $x \in Q(R)$  için  $a(bx - xc)^n = 0$  ve buradan  $c = 0$  veya  $b = 0$  bulunur. Bu ise bir çelişkidir.

Şimdi  $\alpha \in \text{Aut}(R)$  nin bir Frobenius otomorfizması olduğunu kabul edelim. Eğer  $\text{char } Q(R) = 0$  ise o zaman Frobenius otomorfizması tanımından, her  $\lambda \in C$  için  $\alpha(\lambda) = \lambda$  dır. Teorem 2.29 ışığında  $\alpha$  nın bir iç otomorfizma olduğu çelişkisine ulaşılır. O zaman  $\text{char } Q(R) = p \geq 2$  ve uygun bir  $k \neq 0$ , her  $\lambda \in C$  için  $\alpha(\lambda) = \lambda^{p^k}$  olsun.  $\lambda \neq 0$  olmak üzere ilk özdeşlikte  $x$  yerine  $\lambda x$  konursa her  $x \in Q(R)$  için

$$\begin{aligned} a(\lambda bx - \alpha(\lambda x)c)^n &= a(\lambda bx - \alpha(\lambda)\alpha(x)c)^n \\ &= a(\lambda bx - \lambda^{p^k}\alpha(x)c)^n \\ &= a(\lambda(bx - \lambda^{p^k-1}\alpha(x)c))^n \\ &= \lambda^n a(bx - \lambda^{p^k-1}\alpha(x)c)^n \in C \end{aligned}$$

elde edilir.  $\lambda \neq 0$  olduğundan her  $x \in Q(R)$  için

$$a(bx - \lambda^{p^k-1}\alpha(x)c)^n \in C \quad (4.12)$$

bulunur. (4.12) den

$$\sum_{i=0}^n \left( \sum_{(i, n-i)} z_1 z_2 \dots z_n \right) \lambda^{i(p^k-1)} \in C \quad (4.13)$$

elde edilir. Bu toplamda her bir terim permütasyonel sıralamayla  $n - i$  tane  $(bx)$  ve  $i$  tane  $(\alpha(x)c)$  içermektedir.  $t = \lambda^{p^k-1}$  ve  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$  için

$$y_i = a\left( \sum_{(i, n-i)} z_1 z_2 \dots z_n \right)$$

olsun. O zaman (4.13) toplamı tekrar indislenerek

$$y_0 + ty_1 + \dots + t^n y_n \in C \quad (4.14)$$

elde edilir.

(4.13) te sırasıyla  $1, \lambda, \dots, \lambda^n$  yerine her bir adımda  $\lambda$  konursa her  $i = 0, 1, \dots, n$  ve  $\gamma_i \in C$  için aşağıdaki lineer denklem sistemi elde edilir:

$$\begin{aligned} y_0 + y_1 + \dots + y_n &= \gamma_0 \\ y_0 + ty_1 + \dots + t^n y_n &= \gamma_1 \\ &\vdots \\ y_0 + t^n y_1 + \dots + t^{n^2} y_n &= \gamma_n \end{aligned} \quad (4.15)$$

Bu durumda  $C$  sonsuz olduğundan  $m = 1, 2, \dots, n$  için  $\lambda^{m(p^k-1)} \neq 1$  olacak şekilde sonsuz sayıda  $\lambda \in C$  vardır. Bu lineer denklem sisteminin matris formu aşağıdaki gibidir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & t & \dots & t^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & t & \dots & t^{n^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} C \\ C \\ \vdots \\ C \end{pmatrix}$$

Sistemin katsayılar matrisinin determinantı Van der Monde determinantını vermektedir. O zaman

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & t & \dots & t^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & t & \dots & t^{n^2} \end{vmatrix} = \prod_{\substack{i,j=0 \\ i < j}}^n (t^i - t^j) = \prod_{\substack{i,j=0 \\ i < j}}^n (\lambda^i(p^k - 1) - \lambda^j(p^k - 1)) \neq 0$$

olduğu görülür. Sistemin katsayılar matrisi tersinir olduğundan her  $i = 0, \dots, n$  için  $y_i \in C$  dir. Özel olarak, her  $x \in Q(R)$  için

$$y_0 = a(bx)^n \in C$$

ve

$$y_n = a(\alpha(x)c)^n \in C$$

olduğu kullanılırsa Yardımcı Özellik 2.16 den her  $x \in R$  için  $a(bx)^n = 0$  ve  $a(\alpha(x)c)^n = 0$  olur. Bu durumda her  $x \in R$  için  $a(bx)^n = 0$  ise  $ab = 0$  ve  $a(\alpha(x)c)^n = 0$  ise ya  $a = 0$  ya da  $c = 0$  bulunur. Bu ise bir çelişkidir.

Sonuç olarak  $\alpha \in \text{Aut}(R)$  bir iç otomorfizma olmalıdır ve böylece Yardımcı Özellik 4.2 den ispat biter.  $\square$

Yardımcı Özellik 4.7,  $R$  halkasının kommutatörlerine genellemesi bir sonraki yardımcı özellikte ele alınacaktır.

**Yardımcı Özellik 4.8**  $R$  merkezi  $Z(R)$  olan bir asal halka ve  $a, b, c \in R$  olsun.  $n$  sabit pozitif bir tamsayı,  $\alpha \in \text{Aut}(R)$  ve  $a \neq 0$  olmak üzere her  $x \in [R, R]$  için

$$a(bx - \alpha(x)c)^n \in Z(R) \quad (4.16)$$

ise o zaman her  $x \in R$  için  $a(bx - \alpha(x)c) = 0$  veya  $\dim_C R_C = 4$  tür.

**İspat.**  $\dim_C R_C > 4$  olduğunu kabul edelim. Eğer  $b = 0$  veya  $c = 0$  ise o zaman Yardımcı Özellik 4.3 ten ispat biter. O zaman  $b \neq 0$  ve  $c \neq 0$  olduğunu kabul edelim. Öncelikle  $\alpha \in \text{Aut}(R)$  nin bir  $X$ -iç otomorfizma olduğu durumu ele alalım. Böylece her  $x \in R$  için  $\alpha(x) = qxq^{-1}$  olacak şekilde uygun bir tersinir  $q \in Q(R)$  vardır. O halde (4.16) dan her  $x \in [R, R]$  için

$$a(bx - qxq^{-1}c)^n \in Z(R)$$

elde edilir ve Yardımcı Özellik 4.5 ten ispat tamamlanır.

Şimdi  $\alpha \in \text{Aut}(R)$  nin bir  $X$ -dış otomorfizma olduğunu kabul edelim.  $b \neq 0$  ve  $c \neq 0$  olduğundan Önerme 2.12 den  $R$  bir genelleştirilmiş polinom özdeşliği halkasıdır. Yardımcı Özellik 2.13 ten  $R$  ve  $Q(R)$  otomorfizma ihtiva eden aynı genelleştirilmiş polinom özdeşlikleri sağlar ve böylece (4.16) her  $x \in [Q(R), Q(R)]$  için de sağlanır. O zaman  $Q(R)$  merkezi kapalı asal cebir olduğundan  $R$  halkası yerine  $Q(R)$  alınrsa  $R$  merkezi kapalı bir asal cebir teşkil eder. O zaman  $R = R_C$  dir. Böylece  $R_C$  sıfırdan farklı bir  $H$  “socle” na sahip bir primitif halkadır.

Eğer  $H \cap Z(R) = (0)$  ise o zaman her  $x \in [H, H]$  için

$$a(bx - \alpha(x)c)^n = 0 \quad (4.17)$$

dır ve Yardımcı Özellik 3.4 gereğince her  $x \in H$  için  $a(bx - \alpha(x)c) = 0$  olduğu görülür. Bu son özdeşlik her  $x \in R$  için de geçerlidir ve bu durumda Yardımcı Özellik 3.4 ten ispat biter.

$H \cap Z(R) \neq (0)$  ise o zaman  $H$  bir merkezi basit  $Z(R)$ -cebirdir ve böylece  $R$  halkası bir merkezi basit  $Z(R)$ -cebirdir. Dolayısıyla Wedderburn-Artin Teoreminden (Teorem 2.4)  $H = R$  sonlu boyutlu bir merkezi basit  $Z(R)$ -cebir ve  $k > 1$  olmak üzere  $R, D$  bölümlü halkası üzerindeki  $k$ -boyutlu  $V_D$  vektör uzayının lineer dönüşümlerinin halkasıdır.  $e \in R$  bir idempotent ve  $\text{rank}(e) = 1$  olsun. (4.16) da  $x$  yerine  $[\alpha^{-1}(1-e)xe, \alpha^{-1}(1-e)ye]$  konursa her  $x, y \in R$  için

$$a(b[\alpha^{-1}(1-e)xe, \alpha^{-1}(1-e)ye] - \alpha([\alpha^{-1}(1-e)xe, \alpha^{-1}(1-e)ye]))c)^n \in Z(R) \quad (4.18)$$

elde edilir. O zaman Yardımcı Özellik 2.5 ten

$$\begin{aligned} & \text{rank}(a(b[\alpha^{-1}(1-e)xe, \alpha^{-1}(1-e)ye] - \alpha([\alpha^{-1}(1-e)xe, \alpha^{-1}(1-e)ye]))c)^n) \\ & \leq \text{rank}((b[\alpha^{-1}(1-e)xe, \alpha^{-1}(1-e)ye] - \alpha([\alpha^{-1}(1-e)xe, \alpha^{-1}(1-e)ye]))c)^n) \\ & \leq \text{rank}(b[\alpha^{-1}(1-e)xe, \alpha^{-1}(1-e)ye] - \alpha([\alpha^{-1}(1-e)xe, \alpha^{-1}(1-e)ye]))c) \\ & \leq \text{rank}(b\alpha^{-1}(1-e)xe\alpha^{-1}(1-e)ye) + \text{rank}(b\alpha^{-1}(1-e)ye\alpha^{-1}(1-e)xe) \\ & + \text{rank}((1-e)\alpha(x)\alpha(e)(1-e)\alpha(y)\alpha(e)c) + \text{rank}((1-e)\alpha(y)\alpha(e)(1-e)\alpha(x)\alpha(e)c) \\ & \leq 4 \end{aligned}$$

bulunur.  $\dim_C R_C > 4$  olduğundan her  $x, y \in R$  için

$$a(b[\alpha^{-1}(1-e)xe, \alpha^{-1}(1-e)ye] - \alpha([\alpha^{-1}(1-e)xe, \alpha^{-1}(1-e)ye]))c)^n = 0 \quad (4.19)$$

olmalıdır. (4.19) denklemi sağdan  $(1-e)$  ile çarpılırsa

$$a(1-e)(\alpha(y)\alpha(e)(1-e)\alpha(x)\alpha(e)c(1-e) - \alpha(x)\alpha(e)(1-e)\alpha(y)\alpha(e)c(1-e))^n = 0$$

dır.  $\alpha \in \text{Aut}(R)$  otomorfizması bir  $X$ -dış otomorfizma olduğundan Teorem 2.32 den her  $x, y \in R$  için

$$a(1-e)(x\alpha(e)(1-e)y\alpha(e)c(1-e) - y\alpha(e)(1-e)x\alpha(e)c(1-e))^n = 0 \quad (4.20)$$

bulunur. Bu durumda Uyarı 2.4 gereğince uygun bir  $\lambda \in C$  ve her  $y \in R$  için aşağıdakilerden biri geçerlidir:

$$(i) \quad a(1-e) = 0,$$

$$(ii) \quad \alpha(e)c(1-e) = 0,$$

$$(iii) \quad (\alpha(e)(1-e)y\alpha(e)c(1-e)) = -\lambda\alpha(e)c(1-e) \text{ ve} \\ \alpha(e)c(1-e)y\alpha(e)(1-e) = -\lambda\alpha(e)c(1-e)$$

$$(iv) \quad (\alpha(e)(1-e)y\alpha(e)c(1-e)) = -\lambda\alpha(e)c(1-e) \text{ ve } a(1-e)y\alpha(e)(1-e) = \\ -\lambda a(1-e)$$

Şimdi (iii) nin geçerli olduğunu kabul edelim. O zaman (4.20) den her  $x, y \in R$  için

$$\begin{aligned} 0 &= a(1-e)(-x\lambda\alpha(e)c(1-e) + y\lambda\alpha(e)c(1-e))^n \\ &= a(1-e)(-\lambda(x-y)\alpha(e)c(1-e))^n \\ &= (-1)^n \lambda^n a(1-e)((x-y)\alpha(e)c(1-e))^n \end{aligned}$$

bulunur. Özel olarak  $y = 0$  alınırsa her  $x \in R$  için

$$\lambda^n a(1-e)(x\alpha(e)c(1-e))^n = 0$$

dır.  $R$  halkasının asallığından Teorem 2.16 gereğince ya  $\lambda = 0$  ya  $a(1-e) = 0$  ya da  $\alpha(e)c(1-e) = 0$  dır. Eğer  $\lambda = 0$  ise o zaman  $\alpha(e)(1-e) = 0$  olur. Benzer şekilde (iv) nin geçerli olduğu kabul edilirse (4.20) den ya  $a(1-e) = 0$  ya  $\alpha(e)(1-e) = 0$  ya da  $\alpha(e)c(1-e) = 0$  elde edilir.

$e \in R$  idempotenti için  $\alpha(e)(1-e) = 0$  olduğunu kabul edelim. (4.17) de  $x$  yerine  $[\alpha^{-1}(1-e)xe, ye]$  alınırsa her  $x, y \in R$  için

$$a(b[\alpha^{-1}(1-e)xe, ye] - \alpha([\alpha^{-1}(1-e)xe, ye])c)^n \in Z(R) \quad (4.21)$$

olur. Yine Yardımcı Özellik 2.5 gereğince

$$\begin{aligned}
& \text{rank} \left( a(b[\alpha^{-1}(1-e)xe, ye] - \alpha([\alpha^{-1}(1-e)xe, ye])c)^n \right) \\
& \leq \text{rank} \left( (b[\alpha^{-1}(1-e)xe, ye] - \alpha([\alpha^{-1}(1-e)xe, ye])c)^n \right) \\
& \leq \text{rank} \left( b[\alpha^{-1}(1-e)xe, ye] - \alpha([\alpha^{-1}(1-e)xe, ye])c \right) \\
& \leq \text{rank}(b\alpha^{-1}(1-e)xe - b\alpha^{-1}(1-e)xe) \\
& + \text{rank}(b\alpha^{-1}(1-e)xe - b\alpha^{-1}(1-e)xe) \\
& + \text{rank}((1-e)\alpha(x)\alpha(e)\alpha(y)\alpha(e)c) \\
& + \text{rank}(\alpha(y)\alpha(e)(1-e)\alpha(x)\alpha(e)c) \\
& \leq 3
\end{aligned}$$

olduğu görülür.  $\dim_C R_C > 4$  olduğundan (4.21) den her  $x, y \in R$  için

$$a(b[\alpha^{-1}(1-e)xe, ye] - \alpha([\alpha^{-1}(1-e)xe, ye])c)^n = 0$$

bulunur. Bu son denklem sağdan  $(1-e)$  ile çarpılırsa her  $x, y \in R$  için

$$a(1-e)(\alpha(x)\alpha(e)\alpha(y)\alpha(e)c(1-e))^n = 0$$

olduğu görülür. Teorem 2.16 dan ya  $a(1-e) = 0$  ya da

$$\alpha(e)R\alpha(e)c(1-e) = 0$$

dir. O zaman  $R$  halkasının asallığından  $a(1-e) = 0$  veya  $\alpha(e)c(1-e) = 0$  dir.

En başa dönülerek (4.17) de  $x$  yerine  $[\alpha(e)x(1-e), \alpha(e)y(1-e)]$  alınır ve benzer işlemlerle devam edilirse  $\alpha(1-e)ce = 0$  bulunur.

Böylece rankı 1 olan herhangi bir  $e \in R$  idempotenti için

$$ce = \alpha(e)ce = \alpha(e)c$$

dir.  $E$ ,  $R$  halkasının rankı 1 olan tüm idempotentleriyle üretilen bir toplamsal alt grubu olsun. Sonuç olarak her  $e \in E$  için  $ce = \alpha(e)c$  dir.  $E$   $R$  halkasının değişmeli olmayan bir Lie ideali olduğundan her  $x \in [R, R]$  için  $cx - \alpha(x)c = 0$  dir. O zaman her  $x, y \in R$  için

$$c[x, y] - [\alpha(x), \alpha(y)]c = 0$$

olur.  $\alpha$   $R$  halkasının bir  $X$ -dış otomorfizması olduğundan Teorem 2.32 den her  $x, y, r, s \in R$  için  $c[x, y] - [r, s]c = 0$  olup,  $c = 0$  veya  $R$  halkasının değişmeli olduğu sonucuna varılır. Ancak bu bir çelişkidir.  $\square$

**Teorem 4.2**  $R$  merkezi  $Z(R)$  olan bir asal halka ve  $\alpha \in \text{Aut}(R)$  olsun.  $0 \neq a \in R$ ,  $n$  sabit pozitif bir tamsayı ve  $G$ ,  $R$  halkasının  $\delta$   $\alpha$ -türeviyle belirlenen bir genelleştirilmiş  $\alpha$ -türevi olmak üzere her  $x \in R$  için  $aG(x)^n \in Z(R)$  ise o zaman her  $x \in R$  için  $aG(x) = 0$  veya  $\dim_C R_C = 4$  tür.

**İspat.**  $\dim_C R_C > 4$  olduğunu kabul edelim. Yardımcı Özellik 2.20 den uygun bir  $s \in Q(R)$  ve her  $x \in R$  için  $G(x) = sx + \delta(x)$  yapısındadır. Hipotezden her  $x \in R$  için

$$a(sx + \delta(x))^n \in Z(R)$$

dir.

İlk olarak  $\delta$ ,  $R$  halkasının bir  $X$ -iç  $\alpha$ -türevi ise her  $x \in R$  için  $\delta(x) = bx - \alpha(x)b$  olacak şekilde bir  $b \in R$  vardır. O zaman hipotezden her  $x \in R$  için

$$a((s+b)x - \alpha(x)b)^n \in Z(R)$$

olur. Bu durumda Yardımcı Özellik 4.7 den ispat biter.

Şimdi  $\delta$  nın  $R$  halkasının bir  $X$ -dış  $\alpha$ -türevi ve her  $x, y \in R$  için  $[a(sx + \delta(x))^n, y] = 0$  olduğunu kabul edelim. Teorem 2.34 ten her  $x, y, w \in R$  için

$$[a(sx + w)^n, y] = 0 \tag{4.22}$$

dir. Özel olarak  $x = 0$  alınırsa her  $w, y \in R$  için  $[aw^n, y] = 0$  bulunur, yani her  $w \in R$  için  $aw^n \in Z(R)$  olup,  $a = 0$  veya  $R$  halkasının değişmeli olduğu sonucuna varılır. Bu ise bir çelişkidir.  $\square$

Her  $\alpha$ -türev bir genelleştirilmiş  $\alpha$ -türev olduğundan Teorem 4.2 nin bir sonucu olarak Sonuç 4.1 verilebilir:

**Sonuç 4.1**  $R$  merkezi  $Z(R)$  olan bir asal halka ve  $0 \neq a$  olsun.  $\alpha \in \text{Aut}(R)$  ve  $f$ ,  $R$  halkasının sıfırdan farklı bir  $\alpha$ -türevi olsun.  $n$  sabit pozitif bir tamsayı olmak üzere her  $x \in R$  için  $af(x)^n \in Z(R)$  ise o zaman  $\dim_C R_C = 4$  tür.

Teorem 4.3 te Teorem 4.2 nin halkanın değişmeli olmayan bir Lie idealine genişlemesi ele alınacaktır.

**Teorem 4.3**  *$R$  merkezi  $Z(R)$  olan bir asal halka,  $L, R$  nin değişmeli olmayan bir Lie ideali ve  $\alpha \in \text{Aut}(R)$  olsun.  $0 \neq a \in R$ ,  $n$  sabit pozitif bir tamsayı ve  $G, R$  halkasının bir genelleştirilmiş  $\alpha$ -türevi olmak üzere her  $x \in L$  için  $aG(x)^n \in Z(R)$  ise o zaman her  $x \in R$  için  $aG(x) = 0$  ya da  $\dim_C R_C = 4$  tür.*

**İspat.**  $\dim_C R_C > 4$  olduğunu kabul edelim. O zaman Yardımcı Özellik 2.1 den  $I = R[L, L]R$  ve  $0 \neq [I, R] \subset L$  dir. Yardımcı Özellik 2.20 den  $\delta, R$  halkasının bir  $\alpha$ -türevi olmak üzere uygun bir  $s = f(1) \in Q(R)$  ve her  $x \in R$  için  $G(x) = sx + \delta(x)$  formundadır. Hipotezden her  $x \in L$  ve dolayısıyla her  $x \in [I, R]$  için

$$a(sx + \delta(x))^n \in Z(R) \quad (4.23)$$

dir. Teorem 2.31 den  $I, R$  ve  $Q(R)$  otomorfizma ihtiva eden aynı genelleştirilmiş polinom özdeşliklerini sağladığından (4.23) her  $x \in [Q(R), Q(R)]$  için de sağlanır. Bu durumda  $R$  halkası ve  $I$  ideali yerine  $Q(R)$  halkası alınabilir.

İlk olarak  $\delta, R$  halkasının bir  $X$ -iç  $\alpha$ -türevi ise o zaman her  $x \in R$  için

$$\delta(x) = bx - \alpha(x)b$$

olacak şekilde uygun bir  $b \in R$  vardır. Bu durumda (4.23) den her  $x \in [R, R]$  için

$$a((s+b)x - \alpha(x)b)^n \in Z(R)$$

elde edilir ve Yardımcı Özellik 4.8 den ispat biter.

şimdi  $\delta, R$  halkasının bir  $X$ -dış  $\alpha$ -türevi ise o zaman her  $x, y \in R$  için

$$a(s[x, y] + \delta([x, y]))^n \in Z(R)$$

ve buradan da her  $x, y, z \in R$  için

$$[a(s[x, y] + \delta(x)y + \alpha(x)\delta(y) - \delta(y)x - \alpha(y)\delta(x))^n, z] = 0$$

elde edilir. Teorem 2.35 ten her  $x, y, u, w, z \in R$  için

$$[a(s[x, y] + wy + \alpha(x)u - ux - \alpha(y)w)^n, z] = 0 \quad (4.24)$$

olur ve burada özellikle  $w = u = 0$  alınırsa

$$[a(s[x, y])^n, z] = 0$$

olduğu görülür. Bu durumda her  $x, y \in R$  için  $a(s[x, y])^n \in Z(R)$  dır ve Yardımcı Özellik 4.3 (ii) den  $as = 0$  sonucuna varılır. O halde her  $x \in R$  için

$$aG(x)^n = a(sx + \delta(x))^n = a\delta(x)^n \in C$$

dir ve Sonuç 4.1 den  $a = 0$  bulunur, bu ise bir çelişkidir.  $\square$

Her  $\alpha$ -türevin bir genelleştirilmiş  $\alpha$ -türev olduğu dikkate alınırsa Teorem 4.3 ten aşağıdaki sonucu verebiliriz.

**Sonuç 4.2**  *$R$  merkezi  $Z(R)$  olan bir asal halka ve  $L, R$  nin değişmeli olmayan bir Lie ideali olsun.  $\alpha \in \text{Aut}(R)$  için  $f, R$  halkasının sıfırdan farklı bir  $\alpha$ -türevi ve  $a \in R$  olsun.  $n$  sabit pozitif bir tamsayı olmak üzere her  $x \in L$  için  $af(x)^n \in Z(R)$  ise o zaman  $a = 0$  veya  $\dim_C R_C = 4$  tür.*

$\alpha \in \text{Aut}(R)$  için  $\alpha \neq I$ , yani  $\alpha$  birim otomorfizma değil ise o zaman  $I - \alpha$  dönüşümü  $R$  halkasının bir  $\alpha$ -türevidir. Gerçekten her  $x, y \in R$  için

$$(I - \alpha)(xy) = (I - \alpha)(x)y + \alpha(x)(I - \alpha)(y)$$

dir. O halde aşağıdaki sonucu ifade edebiliriz:

**Sonuç 4.3**  *$R$  merkezi  $Z(R)$  olan bir asal halka,  $L, R$  nin değişmeli olmayan bir Lie ideali ve  $a \in R$  olsun.  $\alpha \neq I$   $R$  halkasının bir otomorfizması olmak üzere  $n$  sabit pozitif tamsayısı ve her  $x \in L$  için  $a(x - \alpha(x))^n \in Z(R)$  ise o zaman  $a = 0$  veya  $\dim_C R_C = 4$  tür.*

$R$  birimli bir halka ve  $u \in R$  tersinir olsun. Her  $x \in R$  için  $\alpha_u(x) = uxu^{-1}$ ,  $R$  halkasının bir iç otomorfizması ve  $d, R$  halkasının sıfırdan farklı bir türevi ise

o zaman  $ud$  dönüşümü  $R$  halkasının bir  $\alpha_u$ -türevidir. Gerçekten her  $x, y \in R$  için  $d(xy) = d(x)y + xd(y)$  ise o zaman

$$\begin{aligned} ud(xy) &= ud(x)y + uxd(y) \\ &= ud(x)y + uxu^{-1}ud(y) \\ &= ud(x)y + \alpha_u(x)ud(y) \end{aligned}$$

dir. Bu durumda, eğer  $R$  halkasının  $d$  türeviyle belirlenen bir genelleştirilmiş türevi  $G$  ise o zaman  $uG$  dönüşümü de  $R$  halkasının  $\alpha_u$ -türev teşkil eden  $ud$  ile belirlenen bir genelleştirilmiş  $\alpha_u$ -türevi olur. Böylece aşağıdaki sonuçlar verilebilir:

**Sonuç 4.4**  $R$  birimli bir asal halka ve  $u \in R$  tersinir olsun.  $d$ ,  $R$  halkasının sıfırdan farklı bir türevi ve  $L$ ,  $R$  nin değişmeli olmayan Lie ideali olsun.  $n$  sabit pozitif bir tamsayı olmak üzere her  $x \in L$  için  $a(ud(x))^n \in Z(R)$  ise o zaman ya  $a = 0$  ya da  $\dim_C R_C = 4$  tür.

**Sonuç 4.5**  $R$  birimli bir asal halka ve  $u \in R$  tersinir olsun.  $G$ ,  $R$  halkasının  $d$  türeviyle belirlenen sıfırdan farklı bir genelleştirilmiş türevi ve  $n$  sabit pozitif bir tamsayı olsun. Her  $x \in L$  için  $a(uG(x))^n \in Z(R)$  ise o zaman aşağıdaki koşullardan biri geçerlidir:

(i)  $a = 0$  dır.

(ii) Uygun bir  $s \in Q(R)$  ve her  $x \in R$  için  $G(x) = sx$  dir.

(iii)  $\dim_C R_C = 4$  tür.

Aşağıdaki örnek Teorem 4.2 deki asallık koşulunun kaldırılamayacağını göstermektedir.

**Örnek 4.1**  $F$  karakteristiği iki olan bir cisim ve

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} F & 0 & 0 \\ 0 & F & F \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix} \right\}$$

*halkasının bir tersinir elemanı*  $q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in R$  *olmak üzere,*

*her*  $x = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & v & w \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$  *için*  $\alpha(x) = qxq^{-1} = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & v & v+w+z \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$  *olsun.*

$c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in R$  *için*

$$G(x) = cx - \alpha(x)d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*olduğu kolayca görülür. Bu durumda n sabit pozitif bir tamsayı olmak üzere*

$a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$  *seçilirse*  $aG(x)^n \in Z(R)$  *fakat*  $z = 0$  *olmadıkça*

$$aG(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

*olduğu görülür.*

## 5. ASAL HALKALARIN GENELLEŞTİRİLMİŞ LİE TÜREVLERİ

Bu bölümde önceki iki bölümden farklı olarak halkanın toplamsal dönüşümlerini içeren bir fonksiyonel özdeşlik ele alınacak ve halka üzerindeki bazı kısıtlamalar altında bu fonksiyonel özdeşliğin ihtiva ettiği dönüşümlerin karakterizasyonuna ulaşılabacaktır. <sup>2</sup>

Kullanacağımız özel tip toplamsal dönüşümlerin tanımlarını hatırlatalım:

**Tanım 5.1**  $R$  herhangi bir halka ve  $\Delta, T, S, f : R \rightarrow R$  toplamsal dönüşümler olsun. Her  $x, y \in R$  için,

- (i)  $\delta$ ,  $R$  halkasının bir Lie türevi olmak üzere  $\Delta([x, y]) = [\Delta(x), y] + [x, \delta(y)]$  ise  $\Delta$  ya bir  **$\delta$ -Lie türev**,
- (ii)  $T(xy) = T(x)y$  ( $T(xy) = xT(y)$ ) ise  $T$  ye sol (sağ) merkezleyen ve hem sağ hem de sol merkezleyen ise  $T$  ye **merkezleyen dönüşüm**,
- (iii)  $S([x, y]) = [S(x), y]$  (ya da  $S([x, y]) = [x, S(y)]$ ) ise  $S$  ye **Lie merkezleyen dönüşüm** (Jing , 2011),
- (iv)  $f([x, y]) = [f(x), f(y)]$  ise  $f$  ye bir **Lie homomorfizması**,  
denir.

Bu bölüm boyunca  $R$  bir asal halka (bir  $k$  cismi üzerinde asal cebir) olsun.  $d, g, \delta, \Delta : R \rightarrow R$  toplamsal ( $k$ -lineer) dönüşümleri için  $d$  bir türev,  $g$   $d$  ile belirlenen bir genelleştirilmiş türev,  $\delta$  bir Lie türev,  $\Delta$  bir  $\delta$ -Lie türev olsun.

Lie türevlerin karakterizasyonuna ait ilk sonuç M. Brešar tarafından verilmiştir. Brešar , 1993,  $R$  dördüncü dereceden standart polinom özdeşliği  $S_4$  ü sağlamayan, karakteristiği 2 den farklı bir asal halka ve  $\delta$   $R$  nin bir Lie türevi olmak üzere  $\delta = d + \tau$  formunda olduğunu ispatlamıştır. Burada,  $d : R \rightarrow R_C$  bir türev ve  $\tau : R \rightarrow C$ ,  $\tau([R, R]) = 0$  koşulunu sağlayan

---

<sup>2</sup>Bu bölümde elde edilen sonuçlar Frontiers of Mathematics in China dergisinde yayımlanacaktır.

bir toplamsal dönüşümdür. M. Brešar ve P. Šemrl halkanın üzerindeki derece koşulunu kaldırarak aşağıdaki sonucu elde etmişlerdir:

**Teorem 5.1** (*Brešar ve Šemrl , 2003, Theorem 3*) *R karakteristiği ikiden farklı bir asal halka ve  $\delta$ , R nin bir Lie türevi olsun. O zaman  $d : R \rightarrow R_C$  bir türev ve  $\tau : R \rightarrow C$ ,  $\tau([R, R]) = 0$  koşulunu sağlayan bir toplamsal dönüşüm olmak üzere  $\delta = d + \tau$  formundadır.*

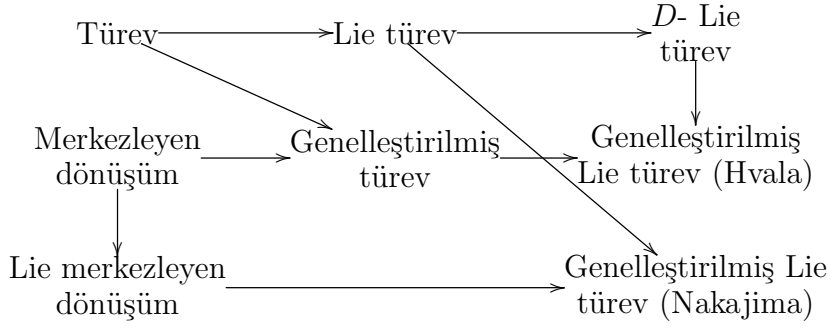
K. I. Beidar ve M. A. Chebotar bir asal cebirin merkezi olmayan bir Lie ideali üzerinde Lie türevlerin karakterizasyonunu vermişlerdir. Daha açık olarak şu teoremi ispatlamışlardır:

**Teorem 5.2** (*Beidar ve Chebotar , 2001, Theorem 1.1*) *R karakteristiği ikiden farklı bir asal cebir, L, R nin merkezi olmayan bir Lie ideali, A, R nin L ile üretilen bir alt cebiri ve  $\delta : A \rightarrow R$  bir Lie türev olsun. O zaman R cebiri  $S_{14}$  standart polinom özdeşliğini sağlamadığında her  $x \in L$  için  $\delta(x) = d(x) + \tau(x)$  olacak şekilde bir  $d : A \rightarrow AC + C$  türevi, bir  $\tau : L \rightarrow C$  toplamsal dönüşümü vardır ve  $\tau([L, L]) = 0$  dır.*

Daha sonra, P. B. Liao ve C. K. Liu, B. Hvala' nın Teorem 2.27 deki sonucunu Lie ideallere şöyle genişletmişlerdir:

**Teorem 5.3** (*Liao and Liu , 2009, Theorem 1*) *R karakteristiği ikiden farklı bir asal cebir, L, R nin merkezi olmayan bir Lie ideali, A, R nin L ile üretilen bir alt cebiri ve  $H : L \rightarrow R$  bir genelleştirilmiş Lie türev olsun. O zaman R cebiri  $S_{18}$  standart polinom özdeşliğini sağlamadığında, her  $x \in L$  için  $H(x) = g(x) + \tau(x)$  olacak şekilde bir  $g : A \rightarrow R_C$  genelleştirilmiş türevi ve  $\tau([L, L]) = 0$  koşulunu sağlayan bir  $\tau : L \rightarrow C$  lineer dönüşümü vardır.*

Genelleştirilmiş Lie türev kavramı literatürde iki farklı şekilde karşımıza çıkmaktadır. Bu kavramı ilk olarak A. Nakajima (Nakajima [2000]), daha sonra da B. Hvala (Hvala [2007]) tanımlamıştır. İki tanım kıyaslanacak olursa, Nakajima anlamında genelleştirilmiş Lie türev kavramı, Lie türevleri ve Lie merkezleyen dönüşümleri genellerken, Hvala anlamında genelleştirilmiş Lie türev kavramı da  $\delta$ -Lie türevleri ve genelleştirilmiş türevleri genellemektedir. Özetle, halkanın herhangi bir toplamsal endomorfizması için aşağıdaki geçişler vardır:



**Örnek 5.1**  $M_n(\mathbb{F})$ , bir  $\mathbb{F}$  cismi üzerindeki  $n \times n$  matrisler halkası ve

$$tr : M_n(\mathbb{F}) \rightarrow \mathbb{F}$$

iz dönüşümü olsun.  $D : M_n(\mathbb{F}) \rightarrow M_n(\mathbb{F})$  lineer dönüşümü her  $x \in M_n(\mathbb{F})$  için

$$D(x) = [a, x] + tr(x).I_n$$

olarak tanımlansın. O zaman  $D$  dönüşümü bir Lie türevdir fakat bir türev değildir.

**Örnek 5.2**  $R$  bir halka,  $T : R \rightarrow R$  toplamsal bir dönüşüm,  $a \in U(R)$  ve  $\lambda : R \rightarrow C$ ,  $\lambda([R, R]) = 0$  olacak şekilde bir toplamsal dönüşüm olsun.  $T : R \rightarrow R$  dönüşümü her  $x \in R$  için

$$T(x) = ax + \lambda(x)$$

olarak tanımlansın. O zaman  $T$  bir Lie merkezleyen dönüşümdür fakat merkezleyen dönüşüm değildir.

Özel tip toplamsal dönüşümlerin bir karakterizasyonunu vermek için fonksiyonel özdeşlik teorisini kullanmak oldukça yaygın bir yöntemdir. Bu bağlamda  $F, T, D, K : R \rightarrow R$  toplamsal dönüşümleri için, yukarıdaki şemada yer alan tüm kavramları kapsayacak şekilde her  $x, y \in R$  için aşağıdaki fonksiyonel özdeşlik tanımlanmıştır:

$$F([x, y]) = F(x)y - yK(x) - T(y)x + xD(y). \quad (5.1)$$

Bu fonksiyonel özdeşliği oluşturan dönüşümler öncelikle halka üzerinde, ardından halkanın merkezi olmayan Lie ideali üzerinde ele alınacaktır. Bu fonksiyonel özdeşlikteki dönüşümlerin karakterizasyonunu elde etmek, aşağıdaki

seçilişler sayesinde Nakajima anlamında genelleştirilmiş Lie türev, Hvala anlamında genelleştirilmiş Lie türev,  $D$ -Lie türev ve Lie merkezleyen kavramlarının karakterizasyonuna olanak sağlamıştır. (5.1) fonksiyonel özdeşliğinde

- (i)  $G : R \rightarrow R$  bir toplamsal dönüşüm,  $R_r$  ve  $L_r$  sırasıyla sağ ve sol çarpım dönüşümleri olmak üzere  $T = G + R_r$ ,  $D = G + L_r$  ve  $K = F$  seçilirse Nakajima anlamında genelleştirilmiş Lie türev,
- (ii)  $T = F$  ve  $K = D$  alınırsa Hvala anlamında genelleştirilmiş Lie türev,
- (iii)  $T = D$  bir Lie türev ve  $K = F$  seçilirse  $D$ -Lie türev,
- (iv)  $K = F$  ve  $T = D = 0$  olarak alınırsa Lie merkezleyen kavramları elde edilmektedir.

Öncelikle (5.1) özdeşliği halka üzerinde ele alınacaktır. Teorem 5.4 ün ispatında aşağıdaki yardımcı özelliğe ihtiyaç duyulmuştur.

**Yardımcı Özellik 5.1**  $R$  değişmeli olmayan bir asal halka ve  $d$ ,  $R$  nin bir türevi olsun.  $\lambda : R \rightarrow C$  bir toplamsal dönüşüm olmak üzere, her  $x, y \in R$  için  $xd(y) - yd(x) = \lambda(x)y - \lambda(y)x$  olduğunu kabul edelim. O zaman  $d = \lambda = 0$  dır.

**İspat.** Her  $x, y \in R$  için  $\lambda(x), \lambda(y) \in C$  olduğundan

$$x(d(y) + \lambda(y)) - y(d(x) + \lambda(x)) = 0$$

dır. O zaman Yardımcı Özellik 2.15 gereğince  $R$  değişmeli olmadığından  $d + \lambda = 0$  dır. Böylece her  $x \in R$  için  $d(x) = -\lambda(x) \in C$  olur. Bu durumda  $d$ ,  $R$  halkasının bir türevi olduğundan  $d = 0$  elde edilir. O halde  $\lambda = 0$  olmalıdır.  $\square$

**Teorem 5.4**  $R$  genişletilmiş merkezi  $C$  olan, karakteristiği ikiden farklı değişmeli olmayan bir asal halka, ve  $\deg(R) > 3$  olsun.  $D, F, K, T : R \rightarrow R$  toplamsal dönüşümler olsun ve  $R$  üzerinde (5.1) özdeşliğinin sağlandığını kabul edelim. O zaman her  $x \in R$  için  $\mu, \zeta : R \rightarrow C$  toplamsal dönüşümler olmak üzere

$$F(x) = bx + xa + d(x) + \mu(x)$$

$$K(x) = xa + d(x) + \mu(x)$$

$$T(x) = bx + d(x) + \mu(x) - \zeta(x)$$

$$D(x) = [x, a] + d(x) + \mu(x) - \zeta(x)$$

olacak şekilde  $a, b \in U(R)$  ve  $d : R \rightarrow R_C$  türevi vardır. Ayrıca  $\mu([R, R]) = 0$  dır.

**İspat.** (5.1) denkleminde  $y$  yerine  $x$  konursa her  $x \in R$  için

$$(F - T)(x)x = x(K - D)(x)$$

olduğu görülür. Önerme 2.16 den her  $x \in R$  için

$$\begin{aligned} F(x) &= T(x) + xa + \zeta(x) \\ D(x) &= K(x) - ax - \zeta(x) \end{aligned} \quad (5.2)$$

olacak şekilde uygun bir  $a \in Q_s(R)$  ve  $\zeta : R \rightarrow C$  toplamsal dönüşümü vardır.

(5.2) deki eşitlikler (5.1) de kullanılırsa her  $x, y \in R$  için

$$\begin{aligned} &T([x, y]) + [x, y]a + \zeta([x, y]) \\ &= (T(x) + xa + \zeta(x))y - y(D(x) + ax + \zeta(x)) - T(y)x + xD(y) \end{aligned} \quad (5.3)$$

elde edilir.  $T'$ ,  $D'$  dönüşümleri her  $x \in R$  için  $T'(x) = T(x) + \zeta(x)$  ve  $D'(x) = D(x) + \zeta(x) + [a, x]$  olarak tanımlansın. O zaman (5.3) ten

$$T'([x, y]) = T'(x)y - T'(y)x - yD'(x) + xD'(y)$$

denkleminde ulaşılır. Burada  $T'$  Hvala anlamında bir genelleştirilmiş Lie türev olup Teorem 2.27 den de  $D'$  bir Lie türev teşkil eder. Ayrıca  $\deg(R) > 3$  olduğundan Teorem 2.27 gereğince  $g : R \rightarrow R_C$  bir genelleştirilmiş türev ve  $\mu : R \rightarrow C$  toplamsal dönüşümü olmak üzere her  $x \in R$  için  $T'(x) = g(x) + \mu(x)$  ve  $\mu([R, R]) = 0$  dır.  $D'$ ,  $R$  halkasının bir Lie türevi olduğundan, Teorem 5.1 den  $d : R \rightarrow R_C$  bir türev ve  $\tau : R \rightarrow C$  toplamsal dönüşümü  $\tau([R, R]) = 0$  koşulunu sağlamak üzere  $D' = d + \tau$  yapısındadır. Dolayısıyla (5.1) deki toplamsal dönüşümler her  $x \in R$  için

- $T'(x) = T(x) + \zeta(x)$  ve  $T'(x) = g(x) + \mu(x)$  olduğundan

$$T(x) = g(x) + \mu(x) - \zeta(x),$$

- $F(x) = T(x) + xa + \zeta(x)$  olduğundan burada  $T(x)$  yerine yazılırsa

$$F(x) = xa + g(x) + \mu(x),$$

- $D'(x) = D(x) + \zeta(x) + [a, x]$  ve  $D'(x) = \delta(x) + \tau(x)$  olduğundan

$$D(x) = [x, a] + d(x) + \tau(x) - \zeta(x),$$

- $D(x) = K(x) - ax - \zeta(x)$  olduğundan burada,  $D(x)$  yerine yazılırsa

$$K(x) = xa + d(x) + \tau(x)$$

halini alır.

Yukarıdaki eşitlikler (5.1) özdeşliğinde yerine konursa her  $x, y \in R$  için

$$\begin{aligned} [x, y]a + g([x, y]) + \mu([x, y]) &= (xa + g(x) + \mu(x))y - y(xa + d(x) + \tau(x)) \\ &\quad - (g(y) + \mu(y) - \zeta(y))x + x([y, a] + d(y) + \tau(y) - \zeta(y)) \end{aligned}$$

elde edilir ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$g([x, y]) = g(x)y + \mu(x)y - yd(x) - y\tau(x) - g(y)x - \mu(y)x + xd(y) + x\tau(y) \quad (5.4)$$

olduğu görülür.

Şimdi,  $g$  nin bir  $d'$  türeviyle belirlenen bir genelleştirilmiş türev olduğunu kabul edelim. O zaman (5.4) ten her  $x, y \in R$  için

$$\begin{aligned} g(x)y + xd'(y) - g(y)x - yd'(x) &= g(x)y + (\mu - \tau)(x)y - yd(x) \\ &\quad - g(y)x - (\mu - \tau)(y)x + xd(y) \end{aligned}$$

ve buradan da

$$x(d' - d)(y) - y(d' - d)(x) = (\mu - \tau)(x)y - (\mu - \tau)(y)x$$

olur. O zaman Yardımcı Özellik 5.1 den  $R$  üzerinde  $d' = d$  ve  $\mu = \tau$  bulunur. Bu durum ise  $g$  nin  $d$  türevi ile belirlenen bir genelleştirilmiş türev olduğunu ifade eder. Teorem 2.25 ten her  $x \in R$  ve uygun bir  $b \in U(R)$  için  $g(x) = bx + d(x)$  yapısındadır. Sonuç olarak  $T$ ,  $F$ ,  $D$  ve  $K$  dönüşümlerinin yukarıda bulunan karakterizasyonlarında,  $g$  dönüşümünün bu değeri yerine yazılırsa her  $x \in R$

için

$$T(x) = bx + d(x) + \mu(x) - \zeta(x)$$

$$F(x) = bx + xa + d(x) + \mu(x)$$

$$D(x) = [x, a] + d(x) + \mu(x) - \zeta(x)$$

$$K(x) = xa + d(x) + \mu(x)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.  $\square$

Teorem 5.4 te  $K = F = N$  alınarak Nakajima anlamında genelleştirilmiş Lie türevlerin aşağıdaki gibi bir karakterizasyonu verilebilir.

**Sonuç 5.1**  *$R$  genişletilmiş merkezi  $C$  olan, karakteristiği ikiden farklı değişmeli olmayan bir asal halka ve  $\deg(R) > 3$  olsun.  $N, \delta : R \rightarrow R$  toplamsal dönüşümleri her  $x, y \in R$  ve uygun  $r \in R$  için*

$$N([x, y]) = [N(x), y] + [x, \delta(y)] + xry - yrx$$

*koşunu sağlıyorsa, yani  $N$  Nakajima anlamında bir genelleştirilmiş Lie türev ise o zaman  $d : R \rightarrow R_C$  bir türev,  $\mu, \zeta : R \rightarrow C$  toplamsal dönüşümler ve  $a \in Q(R)$ ,  $a + r = \gamma \in C$  olmak üzere her  $x \in R$  için  $N(x) = ax + d(x) + \mu(x)$  ve  $\delta(x) = x(a - \gamma) + d(x) + \mu(x) - \zeta(x)$  dir. Üstelik  $\mu([R, R]) = 0$  dir.*

**İspat.** Her  $x \in R$  için  $T(x) = \delta(x) + xr$  ve  $D(x) = \delta(x) + rx$  olarak alınsın. O zaman (5.1) özdeşliği her  $x, y \in R$  için

$$\begin{aligned} N([x, y]) &= N(x)y - yN(x) - \delta(y)y - xry + x\delta(y) + xry \\ &= [N(x), y] + [x, \delta(y)] + xry - yrx \end{aligned}$$

halini alır.  $K = F$  ise o zaman her  $x \in R$  için

$$xa + d(x) + \mu(x) = bx + xa + d(x) + \mu(x)$$

olduğundan  $b = 0$  bulunur. O halde  $d : R \rightarrow R_C$  bir türev ve  $\mu : R \rightarrow C$  toplamsal dönüşümü  $\mu([R, R]) = 0$  koşulunu sağlamak üzere  $N(x) = xa + d(x) + \mu(x)$  formundadır.

Şimdi her  $x \in R$  için  $T(x) = D(x) + [x, r]$  seçilişi kullanılırsa

$$d(x) + \mu(x) - \zeta(x) = [x, a] + d(x) + \mu(x) - \zeta(x) + [x, r]$$

bulunur. O zaman her  $x \in R$  için  $[x, a + r] = 0$  olup,  $a + r = \gamma \in C$  elde edilir. Bu eşitlik  $D(x) = [x, a] + d(x) + \mu(x) - \zeta(x)$  ve  $D(x) = \delta(x) + rx$  ile birlikte kullanılırsa  $\zeta : R \rightarrow C$  bir toplamsal dönüşüm olmak üzere her  $x \in R$  için

$$\begin{aligned}\delta(x) + rx &= [x, a] + d(x) + \mu(x) - \zeta(x) \\ \delta(x) &= -rx + xa - ax + d(x) + \mu(x) - \zeta(x) \\ &= -rx + x(\gamma - r) - (\gamma - r)x + d(x) + \mu(x) - \zeta(x) \\ &= x(-r) + d(x) + \mu(x) - \zeta(x) \\ &= x(a - \gamma) + d(x) + \mu(x) - \zeta(x)\end{aligned}$$

sonucuna varılır.  $\square$

Teorem 5.4 ün bir sonucu olarak  $\delta$ -Lie türevlerin yapısı aşağıdaki gibi verilebilir:

**Sonuç 5.2**  *$R$  genişletilmiş merkezi  $C$  olan, karakteristiği ikiden farklı değişmeli olmayan bir asal halka ve  $\deg(R) > 3$  olsun. Eğer  $\Delta$ , bir  $\delta$ -Lie türev ise o zaman  $a \in C$ ,  $d : R \rightarrow R_C$  bir türev ve  $\mu : R \rightarrow C$  toplamsal dönüşüm olmak üzere her  $x \in R$  için  $\Delta(x) = ax + d(x) + \mu(x)$  dır. Üstelik  $\mu([R, R]) = 0$  dır.*

**İspat.** Hipotezden  $\delta$ ,  $R$  halkasının bir Lie türevi olmak üzere her  $x, y \in R$  için

$$\Delta([x, y]) = [\Delta(x), y] + [x, \delta(y)]$$

dir. Teorem 5.4 te  $K = F = \Delta$  ve  $T = D = \delta$  seçilirse (5.1) de bir  $\Delta$   $\delta$ -Lie türevi elde edilir.  $K = F$  ise her  $x \in R$  için

$$xa + d(x) + \mu(x) = bx + xa + d(x) + \mu(x)$$

olduğundan  $b = 0$  olur. Ayrıca  $T = D$  seçilişi kullanılırsa her  $x \in R$  için

$$d(x) + \mu(x) - \zeta(x) = [x, a] + d(x) + \mu(x) - \zeta(x)$$

olup,  $a \in C$  dir. Böylelikle  $d : R \rightarrow R_C$  bir türev ve  $\mu : R \rightarrow C$  toplamsal dönüşüm olmak üzere her  $x \in R$  için  $\Delta(x) = ax + d(x) + \mu(x)$  yapısındadır ve üstelik  $\mu([R, R]) = 0$  dir.  $\square$

Bir sonraki sonuçta Teorem 5.4 den yararlanarak Lie merkezleyen dönüşümlerin karakterizasyonu verilmiştir:

**Sonuç 5.3**  *$R$  genişletilmiş merkezi  $C$  olan karakteristiği ikiden farklı bir asal halka ve  $\deg(R) > 3$  olsun.  $S$ ,  $R$  halkasının bir Lie merkezleyen dönüşümü ise o zaman  $a \in C$  ve  $\mu : R \rightarrow C$  toplamsal dönüşüm olmak üzere her  $x \in R$  için  $S(x) = ax + \mu(x)$  yapısındadır. Üstelik  $\mu([R, R]) = 0$  dir.*

**İspat.**  $S$ ,  $R$  halkasının bir Lie merkezleyen dönüşümü olduğundan her  $x, y \in R$  için

$$S([x, y]) = [S(x), y]$$

dir. Teorem 5.4 te  $K = F = S$  ve  $T = D = 0$  alınırsa (5.1) de bir Lie merkezleyen dönüşüm elde edilir.  $K = F$  ise her  $x \in R$  için

$$xa + d(x) + \mu(x) = bx + xa + d(x) + \mu(x)$$

olduğundan  $b = 0$  ve buradan da  $d(x) \in Z(R)$  olduğu görülür.  $d$ ,  $R$  halkasının bir türevi olduğundan  $d = 0$  olmalıdır. Böylece  $a \in C$  ve  $\mu : R \rightarrow C$  toplamsal dönüşüm olmak üzere her  $x \in R$  için  $S(x) = ax + \mu(x)$  ve  $\mu([R, R]) = 0$  olup, ispat tamamlanır.  $\square$

Teorem 5.5 i ispatlamak için aşağıdaki yardımcı özelliğe gerek duyulmaktadır.

**Yardımcı Özellik 5.2**  *$R$  genişletilmiş merkezi  $C$  olan karakteristiği ikiden farklı bir asal halka ve  $L$ ,  $R$  nin merkezi olmayan bir Lie ideali olsun.  $A$ ,  $R$  halkasının  $L$  ile üretilen bir alt cebiri ve  $d : A \rightarrow R_C$  bir türev olduğunu kabul edelim.  $\deg(R) > 2$  ve  $\lambda : L \rightarrow C$  bir toplamsal dönüşüm olmak üzere her  $x, y \in L$  için*

$$xd(y) - yd(x) = \lambda(x)y - \lambda(y)x$$

ise o zaman  $d = \lambda = 0$  dir.

**İspat.** Hipotezden  $d + \lambda$  toplamsal dönüşüm olmak üzere her  $x, y \in L$  için

$$x(d + \lambda)(y) - y(d + \lambda)(x) = 0$$

dir. Teorem 2.15 gereğince her  $x \in L$  için  $d(x) = -\lambda(x)$  dir. O zaman Teorem 2.19 dan  $d = 0$  veya  $L$  merkezi bir Lie idealdir.  $L$  merkezi olmayan bir Lie ideal olduğundan  $d = 0$  olmalıdır. Bu sonuç başlangıç hipotezinde kullanılırsa

her  $x, y \in L$  için  $x\lambda(y) - y\lambda(x) = 0$  elde edilir.

Şimdi  $\lambda(x_0) \neq 0$  olacak şekilde bir  $x_0 \in L$  var olduğunu kabul edelim. O zaman özellikle her  $y \in L$  için  $x_0\lambda(y) - y\lambda(x_0) = 0$  dır. Bu son denkleme  $x_0$  ile kommutatör çarpım uygulanırsa

$$0 = [x_0\lambda(y) - y\lambda(x_0), x_0] = \lambda(x_0)[y, x_0]$$

bulunur.  $C$  bir cisim ve  $0 \neq \lambda(x_0) \in C$  olduğundan her  $y \in L$  için  $[y, x_0] = 0$  dır. Buradan  $x_0 \in Z(L) = Z(R)$  olduğu görülür.

Her  $x \in L$  için  $\lambda(x) = 0$  ise o zaman  $x \in \text{Ker}\lambda$  dır. Böylece  $L$  iki toplamsal alt grubunun bir birleşimi olup, Önerme 2.1 den  $L = \text{Ker}\lambda \cup Z(R)$  dir.  $L$  merkezi olmayan bir Lie ideal olduğundan  $L = \text{Ker}\lambda$ , yani  $\lambda = 0$  olmalıdır.  $\square$

Teorem 5.4 ün bir asal cebirin merkezi olmayan bir Lie ideali ile üretilen alt cebirine genellemesi Teorem 5.5 te incelenecektir.

**Teorem 5.5**  *$R$  genişletilmiş merkezi  $C$  olan karakteristiği ikiden farklı bir asal cebir ve  $L, R$  nin merkezi olmayan bir Lie ideali olsun.  $A, R$  halkasının  $L$  ile üretilen bir alt cebiri ve  $\deg(R) > 9$  olsun.  $D, F, K, T : L \rightarrow R$  toplamsal dönüşümlerinin her  $x, y \in L$  için (5.1) özdeşliğini sağladığını kabul edelim. O zaman  $\mu, \zeta : L \rightarrow C$  toplamsal dönüşümler olmak üzere her  $x \in L$  için*

$$\begin{aligned} F(x) &= xq + g(x) + \mu(x) \\ K(x) &= xq + d(x) + \mu(x) \\ T(x) &= g(x) + \mu(x) - \zeta(x) \\ D(x) &= [x, q] + d(x) + \mu(x) - \zeta(x) \end{aligned} \tag{5.5}$$

olacak şekilde bir  $q \in Q(R)$  ve  $d : A \rightarrow AC + C$  türeviyle belirlenen bir  $g : A \rightarrow R_C$  genelleştirilmiş türevi vardır ve üstelik  $\mu([L, L]) = 0$  dır.

**İspat.** (5.1) fonksiyonel özdeşliğinde  $y$  yerine  $x$  alınırsa her  $x \in L$  için

$$x(K - D)(x) = (F - T)(x)x$$

elde edilir.  $L, R$  cebirinin merkezi olmayan bir Lie ideali olduğundan Yardımcı Özellik 2.14 ten  $\deg(R) = \deg(L)$  dir. O zaman Teorem 2.15 ten her  $x \in L$  için

$$F(x) = T(x) + xq + \zeta(x)$$

$$D(x) = K(x) - qx - \zeta(x)$$

olacak şekilde uygun bir  $q \in Q(R)$  ve bir toplamsal  $\zeta : L \rightarrow Q(R)$  dönüşümü vardır.

Yukarıda elde edilen karakterizasyonlar (5.1) de yerine konursa her  $x, y \in L$  için

$$\begin{aligned} T([x, y]) + [x, y]q + \lambda([x, y]) &= (T(x) + xq + \lambda(x))y - y(D(x) + qx\lambda(x)) \\ &\quad - T(y)x + xD(y) + \lambda(y)x - \lambda(y)x \end{aligned}$$

dir ve buradan

$$\begin{aligned} (T + \zeta)([x, y]) &= (T + \zeta)(x)y - (T + \zeta)(y)x - y(\zeta(x) + D(x) + [q, x]) \\ &\quad + x(\zeta(y) + D(y) + [q, y]) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde  $\bar{T} = T + \zeta$  dersek o zaman  $\bar{T} : L \rightarrow R$  dönüşümü Hvala anlamında bir genelleştirilmiş Lie türev olmak üzere her  $x, y \in L$  için

$$\bar{T}([x, y]) = \bar{T}(x)y - \bar{T}(y)x - y\bar{D}(x) + x\bar{D}(y)$$

dir ve üstelik Teorem 2.27 den  $\bar{D} : L \rightarrow R$ ,

$$\bar{D}(x) = D(x) + \zeta(x) + [q, x]$$

bir Lie türevdir.

$\deg(R) > 9$  olduğundan, Teorem 5.3 ten her  $x \in L$  için

$$\bar{T}(x) = g(x) + \mu(x)$$

olacak şekilde bir  $g : A \rightarrow R_C$  genelleştirilmiş türevi,  $\mu : L \rightarrow C$  lineer dönüşümü vardır ve  $\mu([L, L]) = 0$  dır.  $\bar{D}$  dönüşümünün bir Lie türev ve  $\deg(R) > 9$  olduğu kullanılırsa Teorem 5.2 ışığında, her  $x \in L$  için

$$\bar{D}(x) = d(x) + \gamma(x)$$

olacak şekilde uygun bir  $d : A \rightarrow AC + C$  türevi ve  $\gamma([L, L]) = 0$  koşulunu sağlayan bir  $\gamma : L \rightarrow C$  lineer dönüşümünün var olduğu görülür. Böylece her  $x \in L$  için  $d : A \rightarrow AC + C$  bir türev,  $g : A \rightarrow R_C$  bir genelleştirilmiş türev,  $q \in Q(R)$  olmak üzere her  $x \in L$  için

$$\begin{aligned} T(x) &= g(x) + \mu(x) - \zeta(x) \\ F(x) &= xq + \mu(x) + g(x) \\ K(x) &= xq + d(x) + \gamma(x) \\ D(x) &= [x, q] + d(x) + \gamma(x) - \zeta(x) \end{aligned} \tag{5.6}$$

dir ve burada  $\mu, \zeta, \gamma : L \rightarrow C$  dönüşümleri toplamsaldır. Ayrıca  $\mu([L, L]) = 0$  ve  $\gamma([L, L]) = 0$  dir.

Şimdi  $g$  nin  $d' : A \rightarrow R_C$  türevi ile belirlenen bir genelleştirilmiş türev olduğunu kabul edelim. O zaman (5.1) özdeşliğinden

$$\begin{aligned} g([x, y]) + [x, y]q + \mu([x, y]) &= (g(x) + xq + \mu(x))y - y(xq + d(x) + \gamma(x)) - \\ &\quad (g(y) + \mu(y) - \zeta(y))x + x(d(y) + \gamma(y) - \zeta(y) + [y, q]) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylelikle her  $x, y \in L$  için

$$\begin{aligned} g(x)y - g(y)x + xd'(y) - yd'(x) &= g(x)y + \mu(x)y - yd(x) - y\gamma(x) - g(y)x \\ &\quad - \mu(y)x + xd(y) + x\gamma(y) \end{aligned}$$

ve

$$x(d' - d)(y) - y(d' - d)(x) = (\mu - \gamma)(x)y - (\mu - \gamma)(y)x$$

olduğu görülür. Yardımcı Özellik 5.2 den  $A$  üzerinde  $d' = d$  dir ve bu durumda  $g$  dönüşümü  $d$  türevi ile belirlenen bir genelleştirilmiş türevdir. Bu sonuç (5.6) ile birlikte (5.1) fonksiyonel özdeşliğinde kullanılırsa her  $x, y \in L$  için

$$(\mu - \gamma)(x)y - (\mu - \gamma)(y)x = 0$$

denklemine ulaşılır. Şimdi  $\alpha = \mu - \gamma$  olarak adlandıralım. Dolayısıyla  $\alpha : L \rightarrow C$  bir toplamsal dönüşüm olmak üzere her  $x, y \in L$  için  $\alpha(x)y - \alpha(y)x = 0$  dir. O halde Yardımcı Özellik 5.2,  $L$  üzerinde  $\alpha = 0$  ve  $\mu = \gamma$  olmasını gerektirir, ispat biter.  $\square$

(5.1) fonksiyonel özdeşliğinde  $K = F = g$  ve  $T = D = d'$  dönüşümleri Lie idealler üzerinde ele alınarak Teorem 5.6 da özel bir diferansiyel özdeşlik incelenecektir.

**Teorem 5.6**  *$R$  genişletilmiş merkezi  $C$  olan karakteristiği ikiden farklı bir asal halka ve  $L$ ,  $R$  nin merkezi olmayan bir Lie ideali olsun.  $g$ ,  $R$  halkasının bir  $d$  türeviyle belirlenen genelleştirilmiş türevi ve  $d'$ ,  $R$  nin herhangi bir türevi olsun. Her  $x, y \in L$  için*

$$g([x, y]) = [g(x), y] + [x, d'(y)] \quad (5.7)$$

ise o zaman her  $x \in R$  için  $g(x) = \gamma x + d(x)$  olacak şekilde bir  $\gamma \in C$  vardır ve  $R$  üzerinde  $d' = d$  dir.

**İspat.** (5.7) diferansiyel özdeşliğinde, Teorem 2.25 kullanılırsa her  $x, y \in L$  ve uygun bir  $a \in U(R)$  için

$$a[x, y] + d([x, y]) = [ax + d(x), y] + [x, d'(y)] \quad (5.8)$$

elde edilir.  $I$ ,  $R$  halkasının sıfırdan farklı bir ideali olmak üzere Yardımcı Özellik 2.1, (5.8) özdeşliğinin her  $x, y \in [I, R]$  için de sağlanmasını gerektirir. Teorem 2.14 gereğince  $I, R$  ve  $U(R)$  aynı diferansiyel özdeşlikleri sağladığından, (5.8) her  $x, y \in [R, R]$  için de sağlanır. Böylece  $\varphi = d - d'$  olmak üzere her  $x, y \in [R, R]$  için

$$[x, \varphi(y)] = [a, y]x$$

ve her  $x_1, x_2, y_1, y_2 \in R$  için

$$[[x_1, x_2], \varphi([y_1, y_2])] = [a, [y_1, y_2]][x_1, x_2] \quad (5.9)$$

elde edilir.  $\varphi$  türevinin bir  $X$ -dış türev ya da  $X$ -iç türev olmasına göre ispatı iki alt duruma ayıralım.

• 1. Durum: Öncelikle  $\varphi$  nin bir  $X$ -dış türev olduğunu kabul edelim. O zaman Teorem 2.20 den her  $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 \in R$  için

$$[[x_1, x_2], [z_1, y_2] + [y_1, z_2]] = [a, [y_1, y_2]][x_1, x_2]$$

dir. Özel olarak  $z_1 = z_2 = 0$  alınırsa  $[a, [R, R]][R, R] = 0$  dır ve bu durum  $a \in C$  olmasını gerektirir. Öyleyse (5.9) den

$$[[R, R], \varphi([R, R])] = 0$$

bulunur.  $[R, R]$ , bir Lie idealdir ve her  $x, y \in [R, R]$  için  $[x, \varphi(y)] = 0$  dır.  $y \in [R, R]$  sabitlenirse  $[-, \varphi(y)]$  bir iç türev olur. Böylece her  $y \in [R, R]$  için  $\varphi(y) \in Z(R)$  veya  $[R, R] \subseteq Z(R)$  olur. O zaman  $\varphi([R, R]) \subseteq Z(R)$  olup, Teorem 2.19 dan  $\varphi = 0$  veya  $[R, R] \subseteq Z(R)$  elde edilir. Eğer  $[R, R] \subseteq Z(R)$  ise o zaman  $\text{char } R \neq 2$  olduğundan  $R$  halkasının değişmeli olduğu sonucuna varılır. Her iki durumda da  $\varphi = 0$  veya  $R$  halkasının değişmeli olduğu görülür. Bu ise bir çelişkidir.

• 2. Durum: Şimdi  $\varphi$  nin bir  $X$ -iç türev olduğunu, yani her  $x \in R$  ve uygun bir  $b \in U(R)$  için  $\varphi(x) = [b, x]$  olduğunu kabul edelim. Dolayısıyla her  $x_1, x_2, y_1, y_2 \in R$  için (5.9),

$$[x_1, x_2][b, [y_1, y_2]] = [a + b, [y_1, y_2]][x_1, x_2] \quad (5.10)$$

halini alır ve (5.10) da  $x_2$  yerine  $x_2x_1$  alınırsa

$$[x_1, x_2]x_1[b, [y_1, y_2]] = [a, [y_1, y_2]][x_1, x_2]x_1 + [b, [y_1, y_2]][x_1, x_2]x_1$$

denkleminde

$$[x_1, x_2][x_1, [b, [y_1, y_2]]] = 0 \quad (5.11)$$

bulunur. Yine (5.11) de  $x_2$  yerine her  $r \in R$  için  $x_2r$  yazılırsa

$$[x_1, x_2]R[x_1, [b, [y_1, y_2]]] = 0$$

elde edilir.  $R$  asal olduğundan her  $x_1 \in R$  için  $[x_1, R] = 0$  ya da  $[x_1, [b, [R, R]]] = 0$  dır.

$H = \{x \in R : [x, R] = 0\}$  ve  $G = \{x \in R : [x, [b, [R, R]]] = 0\}$  olsun. O zaman  $H$  ve  $G$   $R$  halkasının iki toplamsal alt grubudur ve  $R = H \cup G$  dir. O zaman Önerme 2.1 den  $H = R$  veya  $G = R$  olmalıdır. Eğer  $H = R$  ise o zaman  $R$  halkasının değişmeli olduğu çelişkisine ulaşılır. O halde  $G = R$  olup, buradan  $R$  halkasının  $b \in U(R)$  ile belirlenen bir iç türevi  $I_b$  olmak üzere

$I_b([R, R]) \subset Z(R)$  elde edilir. Teorem 2.19 dan  $I_b = 0$ , yani  $b \in C$  sonucu çıkarılır. O halde  $\varphi = 0$  ve  $R$  üzerinde  $d' = d$  olmalıdır. Böylece (5.8) den  $a \in C$  olup, ispat biter.  $\square$

Son olarak Lie idealler üzerinde Lie homomorfizmaların karakterizasyonu verilecektir. Bunun için öncelikle aşağıdaki yardımcı özelliğe ihtiyaç duyulmuştur.

**Yardımcı Özellik 5.3**  *$R$  karakteristiği ikiden farklı bir asal halka,  $L$   $R$  nin merkezi olmayan bir Lie ideali ve  $b, c \in R$  olsun. Her  $x, y \in L$  için*

$$c[x, y] - [x, y]b = [[b, x], cy - yb]$$

ise o zaman  $b = c \in Z(R)$  dir.

**İspat.** Yardımcı Özellik 2.1 den, her  $x, y \in [I, R]$  için

$$c[x, y] - [x, y]b = [[b, x], cy - yb] \quad (5.12)$$

dir. Teorem 2.12 ışığında  $I, R$  ve  $U(R)$  aynı genelleştirilmiş polinom özdeşlikleri sağladığından (5.12) her  $x, y \in [R, R]$  için de geçerlidir.

Öncelikle  $R$  nin bir polinom özdeşliği halkası olmadığını kabul edelim. O zaman Önerme 2.13 ten, her  $x, y \in R$  için (5.12) özdeşliği sağlanır. Burada özellikle  $y = x$  alınırsa her  $x \in R$  için  $[[b, x], cx - xb] = 0$  dir. Teorem 2.26 dan  $[b, x] = \lambda(cx - xb)$  elde edilir. Bu da her  $x \in R$  için

$$(\lambda c - b)x + x(b - \lambda b) = 0$$

olmasını gerektirir. Yardımcı Özellik 2.10 dan  $\lambda b - b = -b + \lambda c \in C$  ve  $\lambda(b - c) = 0$  elde edilir. O zaman  $R$  halkasının asallığı  $\lambda = 0$  veya  $b = c$  olmasını gerektirir. Eğer  $\lambda = 0$  ise o zaman  $b \in C$  dir. Dolayısıyla (5.12) den her  $x, y \in R$  için  $(c - b)[x, y] = 0$  bulunur ve böylece  $b = c$  dir. O zaman (5.12) her  $x, y \in R$  için

$$[b, [x, y]] = [[b, x], [b, y]]$$

özdeşliğine indirgenmiş olur. Yardımcı Özellik 2.18 den  $b \in C$  elde edilir ve  $R$  nin bir polinom özdeşliği olmaması durumunda ispat tamamlanmış olur.

Şimdi  $R$  halkasının bir polinom özdeşliği halkası olduğunu kabul edelim.

O zaman Teorem 2.8 den  $R_C$ , merkezi üzerinde sonlu boyutlu bir merkezi basit cebirdir. Bu durumda  $n$  sabit pozitif bir tamsayı,  $D$  bölümlü halkası üzerinde  $n \times n$  tipinde matrisler halkası  $D_n$  olmak üzere  $R_C \cong D_n$  dir. Eğer  $C$  sonlu ise o zaman  $D, C$  üzerinde sonlu boyutlu olacağından,  $D$  sonlu bir halkadır ve böylece Wedderburn Teoreminden (Teorem 2.4)  $D$  bir cisimdir. Bu durumda  $R \cong C_n$  dir. Eğer  $C$  sonsuz ve  $F, D$  bölümlü halkasının bir maksimal alt cismi ise o zaman Önerme 2.14 ten standart argüman ile her  $x, y \in R_C \otimes_C F$  için

$$c[x, y] - [x, y]b = [[b, x], cy - yb]$$

olduğu görülür. Ancak uygun bir  $k$  pozitif tamsayısı için

$$R_C \otimes_C F = D_n \otimes_C F = (D \otimes_C F)_n = F_k$$

dir. Her iki durumda da  $R_C \cong F_k$  alınabilir, üstelik  $R$  değişmeli olmadığından  $k \geq 2$  dir.

$e \in R_C$  herhangi bir idempotent eleman ve  $r, r' \in R_C$  olsun. Başlangıç hipotezinde  $x = er(1 - e)$ ,  $y = er'(1 - e) \in [R_C, R_C]$  alınırsa

$$c[er(1 - e), er'(1 - e)] - [er(1 - e), er'(1 - e)]b = [[b, er(1 - e)], cer'(1 - e)]$$

denkleminde,

$$0 = [b, er(1 - e)](cer'(1 - e) - er'(1 - e)b) - [b, er(1 - e)](cer'(1 - e) - er'(1 - e)b) \quad (5.13)$$

elde edilir. (5.13) sağdan  $e$  ile çarpılırsa her  $r, r' \in R_C$  için

$$0 = e\{r(1 - e)ber' - r'(1 - e)ber\}(1 - e)be \quad (5.14)$$

bulunur. Uyarı 2.4 ten uygun bir  $\mu \in C$  ve her  $r \in R_C$  için aşağıdaki koşullardan biri geçerlidir:

$$(i) \quad (1 - e)be = 0$$

$$(ii) \quad (1 - e)ber(1 - e)be = \mu(1 - e)be$$

$$(iii) \quad (1 - e)ber(1 - e)be = \mu(1 - e)be \text{ ve } er(1 - e)be = \mu e$$

Şimdi (ii) nin geçerli olduğunu kabul edelim. O zaman her  $r, r' \in R_C$  için

$$(1 - e)ber(1 - e)be = \mu(1 - e)be$$

ve

$$(1 - e)ber'(1 - e)be = \mu(1 - e)be$$

olacak şekilde  $\mu \in C$  elemanı vardır. Bu eşitlikler (5.14) denkleminde kullanılırsa

$$eR_C(1 - e)be = 0$$

bulunur.  $R_C$  asal olduğundan  $(1 - e)be = 0$  dir.

(iii) nin geçerli olduğunu kabul edilirse benzer işlemlerle (5.14) ten  $e = 0$  olduğu görülür, bu ise bir çelişkidir.

Şimdi başlangıç hipotezinde  $x = (1 - e)re$ ,  $y = (1 - e)r'e \in [R_C, R_C]$  alınırsa o zaman

$$c[(1 - e)re, (1 - e)r'e] - [(1 - e)re, (1 - e)r'e]b = [[b, (1 - e)re], c(1 - e)r'e]$$

denkleminde

$$0 = [b, (1 - e)re] (c(1 - e)r'e - (1 - e)r'eb) - [b, (1 - e)re] (c(1 - e)r'e - (1 - e)r'eb) \quad (5.15)$$

elde edilir. (5.15) sağdan  $(1 - e)$  ile çarpılırsa her  $r, r' \in R_C$  için

$$0 = (1 - e) \{ reb(1 - e)r' - r'eb(1 - e)r \} eb(1 - e) \quad (5.16)$$

denkleminde ulaşılır. Uyarı 2.4 ten uygun bir  $\lambda \in C$  ve her  $r \in R_C$  için aşağıdaki koşullardan biri geçerlidir:

$$(i) \quad eb(1 - e) = 0$$

$$(ii) \quad eb(1 - e)reb(1 - e) = \lambda eb(1 - e)$$

$$(iii) \quad eb(1 - e)reb(1 - e) = \lambda eb(1 - e) \text{ ve } (1 - e)reb(1 - e) = \lambda(1 - e)$$

Şimdi (ii) nin geçerli olduğunu kabul edelim. O zaman her  $r, r' \in R_C$  için

$$eb(1 - e)reb(1 - e) = \lambda eb(1 - e) \quad (5.17)$$

ve

$$eb(1-e)r'eb(1-e) = \lambda eb(1-e) \quad (5.18)$$

dir. Bu durumda (5.17), (5.18) ile birlikte (5.16) denkleminde kullanılırsa benzer şekilde

$$(1-e)R_Ceb(1-e) = 0$$

elde edilir.  $R_C$  asal olduğundan  $eb(1-e) = 0$  dir. Eğer (iii) nin geçerli olduğu kabul edilirse  $1-e = 0$  çelişmesine ulaşılır.

Böylece  $(1-e)be = 0$  ve  $eb(1-e) = 0$  den herhangi bir  $e \in R_C$  idempotenti için  $eb = be$  sonucuna varılır.  $R_C$  halkasının tüm idempotentleri ile üretilen bir toplamsal altgrubunu  $E$  ile gösterelim. O zaman  $[b, E] = 0$  olduğu açıktır. Yardımcı Özellik 2.2 den  $[R_C, R_C] \subseteq E$  ve  $[b, [R_C, R_C]] = 0$  elde edilir. Bu ise  $b \in C$  olmasını gerektirir. (5.12) denkleminde her  $x, y \in [R, R]$  için

$$(c-b)[x, y] = 0$$

dır. Teorem 2.22 den  $b = c$  olup, ispat tamamlanır.  $\square$

**Teorem 5.7**  *$R$  genişletilmiş merkezi  $C$  olan karakteristiği ikiden farklı bir asal halka ve  $L, R$  nin merkezi olmayan bir Lie ideali olsun.  $g, R$  halkasının bir  $d$  türeviyle belirlenen genelleştirilmiş türevi olmak üzere her  $x, y \in L$  için  $g([x, y]) = [d(x), g(y)]$  olduğunu kabul edelim. O zaman  $g = 0$  dır.*

**İspat.** Teorem 2.25 den uygun bir  $a \in U(R)$  ve her  $x \in R$  için  $g(x) = ax + d(x)$  olduğundan her  $x, y \in L$  için

$$a[x, y] + d([x, y]) = [d(x), ay + d(y)] \quad (5.19)$$

dir. Yardımcı Özellik 2.1 denklemini (5.19), her  $x, y \in [I, R]$  için de sağlanır. Teorem 2.13 gereğince  $I, R$  ve  $U(R)$  aynı diferansiyel özdeşlikleri sağladığından (5.19) her  $x, y \in [R, R]$  için geçerlidir.

İspatı  $d$  nin bir  $X$ -dış türev ve  $X$ -iç türev olmasına göre iki duruma ayıralım:

• 1. Durum: İlk olarak  $d$  nin bir  $X$ -dış türev olduğunu kabul edelim. O zaman (5.19) den,  $d$  nin türev olduğu kullanılarak her  $x_1, x_2, y_1, y_2 \in R$  için

$$\begin{aligned} a[[x_1, x_2], [y_1, y_2]] + [[d(x_1), x_2] + [x_1, d(x_2)], [y_1, y_2]] + [[x_1, x_2], [d(y_1), y_2] + [y_1, d(y_2)]] \\ = [[d(x_1), x_2] + [x_1, d(x_2)], a[y_1, y_2] + [d(y_1), y_2] + [y_1, d(y_2)]] \end{aligned} \quad (5.20)$$

elde edilir. (5.20) da Teorem 2.20 uygulanırsa  $R$  halkasının

$$\begin{aligned} a[[x_1, x_2], [y_1, y_2]] + [[t_1, x_2] + [x_1, t_2], [y_1, y_2]] + [[x_1, x_2], [z_1, y_2] + [y_1, z_2]] \\ = [[t_1, x_2] + [x_1, t_2], a[y_1, y_2] + [z_1, y_2] + [y_1, z_2]] \end{aligned} \quad (5.21)$$

özdeşliğini sağladığı görülür. Özel olarak (5.21) de  $t_1 = t_2 = z_1 = z_2 = 0$  alınır ve her  $x_1, x_2, y_1, y_2 \in R$  için

$$a[[x_1, x_2], [y_1, y_2]] = 0$$

olur ve bu da Teorem 2.22 den  $a = 0$  olmasını gerektirir. O halde  $L$  üzerinde  $g = d$  dir ve böylelikle her  $x, y \in L$  için

$$d([x, y]) = [d(x), d(y)]$$

yani  $d$  türevi  $L$  üzerinde bir Lie homomorfizması olarak hareket etmektedir. O zaman Teorem 2.28 den  $d = 0$  ve dolayısıyla  $g = 0$  sonucuna varılır.

• 2. Durum:  $d$  nin bir  $X$ -iç türev olduğunu kabul edelim. Bu durumda  $d(x) = [b, x]$  olacak şekilde uygun bir  $b \in U(R)$  vardır ve her  $x \in R$  için

$$g(x) = (a + b)x - xb$$

dir.  $c = a + b$  olmak üzere (5.19) de  $x, y \in [R, R]$  için

$$c[x, y] - [x, y]b = [[b, x], cy - yb]$$

dir. O zaman Yardımcı Özellik 5.3 ten  $b = c \in C$  elde edilir ve böylece  $d = 0$  ve  $a = 0$  olup, ispat biter.  $\square$

## 6. SONUÇ

Tezin ana kısımları olan üçüncü ve dördüncü bölümlerde asal halkaların ve Lie ideallerinin sağladığı genelleştirilmiş  $\alpha$ -türev ihtiva eden özdeşlikler ele alınmıştır. Beşinci bölümde ise asal halkaların ve sonrasında bir asal cebirin merkezi olmayan Lie alt cebirinin sağladığı fonksiyonel özdeşlik incelenmiştir.

Üçüncü bölümde, bir asal halkanın bir değişmeli olmayan Lie ideali üzerinde genelleştirilmiş  $\alpha$ -türev ihtiva eden bir özdeşlik ele alınmıştır. Daha açık bir ifadeyle değişmeli olmayan Lie idealler üzerinde genelleştirilmiş  $\alpha$ -türevinin sabit bir tamsayı kuvvetinin sıfırlayan koşulu çalışılmıştır. Bunun sonucunda halkanın merkezi kapanışının genişletilmiş merkezi üzerindeki boyutu 4 olmadıkça sıfırlayan elemanın sıfır veya halka üzerinde genelleştirilmiş  $\alpha$ -türevin, Martindale kesirler halkasından uygun bir eleman ile sol çarpım dönüşümü olduğu ve bu eleman ile sıfırlayan elemanın çarpımlarının da sıfır olduğu sonucuna varılmıştır. Ayrıca her  $\alpha$ -türev bir genelleştirilmiş  $\alpha$ -türev olduğundan aynı özdeşlik bir asal halkanın değişmeli olmayan bir Lie idealinde ele alınmış ve yine halkanın merkezi kapanışının halka üzerindeki boyutu 4 olmadıkça sıfırlayan elemanın sıfır veya  $\alpha$ -türevin sıfır olduğu görülmüştür.

Dördüncü bölümde, üçüncü bölümün devamı niteliğinde olan otomorfizma ihtiva eden merkezi bir diferansiyel özdeşlik incelenmiştir. Üçüncü bölümdeki özdeşliğin merkezi olma durumu önce halka üzerinde ardından değişmeli olmayan bir Lie ideal üzerinde ele alınmış ve benzer sonuçlar elde edilmiştir. Daha sonra bu sonuçlar, aynı özdeşliğin bir asal halkanın değişmeli olmayan Lie ideali üzerinde  $\alpha$  türev için sağlanması durumuna uygulanmış ve yine halkanın merkezi kapanışının genişletilmiş merkezi üzerindeki boyutunun 4 olmadığı durumda  $\alpha$ -türevin sıfır ya da sıfırlayan elemanın sıfır olduğu sonucuna varılmıştır.

Beşinci bölümde, halka üzerinde bir fonksiyonel özdeşlik tanımlanarak halka üzerinde bir takım yapısal sonuçlarla birlikte bu fonksiyonel özdeşliğin ihtiva ettiği dönüşümlerin biçimi belirlenmiştir. Ardından aynı fonksiyonel

özdeşlik bir asal cebirin merkezi olmayan bir Lie alt cebiri üzerinde ele alınmış ve özdeşliğin içerdiği dönüşümlerin biçimi betimlenmiştir. Bu sayede daha önce literatüre iki farklı şekilde sunulan genelleştirilmiş Lie türev kavramı tek bir fonksiyonel özdeşlik altında toplanmış ve ayrıca Lie merkezleyen ve Lie türev kavramlarının da bir genellemesine ulaşılmıştır. Bölümün devamında genelleştirilmiş türev ihtiva eden iki farklı diferansiyel özdeşlik incelenmiş ve halka üzerinde bu özdeşliği oluşturan dönüşümlerin yapısıyla ilgili sonuçlara ulaşılmıştır.

Üç ve dördüncü bölümlerde polinom özdeşliği teorisi ve genelleştirilmiş polinom özdeşliği teorisi araç olarak kullanılırken, beşinci bölümde fonksiyonel özdeşlik teorisi kullanılmıştır. Tüm bölümlerde bu güçlü teorilerin uygulamaları adım adım verilmiştir. Bu bağlamda tez, bu teorilerin kullanım alanını açıkça ortaya koymuştur ve literatürde bir çok sonucun ileri düzeyde bir genellemesine olanak sağlamıştır.

Üçüncü ve dördüncü bölümde ele alınan özdeşliklerin devamı olarak literatürdeki genelleştirilmiş türevelerle ilişkin bir çok sonucu genelleyen aşağıdaki problemler incelenebilir:

**Problem**  $R$  değişmeli olmayan bir asal halka ve  $f(x_1, \dots, x_n)$   $R$  üzerinde merkezi değerli olmayan bir çoklu doğrusal polinom olsun.  $\alpha \in \text{Aut}(R)$  ve  $G$ ,  $R$  halkasının bir genelleştirilmiş  $\alpha$ -türevi olsun.  $a \in R$  ve her  $x_1, \dots, x_n \in R$  için

$$(1) \quad a(G(f(x_1, \dots, x_n)))^n = 0$$

$$(2) \quad a(G(f(x_1, \dots, x_n)))^n \in Z(R)$$

ise  $f(x_1, \dots, x_n)$  çoklu doğrusal polinomu,  $G$  genelleştirilmiş  $\alpha$ -türevinin yapısı ve  $a \in R$  elemanı için ne söylenebilir?

Beşinci bölümde çalışılan fonksiyonel özdeşliğin daha genel bir versiyonu ise özdeşliğe diğerlerinden bağımsız bir başka toplamsal fonksiyon ilave etmektir. Özetle şu iki problem incelenebilir:

**Problem.**  $R$  karakteristiği ikiden farklı değişmeli olmayan bir asal halka,  $C$   $R$  nin genişletilmiş merkezi olsun.  $D, F, K, T, H : R \rightarrow R$  dönüşümleri toplamsal olsun. Her  $x, y \in R$  için

$$H([x, y]) = F(x)y - yK(x) - T(y)x + xD(y)$$

fonksiyonel özdeşliğinin sağlandığını kabul edelim. O zaman halkanın derecesi ve bu özdeşliği oluşturan fonksiyonlar için ne söylenebilir?

**Problem.**  $R$  karakteristiği ikiden farklı bir asal cebir,  $C$ ,  $R$  nin genişletilmiş merkezi ve  $L$ ,  $R$  nin merkezi olmayan bir Lie ideali olsun.  $A$ ,  $R$  halkasının  $L$  ile üretilen bir alt cebiri olsun.  $D, F, K, T, H : L \rightarrow R$  toplamsal dönüşümlerinin her  $x, y \in L$  için

$$H([x, y]) = F(x)y - yK(x) - T(y)x + xD(y)$$

fonksiyonel özdeşliğini sağladığını kabul edelim. O zaman halkanın derecesi ve bu özdeşliği oluşturan fonksiyonlar için ne söylenebilir?

## KAYNAKLAR DİZİNİ

- Albas, E.**, 2011, On generalized derivations satisfying certain conditions, Ukrainian Mathematical Journal 63(5): 690-698 pp.
- Baydar Yarbil, N., Argaç, N.**, 2016, A note on generalized Lie derivations of prime rings, Frontiers of Mathematics in China, SI: Progress in Ring Theory, to appear.
- Beidar, K. I. Martindale, W. S. and Mikhalev, V.**, 1996, Rings with generalized identities, Marcel Dekker, Monographs and textbooks in pure and applied mathematics, New York, 196 p.
- Beidar, K. I.**, 1998, On Functional Identities and Commuting Additive Mappings, Communications in Algebra, 26(6): 1819-1850 pp.
- Beidar, K. I., Chebotar, M. A.**, 2000, On functional identities and  $d$ -free subsets of rings I, Communications in Algebra, 28: 3925-3951 pp.
- Beidar, K. I., Chebotar, M. A.**, 2000, On functional identities and  $d$ -free subsets of rings II, Communications in Algebra, 28(8): 3953-3972 pp.
- Beidar, K. I., Chebotar, M. A.**, 2001, On Lie derivations of Lie ideals of prime algebras, Israel Journal of Mathematics, 123: 131-148 pp.
- Beidar, K. I., Chebotar, M. A.**, 2001, On surjective Lie homomorphisms onto Lie ideals of prime rings, Communications in Algebra, 29(10): 4775-4793 pp.
- Beidar, K. I., Chebotar, M. A.**, 2001, On Herstein's Lie map conjecture II, Journal of Algebra, 238: 239-264 pp.
- Bell, H.E., Kappe, L.C.**, 1989, Rings in which Derivations Satisfy Certain Algebraic Conditions, Acta Mathematica Hungarica, 53(3-4): 339-346 pp.
- Bergen, J. Herstein, I. N., Kerr, J. W.** Lie ideals and derivations of prime rings, Journal of Algebra, 71: 259-267 pp.
- Brešar, M.**, 1990, A note on derivations, Mathematical Journal of Okayama University, 32: 83-88 pp.

# KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam)

- Brešar, M.**, 1993, Commuting traces of biadditive mappings, commutativity-preserving mappings and Lie mappings, Transactions of American Mathematical Society, 335: 525-546 pp.
- Brešar, M., Miers, C. R.**, 1995, Commuting maps on Lie ideals, Communications in Algebra, 23: 5339-5553 pp.
- Brešar, M.**, 1995, On generalized biderivations and related maps, Journal of Algebra, 172(3): 764-786 pp.
- Brešar, M., Šemrl, P.**, 2003, Commuting traces of biadditive maps revisited, Communications in Algebra, 31(1): 381-388 pp.
- Brešar, M., Chebotar, M. A., Martindale, W. S.**, 2007, Functional Identities, Birkhäuser Verlag, Switzerland, 272 p.
- Brešar, M.**, 2014, Introduction to Noncommutative Algebra, Springer International Publishing, Switzerland, 199 p.
- Chang, C. M., Lee, T. K.**, 1998, Annihilators of power values of derivations in prime rings, Comm. in Algebra, 26(7): 2091-2113 pp.
- Chang, J. C.**, 2003, On the identity  $h(x) = af(x) + g(x)b$ , Taiwanese Journal of Mathematics, 7(1): 103-113 pp.
- Chang, J. C.**, 2009, Annihilators of power values of a right generalized  $(\alpha, \beta)$ -derivation, Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica New Series, 4(1): 67-73 pp.
- Chang, J. C.**, 2009, Right generalized  $(\alpha, \beta)$ -derivations having power central values, Taiwanese Journal of Mathematics 13(4): 1111-1120 pp.
- Chang, J. C.**, 2010, Generalized skew derivations with nilpotent values on Lie ideals, Monatshefte für Mathematik, 161: 155-160 pp.
- Chang, J. C.**, 2011, Generalized skew derivations with power central values on Lie ideals, Communications in Algebra 39(6): 2241-2248 pp.
- Chang, C. M., Lee, T. K.**, 1998, Annihilators of power values of derivations in prime rings, Communications in Algebra, 26(7): 2091-2113 pp.

# KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam)

- Chuang, C. L.**, 1988, GPI's having coefficients in Utumi quotient rings, Proceedings American Mathematical Society, 103(3): 723-728 pp.
- Chuang, C. L.**, 1992, Differential identities with automorphisms and anti-automorphisms I, Journal of Algebra, 149: 371-404 pp.
- Chuang, C. L.**, 1993, Differential identities with automorphisms and anti-automorphisms II, Journal of Algebra, 160: 292-335 pp.
- Chuang, C. L., Lee, T. K.**, 2005, Identities with a single skew derivation, Journal of Algebra, 288: 59-77 pp.
- Chuang, C. L. , Chou, M. C., Liu, C. K.**, 2006, Skew derivations with annihilating Engel conditions, Publicationes Mathematicae Debrecen, 68: 161-170 pp.
- Hungerford, T. W.**, 1974, Algebra, Holt, Rinehart and Winston, New York, 502 p.
- Dhara, B., De Filippis, V., Scudo, G.**, 2013, Power values of generalized derivations with annihilator conditions in prime rings, Mediterranean Journal of Mathematics, 10: 123-135 pp.
- Dummit, D.S., Foote, R. M.**, 2004, Abstract Algebra, John Wiley and Sons, Inc., 932 p.
- Felzenswalb, B.**, 1978, On a result of Levitzki, Canadian Mathematics Bulletin, 21:241-242 pp.
- Felzenswalb, B.**, 1982, Derivations in Prime Rings, Proceedings American Mathematical Society, 84(1): 16-20 pp.
- Herstein, I. N.**, 1968, Noncommutative rings, The Mathematical Association of America, 199 p.
- Herstein, I. N.**, 1969, Topics in ring theory, University of Chicago Press, 132 p.
- Herstein, I. N.**, 1979, Center-like elements in prime rings, Journal of Algebra, 60: 567-574 pp.

## KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam)

- Herstein, I. N., Giambruno, A.**, 1981, Derivations with nilpotent values, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Second Series, 2: 199-206 pp.
- Herstein, I. N.**, 1982, Derivations of prime rings having power central values, Contemporary Mathematics, American Mathematical Society, Providence, R.I., 13: 163-171 pp.
- Hvala, B.**, 1998, Generalized derivations in Rings, Communications in Algebra, 26(4): 1147-1166 pp.
- Hvala, B.**, 2007, Generalized Lie derivations of prime rings, Taiwanese Journal of Mathematics, 11(5): 1425-1430 pp.
- Jacobson, N.**, 1964, Structure of rings, 37, American Mathematical Society Colloquium Publicationes, Rhode Island, 299 p.
- Jacobson, N.**, 1975, PI-Algebras, Lecture Notes in Mathematics, 441, Springer-Verlag, Berlin-New York, 115 p.
- Jing, W.**, 2011, Additivity of Lie Centralizers on Triangular Rings, Mathematics and Computer Science Working Papers, Paper8, Fayetteville State University, 1-10 pp.
- Kharchenko, V. K.**, 1975, Generalized identities with automorphisms, Algebra i Logika, 14(2):215-237 pp.; English Translation: Algebra and Logic 14(2): 132-148 pp.
- Kharchenko, V. K.**, 1978, Differential identities of prime rings, Algebra and Logic, 17: 155-168 pp.
- Kharchenko, V., Popov, A. Z.**, 1992, Skew derivations of prime rings, Communications in Algebra, 20(11): 3321-3345 pp.
- Lam, T. Y.**, 2001, A first course in noncommutative rings, Springer Verlag, New York, 385 p.
- Lambek, J.**, 1966, Lectures on Rings and Modules, Blaisdell Publishing Company, Waltham, 183 p.

# KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam)

- Lanski, C.**, 1988, Differential Identities, Lie Ideals, and Posner's Theorems, Pacific Journal of Mathematics, 134(2): 275–297 pp.
- Lee, P. H., Wong, T. L.**, 1995, Derivations cocentralizing Lie ideals, Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica 23(1): 1-5 pp.
- T. C. Lee**, 1996, A result of Levitzki type with annihilator conditions on multilinear polynomials, Algebra Colloquium, (3)4, 347-354 pp.
- Lee, P. H., Lee, T. K.**, 1983, Lie ideals of prime rings with derivations, Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica, 11(1) : 75-80 pp.
- Lee, T.K.**, 1992, Semiprime rings with differential identities, Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica, 20(1): 27-38 pp.
- Lee, T. K., Lin, J. S.**, 1996, A result on derivations, Proceedings of American Mathematical Society, 124: 1687-1691 pp.
- Lee, T. K., Chang, C. M.**, 1998, Annihilators of power values of derivations in prime rings, Communications in Algebra, 26(7): 2091-2113 pp.
- Lee, T. K.** , 1999, Generalized derivations of left faithful rings, Communications in Algebra, 27: 4057-4073 pp.
- Lee, T. K.**, 1999, Differential identities of Lie ideals or large right ideals in prime rings, Communications in Algebra, 27(2): 793-810 pp.
- Lee, T. K., Liu, K. S.** , 2013, Generalized skew derivations with algebraic values of bounded degree, Houston Journal of Mathematics, 39(3): 733-740 pp .
- Liao, P. B., Liu, C. K.**, 2009, On generalized Lie derivations of Lie ideals of prime algebras, Linear Algebra and its Applications, 430: 1236-1242 pp.
- McCoy, N.H.**, 1964, The Theory of Rings, The Macmillan Co., New York; Collier-Macmillan Ltd., London , 166 p.
- Martindale, W. S.**, 1969, Prime rings satisfying a generalized polynomial identity, Journal of Algebra, 12: 576-584 pp.

# KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam)

- Nakajima, A.**, 2000, On generalized higher derivations, Turkish Journal of Mathematics, 24: 295-311 pp.
- Posner, E. C.**, 1960, Prime Rings Satisfying a Polynomial Identity, Proceedings of American Mathematical Society, 11: 180-183 pp.
- Rcihoux, A.**, 1969, A theorem for prime rings, Proceedings of American Mathematical Society, 77:27-31 pp.
- Rowen, L. H.**, 1980, Polynomial Identities in Ring Theory, Academic Press Inc., 365 p.
- Rowen, L. H.**, 1988, Ring Theory Volume 1, Academic Press Inc., 538 s.
- Posner, E. C.**, 1957, Derivations in prime rings, Proceedings of American Mathematical Society, 8: 1093-1100 pp.
- Posner, E. C.**, 1960, Prime rings satisfying a polynomial identity, Proceedings of American Mathematical Society, 11: 180-183 pp.
- Scudo, G.**, 2014, Generalized derivations acting as Lie homomorphisms on polynomials in prime rings, South Asian Journal of Mathematics, 38(4): 563-572 pp.
- Wang, Y., You, H.**, 2007, Derivations as Homomorphisms or Anti- Homomorphisms on Lie Ideals, Acta Mathematica Sinica, 23(6): 1149–1152 pp.
- Wong, T. L.**, 1996, Derivations with power central values on multilinear poynomials, Algebra Colloquium, 3(4): 369-378 pp.
- Xu, X. W. , Ma, J., Niu, F.W.**, 2007, Annihilators of power central values of generalized derivation(Chinese), Chinese Annal Mathematical Series A, 28: 131-140 pp.

## ÖZGEÇMİŞ

İzmir’ de 1986 yılında doğdu. İlköğretimini Muğla’da, ortaöğretimini İzmir Karşıyaka Anadolu Lisesi’nde tamamladı.

2004-2008 yılları arasında lisans öğretimini Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü, Teorik Matematik Ağırlıklı Matematik öğretim programıyla, bölüm birincisi olarak tamamladı. 2008-2010 yılları arasında Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Cebir ve Sayılar Teorisi Bilim dalında yüksek lisans öğretimini 29.07.2010 tarihinde tamamladı. 2009 yılında yüksek lisans öğretimi sırasında, Erasmus-Socrates Öğrenci Değişimi programı kapsamında beş aylığına İskoçya Aberdeen Üniversitesine gitti. 2010 yılında aynı birimde doktora öğretimine başladı. 2011 yılında Prof. Dr. Ajda Fošner’ in daveti üzerine Slovenya Maribor Üniversitesi’ne iki haftalık bir araştırma ziyaretinde bulundu. 2015 yılında Doç. Dr. Vincenzo De Filippis’in daveti ile İtalya Messina Üniversitesi’ne ve Prof. Dr. Ajda Fošner’ in daveti üzerine Slovenya Maribor Üniversitesi’ne bir aylık bir çalışma ziyaretinde bulunmuştur. İtalya’da, Çin’de ve yurt içinde düzenlenen uluslararası konferanslara bildirili olarak katılmıştır.

2012 yılında Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü’nde araştırma görevlisi olarak çalışmaya başlamıştır ve halen görevine devam etmektedir.