



**T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



**T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI
ORTAK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI**

**SONSUZ SERİLERİN MUTLAK MATRİS TOPLANABİLME
METOTLARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Emine ÖZGÜL

DANIŞMAN

Yrd. Doç. Dr. Tuba ARI

Yrd. Doç. Dr. Kemal USLU

AKSARAY, 2016

AKSARAY ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ONAY BELGESİ

Aksaray Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 142309301 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi, “Emine ÖZGÜL”, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “Sonsuz Serilerin Mutlak Matris Toplanabilme Metotları” başlıklı tezini, aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı :	Yrd.Doç.Dr. Tuba ARI	
	Aksaray Üniversitesi	
Jüri Üyeleri:	Doç.Dr. Abdulcabbar SÖNMEZ	
	Erciyes Üniversitesi	
Jüri Üyeleri:	Doç.Dr. Gülin TABAKAN	
	Aksaray Üniversitesi	

Teslim Tarihi: 1 Mart 2016

Savunma Tarihi: 25 Mart 2016

DOĞRULUK BEYANI

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu ve bu eserleri her kullanışımında alıntı yaparak yararlandığımı belirtir; bunu şerefimle doğrularım.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.

Emine ÖZGÜL

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunu bana veren, çalışmalarım boyunca yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen çok kıymetli Sayın Hocam Yrd. Doç. Dr. Tuba ARI' ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
DOĞRULUK BEYANI.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
ÖZET.....	v
ABSTRACT.....	vi
SEMBOLLER ve KISALTMALAR.....	vii
1. Giriş.....	1
2. Tanım ve Teoremler.....	4
3. Sonsuz Serilerin Mutlak Cesàro Toplanabilme Çarpanları.....	13
4. Toplanabilme Metotlarının Denkliği	19
5. Sonsuz Serilerin Mutlak Toplanabilirliği.....	27
6. Sonuç ve Öneriler.....	35
KAYNAKLAR	37
ÖZGEÇMİŞ.....	39

ÖZET

SONSUZ SERİLERİN MUTLAK MATRİS TOPLANABİLME METOTLARI

Bu çalışma altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, Toplanabilme teorisinin amacı, tarihçesi ve Matematikteki yeri ve öneminden bahsedilmiştir.

İkinci bölümde, çalışma boyunca kullanılacak temel tanım, teorem ve lemmalar verilmiştir.

Üçüncü bölümde, $|C, 1|_k$ toplanabilme çarpanlarıyla ilgili bir teorem, daha sonra da bu teoremin genelleştirilmesi olan $|C, \alpha|_k$ toplanabilme çarpanları ile ilgili bir başka teorem ifade ve ispat edilmiştir.

Dördüncü bölümde $|R, p_n|_k$ ve $|R, q_n|_k$ toplanabilme metotlarının denklğini veren bir teorem ile $|R, p_n|_k$ ve $|R, q_n|_k$ toplanabilme metotları arasındaki ilişkiyi inceleyen bir başka teorem ifade ve ispat edilmiştir.

Beşinci bölümde, $|C, 1|_k$ toplanabilen bir serinin $|A|_k$ toplanabilmesi için gerekli şartları veren bir teorem daha sonra da $|A|_k$ toplanabilen bir serinin $|C, 1|_k$ toplanabilmesi için gerekli şartları veren bir başka teorem ifade ve ispat edilmiştir.

Son bölümde ise daha önce ispatlanmış teoremlerle ilgili sonuçlar verilerek çalışmanın amacı desteklenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Toplanabilirlik, Mutlak Toplanabilirlik, Toplanabilme Çarpanı, Matris Toplanabilirlik, Riesz Toplanabilme Metodu, Dizi Uzayları.

ABSTRACT

ABSOLUTE MATRIX SUMMABILITY METHODS OF INFINITE SERIES

This study consists of six sections.

In the first section, it is talked about the purpose of summability, the history, the place and the importance in mathematics.

In the second section, basic definitions, the theorems and the lemmas which will be used throughout the study are given.

In the third section, a theorem which deal with $|C, 1|_k$ summability factors and another theorem which generalizes this theorem dealing with $|C, \alpha|_k$ summability factors are stated and proved.

In the fourth section, a theorem giving the equivalence of the summability methods $|R, p_n|_k$ and $|R, q_n|_k$ and another theorem which analyzed relationship between the summability methods $|R, p_n|_k$ and $|R, q_n|_k$ are stated and proved.

In the fifth section, firstly a theorem giving necessary conditions that a series, which is summable $|C, 1|_k$, also in order to be summable $|A|_k$ is stated and proved. Afterwords another theorem giving necessary conditions that a series, which is summable $|A|_k$ also in order to be summable $|C, 1|_k$ is stated and proved.

In the final section, the aim of the study is supported by giving some corollaries concernig previously proved theorems.

Key Words: Summability, Absolute Summability, Summability Factors, Matrix Summability, Riesz Summability Method, Sequence Space.

SEMBOLLER ve KISALTMALAR

$\sum a_n$	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sonsuz serisi
(s_n)	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi
$s_n = O(1)$	(s_n) sınırlı
$\Delta \lambda_n$	Herhangi bir λ_n dizisi için $\lambda_n - \lambda_{n+1}$
BV	Sınırlı salınımlı dizilerin uzayı
$\bar{\Delta} A_n(s)$	$(A_n(s))$ dönüşüm dizisi için $A_n(s) - A_{n-1}(s)$
ℓ^k	$\sum_{n=1}^{\infty} x_n ^k < \infty$ olacak şekilde $x = (x_n)$ dizilerinin uzayı
$(\ell^k; \ell^k)$	ℓ^k uzayından ℓ^k uzayına bütün dönüşümlerin cümlesi

1. GİRİŞ

Genel olarak seriler, ıraksak ve yakınsak seriler olmak üzere iki ana grupta toplanır. ıraksak seriler de kendi aralarında belirli ıraksak seriler ve belirsiz ıraksak seriler olmak üzere iki grupta incelenir. Herhangi bir serinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart bunun kısmi toplamlar dizisinin yakınsak olmasıdır ve ayrıca yakınsak dizilerin yığılma noktası tektir ancak belirsiz ıraksak serilerin kısmi toplamlar dizisinin en az iki yığılma noktası vardır. Birden fazla yığılma noktası olan dizilere salınım yapan diziler denir. Salınım yapan dizilerin karşılık geldiği en uygun bir sayıyı araştırmak amacıyla toplanabilme teorisi geliştirilmiş ve çeşitli toplanabilme metotları tanımlanmıştır.

Toplanabilme teorisi, matematiğin birçok alanında kullanılmakla birlikte daha çok analiz ve uygulamalı matematikte kullanılmaktadır. Toplanabilme teorisi, en önemli yükselişini 19. yüzyılın sonlarında yapmıştır. Sonsuz serileri sistematik olarak kullanan ilk matematikçiler ise Newton ve Leibnitz dir.

Serilerde yakınsaklık teorisi ilk olarak Cauchy tarafından ortaya konulmuş daha sonra Abel bu yakınsaklık teorisini daha da geliştirmiştir.

Örneğin; $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$ serinin kısmi toplamlar dizisi ıraksak olduğundan dolayı serinin kendisi de ıraksaktır. Bununla birlikte

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \quad (1.1)$$

olsun.

$$\begin{aligned} s &= 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \\ &= 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \dots) \\ &= 1 - s \end{aligned}$$

olup buradan $s = \frac{1}{2}$ bulunur. Bu örnekte görüldüğü gibi bazı ıraksak serilere farklı metotlar uygulandığında bir toplam değeri bulunabilir.

Ancak uygulanacak bu metotları ortaya koyarken uyulması gereken bazı özellikler vardır. Bunları şu şekilde açıklayabiliriz:

İraksak bir serinin karşılık geldiği en uygun değeri bulabilmek için uygulanacak metot yakınsak seriler için de kullanılabilir ve uygulanan yakınsak serinin toplamını değiştirmemelidir.

Örnek olarak $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$ serisini göz önüne alalım.

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \\ &= \frac{1}{2} (1 + (-1)^n) \end{aligned} \quad (1.2)$$

şeklinde ifade edilebilir. (s_n) nin aritmetik ortalama dizisi (σ_n) olmak üzere

$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_n}{n+1}$ dir. Buna göre

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{\frac{1}{2}(1+(-1)^0) + \frac{1}{2}(1+(-1)^1) + \dots + \frac{1}{2}(1+(-1)^n)}{n+1} \\ &= \frac{\frac{1}{2}(n+1) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n (-1)^k}{n+1} \\ &= \frac{\frac{1}{2}(n+1) + \frac{1}{2} s_n}{n+1} \\ &= \frac{\frac{1}{2}(n+1) + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2}(1+(-1)^n) \right\}}{n+1} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1+(-1)^n}{4(n+1)} \end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \frac{1}{2}$ elde edilir.

Bu işlemler $A = (a_{nk})$ matrisinin özel bir seçimiyle de yapılabilir. Örneğin

$$a_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & 0 \leq k \leq n \text{ ise} \\ 0, & k > n \text{ ise} \end{cases} \quad (1.3)$$

olsun. Buna göre (x_n) dizisinin A - dönüşümü

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+1} x_k = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n x_k \quad (1.4)$$

şeklindedir. Buradan görüldüğü üzere A matrisinin $x = (x_n)$ dizisine uygulanmasıyla dizinin aritmetik ortalaması elde edilir. Bu dönüşüme ileride bahsedilecek olan Cesàro ortalaması denir ve $(C,1)$ ile gösterilir. (2.6) eşitliği ile gösterilen Cesàro ortalaması, Tanım 2.12 de verilen (R, p_n) Riesz toplanabilme metodunun $\forall n \in N$ için $p_n = 1$ alınmasında elde edilen ve sembolik olarak $(C,1)$ ile gösterilen özel bir Riesz toplanabilme metodudur. Riesz toplanabilme metodunun analizdeki uygulaması oldukça geniştir.

1957 yılında Flett [1] tarafından α -ıncı mertebeden Cesàro toplanabilirlik kavramı verildikten sonra, 1969 yılında Das [2] tarafından mutlak toplanabilirlik kavramı verilmiştir.

Bu çalışmaya temel oluşturan alt üçgensel matrisler yardımıyla $|A|_k$ toplanabilirlik tanımı, 1979 yılında Tanovic-Miller [3] tarafından yapılmıştır.

Bu çalışmada ilk olarak toplanabilme çarpanları kullanılarak $|C,1|_k$ ve $|C,a|_k$ metotları için yeterli şartları inceleyen iki teorem ifade ve ispat edilmiştir. Daha sonraki bölümlerde $|R, p_n|_k$ ve $|R, q_n|_k$ toplanabilme metotlarının denklığı ile $|C,1|_k$ ve $|A|_k$ toplanabilme metotları arasındaki ilişkiyi inceleyen teoremler ifade ve ispat edilmiştir, bu metotlar ile ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir.

2. TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, konuyla ilgili olan bazı tanım, teorem ve gösterimler verilecektir.

Tanım 2.1. F reel veya kompleks sayıların bir cismi ve kısmi toplamlar dizisi (s_n) olan bir $\sum a_n$ serisi verilmiş olsun, $n, k = 0, 1, \dots$ için $a_{nk} \in F$ olmak üzere bir $A = (a_{nk})$ sonsuz matrisi verilsin. Bu takdirde (s_n) dizisinden (t_n) dizisine bir dönüşüm

$$t_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} s_k \quad (2.1)$$

olarak tanımlansın. (t_n) dizisine, (s_n) dizisinin A dönüşüm dizisi ve A matrisine diziden diziye bir dönüşüm denir. Bu dönüşümün var olması için (2.1) eşitliğindeki toplamın her n doğal sayısı için yakınsak olması gerekir [4].

Tanım 2.2. Bir $A = (a_{nk})$, $n, k = 1, 2, \dots$ matrisi verilmiş olsun. Eğer A matrisi yardımıyla oluşturulan dönüşüm yakınsak her diziye yakınsak bir diziye dönüştürüyor ve aynı zamanda limiti de koruyorsa, A matrisine regülerler denir [5]. Aşağıdaki teorem, verilen bir A matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şartları verir.

Teorem 2.3. Bir $A = (a_{nk})$ $n, k = 1, 2, \dots$ matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şartlar

$$\begin{aligned} (i) \quad & \forall k \text{ için } \lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = 0 \\ (ii) \quad & \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} = 1 \\ (iii) \quad & \forall n \text{ için } \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| \leq M \end{aligned} \quad (2.2)$$

olacak şekilde (n den bağımsız) bir M pozitif reel sayısının var olmasıdır [9]. Toplanabilme teorisinde çok önemli yer teşkil eden Teorem 2.3. Silverman- Toeplitz teoremi olarak bilinir.

Tanım 2.4. Reel ya da kompleks terimli bir $B = (b_{nk})$ sonsuz matrisi ve $\sum a_n$ serisi verilmiş olsun.

$$t_n = \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk} a_k \quad (2.3)$$

olacak şekilde tanımlanan (t_n) dizisine, $\sum a_n$ serisinin B dönüşüm dizisi denir ve B ye seriden diziye bir dönüşüm adı verilir. Bu dönüşümün tanımlı olması için (2.3) eşitliğindeki toplamın her n doğal sayısı için yakınsak olması gerekir [4].

Tanım 2.5. Reel ya da kompleks terimli bir $C = (c_{nk})$ sonsuz matrisi ve $\sum a_n$ serisi verilmiş olsun.

$$t_n = \sum_{k=0}^{\infty} c_{nk} a_k \quad (2.4)$$

mevcut ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_n = s \quad (2.5)$$

ise C ye seriden seriye dönüşüm, s sayısına da $\sum a_n$ serisinin C dönüşümü ile genelleştirilmiş toplamı denir [4].

Tanım 2.6. Kısmi toplam dizisi (s_n) olan bir $\sum a_n$ serisi verilmiş olsun. $\sum a_n$ serisinin veya (s_n) dizisinin matris elemanları

$$a_{nv} = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & v \leq n \text{ için} \\ 0, & v > n \text{ için} \end{cases} \quad (2.6)$$

ile verilen $A = (a_{nv})$ matrisi yardımıyla elde edilen (σ_n) dönüşüm dizisi

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{v=0}^n s_v \quad (2.7)$$

olarak tanımlansın. Bu şekilde tanımlanan ortalamaya Cesàro ortalaması veya kısaca $(C,1)$ ortalaması denir [9]. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = s \quad (2.8)$$

ise $\sum a_n$ serisi s değerine $(C,1)$ toplanabilir denir.

Tanım 2.7. (σ_n) , (2.7) eşitliğindeki gibi tanımlanmak üzere, eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\sigma_n - \sigma_{n-1}| < \infty \quad (2.9)$$

ise $\sum a_n$ serisi $|C,1|$ toplanabilirdir denir [8].

Tanım 2.8. $k \geq 1$ olmak üzere, eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} |\sigma_n - \sigma_{n-1}|^k < \infty \quad (2.10)$$

ise $\sum a_n$ serisi $|C,1|_k$ toplanabilirdir denir [1].

Özel olarak, (2.10) ifadesinde $k = 1$ alınırsa $|C,1|$ toplanabilme elde edilir.

Tanım 2.9. (s_n) , $\sum a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi olsun. $\alpha > -1$ bir reel sayı olmak üzere u_n^α ve t_n^α sırasıyla (s_n) ve (na_n) dizisinin α -ıncı mertebeden n -inci Cesàro ortalamasını gösterebilir. Yani

$$u_n^\alpha = \frac{1}{E_n^\alpha} \sum_{v=0}^n E_{n-v}^{\alpha-1} s_v \quad (2.11)$$

$$t_n^\alpha = \frac{1}{E_n^\alpha} \sum_{v=0}^n E_{n-v}^{\alpha-1} v a_v \quad (2.12)$$

olsun. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n^\alpha = s \quad (2.13)$$

ise $\sum a_n$ serisi s değerine (C, α) toplanabilirdir denir [6].

Burada;

$$\begin{aligned} \alpha > -1 \text{ için } E_n^\alpha &= \binom{n+\alpha}{n} = O(n^\alpha), \\ n > 0 \text{ için } E_{-n}^\alpha &= 0, \\ E_0^\alpha &= 1 \end{aligned} \quad (2.14)$$

dir. $|x| < 1$ olmak üzere

$$\frac{1}{(1-x)^\alpha} = \sum_{v=0}^{\infty} E_v^{\alpha-1} x^v \quad (2.15)$$

dir. $\alpha > -1$ ise

$$E_n^\alpha > 0 \text{ ve } E_n^\alpha \geq A(\alpha) n^\alpha \quad (2.16)$$

ve α bir reel sayı ise

$$|E_n^\alpha| \leq A(\alpha) n^\alpha \quad (2.17)$$

dir. Burada $A(\alpha)$, α ya bağlı pozitif bir sayıdır. Diğer taraftan a, β birer reel sayı ve n bir doğal sayı olmak üzere

$$E_n^{\alpha+\beta} = \sum_{v=0}^n E_{n-v}^{\alpha-1} E_v^{\beta} \quad (2.18)$$

ve $\alpha > -1$ ise

$$\frac{1}{nE_n^{\alpha}} = \int_0^1 (1-x)^{\alpha} x^{n-1} dx \quad (2.19)$$

özellikleri vardır [7].

Tanım 2.10. (u_n^{α}) , (2.11) eşitliğindeki gibi tanımlansın. $\alpha > -1$ olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n^{\alpha} - u_{n-1}^{\alpha}| < \infty \quad (2.20)$$

ise $\sum a_n$ serisi $|C, \alpha|$ toplanabilirdir denir [8].

Tanım 2.11. $k \geq 1$ olmak üzere, eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} |u_n^{\alpha} - u_{n-1}^{\alpha}|^k < \infty \quad (2.21)$$

ise $\sum a_n$ serisi $|C, \alpha|_k$ toplanabilirdir denir [1].

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |t_n^{\alpha}|^k < \infty \quad (2.22)$$

şeklinde yazılabilir.

Özel olarak, (2.21) ifadesinde $\alpha = 1$ alınırsa $|C, 1|_k$ toplanabilme elde edilir.

Aksi bir şey söylenmedikçe bu çalışmada baştan sona kadar (s_n) ile $\sum a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi ve (p_n) ile de

$$P_n = \sum_{v=0}^n p_v \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty, \quad (P_{-i} = p_{-i} = 0, \quad i \geq 1) \quad (2.23)$$

olacak şekilde pozitif sayıların bir dizisi gösterilecektir.

Tanım 2.12. (p_n) , (2.23) şartını sağlayacak şekilde pozitif sayıların bir dizisi olmak üzere (s_n) dizisinden (u_n) dizisine

$$u_n = \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^n p_v s_v \quad (2.24)$$

ile verilen dönüşüme Riesz ortalaması veya Riesz dönüşümü denir ve kısaca (R, p_n) şeklinde gösterilir [9].

Bu tanıma göre (R, p_n) dönüşümünün matris elemanları

$$a_{nv} = \begin{cases} \frac{p_v}{p_n}, & v \leq n \text{ için} \\ 0, & v > n \text{ için} \end{cases} \quad (2.25)$$

şeklinde ifade edilir [9].

Tanım 2.13. (u_n) , (2.24) eşitliğindeki gibi tanımlanmak üzere, eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = s \quad (2.26)$$

ise $\sum a_n$ serisi s değerine (R, p_n) toplanabilirdir denir [10].

Tanım 2.14. Kısmi toplam dizisi (s_n) olan bir $\sum a_n$ serisi ve bu serinin Riesz dönüşümü (u_n) ile verilmiş olsun. Eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n - u_{n-1}| < \infty \quad (2.27)$$

ise $\sum a_n$ serisi mutlak (R, p_n) veya kısaca $|R, p_n|$ toplanabilirdir denir [10].

Tanım 2.15. $k \geq 1$ olmak üzere, eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} |u_n^\alpha - u_{n-1}^\alpha|^k < \infty \quad (2.28)$$

ise $\sum a_n$ serisi k indisli mutlak (R, p_n) toplanabilir veya kısaca $|R, p_n|_k$ toplanabilirdir [11].

Özel olarak, (2.28) ifadesinde $k = 1$ alınırsa $|R, p_n|$ toplanabilme elde edilir.

Tanım 2.16. Kısmi toplam dizisi (s_n) olan bir $\sum a_n$ serisi verilmiş olsun. Ayrıca (s_n) dizisinin $A = (a_{nk})$ matrisi yardımıyla oluşturulan (t_n) dönüşüm dizisi (2.1) eşitliğindeki gibi tanımlansın. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = s \quad (2.29)$$

ise $\sum a_n$ serisine veya (s_n) dizisine s değerine A toplanabilir denir [9].

Tanım 2.17. Kısmi toplam dizisi (s_n) olan bir $\sum a_n$ serisi verilmiş olsun. (s_n) dizisinin $A = (a_{nk})$ matrisi yardımıyla verilen (t_n) dönüşüm dizisi (2.1) eşitliğindeki gibi tanımlansın. Eğer $(t_n) \in BV$ olduğunda $\sum a_n$ serisi $|A|$ toplanabilir ise $\sum a_n \in |A|$ veya $(s_n) \in |A|$ sembollerinden biriyle gösterilir [2].

Tanım 2.18. $A = (a_{nk})$ matrisinin esas köşegen üstünde kalan elemanları “0”, altında

kalan elemanlarından en az biri “0” dan farklı ise bu matrise alt üçgensel matris denir. Yani

$$A = (a_{nk}) = \begin{cases} \exists a_{nk} \neq 0, & n > k \text{ ise} \\ \forall a_{nk} = 0, & n < k \text{ ise} \end{cases} \quad (2.30)$$

şeklinde tanımlanan matrise alt üçgensel matris denir [12].

Tanım 2.19. Köşegen üzerindeki terimleri sıfırdan farklı olan üçgensel matrise normal matris denir.

Tanım 2.20. Kısmi toplamlar dizisi (s_n) olan bir $\sum a_n$ serisi verilmiş olsun. (s_n) dizisinin $A = (a_{nk})$ normal matrisi yardımıyla tanımlanan $(A_n(s))$ dönüşüm dizisi

$$A_n(s) = \sum_{k=0}^n a_{nk} s_k, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.31)$$

şeklinde olsun.

$$\bar{\Delta} A_n(s) = A_n(s) - A_{n-1}(s) \quad (2.32)$$

olmak üzere, $k \geq 1$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} |\bar{\Delta} A_n(s)|^k < \infty \quad (2.33)$$

ise $\sum a_n$ serisi $|A|_k$ toplanabilirdir denir [3].

Tanım 2.21. A ve B verilen iki toplanabilme metodu olsun. A toplanabilen her dizi, aynı değere B toplanabiliyor ise A ya B yi gerektiriyor denir ve $A \subseteq B$ ile gösterilir. Eğer $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ ise A metodu B metoduna denktir denir [9].

Tanım 2.22. $\sum a_n$ serisi verilmiş olsun. $\sum a_n \lambda_n$ serisi bir A toplanabilme metodu yardımıyla toplanabiliyor ise (λ_n) dizisine $\sum a_n$ serisinin A metodu için bir toplanabilme çarpanı denir [13].

Tanım 2.23. Kısmi toplamlar dizisi (s_n) olan bir $\sum a_n$ serisi verilmiş olsun. (s_n) dizisinin $A = (a_{nk})$ normal matrisi yardımıyla elde edilen $(A_n(s))$ dönüşüm dizisi (2.24) deki şekilde tanımlansın. Bu takdirde $k \geq 1$ olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_{nn}|)^{1-k} |A_n(s) - A_{n-1}(s)|^k < \infty \quad (2.34)$$

ise $\sum a_n$ serisi k indisli mutlak A toplanabilir veya kısaca $|A|_k$ toplanabilirdir denir [24].

Tanım 2.24. (Hölder Eşitsizliği)

$p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$, $b_1, b_2, \dots, b_n \geq 0$ olsun. Bu takdirde

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n b_k^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad (2.35)$$

dir [4].

Tanım 2.25. (Minkowski Eşitsizliği)

$p \geq 1$, $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$, $b_1, b_2, \dots, b_n \geq 0$ olsun. Bu takdirde

$$\left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.36)$$

dir [4].

Teorem 2.26. Eğer

$$\sum_{v=1}^n |s_v| = O(n), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.37)$$

ve (λ_n) sınırlı bir dizi olmak üzere

$$\sum_{n=1}^m |\Delta \lambda_n| = O(1) \quad (2.38)$$

$$\sum_{n=1}^m \frac{|\lambda_n|}{n} = O(1) \quad (2.39)$$

$$\sum_{n=1}^m n |\Delta^2 \lambda_n| = O(1), \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.40)$$

şartları sağlansın. Bu takdirde $\sum a_n \lambda_n$ serisi $|C, 1|$ toplanabilirdir [14].

Teorem 2.27. $k \geq 1$ olmak üzere (na_n) dizisinin n -inci $(C, 1)$ ortalaması (t_n^1) ile gösterilsin. Bu takdirde

$$\lambda_m = o(1) \quad (2.41)$$

$$\sum_{n=1}^m n \log n |\Delta^2 \lambda_n| = O(1) \quad (2.42)$$

$$\sum_{n=1}^m \frac{1}{n} |t_n^1| = O(\log m) \quad (2.43)$$

şartları sağlanıyorsa $\sum a_n \lambda_n$ serisi $|C, 1|_k$ toplanabilirdir [15].

Teorem 2.28. (p_n) ve (q_n) , $P_n \rightarrow \infty$ ve $Q_n \rightarrow \infty$ olacak şekilde pozitif sayı dizileri olsun. Bu takdirde

$$|R, p_n|_k \Rightarrow |R, q_n|_k \quad (2.44)$$

olması için

$$\frac{q_n}{Q_n} \leq K \frac{p_n}{P_n} \quad (2.45)$$

gereklidir[19].

Teorem 2.29. $k=1$ ve (p_n) ve (q_n) , $P_n \rightarrow \infty$ ve $Q_n \rightarrow \infty$ olacak şekilde pozitif sayı dizileri olsun. Bu takdirde

$$|R, p_n|_k \Rightarrow |R, q_n|_k \quad (2.46)$$

olması için

$$\frac{q_n P_n}{p_n Q_n} = O(1) \quad (2.47)$$

gerekli ve yeterlidir [19].

Teorem 2.30. $k \geq 1$ ve $\Delta \hat{a}_{nv} = \hat{a}_{nv} - \hat{a}_{n,v+1}$ olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} |\hat{a}_{n0}|^k < \infty \quad (2.48)$$

$$\sum_{v=1}^n |\Delta \hat{a}_{nv}| = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (2.49)$$

$$\sum_{n=v}^{\infty} |\Delta \hat{a}_{nv}| = O\left(\frac{1}{v}\right) \quad (2.50)$$

$$\sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{1}{v}\right) |\Delta \hat{a}_{nv}| = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (2.51)$$

$$\sum_{n=v}^{\infty} |\hat{a}_{nv}| = O(1) \quad (2.52)$$

şartları sağlansın. Bu takdirde $\sum a_n$ serisi $|C, 1|_k$ toplanabilir ise $|A|_k$ toplanabilirdir [20].

Teorem 2.31. $k \geq 1$ olsun. Ayrıca kabul edelim ki (p_n)

$$np_n = O(P_n) \quad (2.53)$$

$$P_n = O(np_n) \quad (2.54)$$

şartlarını sağlayacak şekilde pozitif sayıların bir dizisi olsun. Bu takdirde $\sum a_n$ serisi $|C, 1|_k$ toplanabilir ise $|R, p_n|_k$ toplanabilirdir. [21].

Lemma 2.32. $\alpha > -1$ ve $\alpha - \beta > 0$ olsun. Bu takdirde

$$\sum_{n=v}^{\infty} \frac{A_{n-v}^{\beta}}{n A_n^{\alpha}} = v^{-1} A_v^{\beta-\alpha+1} \quad (2.55)$$

dir [16].

Lemma 2.33. $\alpha \geq 1$ olsun. Ayrıca $\alpha \geq 1$ olduğunda, her $n \geq 1$ için $a_n \geq 0$ olmak üzere (na_n) dizisinin α -ıncı mertebeden n -inci Cesàro ortalaması t_n^{α} ile gösterilsin. Bu takdirde $n \geq v$ ise

$$\sum_{p=1}^v A_{n-p}^{\alpha-1} p a_p \leq A_{n-v}^{\alpha-1} A_v^{\alpha} |t_v^{\alpha}| \quad (2.56)$$

dir [17].

Lemma 2.34. $k \geq 1$, $\alpha \geq 1$, (na_n) dizisinin α -ıncı mertebeden n -inci Cesàro ortalaması t_n^{α} ile gösterilsin. Ayrıca $a > 1$ olduğunda her $n \geq 1$ için $a_n \geq 0$ olmak üzere

$$\sum_{n=1}^m n^{\alpha} |\Delta^2 \lambda_n| \log n = O(1) \quad (2.57)$$

$$\sum_{n=1}^m |\Delta(n^{\alpha})| |\Delta \lambda_{n+1}| \log n = O(1) \quad (2.58)$$

$$\sum_{n=1}^m \frac{1}{n} |t_n^{\alpha}|^k = O(\log m), \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.59)$$

şartları sağlansın. Bu takdirde

$$n^{\alpha} |\Delta \lambda_n| \log n = O(1) \quad (2.60)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta \lambda_n| \log n < \infty \quad (2.61)$$

$$|\lambda_n| \log n = O(1), \quad n=1, 2, \dots \quad (2.62)$$

elde edilir [18].

Lemma 2.35. $k \geq 1$ ve $A = (a_{nv})$ sonsuz bir matris olsun. Bu takdirde $A \in (l^k; l^k)$ olması için

$$a_{nv} = O(1) \quad (\forall n, v) \quad (2.63)$$

gereklidir [11].

3. SONSUZ SERİLERİN MUTLAK CESÀRO TOPLANABİLME ÇARPANLARI

Bu bölümde $|C,1|_k$ toplanabilme çarpanlarıyla ilgili bir teorem, daha sonra da bu teoremin genelleştirilmesi olan $|C,\alpha|_k$ toplanabilme çarpanları ile ilgili bir başka teorem ifade ve ispat edilecektir.

Teorem 3.1. $k \geq 1$ ve (λ_n) sınırlı bir dizi olsun. Kabul edelim ki Teorem 2.26 daki (2.38) -(2.40) şartları ve

$$\sum_{v=1}^n |s_v|^k = O(n), \quad n=1,2,\dots \quad (3.1)$$

sağlansın. Bu takdirde $\sum a_n \lambda_n$ serisi $|C,1|_k$ toplanabilirdir.

İspat: $(na_n \lambda_n)$ dizisinin 1-inci mertebeden n -inci Cesàro ortalaması T_n ile gösterilsin. Bu takdirde

$$T_n = \frac{1}{n+1} \sum_{v=1}^n v a_v \lambda_v \quad (3.2)$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{n+1} \sum_{v=1}^n a_v v \lambda_v \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{v=1}^{n-1} \Delta(v \lambda_v) s_v + \frac{n \lambda_n s_n}{n+1} \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{v=1}^{n-1} v \Delta \lambda_v s_v - \frac{1}{n+1} \sum_{v=1}^{n-1} \lambda_{v+1} s_v + \frac{n \lambda_n s_n}{n+1} \\ &= T_{n,1} + T_{n,2} + T_{n,3} \end{aligned}$$

bulunur. Teoremi ispat etmek için

$$|T_{n,1} + T_{n,2} + T_{n,3}|^k \leq 3^k \left(|T_{n,1}|^k + |T_{n,2}|^k + |T_{n,3}|^k \right) \quad (3.3)$$

eşitsizliğinden yararlanarak $r=1, 2, 3$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |T_{n,r}|^k < \infty \quad (3.4)$$

olduğunu göstermek yeterlidir. İlk olarak $r=1$ için

$$\begin{aligned} |T_{n,1}|^k &= \left\{ \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=1}^{n-1} \nu |s_\nu| |\Delta \lambda_\nu| \right\}^k \\ &= \frac{1}{(n+1)^k} \left\{ \sum_{\nu=1}^{n-1} \nu |s_\nu| |\Delta \lambda_\nu| \right\}^k \leq \frac{1}{n^k} \left\{ \sum_{\nu=1}^{n-1} \nu |s_\nu| |\Delta \lambda_\nu| \right\}^k \end{aligned}$$

olduğundan dolayı

$$\sum_{n=2}^{m+1} \frac{1}{n} |T_{n,1}|^k \leq \sum_{n=2}^{m+1} \frac{1}{n^{k+1}} \left\{ \sum_{\nu=1}^{n-1} \nu |s_\nu| |\Delta \lambda_\nu| \right\}^k$$

elde edilir. Burada Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{m+1} \frac{1}{n} |T_{n,1}|^k &\leq \sum_{n=2}^{m+1} \frac{1}{n^{k+1}} \left(\sum_{\nu=1}^{n-1} \nu |s_\nu|^k |\Delta \lambda_\nu| \right) \left(\sum_{\nu=1}^{n-1} \nu |\Delta \lambda_\nu| \right)^{k-1} \\ &\leq \sum_{n=2}^{m+1} \frac{1}{n^2} \left(\sum_{\nu=1}^{n-1} \nu |s_\nu|^k |\Delta \lambda_\nu| \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n-1} \nu |\Delta \lambda_\nu| \right)^{k-1} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada (2.38) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^n \nu |\Delta \lambda_\nu| &\leq n \sum_{\nu=1}^n |\Delta \lambda_\nu| \\ \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n \nu |\Delta \lambda_\nu| &\leq \sum_{\nu=1}^n |\Delta \lambda_\nu| = O(1), \quad n=1,2,\dots \end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan (2.40) ve (3.1) eşitliklerinden dolayı

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{m+1} \frac{1}{n} |T_{n,1}|^k &= O(1) \left(\sum_{\nu=1}^m \nu |s_\nu|^k |\Delta \lambda_\nu| \sum_{n=\nu+1}^{m+1} \frac{1}{n^2} \right) \\ &= O(1) \sum_{\nu=1}^m \left(|s_\nu|^k |\Delta \lambda_\nu| \right) \\ &= O(1) \left\{ \sum_{\nu=1}^{m-1} \Delta(|\Delta \lambda_\nu|) \sum_{r=1}^{\nu} |s_r|^k \right\} + O(1) \left\{ |\Delta \lambda_m| \sum_{\nu=1}^m |s_\nu|^k \right\} \\ &= O(1) \left\{ \sum_{\nu=1}^{m-1} \nu |\Delta^2 \lambda_\nu| \right\} + O(1) \{ m |\Delta \lambda_m| \} \\ &= O(1), m=1,2,\dots \end{aligned}$$

bulunur. Daha sonra $r=2$ için

$$|T_{n,2}|^k = \left\{ \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=1}^{n-1} |s_\nu| |\lambda_{\nu+1}| \right\}^k = \frac{1}{(n+1)^k} \left\{ \sum_{\nu=1}^{n-1} |s_\nu| |\lambda_{\nu+1}| \right\}^k \leq \frac{1}{n^k} \left\{ \sum_{\nu=1}^{n-1} |s_\nu| |\lambda_{\nu+1}| \right\}^k$$

olduğundan dolayı

$$\sum_{n=2}^{m+1} \frac{1}{n} |T_{n,2}|^k \leq \sum_{n=2}^{m+1} \frac{1}{n^{k+1}} \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} |s_v| |\lambda_{v+1}| \right\}^k$$

bulunur. Hölder eşitsizliği ve Teorem 2.26 dan

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{m+1} \frac{1}{n} |T_{n,2}|^k &\leq \sum_{n=2}^{m+1} \frac{1}{n^2} \sum_{v=1}^{n-1} |s_v|^k |\lambda_{v+1}|^k \left\{ \frac{1}{n} \sum_{v=1}^{n-1} 1 \right\}^{k-1} \\ &= O(1) \sum_{v=1}^m |s_v|^k |\lambda_{v+1}|^k \sum_{n=v+1}^{m+1} \frac{1}{n^2} \\ &= O(1) \sum_{v=1}^m |s_v|^k |\lambda_{v+1}|^{k-1} \frac{|\lambda_{v+1}|}{v} \\ &= O(1) \sum_{v=1}^m |s_v|^k \frac{|\lambda_{v+1}|}{v} \\ &= O(1) \left\{ \sum_{v=1}^{m-1} \Delta \left(\frac{|\lambda_v|}{v} \right) \sum_{r=1}^v |s_r|^k + \frac{|\lambda_m|}{m} \sum_{v=1}^m |s_v|^k \right\} \\ &= O(1) \sum_{v=1}^{m-1} |\Delta \lambda_v| + O(1) \sum_{v=1}^{m-1} \frac{|\lambda_{v+1}|}{v} + O(1) |\lambda_m| \\ &= O(1), m=1, 2, \dots \end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak $r = 3$ için

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m \frac{1}{n} |T_{n,3}|^k &= O(1) \sum_{n=1}^m \frac{1}{n} |\lambda_n|^{k-1} |\lambda_n| |s_n|^k \\ &= O(1) \sum_{n=1}^m \frac{|\lambda_n|}{n} |s_n|^k \\ &= O(1) \sum_{n=1}^{m-1} |\Delta \lambda_n| + O(1) \sum_{n=1}^{m-1} \frac{|\lambda_{n+1}|}{n} + O(1) |\lambda_m| \\ &= O(1), m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.2. $k \geq 1$ ve $\alpha \geq 1$ olmak üzere (na_n) dizisinin α -ıncı mertebeden n -inci Cesàro ortalaması t_n^α ile gösterilsin. Ayrıca $\alpha > 1$ olduğunda her $n \geq 1$ için $a_n \geq 0$ olsun. Kabul edelim ki Teorem 2.27 deki (2.41) şartı ve

$$\sum_{n=1}^m n^\alpha |\Delta^2 \lambda_n| \log n = O(1) \quad (3.5)$$

$$\sum_{n=1}^m \left| \Delta(n^\alpha) \right| |\Delta \lambda_{n+1}| \log n = O(1) \quad (3.6)$$

$$\sum_{n=1}^m \frac{1}{n} \left| t_n^\alpha \right|^k = O(\log m), \quad m=1,2,\dots \quad (3.7)$$

şartları sağlansın. Bu takdirde $\sum a_n \lambda_n$ serisi $|C, \alpha|_k$ toplanabilir.

İspat: $(na_n \lambda_n)$ dizisinin 1 -inci mertebeden n -inci Cesàro ortalaması T_n ile gösterilsin. Bu takdirde

$$T_n^\alpha = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{v=1}^n A_{n-v}^{\alpha-1} v a_v \lambda_v \quad (3.8)$$

dir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} T_n^\alpha &= \frac{1}{A_n^\alpha} \left\{ \sum_{v=1}^n A_{n-v}^{\alpha-1} v a_v \lambda_v \right\} \\ &= \frac{1}{A_n^\alpha} \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} \Delta \lambda_v \sum_{p=1}^v A_{n-p}^{\alpha-1} p a_p + \lambda_n \sum_{v=1}^n A_{n-v}^{\alpha-1} v a_v \right\} \\ &= \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{v=1}^{n-1} \Delta \lambda_v \sum_{p=1}^v A_{n-p}^{\alpha-1} p a_p + \lambda_n t_n^\alpha \\ &= T_{n,1}^\alpha + T_{n,2}^\alpha \end{aligned}$$

elde edilir. Teoremi ispat etmek için

$$\left| T_{n,1}^\alpha + T_{n,2}^\alpha \right|^k \leq 2^k \left(\left| T_{n,1}^\alpha \right|^k + \left| T_{n,2}^\alpha \right|^k \right) \quad (3.9)$$

eşitsizliğinden yararlanarak $r = 1, 2$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left| T_{n,r}^\alpha \right|^k < \infty \quad (3.10)$$

olduğunu göstermek yeterlidir. İlk olarak $r = 1$ için

$$\sum_{n=2}^{m+1} \frac{1}{n} \left| T_{n,1}^\alpha \right|^k = \sum_{n=2}^{m+1} \frac{1}{n} \frac{1}{\left(A_n^\alpha \right)^k} \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} \Delta \lambda_v \sum_{p=1}^v A_{n-p}^{\alpha-1} p a_p \right\}^k$$

dir. Diğer taraftan Lemma 2.33 deki (2.56) eşitsizliğinden dolayı

$$\sum_{n=2}^{m+1} \frac{1}{n} \left| T_{n,1}^\alpha \right|^k \leq \sum_{n=2}^{m+1} \frac{1}{n \left(A_n^\alpha \right)^k} \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} \left| \Delta \lambda_v \right| A_{n-v}^{\alpha-1} A_v^\alpha \left| t_v^\alpha \right| \right\}^k$$

bulunur. Hölder eşitsizliğinden dolayı

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} \frac{1}{n} |T_{n,1}^\alpha|^k &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{1}{n(A_n^\alpha)^k} \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} v^\alpha |\Delta \lambda_v| A_{n-v}^{\alpha-1} |t_v^\alpha| \right\}^k \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{1}{n(A_n^\alpha)^k} \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} (v^\alpha |\Delta \lambda_v|)^k A_{n-v}^{\alpha-1} |t_v^\alpha|^k \right\} \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} A_{n-v}^{\alpha-1} \right\}^{k-1} \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{1}{n(A_n^\alpha)} \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} (v^\alpha |\Delta \lambda_v|)^k A_{n-v}^{\alpha-1} |t_v^\alpha|^k \right\} \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} \frac{A_{n-v}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha} \right\}^{k-1} \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{1}{n A_n^\alpha} \sum_{v=1}^{n-1} (v^\alpha |\Delta \lambda_v|)^{k-1} (v^\alpha |\Delta \lambda_v|) A_{n-v}^{\alpha-1} |t_v^\alpha|^k \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m v^\alpha |\Delta \lambda_v| |t_v^\alpha|^k \sum_{n=v}^{\infty} \frac{A_{n-v}^{\alpha-1}}{n A_n^\alpha}
\end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 2.32 teki (2.55) eşitliğinde β yerine $\alpha - 1$ alınırsa

$$\sum_{n=v}^{\infty} \frac{A_{n-v}^{\alpha-1}}{n A_n^\alpha} = v^{-1} \quad (3.11)$$

bulunur. Bu takdirde (3.5), (3.6) ve Lemma 2.34 teki (2.60) eşitliğinden dolayı

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} \frac{1}{n} |T_{n,1}^\alpha|^k &= O(1) \sum_{v=1}^m v^\alpha |\Delta \lambda_v| |t_v^\alpha|^k \frac{1}{v} \\
&= O(1) \sum_{v=1}^{m-1} \Delta(v^\alpha |\Delta \lambda_v|) \sum_{p=1}^v \frac{1}{p} |t_p^\alpha|^k + O(1) m^\alpha |\Delta \lambda_m| \sum_{v=1}^m |t_v^\alpha|^k \frac{1}{v} \\
&= O(1) \sum_{v=1}^{m-1} \left| \Delta(v^\alpha |\Delta \lambda_v|) \right| \log v + O(1) m^\alpha |\Delta \lambda_m| \log m \\
&\quad + O(1) m^\alpha |\Delta \lambda_m| \log m \\
&= O(1), \quad m=1,2,\dots
\end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak $r=2$ için Teorem 2.27 deki (2.41) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^m \frac{1}{n} |T_{n,2}^\alpha|^k &= \sum_{n=1}^m \frac{1}{n} |\lambda_n|^k |t_n^\alpha|^k \\
&= \sum_{n=1}^m \frac{1}{n} |\lambda_n|^{k-1} |\lambda_n| |t_n^\alpha|^k \\
&= O(1) \sum_{n=1}^m |\lambda_n| \frac{1}{n} |t_n^\alpha|^k
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca Lemma 2.34 teki (2.61) ve (2.62) şartlarından ve (3.7) eşitliğinden dolayı

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^m \frac{1}{n} |T_{n,2}^\alpha|^k &= O(1) \sum_{n=1}^{m-1} \Delta |\lambda_n| \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} |t_p^\alpha|^k + O(1) |\lambda_m| \sum_{n=1}^m \frac{1}{n} |t_n^\alpha|^k \\
&= O(1) \sum_{n=1}^m |\Delta \lambda_n| \log n + O(1) |\lambda_m| \log m \\
&= O(1), \quad m=1,2,\dots
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.



4. TOPLANABİLME METOTLARININ DENKLİĞİ

Bu bölümde, ilk olarak $|R, p_n|_k$ ve $|R, q_n|_k$ toplanabilme metotlarının denkleğini veren bir teorem daha sonra da $|R, p_n|_k$ ve $|R, q_n|_k$ toplanabilme metotları arasındaki ilişki ile ilgili bir başka teorem ifade ve ispat edilecektir.

Teorem 4.1. $k \geq 1$ olmak üzere

$$nq_n = O(Q_n) \quad (4.1)$$

$$P_n = O(np_n) \quad (4.2)$$

$$Q_n = O(nq_n) \quad (4.3)$$

şartları sağlansın. Bu takdirde $\sum a_n$ serisi $|R, p_n|_k$ toplanabilir ise $|R, q_n|_k$ toplanabildir.

İspat: $k \geq 1$ ve $\sum a_n$ serisi $|R, p_n|_k$ toplanabilir olsun. Bu durumda

$$T_n = \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^n p_v s_v \quad (4.4)$$

ve

$$s_v = a_0 + a_1 + \dots + a_n \quad (4.5)$$

olduğunda Tanım 2.15 ten dolayı

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} |T_n - T_{n-1}|^k < \infty \quad (4.6)$$

dir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^n p_v s_v \\ &= \frac{1}{P_n} \{ p_0 a_0 + (p_1 a_0 + p_1 a_1) + (p_2 a_0 + p_2 a_1 + p_2 a_2) + \dots + (p_n a_0 + p_n a_1 + \dots + p_n a_n) \} \\ &= \frac{1}{P_n} \{ a_0 (p_0 + p_1 + \dots + p_n) + a_1 (p_1 + p_2 + \dots + p_n) + \dots + a_n p_n \} \\ &= \frac{1}{P_n} \{ a_0 P_n + a_1 (P_n - P_0) + \dots + a_n (P_n - P_{n-1}) \} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^n (P_n - P_{v-1}) a_v$$

bulunur. Burada $T_n - T_{n-1}$ farkını oluşturursak

$$\begin{aligned} \Delta T_{n-1} &= T_n - T_{n-1} \\ &= \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^n a_v (P_n - P_{v-1}) - \frac{1}{P_{n-1}} \sum_{v=0}^{n-1} a_v (P_{n-1} - P_{v-1}) \\ &= \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^n a_v (P_n - P_{v-1}) - \frac{1}{P_{n-1}} \sum_{v=0}^{n-1} a_v (P_{n-1} - P_{v-1}) \\ &= \sum_{v=0}^n a_v \left\{ \frac{P_n P_{n-1} - P_{n-1} P_{v-1} - P_n P_{n-1} + P_n P_{v-1}}{P_n P_{n-1}} \right\} \\ &= \sum_{v=0}^n a_v P_{v-1} \left(\frac{P_n - P_{n-1}}{P_n P_{n-1}} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\Delta T_{n-1} = \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=0}^n a_v P_{v-1} \quad (4.7)$$

bulunur. (4.7) eşitliğinde n yerine $n-1$ alınırsa

$$\Delta T_{n-2} = \frac{P_{n-1}}{P_{n-1} P_{n-2}} \sum_{v=0}^{n-1} a_v P_{v-1} \quad (4.8)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{a_n P_{n-1}}{P_{n-1}} + \frac{1}{P_{n-1}} \sum_{v=0}^{n-1} a_v P_{v-1} - \frac{1}{P_{n-1}} \sum_{v=0}^{n-1} a_v P_{v-1} \\ &= \frac{1}{P_{n-1}} \sum_{v=0}^n a_v P_{v-1} - \frac{1}{P_{n-1}} \sum_{v=0}^{n-1} a_v P_{v-1} \\ &= \frac{P_n}{P_n} \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=0}^n a_v P_{v-1} - \frac{P_{n-2}}{P_{n-1}} \frac{P_{n-1}}{P_{n-1} P_{n-2}} \sum_{v=0}^{n-1} a_v P_{v-1} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$a_n = \frac{P_n}{P_n} \Delta T_{n-1} - \frac{P_{n-2}}{P_{n-1}} \Delta T_{n-2} \quad (4.9)$$

elde edilir. Benzer olarak

$$t_n = \frac{1}{Q_n} \sum_{v=0}^n q_v s_v = \frac{1}{Q_n} \sum_{v=0}^n (Q_n - Q_{v-1}) a_v \quad (4.10)$$

olduğundan dolayı

$$\Delta t_{n-1} = \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^n Q_{v-1} a_v \quad (4.11)$$

bulunur. (4.9) eşitliğinde elde edilen a_v değeri (4.11) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \Delta t_{n-1} &= \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^n Q_{v-1} \left\{ \frac{P_v}{p_v} \Delta T_{v-1} - \frac{P_{v-2}}{p_{v-1}} \Delta T_{v-2} \right\} \\ &= \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \left\{ \sum_{v=1}^n Q_{v-1} \frac{P_v}{p_v} \Delta T_{v-1} - \sum_{v=1}^n Q_{v-1} \frac{P_{v-2}}{p_{v-1}} \Delta T_{v-2} \right\} \\ &= \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \left\{ \sum_{v=1}^n Q_{v-1} \frac{P_v}{p_v} \Delta T_{v-1} - \sum_{v=0}^{n-1} Q_v \frac{P_{v-1}}{p_v} \Delta T_{v-1} \right\} \\ &= \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \left\{ \sum_{v=1}^n Q_{v-1} \frac{P_v}{p_v} \Delta T_{v-1} - \sum_{v=1}^{n-1} Q_v \frac{P_{v-1}}{p_v} \Delta T_{v-1} \right\} \\ &= \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} Q_{n-1} \frac{P_n}{p_n} \Delta T_{n-1} + \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} \frac{\Delta T_{v-1}}{p_v} (Q_{v-1} P_v - Q_v P_{v-1}) \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} Q_{v-1} P_v - Q_v P_{v-1} &= Q_{v-1} P_v - Q_v (P_v - p_v) \\ &= -q_v P_v + Q_v p_v \end{aligned}$$

olduğundan dolayı

$$\begin{aligned} \Delta t_{n-1} &= \frac{q_n P_n}{Q_n p_n} \Delta T_{n-1} + \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} \frac{\Delta T_{v-1}}{p_v} (-q_v P_v + Q_v p_v) \\ &= \frac{q_n P_n}{Q_n p_n} \Delta T_{n-1} - \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} \frac{P_v}{p_v} q_v \Delta T_{v-1} + \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} Q_v \Delta T_{v-1} \\ &= w_{n,1} + w_{n,2} + w_{n,3} \end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda teoremi ispat etmek için $k \geq 1$ olmak üzere

$$|w_{n,1} + w_{n,2} + w_{n,3}|^k \leq 3^k \left(|w_{n,1}|^k + |w_{n,2}|^k + |w_{n,3}|^k \right) \quad (4.12)$$

eşitsizliğinden yararlanarak $r=1, 2, 3$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} |w_{n,r}|^k < \infty \quad (4.13)$$

olduğunu göstermek yeterlidir. İlk olarak $r=1$ için (4.1) ve (4.2) şartlarından dolayı

$$|w_{n,1}|^k \leq \left(\frac{q_n P_n}{Q_n p_n} \right)^k |\Delta T_{n-1}|^k = O \left\{ \left(\frac{n q_n}{Q_n} \right)^k |\Delta T_{n-1}|^k \right\}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} |w_{n,1}|^k = O \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} |\Delta T_{n-1}|^k \right\} < \infty$$

bulunur. $r = 2$ için (4.1) şartı ve Hölder eşitsizliğinden dolayı

$$\begin{aligned} |w_{n,2}|^k &\leq \left(\frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \right)^k \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^k (q_v)^k |\Delta T_{v-1}|^k \right\} \\ &= \left(\frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \right)^k \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^k q_v |\Delta T_{v-1}|^k \right\} \left(\sum_{v=1}^{n-1} q_v \right)^{k-1} \\ &= \left(\frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \right) \left(\frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \right)^{k-1} (Q_{n-1})^{k-1} \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^k q_v |\Delta T_{v-1}|^k \right\} \\ &= O \left\{ \frac{1}{n^{k-1}} \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^k q_v |\Delta T_{v-1}|^k \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada (4.1) ve (4.2) şartları kullanılarak

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} |w_{n,2}|^k &= O \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^n \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^k q_v |\Delta T_{v-1}|^k \right\} \\ &= O \left\{ \sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^k q_v |\Delta T_{v-1}|^k \sum_{n=v}^{\infty} \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \right\} \\ &= O \left\{ \sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^k q_v |\Delta T_{v-1}|^k \frac{1}{Q_v} \right\} \\ &= O \left\{ \sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^k \frac{q_v}{Q_v} |\Delta T_{v-1}|^k \right\} \\ &= O \left\{ \sum_{v=1}^{\infty} v^{k-1} |\Delta T_{v-1}|^k \right\} < \infty \end{aligned}$$

bulunur. Son olarak $r = 3$ için Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} |w_{n,3}|^k &\leq \left(\frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} \frac{Q_v}{q_v} q_v |\Delta T_{v-1}| \right)^k \\ &= O \left(\frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \right)^k \left(\sum_{v=1}^{n-1} \left(\frac{Q_v}{q_v} \right)^k q_v |\Delta T_{v-1}|^k \right) \left(\sum_{v=1}^{n-1} q_v \right)^k \\ &= O \left\{ \frac{1}{n^{k-1}} \frac{q_n}{Q_n} \frac{1}{Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} \left(\frac{Q_v}{q_v} \right)^k q_v |\Delta T_{v-1}|^k \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada (4.3) şartından dolayı

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} |w_{n,3}|^k &= O \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} \left(\frac{Q_v}{q_v} \right)^k q_v |\Delta T_{v-1}|^k \right\} \\
&= O \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} \left(\frac{Q_v}{q_v} \right)^k q_v |\Delta T_{v-1}|^k \sum_{n=v}^{\infty} \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \right\} \\
&= O \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} \left(\frac{Q_v}{q_v} \right)^k \frac{q_v}{Q_v} |\Delta T_{v-1}|^k \right\} \\
&= O \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} v^{k-1} |\Delta T_{v-1}|^k \right\} < \infty
\end{aligned}$$

bulunur. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 4.2. $k \geq 1$ olsun. (p_n) ve (q_n) ;

$$P_n = \sum_{v=0}^n p_v \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty \quad (4.14)$$

$$Q_n = \sum_{v=0}^n q_v \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty \quad (4.15)$$

olacak şekilde iki pozitif sayı dizisi olsun. Bu takdirde

$$|R, p_n|_k \Rightarrow |R, q_n|_k \quad (4.16)$$

olması için

$$\frac{q_n P_n}{p_n Q_n} = O(1) \quad (4.17)$$

şartının sağlanması gereklidir. Diğer taraftan

$$\sum_{n=v}^{\infty} \frac{n^{k-1} q_n^k}{Q_n^k Q_{n-1}} = O \left\{ \frac{v^{k-1} q_v^{k-1}}{Q_v^k} \right\} \quad (4.18)$$

şartı da sağlanıyorsa (4.17) şartı aynı zamanda yeterlidir.

İspat: $k = 1$ için

$$\begin{aligned}
\sum_{n=v}^{\infty} \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} &= \sum_{n=v}^{\infty} \left\{ \frac{1}{Q_{n-1}} - \frac{1}{Q_n} \right\} = \frac{1}{Q_{v-1}} \\
\sum_{n=v}^{\infty} \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} &= O \left(\frac{1}{Q_v} \right)
\end{aligned}$$

bulunur.

Gereklilik: $n \geq 1$, $\sum a_n$ serisinin, (R, p_n) dönüşüm serisi $\sum b_n$ ile (R, q_n) dönüşüm serisi $\sum c_n$ ile gösterilsin. Bu durumda

$$b_n = \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^n P_{v-1} a_v \quad (4.19)$$

ve

$$c_n = \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^n Q_{v-1} a_v \quad (4.20)$$

dir. Burada (4.19) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^n P_{v-1} a_v = \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \left\{ P_{n-1} a_n + \sum_{v=1}^{n-1} P_{v-1} a_v \right\} \\ \sum_{v=1}^{n-1} P_{v-1} a_v &= b_n \frac{P_n P_{n-1}}{p_n} - P_{n-1} a_n \end{aligned} \quad (4.21)$$

bulunur. Ayrıca (4.19) eşitliğinden dolayı

$$\sum_{v=1}^{n-1} P_{v-1} a_v = b_{n-1} \frac{P_{n-1} P_{n-2}}{p_{n-1}} \quad (4.22)$$

elde edilir. Bu son ifade (4.21) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} P_{n-1} a_n &= b_n \frac{P_n P_{n-1}}{p_n} - b_{n-1} \frac{P_{n-1} P_{n-2}}{p_{n-1}} \\ a_n &= \frac{P_n}{p_n} b_n - \frac{P_{n-2}}{p_{n-1}} b_{n-1} \end{aligned} \quad (4.23)$$

bulunur. Son olarak (4.23) ifadesi (4.20) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^n Q_{v-1} \left\{ \frac{P_v}{p_v} b_v - \frac{P_{v-2}}{p_{v-1}} b_{v-1} \right\} \\ &= \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \left\{ \sum_{v=1}^n Q_{v-1} \frac{P_v}{p_v} b_v - \sum_{v=1}^{n-1} Q_{v-1} \frac{P_{v-2}}{p_{v-1}} b_{v-1} \right\} \\ &= \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \left\{ Q_{n-1} \frac{P_n}{p_n} b_n + \sum_{v=1}^n Q_{v-1} \frac{P_v}{p_v} b_v - \sum_{v=0}^{n-1} Q_v \frac{P_{v-1}}{p_v} b_v \right\} \\ &= \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} Q_{n-1} \frac{P_n}{p_n} b_n + \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} \frac{b_v}{p_v} (Q_{v-1} P_v - P_{v-1} Q_v) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$c_n = \frac{q_n P_n}{Q_n p_n} b_n + \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} \frac{b_v}{p_v} (Q_{v-1} P_v - P_{v-1} Q_v) \quad (4.24)$$

bulunur. Burada $a_{nv} = O(1)$ olduğunu kullanarak $\left(n^{\frac{1}{k}} b_n \right)$ dizisinden $\left(n^{\frac{1}{k}} c_n \right)$

dizisine bir matris dönüşümü yazılırsa bu matris $(\ell^k; \ell^k)$ uzayının bir elemanıdır. Böylece Lemma 2.35 ten dolayı bu matris elemanları sınırlı olmalıdır. Bu durumda, elde edilen matrisin köşegen elemanları da sınırlı olacağından (4.17) şartı, (4.16) şartı için gereklidir.

Yeterlilik:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} \frac{b_v}{p_v} (Q_{v-1} P_v - P_{v-1} Q_v) + \frac{q_n P_n}{Q_n p_n} b_n \\ &= c_{n,1} + c_{n,2} \end{aligned}$$

olmak üzere kabul edelim ki (4.17) ve (4.18) şartları sağlansın. Bu takdirde teoremin ispatı için

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} |b_n|^k < \infty \quad (4.25)$$

olduğu gösterilmelidir. Buna göre $r = 1, 2$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} |c_{n,r}|^k < \infty \quad (4.26)$$

olduğunun gösterilmesi yeterlidir. $k > 1$ olmak üzere ilk olarak $r=1$ için

$$|c_{n,1}|^k = \frac{q_n^k}{Q_n^k Q_{n-1}^k} \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} \frac{|b_v|}{p_v} (Q_{v-1} P_v - P_{v-1} Q_v) \right\}^k \quad (4.27)$$

dir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} Q_{v-1} P_v - P_{v-1} Q_v &= (Q_v - q_v) P_v - (P_v - p_v) Q_v \\ &= -P_v q_v + Q_v p_v \\ &= O(p_v Q_v) \end{aligned} \quad (4.28)$$

bulunur. (4.28) ifadesinden dolayı

$$|c_{n,1}|^k = O(1) \frac{q_n^k}{Q_n^k Q_{n-1}^k} \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} \frac{|b_v|}{p_v} p_v Q_v \right\}^k$$

elde edilir. Hölder eşitsizliği ve (4.18) şartından dolayı

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} |c_{n,1}|^k = O(1) \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} \frac{q_n^k}{Q_n^k Q_{n-1}^k} \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} \frac{|b_v|}{p_v} p_v Q_v \right\}^k$$

$$\begin{aligned}
&= O(1) \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} \frac{q_n^k}{Q_n^k Q_{n-1}^k} \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} |b_v| Q_v \right\}^k \\
&= O(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{k-1} q_n^k}{Q_n^k Q_{n-1}^k} \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} |b_v|^k q_v \left(\frac{Q_v}{q_v} \right)^k \right\} \left\{ \frac{1}{Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} q_v \right\}^{k-1} \\
&= O(1) \sum_{n=1}^{\infty} |b_v|^k q_v \left(\frac{Q_v}{q_v} \right)^k \sum_{n=v}^{\infty} \frac{n^{k-1} q_n^k}{Q_n^k Q_{n-1}^k} \\
&= O(1) \sum_{n=1}^{\infty} |b_v|^k q_v \left(\frac{Q_v}{q_v} \right)^k \frac{v^{k-1} q_v^{k-1}}{Q_v^k}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda (4.25) ifadesinden dolayı

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} |c_{n,1}|^k = O(1) \sum_{n=1}^{\infty} |b_v|^k v^{k-1} < \infty \quad (4.29)$$

bulunur. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

5. SONSUZ SERİLERİN MUTLAK TOPLANABİLİRLİĞİ

Bu bölümde ilk olarak $|C,1|_k$ toplanabilen bir serinin $|A|_k$ toplanabilmesi için gerekli şartları veren bir teorem daha sonra da $|A|_k$ toplanabilen bir serinin $|C,1|_k$ toplanabilmesi için gerekli şartları veren bir başka teorem ifade ve ispat edilecektir.

Bir $A=(a_{nv})$ normal matrisi verilsin. Bu durumda $\bar{A}=(\bar{a}_{nv})$ ve $\hat{A}=(\hat{a}_{nv})$ alt üçgensel matrisleri

$$\bar{a}_{nv} = \sum_{i=v}^n a_{ni}, \quad n, v = 0, 1, 2, \dots \quad (5.1)$$

ve

$$\begin{aligned} \hat{a}_{00} &= \bar{a}_{00} = a_{00} \\ \hat{a}_{nv} &= \bar{a}_{nv} - \bar{a}_{n-1,v}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5.2)$$

şeklinde tanımlanır.

A bir normal matris ise $\hat{A}=(\hat{a}_{nv})$ matrisi de normaldir aynı zamanda normal olan çift taraflı $\hat{A}'=(\hat{a}'_{nv})$ ters matrisine sahiptir [25].

A matrisi normal ise

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{v=0}^n a_{nv} s_v = \sum_{v=0}^n a_{nv} \sum_{i=0}^v x_i \\ &= \sum_{i=0}^n x_i \sum_{v=i}^n a_{nv} = \sum_{i=0}^n x_i \bar{a}_{ni} = \sum_{v=0}^n \bar{a}_{nv} x_v \end{aligned} \quad (5.3)$$

ve $\bar{a}_{n-1,n} = \sum_{i=n}^{n-1} a_{n-1,i} = 0$ olduğundan dolayı

$$\begin{aligned} \Delta T_{n-1} &= T_n - T_{n-1} \\ &= \sum_{v=0}^n \bar{a}_{nv} x_v - \sum_{v=0}^{n-1} \bar{a}_{n-1,v} x_v + \bar{a}_{n-1,n} x_n \\ &= \sum_{v=0}^n (\bar{a}_{nv} - \bar{a}_{n-1,v}) x_v \\ &= \sum_{v=0}^n \hat{a}_{nv} x_v \end{aligned} \quad (5.4)$$

elde edilir ki bu da

$$x_n = \sum_{v=0}^n \hat{a}'_{nv} \Delta T_{v-1}, \quad T_{-1} = 0 \quad (5.5)$$

olmasını gerektirir.

Burada kullanılan $\bar{A}$ ve $\hat{A}$ matrisleri sırasıyla, seriden diziye ve seriden seriye dönüşüm matrisleridir.

Teorem 5.1. $k \geq 1$, $A = (a_{nv})$ bir normal matris olmak üzere

$$1 = O(va_v) \quad (5.6)$$

$$(a_{vv} - a_{v+1,v}) = O(a_{vv}a_{v+1,v+1}) \quad (5.7)$$

$$\sum_{v=i}^{\infty} (v+2) |\hat{a}'_{v+2,i}| = O(i+1) \quad (5.8)$$

şartları sağlansın. Bu takdirde $\sum a_n$ serisi $|A|_k$ toplanabilir ise $|C,1|_k$ toplanabilirdir.

İspat: $\sum a_n$ serisinin A dönüşümü T_n ile; (na_n) dizisinin $(C,1)$ ortalaması t_n ile gösterilmek üzere Tanım 2.20 den dolayı

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} |T_n - T_{n-1}|^k < \infty \quad (5.9)$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} t_n &= (n+1)^{-1} \sum_{v=1}^n va_v \\ &= (n+1)^{-1} \sum_{v=1}^n v \left\{ \sum_{r=0}^v \hat{a}'_{vr} \Delta T_{r-1} \right\} \\ &= (n+1)^{-1} \sum_{v=1}^n v \left\{ \hat{a}'_{vv} \Delta T_{v-1} + \hat{a}'_{v,v-1} \Delta T_{v-2} + \sum_{r=0}^{v-2} \hat{a}'_{vr} \Delta T_{r-1} \right\} \\ &= (n+1)^{-1} \left\{ \sum_{v=1}^n v \hat{a}'_{vv} \Delta T_{v-1} + \sum_{v=2}^n v \hat{a}'_{v,v-1} \Delta T_{v-2} + \sum_{v=0}^n v \sum_{r=0}^{v-2} \hat{a}'_{vr} \Delta T_{r-1} \right\} \\ &= (n+1)^{-1} \left\{ n \hat{a}'_{nn} \Delta T_{n-1} + \sum_{v=1}^{n-1} v \hat{a}'_{vv} \Delta T_{v-1} + \sum_{v=1}^{n-1} (v+1) \hat{a}'_{v+1,v} \Delta T_{v-1} \right. \\ &\quad \left. + \hat{a}'_{10} \Delta T_{-1} + \sum_{v=2}^n (v+2) \sum_{r=0}^v \hat{a}'_{v+2,r} \Delta T_{r-1} \right\} \\ &= n(n+1)^{-1} \hat{a}'_{nn} \Delta T_{n-1} + (n+1)^{-1} \sum_{v=1}^{n-1} \{ v \hat{a}'_{vv} + (v+1) \hat{a}'_{v+1,v} \} \Delta T_{v-1} \end{aligned}$$

$$+(n+1)^{-1}\hat{a}'_{10}\Delta T_{-1}+(n+1)^{-1}\sum_{r=0}^{n-2}\Delta T_{r-1}\sum_{v=r}^{n-2}(v+2)\hat{a}'_{v+2,r} \quad (5.10)$$

elde edilir. δ_{nv} Kronecker deltasını göstermek üzere

$$\sum_{k=v}^n \hat{a}'_{nk} \hat{a}_{kv} = \delta_{nv} \quad (5.11)$$

eşitliği göz önüne alınsın. Bu durumda

$$\hat{a}'_{nv} = \begin{cases} 0 & , \quad v > n \\ \frac{1}{a_{vv}} & , \quad v = n \\ \frac{-(a_{v+1,v} + a_{v+1,v+1} - a_{vv})}{a_{vv}a_{v+1,v+1}} & , \quad n = v+1 \end{cases} \quad (5.12)$$

olduğundan dolayı

$$\begin{aligned} v\hat{a}'_{vv} + (v+1)\hat{a}'_{v+1,v} &= \frac{v}{a_{vv}} + (v+1) \left\{ \frac{-(a_{v+1,v} + a_{v+1,v+1} - a_{vv})}{a_{vv}a_{v+1,v+1}} \right\} \\ &= \frac{v}{a_{vv}} + (v+1) \left\{ \frac{1}{a_{v+1,v+1}} - \frac{a_{v+1,v}}{a_{vv}a_{v+1,v+1}} - \frac{1}{a_{vv}} \right\} \\ &= (v+1) \left\{ \frac{1}{a_{v+1,v+1}} - \frac{a_{v+1,v}}{a_{vv}a_{v+1,v+1}} \right\} - \frac{1}{a_{vv}} \end{aligned} \quad (5.13)$$

elde edilir. Bu ifade (5.10) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} t_n &= (n+1)^{-1} \sum_{v=1}^{n-1} \left\{ (v+1) \left[\frac{1}{a_{v+1,v+1}} - \frac{a_{v+1,v}}{a_{vv}a_{v+1,v+1}} \right] - \frac{1}{a_{vv}} \right\} \Delta T_{v-1} \\ &\quad + n(n+1)^{-1} \left(\frac{1}{a_{nn}} \right) \Delta T_{n-1} + \hat{a}'_{10} \Delta T_{-1} (n+1)^{-1} \\ &\quad + (n+1)^{-1} \sum_{r=0}^{n-2} \Delta T_{r-1} \sum_{v=r}^{n-2} (v+2) \hat{a}'_{v+2,r} \end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\frac{a_{vv} - a_{v+1,v}}{a_{vv} - a_{v+1,v+1}} = \frac{1}{a_{v+1,v+1}} - \frac{a_{v+1,v}}{a_{vv}a_{v+1,v+1}} \quad (5.14)$$

olduğundan dolayı (5.6)-(5.8) şartları kullanılarak

$$t_n = O \left\{ (n+1)^{-1} \sum_{v=1}^{n-1} v |\Delta T_{v-1}| + n |\Delta T_{n-1}| + (n+1)^{-1} \right\}$$

$$= w_{n,1} + w_{n,2} + w_{n,3},$$

elde edilir. Teoremi ispat etmek için

$$|w_{n,1} + w_{n,2} + w_{n,3}|^k \leq 3^k \left(|w_{n,1}|^k + |w_{n,2}|^k + |w_{n,3}|^k \right) \quad (5.15)$$

eşitsizliğinden yararlanarak $r = 1, 2, 3$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} |w_{n,r}|^k < \infty \quad (5.16)$$

olduğunu göstermek yeterlidir. İlk olarak $r = 1$ için

$$|w_{n,1}|^k = \left\{ (n+1)^{-1} \sum_{v=1}^{n-1} v |\Delta T_{v-1}| \right\}^k \leq \left\{ n^{-1} \sum_{v=1}^{n-1} v |\Delta T_{v-1}| \right\}^k$$

$$\sum_{n=2}^{m+1} n^{-1} |w_{n,1}|^k \leq \sum_{n=2}^{m+1} n^{-k-1} \left(\sum_{v=1}^{n-1} v |\Delta T_{v-1}| \right)^k$$

bulunur. Burada Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{m+1} n^{-1} |w_{n,1}|^k &= O \left\{ \sum_{n=2}^{m+1} n^{-k-1} \left(\sum_{v=1}^{n-1} v |\Delta T_{v-1}| \right)^k \right\} \\ &= O \left\{ \sum_{n=2}^{m+1} n^{-k-1} \left(\sum_{v=1}^{n-1} (v |\Delta T_{v-1}|) \right)^k \left(\sum_{v=1}^{n-1} 1 \right)^{k-1} \right\} \\ &= O \left\{ \left(\sum_{n=2}^{m+1} n^{-2} \sum_{v=1}^{n-1} v^k |\Delta T_{v-1}|^k \right) \left(n^{-1} \sum_{v=1}^{n-1} 1 \right)^{k-1} \right\} \\ &= O \left\{ \sum_{v=1}^m v^k |\Delta T_{v-1}|^k \sum_{n=v+1}^{m+1} n^{-2} \right\} \\ &= O \left\{ \sum_{v=1}^m v^{k-1} |\Delta T_{v-1}|^k \right\} < \infty \end{aligned}$$

bulunur. Daha sonra $r = 2$ için

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} |w_{n,2}|^k &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} |n \Delta T_{n-1}|^k \\ &= O \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} |\Delta T_{n-1}|^k \right\} < \infty \end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak $r = 3$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} |w_{n,3}|^k = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} |(n+1)^{-1}|^k$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} |n^{-1}|^k$$

$$= O \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-k} \right\} < \infty$$

bulunur. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 5.2. $k \geq 1$, $n \geq 1$, $v = 0, 1, 2, \dots, n$ ve $a_{n-1,n} = 0$ olsun. $A = (a_{nv})$ bir pozitif alt üçgensel matris ve $C > 0$ olmak üzere

$$a_{nv} \geq a_{n+1,v}, \quad n \geq v \quad (5.17)$$

$$na_{nn} = O(1), \quad n=1, 2, \dots \quad (5.18)$$

$$\left| \sum_{i=v}^n (a_{ni} - a_{n-1,i}) \right| \leq C(v |a_{nv} - a_{n-1,v}|) \quad (5.19)$$

şartları sağlansın. Bu takdirde $\sum a_n$ serisi $|C, 1|_k$ toplanabilir ise $|A|_k$ toplanabilirdir.

İspat: $A = (a_{nv})$ pozitif alt üçgensel matris ise

$$A_n(s) = \sum_{v=0}^n a_{nv} s_v = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{v=i}^n a_{nv} \right) a_i \quad (5.20)$$

ve $a_{n-1,n} = 0$ olmak üzere $A_n(s) - A_{n-1}(s)$ farkı teşkil edilirse

$$\begin{aligned} A_n(s) - A_{n-1}(s) &= \sum_{i=0}^n \left(\sum_{v=i}^n a_{nv} \right) a_i - \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{v=i}^{n-1} a_{n-1,v} \right) a_i \\ &= a_{nn} s_n + \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{v=i}^{n-1} a_{nv} \right) a_i - \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{v=i}^{n-1} a_{n-1,v} \right) a_i \\ &= a_{nn} s_n + \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \left(\sum_{v=i}^{n-1} a_{nv} \right) - \left(\sum_{v=i}^{n-1} a_{n-1,v} \right) \right\} a_i \\ &= a_{nn} s_n + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{v=i}^{n-1} (a_{nv} - a_{n-1,v}) a_i \\ &= \sum_{i=0}^n \left(\sum_{v=i}^n (a_{nv} - a_{n-1,v}) \right) a_i \end{aligned}$$

elde edilir. $i = 0$ için

$$A_n(s) - A_{n-1}(s) = \sum_{v=0}^{n-1} (a_{nv} - a_{n-1,v}) a_0 + \sum_{i=1}^n \sum_{v=i}^n (a_{nv} - a_{n-1,v}) a_i$$

bulunur. (5.19) şartından dolayı

$$A_n(s) - A_{n-1}(s) = \sum_{i=1}^n \sum_{v=i}^n (a_{nv} - a_{n-1,v}) i a_i (i)^{-1}$$

elde edilir. $n \geq 2$ için

$$\begin{aligned}
A_n(s) - A_{n-1}(s) &= \sum_{i=1}^n \sum_{v=i}^n (a_{nv} - a_{n-1,v}) i a_i (i)^{-1} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \Delta \left\{ \sum_{v=i}^n (a_{nv} - a_{n-1,v}) (i)^{-1} \right\} \sum_{j=1}^i j a_j + a_{nn} n^{-1} \sum_{j=1}^n j a_j \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^i j a_j \Delta \left\{ \sum_{v=i}^n (a_{nv} - a_{n-1,v}) (i)^{-1} \right\} + \sum_{j=1}^n j a_j a_{nn} n^{-1}
\end{aligned} \tag{5.21}$$

bulunur. Diğer taraftan (na_n) nin $(C,1)$ ortalaması (t_n) ile gösterilirse

$$t_n = \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^n j a_j \tag{5.22}$$

$$t_i^1 = \frac{1}{i+1} \sum_{j=1}^i j a_j \tag{5.23}$$

elde edilir. (5.22) ve (5.23) ifadeleri (5.21) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
A_n(s) - A_{n-1}(s) &= \sum_{i=1}^{n-1} (i+1) t_i^1 \Delta \left\{ \sum_{v=i}^n (a_{nv} - a_{n-1,v}) (i)^{-1} \right\} + (n+1) t_n^1 a_{nn} n^{-1} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} (i+1) t_i^1 \left\{ \sum_{v=i}^n (a_{nv} - a_{n-1,v}) \frac{1}{i} + \sum_{v=i+1}^n (a_{nv} - a_{n-1,v}) \frac{1}{i+1} \right\} + \frac{n+1}{n} t_n^1 a_{nn} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} (i+1) t_i^1 \left\{ (a_{ni} - a_{n-1,i}) \frac{1}{i} + \sum_{v=i+1}^n (a_{nv} - a_{n-1,v}) \frac{1}{i+1} \right\} + \frac{n+1}{n} t_n^1 a_{nn} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i+1}{i} t_i^1 (a_{ni} - a_{n-1,i}) + \sum_{i=1}^{n-1} (i+1) t_i^1 \sum_{v=i+1}^n (a_{nv} - a_{n-1,v}) \frac{1}{i(i+1)} \\
&\quad + \frac{n+1}{n} t_n^1 a_{nn} \\
&= \sum_{v=1}^{n-1} \frac{v+1}{v} (a_{nv} - a_{n-1,v}) t_v^1 + \sum_{v=1}^{n-1} \frac{1}{v} \sum_{i=v+1}^n (a_{ni} - a_{n-1,i}) t_v^1 + \frac{n+1}{n} t_n^1 a_{nn} \\
&= \sum_{v=1}^{n-1} \frac{v+1}{v} (a_{nv} - a_{n-1,v}) t_v^1 + \sum_{v=1}^{n-1} \frac{1}{v} \sum_{i=v+1}^n (a_{ni} - a_{n-1,i}) t_v^1 + \frac{n+1}{n} t_n^1 a_{nn} \\
&= A_{n,1} + A_{n,2} + A_{n,3}
\end{aligned}$$

bulunur. Teoremi ispat etmek için

$$|A_{n,1} + A_{n,2} + A_{n,3}|^k \leq 3^k (|A_{n,1}|^k + |A_{n,2}|^k + |A_{n,3}|^k) \tag{5.24}$$

eşitsizliğinden yararlanarak $r = 1, 2, 3$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_{nn}} \right)^{k-1} |A_{n,r}|^k < \infty \quad (5.25)$$

olduğunu göstermek yeterlidir. İlk olarak $r = 1$ için Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{1}{a_{nn}} \right)^{k-1} |A_{n,1}|^k &\leq \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{1}{a_{nn}} \right)^{k-1} \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} |a_{nv} - a_{n-1,v}| |t_v^1| \right\}^k \\ &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{1}{a_{nn}} \right)^{k-1} \sum_{v=1}^{n-1} |a_{nv} - a_{n-1,v}| |t_v^1|^k \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} |a_{nv} - a_{n-1,v}| \right\}^{1-k} \\ &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \sum_{v=1}^{n-1} |a_{nv} - a_{n-1,v}| |t_v^1|^k \left\{ \frac{1}{a_{nn}} \sum_{v=1}^{n-1} |a_{nv} - a_{n-1,v}| \right\}^{1-k} \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan (5.17) ve (5.19) şartlarından dolayı

$$\begin{aligned} \sum_{v=1}^{n-1} |a_{nv} - a_{n-1,v}| &= \sum_{v=1}^{n-1} (a_{n-1,v} - a_{nv}) \\ &= \sum_{v=0}^n (a_{n-1,v} - a_{nv}) - (a_{n-1,n} - a_{nn}) - (a_{n-1,0} - a_{n0}) \\ &= \sum_{v=0}^n (a_{n-1,v} - a_{nv}) + a_{nn} - (a_{n-1,0} - a_{n0}) \\ &\leq \sum_{v=0}^n (a_{n-1,v} - a_{nv}) + a_{nn} \\ &\leq a_{nn} \end{aligned}$$

bulunur. (5.18) şartından

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{1}{a_{nn}} \right)^{k-1} |A_{n,1}|^k &\leq \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{1}{a_{nn}} \right)^{k-1} \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} |a_{nv} - a_{n-1,v}| |t_v^1| \right\}^k \\ &= O(1) \sum_{v=1}^m \sum_{n=v+1}^{m+1} (a_{n-1,v} - a_{nv}) |t_v^1|^k \\ &= O(1) \sum_{v=1}^m a_{vv} |t_v^1|^k \\ &= O(1) \sum_{v=1}^m \frac{1}{v} |t_v^1|^k \\ &= O(1), \quad m=1,2,\dots \end{aligned}$$

elde edilir. Daha sonra $r = 2$ için (5.19) şartından

$$\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{1}{a_{nn}} \right)^{k-1} |A_{n,2}|^k \leq \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{1}{a_{nn}} \right)^{k-1} \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} \frac{1}{v} \left| \sum_{i=v+1}^n (a_{ni} - a_{n-1,i}) \right| |t_v^1| \right\}^k$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{1}{a_{nn}} \right)^{k-1} \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} \frac{1}{v} \left| \sum_{i=v+1}^n (a_{ni} - a_{n-1,i}) - (a_{nv} - a_{n-1,v}) \right| \left| t_v^1 \right| \right\}^k \\
&\leq \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{1}{a_{nn}} \right)^{k-1} \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} \frac{1}{v} \left| \sum_{i=v}^n (a_{ni} - a_{n-1,i}) \right| \left| t_v^1 \right| + \sum_{v=1}^{n-1} |a_{nv} - a_{n-1,v}| \left| t_v^1 \right| \right\}^k \\
&\leq \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{1}{a_{nn}} \right)^{k-1} \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} \frac{1}{v} C(v |a_{nv} - a_{n-1,v}|) \left| t_v^1 \right| + \sum_{v=1}^{n-1} |a_{nv} - a_{n-1,v}| \left| t_v^1 \right| \right\}^k \\
&\leq \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{1}{a_{nn}} \right)^{k-1} \left\{ (C+1) \sum_{v=1}^{n-1} |a_{nv} - a_{n-1,v}| \left| t_v^1 \right| \right\}^k \\
&= (C+1)^k \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{1}{a_{nn}} \right)^{k-1} \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} |a_{nv} - a_{n-1,v}| \left| t_v^1 \right| \right\}^k
\end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan $r = 1$ için

$$\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{1}{a_{nn}} \right)^{k-1} |A_{n,1}|^k < \infty \quad (5.26)$$

olduğundan dolayı

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{1}{a_{nn}} \right)^{k-1} |A_{n,2}|^k &= (C+1)^k \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{1}{a_{nn}} \right)^{k-1} \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} |a_{nv} - a_{n-1,v}| \left| t_v^1 \right| \right\}^k \\
&= O(1), \quad m=2,3,\dots
\end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak $r = 3$ için

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^m \left(\frac{1}{a_{nn}} \right)^{k-1} |A_{n,3}|^k &= \sum_{n=1}^m \left(\frac{1}{a_{nn}} \right)^{k-1} \left(\frac{n+1}{n} a_{nn} |t_n^1| \right)^k \\
&= \sum_{n=1}^m (a_{nn})^{1-k} (a_{nn})^k \left(1 + \frac{1}{n} \right)^k |t_n^1|^k \\
&= O(1) \sum_{n=1}^m \frac{1}{n} |t_n^1|^k \\
&= O(1), \quad m=1,2,\dots
\end{aligned}$$

bulunur. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Sonuç 6.1. Teorem 3.1 in şartlarında özel olarak $k=1$ alınırsa Teorem 2.26 elde edilir.

Sonuç 6.2. Teorem 3.2 nin şartlarında özel olarak $\alpha=1$ alınırsa Teorem 2.27 elde edilir. Diğer taraftan $\alpha=1$ özel halinde, (3.7) şartı (3.6) şartından elde edilebileceğinden dolayı ihmal edilebilir.

Sonuç 6.3. $k \geq 1$ olmak üzere Teorem 4.1 in (4.2) ve (4.3) şartları sağlansın. Ayrıca

$$np_n = O(P_n) \quad (6.1)$$

bulunsun. Bu takdirde $\sum a_n$ serisi $|R, q_n|_k$ toplanabilir ise $|R, p_n|_k$ toplanabilir.

Sonuç 6.4. $k \geq 1$ olsun. Diğer taraftan Teorem 4.1 in (4.1)-(4.3) şartları ve Sonuç 6.3 ün (6.1) şartı sağlansın. Bu takdirde $|R, p_n|_k$ toplanabilme $|R, q_n|_k$ toplanabilmeye denktir.

Sonuç 6.5. Sonuç 6.4 ün şartlarında özel olarak $\forall n \in \mathbb{N}$ için $p_n = 1$ alınırsa $|R, q_n|_k$ toplanabilme ile ilgili yeni bir sonuç elde edilir [26].

Sonuç 6.6. $k > 1$ olsun. (q_n) ;

$$Q_n = \sum_{v=0}^n q_v \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty \quad (6.2)$$

olacak şekilde pozitif sayıların bir dizisini gösterebilir.

$$|C, 1|_k \Rightarrow |R, p_n|_k \quad (6.3)$$

olması için

$$nq_n = O(Q_n) \quad (6.4)$$

olması gereklidir.

Sonuç 6.7. Teorem 4.2 nin şartlarında özel olarak $k=1$ alınırsa Teorem 2.29 elde edilir.

Sonuç 6.8. (p_n) ;

$$P_n = \sum_{v=0}^n p_v \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty \quad (6.5)$$

olacak şekilde pozitif sayıların bir dizisini göstermek üzere

$$P_n = O(np_n) \quad (6.6)$$

şartı sağlansın. Bu takdirde $|R, p_n|_k$ toplanabilir ise $|C, 1|_k$ toplanabilirdir.

Sonuç 6.9. (p_n) ;

$$P_n = \sum_{v=0}^n p_v \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty$$

olacak şekilde pozitif sayıların bir dizisini göstermek üzere

$$np_n = O(P_n) \quad (6.7)$$

şartı sağlansın. Bu takdirde $\sum a_n$ serisi $|C, 1|_k$ toplanabilir ise $|R, p_n|_k$ toplanabilirdir.

Sonuç 6.10. $k \geq 1$ olsun ve (p_n) ;

$$P_n = \sum_{v=0}^n p_v \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty$$

olacak şekilde pozitif sayıların bir dizisini göstermek üzere

$$np_n = O(P_n) \quad (6.8)$$

$$P_n = O(np_n) \quad (6.9)$$

Şartları sağlansın. Bu takdirde $|C, 1|_k$ toplanabilme $|R, p_n|_k$ toplanabilmeye denktir.

Sonuç 6.11. Teorem 5.2 nin şartlarında $k=1$ ve özel olarak $a_{nv} = \frac{p_v}{P_n}$ alınırsa, $|C, 1|$

toplanabilme ile ilgili yeni bir sonuç elde edilir [24].

KAYNAKLAR

1. Flett, T. M., 1957, On an extension of absolute summability and some theorems of littlewood and paley, Proceeding of the London Mathematical Society, 7, 113-141.
2. Das, G., 1969, Tauberian theorems for absolute Nörlund summability, Proceeding of the London Mathematical Society, 19(3), 357-394.
3. Tanovic-Miller, N. , 1979, On strong summability, Glasnik Matematicki, 34(14), 87-97.
4. Maddox, I.J., 1970, Elements of Functional Analysis, Cambridge University Press.
5. Mc Fadden, L., 1942, Absolute Nörlund summability, Duke Mathematical Journal, 9, 168-207.
6. Zygmud, A., 1959, Trigonometric Series, Vol I, Cambridge Univ. Pres.
7. Sarıgöl, M. A. ve Bor, H. , 1993, On the Summability Methods, Math. Slovaca, 43, 317-325.
8. Fekete, M., 1911, Zur theorie der divergenten reihen, Math. Es Termezs Ertesitö (Budapest) 29, 719-726.
9. Petersen, G.M., 1966, Regular Matrix Transformations, Mc Graw Hill Publishing Company Limited, London-New York-Toronto.
10. Kayashima, I., 1973, On the relation between Nörlund and Riesz means, Pasific Journal of Mathematics, 49, 391-396.
11. Bor, H., 1991, On the relative strength of two absolute summability methods, Proceeding of the American Mathematical Society, 113(4), 1009-1012.
12. Ayres, F. Jr., 1962, Schaum's Outline of Theory and Problems of Matrices, New York: Schaum, p. 10.
13. Kishore, N. ve Hotta, G.C., 1970, On $|\bar{N}, p_n|$ summability factors, Acta Scientiarum Mathematicarum, 31, 9-12.
14. Mazhar, S. M., 1966, $|\bar{N}, p_n|$ summability factors of infinite series, Kodai Math. Seminar Reports, 18, 96, 100.
15. Mazhar, S.M., 1972, On $|C, 1|_k$ summability factors of infinite series, Indian Jour. Math. 14, 45-48.
16. Chow, H.C., 1954, Note on convergence and summability factors, J. Lond. Math. Soc. , 20, 459-476.
17. Bor, H., 1994, Absolute Cesàro summability factors, Atti. Sem. Mat. Fis. Univ. Modena 42, 135-140.
18. Bor, H., 1997, On the generalized Cesàro summability factors, Far East J. Math. Sci. , 5(3), 497-504.
19. Sunouchi, G., 1949, Notes on Fourier Analysis: XVIII, absolute summability of a series with constant terms. , Tohoku Math. Jour. , 2, 57-65.
20. Orhan, C., 1987, On absolute summability, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica, 15, 433-437.
21. Bor, H., 1985, On two summability methods, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. , 97, 147-149.

22. Bor, H., 1986, Absolute Cesàro summability factors of infinite series, Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi, 2, 387-391.
23. Orhan, C., ve Sarıgöl, M.A. , 1995, Absolute summability of infinite series, Proc. Indian Acad. Sci.(Math. Sci.), 105, 201-205.
24. Sarıgöl, M.A., 1991, On absolute summability factors, Annales Societatis Mathematicae Polonae, Series: Commentationes Mathematicae XXXI
25. Cooke, Richard G., 1950, Infinite Matrices and Sequence Spaces, Macmillan & Co Ltd, London.
26. Orhan, C., 1990, On equivalence of summability methods, Math. Slovaca, 40, 171-175.



ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Emine ÖZGÜL

Doğum Tarihi ve Yeri: 22.06.1986-AKSARAY

E-posta adresi : aktasemi@gmail.com

EĞİTİM BİLGİLERİ (Kurum ve Yıl)

Lisans : Erciyes Üniversitesi Eğitim Fakültesi

İlköğretim Matematik Öğretmenliği-2009

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLERİ

2009-2010	Aksaray Özel Ak İrfan İlköğretim Okulu	Matematik Öğretmeni
2012-2013	Van Yukarı Sağmalı Ortaokulu	Matematik Öğretmeni
2013-2014	Nevşehir Suvermez Ortaokulu	Matematik Öğretmeni
2014-2015	Aksaray Meliha Zekai Dalkılıç İlkokulu	Matematik Öğretmeni
2015-Halen	Aksaray YSS Yatılı Bölge Ortaokulu	Matematik Öğretmeni