

T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NEWTONYEN OLMAYAN REEL SAYI SERİLERİ VE HAS OLMAYAN
İNTEGRALLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Murat ERDOĞAN

Matematik Anabilim Dalı

TEMMUZ 2016
SAMSUN



**T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



MATEMATİK ANABİLİM DALI

**NEWTONYEN OLMAYAN REEL SAYI SERİLERİ VE HAS OLMAYAN
İNTEGRALLER**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Murat ERDOĞAN
(14210393)**

Tezin Savunma Tarihi : 29 Temmuz 2016

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Cenap DUYAR

Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalında

Murat ERDOĞAN Tarafından Hazırlanan

**NEWTONYEN OLMAYAN REEL SAYI SERİLERİ VE HAS
OLMAYAN İNTEGRALLER**

**başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından 29/07/2016 tarihinde yapılan sınav ile
YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.**

Başkan : Prof. Dr. Vedat Suat ERTÜRK
Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Jüri Üyeleri : Doç. Dr. Cenap DUYAR
Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Doç. Dr. Fadime DİRİK
Sinop Üniversitesi

....../....../2016

Prof. Dr. Hüseyin DEMİR

Enstitü Müdürü





Annemin ve babamın anısına,



ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanması sırasında bilgi ve deneyimleriyle bana yol gösteren, yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer hocam Doç. Dr. Cenap DUYAR'a, çalışmamın her aşamasında desteğini esirgemeyen saygıdeğer hocam Prof. Dr. Birsen SAĞIR DUYAR'a sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın her anında sevgisi ve desteğiyle yanımda olan, bana inanan ve güvenen çok değerli eşime teşekkür ederim.

Temmuz 2016

Murat ERDOĞAN
Matematik Öğretmeni



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖNSÖZ.....	vii
İÇİNDEKİLER	ix
KISALTMALAR	xi
NEWTONYEN OLMAYAN REEL SAYI SERİLERİ VE HAS OLMAYAN	
İNTEGRALLER	xiii
ÖZET.....	xiii
NON-NEWTONIAN REAL NUMBER SERIES AND IMPROPER	
INTEGRALS	xv
ABSTRACT	xv
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER.....	3
2.1. α -Aritmetik	3
2.2. *-Kalkülüs	5
2.3. Newtonyen Olmayan Reel Sayılar Cismi.....	10
2.4. Newtonyen Olmayan Metrik Uzay ve Newtonyen Olmayan Metrik Uzaylarda	
Tamlık	12
3. BULGULAR VE TARTIŞMA	15
3.1. Newtonyen Olmayan Reel Sayılarda Bazı Özellikler	15
3.2. Newtonyen Olmayan Reel Sayı Serileri.....	24
3.3. Has Olmayan *-İntegral	42
4. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	67
KAYNAKLAR	69
ÖZGEÇMİŞ.....	71

KISALTMALAR

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}(N)_\alpha$	: Newtonyen olmayan reel sayılar kümesi
$\overset{*}{D}$	: *-türev
$[r, s]$	: α -aralık
$\overset{*}{M}_r^s$	: $[r, s]$ α -aralığı üzerinde *-ortalama
$\tilde{\int}$	: Geometrik integral
$\int$	: Anageometrik integral
$\tilde{\int}$	: Bigeometrik integral
$\overset{*}{\int}$	: *-integral
$\alpha \sum$	: α -toplam
$[[]]$	: Tam değer



NEWTONYEN OLMAYAN REEL SAYI SERİLERİ VE HAS OLMAYAN İNTEGRALLER

ÖZET

Bu çalışmada, Newtonyen olmayan reel sayı serileri ile has olmayan integraller incelendi ve onların yakınsaklık koşulları araştırıldı.

İlk bölümde, Newtonyen olmayan kalkülüsün çıkış noktası, günümüze kadar yapılan çalışmalar ve uygulamaları hakkında kısaca bilgi verildi.

İkinci bölümde, tez konusu ile ilgili temel tanımlar, teoremler ve özellikler ele alındı.

Tez konusunun işlendiği üçüncü bölüm ise üç kesimden oluşmaktadır. İlk kesimde Newtonyen olmayan reel sayı serileri ve has olmayan integraller için gerekli olan temel tanımlara, teoremlere ve özelliklere yer verildi. İkinci kesimde Newtonyen olmayan reel sayı serileri tanıtıldı ve onların yakınsaklık koşulları araştırıldı. Son kesimde Newtonyen olmayan anlamda has olmayan integraller tanımlandı ve onların yakınsaklığına dair testler verildi. Ayrıca gerekli olduğu için Newtonyen olmayan reel sayılarda ara değer teoremi, ortalama değer teoremi gibi temel teoremler incelenmiştir.

Son bölümde tez konusu ile ilgili sonuç ve önerilere verildi.

Anahtar Kelimeler: Newtonyen Olmayan Kalkülüs; Newtonyen Olmayan Reel Sayı Serisi; Has Olmayan *-İntegral; Yakınsaklık.



NON-NEWTONIAN REAL NUMBER SERIES AND IMPROPER INTEGRALS

ABSTRACT

In this study, non-Newtonian real number series and improper integrals were examined and their convergence conditions were investigated.

In the first chapter, the information about the studies that are done until today and its applications and the point of origin of non-Newtonian calculus, was briefly given.

In the second chapter, basic definitions, theorems and properties related to thesis subject was handled.

The third chapter, where the thesis subject is processed, consists of three sections. In the first section, basic definitions, theorems and properties needed for non-Newtonian real number series and improper integrals was given. In the second section, non-Newtonian real number series was introduced and their convergence conditions were researched. In the last section, improper integrals in the non-Newtonian sense was defined and tests on their convergence were given. Furthermore, because of its necessity, basic theorems such as intermediate value theorem, mean value theorem at non-Newtonian real numbers were examined.

In the last chapter, the researchs and suggestions related to thesis subject were given.

Key Words: Non-Newtonian Calculus; Non-Newtonian Real Number Series; Improper *-Integral; Convergence.



1. GİRİŞ

Newtonyen olmayan kalkülüs 1967-1970 yılları arasında Michael Grossmann ve Robert Katz tarafından oluşturulmuştur. İlk olarak klasik, geometrik, harmonik ve kuadratik kalkülüsü, daha sonra bigeometrik, biharmonik ve bikuadratik kalkülüsü tanımlamışlardır. 1972 yılında ise Newtonyen olmayan Kalkülüsün temel çerçevesini oluşturan kitabı tamamladılar [1].

James R. Megginiss tarafından yapılan çalışmada insan davranışına ve seçim yapmaya uyarlanmış olasılık teorisi oluşturmak için Newtonyen olmayan kalkülüs kullanılmıştır [2].

Janne Grossmann meta kalkülüste türev ve integral üzerine çalışmıştır [3].

Michael Grossmann tarafından yapılan çalışmada bigeometrik kalkülüste ölçüden bağımsız türev incelenmiştir [4].

M. Rybaczuk ve S. Stoppel bigeometrik kalkülüsü fraktallar ve materyal biliminde kullanmışlardır [5].

Dorota Aniszewska çarpımsal Runge-Kutta metodları üzerine çalışmıştır [6].

Agarmirza E. Bashirov, Emine Mısırlı ve Ali Özyapıcı geometrik kalkülüs ve onun uygulamaları üzerine çalışmalar yapmışlardır [7].

Ali Uzer tarafından yapılan çalışmada, klasik kalkülüse bir alternatif olan çarpımsal tip kompleks kalkülüs incelenmiştir [8].

Agarmirza E. Bashirov ve Musatafa Rıza kompleks çarpımsal kalkülüs üzerine çalışmıştır [9].

Cengiz Türkmen ve Feyzi Başar geometrik kalkülüste dizi kümeleri üzerine bazı temel sonuçlar elde etmişlerdir [10].

Luc Florak ve Hans van Assen biomedikal görüntü analizinde Newtonyen olmayan kalkülüsü kullandı [11].

Ahmet Faruk Çakmak ve Feyzi Başar tarafından yapılan çalışmada Newtonyen olmayan kalkülüse göre dizi uzayları üzerinde bazı yeni sonuçlar bulunmuştur [12].

Sabiha Tekin ve Feyzi Başar, belirli Newtonyen olmayan kompleks dizi uzayları üzerinde çalışmışlardır [13].

Diana Andrada Filip ve Cyrille Piatecki ekonomideki neoklasik (Solow-Swan) büyüme modelini yeniden doğrulamak ve analiz etmek için Newtonyen olmayan kalkülüsü kullandılar [14].

Ahmet Faruk Çakmak ve Feyzi Başar Newtonyen olmayan anlamda katlı integraller üzerine çalışmışlardır [15].

Cenap Duyar, Birsen Sağır ve Oğuz Oğur tarafından yapılan araştırmada Newtonyen olmayan reel ekseninde bazı temel topolojik özellikler elde edilmiştir [16].

Yapılan bu çalışmaların ışığında Newtonyen olmayan reel sayı serileri ve has olmayan integral problemleri ortaya çıkmıştır. Bu problemler tezde tanıtılmış ve yakınsaklık koşulları incelenmiştir. Daha açık olarak Newtonyen olmayan reel sayı serilerinin ve has olmayan integrallerin yakınsaklığı hakkında Newtonyen durum için bilinen bazı testler verilmiş ve ispatlanmıştır.

.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. α -Aritmetik

2.1.1. Tanım: Tanım kümesi $\mathbb{R}$ ve görüntü kümesi $\mathbb{R}$ nin bir alt kümesi olan birebir bir fonksiyona üreteç denir. Örneğin I özdeşlik fonksiyonu, $\exp$ (yani e^x) fonksiyonu ve x^3 fonksiyonu birer üreteçtir [1].

2.1.2. Tanım: Görüntü kümesi A olan bir α üretici düşünölsün. α -aritmetik ile evreni A , işlemleri ve sıralama bağıntısı aşağıdaki gibi olan aritmetik ifade edilir.

$$\alpha\text{-toplama} \quad y \dot{+} z = \alpha \{ \alpha^{-1}(y) + \alpha^{-1}(z) \}$$

$$\alpha\text{-çıkarma} \quad y \dot{-} z = \alpha \{ \alpha^{-1}(y) - \alpha^{-1}(z) \}$$

$$\alpha\text{-çarpma} \quad y \dot{\times} z = \alpha \{ \alpha^{-1}(y) \times \alpha^{-1}(z) \}$$

$$\alpha\text{-bölme} (z \neq \dot{0}) \quad y \dot{/} z = \alpha \{ \alpha^{-1}(y) / \alpha^{-1}(z) \}$$

$$\alpha\text{-sıralama} \quad y \dot{<} z \Leftrightarrow \alpha^{-1}(y) < \alpha^{-1}(z)$$

Bu durumda α nın α -aritmetiğini ürettiğı söylenir. Örneğin I özdeşlik fonksiyonu klasik aritmetiğı üretir, $\exp$ fonksiyonu da geometrik aritmetiğı üretir. Her bir üreteç tek bir aritmetik üretir, tersine her bir aritmetik de tek bir üreteç tarafından üretilir [1].

2.1.3. Tanım: $\dot{0} \dot{<} x$ olan sayılar α -pozitif, $x \dot{<} \dot{0}$ olanlar ise α -negatif sayılardır. α -sıfır sayısı $\dot{0} = \alpha(0)$ ve α -bir sayısı da $\dot{1} = \alpha(1)$ olarak gösterilir. α -tamsayılar $\dot{0}$ sayısına ardışık olarak $\dot{1}$ sayısının α -toplamasıyla ve $\dot{0}$ sayısından ardışık olarak $\dot{1}$ sayısının α -çıkarmasıyla elde edilir. α -tamsayılar

$$..., \alpha(-2), \alpha(-1), \alpha(0), \alpha(1), \alpha(2), ...$$

şeklindedir.

Her bir n tamsayısı α -aritmetiğine göre $\dot{n} = \alpha(n)$ ile gösterilir. Eğer $\dot{n}$ bir α -pozitif tamsayı ise

$$\dot{n} = \underbrace{\dot{1} + \dots + \dot{1}}_{n\text{-defa}}$$

biçimindedir [1].

2.1.4. Tanım: Bir $x \in A$ sayısının α -mutlak değeri

$$|\dot{x}| = \begin{cases} x & , x \succ \dot{0} \\ \dot{0} & , x = \dot{0} \\ \dot{0} \div x & , x \prec \dot{0} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır ve bu değer $\alpha(|\alpha^{-1}(x)|)$ ifadesine denktir [1].

2.1.5. Tanım: Verilen n tane $u_1, \dots, u_n$ sayısının α -ortalaması $\underbrace{u + \dots + u}_{n \text{ defa}} = u_1 + \dots + u_n$

olacak şekilde A kümesindeki tek bir u sayısıdır. Buna göre

$$u = (u_1 + \dots + u_n) \dot{\div} \dot{n} = \alpha \left\{ \left[\alpha^{-1}(u_1) + \dots + \alpha^{-1}(u_n) \right] / n \right\}$$

olur.

α -aritmetikte α -ortalamaya sıklıkla doğal ortalama denmektedir. Klasik aritmetikte doğal ortalama aritmetik ortalama değildir, geometrik aritmetikte doğal ortalama geometrik ortalama değildir [1].

2.1.6. Tanım: α -ilerleme (veya α -aritmetikte doğal ilerleme) her $i = 1, \dots, n-1$ için $u_{i+1} \div u_i$ değeri aynı olan $u_1, \dots, u_n$ sayılarının bir sonlu dizisidir. Klasik aritmetikte doğal ilerleme aritmetik ilerleme, geometrik aritmetikte ise doğal ilerleme geometrik ilerlemedir [1].

2.1.7. Tanım: A kümesindeki her $r \prec s$ sayısı için, $r \preceq x \preceq s$ şeklindeki $x \in A$ sayılarının kümesi α -aralık olarak adlandırılır ve $[r, s]$ ile gösterilir. $[r, s]$ α -aralığı $s \div r$ α -uzunluğa sahiptir ve α -içi $r \prec x \prec s$ olacak şekildeki tüm $x \in A$ sayılarını içerir [1].

2.1.8. Tanım: $[r, s]$ aralığının α -parçalanışı ilk ve son terimi sırasıyla r ile s olan α -ilerlemedir. Eğer α -parçalanış n terime sahipse, onun n -katlı olduğu söylenir [1].

2.1.9. Tanım: $\{u_n\}$ dizisi A kümesindeki sayıların bir sonsuz dizisi olsun. En çok bir u elemanı varolsun ve u sayısını içeren her bir α -aralığın α -içi $\{u_n\}$ dizisinin sonlu sayıdaki elemanının dışındaki bütün elemanlarını içersin. Eğer böyle bir u elemanı varsa $\{u_n\}$ dizisinin u elemanına α -yakınsadığı söylenir ve u sayısı $\{u_n\}$ dizisinin α -limiti olarak adlandırılır [1].

Eğer $\alpha = I$ ise α -yakınsama klasik yakınsamaya dönüşür.

2.1.10. Örnek: exp fonksiyonu ile üretilen aritmetik, exp-aritmetik yerine daha çok geometrik aritmetik olarak adlandırılır. Benzer olarak geometrik aritmetikte kavramlar "exp" öneki yerine "geometrik" yazılarak belirtilecektir. Bu durumda doğal ortalama olarak geometrik ortalamaya işaret edilir, bu kullanım genel olarak terminolojiyle de uyumludur.

Geometrik aritmetik şu özelliklere sahiptir (y ve z keyfi pozitif sayılar):

Üreteç	exp
Evren	$\mathbb{R}^+$
Geometrik sıfır	1 (=exp(0))
Geometrik bir	e (=exp(1))
y ile z nin geometrik toplamı	$\exp\{\ln y + \ln z\} = y \cdot z$
y ile z nin geometrik farkı	$\exp\{\ln y - \ln z\} = y/z$
y ile z nin geometrik çarpımı	$\exp\{\ln y \cdot \ln z\} = y^{\ln z} = z^{\ln y}$
y nin z ye geometrik bölümü ($z \neq 1$)	$\exp\{\ln y / \ln z\} = y^{1/\ln z}$
Geometrik sıralama	Klasik sıralama ile özdeş
Geometrik pozitif sayılar	1 den büyük sayılar
Geometrik negatif sayılar	1 den küçük sayılar
Geometrik aralıklar	Pozitif aralıklarla özdeş
$[y, z]$ geometrik uzunluğu	y/z
Doğal ortalama	Geometrik ortalama
Doğal ilerleme	Geometrik ilerleme
$[y, z]$ nin geometrik parçalanışı	İlk ve son terimi y ve z olan herhangi bir geometrik ilerlemedir.

"Pozitif sayıların bir $\{p_n\}$ dizisi p pozitif sayısına geometrik yakınsar ancak $\{p_n\}$ dizisi p elemanına klasik olarak yakınsar" anlamında geometrik yakınsama ile klasik yakınsama eşdeğerdir [1].

2.2. *-Kalkülüs

2.2.1. Tanım: Bu kesimden itibaren α ve β keyfi seçilmiş üreteçler ve $*$ ise aritmetiklerin sıralı ikilisi (α -aritmetik, β -aritmetik) olarak alınacak ve aşağıdaki gösterimler kullanılacaktır.

	α -aritmetik	β -aritmetik
Evren	A	B
Toplama	$\dot{+}$	$\ddot{+}$
Çıkarma	$\dot{-}$	$\ddot{-}$
Çarpma	$\dot{\times}$	$\ddot{\times}$
Bölme	$\dot{/}$	$\ddot{/}$
Sıralama	$\dot{<}$	$\ddot{<}$

Bu durumda 2.1. kesimdeki bütün tanımların aynen β -aritmetik için de uygulanacağı anlaşılmaktadır.

*-kalkülüste α -aritmetik girdiler üzerinde, β -aritmetik çıktılar (değerler) üzerinde kullanılır. Özellikle girdi ve çıktı değişimleri sırasıyla α -aritmetik ve β -aritmetik ile ölçülür. *-kalkülüste operatörler girdileri A kümesinde, çıktıları B kümesinde olan fonksiyonlara uygulanır. Aksi belirtilmedikçe bütün fonksiyonlar bu özellikte kabul edilecektir [1].

2.2.2. Tanım: Bir f fonksiyonun, eğer varsa A kümesindeki bir a noktasında *-limiti a noktasından farklı ve a ya α -yakınsayan girdilerin her sonsuz $\{a_n\}$ dizisi için çıktıların $\{f(a_n)\}$ dizisinin de β -yakınsadığı B kümesindeki bir tek b sayısıdır. Bu durumda

$$*\text{-}\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

yazılır [1].

2.2.3. Tanım: Bir f fonksiyonu A kümesindeki bir a noktasında *-süreklidir ancak a noktası f fonksiyonunun bir girdisi ve $*\text{-}\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ olmasıdır.

Eğer α ve β üreteçleri I birim fonksiyonu ise, *-limit ve *-süreklilik kavramları klasik limit ve klasik süreklilik ile özdeş olur, ancak bu durum α ve β üreteçleri I birim fonksiyonu olmadığında da gerçekleşebilir [1].

2.2.4. Tanım: α -aritmetikten β -aritmetiğe izomorfizm aşağıdaki üç özelliği sağlayan bir tek ι (iota) fonksiyonudur:

1. ι fonksiyonu birebirdir.
2. ι fonksiyonu A kümesinden B kümesine örtendir.
3. A kümesindeki herhangi u ve v sayıları için;

$$\iota(u \dot{+} v) = \iota(u) \ddot{+} \iota(v),$$

$$\iota(u \dot{-} v) = \iota(u) \ddot{-} \iota(v),$$

$$\begin{aligned}\iota(u \dot{\times} v) &= \iota(u) \dot{\times} \iota(v), \\ \iota(u \dot{\div} v) &= \iota(u) \dot{\div} \iota(v), \quad v \neq \dot{0} \\ u \dot{<} v &\Leftrightarrow \iota(u) \dot{<} \iota(v)\end{aligned}$$

olur.

Bu özellikleri sağlayan ι fonksiyonunun, her $x \in A$ için $\iota(x) = \beta\{\alpha^{-1}(x)\}$ olarak tek biçimde tanımlı ve her n tamsayısı için $\iota(\dot{n}) = \ddot{n}$ olduğu biliniyor.

Örneğin $u \dot{+} v = \iota^{-1}\{\iota(u) \dot{+} \iota(v)\}$ olduğu gibi α -aritmetikteki herhangi bir ifade kolayca β -aritmetikteki bir ifadeye dönüşebilir [1].

2.2.5. Tanım: Bir f fonksiyonu a sayısını α -iç nokta olarak kabul eden en az bir α -aralık üzerinde tanımlı olsun. Eğer $\ast\text{-}\lim_{x \rightarrow a} \{[f(x) \dot{-} f(a)] \dot{\div} [\iota(x) \dot{-} \iota(a)]\}$ limiti varsa,

bu $\ast$ -limit değerine f fonksiyonunun a noktasındaki $\ast$ -türevi denir ve $\left[\begin{smallmatrix} \ast \\ D f \end{smallmatrix} \right](a)$ ile gösterilir. Eğer bu $\ast$ -limit varsa f fonksiyonunun a noktasında $\ast$ -diferansiyellenebilir olduğu söylenir. Eğer $\left[\begin{smallmatrix} \ast \\ D f \end{smallmatrix} \right](a)$ $\ast$ -türevi varsa B kümesinde olmalıdır [1].

f fonksiyonunun $\ast$ -türevi, eğer varsa A kümesindeki her t sayısını $\left[\begin{smallmatrix} \ast \\ D f \end{smallmatrix} \right](t)$

sayısına atayan fonksiyondur ve $\ast D f$ ile gösterilir.

$\ast D$ operatörü β -toplamsal ve β -homojendir:

$$\ast D(f \dot{+} g) = \ast D f \dot{+} \ast D g,$$

$$\ast D(c \dot{\times} f) = c \dot{\times} \ast D f \quad (c \in B \text{ de bir sabit}).$$

2.2.6. Tanım: $[r, s]$ üzerinde $\ast$ -sürekli f fonksiyonunun $\ast$ -ortalaması $\ast M_r^s f$ ile gösterilir ve $\{a_1, \dots, a_n\}$ kümesi $[r, s]$ aralığının n -katlı α -parçalanışı olmak üzere n . terimi $f(a_1), \dots, f(a_n)$ değerlerinin β -ortalaması olan β -yakınsak dizinin β -limitidir.

$\ast M_r^s$ operatörü β -toplamsal ve β -homojendir [1].

2.2.7. Tanım: Verilen $[r, s]$ aralığı üzerinde $\ast$ -sürekli olan bir f fonksiyonunun bu aralık üzerindeki $\ast$ -integrali $[\iota(s) \dot{-} \iota(r)] \dot{\times} \ast M_r^s f$ biçiminde tanımlanır ve $\ast \int_r^s f$ ile

gösterilir. ${}^*\int_r^r f = \ddot{0}$ eşitliği tanım olarak alınır. Ayrıca $\{a_1, \dots, a_n\}$ kümesi

$[r, s]$ aralığının n -katlı α -parçalanışı ve k_n de $a_2 \dot{-} a_1, a_3 \dot{-} a_2, \dots, a_n \dot{-} a_{n-1}$ sayılarının

ortak değeri olmak üzere ${}^*\int_r^s f$ integrali n . terimi

$[\iota(k_n) \ddot{\times} f(a_1)] \ddot{+} \dots \ddot{+} [\iota(k_n) \ddot{\times} f(a_{n-1})]$ olan β -yakınsak dizinin β -limitidir [1].

*-integral β -toplamsal ve β -homojendir. Ayrıca *-integral aşağıdaki üç özelliği sağlayan tek operatördür [1].

1) Herhangi $[r, s]$ aralığı üzerinde tanımlı $h(x) = b$ sabit fonksiyonu için

$${}^*\int_r^s h = [\iota(s) \dot{-} \iota(r)] \ddot{\times} b$$

olur.

2) Herhangi $[r, s]$ aralığı üzerinde tanımlı ve *-sürekli f ile g fonksiyonları, eğer her $x \in [r, s]$ sayısı için $f(x) \ddot{\leq} g(x)$ koşulunu sağlarsa

$${}^*\int_r^s f \ddot{\leq} {}^*\int_r^s g$$

olur.

3) $r \dot{<} s \dot{<} t$ olan herhangi r, s, t sayıları ve $[r, t]$ aralığı üzerinde *-sürekli f fonksiyonu için

$${}^*\int_r^s f \ddot{+} {}^*\int_s^t f = {}^*\int_r^t f$$

olur.

2.2.8. Teorem (*-Kalkülüsün Birinci Ana Teoremi): Eğer f fonksiyonu $[r, s]$

aralığı üzerinde *-sürekli ve bu aralıktaki her x sayısı için $g(x) = {}^*\int_r^x f$ ise $[r, s]$

aralığı üzerinde ${}^*Dg = f$ olur [1].

2.2.9. Teorem (*-Kalkülüsün İkinci Ana Teoremi): Eğer *Dh *-türev fonksiyonu

$[r, s]$ aralığı üzerinde *-sürekli ise ${}^*\int_r^s {}^*Dh = h(s) \dot{-} h(r)$ olur [1].

2.2.10. Not: Verilen bir $a \in A$ sayısı sayısı için $\bar{a} = \alpha^{-1}(a)$ olsun. Girdileri A kümesinde ve çıktıları da B kümesinde olan bir f fonksiyonu için $\bar{f}(t) = \beta^{-1}(f(\alpha(t)))$ olsun. O zaman aşağıdaki bağıntılar vardır [1].

1) $*-\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ve $\lim_{t \rightarrow \bar{a}} \bar{f}(t)$ limitlerinden biri varsa diğeri de vardır ve eğer bu limitler varsa

$$*-\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \beta \left\{ \lim_{t \rightarrow \bar{a}} \bar{f}(t) \right\}$$

olur. Ayrıca f fonksiyonunun a noktasında $*$ -sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul $\bar{f}$ fonksiyonunun $\bar{a}$ noktasında sürekli olmasıdır.

2) $\left[D^* f \right](a)$ ve $\left[D\bar{f} \right](\bar{a})$ türevlerinden biri varsa diğeri de vardır ve eğer bu türevler varsa

$$\left[D^* f \right](a) = \beta \left\{ \left[D\bar{f} \right](\bar{a}) \right\}$$

olur.

3) Eğer f fonksiyonu $[r, s]$ aralığı üzerinde $*$ -sürekli ise

$$M_r^s f = \beta \left\{ M_{\bar{r}}^{\bar{s}} \bar{f} \right\}$$

ve

$$* \int_r^s f(x) d^* x = \beta \left(\int_{\bar{r}}^{\bar{s}} \bar{f}(x) dx \right)$$

olur.

4) α ve β üreteçleri sırasıyla $\alpha^{-1}(a)$ ve $\beta^{-1}(b)$ noktalarında klasik olarak sürekli olsun. O zaman $*-\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ olması için gerek ve yeterli koşul $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ olmasıdır. Benzer şekilde α ve β üreteçleri sırasıyla $\alpha^{-1}(a)$ ve $\beta^{-1}(f(a))$ noktalarında klasik olarak sürekli olsun. O zaman f fonksiyonun a noktasında $*$ -sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul f fonksiyonunun a noktasında klasik olarak sürekli olmasıdır.

2.2.11. Örnek: Eğer $*$ -kalkülüs için α ve β üreteçleri I ve $\exp$ fonksiyonlarından seçilirse aşağıdaki özel kalkülüsler elde edilir [1].

<u>Kalkülüs</u>	α	β
Klasik	I	I
Geometrik	I	exp
Anageometrik	exp	I
Bigeometrik	exp	exp

2.3. Newtonyen Olmayan Reel Sayılar Cismi

Bu kesimde Newtonyen olmayan reel cisim $\mathbb{R}(N)$ inşa edilecek ve bazı özellikleri verilecektir. Bu kesimdeki işlemler ve sıralama bağıntısı α bir üreteç olmak üzere 2.1. kesimde tanımlandığı gibidir. Ayrıca bu kesimde her $x, y \in \mathbb{R}(N)$ için $x \dot{+} y$ işlemi $\frac{x}{y} N$ biçiminde, $|x|$ α -mutlak değeri de $|x|_N$ biçiminde gösterilecektir. Yine bu kesim boyunca $|\cdot|_N$ sembolü Newtonyen olmayan mutlak değer olarak adlandırılacaktır.

2.3.1. Tanım: Newtonyen olmayan reel sayılar kümesi $\{\alpha(x) : x \in \mathbb{R}\}$ olarak tanımlanır ve $\mathbb{R}(N)$ veya $\mathbb{R}(N)_\alpha$ ile gösterilir [12].

Newtonyen olmayan reel sayılar kümesi $\mathbb{R}(N)$ için $(\dot{+})$ toplama ve $(\dot{\times})$ çarpma ikili işlemleri aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned} \dot{+} : \mathbb{R}(N) \times \mathbb{R}(N) &\rightarrow \mathbb{R}(N) \\ (x, y) &\rightarrow x \dot{+} y = \alpha \{ \alpha^{-1}(x) + \alpha^{-1}(y) \} \\ \dot{\times} : \mathbb{R}(N) \times \mathbb{R}(N) &\rightarrow \mathbb{R}(N) \\ (x, y) &\rightarrow x \dot{\times} y = \alpha \{ \alpha^{-1}(x) \times \alpha^{-1}(y) \}. \end{aligned}$$

2.3.2. Teorem: $(\mathbb{R}(N), \dot{+}, \dot{\times})$ tam sıralı cisimdir [12].

2.3.3. Tanım: $A \subset \mathbb{R}(N)$ kümesindeki bir x sayısının α -karesi $x \dot{\times} x$ olarak tanımlanır ve x^{2_N} ile gösterilir [12].

Her α -negatif olmayan t sayısı için $\sqrt{x}^N$ sembolü $t = \alpha \{ \sqrt{\alpha^{-1}(x)} \}$ sayısını göstermek için kullanılır, burada $t = \alpha \{ \sqrt{\alpha^{-1}(x)} \}$ α -karesi x sayısına eşit olan bir tek α -negatif olmayan, yani $t^{2_N} = x$ olan sayıdır. Bu $\sqrt{x}^N$ sayısına x sayısının α -karekökü denir [12].

A kümesindeki her x sayısı için

$$\sqrt{x^{2_N}} = |x|_N = \alpha(|\alpha^{-1}(x)|)$$

yazılır [12].

$x \in \mathbb{R}(N)$ elemanının p . Newtonyen olmayan üssü ve q . Newtonyen olmayan kökü

sırasıyla x^{p_N} ve $\sqrt[q]{x}$ ile gösterilir. Buna göre

$$\begin{aligned} x^{2_N} &= x \dot{\times} x = \alpha\{\alpha^{-1}(x) \times \alpha^{-1}(x)\} = \alpha\{[\alpha^{-1}(x)]^2\} \\ x^{3_N} &= x^{2_N} \dot{\times} x = \alpha\{\alpha^{-1}\{\alpha[\alpha^{-1}(x) \times \alpha^{-1}(x)]\} \times \alpha^{-1}(x)\} = \alpha\{[\alpha^{-1}(x)]^3\} \\ &\vdots \\ x^{p_N} &= x^{(p-1)_N} \dot{\times} x = \alpha\{[\alpha^{-1}(x)]^p\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

yazılır [12].

x_1 ve x_2 sayıları arasındaki Newtonyen olmayan uzaklık $|x_1 \dot{-} x_2|_N$ ile tanımlanır. Örneğin simetri özelliği aşağıdaki gibi ortaya çıkar:

$$|x_1 \dot{-} x_2|_N = \alpha\{|\alpha^{-1}(x_1) - \alpha^{-1}(x_2)|\} = \alpha\{|\alpha^{-1}(x_2) - \alpha^{-1}(x_1)|\} = |x_2 \dot{-} x_1|_N.$$

Herhangi $z \in \mathbb{R}(N)$ sayısı verilsin. Eğer $z \dot{>} \alpha(0)$ ise z Newtonyen olmayan pozitif reel sayı olarak adlandırılır, eğer $z \dot{<} \alpha(0)$ ise z Newtonyen olmayan negatif reel sayı olarak adlandırılır ve $z = \alpha(0)$ ise z işaretsiz Newtonyen olmayan reel sayı olarak adlandırılır. $\mathbb{R}^+(N)$ ve $\mathbb{R}^-(N)$ sırasıyla Newtonyen olmayan pozitif ve negatif reel sayı kümelerini gösterir [12].

Aşağıdaki önerme $\dot{+}, \dot{-}, \dot{\times}, \dot{/}$ işlemlerinin tanımından hemen görülür.

2.3.4. Önerme: $a, b, c, d \in \mathbb{R}(N)$, $p \in \mathbb{N}$ ve $b, d \neq \dot{0}$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler vardır:

$$1) \frac{a}{b} N \dot{+} \frac{c}{d} N = \frac{(a \dot{\times} d) \dot{+} (b \dot{\times} c)}{b \dot{\times} d} N,$$

$$2) \frac{a}{b} N \dot{-} \frac{c}{d} N = \frac{(a \dot{\times} d) \dot{-} (b \dot{\times} c)}{b \dot{\times} d} N,$$

$$3) \frac{a}{b} N \dot{\times} \frac{c}{d} N = \frac{a \dot{\times} c}{b \dot{\times} d} N,$$

$$4) c \neq \dot{0} \text{ olmak üzere } \frac{\frac{a}{b} N}{\frac{c}{d} N} = \frac{a}{b} N \dot{\times} \frac{d}{c} N = \frac{a \dot{\times} d}{b \dot{\times} c} N,$$

$$5) \left(\frac{a}{b} N \right)^{p_N} = \frac{a^{p_N}}{b^{p_N}} N,$$

$$6) (a \dot{\times} c)^{p_N} = a^{p_N} \dot{\times} c^{p_N},$$

$$7) a^{2_N} \dot{\div} c^{2_N} = (a \dot{\div} c) \dot{\times} (a \dot{+} c).$$

Aşağıdaki üç önerme $\mathbb{R}(N)$ deki mutlak değer tanımı ve özellikleri kullanılarak kolayca ispatlanabilir.

2.3.5. Önerme: $a, b \in \mathbb{R}(N)$ olmak üzere aşağıdaki özellikler vardır:

$$1) |a|_N \leq b \Leftrightarrow \dot{0} \dot{\div} b \leq a \leq b,$$

$$2) |a \dot{\times} b|_N = |a|_N \dot{\times} |b|_N,$$

$$3) b \neq \dot{0} \text{ olmak üzere } \left| \frac{a}{b} N \right|_N = \frac{|a|_N}{|b|_N} N \text{ dir.}$$

2.3.6. Önerme: $a, b, c, d \in \mathbb{R}(N)$ olmak üzere aşağıdaki eşitsizlikler vardır:

$$1) a \leq b \text{ ise } a \dot{+} c \leq b \dot{+} c \text{ ve } a \dot{\div} c \leq b \dot{\div} c,$$

$$2) a \leq b \text{ ve } c \leq d \text{ ise } a \dot{+} c \leq b \dot{+} d \text{ ve } a \dot{\div} d \leq b \dot{\div} c,$$

$$3) a \leq b \text{ ve } \dot{0} < c \text{ ise } a \dot{\times} c \leq b \dot{\times} c \text{ ve } \frac{a}{c} N \leq \frac{b}{c} N,$$

$$4) \dot{0} < a, b \text{ ve } a \leq b \text{ ise } \frac{1}{b} N \leq \frac{1}{a} N,$$

$$5) a \leq b \text{ ise } \dot{0} \dot{\div} b \leq \dot{0} \dot{\div} a \text{ olur.}$$

2.3.7. Önerme: $x, y \in \mathbb{R}(N)$ olmak üzere aşağıdaki eşitsizlikler vardır:

$$1) |x \dot{+} y|_N \leq |x|_N \dot{+} |y|_N \text{ (üçgen eşitsizliği) [12],}$$

$$2) ||x|_N \dot{\div} |y|_N|_N \leq |x \dot{\div} y|_N.$$

2.4. Newtonyen Olmayan Metrik Uzay ve Newtonyen Olmayan Metrik Uzaylarda Tamlık

2.4.1. Tanım: X boş olmayan bir küme olmak üzere $d_N : X \times X \rightarrow \mathbb{R}(N)$ fonksiyonu her $x, y, z \in X$ için aşağıdaki Newtonyen olmayan metrik aksiyomlarını sağlıyorsa (X, d_N) ikilisine bir Newtonyen olmayan metrik uzay, d_N fonksiyonuna da X üzerinde bir Newtonyen olmayan metrik denir [12]:

$$(NM1) d_N(x, y) = \dot{0} \Leftrightarrow x = y$$

$$(NM2) d_N(x, y) = d_N(y, x)$$

$$(NM3) d_N(x, y) \leq d_N(x, z) + d_N(z, y).$$

2.4.2. Sonuç: Eğer $d_N : \mathbb{R}(N) \times \mathbb{R}(N) \rightarrow \mathbb{R}(N)$ fonksiyonu $d_N(x, y) = |x \div y|_N$ şeklinde tanımlanırsa, o zaman $(\mathbb{R}(N), d_N)$ Newtonyen olmayan metrik uzay olur [12].

Aşağıdaki önerme Newtonyen olmayan metrik tanımının kolay bir sonucudur.

2.4.3. Önerme: (X, d_N) Newtonian olmayan metrik uzay olmak üzere her $x, y \in X$ için $d_N(x, y) \geq 0$ olur.

2.4.4. Tanım (Yakınsak dizi): Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı ve bir $x \in X$ verildiğinde her $n > n_0$ için $d_N(x_n, x) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ bulunabiliyorsa (x_n) dizisinin (X, d_N) Newtonyen olmayan metrik uzayında Newtonian olmayan yakınsak(α -yakınsak) olduğu söylenir ve $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ veya $n \rightarrow \infty$ iken $x_n \xrightarrow{N} x$ yazılır [12].

2.4.5. Tanım (Cauchy dizisi): Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $m, n > n_0$ için $d_N(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ bulunabiliyorsa (x_n) dizisine (X, d_N) Newtonyen olmayan metrik uzayında Newtonyen olmayan Cauchy dizisi denir.

Bir Newtonyen olmayan metrik uzayda her Newtonyen olmayan Cauchy dizisi yakınsaksa, bu uzayın Newtonyen olmayan tam metrik uzay olduğu söylenir[12].

2.4.6. Teorem: (X, d_N) Newtonyen olmayan metrik uzay olmak üzere aşağıdaki özellikler gerçekleşir:

- (a) Bu uzayda yakınsak bir dizi sınırlıdır ve limiti tektir,
- (b) Bu uzayda yakınsak her dizi Cauchy dizisidir [12].



3. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde Newtonyen olmayan reel sayı serileri ve has olmayan $*$ -integraller tanıtılacak ve onların yakınsaklık koşulları verilecektir. Bu kesim boyunca $\mathbb{R}(N)_\alpha$ kümesinde α -aritmetiğin işlem ve tanımları, $\mathbb{R}(N)_\beta$ kümesinde β -aritmetiğin işlem ve tanımları kullanılacaktır. Yine $*$ -kalkülüs $\mathbb{R}(N)_\alpha \times \mathbb{R}(N)_\beta$ kümesi üzerinde yapılan her şeyi ifade eder. Ayrıca bu bölümde bir karışıklığa sebep olmamak için bazı işlem ve tanımlarda N sembolü yerine üreticinin kendisi yazılacaktır. Örneğin bir x sayısının α -karesi x^{2_α} ile, β -yakınsak bir (x_n) dizisinin β -limiti $\lim_{x \rightarrow \infty}^\beta x_n$ ile gösterilecektir. Yine bu bölüm boyunca 2.4.4. Tanım ve 2.4.5. Tanımda verilen sırasıyla yakınsak dizi ve Cauchy dizisi kavramları 2.4.2. Sonuçta verilen Newtonyen olmayan mutlak değer metriğine göre düşünülecektir.

Şimdi $\mathbb{R}(N)_\alpha$ Newtonyen olmayan reel sayılar kümesi ve Newtonyen olmayan dizilerde bazı özellikler verilecektir, ardından Genişletilmiş Newtonyen olmayan reel sayı sistemi tanıtılacaktır.

3.1. Newtonyen Olmayan Reel Sayılarda Bazı Özellikler

3.1.1. Teorem: $(\mathbb{R}(N)_\alpha, |\cdot|_\alpha)$ uzayı Newtonyen olmayan tam metrik uzaydır.

İspat: $\mathbb{R}(N)_\alpha$ cisminin $d_N(x, y) = |x \div y|_\alpha$ metriği ile Newtonyen olmayan metrik uzay olduğu 2.4.2. Sonuçta gösterilmişti. Şimdi bu uzayın tamlığı gösterilsin. Bunun için herhangi bir (x_n) Newtonyen olmayan Cauchy dizisi verilsin. Herhangi bir $\zeta > 0$ sayısı verildiğinde, her $m, n > n_0$ için $d_N(x_n, x_m) = |x_n \div x_m|_\alpha < \alpha(\zeta) = \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece her $m, n > n_0$ için

$$\alpha^{-1}(|x_n \div x_m|_\alpha) < \zeta$$

ve dolayısıyla

$$|\alpha^{-1}(x_n) - \alpha^{-1}(x_m)| < \zeta$$

olur. Bu ise $(\alpha^{-1}(x_n))$ dizisinin $\mathbb{R}$ de bir Cauchy dizisi olması demektir. O halde $\alpha^{-1}(x_n) \rightarrow a$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{R}$ sayısı vardır. Dolayısıyla her $n > n_1$ için

$$|\alpha^{-1}(x_n) - a| < \zeta$$

olacak şekilde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır. $a \in \mathbb{R}$ olduğundan $\alpha(a) \in \mathbb{R}(N)_\alpha$ olur. Buradan her $\varepsilon > 0$ sayısı ve her $n > n_1$ için

$$|x_n - \alpha(a)|_\alpha = \alpha(|\alpha^{-1}(x_n) - a|) < \alpha(\zeta) = \varepsilon$$

bulunur. Bu ise $\alpha \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha(a)$ olduğunu gösterir. O halde $\mathbb{R}(N)_\alpha$ Newtonyen olmayan tam metrik uzaydır.

3.1.2. Tanım: Boş olmayan bir $X \subset \mathbb{R}(N)_\alpha$ alt kümesi verilsin. Eğer her $x \in X$ için $x \leq b$ ($x \geq a$) olacak şekilde bir $b \in \mathbb{R}(N)_\alpha$ ($a \in \mathbb{R}(N)_\alpha$) elemanı varsa X kümesi α -üstten sınırlı (α -alttan sınırlı) ve b sayısına da (a sayısına da) X kümesinin bir α -üst sınırı (α -alt sınırı) denir.

Eğer X kümesi α -üstten sınırlı ve α -alttan sınırlı ise onun α -sınırlı olduğu söylenir.

3.1.3. Tanım: Boş olmayan bir $X \subset \mathbb{R}(N)_\alpha$ alt kümesi verilsin. Her $x \in X$ için $x \leq M$ ($m \leq x$) olacak şekilde bir $M \in X$ ($m \in X$) elemanı varsa M elemanına (m elemanına) X kümesinin α -maksimal (α -minimal) elemanı denir ve kısaca $M = {}^\alpha \text{maks} \{x : x \in X\} = {}^\alpha \text{maks} X$ ($m = {}^\alpha \text{min} \{x : x \in X\} = {}^\alpha \text{min} X$) yazılır.

3.1.4. Tanım: Verilen bir α -üstten sınırlı (α -alttan sınırlı) $X \subset \mathbb{R}(N)_\alpha$ kümesi için $B = \{b : b, X \text{ kümesinin bir } \alpha\text{-üst sınırı}\}$ ($A = \{a : a, X \text{ kümesinin bir } \alpha\text{-alt sınırı}\}$) olsun. B kümesinin (A kümesinin) α -minimal (α -maksimal) elemanına X kümesinin α -supremumu (α -infimumu) denir ve ${}^\alpha \text{sup } X$ (${}^\alpha \text{inf } X$) ile gösterilir.

3.1.5. Teorem: Boş olmayan ve α -üstten sınırlı her $X \subset \mathbb{R}(N)_\alpha$ alt kümesinin bir tek α -supremumu vardır.

İspat: Boş olmayan ve α -üstten sınırlı $X \subset \mathbb{R}(N)_\alpha$ kümesi için $B = \{b : b, X \text{ kümesinin bir } \alpha\text{-üst sınırı}\}$ olsun. Her $x \in X$ ve her $b \in B$ için $x \leq b$ olduğundan $\alpha^{-1}(x) \leq \alpha^{-1}(b)$ olur. $\mathbb{R}$ kümesinin tamlık aksiyomuna göre her $x \in X$ ve her $b \in B$ için $\alpha^{-1}(x) \leq k \leq \alpha^{-1}(b)$ olacak şekilde bir tek $k \in \mathbb{R}$ ve α birebir

olduğundan $\alpha(k) = c$ olacak şekilde bir tek $c \in \mathbb{R}(N)_\alpha$ sayısı vardır. Buna göre her $x \in X$ için $x \dot{\leq} c$ olduğundan $c \in B$ olur. Aynı zamanda her $b \in B$ için $c \dot{\leq} b$ olduğundan $c = {}^\alpha \min B$ ve dolayısıyla $c = {}^\alpha \sup X$ elde edilir.

3.1.6. Teorem: Boş olmayan ve α -alttan sınırlı her $X \subset \mathbb{R}(N)_\alpha$ alt kümesinin bir tek α -infimumu vardır.

İspat: Boş olmayan ve α -alttan sınırlı $X \subset \mathbb{R}(N)_\alpha$ kümesi için $A = \{a : a, X \text{ kümesinin bir } \alpha\text{-alt sınırı}\}$ olsun. Her $x \in X$ ve her $a \in A$ için $a \dot{\leq} x$ olduğundan $\alpha^{-1}(a) \leq \alpha^{-1}(x)$ olur. $\mathbb{R}$ kümesinin tamlık aksiyomuna göre her $x \in X$ ve her $a \in A$ için $\alpha^{-1}(a) \leq k \leq \alpha^{-1}(x)$ olacak şekilde bir tek $k \in \mathbb{R}$ ve α birebir olduğundan $\alpha(k) = c$ olacak şekilde bir tek $c \in \mathbb{R}(N)_\alpha$ sayısı vardır. Buna göre her $x \in X$ için $c \dot{\leq} x$ olduğundan $c \in A$ olur. Aynı zamanda her $a \in A$ için $a \dot{\leq} c$ olduğundan $c = {}^\alpha \max A$ ve dolayısıyla $c = {}^\alpha \inf X$ elde edilir.

3.1.7. Teorem (α -supremum özelliği): Boş olmayan α -üstten sınırlı bir $A \subset \mathbb{R}(N)_\alpha$ kümesi verildiğinde $c = {}^\alpha \sup A$ olması için gerekli ve yeterli koşul

- (1) c sayısının A kümesi için bir α -üst sınır olması ve
- (2) her $\varepsilon \dot{>} 0$ sayısı için $a_\varepsilon \dot{>} c \dot{-} \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $a_\varepsilon \in A$ sayısının bulunmasıdır.

İspat: $c = {}^\alpha \sup A$ olsun. α -supremum tanımı gereğince (1) açıktır. (2) özelliğinin ispatı için aksi kabul edilsin. O zaman en az bir $\varepsilon \dot{>} 0$ ve her $a_\varepsilon \in A$ sayısı için $a_\varepsilon \dot{\leq} c \dot{-} \varepsilon \dot{<} c$ olur. Bu ise c sayısının A kümesi için α -supremum olması ile çelişir. Buna göre (2) özelliği doğrudur.

Tersine (1) ve (2) özellikleri sağlansın. $c = {}^\alpha \sup A$, yani d sayısı A kümesinin herhangi bir α -üst sınırı olmak üzere $c \dot{\leq} d$ olduğu gösterilsin. Aksi kabul edilirse d sayısı A kümesinin bir α -üst sınırı olmak üzere $c \dot{>} d$ olmalıdır. Eğer $\varepsilon = c \dot{-} d \dot{>} 0$ alınırsa (2) özelliğinden dolayı $a_\varepsilon \dot{>} c \dot{-} (c \dot{-} d)$ olacak şekilde bir $a_\varepsilon \in A$ vardır. Buna göre $a_\varepsilon \dot{>} c \dot{-} c \dot{+} d$ ve dolayısıyla $a_\varepsilon \dot{>} d$ elde edilir. Bu ise d sayısının A kümesinin α -üst sınırı olmasıyla çelişir. O halde $c = {}^\alpha \sup A$ olmalıdır.

Benzer şekilde aşağıdaki teorem ispatlanabilir.

3.1.8. Teorem (α -infimum özelliği): Boş olmayan ve α -alttan sınırlı bir $A \subset \mathbb{R}(N)_\alpha$ kümesi verildiğinde $c = {}^\alpha\inf A$ olması için gerekli ve yeterli koşul

(1) c sayısının A kümesi için bir α -alt sınır olması ve

(2) her $\varepsilon \dot{>} 0$ sayısı için $a_\varepsilon \dot{<} c \dot{+} \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $a_\varepsilon \in A$ sayısının bulunmasıdır.

3.1.9. Teorem: $\mathbb{R}(N)_\alpha$ kümesinde (a_n) ve (b_n) α -yakınsak dizileri ile bir $c \in \mathbb{R}(N)_\alpha$ sayısı verilsin. Eğer ${}^\alpha\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ve ${}^\alpha\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ ise aşağıdaki ifadeler doğrudur:

$$1) {}^\alpha\lim_{n \rightarrow \infty} (c \dot{\times} a_n) = c \dot{\times} a.$$

$$2) {}^\alpha\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \dot{+} b_n) = {}^\alpha\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \dot{+} {}^\alpha\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \dot{+} b.$$

$$3) {}^\alpha\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \dot{\times} b_n) = {}^\alpha\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \dot{\times} {}^\alpha\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \dot{\times} b.$$

4) $a \neq 0$ ise her $n > n_0$ için $|a_n|_\alpha \dot{>} \frac{|a|_\alpha}{2} \alpha$ olacak şekilde en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır.

$$5) \text{ Her } n \in \mathbb{N} \text{ için } b_n \neq 0 \text{ ve } b \neq 0 \text{ ise } {}^\alpha\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \alpha \right) = \frac{{}^\alpha\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{{}^\alpha\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} \alpha = \frac{a}{b} \alpha.$$

$$6) {}^\alpha\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|_\alpha = |a|_\alpha.$$

İspat: 1) $c = 0$ hali için eşitliğin doğruluğu açıktır, buna göre $c \neq 0$ kabul edilsin.

${}^\alpha\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ olduğundan herhangi bir $\varepsilon \dot{>} 0$ sayısı verildiğinde her $n > n_0$ için

$$|a_n \dot{-} a|_\alpha \dot{<} \frac{\varepsilon}{|c|_\alpha} \alpha$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Buna göre her $n > n_0$ için

$$|(c \dot{\times} a_n) \dot{-} (c \dot{\times} a)|_\alpha = |c|_\alpha \dot{\times} |a_n \dot{-} a|_\alpha \dot{<} |c|_\alpha \dot{\times} \frac{\varepsilon}{|c|_\alpha} \alpha = \varepsilon$$

olur. Bu ${}^\alpha\lim_{n \rightarrow \infty} (c \dot{\times} a_n) = c \dot{\times} a$ olduğunu gösterir.

2) ${}^\alpha\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ve ${}^\alpha\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ olduğundan herhangi bir $\varepsilon \dot{>} 0$ sayısı verildiğinde her $n > n_1$ için

$$|a_n \dot{-} a|_\alpha < \frac{\varepsilon}{2} \alpha$$

olacak şekilde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ ve her $n > n_2$ için

$$|b_n \dot{-} b|_\alpha < \frac{\varepsilon}{2} \alpha$$

olacak şekilde bir $n_2 \in \mathbb{N}$ vardır. Eğer $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ alınırsa her $n > n_0$ için üçgen eşitsizliğinden

$$|(a_n \dot{+} b_n) \dot{-} (a \dot{+} b)|_\alpha = |a_n \dot{-} a \dot{+} b_n \dot{-} b|_\alpha \leq |a_n \dot{-} a|_\alpha \dot{+} |b_n \dot{-} b|_\alpha < \frac{\varepsilon}{2} \alpha \dot{+} \frac{\varepsilon}{2} \alpha = \varepsilon$$

yazılır. O halde ${}^\alpha\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \dot{+} b_n) = {}^\alpha\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \dot{+} {}^\alpha\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \dot{+} b$ olur.

3) (a_n) dizisi α -yakınsak olduğundan sınırlı ve dolayısıyla her $n \in \mathbb{N}$ için $|a_n|_\alpha \leq K$ olacak şekilde bir $K > 0$ sayısı vardır. Ayrıca ${}^\alpha\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ve ${}^\alpha\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ olduğundan herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $n > n_1$ için

$$|a_n \dot{-} a|_\alpha < \frac{\varepsilon}{2 \dot{\times} K} \alpha$$

olacak şekilde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ ve her $n > n_2$ için

$$|b_n \dot{-} b|_\alpha < \frac{\varepsilon}{2 \dot{\times} (|b|_\alpha \dot{+} 1)} \alpha$$

olacak şekilde bir $n_2 \in \mathbb{N}$ vardır. Eğer $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ alınırsa her $n > n_0$ için

$$\begin{aligned} |(a_n \dot{\times} b_n) \dot{-} (a \dot{\times} b)|_\alpha &= |(a_n \dot{\times} b_n) \dot{-} (a_n \dot{\times} b) \dot{+} (a_n \dot{\times} b) \dot{-} (a \dot{\times} b)|_\alpha \\ &= |(a_n \dot{\times} b_n) \dot{-} (a_n \dot{\times} b)|_\alpha \dot{+} |(a_n \dot{\times} b) \dot{-} (a \dot{\times} b)|_\alpha \\ &= |a_n| \dot{\times} |a_n \dot{-} a|_\alpha \dot{+} |b| \dot{\times} |b_n \dot{-} b|_\alpha \\ &\leq K \dot{\times} \frac{\varepsilon}{2 \dot{\times} K} \alpha \dot{+} |b| \dot{\times} \frac{\varepsilon}{2 \dot{\times} (|b|_\alpha \dot{+} 1)} \alpha \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \alpha \dot{+} \frac{\varepsilon}{2} \alpha = \varepsilon \end{aligned}$$

bulunur. Bu ${}^\alpha\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \dot{\times} b_n) = {}^\alpha\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \dot{\times} {}^\alpha\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \dot{\times} b$ olduğunu gösterir.

4) Öncelikle gerekli olan bir eşitsizlik gösterilsin. 2.3.7. Önerme (2) şıkkındaki eşitsizliğe 2.3.5. Önerme (1) şıkkındaki özellik uygulanırsa, her $x, y \in \mathbb{R}(N)_\alpha$ için

$$0 \dot{-} |x \dot{-} y|_\alpha \leq |x|_\alpha \dot{-} |y|_\alpha \leq |x \dot{-} y|_\alpha \quad (3.1.1)$$

yazılır. Eğer $\varepsilon = \frac{|a|_\alpha}{2} \alpha > 0$ alınırsa, her $n > n_0$ için

$$|a_n \dot{-} a|_\alpha < \frac{|a|_\alpha}{2} \alpha$$

olacak şekilde en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Her $n > n_0$ için simetri özelliği ve (3.1.1) eşitsizliği gereğince

$$\begin{aligned} |a_n|_\alpha &= |a_n \dot{+} a \dot{-} a|_\alpha = |a \dot{-} (a \dot{-} a_n)|_\alpha \\ &\geq |a|_\alpha \dot{-} |a \dot{-} a_n|_\alpha \\ &= |a|_\alpha \dot{-} |a_n \dot{-} a|_\alpha \\ &> |a|_\alpha \dot{-} \frac{|a|_\alpha}{2} \alpha = \frac{|a|_\alpha}{2} \alpha \end{aligned}$$

olur. Bu isteneni verir.

5) ${}^\alpha \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ ve $b \neq 0$ olduğundan (4) şıkkı gereğince her $n > n_1$ için $|b_n|_\alpha > \frac{|b|_\alpha}{2} \alpha$

olacak şekilde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Ayrıca ${}^\alpha \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ve ${}^\alpha \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ olduğundan

herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $n > n_2$ için

$$|a_n \dot{-} a|_\alpha < \frac{\varepsilon \dot{\times} |b|_\alpha}{4} \alpha$$

olacak şekilde bir $n_2 \in \mathbb{N}$ ve her $n > n_3$ için

$$|b_n \dot{-} b|_\alpha < \frac{\varepsilon \dot{\times} |b|_\alpha^2}{4 \dot{\times} (|a|_\alpha \dot{+} |b|_\alpha)} \alpha$$

olacak şekilde bir $n_3 \in \mathbb{N}$ vardır. Aynı zamanda $b \neq 0$ olduğundan $|a|_\alpha \leq |a|_\alpha \dot{+} |b|_\alpha$

ve dolayısıyla $\frac{|a|_\alpha}{|a|_\alpha \dot{+} |b|_\alpha} \alpha \leq 1$ olur. Eğer $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$ alınırsa her $n > n_0$ için

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_n}{b_n} \alpha \dot{-} \frac{a}{b} \alpha \right|_\alpha &= \left| \frac{(a_n \dot{\times} b) \dot{-} (a \dot{\times} b_n)}{b \dot{\times} b_n} \alpha \right|_\alpha = \frac{|(a_n \dot{\times} b) \dot{-} (a \dot{\times} b) \dot{+} (a \dot{\times} b) \dot{-} (a \dot{\times} b_n)|_\alpha}{|b|_\alpha \dot{\times} |b_n|_\alpha} \alpha \\ &\leq \frac{|(a_n \dot{\times} b) \dot{-} (a \dot{\times} b)|_\alpha \dot{+} |(a \dot{\times} b) \dot{-} (a \dot{\times} b_n)|_\alpha}{|b|_\alpha \dot{\times} |b_n|_\alpha} \alpha \\ &= \frac{|b \dot{\times} (a_n \dot{-} a)|_\alpha \dot{+} |a \dot{\times} (b \dot{-} b_n)|_\alpha}{|b|_\alpha \dot{\times} |b_n|_\alpha} \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{|b|_\alpha \dot{\times} |a_n \dot{-} a|_\alpha}{|b|_\alpha \dot{\times} |b_n|_\alpha} \alpha \dot{+} \frac{|a|_\alpha \dot{\times} |b \dot{-} b_n|_\alpha}{|b|_\alpha \dot{\times} |b_n|_\alpha} \alpha \\
&= \frac{|a_n \dot{-} a|_\alpha}{|b_n|_\alpha} \alpha \dot{+} \frac{|a|_\alpha}{|b|_\alpha} \alpha \dot{\times} \frac{|b \dot{-} b_n|_\alpha}{|b_n|_\alpha} \alpha \\
&= \frac{1}{|b_n|_\alpha} \alpha \dot{\times} \left(|a_n \dot{-} a|_\alpha \dot{+} \frac{|a|_\alpha}{|b|_\alpha} \alpha \dot{\times} |b \dot{-} b_n|_\alpha \right) \\
&\dot{<} \frac{1}{\frac{|b|_\alpha}{2} \alpha} \alpha \dot{\times} \left(\frac{\varepsilon \dot{\times} |b|_\alpha}{4} \alpha \dot{+} \frac{|a|_\alpha}{|b|_\alpha} \alpha \dot{\times} \frac{\varepsilon \dot{\times} |b|_\alpha^2}{4 \dot{\times} (|a|_\alpha \dot{+} |b|_\alpha)} \alpha \right) \\
&= \frac{2}{|b|_\alpha} \alpha \dot{\times} \left(\frac{\varepsilon \dot{\times} |b|_\alpha}{4} \alpha \dot{+} \frac{\varepsilon \dot{\times} |b|_\alpha}{4} \dot{\times} \frac{|a|_\alpha}{(|a|_\alpha \dot{+} |b|_\alpha)} \alpha \right) \\
&= \frac{\varepsilon}{2} \alpha \dot{+} \frac{\varepsilon}{2} \alpha \dot{\times} \frac{|a|_\alpha}{(|a|_\alpha \dot{+} |b|_\alpha)} \alpha \\
&\dot{<} \frac{\varepsilon}{2} \alpha \dot{+} \frac{\varepsilon}{2} \alpha \dot{\times} 1 = \varepsilon
\end{aligned}$$

olur. Bu ${}^\alpha \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \alpha \right) = \frac{{}^\alpha \lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{{}^\alpha \lim_{n \rightarrow \infty} b_n} \alpha = \frac{a}{b} \alpha$ olduğunu gösterir.

5) ${}^\alpha \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ olduğundan herhangi bir $\varepsilon \dot{>} 0$ sayısı verildiğinde her $n > n_0$ için

$$|a_n \dot{-} a|_\alpha \dot{<} \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Buna göre 2.3.7. Önerme (2) şıkkı gereğince her $n > n_0$ için

$$||a_n|_\alpha \dot{-} |a|_\alpha|_\alpha = |a_n \dot{-} a|_\alpha \dot{<} \varepsilon$$

ve dolayısıyla ${}^\alpha \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|_\alpha = |a|_\alpha$ elde edilir.

3.1.10. Örnek: Eğer $p > 0$ ise ${}^\alpha \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\dot{n}^{p_\alpha}} \alpha = 0$ olur.

Çözüm: Herhangi bir $\varepsilon \dot{>} 0$ sayısı verildiğinde $n_0 = \left\lceil \left(\frac{1}{\alpha^{-1}(\varepsilon)} \right)^{1/p} \right\rceil + 1$ sayısı olmak

üzere $n_0 > \left(\frac{1}{\alpha^{-1}(\varepsilon)} \right)^{1/p}$ olacağından

$$\begin{aligned}\alpha(n_0)^{p_\alpha} = \dot{n}_0^{p_\alpha} &\dot{>} \left[\alpha \left(\left(\frac{1}{\alpha^{-1}(\varepsilon)} \right)^{1/p} \right) \right]^{p_\alpha} = \alpha \left(\frac{1}{\alpha^{-1}(\varepsilon)} \right) = \alpha \left(\frac{\alpha^{-1}(\alpha(1))}{\alpha^{-1}(\varepsilon)} \right) \\ &= \alpha \left(\frac{\alpha^{-1}(\dot{1})}{\alpha^{-1}(\varepsilon)} \right) = \frac{\dot{1}}{\varepsilon} \alpha\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece her $n > n_0$ için

$$\left| \frac{\dot{1}}{\dot{n}^{p_\alpha}} \alpha \dot{-} \dot{0} \right|_\alpha = \left| \frac{\dot{1}}{\dot{n}^{p_\alpha}} \alpha \right|_\alpha < \frac{\dot{1}}{\dot{n}_0^{p_\alpha}} \alpha = \varepsilon$$

olur ve bu ispatı tamamlar.

3.1.11. Tanım: $\mathbb{R}(N)_\alpha$ kümesinde verilen bir (a_n) dizisi, her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \dot{\leq} a_{n+1}$ koşulunu sağlıyorsa α -monoton artan dizi, her $n \in \mathbb{N}$ için $a_{n+1} \dot{\leq} a_n$ koşulunu sağlıyorsa α -monoton azalan dizi diye adlandırılır.

Eğer (a_n) dizisi α -monoton artan veya α -monoton azalan ise onun α -monoton olduğu söylenir.

3.1.12. Teorem: $\mathbb{R}(N)_\alpha$ kümesinde verilen bir (a_n) dizisi α -monoton artan ve α -üstten sınırlı ise α -yakınsaktır ve ${}^\alpha \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = {}^\alpha \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$ olur.

İspat: (a_n) dizisi α -monoton artan ve α -üstten sınırlı olsun. (a_n) dizisinin α -üstten sınırlı olması gereğince dizinin terimleriyle oluşturulan $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ kümesi α -üstten sınırlıdır. O zaman ${}^\alpha \sup A = t$ olacak şekilde bir $t \in \mathbb{R}(N)_\alpha$ sayısı vardır. α -supremum özelliği gereğince herhangi bir $\varepsilon \dot{>} \dot{0}$ sayısı verildiğinde $a_{n_0} \dot{>} t \dot{-} \varepsilon$ olacak şekilde bir $a_{n_0} \in A$ ve dolayısıyla bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Bu takdirde (a_n) dizisinin α -monoton artan olması gereğince her $n > n_0$ için

$$t \dot{-} \varepsilon < a_{n_0} \dot{\leq} a_n \dot{\leq} t < t \dot{+} \varepsilon$$

yazılır. Buna göre her $n > n_0$ için

$$t \dot{-} \varepsilon < a_n < t \dot{+} \varepsilon$$

ve dolayısıyla

$$\dot{0} \dot{-} \varepsilon < a_n \dot{-} t < \varepsilon$$

elde edilir. Böylece 2.3.5. Önerme (1) şıkkına göre her $n > n_0$ için

$$|a_n \dot{-} t|_\alpha < \varepsilon$$

yazılır. Bu (a_n) dizisinin α -yakınsak ve ${}^\alpha\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = {}^\alpha\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$ olduğunu gösterir.

Benzer şekilde aşağıdaki teorem ispatlanabilir.

3.1.13. Teorem: $\mathbb{R}(N)_\alpha$ kümesinde verilen bir (a_n) dizisi α -monoton azalan ve α -alttan sınırlı ise (a_n) dizisi α -yakınsaktır ve ${}^\alpha\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = {}^\alpha\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n$ olur.

3.1.14. Tanım: $\mathbb{R}(N)_\alpha$ kümesinde verilen bir (a_n) dizisi için ${}^\alpha\lim_{n \rightarrow \infty} ({}^\alpha\sup \{a_k : k \geq n\}) = {}^\alpha\lim_{n \rightarrow \infty} ({}^\alpha\sup_{k \geq n} a_k)$, α -limitine (a_n) dizisinin α -üst limiti(veya α -limit supremumu) denir ve ${}^\alpha\limsup a_n$ ile gösterilir.

3.1.15. Tanım: $\mathbb{R}(N)_\alpha$ kümesinde verilen bir (a_n) dizisi için ${}^\alpha\lim_{n \rightarrow \infty} ({}^\alpha\inf \{a_k : k \geq n\}) = {}^\alpha\lim_{n \rightarrow \infty} ({}^\alpha\inf_{k \geq n} a_k)$ α -limitine (a_n) dizisinin α -alt limiti(veya α -limit infimumu) denir ve ${}^\alpha\liminf a_n$ ile gösterilir.

3.1.16. Tanım: $\mathbb{R}(N)_\alpha$ Newtonyen olmayan reel sayılar kümesinde α -artı (pozitif) sonsuz $+\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha(x)$, α -eksi (negatif) sonsuz ise $-\infty = \lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha(x)$ olarak tanımlanır.

Bu tanımdan yola çıkılarak $\mathbb{R}(N)_\alpha$ Newtonyen olmayan reel sayılar kümesi $\mathbb{R}(N)_\alpha = \{\alpha(x) : x \in \mathbb{R}\} = (-\infty, +\infty)$ şeklinde α -açık aralık olarak da ifade edilebilir.

3.1.17. Tanım: Genişletilmiş Newtonyen olmayan reel sayılar sistemi $\mathbb{R}(N)_\alpha \cup \{-\infty, +\infty\}$ olarak tanımlanır ve $\bar{\mathbb{R}}(N)_\alpha$ ile gösterilir. Genişletilmiş Newtonyen olmayan reel sayılar sisteminde genişletilmiş reel sayılar sistemine benzer olarak aşağıdaki tanımlar verilir.

a) Her $x \in \mathbb{R}(N)_\alpha$ için $-\infty < x < +\infty$, $x \dot{+} (+\infty) = x \dot{+} \infty = +\infty$, $x \dot{+} (-\infty) = x \dot{+} -\infty = -\infty$, $x \dot{-} (+\infty) = x \dot{-} \infty = -\infty$, $x \dot{-} (-\infty) = x \dot{-} -\infty = +\infty$, $\frac{x}{\dot{+}\infty} \alpha = \frac{x}{+\infty} \alpha = \dot{0}$ olur.

b) Eğer $x \dot{>} \dot{0}$ ise $x \dot{\times} (-\infty) = -\infty$, $x \dot{\times} (+\infty) = +\infty$, $\frac{x}{\dot{0}} \alpha = +\infty$ olur.

c) Eğer $x \dot{<} \dot{0}$ ise $x \dot{\times} (-\infty) = +\infty$, $x \dot{\times} (+\infty) = -\infty$, $\frac{x}{\dot{0}} \alpha = -\infty$ olur.

3.1.18. Tanım: $\mathbb{R}(N)_\alpha$ kümesinde bir (a_n) dizisi verilsin. Herhangi bir $\varepsilon \dot{>} \dot{0}$ sayısı verildiğinde her $n > n_0$ için $a_n \dot{>} \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabiliyorsa, (a_n) dizisi α -artı sonsuza $(+\infty)$ iraksaktır denir ve bu durumda ${}^\alpha\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ yazılır.

3.1.19. Tanım: $\mathbb{R}(N)_\alpha$ kümesinde bir (a_n) dizisi verilsin. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $n > n_0$ için $a_n < 0 \div \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabiliyorsa, (a_n) dizisi α -eksi sonsuza ($\div \infty$) ıraksaktır denir ve bu durumda ${}^\alpha \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \div \infty$ yazılır.

3.1.20. Teorem: $\mathbb{R}(N)_\alpha$ kümesinde α -yakınsak (a_n) dizisi verilsin ve ${}^\alpha \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ olsun. (a_n) dizisinin her (a_{n_k}) alt dizisi de a elemanına α -yakınsar.

İspat: ${}^\alpha \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ olduğundan herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $n > n_1$ için

$|x_n \div a|_\alpha < \frac{\varepsilon}{2} \alpha$ olacak şekilde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Ayrıca (a_n) dizisi α -yakınsak olduğundan Newtonyen olmayan Cauchy dizisi olur. Dolayısıyla her $n, m > n_2$ için $|x_n \div x_m|_\alpha < \frac{\varepsilon}{2} \alpha$ olacak şekilde bir $n_2 \in \mathbb{N}$ vardır. Eğer $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ alınırsa, her $n, n_k > n_0$ için

$$|x_{n_k} \div a|_\alpha = |x_{n_k} \div x_n \div x_n \div a|_\alpha \leq |x_{n_k} \div x_n|_\alpha \div |x_n \div a|_\alpha < \frac{\varepsilon}{2} \alpha \div \frac{\varepsilon}{2} \alpha = \varepsilon$$

elde edilir ve bu ispatı tamamlar.

3.2. Newtonyen Olmayan Reel Sayı Serileri

3.2.1. Tanım: Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \in \mathbb{R}(N)_\alpha$ olmak üzere bir (a_n) Newtonyen olmayan reel sayı dizisi verildiğinde

$$a_1 \div a_2 \div \dots \div a_n \div \dots = {}_\alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n = {}_N \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

sonsuz α -toplamına Newtonyen olmayan reel sayı serisi veya α -seri denir. Burada a_n sayılarına Newtonyen olmayan serinin terimleri denir.

3.2.2. Tanım: ${}_\alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bir Newtonyen olmayan seri olmak üzere, genel terimi

$S_m = {}_\alpha \sum_{n=1}^m a_n$ olan (S_m) dizisine ${}_\alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin Newtonyen olmayan kısmi

toplamlar dizisi veya α -kısmi toplamlar dizisi denir. Yine $S_m = {}_\alpha \sum_{n=1}^m a_n$ α -toplama ise Newtonyen olmayan serinin Newtonyen olmayan m . kısmi toplamı denir.

3.2.3. Tanım: ${}_ \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin (S_n) kısmi toplamlar dizisi yakınsaksa (α -yakınsaksa), bu serinin yakınsak (α -yakınsak) olduğu söylenir. Eğer ${}^\alpha \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ ise ${}_ \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ yazılır. ${}^\alpha \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ limiti yoksa veya ${}^\alpha \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \pm \infty$ ya da ${}^\alpha \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \dot{\pm} \infty$ ise ${}_ \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin ıraksak olduğu söylenir.

${}_ \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi ve $i \geq 2$ doğal sayısı verildiğinde ${}_ \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n = {}_\alpha \sum_{n=1}^{i-1} a_n \dot{+} {}_\alpha \sum_{n=i}^{\infty} a_n$ olur.

Böylece ${}_ \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin yakınsak olması için gerekli ve yeterli koşul ${}_ \alpha \sum_{n=i}^{\infty} a_n$ serisinin yakınsak olmasıdır. Yani baştan sonlu tane terimin çıkarılması veya eklenmesi serinin karakterini değiştirmez.

3.2.4. Örnek: ${}_ \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{(n-1)_\alpha}} \alpha = \dot{2}$ olduğu gösterilsin:

Eğer (S_n) verilen serinin kısmi toplamlar dizisi ise

$$\begin{aligned} S_1 &= \dot{1} = \dot{2} \dot{-} \frac{1}{2^{(1-1)_\alpha}} \alpha \\ S_2 &= \dot{1} \dot{+} \frac{1}{2} \alpha = \alpha \left(1 + \alpha^{-1} \left(\frac{1}{2} \alpha \right) \right) = \alpha \left(1 + \frac{1}{2} \right) = \alpha \left(\frac{3}{2} \right) = \alpha \left(\frac{\alpha^{-1}(\alpha(3))}{\alpha^{-1}(\alpha(2))} \right) \\ &= \frac{\dot{3}}{2} \alpha \\ &= \dot{2} \dot{-} \frac{1}{2^{(2-1)_\alpha}} \alpha \\ S_3 &= \dot{1} \dot{+} \frac{1}{2} \alpha \dot{+} \frac{1}{4} \alpha = S_2 \dot{+} \frac{1}{4} \alpha = \frac{\dot{7}}{4} \alpha = \dot{2} \dot{-} \frac{1}{2^{(3-1)_\alpha}} \alpha \\ &\vdots \\ S_n &= \dot{2} \dot{-} \frac{1}{2^{(n-1)_\alpha}} \alpha \end{aligned}$$

olur. Bu takdirde her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
|S_n \dot{\div} \dot{2}|_\alpha &= \left| \left(\dot{2} \dot{\div} \frac{\dot{1}}{\dot{2}^{(n-1)_\alpha}} \alpha \right) \dot{\div} \dot{2} \right|_\alpha = \alpha \left(\left| \alpha^{-1} \left(\dot{2} \dot{\div} \frac{\dot{1}}{\dot{2}^{(n-1)_\alpha}} \alpha \right) - 2 \right|_\alpha \right) \\
&= \alpha \left(\left| \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}} \right) - 2 \right| \right) \\
&= \alpha \left(\left| \frac{1}{2^{n-1}} \right| \right) \\
&= \alpha \left(\frac{1}{2^{n-1}} \right)
\end{aligned}$$

bulunur. Şimdi herhangi bir $\varepsilon \dot{>} \dot{0}$ sayısı verilsin. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$ olduğundan

$$n_0 = \left\lceil \log_2 \frac{1}{\alpha^{-1}(\varepsilon)} + 1 \right\rceil + 1 > \log_2 \frac{1}{\alpha^{-1}(\varepsilon)} + 1$$

alındığında her $n > n_0$ için

$$\left| \frac{1}{2^{n-1}} - 0 \right| < \frac{1}{2^{n_0-1}} < \frac{1}{\frac{1}{\alpha^{-1}(\varepsilon)}} = \alpha^{-1}(\varepsilon)$$

ve böylece

$$|S_n \dot{\div} \dot{2}|_\alpha = \alpha \left(\frac{1}{2^{n-1}} \right) \dot{<} \alpha(\alpha^{-1}(\varepsilon)) = \varepsilon$$

elde edilir.

3.2.5. Örnek (Newtoneyen olmayan harmonik seri): ${}_\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\dot{1}}{\dot{n}} \alpha$ serisinin ıraksak

olduğu gösterilsin:

Bu serinin kısmi toplamlar dizisi (S_n) olsun. O zaman her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
S_2 &= \dot{1} \dot{+} \frac{\dot{1}}{\dot{2}} \alpha \\
S_4 &= \dot{1} \dot{+} \frac{\dot{1}}{\dot{2}} \alpha \dot{+} \left(\frac{\dot{1}}{\dot{3}} \alpha \dot{+} \frac{\dot{1}}{\dot{4}} \alpha \right) \dot{>} \dot{1} \dot{+} \frac{\dot{1}}{\dot{2}} \alpha \dot{+} \left(\frac{\dot{1}}{\dot{4}} \alpha \dot{+} \frac{\dot{1}}{\dot{4}} \alpha \right) = \dot{1} \dot{+} \frac{\dot{2}}{\dot{2}} \alpha \\
S_8 &= \dot{1} \dot{+} \frac{\dot{1}}{\dot{2}} \alpha \dot{+} \left(\frac{\dot{1}}{\dot{3}} \alpha \dot{+} \frac{\dot{1}}{\dot{4}} \alpha \right) \dot{+} \left(\frac{\dot{1}}{\dot{5}} \alpha \dot{+} \frac{\dot{1}}{\dot{6}} \alpha \dot{+} \frac{\dot{1}}{\dot{7}} \alpha \dot{+} \frac{\dot{1}}{\dot{8}} \alpha \right) \\
&\dot{>} \dot{1} \dot{+} \frac{\dot{1}}{\dot{2}} \alpha \dot{+} \left(\frac{\dot{1}}{\dot{4}} \alpha \dot{+} \frac{\dot{1}}{\dot{4}} \alpha \right) \dot{+} \left(\frac{\dot{1}}{\dot{8}} \alpha \dot{+} \frac{\dot{1}}{\dot{8}} \alpha \dot{+} \frac{\dot{1}}{\dot{8}} \alpha \dot{+} \frac{\dot{1}}{\dot{8}} \alpha \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\alpha \\
&= 1 + \frac{3}{2}\alpha \\
&\vdots \\
S_{2^k} &\geq 1 + \frac{k}{2}\alpha
\end{aligned}$$

bulunur. Buna göre (S_n) dizisinin (S_{2^k}) alt dizisi sınırlı değildir ve 2.4.6. Teorem (b) şıkkına göre bu alt dizi ıraksaktır. O halde 3.1.20. Teorem gereğince (S_n) dizisi ve dolayısıyla $\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \alpha$ serisi ıraksaktır.

3.2.6. Teorem: $\alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$, $\alpha \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$ olmak üzere $\alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\alpha \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ yakınsak α -serileri ve $\lambda \in \mathbb{R}(N)_{\alpha}$ verilsin. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler doğrudur:

- a) $\alpha \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ serisi de yakınsaktır ve $\alpha \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B$ olur.
- b) $\alpha \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda \times a_n)$ serisi de yakınsaktır ve $\alpha \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda \times a_n) = \lambda \times A$ olur.

İspat: a) Her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n = \alpha \sum_{k=1}^n a_k$, $B_n = \alpha \sum_{k=1}^n b_k$ ve $S_n = \alpha \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)$ olsun. Bu durumda

$$S_n = \alpha \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \alpha \sum_{k=1}^n a_k + \alpha \sum_{k=1}^n b_k = A_n + B_n$$

olur. O zaman

$${}^{\alpha}\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = {}^{\alpha}\lim_{n \rightarrow \infty} (A_n + B_n) = {}^{\alpha}\lim_{n \rightarrow \infty} A_n + {}^{\alpha}\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = A + B$$

olacağından $\alpha \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ serisi yakınsak ve $\alpha \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B$ bulunur.

b) İspat (a) şıkkına benzer şekilde yapılır.

3.2.7. Teorem (Cauchy Kriteri): $\alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Newtonyen olmayan serisinin yakınsak

olması için gerekli ve yeterli koşul herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $n > n_0$ ve her $p \in \mathbb{N}$ için

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right|_{\alpha} < \varepsilon$$

olacak şekilde en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısının bulunmasıdır.

İspat: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Newtonyen olmayan reel sayı serisi yakınsak olsun. O zaman bu serinin (S_n) kısmi toplam dizisi yakınsaktır. Bu durumda 2.4.6. Teorem (b) şıkkı gereğince (S_n) Newtonyen olmayan reel Cauchy dizisidir. O halde herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $n > n_0$ ve her $p \in \mathbb{N}$ için

$$\left| S_{n+p} - S_n \right|_{\alpha} = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right|_{\alpha} < \varepsilon$$

olacak şekilde en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır.

Tersine herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $n > n_0$ ve her $p \in \mathbb{N}$ için

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right|_{\alpha} < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ bulunsun. O zaman her $n > n_0$ ve her $p \in \mathbb{N}$ için $\left| S_{n+p} - S_n \right|_{\alpha} < \varepsilon$ olur. Bu ise (S_n) dizisinin Newtonyen olmayan reel Cauchy dizisi olduğunu gösterir. $\mathbb{R}(N)_{\alpha}$ uzayı Newtonyen olmayan tam olduğundan (S_n) dizisi,

bu uzayın bir elemanına yakınsar. Dolayısıyla $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak olur.

3.2.8. Teorem: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Newtonyen olmayan serisi yakınsaksa ${}^{\alpha}\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ olur.

İspat: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak olsun. Cauchy kriterinde $p=1$ alınırsa, herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $n > n_0$ için

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right|_{\alpha} = \left| \sum_{k=n+1}^{n+1} a_k \right|_{\alpha} = |a_{n+1}|_{\alpha} = |a_{n+1} - 0|_{\alpha} < \varepsilon$$

olacak şekilde en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu ise ${}^{\alpha}\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = {}^{\alpha}\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ olduğunu gösterir.

3.2.9. Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{(n-1)_{\alpha}}} \alpha$ serisi yakınsak olduğundan ${}^{\alpha}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{(n-1)_{\alpha}}} \alpha = 0$ olur.

3.2.10. Uyarı: 3.2.8. Teoremin tersi doğru olmayabilir.

3.2.11. Örnek: 3.1.10. Örnek gereğince $n \rightarrow \infty$ iken $\frac{1}{n}\alpha \xrightarrow{\alpha} \dot{0}$ yakınsaması

gerçekleşir. Öte yandan $\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\alpha$ serisinin ıraksaklığı 3.2.5. Örnekte gösterilmişti.

3.2.12. Teorem (Karşılaştırma Testi): Her $n \in \mathbb{N}$ için $|b_n|_{\alpha} \leq a_n$ olsun. Eğer $\alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

serisi yakınsak ise $\alpha \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serisi de yakınsaktır.

İspat: $\alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak olduğundan Cauchy kriterini sağlar. O halde herhangi

bir $\varepsilon > \dot{0}$ sayısı verildiğinde her $n > n_0$ ve her $p \in \mathbb{N}$ için

$$\left| \alpha \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right|_{\alpha} = \alpha \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. O zaman Newtonyen olmayan üçgen eşitsizliği ve hipotez gereğince her $n > n_0$ ve her $p \in \mathbb{N}$ için

$$\left| \alpha \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k \right|_{\alpha} \leq \alpha \sum_{k=n+1}^{n+p} |b_k|_{\alpha} \leq \alpha \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon$$

elde edilir. Bu durumda Cauchy kriterine göre $\alpha \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serisi de yakınsak olur.

3.2.13. Tanım: Eğer $\alpha \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|_{\alpha}$ serisi yakınsaksa $\alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin mutlak yakınsak

(α -mutlak yakınsak) olduğu söylenir. Yine eğer $\alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak ancak

$\alpha \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|_{\alpha}$ serisi ıraksaksa $\alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin koşullu yakınsak (α -koşullu yakınsak)

olduğu söylenir.

3.2.14. Teorem: $\alpha \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|_{\alpha}$ serisi yakınsaksa $\alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi de yakınsaktır.

İspat: $\alpha \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|_{\alpha}$ serisi yakınsak olduğundan Cauchy kriterini sağlar. O halde

herhangi bir $\varepsilon > \dot{0}$ sayısı verildiğinde her $n > n_0$ ve her $p \in \mathbb{N}$ için

$$\left| \alpha \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|_{\alpha} \right|_{\alpha} = \alpha \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|_{\alpha} < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Newtonyen olmayan üçgen eşitsizliği gereğince her $n > n_0$ ve her $p \in \mathbb{N}$ için

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right|_{\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|_{\alpha} = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|_{\alpha} \right|_{\alpha} < \varepsilon$$

elde edilir. Bu durumda Cauchy kriterine göre $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi de yakınsak olur.

3.2.15. Teorem (Cauchy Yoğunlaşma Testi) : Bir (a_n) α -monoton azalan ve

α -pozitif terimli dizisi verilsin. Bu takdirde $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin yakınsak olması için

gerekli ve yeterli koşul $\sum_{k=1}^{\infty} \dot{2}^{k_{\alpha}} \times a_{2^k}$ serisinin yakınsak olmasıdır.

İspat: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak olsun. (a_n) dizisinin α -monoton azalan olması kullanılırsa

$$\begin{aligned} \dot{2}^{(k-1)_{\alpha}} \times a_{2^k} &= \alpha \left(2^{k-1} \cdot \alpha^{-1}(a_{2^k}) \right) = \alpha \underbrace{(\alpha^{-1}(a_{2^k}) + \alpha^{-1}(a_{2^k}) + \dots + \alpha^{-1}(a_{2^k}))}_{2^{k-1} - \text{defa}} \\ &= a_{2^k} \dot{+} a_{2^k} \dot{+} \dots \dot{+} a_{2^k} \\ &\leq a_{2^{k-1}+1} \dot{+} a_{2^{k-1}+2} \dot{+} \dots \dot{+} a_{2^{k-1}+2^{k-1}-1} \dot{+} a_{2^k} \\ &= \alpha \sum_{m=2^{k-1}+1}^{2^k} a_m \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\alpha \sum_{k=1}^n \dot{2}^{(k-1)_{\alpha}} \times a_{2^k} \leq \alpha \sum_{k=1}^n \left(\alpha \sum_{m=2^{k-1}+1}^{2^k} a_m \right) = \alpha \sum_{m=2}^{2^n} a_m \quad (3.2.1)$$

elde edilir. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak olduğundan $\sum_{m=2}^{2^n} a_m$ genel terimli dizi yakınsak

olur ve dolayısıyla bu dizi sınırlı olur. Bu durumda (3.2.1) eşitsizliği gereğince

$A_n = \alpha \sum_{k=1}^n \dot{2}^{(k-1)_{\alpha}} \times a_{2^k}$ genel terimli dizi de sınırlı olur. Aynı zamanda (a_n) dizisi

pozitif terimli olduğundan (A_n) dizisi α -monoton artandır. O halde (A_n) dizisi hem

α -üstten sınırlı hem de α -monoton artan olduğundan yakınsaktır.

$A_n = \alpha \sum_{k=1}^n \dot{2}^{(k-1)_{\alpha}} \times a_{2^k}$ genel terimli dizisinin $\dot{2}$ ile α -çarpılması yakınsaklığı

değiştirmeyeceğinden ${}_{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty} \dot{2}^{k_{\alpha}} \times a_{2^k}$ serisinin $S_n = {}_{\alpha}\sum_{k=1}^n \dot{2}^{k_{\alpha}} \times a_{2^k}$ genel terimli (S_n)

kısmi toplamlar dizisi yakınsak olur. Bu ise ${}_{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty} \dot{2}^{k_{\alpha}} \times a_{2^k}$ serisinin yakınsak olması demektir.

Tersine ${}_{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty} \dot{2}^{k_{\alpha}} \times a_{2^k}$ serisi yakınsak olsun. Eğer

$$\begin{aligned} {}_{\alpha}\sum_{m=2^{k-1}+1}^{2^k} a_m &= a_{2^{k-1}+1} + a_{2^{k-1}+2} + \dots + a_{2^{k-1}+2^{k-1}-1} + a_{2^k} \\ &\leq a_{2^{k-1}} + a_{2^{k-1}} + \dots + a_{2^{k-1}} \\ &= \dot{2}^{(k-1)_{\alpha}} \times a_{2^{k-1}} \end{aligned}$$

eşitsizliği kullanılırsa

$${}_{\alpha}\sum_{m=2}^{2^n} a_m = {}_{\alpha}\sum_{k=1}^n \left({}_{\alpha}\sum_{m=2^{k-1}+1}^{2^k} a_m \right) \leq {}_{\alpha}\sum_{k=1}^n \dot{2}^{(k-1)_{\alpha}} \times a_{2^{k-1}} \quad (3.2.2)$$

eşitsizliği elde edilir. Hipoteze göre ${}_{\alpha}\sum_{k=1}^n \dot{2}^{(k-1)_{\alpha}} \times a_{2^{k-1}}$ genel terimli dizi yakınsak ve

dolayısıyla sınırlıdır. O halde (3.2.2) eşitsizliği gereğince $B_n = {}_{\alpha}\sum_{m=2}^{2^n} a_m$ genel terimli

dizi de sınırlıdır. Aynı zamanda (a_n) dizisi α -pozitif terimli olduğundan ${}_{\alpha}\sum_{n=2}^{\infty} a_n$

serisinin (B_n) kısmi toplamlar dizisi α -monoton artan olacağından (B_n) dizisi ve

dolayısıyla ${}_{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak olur.

3.2.16. Örnek (Newtonyen olmayan geometrik seri): $r \neq \dot{0}$ olmak üzere

${}_{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty} a \times r^{(k-1)_{\alpha}}$ serisinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çözüm: ${}_{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty} a \times r^{(k-1)_{\alpha}}$ serisinin kısmi toplamlar dizisi (S_n) olsun. Eğer $a = \dot{0}$ ise bu

serinin yakınsak olduğu açıktır. Şimdi $a \neq \dot{0}$ olsun. Eğer $r = \dot{1}$ ise

$$S_n = {}_{\alpha}\sum_{k=1}^n a \times r^{(k-1)_{\alpha}} = {}_{\alpha}\sum_{k=1}^n a = n \times a$$

yazılır. Bu (S_n) dizisinin sınırlı olduğu kabul edilsin. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için

$|S_n|_{\alpha} \leq M$ olacak şekilde bir $M > \dot{0}$ vardır. Bu takdirde her $n \in \mathbb{N}$ için

$|\alpha^{-1}(S_n)| \leq \alpha^{-1}(M)$ ve dolayısıyla $|\alpha^{-1}(S_n)| = |n.\alpha^{-1}(a)| \leq \alpha^{-1}(M)$ olur. Bu ise $(\alpha^{-1}(S_n))$ reel sayı dizisinin sınırlı olduğunu gösterir. Ancak $a \neq \dot{0}$ için $\alpha^{-1}(a) \neq 0$ ve dolayısıyla $\alpha^{-1}(S_n) = n.\alpha^{-1}(a)$ genel terimli reel sayı dizisinin sınırsız olması bir çelişki oluşturur. Buna göre $r = \dot{1}$ olduğunda (S_n) dizisi sınırsız ve dolayısıyla ıraksaktır. Benzer şekilde $r = \dot{0} \div \dot{1}$ olduğunda (S_n) dizisi sınırsız ve dolayısıyla ıraksaktır. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} S_n &= {}_\alpha \sum_{k=1}^n a \dot{\times} r^{(k-1)_\alpha} \\ &= a \dot{+} a \dot{\times} r \dot{+} a \dot{\times} r^2 \dot{+} \dots \dot{+} a \dot{\times} r^{(n-1)_\alpha} \\ &= \alpha \left[\alpha^{-1}(a) + \alpha^{-1}(a).\alpha^{-1}(r) + \alpha^{-1}(a).\alpha^{-1}(r)^2 + \dots + \alpha^{-1}(a).\alpha^{-1}(r)^{n-1} \right] \\ &= \alpha \left[\alpha^{-1}(a) \cdot \frac{1 - \alpha^{-1}(r)^n}{1 - \alpha^{-1}(r)} \right] \\ &= a \dot{\times} \frac{\dot{1} \div r^{n_\alpha}}{\dot{1} \div r} \alpha \end{aligned}$$

olacağından

$${}^\alpha \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = {}^\alpha \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a \dot{\times} \frac{\dot{1} \div r^{n_\alpha}}{\dot{1} \div r} \alpha \right) = \frac{a}{\dot{1} \div r} \alpha \div \frac{a}{\dot{1} \div r} \alpha \dot{\times} {}^\alpha \lim_{n \rightarrow \infty} r^{n_\alpha}$$

elde edilir. Eğer $|r|_\alpha < \dot{1}$ ise $n \rightarrow \infty$ iken $r^{n_\alpha} \xrightarrow{\alpha} \dot{0}$ olacağından ${}_\alpha \sum_{k=1}^{\infty} a \dot{\times} r^{(k-1)_\alpha}$

serisi yakınsak ve aynı zamanda ${}_\alpha \sum_{k=1}^{\infty} a \dot{\times} r^{(k-1)_\alpha} = \frac{a}{\dot{1} \div r} \alpha$ olur. Eğer $|r|_\alpha > \dot{1}$ ise (r^{n_α})

dizisi ıraksak olduğundan ${}_\alpha \sum_{k=1}^{\infty} a \dot{\times} r^{(k-1)_\alpha}$ serisi ıraksak olur.

3.2.17. Sonuç (p-Testi): ${}_\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\dot{1}}{\dot{n}^{p_\alpha}} \alpha$ serisi $p > 1$ için yakınsak, $p \leq 1$ için ıraksaktır.

İspat: $p < 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\dot{1}}{\dot{n}^{p_\alpha}} \alpha = \dot{+\infty} \neq \dot{0}$ olduğundan ${}_\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\dot{1}}{\dot{n}^{p_\alpha}} \alpha$ serisi ıraksaktır, aynı

şekilde $p = 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\dot{1}}{\dot{n}^{p_\alpha}} \alpha = \dot{1} \neq \dot{0}$ olduğundan ${}_\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\dot{1}}{\dot{n}^{p_\alpha}} \alpha$ serisi ıraksaktır. Şimdi

$p > 0$ kabul edilsin. O zaman

$${}_\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \dot{2}^{n_\alpha} \dot{\times} a_{2^n} = {}_\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \dot{2}^{n_\alpha} \dot{\times} \frac{\dot{1}}{(\dot{2}^{n_\alpha})^{p_\alpha}} \alpha = {}_\alpha \sum_{n=1}^{\infty} (\dot{2}^{(1-p)_\alpha})^{n_\alpha}$$

olması gereğince ${}_a \sum_{n=1}^{\infty} \left(\dot{2}^{(1-p)_a} \right)^{n_a}$ serisi Newtonyen olmayan geometrik seri olur. Eğer

$0 < p \leq 1$ ise 3.2.16. Örnek gereğince ${}_a \sum_{n=1}^{\infty} \dot{2}^{n_a} \times a_{2^n}$ serisi ıraksak ve Cauchy

yoğunlaşma testi gereğince ${}_a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\dot{1}}{\dot{n}^{p_a}} \alpha$ serisi de ıraksak olur. Eğer $p > 1$ ise 3.2.16.

Örnek gereğince ${}_a \sum_{n=1}^{\infty} \dot{2}^{n_a} \times a_{2^n}$ serisi yakınsak ve Cauchy yoğunlaşma testi gereğince

${}_a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\dot{1}}{\dot{n}^{p_a}} \alpha$ serisi de yakınsak olur.

3.2.18. Teorem (Cauchy Kök Testi): Bir ${}_a \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi verilsin ve

$L = {}^a \limsup |a_n|_{\alpha}^{(1/n)_a}$ olsun. Bu takdirde ${}_a \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi

- (i) $L < \dot{1}$ ise mutlak yakınsak,
- (ii) $L > \dot{1}$ ise ıraksak,
- (iii) $L = \dot{1}$ ise test sonuç vermez.

İspat: (i) Eğer $L < \dot{1}$ ise $L + \varepsilon < \dot{1}$ olacak şekilde bir $\varepsilon > \dot{0}$ sayısı seçilebilir. Yine ${}^a \limsup$ tanımı gereğince her $k > n_0$ için

$$\left| {}^a \sup_{n \geq k} |a_n|_{\alpha}^{(1/n)_a} - L \right| < \varepsilon$$

ve dolayısıyla

$$L - \varepsilon < {}^a \sup_{n \geq k} |a_n|_{\alpha}^{(1/n)_a} < L + \varepsilon$$

olacak şekilde en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Özel olarak her $n > n_0$ için $|a_n|_{\alpha}^{(1/n)_a} < L + \varepsilon$ ve dolayısıyla $\left| |a_n|_{\alpha} \right|_{\alpha} = |a_n|_{\alpha} < (L + \varepsilon)^{n_a}$ olur. Ayrıca $\dot{0} < L + \varepsilon < \dot{1}$ olduğuna göre

${}_a \sum_{n=n_0+1}^{\infty} (L + \varepsilon)^{n_a}$ geometrik serisi yakınsak olacağından, karşılaştırma testi gereğince

${}_a \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |a_n|_{\alpha}$ serisi de yakınsak olur. O halde ${}_a \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|_{\alpha}$ serisi de yakınsaktır.

(ii) $L > \dot{1}$ olsun. α -üst limit tanımı gereğince $\left(|a_n|_{\alpha}^{(1/n)_a} \right)$ dizisinin L sayısına yakınsayan bir alt dizisi vardır. Bu da n sayısının sonsuz sayıda seçimi için $|a_n|_{\alpha} > \dot{1}$

olması demektir. O zaman ${}^\alpha\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \dot{0}$ olamaz. Dolayısıyla ${}^\alpha\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi ıraksak olur.

(iii) ${}^\alpha\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\dot{n}} \alpha$ ve ${}^\alpha\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\dot{n}^{2_\alpha}} \alpha$ serileri için $L = \dot{1}$ dir. Fakat ${}^\alpha\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\dot{n}} \alpha$ serisi ıraksak, ${}^\alpha\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\dot{n}^{2_\alpha}} \alpha$ serisi ise yakınsaktır.

3.2.19. Teorem (Oran Testi): Bir ${}^\alpha\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi verilsin. Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \neq \dot{0}$ ve

$L = {}^\alpha\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \alpha \right|_{\alpha}$ olsun. Eğer

(i) $L < \dot{1}$ ise ${}^\alpha\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi mutlak yakınsak,

(ii) $L > \dot{1}$ ise ${}^\alpha\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi ıraksak,

(iii) $L = \dot{1}$ ise test sonuç vermez.

İspat: (i) $L < \dot{1}$ ise $\dot{0} < L + \varepsilon < \dot{1}$ olacak şekilde $\varepsilon > \dot{0}$ sayısı seçilebilir. Yine her $n > n_0$ için

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \alpha \right|_{\alpha} \div L < \varepsilon$$

ve dolayısıyla

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \alpha \right|_{\alpha} < \varepsilon + L < \dot{1}$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Eğer $S = \varepsilon + L$ alınırsa her $n > n_0$ için

$$\begin{aligned} |a_{n+1}|_{\alpha} &< |a_n|_{\alpha} \times S \\ |a_{n+2}|_{\alpha} &< |a_{n+1}|_{\alpha} \times S < |a_n|_{\alpha} \times S^{2_\alpha} \\ &\vdots \end{aligned}$$

yazılır ve buna göre

$$|a_n|_{\alpha} = |a_n|_{\alpha} \leq |a_{n_0+1}|_{\alpha} \times S^{(n-n_0-1)_\alpha}$$

olur. $S \dot{>} \dot{1}$ olduğundan ${}_{\alpha} \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |a_{n_0+1}|_{\alpha} \dot{\times} S^{(n-n_0-1)}$ Newtonyen olmayan geometrik serisi

yakınsaktır. O zaman karşılaştırma testi gereğince ${}_{\alpha} \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n$ serisi ve dolayısıyla

${}_{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi de mutlak yakınsak olur.

(ii) Eğer $L \dot{>} \dot{1}$ ise $L \dot{-} \varepsilon \dot{>} \dot{1}$ olacak şekilde $\varepsilon \dot{>} \dot{0}$ sayısı seçilebilir. Yine her $n > n_0$ için

$$\left\| \frac{a_{n+1}}{a_n} \alpha \right\|_{\alpha} \dot{-} L \left\|_{\alpha} \right\| \dot{<} \varepsilon$$

ve dolayısıyla

$$\left\| \frac{a_{n+1}}{a_n} \alpha \right\|_{\alpha} \dot{>} L \dot{-} \varepsilon \dot{>} \dot{1}$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Eğer $S = L \dot{-} \varepsilon$ alınırsa her $n > n_0$ için

$$\begin{aligned} |a_{n+1}|_{\alpha} &\dot{>} |a_n|_{\alpha} \dot{\times} S \\ |a_{n+2}|_{\alpha} &\dot{>} |a_{n+1}|_{\alpha} \dot{\times} S \dot{>} |a_n|_{\alpha} \dot{\times} S^{2_{\alpha}} \\ &\vdots \end{aligned}$$

yazılır ve buna göre

$$|a_n|_{\alpha} \dot{\geq} |a_{n_0+1}|_{\alpha} \dot{\times} S^{(n-n_0-1)_{\alpha}}$$

olur. $S \dot{>} \dot{1}$ olduğundan ${}_{\alpha} \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |a_{n_0+1}|_{\alpha} \dot{\times} S^{(n-n_0-1)}$ Newtonyen olmayan geometrik serisi

ıraksaktır. O zaman karşılaştırma testi gereğince ${}_{\alpha} \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n$ serisi ve dolayısıyla

${}_{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi ıraksak olur.

(iii) ${}_{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\dot{1}}{\dot{n}} \alpha$ ve ${}_{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\dot{1}}{\dot{n}^{2_{\alpha}}} \alpha$ serileri için $L = \dot{1}$ dır. Fakat ${}_{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\dot{1}}{\dot{n}} \alpha$ serisi ıraksak,

${}_{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\dot{1}}{\dot{n}^{2_{\alpha}}} \alpha$ serisi ise yakınsaktır.

3.2.20. Teorem (Leibnitz Testi): Eğer $a_1 \dot{\geq} a_2 \dot{\geq} \dots \dot{\geq} a_n \dot{\geq} \dots \dot{\geq} \dot{0}$ ve ${}^\alpha \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \dot{0}$ ise

${}^\alpha \sum_{n=1}^{\infty} (\dot{0} \dot{-} \dot{1})^{(n-1)\alpha} \dot{\times} a_n$ Newtonyen olmayan alterne(α -alterne) serisi yakınsaktır.

İspat: ${}^\alpha \sum_{n=1}^{\infty} (\dot{0} \dot{-} \dot{1})^{(n-1)\alpha} \dot{\times} a_n$ Newtonyen olmayan alterne serisinin kısmi toplamlar

dizisi (S_n) olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} S_{2n} &= a_1 \dot{+} (\dot{0} \dot{-} a_2) \dot{+} \dots \dot{+} a_{2n-1} \dot{+} (\dot{0} \dot{-} a_{2n}) \\ &= (a_1 \dot{-} a_2) \dot{+} \dots \dot{+} (a_{2n-1} \dot{-} a_{2n}) \\ &\dot{\leq} (a_1 \dot{-} a_2) \dot{+} \dots \dot{+} (a_{2n-1} \dot{-} a_{2n}) \dot{+} (a_{2n+1} \dot{-} a_{2n+2}) \\ &= S_{2n+2} \end{aligned}$$

olacağından

$$S_2 \dot{\leq} S_4 \dot{\leq} \dots \dot{\leq} S_{2n} \dot{\leq} \dots$$

elde edilir. Yine hipotez gereğince her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \dot{-} a_{n+1} \dot{\geq} \dot{0}$ olacağından

$$S_{2n} = a_1 \dot{-} (a_2 \dot{-} a_3) \dot{-} (a_4 \dot{-} a_5) \dot{-} \dots \dot{-} (a_{2n-2} \dot{-} a_{2n-1}) \dot{-} a_{2n} \dot{\leq} a_1$$

olur ve dolayısıyla (S_{2n}) dizisi de üstten sınırlıdır. Böylece (S_{2n}) dizisi 3.1.12.

Teorem gereğince yakınsak olur. Buna göre $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S$ olsun. Diğer taraftan

$$S_{2n-1} = S_{2n} \dot{+} a_{2n} \text{ ve } {}^\alpha \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \dot{0} \text{ eşitliklerinden}$$

$${}^\alpha \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} = {}^\alpha \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} \dot{+} {}^\alpha \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = S \dot{+} \dot{0} = S$$

bulunur. Bu durumda ${}^\alpha \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S$ ve ${}^\alpha \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} = S$ olmasından ${}^\alpha \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$

olduğu ve dolayısıyla incelenen serinin yakınsak olduğu görülür.

3.2.21. Teorem (Abel Kısmi α -Toplamlar Formülü): (φ_n) ve (γ_n) Newtonyen

olmayan reel sayı dizileri verilsin. Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ için $T_n = {}^\alpha \sum_{k=1}^n \gamma_k$ ve $T_0 = \dot{0}$

olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için

$${}^\alpha \sum_{k=1}^n \varphi_k \dot{\times} \gamma_k = \varphi_n \dot{\times} T_n \dot{-} {}^\alpha \sum_{k=1}^{n-1} (\varphi_{k+1} \dot{-} \varphi_k) \dot{\times} T_k \quad (3.2.3)$$

eşitliği vardır.

İspat: Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
\alpha \sum_{k=1}^n \varphi_k \dot{\times} \gamma_k &= \varphi_1 \dot{\times} \gamma_1 \dot{+} \varphi_2 \dot{\times} \gamma_2 \dot{+} \dots \dot{+} \varphi_n \dot{\times} \gamma_n \\
&= \varphi_1 \dot{\times} T_1 \dot{+} \varphi_2 \dot{\times} (T_2 \dot{-} T_1) \dot{+} \varphi_3 \dot{\times} (T_3 \dot{-} T_2) \dot{+} \dots \dot{+} \varphi_n \dot{\times} (T_n \dot{-} T_{n-1}) \\
&= \alpha \sum_{k=1}^{n-1} (\varphi_k \dot{-} \varphi_{k+1}) \dot{\times} T_k \dot{+} \varphi_n \dot{\times} T_n \\
&= \varphi_n \dot{\times} T_n \dot{-} \alpha \sum_{k=1}^{n-1} (\varphi_{k+1} \dot{-} \varphi_k) \dot{\times} T_k
\end{aligned}$$

olur ve bu ispatı tamamlar.

3.2.22. Teorem (Abel Testi): (a_n) ve (b_n) Newtonyen olmayan reel sayı dizileri olsun. Eğer

(i) $\alpha \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serisi yakınsak,

(ii) (a_n) dizisi α -monoton ve α -sınırlı

koşulları sağlanırsa $\alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n \dot{\times} b_n$ serisi yakınsak olur.

İspat: (a_n) dizisi sınırlı olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $|a_n|_{\alpha} \dot{\leq} K$ olacak şekilde bir $K \dot{>} 0$ sayısı vardır. $\alpha \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serisi yakınsak olduğundan Cauchy kriteri gereğince

herhangi bir $\varepsilon \dot{>} 0$ sayısı verildiğinde her $n > n_0$ ve her $p \in \mathbb{N}$ için

$$\left| \alpha \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k \right|_{\alpha} = \left| \alpha \sum_{k=1}^p b_{n+k} \right|_{\alpha} \dot{<} \frac{\varepsilon}{3 \dot{\times} K} \alpha \quad (3.2.4)$$

olacak şekilde en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Yine her $n, p \in \mathbb{N}$ için

$$\alpha \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \dot{\times} b_k = \alpha \sum_{k=1}^p a_{n+k} \dot{\times} b_{n+k}$$

yazılabilir. O zaman (3.2.3) eşitliğinde $\varphi_k = a_{n+k}$ ve $\gamma_k = b_{n+k}$ alınır ve her $p \in \mathbb{N}$

için $T_p = \alpha \sum_{k=1}^p b_{n+k}$ denirse

$$\alpha \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \dot{\times} b_k = \alpha \sum_{k=1}^p a_{n+k} \dot{\times} b_{n+k} = a_{n+p} \dot{\times} T_p \dot{-} \alpha \sum_{k=1}^{p-1} (a_{n+k+1} \dot{-} a_{n+k}) \dot{\times} T_k \quad (3.2.5)$$

olur. Eğer (a_n) dizisi α -monoton artan ise

$$\begin{aligned}
\alpha \sum_{k=1}^{p-1} |a_{n+k+1} \dot{-} a_{n+k}|_{\alpha} &= \alpha \sum_{k=1}^{p-1} (a_{n+k+1} \dot{-} a_{n+k}) = a_{n+2} \dot{-} a_{n+1} \dot{+} a_{n+3} \dot{-} a_{n+2} \dot{+} \dots \dot{+} a_{n+p} \dot{-} a_{n+p-1} \\
&= a_{n+p} \dot{-} a_{n+1} \\
&= |a_{n+p} \dot{-} a_{n+1}|_{\alpha}
\end{aligned}$$

ve α -monoton azalan ise

$$\alpha \sum_{k=1}^{p-1} |a_{n+k+1} \dot{-} a_{n+k}|_{\alpha} = \alpha \sum_{k=1}^{p-1} (a_{n+k} \dot{-} a_{n+k+1}) = a_{n+1} \dot{-} a_{n+p} = |a_{n+p} \dot{-} a_{n+1}|_{\alpha}$$

olur. Böylece (a_n) dizisi α -monoton olduğunda

$$\alpha \sum_{k=1}^{p-1} |a_{n+k+1} \dot{-} a_{n+k}|_{\alpha} = |a_{n+p} \dot{-} a_{n+1}|_{\alpha}$$

eşitliği gerçekleşir. Buna göre (3.2.5) eşitliği ve (3.2.4) eşitsizliği gereğince her $n > n_0$ ve her $p \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
\left| \alpha \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \dot{\times} b_k \right|_{\alpha} &\leq |a_{n+p}|_{\alpha} \dot{\times} |T_p|_{\alpha} \dot{+} \alpha \sum_{k=1}^{p-1} |a_{n+k+1} \dot{-} a_{n+k}|_{\alpha} \dot{\times} |T_k|_{\alpha} \\
&\leq |a_{n+p}|_{\alpha} \dot{\times} \frac{\varepsilon}{3 \dot{\times} K} \alpha \dot{+} \alpha \sum_{k=1}^{p-1} |a_{n+k+1} \dot{-} a_{n+k}|_{\alpha} \dot{\times} \frac{\varepsilon}{3 \dot{\times} K} \alpha \\
&= \frac{\varepsilon}{3 \dot{\times} K} \alpha \dot{\times} \left(|a_{n+p}|_{\alpha} \dot{+} \alpha \sum_{k=1}^{p-1} |a_{n+k+1} \dot{-} a_{n+k}|_{\alpha} \right) \\
&= \frac{\varepsilon}{3 \dot{\times} K} \alpha \dot{\times} \left(|a_{n+p}|_{\alpha} \dot{+} |a_{n+p} \dot{-} a_{n+1}|_{\alpha} \right) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3 \dot{\times} K} \alpha \dot{\times} \left(|a_{n+p}|_{\alpha} \dot{+} |a_{n+p}|_{\alpha} \dot{+} |a_{n+1}|_{\alpha} \right) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3 \dot{\times} K} \alpha \dot{\times} (K \dot{+} K \dot{+} K) \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. O zaman Cauchy kriterine göre $\alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n \dot{\times} b_n$ serisi yakınsaktır.

3.2.23. Teorem (Dirichlet Testi): (a_n) ve (b_n) Newtonyen olmayan reel sayı dizileri olsun. Eğer

(i) $\alpha \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serisinin kısmi toplam dizisi sınırlı,

(ii) (a_n) dizisi α -monoton ve $\alpha \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

koşulları sağlanırsa $\alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n \dot{\times} b_n$ serisi yakınsak olur.

İspat: ${}_a \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serisinin α -kısmi toplamı $t_n = {}_a \sum_{k=1}^n b_k$ olsun. (i) şıkkı gereğince her $n \in \mathbb{N}$ için $|t_n|_{\alpha} \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı vardır. Yine (ii) şıkkı gereğince herhangi bir $\varepsilon > 0$ verildiğinde her $n > n_0$ için $|a_n|_{\alpha} < \frac{\varepsilon}{6 \times M} \alpha$ olacak şekilde en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Ayrıca her $n, p \in \mathbb{N}$ için

$${}_a \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \dot{\times} b_k = {}_a \sum_{k=1}^p a_{n+k} \dot{\times} b_{n+k}$$

yazılabilir. O zaman (3.2.3) eşitliğinde $\varphi_k = a_{n+k}$ ve $\gamma_k = b_{n+k}$ alınır ve her $p \in \mathbb{N}$

için $T_p = {}_a \sum_{k=1}^p b_{n+k}$ denirse

$${}_a \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \dot{\times} b_k = {}_a \sum_{k=1}^p a_{n+k} \dot{\times} b_{n+k} = a_{n+p} \dot{\times} T_p \dot{+} {}_a \sum_{k=1}^{p-1} (a_{n+k+1} \dot{+} a_{n+k}) \dot{\times} T_k \quad (3.2.6)$$

yazılır. Yine Abel Testinin ispatında olduğu gibi (a_n) dizisi α -monoton olduğundan

$${}_a \sum_{k=1}^{p-1} |a_{n+k+1} \dot{+} a_{n+k}|_{\alpha} = |a_{n+p} \dot{+} a_{n+1}|_{\alpha} \text{ eşitliği gerçekleşir. Bu durumda (3.2.6) eşitliği}$$

kullanılırsa her $n > n_0$ ve her $p \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \left| {}_a \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \dot{\times} b_k \right|_{\alpha} &\leq |a_{n+p}|_{\alpha} \dot{\times} |T_p|_{\alpha} \dot{+} {}_a \sum_{k=1}^{p-1} |a_{n+k+1} \dot{+} a_{n+k}|_{\alpha} \dot{\times} |T_k|_{\alpha} \\ &= |a_{n+p}|_{\alpha} \dot{\times} |t_{n+p} \dot{+} t_n|_{\alpha} \dot{+} {}_a \sum_{k=1}^{p-1} |a_{n+k+1} \dot{+} a_{n+k}|_{\alpha} \dot{\times} |t_{n+k} \dot{+} t_n|_{\alpha} \\ &\leq |a_{n+p}|_{\alpha} \dot{\times} (|t_{n+p}|_{\alpha} \dot{+} |t_n|_{\alpha}) \dot{+} {}_a \sum_{k=1}^{p-1} |a_{n+k+1} \dot{+} a_{n+k}|_{\alpha} \dot{\times} (|t_{n+k}|_{\alpha} \dot{+} |t_n|_{\alpha}) \\ &\leq |a_{n+p}|_{\alpha} \dot{\times} (\dot{2} \times M) \dot{+} {}_a \sum_{k=1}^{p-1} |a_{n+k+1} \dot{+} a_{n+k}|_{\alpha} \dot{\times} (\dot{2} \times M) \\ &= (\dot{2} \times M) \dot{\times} \left(|a_{n+p}|_{\alpha} \dot{+} {}_a \sum_{k=m+1}^{p-1} |a_{n+k+1} \dot{+} a_{n+k}|_{\alpha} \right) \\ &= (\dot{2} \times M) \dot{\times} (|a_{n+p}|_{\alpha} \dot{+} |a_{n+p} \dot{+} a_{n+1}|_{\alpha}) \\ &\leq (\dot{2} \times M) \dot{\times} (|a_{n+p}|_{\alpha} \dot{+} |a_{n+p}|_{\alpha} \dot{+} |a_{n+1}|_{\alpha}) \\ &= (\dot{2} \times M) \dot{\times} \left(\frac{\varepsilon}{6 \times M} \alpha \dot{+} \frac{\varepsilon}{6 \times M} \alpha \dot{+} \frac{\varepsilon}{6 \times M} \alpha \right) \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. O zaman Cauchy kriterine göre ${}_a \sum_{n=1}^{\infty} a_n \dot{\times} b_n$ serisi yakınsaktır.

3.2.24. Teorem: ${}_{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Newtonyen olmayan seri ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$a_n^+ = \frac{|a_n|_{\alpha} \dot{+} a_n}{2} \alpha, \quad a_n^- = \frac{|a_n|_{\alpha} \dot{-} a_n}{2} \alpha \text{ olsun.}$$

(i) ${}_{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi koşullu yakınsaksa ${}_{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ ve ${}_{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ serilerinin ikisi de ıraksaktır.

(ii) ${}_{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi mutlak yakınsaksa ${}_{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ ve ${}_{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ serilerinin ikisi de yakınsaktır ve ${}_{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} a_n = {}_{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ \dot{-} {}_{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ eşitliği gerçekleşir.

İspat: Eğer $a_n \geq \dot{0}$ ise $a_n^+ = a_n$ ve $a_n^- = \dot{0}$, $a_n \leq \dot{0}$ ise $a_n^+ = \dot{0}$ ve $a_n^- = \dot{0} \dot{-} a_n$ olur.

Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n = a_n^+ \dot{-} a_n^-$ ve $|a_n|_{\alpha} = a_n^+ \dot{+} a_n^-$ eşitlikleri gerçekleşir.

(i) ${}_{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi koşullu yakınsak, yani ${}_{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak ve ${}_{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|_{\alpha}$ serisi

ıraksak olsun. ${}_{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ ve ${}_{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ serilerinden birinin yakınsak olduğu kabul edilsin.

Eğer ${}_{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ serisi yakınsaksa $a_n^+ = a_n \dot{+} a_n^-$ olduğundan ${}_{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ serisi de yakınsak

olur. Benzer şekilde ${}_{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ serisi yakınsaksa $a_n^- = a_n^+ \dot{-} a_n$ olduğundan ${}_{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$

serisi de yakınsak olur. ${}_{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ ve ${}_{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ serilerinin ikisinin de yakınsak olduğu

durumda $|a_n|_{\alpha} = a_n^+ \dot{+} a_n^-$ olduğundan ${}_{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|_{\alpha}$ serisi de yakınsak olur. Bu bir çelişki

oluşturur. O halde ${}_{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi koşullu yakınsaksa ${}_{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ ve ${}_{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ serilerinin ikisi de ıraksak olmalıdır.

(ii) ${}_{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|_{\alpha}$ serisi yakınsak olsun. O halde 3.2.14. Teorem gereğince ${}_{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi

de yakınsaktır. Buna göre 3.2.6. Teorem gereğince ${}_{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = {}_{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \alpha \dot{+} (|a_n|_{\alpha} \dot{+} a_n) \right)$

ve ${}_a\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = {}_a\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \alpha \times (|a_n|_{\alpha} \dot{+} a_n) \right)$ serileri de yakınsak olur. Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ için

$$a_n = a_n^+ \dot{+} a_n^- \text{ olduğundan}$$

$${}_a\sum_{n=1}^{\infty} a_n = {}_a\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ \dot{+} {}_a\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$$

bulunur.

3.2.25. Tanım: Her $k \in \mathbb{N}$ için $n_k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\{n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\}$ kümesi, $\mathbb{N}$ kümesinin elemanlarının yerinin keyfi kuralla değiştirilmesi sonucunda elde edilmiş olsun. Her $k \in \mathbb{N}$ için $b_k = a_{n_k}$ olmak üzere ${}_a\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ serisine ${}_a\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin terimlerinin yeri değiştirilmiş serisi denir.

3.2.26. Teorem: ${}_a\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi mutlak yakınsaksa onun terimlerinin yeri değiştirilmiş serisi de yakınsaktır ve bu iki serinin α -toplamı aynıdır.

İspat: Teoremin ispatı iki kısımda incelenecektir.

a) ${}_a\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ terimleri α -negatif olmayan yakınsak bir seri ve ${}_a\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ serisi onun terimlerinin yeri değiştirilmiş serisi olsun. ${}_a\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin n . kısmi toplamı S_n ve

${}_a\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ serisinin n . kısmi toplamı $S'_n = b_1 \dot{+} b_2 \dot{+} \dots \dot{+} b_n$ ile gösterilsin. Her $k \in \mathbb{N}$ için

$b_k = a_{n_k}$ olduğundan $n_0 = \max\{n_1, \dots, n_k\}$ olmak üzere $S'_k \dot{\leq} S_{n_0}$ ve dolayısıyla

$S = {}_a\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ olmak üzere her $k \in \mathbb{N}$ için $S'_k \dot{\leq} S$ olur. Bu durumda ${}_a\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ serisi

yakınsak ve S' bu serinin toplamı olmak üzere $S' \dot{\leq} S$ elde edilir. Aynı şekilde

${}_a\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi ${}_a\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ serisinin terimlerinin yerleri değiştirilmiş serisi olduğundan

$S \dot{\leq} S'$ olur. Buna göre $S = S'$ bulunur.

b) ${}_a\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi α -mutlak yakınsak olsun. ${}_a\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|_{\alpha}$ terimleri α -negatif olmayan seri

olduğundan a) şıkkına göre ${}_a\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|_{\alpha}$ serisi ve dolayısıyla ${}_a\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ serisi yakınsak

olur. 3.2.24. Teorem (ii) şıkkı gereğince ${}_{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} a_n = {}_{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ \dot{-} {}_{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ idi. ${}_{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

serisinin terimlerinin yeri keyfi değiştirildiğinde ${}_{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ ve ${}_{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ serilerinin

terimlerinin de yeri değiştirilmiş olur, ancak onların α -toplamları değişmez kalır.

Buna göre

$${}_{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty} b_k = {}_{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} b_k^+ \dot{-} {}_{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} b_k^- = {}_{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ \dot{-} {}_{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = {}_{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

bulunur.

3.3. Has Olmayan *-İntegral

Bu kesimde öncelikle gerekli olan tanımlar ile teoremler verilecek ve ardından has olmayan *-integral kavramı tanıtılacaktır. Ayrıca has olmayan *-integrallerin yakınsaklık durumu incelenecek ve yakınsaklıkla ilgili testler verilecektir.

3.3.1. Tanım: Bir $f : X \subset \mathbb{R}(N)_{\alpha} \rightarrow \mathbb{R}(N)_{\beta}$ fonksiyonu verilsin. Eğer herhangi bir $\varepsilon \succ \dot{0}$ sayısı verildiğinde her $x \in X$ için $\dot{0} \prec |x \dot{-} a|_{\alpha} \prec \delta$ iken $|f(x) \dot{-} L|_{\beta} \prec \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $\delta = \delta(\varepsilon) \succ \dot{0}$ sayısı varsa, f fonksiyonunun $a \in \mathbb{R}(N)_{\alpha}$ noktasındaki *-limiti $L \in \mathbb{R}(N)_{\beta}$ sayısıdır denir ve $*-\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ile gösterilir.

3.3.2. Teorem: 2.2.2. Tanım ile 3.3.1. Tanımın ifadeleri denktir.

İspat: 3.3.1. Tanıma göre $*-\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ olsun. O halde herhangi bir $\varepsilon \succ \dot{0}$ sayısı verildiğinde her $x \in X$ için $\dot{0} \prec |x \dot{-} a|_{\alpha} \prec \delta$ iken $|f(x) \dot{-} L|_{\beta} \prec \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta \succ \dot{0}$ sayısı vardır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in X \setminus \{a\}$ ve ${}^{\alpha}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ koşullarını sağlayan herhangi bir (x_n) dizisi verilsin. ${}^{\alpha}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ olduğundan özellikle $\delta \succ \dot{0}$ sayısı için her $n > n_0$ olduğunda $|x_n \dot{-} a|_{\alpha} \prec \delta$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. O zaman her $n > n_0$ için $|f(x_n) \dot{-} L|_{\beta} \prec \varepsilon$ olur. Böylece herhangi bir $\varepsilon \succ \dot{0}$ sayısı verildiğinde her $n > n_0$ için $|f(x_n) \dot{-} L|_{\beta} \prec \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ bulunmuş olur. Bu ise 2.2.2. Tanıma göre $*-\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ olduğunu gösterir.

Tersine 2.2.2. Tanıma göre $*-\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ olsun. 3.3.1. Tanıma göre $*-\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ olmadığı kabul edilsin. Bu durumda en az bir $\varepsilon \succ \dot{0}$ ve her $\delta \succ \dot{0}$ sayısı için $|f(x) \dot{-} L|_\beta \not\leq \varepsilon$ olacak şekilde $\dot{0} \dot{<} |x \dot{-} a|_\alpha \dot{<} \delta$ olan en az bir $x \in X$ vardır. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için $\delta = \frac{1}{n} \alpha \succ \dot{0}$ sayısı verildiğinde $\dot{0} \dot{<} |x_n \dot{-} a|_\alpha \dot{<} \frac{1}{n} \alpha$ olan en az bir $x_n \in X$ için $|f(x_n) \dot{-} L|_\beta \not\leq \varepsilon$ olur. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in X \setminus \{a\}$ olmak üzere bir (x_n) dizisi için ${}^\alpha \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ancak ${}^\beta \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq L$ olur. Bu durum 2.2.2. Tanıma göre $*-\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ olması ile çelişir. O halde kabul yanlış olup, 3.3.1. Tanıma göre de $*-\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ olmalıdır.

3.3.3. Tanım: Bir $f : X \subset \mathbb{R}(N)_\alpha \rightarrow \mathbb{R}(N)_\beta$ fonksiyonu verilsin. Eğer herhangi bir $\varepsilon \succ \dot{0}$ sayısı verildiğinde her $x \in X$ için $a \dot{-} \delta \dot{<} x \dot{<} a \dot{+} \delta$ ($a \dot{<} x \dot{<} a \dot{+} \delta$) iken $|f(x) \dot{-} L|_\beta \dot{<} \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $\delta = \delta(\varepsilon) \succ \dot{0}$ sayısı varsa, f fonksiyonunun $a \in \mathbb{R}(N)_\alpha$ noktasındaki soldan $*$ -limiti (sağdan $*$ -limiti) $L \in \mathbb{R}(N)_\beta$ sayısıdır denir ve $*-\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ ($*-\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$) ile gösterilir.

3.3.4. Teorem: Bir $f : X \subset \mathbb{R}(N)_\alpha \rightarrow \mathbb{R}(N)_\beta$ fonksiyonu verildiğinde $*-\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ olması için gerekli ve yeterli koşul $*-\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = *-\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ olmasıdır.

İspat: $*-\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ olsun. O zaman herhangi bir $\varepsilon \succ \dot{0}$ sayısı verildiğinde her $x \in X$ için $\dot{0} \dot{<} |x \dot{-} a|_\alpha \dot{<} \delta$ iken $|f(x) \dot{-} L|_\beta \dot{<} \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $\delta \succ \dot{0}$ sayısı vardır. Yine $|x \dot{-} a|_\alpha \dot{<} \delta$ olduğundan 2.3.5. Önerme (1) şıkkı gereğince $\dot{0} \dot{-} \delta \dot{<} x \dot{-} a \dot{<} \delta$ ve dolayısıyla $a \dot{-} \delta \dot{<} x \dot{<} a \dot{+} \delta$ olur. Böylece her $x \in X$ için $\dot{0} \dot{<} |x \dot{-} a|_\alpha \dot{<} \delta$ olduğunda $a \dot{-} \delta \dot{<} x \dot{<} a$ veya $a \dot{<} x \dot{<} a \dot{+} \delta$ olur. Bu durumda hipotez gereğince $*-\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = *-\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ elde edilir.

Tersine $*-\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = *-\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ olsun. Bu durumda herhangi bir $\varepsilon \succ \dot{0}$ sayısı verildiğinde her $x \in X$ için $a \dot{-} \delta \dot{<} x \dot{<} a$ veya $a \dot{<} x \dot{<} a \dot{+} \delta$ iken $|f(x) \dot{-} L|_\beta \dot{<} \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta \succ \dot{0}$ sayısı vardır. Öte yandan her $x \in X$ için

$a \dot{-} \delta \dot{<} x \dot{<} a$ veya $a \dot{<} x \dot{<} a \dot{+} \delta$ olduğunda $\dot{0} \dot{<} |x \dot{-} a|_{\alpha} \dot{<} \delta$ yazılabilir. Buna göre $*-\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ elde edilir.

3.3.5. Tanım: Bir $f : X \subset \mathbb{R}(N)_{\alpha} \rightarrow \mathbb{R}(N)_{\beta}$ fonksiyonu ve $a \in X$ noktası verilsin. Eğer herhangi bir $\varepsilon \dot{>} \dot{0}$ sayısı verildiğinde her $x \in X$ için $|x \dot{-} a|_{\alpha} \dot{<} \delta$ iken $|f(x) \dot{-} f(a)|_{\beta} \dot{<} \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $\delta = \delta(\varepsilon) \dot{>} \dot{0}$ sayısı varsa, f fonksiyonunun a noktasında $*$ -sürekli olduğu söylenir.

3.3.6. Sonuç: 2.2.3. Tanım ile 3.3.5. Tanım ifadeleri denktir.

3.3.7. Tanım: Bir $f : (\dot{c}, \dot{+}\infty) \rightarrow \mathbb{R}(N)_{\beta}$ ($f : (\dot{-}\infty, \dot{c}) \rightarrow \mathbb{R}(N)_{\beta}$) fonksiyonu verilsin.

Eğer herhangi bir $\varepsilon \dot{>} \dot{0}$ sayısı verildiğinde her $x \dot{>} \delta$ ($x \dot{<} \dot{0} \dot{-} \delta$) için $|f(x) \dot{-} L|_{\beta} \dot{<} \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $\delta = \delta(\varepsilon) \dot{>} \dot{0}$ sayısı varsa, f fonksiyonunun $\dot{+}\infty$ daki ($\dot{-}\infty$ daki) $*$ -limiti $L \in \mathbb{R}(N)_{\beta}$ sayısıdır denir ve $*-\lim_{x \rightarrow \dot{+}\infty} f(x) = L$ ($*-\lim_{x \rightarrow \dot{-}\infty} f(x) = L$) ile gösterilir.

3.3.8. Tanım: Bir $f : (\dot{c}, \dot{+}\infty) \rightarrow \mathbb{R}(N)_{\beta}$ fonksiyonu verilsin. Eğer herhangi bir $\varepsilon \dot{>} \dot{0}$ sayısı verildiğinde her $x \dot{>} \delta$ için $\varepsilon \dot{<} f(x)$ ($f(x) \dot{<} \dot{0} \dot{-} \varepsilon$) olacak şekilde en az bir $\delta = \delta(\varepsilon) \dot{>} \dot{0}$ sayısı varsa, f fonksiyonunun $\dot{+}\infty$ daki $*$ -limitinin $\dot{+}\infty$ ($\dot{-}\infty$) olduğu söylenir ve $*-\lim_{x \rightarrow \dot{+}\infty} f(x) = \dot{+}\infty$ ($*-\lim_{x \rightarrow \dot{+}\infty} f(x) = \dot{-}\infty$) ile gösterilir.

3.3.9. Tanım: Bir $f : (\dot{-}\infty, \dot{c}) \rightarrow \mathbb{R}(N)_{\beta}$ fonksiyonu verilsin. Eğer herhangi bir $\varepsilon \dot{>} \dot{0}$ sayısı verildiğinde her $x \dot{<} \dot{0} \dot{-} \delta$ için $\varepsilon \dot{<} f(x)$ ($f(x) \dot{<} \dot{0} \dot{-} \varepsilon$) olacak şekilde en az bir $\delta = \delta(\varepsilon) \dot{>} \dot{0}$ sayısı varsa, f fonksiyonunun $\dot{-}\infty$ daki $*$ -limitinin $\dot{+}\infty$ ($\dot{-}\infty$) olduğu söylenir ve $*-\lim_{x \rightarrow \dot{-}\infty} f(x) = \dot{+}\infty$ ($*-\lim_{x \rightarrow \dot{-}\infty} f(x) = \dot{-}\infty$) ile gösterilir.

3.3.10. Tanım: Bir $f : X \subset \mathbb{R}(N)_{\alpha} \rightarrow \mathbb{R}(N)_{\beta}$ fonksiyonu verilsin. Eğer herhangi bir $\varepsilon \dot{>} \dot{0}$ sayısı verildiğinde her $x \in X$ için $\dot{0} \dot{<} |x \dot{-} a|_{\alpha} \dot{<} \delta$ iken $\varepsilon \dot{<} f(x)$ ($f(x) \dot{<} \dot{0} \dot{-} \varepsilon$) olacak şekilde en az bir $\delta = \delta(\varepsilon) \dot{>} \dot{0}$ sayısı varsa, f fonksiyonunun $a \in \mathbb{R}(N)_{\alpha}$ noktasındaki $*$ -limiti $\dot{+}\infty$ ($\dot{-}\infty$) olduğu söylenir ve $*-\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \dot{+}\infty$ ($*-\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \dot{-}\infty$) ile gösterilir.

3.3.11. Teorem: Verilen $f, g : X \subset \mathbb{R}(N)_\alpha \rightarrow \mathbb{R}(N)_\beta$ fonksiyonları için

$*-\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ve $*-\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler

doğrudur:

1) $*-\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \ddot{+} g(x)) = A \ddot{+} B.$

2) $*-\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \ddot{\times} g(x)) = A \ddot{\times} B.$

3) Her $x \in X$ için $g(x) \neq \ddot{0}$ ve $B \neq \ddot{0}$ ise $*-\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \beta \right) = \frac{A}{B} \beta.$

4) $*-\lim_{x \rightarrow a} |f(x)|_\beta = |A|_\beta.$

5) Bir $C \in \mathbb{R}(N)_\beta$ sayısı için $*-\lim_{x \rightarrow a} (C \ddot{\times} f(x)) = C \ddot{\times} A.$

İspat: 1) Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in X \setminus \{a\}$ ve ${}^\alpha \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ olacak şekilde her (x_n) dizisi için $*-\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ve $*-\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ olduğundan ${}^\beta \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ ve ${}^\beta \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = B$ olur. Buna göre 3.1.9. Teorem (2) şıkkı gereğince

$${}^\beta \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) \ddot{+} g(x_n)) = {}^\beta \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \ddot{+} {}^\beta \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = A \ddot{+} B$$

olacağından $*-\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \ddot{+} g(x)) = A \ddot{+} B$ elde edilir. Bu ispatı tamamlar. Diğer şıkların ispatları 3.1.9. Teorem yardımı ile benzer şekilde yapılabilir.

3.3.12. Tanım: Bir $f : X \subset \mathbb{R}(N)_\alpha \rightarrow \mathbb{R}(N)_\beta$ fonksiyonu $x_1 \dot{<} x_2$ olmak üzere her $x_1, x_2 \in X$ için $f(x_1) \ddot{\leq} f(x_2)$ ($f(x_2) \ddot{\leq} f(x_1)$) oluyorsa, f fonksiyonuna $*-\text{azalmayan}$ ($*-\text{artmayan}$) fonksiyon denir.

3.3.13. Tanım: $f : [a, \dot{+}\infty) \subset \mathbb{R}(N)_\alpha \rightarrow \mathbb{R}(N)_\beta$ fonksiyonu her bir $b \dot{\geq} a$ sayısı için

$[a, b]$ aralığında $*-\text{sürekli}$ olsun. $*-\lim_{b \rightarrow \dot{+}\infty} \int_a^b f(x) d^*x$ $*-\text{limitine}$ f fonksiyonunun

$[a, \dot{+}\infty)$ üzerindeki birinci çeşit has olmayan $*-\text{integrali}$ denir ve $*\int_a^{\dot{+}\infty} f(x) d^*x$ ile

gösterilir. Bu $*-\lim_{b \rightarrow \dot{+}\infty} \int_a^b f(x) d^*x$ var ve bir $L \in \mathbb{R}(N)_\beta$ sayısına eşitse $*\int_a^{\dot{+}\infty} f(x) d^*x$

$*-\text{integrali}$ yakınsak, limit yoksa veya $\dot{-}\infty$ ya da $\dot{+}\infty$ ise iraksaktır.

Benzer şekilde $f : (-\infty, b] \subset \mathbb{R}(N)_\alpha \rightarrow \mathbb{R}(N)_\beta$ fonksiyonu her bir $a \leq b$ sayısı için $[a, b]$ aralığında $*$ -sürekli ise f fonksiyonunun $[-\infty, b]$ üzerindeki birinci çeşit has olmayan $*$ -integrali

$$* \int_{-\infty}^b f(x) d^* x = * - \lim_{a \rightarrow -\infty} * \int_a^b f(x) d^* x$$

olarak tanımlanır.

$f : (-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}(N)_\beta$ fonksiyonu $a < b$ ($a, b \in \mathbb{R}(N)_\alpha$) olmak üzere her bir $[a, b]$ aralığı üzerinde $*$ -sürekli ise f fonksiyonunun $[-\infty, +\infty]$ üzerindeki birinci çeşit has olmayan $*$ -integrali birbirinden bağımsız olarak $a \rightarrow -\infty$ ve $b \rightarrow +\infty$ için

$$* \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) d^* x = * - \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} * \int_a^b f(x) d^* x$$

limiti olarak tanımlanır.

3.3.14. Örnek: Geometrik Kalkülüs için bakılırsa $\alpha(x) = I(x) = x$, $\beta(x) = e^x$ olup

$$+\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha(x) = +\infty, \quad -\infty = \lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha(x) = -\infty, \quad \ddot{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \beta(x) = +\infty \quad \text{ve}$$

$$\ddot{-\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \beta(x) = 0 \quad \text{bulunur. Buna göre } \mathbb{R}(N)_\alpha = \mathbb{R} \quad \text{ve} \quad \mathbb{R}(N)_\beta = (0, +\infty) \quad \text{olur.}$$

$f : [a, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ fonksiyonu her bir $b \geq a$ sayısı için $[a, b]$ aralığında sürekli olsun. f fonksiyonunun $[a, +\infty]$ üzerinde birinci çeşit has olmayan geometrik integrali

$$\int_a^{+\infty} f(x) d\tilde{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\int_a^b f(x) d\tilde{x} \right) = \lim_{b \rightarrow +\infty} e^{\left(\int_a^b \ln(f(x)) dx \right)} = e^{\lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\int_a^b \ln(f(x)) dx \right)} = e^{\left(\int_a^{+\infty} \ln(f(x)) dx \right)}$$

biçimindedir.

Anageometrik Kalkülüs için $\alpha(x) = e^x$, $\beta(x) = I(x) = x$ olduğundan $\mathbb{R}(N)_\alpha = (0, +\infty)$ ve $\mathbb{R}(N)_\beta = \mathbb{R}$ olur. $f : [a, +\infty) \subset (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her bir $b \geq a$ sayısı için $[a, b]$ aralığında sürekli olsun. f fonksiyonunun $[a, +\infty]$ üzerinde birinci çeşit has olmayan anageometrik integrali

$$\int_a^{+\infty} f(x) d\tilde{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) d\tilde{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\int_{\ln a}^{\ln b} f(e^x) dx \right)$$

biçimindedir.

Bigeometrik Kalkülüs için $\alpha(x)=\beta(x)=e^x$ olduğundan $\mathbb{R}(N)_\alpha=\mathbb{R}(N)_\beta=(0,+\infty)$ olur. $f:[a,+\infty)\subset(0,+\infty)\rightarrow(0,+\infty)$ fonksiyonu her bir $b\geq a$ sayısı için $[a,b]$ aralığında sürekli olsun. f fonksiyonunun $[a,+\infty]$ üzerinde birinci çeşit has olmayan bigeometrik integrali

$$\int_a^{+\infty} f(x) \tilde{d}x = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \tilde{d}x = \lim_{b \rightarrow +\infty} e^{\left(\int_a^b \ln f(e^x) dx \right)}$$

biçimindedir.

3.3.15. Not: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) d^*x = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b f(x) d^*x$ limitinin mevcut olması her $c \in \mathbb{R}(N)_\alpha$

için $\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) d^*x$ ve $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x) d^*x$ limitlerinin mevcut olmasına denk

olduğuna göre (bu limitlerin farklı işaretli sonsuzluk olması durumları hariç)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) d^*x &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) d^*x \dot{+} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x) d^*x \\ &= \int_{-\infty}^c f(x) d^*x \dot{+} \int_c^{+\infty} f(x) d^*x \quad (c \in \mathbb{R}(N)_\alpha) \end{aligned}$$

olur.

3.3.16. Örnek: $\int_1^{+\infty} e^{-x} \tilde{d}x$, $\int_1^{+\infty} e^{-x} \tilde{d}x$ ve $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$ has olmayan integrallerinin

yakınsaklık durumlarını inceleyiniz.

Çözüm: $\int_1^{+\infty} e^{-x} \tilde{d}x = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b e^{-x} \tilde{d}x = \lim_{b \rightarrow +\infty} e^{\left(\int_1^b \ln e^{-x} dx \right)} = \lim_{b \rightarrow +\infty} e^{\left(-\frac{b^2}{2} + \frac{1}{2} \right)} = 0$,

$$\int_1^{+\infty} e^{-x} \tilde{d}x = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b e^{-x} \tilde{d}x = \lim_{b \rightarrow +\infty} e^{\int_0^{\ln b} \ln e^{-e^x} dx} = \lim_{b \rightarrow +\infty} e^{-b+1} = 0,$$

$$\int_1^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (e^{-1} - e^{-b}) = e^{-1}$$

olduğundan $\int_1^{+\infty} e^{-x} \tilde{d}x$ has olmayan geometrik integrali ve $\int_1^{+\infty} e^{-x} \tilde{d}x$ has olmayan

bigeometrik integrali ıraksak, $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$ has olmayan integrali ise yakınsaktır. Bu ise

bir fonksiyonun klasik kalkülüsteki birinci çeşit has olmayan integrali ile diğer kalkülüslerdeki birinci çeşit has olmayan integralinin yakınsaklık durumunun farklı olabileceğini gösterir.

3.3.17. Örnek: $a \succ 0$ ve $p > 1$ için ${}^*\int_a^{+\infty} \frac{\ddot{1}}{\iota(x)^{p_\beta}} \beta d^*x$ has olmayan *-integralinin

yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Her $b \geq a$ için

$$\begin{aligned}
{}^*\int_a^{+\infty} \frac{\ddot{1}}{\iota(x)^{p_\beta}} \beta d^*x &= {}^*\lim_{b \rightarrow +\infty} {}^*\int_a^b \frac{\ddot{1}}{\iota(x)^{p_\beta}} \beta d^*x \\
&= {}^*\lim_{b \rightarrow +\infty} \beta \left[\int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)} \beta^{-1} \left(\frac{\ddot{1}}{\iota(\alpha(x))^{p_\beta}} \beta \right) dx \right] \\
&= {}^*\lim_{b \rightarrow +\infty} \beta \left[\int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)} \beta^{-1} \left(\frac{\ddot{1}}{\beta(\alpha^{-1}(\alpha(x)))^{p_\beta}} \beta \right) dx \right] \\
&= {}^*\lim_{b \rightarrow +\infty} \beta \left[\int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)} \beta^{-1} \left(\frac{\ddot{1}}{\beta \left(\left[\beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(\alpha(x)))) \right]^p \right)} \beta \right) dx \right] \\
&= {}^*\lim_{b \rightarrow +\infty} \beta \left[\int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)} \beta^{-1} \left(\frac{\ddot{1}}{\beta(x^p)} \beta \right) dx \right] \\
&= {}^*\lim_{b \rightarrow +\infty} \beta \left[\int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)} \beta^{-1} \left(\beta \left(\frac{1}{x^p} \right) \right) dx \right] \\
&= {}^*\lim_{b \rightarrow +\infty} \beta \left[\int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)} \frac{1}{x^p} dx \right] \\
&= {}^*\lim_{b \rightarrow +\infty} \beta \left[\frac{\alpha^{-1}(b)^{1-p} - \alpha^{-1}(a)^{1-p}}{1-p} \right] \\
&= {}^*\lim_{b \rightarrow +\infty} \beta \left[\frac{\left[\beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(b))) \right]^{1-p} - \left[\beta^{-1}(\beta(\alpha^{-1}(a))) \right]^{1-p}}{\beta^{-1}(\beta(1)) - \beta^{-1}(\beta(p))} \right] \\
&= {}^*\lim_{b \rightarrow +\infty} \beta \left[\frac{\beta^{-1} \left(\beta \left(\left[\beta^{-1}(\iota(b)) \right]^{1-p} \right) \right) - \beta^{-1} \left(\beta \left(\left[\beta^{-1}(\iota(a)) \right]^{1-p} \right) \right)}{\beta^{-1}(\beta(1)) - \beta^{-1}(\beta(p))} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= {}^*\text{-}\lim_{b \rightarrow +\infty} \beta \left[\frac{\beta^{-1} \left(\beta \left[\beta^{-1} (\iota(b)^{(1-p)_\beta}) - \beta^{-1} (\iota(a)^{(1-p)_\beta}) \right] \right)}{\beta^{-1} \left[\beta (\beta^{-1} (\ddot{1}) - \beta^{-1} (\ddot{p})) \right]} \right] \\
&= {}^*\text{-}\lim_{b \rightarrow +\infty} \beta \left[\frac{\beta^{-1} (\iota(b)^{(1-p)_\beta} \dot{-} \iota(a)^{(1-p)_\beta})}{\beta^{-1} (\ddot{1} \dot{-} \ddot{p})} \right] \\
&= {}^*\text{-}\lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{\iota(b)^{(1-p)_\beta} \dot{-} \iota(a)^{(1-p)_\beta}}{\ddot{1} \dot{-} \ddot{p}} \beta \right] \\
&= \frac{\iota(a)^{(1-p)_\beta}}{\ddot{p} \dot{-} \ddot{1}} \beta
\end{aligned}$$

olup $a > \dot{0}$ ve $p > 1$ için ${}^*\int_a^{+\infty} \frac{\ddot{1}}{\iota(x)^{p_\beta}} \beta d^*x$ has olmayan * -integrali yakınsaktır.

3.3.18. Tanım: $a, B \in \mathbb{R}(N)_\alpha$ olmak üzere $f : [a, B] \rightarrow \mathbb{R}(N)_\beta$ fonksiyonu her bir $b \in [a, B]$ için $[a, b]$ aralığında * -sürekli ve B noktasının solunda sınırsız

(${}^*\text{-}\lim_{x \rightarrow B^-} f(x) = \ddot{+\infty}$ veya ${}^*\text{-}\lim_{x \rightarrow B^-} f(x) = \dot{-}\infty$) olsun. ${}^*\text{-}\lim_{b \rightarrow B^-} {}^*\int_a^b f(x) d^*x$ limitine f

fonksiyonunun $[a, B]$ aralığı üzerindeki ikinci çeşit has olmayan * -integrali denir ve

${}^*\int_a^B f(x) d^*x$ ile gösterilir. ${}^*\text{-}\lim_{b \rightarrow B^-} {}^*\int_a^b f(x) d^*x$ var ve bir $L \in \mathbb{R}(N)_\beta$ sayısına eşitse

${}^*\int_a^B f(x) d^*x$ has olmayan * -integrali yakınsak, limit yoksa veya $\dot{-}\infty$ ya da $\ddot{+\infty}$ ise

ıraksaktır.

Benzer şekilde $f : (A, b] \rightarrow \mathbb{R}(N)_\beta$ fonksiyonu her bir $a \in (A, b]$ için $[a, b]$ aralığında * -sürekli ve A noktasının sağında sınırsız ise $[A, b]$ üzerinde ikinci çeşit has olmayan * -integrali

$${}^*\int_A^b f(x) d^*x = {}^*\text{-}\lim_{a \rightarrow A^+} {}^*\int_a^b f(x) d^*x$$

olarak tanımlanır.

3.3.19. Örnek: Geometrik Kalkülüs için $\mathbb{R}(N)_\alpha = \mathbb{R}$ ve $\mathbb{R}(N)_\beta = \mathbb{R}^+$ idi.

$f : [a, B] \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu her bir $b \in [a, B]$ için $[a, b]$ aralığında sürekli ve B

noktasının solunda sınırsız ($\lim_{x \rightarrow B^-} f(x) = +\infty$ veya $\lim_{x \rightarrow B^-} f(x) = 0$) olsun. f fonksiyonunun $[a, B]$ üzerinde ikinci çeşit geometrik integrali

$$\int_a^B f(x) \tilde{d}x = \lim_{b \rightarrow B^-} \int_a^b f(x) \tilde{d}x = \lim_{b \rightarrow B^-} e^{\left(\int_a^b \ln(f(x)) dx \right)} = e^{\lim_{b \rightarrow B^-} \left(\int_a^b \ln(f(x)) dx \right)} = e^{\int_a^B \ln(f(x)) dx}$$

bulunur.

Anageometrik Kalkülüs için $\mathbb{R}(N)_\alpha = \mathbb{R}^+$ ve $\mathbb{R}(N)_\beta = \mathbb{R}$ idi.

$f : [a, B) \subset (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her bir $b \in [a, B)$ sayısı için $[a, b]$ aralığında sürekli ve B noktasının solunda sınırsız olsun. f fonksiyonunun $[a, B]$ üzerinde ikinci çeşit anageometrik integrali

$$\int_a^B f(x) \tilde{d}x = \lim_{b \rightarrow B^-} \int_a^b f(x) \tilde{d}x = \lim_{b \rightarrow B^-} \int_{\ln a}^{\ln b} f(e^x) dx$$

olarak bulunur.

Bigeometrik Kalkülüs için $\mathbb{R}(N)_\alpha = \mathbb{R}(N)_\beta = \mathbb{R}^+$ olur. $f : [a, B) \subset \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu her bir $b \in [a, B)$ sayısı için $[a, b]$ aralığında sürekli ve B noktasının solunda sınırsız ($\lim_{x \rightarrow B^-} f(x) = +\infty$ veya $\lim_{x \rightarrow B^-} f(x) = 0$) olsun. f fonksiyonunun $[a, B]$ üzerinde ikinci çeşit bigeometrik integrali

$$\int_a^B f(x) \tilde{d}x = \lim_{b \rightarrow B^-} \int_a^b f(x) \tilde{d}x = \lim_{b \rightarrow B^-} e^{\int_{\ln a}^{\ln b} \ln f(e^x) dx} = e^{\lim_{b \rightarrow B^-} \left(\int_{\ln a}^{\ln b} \ln f(e^x) dx \right)}$$

olarak bulunur.

3.3.20. Örnek: $\int_0^1 \frac{1}{x^2} \tilde{d}x$ ve $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$ has olmayan integrallerinin yakınsaklığını

inceleyiniz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x^2} \tilde{d}x &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{1}{x^2} \tilde{d}x = \lim_{a \rightarrow 0^+} e^{\left(\int_a^1 \ln \frac{1}{x^2} dx \right)} = \lim_{a \rightarrow 0^+} e^{-2 \cdot (-1 - a \cdot \ln a + a)} \\ &= e^2 \cdot 1 \cdot \lim_{a \rightarrow 0^+} a^{2a} \\ &= e^2 \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \left(-1 + \frac{1}{a} \right) = +\infty$$

olduğundan $\int_0^1 \frac{1}{x^2} \tilde{d}x$ has olmayan geometrik integrali yakınsak, $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$ has olmayan

integrali ise ıraksaktır. Bu ise bir fonksiyonun klasik kalkülüsteki ikinci çeşit has olmayan integrali ile diğer kalkülüslerdeki ikinci çeşit has olmayan integralinin yakınsaklık durumunun farklı olabileceğini gösterir.

3.3.21. Tanım: $a \in \mathbb{R}(N)_\alpha$ ve $B \in \bar{\mathbb{R}}(N)_\alpha$ olmak üzere $f : [a, B] \rightarrow \mathbb{R}(N)_\beta$ fonksiyonu her bir $[a, b] \subset [a, B]$ aralığında $*$ -sürekli ve $B \in \mathbb{R}(N)_\alpha$ ise B noktasının solunda sınırsız olsun. Eğer

$$* - \lim_{b \rightarrow B^-} \int_a^b f(x) d^* x$$

var ve β -sonlu ise

$$\int_a^B f(x) d^* x = * - \lim_{b \rightarrow B^-} \int_a^b f(x) d^* x$$

yazılır ve $\int_a^B f(x) d^* x$ has olmayan $*$ -integrali yakınsaktır denir. Eğer

$* - \lim_{b \rightarrow B^-} \int_a^b f(x) d^* x$ $*$ -limiti yoksa veya $\mp\infty$ ya da $\pm\infty$ ise $\int_a^B f(x) d^* x$ has olmayan

$*$ -integrali ıraksaktır denir.

Benzer tanım $(A, b]$ için de yapılır.

3.3.22. Teorem: $a \in \mathbb{R}(N)_\alpha$ ve $B \in \bar{\mathbb{R}}(N)_\alpha$ olmak üzere $f, g : [a, B] \rightarrow \mathbb{R}(N)_\beta$ fonksiyonları her bir $[a, b] \subset [a, B]$ aralığında $*$ -sürekli ($B \in \mathbb{R}(N)_\alpha$ ise B noktasının

solunda f ve g fonksiyonları sınırsız) ve $\int_a^B f(x) d^* x$ ile $\int_a^B g(x) d^* x$ has olmayan $*$ -

integralleri yakınsak olsun. O halde her $\lambda, \mu \in \mathbb{R}(N)_\beta$ için $((\lambda \dot{\times} f) \ddot{+} (\mu \dot{\times} g))(x)$

fonksiyonunun $[a, B]$ üzerinde has olmayan $*$ -integrali

$$\int_a^B ((\lambda \dot{\times} f) \ddot{+} (\mu \dot{\times} g))(x) d^* x = \lambda \dot{\times} \int_a^B f(x) d^* x \ddot{+} \mu \dot{\times} \int_a^B g(x) d^* x$$

olur.

İspat: $*$ -integralinin β -toplamsal ve β -homojen olması kullanılırsa her bir $b \in [a, B]$ için

$$*\int_a^b ((\lambda \times f) \ddot{+} (\mu \times g))(x) d^*x = \lambda \times *\int_a^b f(x) d^*x \ddot{+} \mu \times *\int_a^b g(x) d^*x$$

yazılabilir. Bu eşitliğin her iki tarafı $b \rightarrow B^-$ için $*$ -limiti alınır

$$*-\lim_{b \rightarrow B^-} \left[*\int_a^b ((\lambda \times f) \ddot{+} (\mu \times g))(x) d^*x \right] = *-\lim_{b \rightarrow B^-} \left[\lambda \times *\int_a^b f(x) d^*x \ddot{+} \mu \times *\int_a^b g(x) d^*x \right]$$

olur ve

$$\begin{aligned} *\int_a^B ((\lambda \times f) \ddot{+} (\mu \times g))(x) d^*x &= \lambda \times *-\lim_{b \rightarrow B^-} *\int_a^b f(x) d^*x \ddot{+} \mu \times *-\lim_{b \rightarrow B^-} *\int_a^b g(x) d^*x \\ &= \lambda \times *\int_a^B f(x) d^*x \ddot{+} \mu \times *\int_a^B g(x) d^*x \end{aligned}$$

elde edilir.

3.3.23. Teorem: $a \in \mathbb{R}(N)_\alpha$ ve $B \in \bar{\mathbb{R}}(N)_\alpha$ olmak üzere $f : [a, B] \rightarrow \mathbb{R}(N)_\beta$ fonksiyonu her bir $[a, b] \subset [a, B]$ aralığında $*$ -süreklili ($B \in \mathbb{R}(N)_\alpha$ ise B noktasının solunda sınırsız) ve $c \in [a, b]$ ise

$$*\int_a^B f(x) d^*x = *\int_a^c f(x) d^*x \ddot{+} *\int_c^B f(x) d^*x$$

olur.

İspat: $*$ -integralin özelliğinden her bir $b \in [a, B]$ ve $c \in [a, b]$ için

$$*\int_a^b f(x) d^*x = *\int_a^c f(x) d^*x \ddot{+} *\int_c^b f(x) d^*x$$

yazılır. Bu eşitliğin her iki tarafı $b \rightarrow B^-$ iken $*$ -limiti alınır istenilen elde edilir.

3.3.24. Teorem: $B \in \bar{\mathbb{R}}(N)_\alpha$ olmak üzere $f : [a, B] \rightarrow \mathbb{R}(N)_\beta$ fonksiyonu $*$ -azalmayan ise,

$$*-\lim_{x \rightarrow B^-} f(x) = L = {}^\beta \sup \{ f(x) : x \in [a, B] \}$$

$*$ -limiti vardır. Ayrıca f fonksiyonu β -üstten sınırlı ise $L \in \mathbb{R}(N)_\beta$ olur. Aksi takdirde $L = \ddot{+}\infty$ olur.

İspat: a) f fonksiyonunun β -üstten sınırlı olması durumunda $L = {}^\beta \sup \{ f(x) : x \in [a, B] \} \in \mathbb{R}(N)_\beta$ olduğu açıktır. Şimdi $*-\lim_{x \rightarrow B^-} f(x) = L$ olduğu gösterilsin. Bunun için herhangi bir $\varepsilon \succ 0$ sayısı verilsin. β -supremumun özelliğinden,

1. Her $x \in [a, B]$ için $f(x) \preceq L$

2. $\exists x_\varepsilon \in [a, B]$ var öyle ki $f(x_\varepsilon) \succ L \dot{-} \varepsilon$

koşulları gerçekleşir. $B \in \mathbb{R}(N)_\alpha$ ise $\delta = B \dot{-} x_\varepsilon \succ 0$ alınırsa, $f(x)$ fonksiyonu $*$ -azalmayan olduğundan $B \dot{-} \delta \prec x \prec B$ olmak üzere her $x \in [a, B]$ noktası için

$$L \dot{-} \varepsilon \prec f(x_\varepsilon) \preceq f(x) \preceq L \prec L \dot{+} \varepsilon$$

yani

$$|f(x) \dot{-} L|_\beta \prec \varepsilon$$

olur. Bu ise $*-\lim_{x \rightarrow B^-} f(x) = L$ olduğunu gösterir.

Eğer $B = +\infty$ ise $\delta = x_\varepsilon \in [a, B]$ alındığında, $f(x)$ $*$ -azalmayan olduğundan her $x \succ \delta$ için

$$L \dot{-} \varepsilon \prec f(x_\varepsilon) \preceq f(x) \preceq L \prec L \dot{+} \varepsilon$$

olur, yani

$$|f(x) \dot{-} L|_\beta \prec \varepsilon$$

bulunur. Bu ise $*-\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ olduğunu gösterir.

b) f fonksiyonu β -üstten sınırsız olsun ve $*-\lim_{x \rightarrow B^-} f(x) = \dot{+}\infty$ olduğu gösterilsin.

Herhangi bir $\varepsilon \succ 0$ sayısı verilsin. f fonksiyonu β -üstten sınırsız olduğundan $f(x_\varepsilon) \succ \varepsilon$ olacak şekilde bir $x_\varepsilon \in [a, B]$ vardır. $B \in \mathbb{R}(N)_\alpha$ ise $\delta = B \dot{-} x_\varepsilon \succ 0$ alındığında, $f(x)$ fonksiyonunun $*$ -azalmayan olması kullanılırsa $B \dot{-} \delta \prec x \prec B$ olmak üzere her $x \in [a, B]$ için $f(x) \preceq f(x_\varepsilon) \succ \varepsilon$ bulunur. Bu ise $*-\lim_{x \rightarrow B^-} f(x) = \dot{+}\infty$ olduğunu gösterir.

Eğer $B = +\infty$ ise $\delta = x_\varepsilon \in [a, B]$ alındığında, $f(x)$ fonksiyonu $*$ -azalmayan olduğundan her $x \succ \delta$ için $f(x) \preceq f(x_\varepsilon) \succ \varepsilon$ bulunur. Bu ise $*-\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dot{+}\infty$ olduğunu gösterir.

3.3.25. Teorem (Karşılaştırma Testi): $B \in \overline{\mathbb{R}}(N)_\alpha$ olmak üzere

$f, g : [a, B] \rightarrow \mathbb{R}(N)_\beta$ fonksiyonları ($B \in \mathbb{R}(N)_\alpha$ ise B sayısının solunda f ve g fonksiyonları sınırsız) her $x \in [a, B]$ için $\ddot{0} \leq f(x) \leq C \times g(x)$ eşitsizliklerini sağlasın.

Her iki fonksiyon $b \in [a, B]$ olmak üzere her $[a, b]$ kapalı aralığında $*$ -süreklili olsun.

Eğer $\int_a^B g(x) d^*x$ yakınsak ise $\int_a^B f(x) d^*x$ yakınsak olur ve

$$\int_a^B f(x) d^*x \leq C \times \int_a^B g(x) d^*x \text{ eşitsizliği gerçekleşir.}$$

İspat: $B \in \overline{\mathbb{R}}(N)_\alpha$ olmak üzere $F, G : [a, B] \rightarrow \mathbb{R}(N)_\beta$ fonksiyonları her bir

$b \in [a, B]$ için $F(b) = \int_a^b f(x) d^*x$ ve $G(b) = \int_a^b g(x) d^*x$ şeklinde tanımlansın.

Her $x \in [a, B]$ için $\ddot{0} \leq f(x) \leq C \times g(x)$ olduğundan, her bir $b \in [a, B]$ için $*$ -integralin özelliğinden

$$\int_a^b \ddot{0} d^*x \leq \int_a^b f(x) d^*x \leq \int_a^b C \times g(x) d^*x$$

yazılır. Buna göre

$$(\iota(b) - \iota(a)) \times \ddot{0} \leq \int_a^b f(x) d^*x \leq C \times \int_a^b g(x) d^*x$$

ve dolayısıyla

$$\ddot{0} \leq F(b) \leq C \times G(b)$$

bulunur. Her $x \in [a, B]$ için $\ddot{0} \leq f(x)$ olduğundan her $a \leq r \leq s \leq B$ için

$$\begin{aligned} F(s) - F(r) &= \int_a^s f(x) d^*x - \int_a^r f(x) d^*x \\ &= \int_r^s f(x) d^*x + \int_a^r f(x) d^*x - \int_a^r f(x) d^*x \\ &= \int_r^s f(x) d^*x \\ &\geq \int_r^s \ddot{0} d^*x = \ddot{0} \end{aligned}$$

olur. Buna göre $F(s) \geq F(r)$ olur, yani F fonksiyonu $*$ -azalmayandır. Benzer şekilde

G fonksiyonu da $*$ -azalmayandır. $\int_a^B g(x) d^*x$ yakınsak olduğundan

3.3.24. Teoremden dolayı G fonksiyonu β -üstten sınırlıdır. Yani her $b \in [a, B]$ için $G(b) \leq L$ olacak şekilde $L \geq 0$ sayısı vardır. O halde her bir $b \in [a, B]$ için $F(b) \leq C \times G(b) \leq C \times L$ olacağından F fonksiyonu da β -üstten sınırlıdır. O zaman

3.3.24. Teorem gereğince $\int_a^B f(x) d^*x$ integrali yakınsaktır. Ayrıca her bir $b \in [a, B]$

için $F(b) \leq C \times G(b)$ eşitsizliğinde $b \rightarrow B^-$ iken $*$ -limit alınırsa

$$\int_a^B f(x) d^*x \leq C \times \int_a^B g(x) d^*x \text{ olur.}$$

3.3.26. Teorem (Bölüm Testi): $a \in \mathbb{R}(N)_\alpha$ ve $B \in \bar{\mathbb{R}}(N)_\alpha$ olmak üzere $f, g : [a, B] \rightarrow \mathbb{R}^+(N)_\beta \cup \{\emptyset\}$ fonksiyonları her bir $[a, b] \subset [a, B]$ aralığında $*$ -sürekli ($B \in \mathbb{R}(N)_\alpha$ ise B sayısının solunda f ve g fonksiyonları sınırsız) ve

$$* - \lim_{x \rightarrow B^-} \frac{f(x)}{g(x)} \beta = L, \quad (0 \leq L \leq +\infty)$$

$*$ -limiti mevcut olsun. Bu durumda

a) $0 \leq L < +\infty$ ise $\int_a^B g(x) d^*x$ yakınsaksa $\int_a^B f(x) d^*x$ yakınsaktır.

b) $0 < L \leq +\infty$ ise $\int_a^B g(x) d^*x$ ıraksaksa $\int_a^B f(x) d^*x$ ıraksaktır.

c) $0 < L < +\infty$ ise $\int_a^B g(x) d^*x$ ve $\int_a^B f(x) d^*x$ has olmayan $*$ -integralleri birlikte yakınsak ya da birlikte ıraksaktır.

İspat: a) $* - \lim_{x \rightarrow B^-} \frac{f(x)}{g(x)} \beta = L$ olduğundan $\varepsilon = 1$ için bir $\delta > 0$ sayısı vardır öyle ki

her $x \in [a, B]$ ve $B - \delta < x < B$ ($B = +\infty$ ise her $x > \delta$) olduğunda $\left| \frac{f(x)}{g(x)} \beta - L \right| < 1$

olur. Buna göre her $x \in [c, B]$ için $L - 1 < \frac{f(x)}{g(x)} \beta < L + 1$ ve dolayısıyla

$f(x) < (L + 1) \times g(x)$ olacak şekilde bir $c \in (B - \delta, B)$ sayısı ($B = +\infty$ ise bir $c > \delta$)

sayısı) vardır. $\int_a^B g(x) d^*x$ yakınsak olduğundan 3.3.23. Teorem gereğince

$\int_c^B g(x) d^*x$ integrali de yakınsaktır. Bu durumda 3.3.25. Teorem (Karşılaştırma

testi) gereğince $\int_c^B f(x) d^*x$ yakınsaktır. O zaman 3.3.23. Teoremden $\int_a^B f(x) d^*x$

integrali de yakınsaktır.

b) Eğer $0 < L < +\infty$ ise $0 < L < \varepsilon$ olacak şekildeki sabit bir $\varepsilon > 0$ sayısı için bir $\delta > 0$ sayısı vardır öyle ki her $x \in [a, B)$ için $B - \delta < x < B$ ($B = +\infty$ ise her $x > \delta$)

olduğunda $\left| \frac{f(x)}{g(x)} \beta - L \right| < \varepsilon$ olur. Buna göre her $x \in [c, B)$ için

$\varepsilon - L < \frac{f(x)}{g(x)} \beta < \varepsilon + L$ ve dolayısıyla $g(x) < \left(\frac{1}{\varepsilon - L} \beta \right) \times f(x)$ olacak şekilde bir

$c \in (B - \delta, B)$ sayısı ($B = +\infty$ ise bir $c > \delta$ sayısı) vardır. $\int_a^B g(x) d^*x$ ıraksak

olduğuna göre 3.3.23. Teorem gereğince $\int_c^B g(x) d^*x$ integrali de ıraksak olur. Bu

durumda 3.3.25. Teorem (Karşılaştırma testi) gereğince $\int_c^B f(x) d^*x$ ıraksaktır. O

zaman 3.3.23. Teoreme göre $\int_a^B f(x) d^*x$ integrali de ıraksaktır.

Eğer $L = +\infty$ ise herhangi sabit bir $\varepsilon > 0$ sayısı için bir $\delta > 0$ sayısı vardır öyle ki her $x \in [a, B)$ için $B - \delta < x < B$ ($B = +\infty$ ise her $x > \delta$) olduğunda

$\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} \beta$ olur. Buna göre her $x \in [c, B)$ için $g(x) < \frac{1}{\varepsilon} \beta \times f(x)$ olacak şekilde bir

$c \in (B - \delta, B)$ sayısı ($B = +\infty$ ise bir $c > \delta$ sayısı) vardır. $\int_a^B g(x) d^*x$ ıraksak

olduğuna göre 3.3.23. Teorem gereğince $\int_c^B g(x) d^*x$ integrali de ıraksak olur. Bu

durumda 3.3.25. Teorem (Karşılaştırma testi) gereğince $\int_c^B f(x) d^*x$ ıraksaktır. O

zaman 3.3.23. Teoreme göre $\int_a^B f(x) d^*x$ integrali de ıraksaktır.

c) a ve b şikkından açıktır.

3.3.27. Örnek: $\int_e^{+\infty} e^{\frac{1}{\ln x \sqrt{1+(\ln x)^2}}} d^*x$ has olmayan bigeometrik integralinin yakınsaklığını

inceleyiniz.

Çözüm: $\int_e^{+\infty} e^{\frac{1}{(\ln x)^2}} d^*x$ has olmayan bigeometrik integralinin yakınsak olduğu 3.3.17.

Örnekten biliniyor. Bölüm testi uygulanırsa

$$* - \lim_{x \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{1}{\ln x \sqrt{1+(\ln x)^2}}} \right)^{\frac{1}{\ln e \left(\frac{1}{(\ln x)^2} \right)}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{\frac{1}{\ln x \sqrt{1+(\ln x)^2}}}{\frac{1}{(\ln x)^2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln x}{\sqrt{1+(\ln x)^2}}} = e$$

bulunur ve buna göre $\int_e^{+\infty} e^{\frac{1}{\ln x \sqrt{1+(\ln x)^2}}} d^*x$ has olmayan bigeometrik integrali de yakınsaktır.

3.3.28. Teorem: $a \in \mathbb{R}(N)_\alpha$ ve $B \in \bar{\mathbb{R}}(N)_\alpha$ olmak üzere $f : [a, B) \rightarrow \mathbb{R}(N)_\beta$ fonksiyonu her bir $[a, b] \subset [a, B)$ aralığında $*$ -sürekli ($B \in \mathbb{R}(N)_\alpha$ ise B noktasının solunda sınırsız) olsun. $\int_a^B |f(x)|_\beta d^*x$ has olmayan $*$ -integrali yakınsaksa

$$\int_a^B f(x) d^*x \text{ yakınsaktır.}$$

İspat: Verilen f fonksiyonu için

$$f^+(x) = \frac{|f(x)|_\beta \ddot{+} f(x)}{\ddot{2}} \beta \quad \text{ve} \quad f^-(x) = \frac{|f(x)|_\beta \ddot{-} f(x)}{\ddot{2}} \beta$$

şeklinde $f^+, f^- : [a, B) \rightarrow [\ddot{0}, \ddot{+}\infty)$ fonksiyonları oluşturulsun. Her $x \in [a, B)$ için $\ddot{0} \leq f^+(x) \leq |f(x)|_\beta$ ve $\ddot{0} \leq f^-(x) \leq |f(x)|_\beta$ olduğundan 3.3.25. Teorem

(Karşılaştırma testi) gereğince $\int_a^B f^+(x) d^*x$ ve $\int_a^B f^-(x) d^*x$ has olmayan $*$ -

integralleri yakınsaktır. Öte yandan $f(x) = f^+(x) \dot{-} f^-(x)$ olması ve 3.3.22. Teorem kullanılırsa

$$\int_a^B f(x) d^*x = \int_a^B f^+(x) d^*x \dot{-} \int_a^B f^-(x) d^*x$$

elde edilir. O zaman $\int_a^B f(x) d^*x$ integrali yakınsaktır.

3.3.29. Tanım: $\int_a^B |f(x)|_\beta d^*x$ has olmayan $*$ -integrali yakınsaksa $\int_a^B f(x) d^*x$

mutlak yakınsaktır denir. $\int_a^B |f(x)|_\beta d^*x$ has olmayan $*$ -integrali ıraksak ancak

$\int_a^B f(x) d^*x$ has olmayan $*$ -integrali yakınsaksa $\int_a^B f(x) d^*x$ $*$ -integraline koşullu

yakınsaktır denir.

3.3.28. Teorem gereğince mutlak yakınsak her has olmayan $*$ -integral yakınsaktır.

3.3.30. Sonuç (Karşılaştırma testi): $a \in \mathbb{R}(N)_\alpha$ ve $B \in \bar{\mathbb{R}}(N)_\alpha$ olmak üzere

$f : [a, B) \rightarrow \mathbb{R}(N)_\beta$ ile $g : [a, B) \rightarrow \mathbb{R}^+(N)_\beta \cup \{\ddot{0}\}$ fonksiyonları her bir

$[a, b] \subset [a, B)$ aralığında $*$ -sürekli ($B \in \mathbb{R}(N)_\alpha$ ise f ve g fonksiyonları B noktasının

solunda sınırsız) ve her $x \in [a, B)$ için $|f(x)|_\beta \leq g(x)$ olsun. $\int_a^B g(x) d^*x$ yakınsaksa

$\int_a^B f(x) d^*x$ yakınsaktır.

3.3.31. Örnek: $\int_e^{+\infty} e^{\frac{\cos(\ln x)}{(\ln x)^2}} \tilde{d}x$ has olmayan bigeometrik integralinin yakınsak olup

olmadığını bulunuz.

Çözüm: $\int_e^{+\infty} \frac{1}{e^{(\ln x)^2}} \tilde{d}x$ has olmayan bigeometrik integrali yakınsaklığı 3.1.17. Örnekten

biliniyor. Her $x \in [e, +\infty)$ için $\left| \frac{\cos(\ln x)}{(\ln x)^2} \right| \leq \frac{1}{(\ln x)^2}$ olduğundan

$$\left| e^{\frac{\cos(\ln x)}{(\ln x)^2}} \right|_{\beta} = e^{\left| \frac{\cos(\ln x)}{(\ln x)^2} \right|} \leq e^{\left| \frac{1}{(\ln x)^2} \right|} = \left| e^{\frac{1}{(\ln x)^2}} \right|_{\beta}$$

olur. O zaman 3.3.30. Sonuç gereğince $\int_{\tilde{e}}^{+\infty} e^{\frac{\cos(\ln x)}{(\ln x)^2}} \tilde{d}x$ has olmayan bigeometrik integrali yakınsaktır.

3.3.32. Teorem (Cauchy kriteri): $f : X \subset \mathbb{R}(N)_{\alpha} \rightarrow \mathbb{R}(N)_{\beta}$ fonksiyonu için $*-\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \in \mathbb{R}(N)_{\beta}$ olması için gerekli ve yeterli şart herhangi bir $\varepsilon \succ \dot{0}$ sayısı verildiğinde, her $x', x'' \in X$ için $|x' \dot{-} a|_{\alpha} \prec \delta$ ve $|x'' \dot{-} a|_{\alpha} \prec \delta$ ise $|f(x') \dot{-} f(x'')|_{\beta} \prec \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $\delta(\varepsilon) \succ \dot{0}$ sayısı vardır.

İspat: $*-\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \in \mathbb{R}(N)_{\beta}$ *-limiti var olsun. O halde herhangi bir $\varepsilon \succ \dot{0}$ sayısı verildiğinde her $x', x'' \in X$ için $|x' \dot{-} a|_{\alpha} \prec \delta$ ve $|x'' \dot{-} a|_{\alpha} \prec \delta$ ise $|f(x') \dot{-} A|_{\beta} \prec \frac{\varepsilon}{2} \beta$ ve $|f(x'') \dot{-} A|_{\beta} \prec \frac{\varepsilon}{2} \beta$ olacak şekilde en az bir $\delta \succ \dot{0}$ sayısı vardır. Aynı x' ve x'' sayıları için

$$|f(x') \dot{-} f(x'')|_{\beta} = |f(x') \dot{-} A \dot{+} A \dot{-} f(x'')|_{\beta} \leq |f(x') \dot{-} A|_{\beta} \dot{+} |f(x'') \dot{-} A|_{\beta} \prec \frac{\varepsilon}{2} \beta \dot{+} \frac{\varepsilon}{2} \beta = \varepsilon$$

bulunur.

Tersine herhangi $\varepsilon \succ \dot{0}$ sayısı verildiğinde her $x', x'' \in X$ için $|x' \dot{-} a|_{\alpha} \prec \delta$ ve $|x'' \dot{-} a|_{\alpha} \prec \delta$ ise $|f(x') \dot{-} f(x'')|_{\beta} \prec \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $\delta \succ \dot{0}$ sayısı var olsun.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in X \setminus \{a\}$ ve ${}^{\alpha}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ koşullarını sağlayan herhangi bir (x_n) dizisi verilsin. ${}^{\alpha}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ olduğundan her $n', n'' > n_{\varepsilon}$ için $x_{n'}, x_{n''} \in X$, $|x_{n'} \dot{-} a|_{\alpha} \prec \delta$ ve $|x_{n''} \dot{-} a|_{\alpha} \prec \delta$ olacak şekilde en az bir $n_{\varepsilon} \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. O zaman hipoteze göre her n' ve n'' sayıları için hipotezden $|f(x_{n'}) \dot{-} f(x_{n''})|_{\beta} \prec \varepsilon$ olur ve buna göre $(f(x_n))$ dizisi $\mathbb{R}(N)_{\beta}$ uzayında Cauchy dizisidir. $\mathbb{R}(N)_{\beta}$ tam olduğundan $(f(x_n))$ dizisi bu uzayın bir elemanına yakınsar. ${}^{\beta}\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ denilirse *-limitin tanımından $*-\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ bulunur.

Aşağıdaki teoremin ispatı 3.3.32. Teoremden hemen görülür.

3.3.33. Teorem (Cauchy Testi): $a \in \mathbb{R}(N)_\alpha$ ve $B \in \bar{\mathbb{R}}(N)_\alpha$ olmak üzere her bir $[a, b] \subset [a, B]$ aralığında $*$ -sürekli ($B \in \mathbb{R}(N)_\alpha$ ise B noktasının solunda sınırsız)

$f : [a, B] \rightarrow \mathbb{R}(N)_\beta$ fonksiyonu verilsin. ${}^*\int_a^B f(x) d^*x$ has olmayan $*$ -integralinin

yakınsak olması için gerekli ve yeterli koşul her $\varepsilon \succ 0$ sayısı verildiğinde her $b_1, b_2 \in [b_0, B]$ için

$$\left| {}^*\int_{b_1}^{b_2} f(x) d^*x \right|_\beta \prec \varepsilon$$

olacak şekilde bir $b_0 = b_0(\varepsilon) \in [a, B]$ sayısının var olmasıdır.

3.3.34. Teorem: Bir $f : [a, b] \subset \mathbb{R}(N)_\alpha \rightarrow \mathbb{R}(N)_\beta$ fonksiyonu $*$ -sürekli olsun. Bu durumda

- (i) f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde β -sınırlıdır.
- (ii) Her $x \in [a, b]$ için $f(x_m) = m \preceq f(x) \preceq M = f(x_M)$ olacak şekilde $x_m, x_M \in [a, b]$ sayıları vardır.
- (iii) $\left| {}^*\int_a^b f(x) d^*x \right|_\beta \preceq {}^*\int_a^b |f(x)|_\beta d^*x$ olur.

İspat: f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde $*$ -sürekli olsun.

(i) f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde $*$ -sürekli olduğundan, 2.2.10. Not (1) şıkkı gereğince $\bar{f} = \beta^{-1} \circ f \circ \alpha$ fonksiyonu $[\alpha^{-1}(a), \alpha^{-1}(b)]$ üzerinde sürekli olur. Buna göre $\bar{f}$ fonksiyonu $[\alpha^{-1}(a), \alpha^{-1}(b)]$ üzerinde sınırlıdır. O zaman her $t \in [\alpha^{-1}(a), \alpha^{-1}(b)]$ için $|\beta^{-1}(f(\alpha(t)))| \leq C$ olacak şekilde $C > 0$ sayısı vardır. Her $x \in [a, b]$ için $x = \alpha(t)$ olacak şekilde bir ve yalnız bir $t \in [\alpha^{-1}(a), \alpha^{-1}(b)]$ sayısı vardır ve $K = \beta(C)$ alınırsa $C > 0$ olduğundan $K \succ 0$ olur. Her $t \in [\alpha^{-1}(a), \alpha^{-1}(b)]$ için $|\beta^{-1}(f(\alpha(t)))| \leq C$ olduğundan her $x \in [a, b]$ için $|\beta^{-1}(f(x))| \leq C$ bulunur, buradan $\beta(|\beta^{-1}(f(x))|) \preceq \beta(C)$ elde edilir. Bu ise her $x \in [a, b]$ için $|f(x)|_\beta \preceq K$ ve dolayısıyla f fonksiyonunun β -sınırlı olduğunu gösterir.

(ii) f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde $*$ -sürekli olduğundan, $\bar{f} = \beta^{-1} \circ f \circ \alpha$ fonksiyonu $[\alpha^{-1}(a), \alpha^{-1}(b)]$ üzerinde sürekli olur. O zaman her $t \in [\alpha^{-1}(a), \alpha^{-1}(b)]$ için $\bar{f}(t_m) \leq \bar{f}(t) \leq \bar{f}(t_M)$ olacak şekilde $t_m, t_M \in [\alpha^{-1}(a), \alpha^{-1}(b)]$ sayıları vardır. Her $x \in [a, b]$ için $x = \alpha(t)$ olacak şekilde bir ve yalnız bir $t \in [\alpha^{-1}(a), \alpha^{-1}(b)]$ sayısı vardır ve $\alpha(t_m) = x_m$, $\alpha(t_M) = x_M$ alınırsa $x_m, x_M \in [a, b]$ olur. Her $t \in [\alpha^{-1}(a), \alpha^{-1}(b)]$ için $\beta^{-1}(f(\alpha(t_m))) \leq \beta^{-1}(f(\alpha(t))) \leq \beta^{-1}(f(\alpha(t_M)))$ olduğundan her $x \in [a, b]$ olduğunda β -sıralama tanımından

$$f(x_m) = f(\alpha(t_m)) \leq f(x) \leq f(x_M) = f(\alpha(t_M))$$

elde edilir.

(iii) Her $x \in [a, b]$ için $|f(x)|_\beta \leq |f(x)|_\beta$ olduğundan 2.3.5. Önerme (1) şıkkı gereğince $\ddot{0} \leq |f(x)|_\beta \leq f(x) \leq |f(x)|_\beta$ olur. Buna göre her $x \in [a, b]$ için $*$ -integralin özelliği ve β -homojen olması gereğince

$$\begin{aligned} & \int_a^b (\ddot{0} \leq |f(x)|_\beta) d^*x \leq \int_a^b f(x) d^*x \leq \int_a^b |f(x)|_\beta d^*x \\ & \int_a^b ((\ddot{0} \leq \ddot{1}) \times |f(x)|_\beta) d^*x \leq \int_a^b f(x) d^*x \leq \int_a^b |f(x)|_\beta d^*x \\ & (\ddot{0} \leq \ddot{1}) \times \int_a^b |f(x)|_\beta d^*x \leq \int_a^b f(x) d^*x \leq \int_a^b |f(x)|_\beta d^*x \\ & \ddot{0} \leq \int_a^b |f(x)|_\beta d^*x \leq \int_a^b f(x) d^*x \leq \int_a^b |f(x)|_\beta d^*x \end{aligned}$$

yazılır. O halde her $x \in [a, b]$ için son eşitsizlik ve 2.3.5. Önerme (1) şıkkı gereğince

$$\left| \int_a^b f(x) d^*x \right|_\beta \leq \int_a^b |f(x)|_\beta d^*x \text{ olur.}$$

3.3.35. Teorem (Ara Değer Teoremi): Bir $f : \mathbb{R}(N)_\alpha \rightarrow \mathbb{R}(N)_\beta$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde $*$ -sürekli ve $f(a) \neq f(b)$ olsun. Bu durumda her $D \in [f(a), f(b)]$ (veya her $D \in [f(b), f(a)]$) için $f(c) = D$ olacak şekilde en az bir $c \in [a, b]$ sayısı vardır.

İspat: f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde $*$ -sürekli olduğundan, 2.2.10. Not (1) şıkkı gereğince $\bar{f} = \beta^{-1} \circ f \circ \alpha$ fonksiyonu $[\alpha^{-1}(a), \alpha^{-1}(b)]$ üzerinde sürekli olur. Her $D \in [f(a), f(b)]$ (veya her $D \in [f(b), f(a)]$) için

$$\beta^{-1}(D) \in [\beta^{-1}(f(a)), \beta^{-1}(f(b))] = [\bar{f}(\alpha^{-1}(a)), \bar{f}(\alpha^{-1}(b))]$$

$$(\text{veya } \beta^{-1}(D) \in [\bar{f}(\alpha^{-1}(b)), \bar{f}(\alpha^{-1}(a))])$$

olduğundan $\bar{f}(k) = \beta^{-1}(f(\alpha(k))) = \beta^{-1}(D)$ olacak şekilde en az bir

$k \in [\alpha^{-1}(a), \alpha^{-1}(b)]$ sayısı vardır. Eğer $c = \alpha(k)$ alınırsa $c = \alpha(k) \in [a, b]$ olur.

Buna göre $\beta^{-1}(f(\alpha(k))) = \beta^{-1}(D)$ olduğundan $f(c) = D$ elde edilir.

3.3.36. Teorem (İkinci Ortalama Değer Teoremi): $f, g : [a, b] \subset \mathbb{R}(N)_\alpha \rightarrow \mathbb{R}(N)_\beta$

fonksiyonları $[a, b]$ üzerinde *-sürekli olsun.

a) g fonksiyonu *-artmayan ve her $x \in [a, b]$ için $g(x) \geq \bar{0}$ ise

$$*\int_a^b f(x) \ddot{\times} g(x) d^*x = g(a) \ddot{\times} *\int_a^\xi f(x) d^*x$$

olacak şekilde $\xi \in [a, b]$ noktası vardır.

b) g fonksiyonu *-azalmayan ve her $x \in [a, b]$ için $g(x) \geq \bar{0}$ ise

$$*\int_a^b f(x) \ddot{\times} g(x) d^*x = g(b) \ddot{\times} *\int_\eta^b f(x) d^*x$$

olacak şekilde $\eta \in [a, b]$ noktası vardır.

İspat: a) $[a, b]$ aralığının n -katlı $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ α -parçalanışı verilsin. Bu durumda

$$\begin{aligned} *\int_a^b f(x) \ddot{\times} g(x) d^*x &= \beta \sum_{k=1}^{n-1} \left(*\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) \ddot{\times} g(x) d^*x \right) \\ &= \beta \sum_{k=1}^{n-1} \left(g(x_k) \ddot{\times} *\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) d^*x \right) \ddot{+} \beta \sum_{k=1}^{n-1} \left(*\int_{x_k}^{x_{k+1}} [g(x) \ddot{-} g(x_k)] \ddot{\times} f(x) d^*x \right) \\ &= S_n^{(1)} \ddot{+} S_n^{(2)} \end{aligned}$$

olur. Şimdi $n \rightarrow \infty$ iken $S_n^{(2)} \xrightarrow{\beta} \bar{0}$ olduğu gösterilsin. f fonksiyonu $[a, b]$

üzerinde *-sürekli olduğundan β -sınırlı ve dolayısıyla her $x \in [a, b]$ için $|f(x)|_\beta \leq K$

olacak şekilde bir $K \geq \bar{0}$ sayısı vardır. O halde

$$\begin{aligned} |S_n^{(2)}|_\beta &= \left| \beta \sum_{k=1}^{n-1} \left(*\int_{x_k}^{x_{k+1}} [g(x) \ddot{-} g(x_k)] \ddot{\times} f(x) d^*x \right) \right|_\beta \\ &\leq \beta \sum_{k=1}^{n-1} \left| *\int_{x_k}^{x_{k+1}} [g(x) \ddot{-} g(x_k)] \ddot{\times} f(x) d^*x \right|_\beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{\beta}^{n-1} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} |g(x) \dot{-} g(x_k)|_{\beta} \ddot{\times} |f(x)|_{\beta} d^* x \right) \\
&\leq K \ddot{\times} \sum_{\beta}^{n-1} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} |g(x) \dot{-} g(x_k)|_{\beta} d^* x \right) \\
&\leq K \ddot{\times} \sum_{\beta}^{n-1} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} \sup \{ |g(x) \dot{-} g(y)|_{\beta} : x, y \in [x_k, x_{k+1}] \} d^* x \right) \\
&= K \ddot{\times} \sum_{\beta}^{n-1} \left[\sup \{ |g(x) \dot{-} g(y)|_{\beta} : x, y \in [x_k, x_{k+1}] \} \ddot{\times} (t(x_{k+1}) \dot{-} t(x_k)) \right]
\end{aligned}$$

ve g fonksiyonu da $*$ -sürekli olduğundan ${}^{\beta} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(2)} = \ddot{0}$ olur. Buna göre

$$\int_a^b f(x) \ddot{\times} g(x) d^* x = {}^{\beta} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{\beta}^{n-1} \left(g(x_k) \ddot{\times} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) d^* x \right) \right]$$

elde edilir. Her $x \in [a, b]$ için $F(x) = \int_a^x f(t) d^* t$ olsun. f fonksiyonu $*$ -sürekli

olduğundan $*$ -Kalkülüsün Birinci Ana Teoreminden her $x \in [a, b]$ için

$[DF](x) = f(x)$ yazılır. Şimdi

$$m(F) = {}^{\beta} \min \{ F(x) : x \in [a, b] \}$$

$$M(F) = {}^{\beta} \max \{ F(x) : x \in [a, b] \}$$

olsun. F fonksiyonu $*$ -sürekli olduğundan $*$ -Kalkülüsün İkinci Ana Teoreminden

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) d^* x = F(x_{k+1}) \dot{-} F(x_k) \text{ yazılır. Buradan}$$

$$\begin{aligned}
S_n^{(1)} &= \sum_{\beta}^{n-1} \left(g(x_k) \ddot{\times} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) d^* x \right) \\
&= \sum_{\beta}^{n-1} \left(g(x_k) \ddot{\times} [F(x_{k+1}) \dot{-} F(x_k)] \right) \\
&= F(b) \ddot{\times} g(x_{n-1}) \dot{-} F(a) \ddot{\times} g(a) \ddot{+} \sum_{\beta}^{n-2} \left(F(x_{k+1}) \ddot{\times} [g(x_k) \dot{-} g(x_{k+1})] \right) \\
&= F(b) \ddot{\times} g(x_{n-1}) \ddot{+} \sum_{\beta}^{n-2} \left(F(x_{k+1}) \ddot{\times} [g(x_k) \dot{-} g(x_{k+1})] \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. $k=1, 2, \dots, n-2$ için $g(x_k) \dot{-} g(x_{k+1}) \dot{\succ} \ddot{0}$ ve $g(x_{n-1}) \dot{\geq} \ddot{0}$ olduğundan, son eşitlik gereğince

$$\begin{aligned}
m(F) \times g(a) &= m(F) \times g(x_{n-1}) \dot{+} \sum_{k=1}^{n-2} \left(m(F) \times [g(x_k) \dot{-} g(x_{k+1})] \right) \\
&\leq F(b) \times g(x_{n-1}) \dot{+} \sum_{k=1}^{n-2} \left(F(x_{k+1}) \times [g(x_k) \dot{-} g(x_{k+1})] \right) \\
&\leq M(F) \times g(a)
\end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitsizlikte $n \rightarrow \infty$ iken β -limite geçilirse

$$m(F) \times g(a) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} {}^\beta S_n^{(1)} = {}^* \int_a^b f(x) \times g(x) d^* x \leq M(F) \times g(a)$$

bulunur. $g(a) = \ddot{0}$ durumunda istenen eşitsizliğin gerçekleşeceği açıktır. $g(a) > \ddot{0}$ ise

$$\mu = \frac{\ddot{1}}{g(a)} \beta \times {}^* \int_a^b f(x) \times g(x) d^* x$$

alındığında, son eşitsizlikten $m(F) \leq \mu \leq M(F)$ olur. F fonksiyonu $[a, b]$ aralığı

üzerinde $*$ -sürekli olduğundan $\mu = F(\varepsilon) = {}^* \int_a^\varepsilon f(x) d^* x$ veya

$${}^* \int_a^b f(x) \times g(x) d^* x = g(a) \times {}^* \int_a^\varepsilon f(x) d^* x \text{ olacak şekilde bir } \varepsilon \in [a, b] \text{ noktası vardır.}$$

b) Benzer şekilde yapılır.

3.3.37. Teorem (Genelleştirilmiş İkinci Ortalama Değer Teoremi):

$f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}(N)_\beta$ fonksiyonları $*$ -sürekli ve g fonksiyonu $*$ -azalmayan (veya $*$ -artmayan) olsun. Bu durumda

$${}^* \int_a^b f(x) \times g(x) d^* x = g(a) \times {}^* \int_a^\varepsilon f(x) d^* x \dot{+} g(b) \times {}^* \int_\varepsilon^b f(x) d^* x$$

olacak şekilde bir $\varepsilon \in [a, b]$ noktası vardır.

İspat: g fonksiyonu $[a, b]$ aralığı üzerinde $*$ -azalmayan ve $*$ -sürekli olduğundan

$G(x) = g(b) \dot{-} g(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde $*$ -sürekli ve $*$ -artmayandır. Ayrıca her $x \in [a, b]$ için $G(x) \geq \ddot{0}$ olur. O halde İkinci Ortalama Değer Teoreminden dolayı

$${}^* \int_a^b f(x) \times G(x) d^* x = G(a) \times {}^* \int_a^\varepsilon f(x) d^* x$$

olacak şekilde bir $\varepsilon \in [a, b]$ noktası vardır. Yine

$${}^* \int_a^b f(x) \times G(x) d^* x = {}^* \int_a^b f(x) \times [g(b) \dot{-} g(x)] d^* x$$

$$= g(b) \ddot{\times} \int_a^b f(x) d^* x \ddot{-} \int_a^b f(x) \ddot{\times} g(x) d^* x \quad (3.3.1)$$

ve

$$G(a) \ddot{\times} \int_a^\varepsilon f(x) d^* x = g(b) \ddot{\times} \int_a^\varepsilon f(x) d^* x \ddot{-} g(a) \ddot{\times} \int_a^\varepsilon f(x) d^* x \quad (3.3.2)$$

olduğundan (3.3.1) ve (3.3.2) eşitliklerinin sağ taraflarındaki ifadelerin eşitliğinden

$$g(b) \ddot{\times} \int_a^b f(x) d^* x \ddot{-} \int_a^b f(x) \ddot{\times} g(x) d^* x = g(b) \ddot{\times} \int_a^\varepsilon f(x) d^* x \ddot{-} g(a) \ddot{\times} \int_a^\varepsilon f(x) d^* x$$

yazılır. Böylece

$$\int_a^b f(x) \ddot{\times} g(x) d^* x = g(a) \ddot{\times} \int_a^\varepsilon f(x) d^* x \ddot{+} g(b) \ddot{\times} \int_\varepsilon^b f(x) d^* x$$

eşitliğinin bir $\varepsilon \in [a, b]$ noktası için doğruluğu görülür. g fonksiyonunun *-artmayan olduğunda $G(x) = g(x) \ddot{-} g(a)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığı üzerinde *-sürekli, *-azalmayan ve her $x \in [a, b]$ için $G(x) \geq 0$ olacağından ispat benzer şekilde yapılır.

3.3.38. Teorem (Abel-Dirichlet Testi): $a \in \mathbb{R}(N)_\alpha$ ve $B \in \bar{\mathbb{R}}(N)_\alpha$ olmak üzere $f, g : [a, B) \rightarrow \mathbb{R}(N)_\beta$ fonksiyonları her bir $[a, b] \subset [a, B)$ aralığında *-sürekli ($B \in \mathbb{R}(N)_\alpha$ ise f ve g fonksiyonları B noktasının solunda sınırsız) olsun. Bu durumda

a) $\int_a^B f(x) d^* x$ has olmayan *-integrali yakınsak, g fonksiyonu da *-artmayan (veya

-azalmayan) ve β -sınırlı ise $\int_a^B f(x) \ddot{\times} g(x) d^ x$ has olmayan *-integrali

yakınsaktır (Abel Testi).

b) $b \in [a, B)$ olmak üzere $F(b) = \int_a^b f(x) d^* x$ fonksiyonu $[a, B)$ üzerinde β -sınırlı, g

fonsiyonu da $*-\lim_{x \rightarrow B^-} g(x) = 0$ koşulunu sağlayan ve *-artmayan veya *-azalmayan

ise $\int_a^B f(x) \ddot{\times} g(x) d^* x$ has olmayan *-integrali yakınsaktır (Dirichlet Testi).

İspat: Her $b_1, b_2 \in [a, B]$ için genelleştirilmiş ikinci ortalama değer teoreminden

$$*\int_{b_1}^{b_2} f(x) \ddot{x} g(x) d^*x = g(b_1) \ddot{x} * \int_{b_1}^{\eta} f(x) d^*x + g(b_2) \ddot{x} * \int_{\eta}^{b_2} f(x) d^*x$$

olacak şekilde b_1 ile b_2 arasında en az bir $\eta \in [a, b]$ vardır.

a) g fonksiyonu β -sınırlı ve $* \int_a^B f(x) d^*x$ yakınsak olduğundan Cauchy Testi

gereğince $* \int_a^B f(x) \ddot{x} g(x) d^*x$ yakınsak olur.

b) $b \in [a, B]$ olmak üzere $F(b) = * \int_a^b f(x) d^*x$ fonksiyonu $[a, B]$ üzerinde β -sınırlı

olduğundan her $b_1, b_2 \in [a, B]$ için $* \int_{b_1}^{\eta} f(x) d^*x$ ve $* \int_{\eta}^{b_2} f(x) d^*x$ *-integralleri de

β -sınırlı olur. Böylece $* \int_{b_1}^{\eta} f(x) d^*x$ ile $* \int_{\eta}^{b_2} f(x) d^*x$ *-integralleri β -sınırlı ve

$* - \lim_{x \rightarrow B^-} g(x) = \ddot{0}$ olduğundan Cauchy Testi gereğince $* \int_a^B f(x) \ddot{x} g(x) d^*x$ yakınsak olur.

3.3.39. Örnek: $\int_1^{+\infty} e^{\frac{\cos x}{x^2}} \tilde{d}x$ has olmayan geometrik integralinin yakınsak olup olmadığını bulunuz.

Çözüm: $e^{\frac{\cos x}{x^2}} = (e^{\cos x})^{\ln e^{\frac{1}{x^2}}}$ eşitliği vardır. Şimdi $f(x) = e^{\cos x}$, $g(x) = e^{\frac{1}{x^2}}$ alınsın. Her $b \in [1, +\infty)$ için

$$F(b) = \int_1^b e^{\cos x} \tilde{d}x = e^{\int_1^b \cos x dx} = e^{\sin b - \sin 1}$$

olur. Her $b \in [1, +\infty)$ için $|\sin b - \sin 1| \leq 2$ olduğundan $|F(b)|_{\beta} = e^{|\sin b - \sin 1|} \leq \ddot{2}$ ve buna

göre F fonksiyonu sınırlıdır. Yine $* - \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x^2}} = 1 = \ddot{0}$ olur ve $x_1 \leq x_2$

olmak üzere $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$ sayıları için $f(x_2) = e^{\frac{1}{x_2^2}} \leq e^{\frac{1}{x_1^2}} = f(x_1)$ olduğundan f

fonksiyonu geometrik azalandır. O halde Dirichlet Testi gereğince $\int_1^{+\infty} e^{\frac{\cos x}{x^2}} \tilde{d}x$ has

olmayan geometrik integrali yakınsaktır.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Literatürde Newtonyen olmayan reel sayı serileri ve Newtonyen olmayan anlamda has olmayan integraller üzerine yeterince çalışma olmadığı tespit edilmiştir. Bu kavramlar tezde tanıtılmış, sonra onların yakınsaklıkları ve özellikleri incelenmiştir. Newtonyen has olmayan integraller ve Newtonyen olmayan anlamda has olmayan integraller arasındaki ilişkiler verilmiştir.

Bu çalışma sonrasında Newtonyen olmayan anlamda has olmayan integral için Cauchy formu incelenebilir. Reel sayı serileri için bilinen diğer yakınsaklık testleri Newtonyen olmayan reel sayı serileri için de çalışılabilir.



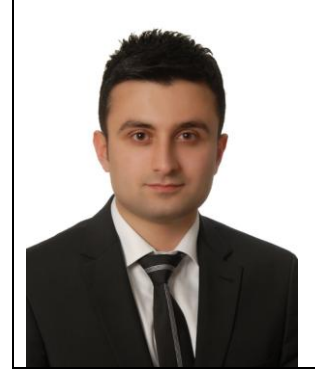
KAYNAKLAR

- [1] Grossman M., Katz R., 1972. *Non-Newtonian Calculus*, 1st ed., Lee Press, Pigeon Cove Massachussets.
- [2] Megginiss J. R., 1980. Non-Newtonian calculus applied to probability, utility, and Bayesian Analysis. *American Statistical Association: Proceedings of the Business and Economic Statistics Section*, 405-410.
- [3] Grossman J., 1981. *Meta-Calculus: Differential and Integral*, 1st ed., Archimedes Foundation, Rockport Massachussets.
- [4] Grossman M., 1983. *Bigeometric Calculus: A System with a Scale Free Derivative*, 1st ed., Archimedes Foundation, Rockport Massachussets.
- [5] Rybaczuk M. ve Stoppel S., 2000. The fractal growth of fatigue defects in materials, *Springer*, 103, 71-94.
- [6] Aniszewska D., 2007. Multiplicative Runge-Kutta methods, *Nonlinear Dynamics*, 50, 265-272.
- [7] Bashirov A. E., Misirli Kurpinar E., Ozyapici A., 2008. Multiplicative calculus and its applications, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 337, 36-48.
- [8] Uzer A., 2010. Multiplicative type complex calculus as an alternative to the classical calculus, *Computers and Mathematics with Applications*, 60, 2725-2737.
- [9] Bashirov A. E., Riza M., 2011. On complex multiplicative differantation, *TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics*, 1(1), 75-85.
- [10] Türkmen C., Başar F., 2012. Some basic results on the sets of sequences with geometric calculus, *First International Conference on Analysis and Applied Mathematics*, Gumushane, Turkey, 18-21 Ekim.
- [11] Florak L., van Assen H., 2012. Multiplicative calculus in biomedical image analysis, *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 42(1), 64-75
- [12] Çakmak A. F., Başar F., 2012. Some new results on sequence spaces with respect to non-Newtonian calculus, *Journal of Inequalities and Applications*, 228, 1-12.
- [13] Tekin S., Başar F., 2013. Certain sequence spaces over the non-Newtonian complex field, *Abstract and Applied Analysis*, 2013, 1-11.
- [14] Filip D., Piatecki C., 2014. A non-Newtonian examination of the theory of exogenous growth, *Mathematica Aeterna*, 4(2), 101-117.
- [15] Çakmak A. F., Başar F., 2014. On line and double integrals in the non-Newtonian sense, *International Conference on Analysis and Applied Mathematics*, Shymkent, Kazakhstan, 11-13 Eylül.

- [16] Duyar C., Sağır B., Oğuz O., 2015. Some basic topological properties on non-Newtonian real line, *British Journal of Mathematics and Computer Science*, 9(4), 300-307.
- [17] Musayev B., Alp M., Mustafayev N., 2003. *Teori ve Çözümlü Problemlerle Analiz Cilt II*, Tekagaç Eylül Yay., Kütahya.



ÖZGEÇMİŞ



Adı Soyadı : Murat ERDOĞAN

Doğum Yeri ve Tarihi : GÖKÇEBEY 1989

Adres : Çay mah. Çamlıbel Sok. No:2 Özdemir Apt.
Terme/SAMSUN

E-Posta : murat.erdogan@windowlive.com

Lisans : Ondokuz Mayıs Üniversitesi (2007-2012)

Mesleki Deneyim : Milli Eğitim Bakanlığı-Öğretmen(2012-...)