

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

TEMEL CEBİRLER VE DEĞİŞMELİ TEMEL CEBİRLER ÜZERİNE

Menevşe ERYÜZLÜ

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Alev Fırat

Matematik Anabilim Dalı

Bilim Dalı Kodu: 403.01.01

Sunuş Tarihi: 20.07.2016

Bornava-İzmir

2016

Menevşe Eryüzlü tarafından YÜKSEK LİSANS tezi olarak sunulan “Temel Cebirler ve Değişmeli Temel Cebirler Üzerine” başlıklı bu çalışma E.Ü. Fen Bilimleri Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi’nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 20.07.2016 tarihinde yapılan tez savunma sınavında oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

Juri Üyeleri

İmza

Juri Başkanı: Prof. Dr. Alev FIRAT

Raportör Üye: Yrd. Doç. Dr. Ayşegül ÇAKSU GÜLER

Üye: Yrd. Doç. Dr. Şule AYAR ÖZBAL

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Temel Cebirler ve Değişmeli Temel Cebirler Üzerine” başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, döküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını, bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

20/07/2016

Menevşe Eryüzlü

ÖZET

TEMEL CEBİRLER VE DEĞİŞMELİ TEMEL CEBİRLER
ÜZERİNE

ERYÜZLÜ, Menevşe

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü

Tez Yöneticisi: Prof. Dr. Alev FIRAT

Temmuz, 2017, 34 sayfa

Bu tezde temel cebirler, temel cebirlerin diğer bazı cebirsel yapılarla ilişkileri, idealleri, zayıf ve ön idealleri incelenmiştir. Birinci bölümde, tez konusu tanıtılmış, konunun çalışılma amacı ve gelişme süreci özetlenmiştir. İkinci bölümde, tezin anlaşılması için gerekli olan tanımlar, teoremler ve notlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Chajda ve Emanovsky' nin 2004'te yayınlanan, Chajda ve R. Halas in 2007 de, Ivan Chajda, Radomir Halas ve Jan Kühr un makaleleri esas alınarak temel cebirlerin özellikleri, temel cebirlerin BCC ve BCK-Cebirleri ile ve özellikle MV-Cebirleri ile arasındaki ilişki incelenmiştir. Bu bölümün son kısmında, kafes etki cebirlerine, kafes etki cebirlerinin MV-cebirleri ve temel cebirler ile arasındaki ilişkiye yer verilmiştir. Dördüncü bölümde, I Chajda ve J. Kühr'un 2013'te yayınladığı makalesi esas alınarak, temel cebirlerin idealleri, zayıf idealleri ve ön idealleri incelenmiştir. Bölümün sonunda etki temel cebirlerinde ideallerle ilgili bazı özelliklere yer verilmiştir. Beşinci bölümde, bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlar ve devamında yapılacak olan çalışmalar bulunmaktadır.

Anahtar Kelimeler: BCC-cebirleri, BCK-cebirleri, MV-cebirleri, Temel Cebirler, Kafes Etki Cebirleri

ABSTRACT

**ON BASIC ALGEBRAS AND COMMUTATIVE BASIC
ALGEBRAS**

ERYÜZLÜ, Menevşe

MSc in Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Alev FIRAT

June, 2016, 34 pages

In this thesis, an algebraic structure called basic algebras, their relations with some other algebraic structures, ideals, weak and pre-ideals are investigated. In the first chapter, the subject of the thesis is introduced, the goal of working on this area and the development process of the subject are summarized. In the second chapter, some definitions, theorems and notes are given which are necessary to understand this thesis. In the third chapter, by primarily considering the paper of Chajda ve Emanovsky which is published in 2004, the paper of Chajda and R. Halas which is published in 2007 and the paper of Ivan Chajda, Radomir Halas and Jan Kühr, the properties of basic algebras, their relation with BCC algebras, BCK algebras and especially with MV-algebras are investigated. At the end of this chapter, the lattice effect algebras, and their relation between MV-algebras and basic algebras are given. In the fourth chapter, by primarily considering the paper of Ivan Chajda and Jan Kühr, ideals, weak ideals, and pre-ideals of basic algebras are investigated. At the end of the chapter, some properties about ideals of effect basic algebras are given. In the fifth chapter, the conclusion of work and the future work are given.

Key Words: BCC-algebras, BCK algebras, MV-algebras, Basic Algebras, Lattice Effect Algebras



TEŞEKKÜR

Eğitim hayatımda bana her zaman destek olan, bilgi ve tecrübeleriyle bana çok yardımcı olmuş olan tez danışmanım Prof. Dr. Alev Fırat'a çok teşekkür ederim. Tez savunma jürisinde bulunan öğretim üyeleri Yrd Doç. Dr. Şule Ayar Özbal ve Yrd. Doç. Dr. Ayşegül Çaksu Gülere'e, manevi desteğini hiçbir zaman esirgemeyen Prof. Dr. Oya Özbakır'a, çalışmalarını benle paylaşan Prof. Dr. Ivan Chajda' ya teşekkür ederim. Son olarak, elde ettiğim her başarının asıl sebebi olan aileme sonsuz teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	vii
ABSTRACT	ix
TEŞEKKÜR	xi
1. GİRİŞ	1
2. ÖN BİLGİLER	2
2.1. Kafesler	2
2.2. BCC-Cebirleri	3
2.3. BCK-Cebirleri	4
2.4. MV-Cebirleri	4
3. TEMEL CEBİRLER VE DEĞİŞMELİ TEMEL CEBİRLER	6
3.1. Temel Cebirlerin ve Değişmeli Temel Cebirlerin Özellikleri	6
3.2. Temel Cebirler ile MV-Cebirleri Arasındaki İlişki	16
3.3. Kafes Etki Cebirleri	22
4. İdealler, Zayıf İdealler, Ön İdealler	28
5. SONUÇ	33
KAYNAKLAR DİZİNİ	34

1. GİRİŞ

K. Iseki ve Y. Imai, küme teorisindeki fark işlemi ile lojikteki “ $\rightarrow$ ” işleminin yapısal özelliklerinin benzerliğinden yola çıkarak BCK-cebirlerini inşa edilmiştir. Başka bir cebirsel yapı olan MV-cebirleri ise C.C Chang tarafından çok-değerli Lukasiewicz lojigine cebirsel bir yaklaşım amacıyla tanımlanmış ve daha sonra, MV-cebirlerinin aslında sınırlı değişmeli BCK-cebirleri olduğu görülmüştür. MV-cebirlerine kafes teorisel bir yaklaşım amacıyla temel cebirler tanımlanmış, özellikle I. Chajda, R. Halas, J. Kühr ve M. Botur tarafından çokça incelenmiştir. Biz bu tezde, onların çalışmalarını detaylandırarak temel cebirlerin yapısal özelliklerini, bazı önemli cebirsel yapılar (özellikle MV-cebirleri ve BCK-cebirleri) ile arasındaki ilişkileri ve temel cebirlerin ideallerinin yapısını çalıştık.

2. ÖN BİLGİLER

2.1 Kafesler

TANIM 2.1. (Garg, 2000) K boştan farklı bir küme olmak üzere $\wedge$ ve $\vee$ K üzerinde iki ikili işlem olsun. Her $x, y, z \in K$ için aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa, $(K; \vee, \wedge)$ cebirsel yapısına bir kafes denir:

(K1) Değişme Özelliği: $x \vee y = y \vee x$ ve $x \wedge y = y \wedge x$

(K2) Birleşme Özelliği: $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

(K3) Yutma Özelliği: $x \wedge (y \vee z) = x$ ve $x \vee (y \wedge z) = y \wedge z$.

(K4) Sabit Kuvvetlilik Özelliği: $x \vee x = x$ ve $x \wedge x = x$

TANIM 2.2. (Garg, 2000) $x, y, z \in K$ olmak üzere aşağıdaki özellikleri sağlayan $(K; \vee, \wedge)$ kafesine bir dağılmalı kafes denir:

$$x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

$$x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

TANIM 2.3. (Garg, 2000) $(K, \wedge, \vee)$ bir kafes olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlayan $\mathcal{K} = (K, \wedge, \vee, 0, 1)$ cebirsel yapısına bir sınırlı kafes denir:

$$\text{Her } x \in \mathcal{K} \text{ için } x \wedge 1 = x \text{ ve } x \vee 1 = 1,$$

$$\text{Her } x \in \mathcal{K} \text{ için } x \wedge 0 = 0 \text{ ve } x \vee 0 = x.$$

Burada 0 ve 1 özel elemanlardır; öyle ki 0 alt sınır, 1 üst sınırdır.

TANIM 2.4. (Gard, 2000) $(L; \vee, \wedge, 0, 1)$ bir sınırlı kafes olsun. Her $a \in L$ ve her $x, y \in [a, 1]$ için $x^{aa} = x$ ve $x \leq y \Rightarrow y^a \leq x^a$ özelliklerini sağlayan $x \rightarrow x^a$ dönüşümüne $[a, 1]$ üzerindeki bölgesel antiton involusyonu denir. $\mathcal{L} = (L; \vee, \wedge, (^a)_{a \in L}, 0, 1)$ sistemine de Bölgesel Antitone İnvolyonlu Kafes denir.

TANIM 2.5. $(K, \wedge, \vee)$ bir kafes olsun. Her $x \in K$ için $\neg x \vee x = 1$ ise x 'e bir keskin eleman denir.

2.2 BCC-Cebirleri

TANIM 2.6. (Alshehri and Bawazeer, 2012) Aşağıdaki koşulları sağlayan $\mathcal{A} = (A; \rightarrow, 1)$ sistemine $(2,0)$ tipinde bir BCC-Cebri denir:

$$(BCC1) (x \rightarrow y) \rightarrow ((z \rightarrow x) \rightarrow (z \rightarrow y)) = 1$$

$$(BCC2) x \rightarrow x = 1$$

$$(BCC3) x \rightarrow 1 = 1$$

$$(BCC4) 1 \rightarrow x = x$$

$$(BCC5) (x \rightarrow y = 1 \text{ ve } y \rightarrow x) \text{ ise } x = y \text{ dir.}$$

Bir $\mathcal{A}$ BCC-Cebri üzerinde $\leq$ bağıntısı aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$x \leq y \Leftrightarrow x \rightarrow y = 1.$$

$\leq$, en büyük elemanı 0 olan bir sıralama bağıntısıdır:

Yansımahlık: (BCC2)den $x \leq x$ dir.

Ters-simetri: $x \leq y$ ve $y \leq x$ olsun. Bu durumda, $x \rightarrow y$ ve $y \rightarrow x$ dir. (BCC5) ten $x = y$ olur.

Geçişlilik: $x \leq y$ ve $y \leq z$ olsun. Bu $x \rightarrow y = 1$ ve $y \rightarrow z = 1$ demektir. Şimdi, (BCC1)de x yerine y, y yerine z, z yerine x yazalım. Bu durumda,

$$(y \rightarrow z) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)) = 1 \quad (2.1)$$

olur. Öte yandan, $y \rightarrow z = 1$ olduğu için

$$(y \rightarrow z) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)) = (x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)$$

dir. O halde, $x \rightarrow y = 1$ olduğu için

$$(x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z) = x \rightarrow z$$

olur. Bu durumda, (2.1) den $x \rightarrow z = 1$ dir. Bu da $x \leq z$ demektir.

2.3 BCK-Cebirleri

(Meng and Jun, 1994)

TANIM 2.7. *(BCC2)-(BCC5) koşullarını sağlayan $\mathcal{A} = (A; \rightarrow, 1)$ sistemi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, $(2,0)$ tipinde bir BCK-Cebri'dir:*

$$(BCK1) (x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)) = 1$$

$$(BCK 2) x \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow y) = 1.$$

Bir $\mathcal{A}$ BCK-Cebri'nin en küçük elemanı varsa $\mathcal{A}$ ya bir sınırlı BCK-Cebri, aşağıdaki özelliği sağlıyorsa değişmeli BCK-Cebri denir:

$$(x \rightarrow y) \rightarrow y = (y \rightarrow x) \rightarrow x.$$

ÖNERME 2.8. *(Chajda and Halas, 2008) Her BCK-Cebri bir BCC-Cebri'dir. Bir BCC-Cebri'nin BCK-Cebri olması için gerek ve yeter koşul aşağıda verilen Yer Değiştirme Özdeşliğini (YÖ) sağlamasıdır:*

$$x \rightarrow (y \rightarrow z) = y \rightarrow (x \rightarrow z).$$

2.4 MV-Cebirleri

TANIM 2.9. *(Mundici, 2007) Aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $\mathcal{A} = (A; \oplus, \neg, 0)$ sistemi $(2,1,0)$ tipinde bir MV-Cebri'dir:*

$$(MV1) x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$$

$$(MV2) x \oplus y = y \oplus x$$

$$(MV3) x \oplus 0 = x$$

$$(MV4) \neg\neg x = x$$

$$(MV5) x \oplus \neg 0 = \neg 0$$

$$(MV6) \neg(\neg x \oplus y) \oplus y = \neg(\neg y \oplus x) \oplus x.$$

$\mathcal{A}$ MV-Cebri üzerindeki sıralama bağıntısı, $x \leq y \Leftrightarrow \neg x \oplus y = 1$ dir.

Her $\mathcal{A} = (A; \oplus, \neg, 0)$ MV-Cebrinden $\vee$ ve $\wedge$ aşağıdaki gibi tanımlanarak bir sınırlı dağılmalı $\mathcal{L}(A) = (A; \vee, \wedge, 0, 1)$ kafesi elde edilebilir:

$$x \vee y = \neg(\neg x \oplus y) \oplus y,$$

$$x \wedge y = \neg(\neg x \vee \neg y),$$

$$1 = \neg 0$$

TEOREM 2.10. (Mundici, 2007) $\mathcal{A} = (A; \oplus, \neg, 0)$ bir MV-Cebri olsun ve $x, y \in A$ için $x \rightarrow y := \neg x \oplus y$ ile tanımlansın. Bu durumda, $\mathcal{B}(A) = (A; \rightarrow, \neg 0)$ bir değişmeli BCK-cebridir ve sınırlı değişmeli BCK-Cebirleri katagorisel olarak MV-cebirlerine denktir.

ÖNERME 2.11. (Mundici, 2007) $\mathcal{L} = (L; \vee, \wedge, ({}^a)_{a \in L}, 0, 1)$ bir bölgesel antiton involusyonlu kafes olsun. Bu durumda, aşağıdakiler denktir:

(1) $\mathcal{A}(L)$ bir MV-Cebridir.

(2) $\mathcal{L}$ dağılmalıdır ve $x \rightarrow y = (x \vee y)^y$ için $(L; \rightarrow 1)$ de Yerdeğiştirme Özdeşliği sağlanır.

3. TEMEL CEBİRLER VE DEĞİŞMELİ TEMEL CEBİRLER

3.1 Temel Cebirlerin ve Değişmeli Temel Cebirlerin Özellikleri

TANIM 3.1. (Chajda, 2008) $\mathcal{A} = (A; \oplus, \neg, 0)$, $(2, 1, 0)$ tipinde bir cebir olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, $\mathcal{A}$ 'ya bir Temel Cebir denir: Her $x, y, z \in A$ için

$$(BA1) \ x \oplus 0 = x;$$

$$(BA2) \ \neg \neg x = x;$$

$$(BA3) \ x \oplus \neg 0 = \neg 0 = \neg 0 \oplus x;$$

$$(BA4) \ \neg(\neg(x \oplus y) \oplus y) = \neg(\neg y \oplus x) \oplus x;$$

$$(BA5) \ \neg(\neg(\neg(x \oplus y) \oplus y) \oplus z) \oplus (x \oplus z) = \neg 0.$$

dır. MV-Cebirleri'nde olduğu gibi $\neg 0$ yerine 1 yazacağız.

TANIM 3.2. (Chajda, 2008) $\mathcal{A} = (A; \oplus, \neg, 0)$ bir Temel Cebir olsun. Eğer her $x, y \in A$ için $x \oplus y = y \oplus x$ ise, $\mathcal{A}$ ya bir değişmeli Temel Cebir denir.

ÖRNEK 3.3. $A = \{0, a, b, 1\}$ olmak üzere, $\oplus$ ve $\neg$ işlemleri aşağıdaki gibi tanımlı olan $\mathcal{A} = (A; \oplus, \neg, 0)$ Temel Cebri değişmelidir.

$\oplus$	0	a	b	1
0	0	a	b	1
a	a	a	1	1
b	b	1	b	1
1	1	1	1	1

x	$\neg x$
0	1
a	b
b	a
1	0

ÖRNEK 3.4. $\oplus$ işlemi aşağıdaki gibi tanımlı olan Temel Cebir, değişmeli olmayan bir Temel Cebir'dir:

$\oplus$	0	a	b	$\neg b$	$\neg a$	1
0	0	a	b	$\neg b$	$\neg a$	1
a	a	a	$\neg a$	$\neg b$	1	1
b	b	$\neg b$	$\neg b$	1	$\neg a$	1
$\neg b$	$\neg b$	$\neg b$	1	1	1	1
$\neg a$	$\neg a$	1	$\neg b$	1	$\neg a$	1
1	1	1	1	1	1	1

TANIM 3.5. (Chajda and Halas, 2009) $\mathcal{A} = (A; \oplus, \neg, 0)$ bir Temel Cebir olsun. A nın boştan farklı alt kümesi B , $x \oplus y = y \oplus x$ özelliğini sağlayan en büyük küme ise B 'ye bir blok denir.

ÖNERME 3.6. (Chajda and Halas, 2008) $\mathcal{A} = (A; \oplus, \neg, 0)$, $(2, 1, 0)$ tipinde bir Temel Cebir olsun. Bu durumda, her $x \in A$ için

$$\neg x \oplus x = x \oplus \neg x = 1$$

dır.

KANIT. (BA5)te $y=z=0$ yazalım. Buradan,

$$\neg(\neg(\neg(x \oplus 0) \oplus 0) \oplus 0) \oplus (x \oplus 0) = \neg x \oplus x = \neg 0$$

elde edilir. Böylece, $\neg x \oplus x = 1$ bulunur. Bu eşitlikte x yerine $\neg x$ yazarsak,

$$\neg \neg x \oplus \neg x = x \oplus \neg x = 1$$

bulunur.

□

TEOREM 3.7. (Chajda and Kolarik, 2008) $(2, 1, 0)$ tipindeki bir $\mathcal{A} = (A; \oplus, \neg, 0)$ cebirinin bir Temel Cebir olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{A}$ nin (BA1), (BA2), (BA4) ve (BA5) koşullarını sağlamasıdır.

KANIT. (BA3)un (BA1), (BA2), (BA4) ve (BA5)ten elde edildiğini göstermek A 'nın bir Temel Cebir olduğunu göstermek için yeterlidir. Bunun için, $z=0$, $x=\neg 0$ alalım ve (BA5)te y yerine x yazalım. O zaman,

$$\neg(\neg(\neg(\neg 0 \oplus x) \oplus x) \oplus 0) \oplus (\neg 0 \oplus 0) = \neg 0$$

elde edilir. (BA1) ve (BA2) kullanıldığında,

$$(\neg(\neg 0 \oplus x) \oplus x) \oplus \neg 0 = \neg 0$$

bulunur. Ayrıca, (BA4)ten

$$(\neg(\neg x \oplus 0) \oplus 0) \oplus \neg 0 = \neg 0$$

elde edilir. (BA1) ve (BA2)den,

$$x \oplus \neg 0 = \neg \neg x \oplus \neg 0 = \neg 0$$

olur. Şimdi, (BA5)te y yerine $\neg 0$, z yerine 0 yazalım. Buradan,

$$\neg(\neg(\neg x \oplus \neg 0) \oplus 0) \oplus (x \oplus 0) = \neg 0$$

elde edilir. (BA2) ve (1) den,

$$\neg 0 \oplus x = (0 \oplus \neg 0) \oplus x = \neg 0$$

bulunur.

□

Aşağıdaki teoremden, (BA3) dışındaki koşulların bağımsız olduğunu, hiçbirinin bir-birinden üretilmeyeceğini göstereceğiz.

TEOREM 3.8. *(Chajda and Kolarik, 2008) (BA1), (BA2), (BA4) ve (BA5) koşulları bağımsızdır.*

KANIT. İki elemanlı $\{0,1\}$ kümesine B diyelim.

- $(B; \oplus, \neg, 0)$, her $x, y \in B$ için $x \oplus y = 1$ ve $\neg 0 = 1$, $\neg 1 = 0$ olacak şekilde bir cebir olsun. Bu durumda, (BA2), (BA4) ve (BA5) sağlanır. $x=0$ alırsak, $0 \oplus 0 = 1$ olur. Böylece (BA1)'in sağlanmadığı görülür.
- Şimdi, $(B; \oplus) \wedge$ -yarıkafes ve her $x \in B$ için $\neg x = 1$ olsun. Bu durumda $(B, \oplus, \neg, 0)$, (BA1), (BA4) ve (BA5) i sağlar. $x=0$ alalım. (BA2)'de yerine koyarsak,

$$\neg \neg 0 = 1$$

olur. Boylece, (BA2)nin sağlanmadığı görülür.

- $(B; \oplus), \mathbb{Z}_2$ halkası ve $\neg 0=1, \neg 1=0$ olsun. $(B, \oplus, \neg, 0)$, (BA1) ve (BA2) koşullarını sağlar. $x=1, y=0$ alırsak,

$$\neg(\neg 1 \oplus 0) \oplus 0 = \neg(0 \oplus 0) \oplus 0 = 1 \oplus 0 = 1 \quad (3.1)$$

$$\neg(\neg 0 \oplus 1) = \neg(1 \oplus 1) \oplus 1 = 0 \quad (3.2)$$

(3.1) $\neq$ (3.2) olduğu için (BA4) sağlanmaz.

- Son olarak $(B, \oplus)$ bir $\vee$ -yarıkafes ve $\neg, B$ üzerinde bir birim dönüşüm olsun. Bu durumda, (BA1) ve (BA2) sağlanır. $\{x, y\} = \{0, 1\}$ alalım.

$$\neg(\neg 1 \oplus 0) \oplus 0 = 1 \oplus 0 = 1 \quad (3.3)$$

$$\neg(\neg 0 \oplus 1) \oplus 1 = 1 \oplus 1 = 1 \quad (3.4)$$

(3.3)=(3.4). O halde, (BA4) sağlanır. Şimdi, $x=y=z=1$ alalım.

$$\neg(\neg(\neg(1 \oplus 1) \oplus 1) \oplus 1) \oplus (1 \oplus 1) = 1 \neq 0$$

olduğundan (BA5) sağlanmaz.

□

TEOREM 3.9. (*Chajda and Kolarik, 2008*) $\mathcal{A} = (A; \oplus, \neg, 0)$ bir Temel Cebir ise her $x, y, z \in A$ için

$$\neg(\neg(x \oplus y) \oplus y) \oplus y = x \oplus y$$

sağlanır.

KANIT. $\neg(\neg(x \oplus y) \oplus y) \oplus y = a$ olsun. (BA5)ten,

$$\neg a \oplus (x \oplus y) = \neg 0$$

olur. O halde, $a=0$ veya $a=x \oplus y$ dir. $a=0$ olması için her $x \in A$ nın 0 olması gerekir.

Halbuki $\mathcal{A}$, 0 dan farklı bir cebirdir. O halde, $a=x \oplus y$ dir.

□

Aşağıdaki teoremde $(2,1,0)$ tipindeki bir cebirin Temel Cebir olması için gerekli olan denk koşullar verilecektir.

TEOREM 3.10. (*Chajda and Halas, 2008*) $\mathcal{A}=(A;\oplus,\neg,0)$, $(2,1,0)$ tipinde $(BA1)$, $(BA3)$ ve $(BA4)$ aksiyomlarını sağlayan bir cebir olsun. Bu durumda, aşağıdakiler denktir:

(1) $\mathcal{A}$, $(BA2)$ yi sağlar;

(2) $\mathcal{A}$, $0\oplus x=x$ ve $\neg\neg 0=0$ özelliklerini sağlar.

KANIT. $(BA3)$, $(BA4)$ ve $(BA1)$ den

$$\neg\neg 0 \oplus x = \neg(\neg 0 \oplus x) \oplus x = \neg(\neg x \oplus 0) \oplus 0 = \neg\neg x \quad (3.5)$$

olur.

(1) $\Rightarrow$ (2): $(BA2)$ nin sağlandığını kabul edelim. O halde, $\neg\neg 0=0$ ve (3.5)ten

$$0 \oplus x = \neg\neg 0 \oplus x = \neg\neg x = x$$

elde edilir. Böylece $(1)\Rightarrow(2)$ sağlanmış olur.

(2) $\Rightarrow$ (1): (2)nin sağlandığını kabul edelim. O halde, (3.5)ten,

$$x = 0 \oplus x = \neg\neg 0 \oplus x = \neg\neg x$$

olur. Böylece, $(2)\Rightarrow(1)$ sağlanmış olur.

□

SONUC 3.11. (*Chajda and Kolarik, 2008*) $(2,1,0)$ tipinde bir $\mathcal{A}=(A;\oplus,\neg,0)$ cebirinin bir Temel Cebir olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{A}$ nin $(BA4)$, $(BA5)$ ve aşağıdaki özellikleri sağlamasıdır:

$(BA1+)$ $x \oplus 0 = x = 0 \oplus x$;

$(BA2-0)$ $\neg\neg 0 = 0$;

$(BA3-)$ $\neg 0 \oplus x = \neg 0$.

KANIT. ($\Rightarrow$) $\mathcal{A}=(A;\oplus,\neg,0)$ bir Temel Cebir olsun. Bu durumda, temel cebirin tanımından (BA4), (BA5), (BA2-0) VE (BA3-) sağlanır. Ayrıca $\mathcal{A}$, (BA2)yi de sağlayacağından Teorem 3.10'dan $0\oplus x=x$ dir. Ayrıca, elimizde

$$\neg(\neg x\oplus 0)\oplus 0=\neg\neg x\oplus 0=x\oplus 0,$$

$$\neg(\neg 0\oplus x)\oplus x=\neg\neg 0\oplus x=0\oplus x$$

var. (BA4)ten, $x\oplus 0=0\oplus x$ dir. $0\oplus x=x$ olduğundan, $x\oplus 0=x$ bulunur. Böylece (BA1+) sağlanır.

($\Leftarrow$) $\mathcal{A}=(A;\oplus,\neg,0)$, (BA4), (BA5), (BA1+), (BA2-0) VE (BA3-) koşullarını sağlayan (2,1,0) tipinde bir cebir olsun. O halde $\mathcal{A}$, Teorem 3.8 den (BA2)yi sağlar. (BA5)te $y=0$, $x=\neg 0$ yazarsak,

$$\neg(\neg(\neg(x\oplus 0)\oplus 0)\oplus \neg 0)\oplus (x\oplus \neg 0)=0\oplus (x\oplus \neg 0)=x\oplus \neg 0=\neg 0$$

olur. Böylece, (BA3) sağlanır.

□

TEOREM 3.12. (Radomir and Halas, 2008) $\mathcal{A}=(A;\oplus,\neg,0)$ bir Temel Cebir ve $\leq$, $x, y \in A$ için $x \leq y \Rightarrow \neg x \oplus y = 1$ ile tanımlı bir bağıntı olsun. Bu durumda $(A; \leq)$ bir sıralı kümedir. 0 bu kümenin en küçük elemanı ve 1 bu kümenin en büyük elemanıdır.

KANIT. Yansıma özelliği Önerme 3.6 dan açıkça görülür. Ters simetriyi göstermek için $x \leq y$ ve $y \leq x$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $\neg x \oplus y = 1$ ve $\neg y \oplus x = 1$ olur. Buradan,

$$x = 0 \oplus x = \neg 1 \oplus x = \neg(\neg y \oplus x) \oplus x = \neg(\neg x \oplus y) \oplus y = \neg 1 \oplus y = 0 \oplus y = y$$

elde edilir.

Şimdi $x \leq y$ ve $y \leq z$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\neg x \oplus y = 1$ ve $\neg y \oplus z = 1$ dir. (BA5) kullanılarak,

$$\begin{aligned} \neg x \oplus z &= \neg 1 \oplus (\neg x \oplus z) = \neg(\neg y \oplus z) \oplus (\neg x \oplus z) = \neg(\neg(\neg 1 \oplus y) \oplus z) \oplus (\neg x \oplus z) = \\ &= \neg(\neg(\neg(\neg x \oplus y) \oplus y) \oplus z) \oplus (\neg x \oplus z) = 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Boylece $x \leq z$ olduğu görölür. O halde $\leq$ bir sıralama bağıntısıdır.

Ayrıca, $\neg 0 \oplus x = 1$ ve $\neg x \oplus 1 = 1$ olduğundan, her $x \in A$ için $0 \leq x \leq 1$ dir.

□

ÖNERME 3.13. (Radomir and Halas, 2008) $\mathcal{A} = (A; \oplus, \neg, 0)$ bir Temel Cebir ve $\leq A$ üzerindeki sıralama bağıntısı olsun. Bu durumda her $x, y, z \in A$ için aşağıdaki özellikler sağlanır.

$$(1) x \leq y \Leftrightarrow \neg y \leq \neg x$$

$$(2) x \leq y \Rightarrow x \oplus z \leq y \oplus z$$

$$(3) y \leq x \oplus y.$$

KANIT. (1) $x \leq y$ olsun. O halde, $\neg x \oplus y = 1$ dir. (BA5)ten,

$$\neg(\neg y \oplus z) \oplus (\neg x \oplus z) = \neg(\neg(\neg(\neg x \oplus y) \oplus y) \oplus z) \oplus (\neg x \oplus z) = 1$$

bulunur. Yani, $\neg y \oplus z \leq \neg x \oplus z$ elde edilir. Bu ise $\neg y \leq \neg x$ demektir.

Şimdi, $\neg y \leq \neg x$ olduğunu kabul edelim. (BA2) kullanılarak hemen $x \leq y$ olduğu görülebilir.

(2) $x \leq y$ olsun. Bu durumda, (1) in ispatından $\neg y \oplus z \leq \neg x \oplus z$ bulunur. $\neg y$ yerine x , $\neg x$ yerine y yazılırsa $x \oplus z \leq y \oplus z$ elde edilir.

(3) $0 \leq x$ olduğunu biliyoruz. O halde, (2) den $y = 0 \oplus y \leq x \oplus y$ olur.

□

TANIM 3.14. (Chajda and Kühr, 2013) $\mathcal{A} = (A; \oplus, \neg, 0)$ bir Temel Cebir olsun. Eğer $x, y, z \in A$ için,

$$x \leq y \Rightarrow z \oplus x \leq z \oplus y$$

ise $\mathcal{A}$ ya monoton denir.

TEOREM 3.15. (Radomir and Halas, 2008) $\mathcal{A} = (A; \oplus, \neg, 0)$ bir Temel Cebir ve $\leq A$ üzerindeki bir sıralama bağıntısı olsun. O halde, $(A; \leq)$, $\wedge$ ve $\vee$ işlemleri aşağıdaki gibi tanımlı olan bir sınırlı kafestir.

$$x \vee y = \neg(\neg x \oplus y) \oplus y ,$$

$$x \wedge y = \neg(\neg x \vee \neg y).$$

KANIT. Elimizde, her $x, y \in A$ için $y \leq \neg(\neg x \oplus y) \oplus y$ ve $x \leq \neg(\neg y \oplus x) \oplus x$ var, $\mathcal{A}$ bir temel cebir olduğu için $\neg(\neg x \oplus y) \oplus y = \neg(\neg y \oplus x) \oplus x$ dir. Buradan, $\neg(\neg x \oplus y) \oplus y = \neg(\neg y \oplus x) \oplus x$, x ve y nin ortak üst sınırıdır. $x, y \leq z$ olsun. Bu durumda $\neg x \oplus y \geq \neg z \oplus y$ dir. Buradan,

$$\neg(\neg x \oplus y) \oplus y \leq \neg(\neg z \oplus y) \oplus y = \neg(\neg y \oplus z) \oplus z = 0 \oplus z = z$$

olur. Bu da $\neg(\neg x \oplus y) \oplus y$, x ve y nin en küçük üst sınırı olduğunu gösterir. Sonuç olarak, $x \vee y = \neg(\neg x \oplus y) \oplus y$ dir.

Şimdi, $x \wedge y = \neg(\neg x \vee \neg y)$ olduğunu göstereceğiz. $\neg(\neg x \oplus y) \oplus y$, y nin üst sınırı olduğundan, $y \leq \neg(\neg x \oplus y) \oplus y$ dir. Buradan,

$$\neg(\neg(\neg x \oplus y) \oplus y) \leq \neg y$$

y yerine $\neg y$, x yerine $\neg x$ yazılarak,

$$\neg(\neg x \vee \neg y) = \neg(\neg(x \oplus \neg y) \oplus \neg y) \leq y$$

elde edilir. $\neg(\neg x \vee \neg y) \leq x$ olduğu çok benzer şekilde gösterilebilir. Dolayısıyla, $\neg(\neg x \vee \neg y)$, x ve y nin ortak alt sınırıdır.

$m \leq x, y$ olsun. O halde, $\neg x, \neg y \leq \neg m$ dir. $\neg x$ ve $\neg y$ nin en küçük üst sınırı $\neg(x \oplus \neg y) \oplus \neg y$ olduğu için,

$$\neg(x \oplus \neg y) \oplus \neg y \leq \neg m$$

dir. Sonuç olarak,

$$\neg m \leq \neg(\neg(x \oplus \neg y) \oplus \neg y) = x \wedge y$$

olur. Bu da, $x \wedge y$, x ve y nin en büyük alt sınırı demektir.

□

TEOREM 3.16. (Radomir and Halas, 2009) $\mathcal{A} = (A; \oplus, \neg, 0)$ bir Temel Cebir olsun. $x \in A$ nin keskin eleman olması için gerek ve yeter koşul $x \oplus x = x$ olmasıdır.

KANIT. $(\Rightarrow)$ $x \in A$ keskin eleman olsun. Bu durumda, $\neg x \vee x = \neg(x \oplus x) \oplus x = 1$. Yani, $x \oplus x \leq x$ dir. Her $x \in A$ için $x \leq x \oplus x$ olduğunu da göz önünde bulundurursak $x \oplus x = x$ elde etmiş oluruz

$(\Leftarrow)$ $x \oplus x = x$ olsun. Bu durumda, $\neg x \vee x = \neg(x \oplus x) \oplus x = \neg x \oplus x = 1$ dir.

□

TEOREM 3.17. (Radomir and Halas, 2008) $\mathcal{A} = (A; \oplus, \neg, 0)$ bir Temel Cebir olsun ve $\wedge$ ve $\vee$ Teorem 3.12 deki gibi tanımlansın. Her $a \in A$ ve $x \in [a, 1]$ için $x^a = \neg x \oplus a$ olsun. Bu durumda $\mathcal{L}(A) = (A; \wedge, \vee, (a)_{a \in L}, 0, 1)$ bir bölgesel antiton involusyonlu kafestir.

KANIT. Öncelikle, $(E, \vee, \wedge, 0, 1)$ in $x \mapsto x' + a$ ($x \in [a, 1]$) bölgesel antiton involusyonlu bir kafes olduğunu göstereceğiz.

$x \mapsto x'$ dönüşümü E üzerinde bir antiton involusyondur. Ayrıca, (EA3)ten $x'' = x$ ve (5)dan $x \leq y \Leftrightarrow x' \geq y'$ elde edilir. Dolayısıyla da

$$x \wedge y = (x' \vee y')' \text{ ve } x \vee y = (x' \wedge y')'$$

De Morgan kurallarının $(E, \vee, \wedge, 0, 1)$ kafesinde sağlandığı görülür.

Şimdi bir $a \in E$ alalım ve $x \in [a, 1]$ için $x \mapsto x^a := x' + a$ ile tanımlayalım. $x' + a$ tanımlı olduğu için (2)ten $x \geq a$ dır. $x, y \in [a, 1]$ için $x \leq y$ durumunda $x^a = x' + a \geq y' + a = y^a$ dır. (5)ten $x^a \geq y^a$ olması $x \leq y$ demektir.

(5) kullanılarak bölgesel antiton involusyon tanımının ikinci koşulunun da sağlandığı gösterilebilir:

$$x^{aa} = (x' + a)' + a = x.$$

Böylece, $x \mapsto x' + a$ dönüşümünün $[a, 1]$ üzerinde bir antiton involusyon olduğu görülür. Yani, $\mathcal{L}(E) = (E, \vee, \wedge, (a)_{a \in E}, 0, 1)$ bir bölgesel antiton involusyonlu kafestir. $\mathcal{L}(E)$ üzerinde,

$$x \oplus y := (x^0 \vee y)^y = (x' \vee y)' + y = (x \wedge y') + y$$

tanımlaması kullanılarak bir temel cebir elde edilir.

TEOREM 3.18. (Radomir and Halas, 2008) $\mathcal{L} = (L; \vee, \wedge, ({}^a)_{a \in L}, 0, 1)$ bir antiton involusyonlu kafes olsun. $\oplus$ ve $\neg$ işlemleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$x \oplus y = (x^0 \vee y)^y \text{ ve } \neg x = x^0$$

Bu durumda, $\mathcal{A}(L) = (L; \oplus, \neg, 0)$ bir Temel Cebir'dir. Üstelik, $\mathcal{L}(\mathcal{A}(L)) = \mathcal{L}$ ve herhangi bir $\mathcal{A}$ Temel Cebri için $\mathcal{A}(\mathcal{L}(A)) = \mathcal{A}$ dir.

KANIT. $\mathcal{L} = (L; \vee, \wedge, ({}^a)_{a \in L}, 0, 1)$ bir bölgesel antiton involusyonlu bir kafes olsun. Şimdi, (BA1)-(BA5) koşullarının sağlandığını göstereceğiz.

$$(BA1) \ x \oplus 0 = (x^0 \vee 0)^0 = x^{00} = x$$

$$(BA2) \ \neg \neg x = x^{00} = x$$

$$(BA3) \ x \oplus 1 = (x^0 \vee 1)^1 = 1^1 = 1 \text{ ve } 1 \oplus x = (1^0 \vee x)^x = (0 \vee x)^x = x^x = 1$$

$$(BA4) \ \neg x \oplus y = (x^{00} \vee y)^y = (x \vee y)^y \geq y \text{ olduğu için aşağıdakiler elde edilir:}$$

$$\neg(\neg x \oplus y) \oplus y = ((x \vee y)^y \vee y)^y = (x \vee y)^{yy} = x \vee y$$

$$\neg(\neg y \oplus x) \oplus x = y \vee x = x \vee y$$

$$(BA5) \ \neg(\neg(\neg(x \oplus y) \oplus y) \oplus z) \oplus (x \oplus z) = \neg(\neg(\neg x \vee y) \oplus z) \oplus (x \oplus z)$$

$$= ((x^0 \vee y \vee z)^z \vee (x^0 \vee z)^z)^{(x^0 \vee z)^z} = ((x^0 \vee z)^z)^{(x^0 \vee z)^z} = 1.$$

Sonuç olarak, $\mathcal{A}(L) = (L; \oplus, \neg, 0)$ bir Temel Cebir'dir.

Şimdi, $\mathcal{L}(\mathcal{A}(L)) = L$ olduğunu gösterelim. $\sqcap$ ve $\sqcup$, Teorem 3.12 deki gibi üretilen kafesin $\wedge$ ve $\vee$ işlemleri olsun. $a \in L$ için f_a , $[a, 1]$ deki involusyon olsun. O halde, her $x \in [a, 1]$ için

$$f_a(x) = \neg x \oplus a = ((\neg x)^0 \vee a)^a = (x^0 0 \vee a)^a = (x \vee a)^a = x^a$$

olur. Ayrıca,

$$x \sqcup y = \neg(\neg x \oplus y) \oplus y = ((x \vee y)^y \vee y)^y = (x \vee y)^{yy} = x \vee y \text{ ve}$$

$$x \sqcap y = \neg(\neg x \sqcup \neg y) = (x^0 \vee y^0)^0 = x \wedge y$$

olur. Sonuç olarak, $\mathcal{L}(\mathcal{A}(L)) = \mathcal{L}$ dır.

Şimdi, $\mathcal{A}(\mathcal{L}(A)) = \mathcal{A}$ olduğunu gösterelim. $\mathcal{A} = (A, \oplus, \neg, 0)$ bir temel cebir olmak üzere, $+$ ve $\sim$ sırasıyla $\mathcal{A}(\mathcal{L}(A))$ daki $\oplus$ ve $\neg$ işlemleri olsun. Bu durumda, $\sim x = x^0 = \neg x$ ve

$$x + y = (x^0 \vee y)^y = \neg(\neg x \vee y) \oplus y = \neg(\neg(x \oplus y) \oplus y) \oplus y = x \oplus y$$

olur. Sonuç olarak, $\mathcal{A}(\mathcal{L}(A)) = \mathcal{A}$ dır.

□

3.2 Temel Cebirler ile MV-Cebirleri Arasındaki İlişki

Bu bölümde, temel cebirler ile MV-cebirleri arasındaki ilişkiyi inceleyeceğiz.

ÖNERME 3.19. (*Radomir and Halas*) $\mathcal{A} = (A; \oplus, \neg, 0)$ bir temel cebir olsun ve $x \rightarrow y := \neg x \oplus y$ ile tanımlansın. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır:

(1) $\mathcal{B}(\mathcal{A}) = (A; \rightarrow, \neg 0)$ in bir BCC-Cebri olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ nın (BCC1) koşulunu (denk olarak (A) koşulunu) sağlamasıdır.

(2) $x, y, z \in A$ için (A) özelliği aşağıdaki (A^*) özelliğine denk olur:

$$x \oplus y \leq \neg(z \oplus \neg x) \oplus (z \oplus y) \quad (A^*)$$

KANIT. (1) $(\Rightarrow)$ $\mathcal{A} = (A; \oplus, \neg, 0)$ bir temel cebir olsun ve $\mathcal{B}(\mathcal{A}) = (A; \rightarrow, \neg 0)$ sistemi (BCC1) koşulunu sağlasın. Bu durumda $\mathcal{B}(\mathcal{A})$, (BCC2)-(BCC5) koşullarını sağlar:

$$(BCC2) \quad x \rightarrow x = \neg x \oplus x = 1,$$

$$(BCC3) \quad x \rightarrow 1 = \neg x \oplus 1 = 1,$$

$$(BCC4) \quad 1 \rightarrow x = \neg 0 \oplus x = x,$$

$$(BCC5) \quad x \rightarrow y = 1 \text{ ve } y \rightarrow x = 1 \text{ olsun. Bu durumda, } \neg x \oplus y = 1 \text{ ve } \neg y \oplus x = 1 \text{ olur.}$$

Bu da $x \leq y$ ve $y \leq x$ demektir. Buradan, $x = y$ olur.

$(\Leftarrow)$ $\mathcal{A} = (A; \oplus, \neg, 0)$ bir temel cebir olmak üzere $\mathcal{B}(\mathcal{A}) = (A; \rightarrow, \neg 0)$ sistemi bir BCC cebri ise, (BCC1) koşulu otomatik olarak sağlanır.

(2) $x \rightarrow y \leq z \rightarrow x) \rightarrow (z \rightarrow y) = \neg x \oplus y \leq \neg(\neg z \oplus x) \oplus (\neg z \oplus y)$ dir. x yerine $\neg x$, z yerine $\neg z$ koyup (BA2) özelliği kullanılarak

$$\neg(x \oplus y) \oplus \neg(z \oplus \neg x) \oplus (z \oplus y) = 1$$

elde edilir. Bu da $x \oplus y \leq \neg(z \oplus \neg x) \oplus (z \oplus y)$ demektir.

□

ÖNERME 3.20. (*Radomir and Halas*) Bir Temel Cebirin değişmeli olması için gerek ve yeter koşul $(x \rightarrow y = \neg y \rightarrow \neg x)$ koşulunu sağlamasıdır.

KANIT. $(\Rightarrow)$ $\mathcal{A} = (A; \oplus, \neg, 0)$ bir değişmeli Temel Cebir ve $x, y \in A$ olsun. Bu durumda,

$$x \rightarrow y = \neg x \oplus y = y \oplus \neg x = \neg y \rightarrow \neg x. \quad (3.6)$$

$(\Leftarrow)$ $\mathcal{A} = (A; \oplus, \neg, 0)$ bir temel cebir, $x, y \in A$ ve $x \rightarrow y = \neg y \rightarrow \neg x$ olsun. Bu durumda, (3.6) kullanılarak görülür ki $\mathcal{A}$ değişmelidir.

□

NOT 3.21. (Michael Botur) “ $\rightarrow$ ” operatörü, herhangi bir lineer sıralı değişmeli Temel Cebir için aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$x \rightarrow y = \begin{cases} x^y, & y \leq x \\ 1, & y > x. \end{cases}$$

ÖNERME 3.22. (Radomir and Halas) $\mathcal{L} = (L; \vee, \wedge, (^a)_{a \in L}, 0, 1)$ bir antiton involusyonlu kafes olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

(1) $\mathcal{A}(\mathcal{L})$ bir MV-cebridir.

(2) $\mathcal{L}$ dağılmalıdır ve $x \rightarrow y = (x \vee y)^y$ için $(L; \rightarrow, 1)$ üzerinde Yer Değiştirme Özdeşliği sağlanır.

TEOREM 3.23. (Radomir and Halas) Bir Temel Cebirin MV-Cebri olması için gerek ve yeter koşul BCC-Cebri olması, yani (A^*) koşulunu sağlamasıdır.

KANIT. ($\Leftarrow$) $\mathcal{A}$ bir MV-cebri olsun. Bu durumda $\mathcal{A}$ bir temel cebirdir. Öte yandan, $(A; \rightarrow, \neg, 0)$ bir değişmeli BCK-cebridir. O halde, $(A; \rightarrow, \neg, 0)$ in BCC-Cebri olduğunu göstermek için Yer Değiştirme Özdeşliği’ni sağladığını göstermeliyiz. Bunun için $\mathcal{L}(A)$ yi ele alalım. $\mathcal{L}(A)$, Önerme 3.22’den Yer Değiştirme Özdeşliği’ni sağlar. Dolayısıyla da bir BCC-Cebri’dir.

($\Rightarrow$) $\mathcal{A} = (A; \oplus, \neg, 0)$, $x \rightarrow y = \neg x \oplus y$ olmak üzere (A^*) özelliğini sağlayan bir temel cebir olsun. (A^*) da $y = 0$ alalım ve x yerine $\neg x$ yazalım. Bu duruma,

$$\neg x = \neg x \oplus 0 \leq \neg(z \oplus x) \oplus z$$

elde edilir. Buradan,

$$x \oplus z \geq \neg(\neg(z \oplus x) \oplus z) \oplus z = (z \oplus x) \vee z \geq z \oplus x$$

bulunur. x ve z nin yerleri değiştirilerek $z \oplus x \geq x \oplus z$ nin de sağlandığı kolayca görülebilir. Sonuç olarak, $x, z \in A$ için $x \oplus z = z \oplus x$ tir. Yani, $\mathcal{A}$ değişmelidir. Bu durumda, $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ dağılmalıdır.

Öte yandan, $\oplus$ değişmeli olduğun için (A^*) aşağıdaki (A^{**}) koşuluna denk olur:

$$\neg y \oplus x \leq \neg(\neg x \oplus z) \oplus (\neg y \oplus z). \quad (A^{**})$$

Şimdi, (A^{**}) da x yerine $\neg x \oplus z$ yazıldığında,

$$\neg y \oplus (\neg x \oplus z) \leq \neg(\neg(\neg x \oplus z) \oplus z) \oplus (\neg y \oplus z) = \neg(x \vee z) \oplus (\neg y \oplus z)$$

elde edilir. $[z, 1]$ üzerinde $x \vee z = x$ olacağından,

$$\neg y \oplus (\neg x \oplus z) \leq \neg x \oplus (\neg y \oplus z)$$

olur. x ve y yi birbirinin yerine yazarak benzer şekilde

$$\neg x \oplus (\neg y \oplus z) \leq \neg y \oplus (\neg x \oplus z)$$

bulunur. Sonuç olarak, $x, y \in [z, 1]$ için,

$$x \rightarrow (y \rightarrow z) = \neg x \oplus (\neg y \oplus z) = \neg y \oplus (\neg x \oplus z) = y \rightarrow (x \rightarrow z)$$

elde edilir. Yani, $[z, 1]$ üzerinde (YÖ) sağlanır.

$x, y \in [z, 1]$ olmayan durumlarda, (YÖ) otomatik olarak sağlanır. Örneğin, $x \notin [z, 1]$ ve $y \in [z, 1]$ durumunu ele alalım. Bu durumda, $x < y < z$ dir. Bu da $\neg x \oplus z = 1$ demek olduğundan, $\neg y \oplus (\neg x \oplus z) = y \rightarrow (x \rightarrow z) = 1$ olur. Şimdi, eşitliğin diğer tarafına bakalım. Her zaman için $x < \neg y \oplus x$ tir. $x < z$ olduğu için de $\neg y \oplus x < \neg y \oplus z$ dir. Buradan, $x < \neg y \oplus z$ bulunur. Yani, $\neg x \oplus (\neg y \oplus z) = 1$ dir.

$x \in [z, 1], y \notin [z, 1]$ ve $x \notin [z, 1], y \notin [z, 1]$ durumlarında da (YÖ)nün sağlandığı benzer şekilde gösterilebilir. Sonuç olarak, $\mathcal{L}(A)$ nin dağılmalı bir kafes olduğunu ve her $x, y, z \in A$ için (YÖ) nün sağlandığını gösterdik. O halde, Önerme 3.22 ve Teorem 3.18 den $\mathcal{A}$ bir MV-cebridir.

□

Değişmelilik MV-Cebirlerini Temel Cebirler'den ayıran çok önemli bir özelliktir. Her MV-Cebri, değişmeli bir temel cebirdir. Ancak, her değişmeli temel cebir bir MV-Cebri değildir. Micheal Botur, bunu bir örnek ile kanıtlamıştır. Biz inşası çok uzun olan bu örneği, önemli kısımlarını vurgulayarak daha kısa bir şekilde vereceğiz. Bunun için önce bazı teorem ve önermelere ihtiyacımız var:

TEOREM 3.24. *(Botur) $\mathcal{A} = (A; \oplus, \neg, 0)$ bir değişmeli temel cebir olsun. O halde, her $x \in A$ için, $x^* = x^* \rightarrow x$ olacak şekilde tek bir $x^* \in [x, 1]$ vardır.*

TEOREM 3.25. (Botur) $\mathcal{A} = ([0, a]; \oplus, \neg, 0)$ bir temel cebir olsun ve $x \in [0, a]$ için $\neg'x = a - x$ ile tanımlansın. Bu durumda, $\mathcal{A}, \mathcal{A}' = ([0, a]; \oplus', \neg', 0)$ değişmeli temel cebrine izomorftur.

Şimdi, $[0, 12]$ üzerinde bir değişmeli temel cebir inşa edeceğiz. $[0, a]$ üzerinde $\neg x = a \oplus \neg x$ olmasından yararlanarak $\neg x := 12 - x$ ile tanımlayalım.

ÖNERME 3.26. $\mathcal{A} = ([0, 12], \oplus, \neg, 0)$ bir değişmeli Temel Cebir olsun. O halde, $f(x, y) := x \rightarrow y$ olmak üzere $f : [0, 12]^2 \rightarrow [0, 12]$ dönüşümü sürekli ve her $y \in [0, 12]$ ve her $x, x_1, x_2 \in [y, 12]$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:

- (i) $f(x, y) = f(\neg y, \neg x)$
- (ii) $x \geq y$ ise $f(f(x, y), y) = x$
- (ii) $x_1 \leq x_2$ ise $f(x_1, y) \geq f(x_2, y)$.

Temel cebirlerde de MV-cebirlerinde de $x \rightarrow y := \neg x \oplus y$ ile tanımlı olduğundan $x, y \in [0, 12]$ için $x \rightarrow y := 12 - x + y$ diyebiliriz. Şimdi, aşağıdaki fonksiyonu göz önünde bulunduralım:

$$f(x, y) := 12 - x + y + d(x, y),$$

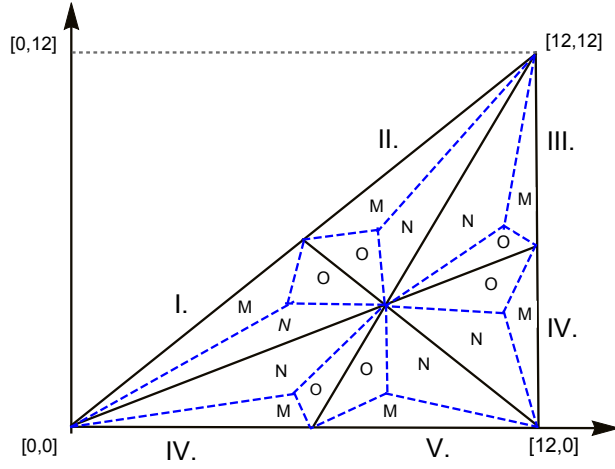
$d(x, y)$, $f(x, y)$ ve $x \rightarrow y$ arasındaki fark olsun. Sıfırdan farklı bir $d(x, y)$ bularak, MV-Cebri olmayan bir Temel Cebir inşa edeceğiz.

ÖNERME 3.27. (Botur) $x \geq y$ olmak üzere her $x, y \in [0, 12]$ için $d(x, y) = d(\neg y, \neg x) = d(f(x, y), y)$ dir.

Şimdi, aşağıdaki kümeleri göz önünde bulunduralım:

$$g = \{\langle x_*, x \rangle \mid x \in [0, 12]\}, h = g = \{\langle 12 - x, 12 - x_* \rangle \mid x \in [0, 12]\}, k = g = \{\langle x, \neg x \rangle \mid x \in [6, 12]\}.$$

f süreki olduğu için g, h ve k da sürekli eğrilerdir. Dahası, g, h ve k eğrileri $\{\langle x, y \rangle \in [0, 12]^2 \mid x \geq y\}$ bölgesini altı kısma ayırır:



Şimdi, $d(x,y)$ yi, dolayısıyla da $f(x,y)$ yi inşa ederek $\mathcal{A} = ([0,12], \oplus, \neg, 0)$ Temel Cebrini tanımlayacağız. g,h,k eğrileri aşağıdaki gibi tanımlansın:

- g , $[6,0]$ dan $[12,12]$ ye
- h , $[0,0]$ dan $[6,12]$ ye
- k , $[6,6]$ dan $[12,0]$ ye

Bu durumda, g,h , ve k $[0,12]$ deki MV-cebrinde çakışır. Alan (I) de $d(x,y)$ piramit (köşegeni $[6,4]$ ve yükseklik 1.8) olarak tanımlanmıştır. Böylece (I), M,N,O olmak üzere üç alt bölgeye ayrılır. $d(x,y)$, aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$d(x,y) := \begin{cases} 0.9x - 0.9y, & x \in M \\ 1.8y - 0.9x, & x \in N \\ 10.8 - 0.9x - 0.9y, & x \in O. \end{cases}$$

	M	N	O
I.	[0;0],[6;6],[6;4]	[0;0],[6;4],[8;4]	[6;4],[8;4],[6;6]
II.	[6;6],[8;6],[12;12]	[8;4],[8;6],[12;12]	[8;4],[8;6],[6;6]
III.	[12;6],[12;12],[11.8;6]	[8;4],[12;12],[11.8;6]	[8;4],[12;6],[11.8;6]
IV.	[12;0],[11.8;4],[12;6]	[12;0],[8;4],[11.8;4]	[8;4],[12;6],[11.8;4]
V.	[6;0],[12;0],[8;0.2]	[12;0],[8;4],[8;0.2]	[6;0],[8;4],[8;0.2]
VI.	[0;0],[6;0],[6;0.2]	[0;0],[8;4],[6;0.2]	[6;0],[8;4],[6;0.2]

Aşağıdaki tabloda $f(x,y)$ bölge bölge verilmiştir:

	M	N	O
I.	$12 - 0.1x + 0.1y$	$12 - 1.9x + 2.8y$	$22.8 - 1.9x + 0.1y$
II.	$12 - 0.1x + 0.1y$	$22.8 - 2.8x + 1.9y$	$1.2 - 0.1x + 1.9y$
III.	$120 - 10x + y$	$\frac{12 \cdot 1.9}{2.8} - \frac{1}{2.8}x + \frac{1.9}{2.8}y$	$12 - 10x + 19y$
IV.	$120 - 10x + y$	$\frac{12}{1.9} - \frac{1}{1.9}x + \frac{2.8}{1.9}y$	$12 - \frac{1}{1.9}x + \frac{1}{19}y$
V.	$12 - x + 10y$	$\frac{12 \cdot 2.8}{1.9} - \frac{2.8}{1.9}x + \frac{1}{1.9}y$	$\frac{12}{1.9} - \frac{1}{19}x + \frac{1}{1.9}y$
VI.	$12 - x + 10y$	$12 - \frac{1.9}{2.8}x + \frac{1}{2.8}y$	$120 - 19x + 10y$

$f(x,y)$ parçalı fonksiyonu lineer olduğu için $f(f(x,y),y)$ ve $f(-y,-c)$ fonksiyonları da lineerdir. $f(f(x,y),y) = x$ ve $f(-y,-x) = f(x,y)$ dir. Buradan,

$$x \oplus y = \neg x \rightarrow y = f(\neg x, y)$$

tanımlaması yapıldığında, $\mathcal{A} = ([0, 12], \oplus, \neg, 0)$ değişmeli temel cebri elde edilir.

Ancak,

$$0 \rightarrow (8 \rightarrow 4) = 10 \rightarrow 8 = 10 \neg 8 \rightarrow (10 \rightarrow 4) = 8 \rightarrow 6.95 = 11.89,$$

Yani $\mathcal{A}$, Yer Değiştirme Özdeşliği'ni sağlamaz. Bu da, $\mathcal{A}$ bir MV-Cebri değil demektir.

3.3 Kafes Etki Cebirleri

Şimdi, kafes etki cebirlerini tanımlayarak, Temel Cebir ile ilişkilerini inceleyeceğiz.

TANIM 3.28. (Radomir and Halas) “+”, E üzerinde bir kısmi ikili işlem olmak üzere, a ;ağıdaki özellikleri sağlayan $\mathcal{E} = (E, +, 0, 1)$ cebirsel yapısına bir Etki Cebri denir. Burada 0 ve 1 özel elemanlardır.

(EA1) Eğer $a+b$ tanımlı ise $a+b=b+a$ dır.

(EA2) Eğer eşitliğin bir yanı tanımlı ise $(a+b)+c=a+(b+c)$ dir.

(EA3) Her $a \in E$ için $a+a'=1$ olacak şekilde tek bir $a' \in E$ vardır.

(EA4) $a+1$ tanımlı ise $a=0$ dir.

(Burada, $a+b$ nin tanımlı olması $a+b \in E$ demektir.)

$\mathcal{E} = (E, +, 0, 1)$ üzerinde $\leq$ bağıntısı aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$a \leq b \iff c \in E \text{ için } b = a + c$$

$\leq$, E üzerinde 0 en küçük, 1 en büyük eleman olmak üzere bir kısmi sıralama bağıntısıdır. Eğer $(E, \leq)$ bir kafes ise $\mathcal{E}$ ye bir Kafes Etki Cebri denir.

Etki Cebirleri, aşağıda tanımını verdiğimiz D-posetlere denktir:

TANIM 3.29. (Radomir and Halas) $(P, \leq)$, en küçük elemanı 0, en büyük elemanı 1 olan bir poset olsun. “-”, P üzerindeki aşağıdaki gibi tanımlı bir kısmi ikili işlem olsun:

$$a-b \text{ tanımlıdır} \iff b \leq a$$

Her $a, b, c \in P$ için aşağıdaki koşulları sağlayan $(P, \leq, -, 0, 1)$ sistemine D-poset denir:

$$(D1) \ a-0=a,$$

$$(D2) \ a \leq b \leq c \text{ ise } c-b \leq c-a \text{ ve } (c-a)-(c-b)=b-a \text{ dir.}$$

$(P, \leq)$ kafes ise, D-posete D-kafes denir.

D-posetler ve etki cebirleri arasındaki ilişki şöyledir:

$(E, +, 0, 1)$ bir etki cebri ve $\leq$, E üzerindeki bir sıralama bağıntısı olsun.

$(E, \leq, -, 0, 1)$ sistemi aşağıdaki özelliğe sahip bir D posettir:

$$a - b := c \iff a = b + c.$$

Diğer yandan, eğer $(P, \leq, -, 0, 1)$ bir D-poset ise $(P, +, 0, 1)$ aşağıdaki özelliğe sahip bir etki cebridir:

$$a + b := c \iff c \geq b \text{ ve } c - b = a.$$

Kafes etki cebirlerinin (denk olarak D-kafeslerin) önemli örnekleri ortamoduler kafesler ve MV-cebirleridir.

Bir $\mathcal{E} = (E, +, 0, 1)$ etki cebrinin bazı önemli özellikleri aşağıdaki gibidir:

- (1) $a+0=a$
- (2) $a+b$ tanımlıdır $\iff a \leq b'$,
- (3) $a+b$ tanımlı ise her $x \leq a$ ve $y \leq b$ için $x+y$ tanımlıdır,
- (4) $b+c$ tanımlı ise $a \leq b$ olması için gerek ve yeter koşul $a + c \leq b + c$ dir,
- (5) $a+b=c \iff a' = b + c' \iff a = (b + c')'$.

Şimdi, yukarıdaki özelliklerden yararlanarak, bir kafes etki cebrinin bir Temel Cebir olduğunu göstereceğiz.

ÖNERME 3.30. $\mathbf{E}=(E,+,0,1)$ bir kafes etki cebri olsun ve $\oplus$ ve $\neg$ aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$x \oplus y := (x \wedge \neg y) + y \text{ ve } \neg x := x'.$$

Bu durumda, $\mathcal{B}(\mathbf{E}) = (E, \oplus, \neg, 0)$ bir Temel Cebir'dir ve bu Temel Cebirin kafes sıralaması, kafes etki cebrininki ile aynıdır.

KANIT. Öncelikle, $(E, \vee, \wedge, 0, 1)$ in $x \mapsto x' + a$ ($x \in [a, 1]$) bölgesel antiton involusyonlu bir kafes olduğunu göstereceğiz.

$x \mapsto x'$ dönüşümü E üzerinde bir antiton involusyondur. Ayrıca, (EA3) ten $x'' = x$ ve (5) ten $x \leq y \iff x' \geq y'$ elde edilir. Dolayısıyla da

$$x \wedge y = (x' \vee y')' \text{ ve } x \vee y = (x' \wedge y')'$$

De Morgan kurallarının $(E, \vee, \wedge, 0, 1)$ kafesinde sağlandığı görülür.

Şimdi bir $a \in E$ alalım ve $x \in [a, 1]$ için $x \mapsto x^a := x' + a$ ile tanımlayalım. $x' + a$ tanımlı olduğu için (2)den $x \geq a$ dir. $x, y \in [a, 1]$ için $x \leq y$ durumunda $x^a = x' + a \geq y' + a = y^a$ dir. (5)ten $x^a \geq y^a$ olması $x \leq y$ demektir.

(5) kullanılarak bölgesel antiton involusyon tanımının ikinci koşulunun da sağlandığı gösterilebilir:

$$x^{aa} = (x' + a)' + a = x.$$

Böylece, $x \mapsto x' + a$ dönüşümünün $[a, 1]$ üzerinde bir antiton involusyon olduğu görülür. Yani, $\mathcal{L}(E) = (E, \vee, \wedge, (a)_{a \in E}, 0, 1)$ bir bölgesel antiton involusyonlu kafestir. $\mathcal{L}(E)$ üzerinde,

$$x \oplus y := (x^0 \vee y)^y = (x' \vee y)' + y = (x \wedge y') + y$$

tanımlaması kullanılarak bir temel cebir elde edilir.

□

TANIM 3.31. (Radomir and Halas) $\mathbf{E} = (E, +, 0, 1)$ bir Kafes Etki Cebri olsun. Her $a, b \in E$ için $(a \vee b) - b = a - (a \wedge b)$ sağlanıyorsa, a ve b ye uyumlu elemanlar denir ve $a \leftrightarrow b$ ile gösterilir.

“ $\leftrightarrow$ ” bağıntısı $a, b, c \in E$ için aşağıdaki özellikleri sağlar:

- $a \leftrightarrow a$, $a \leftrightarrow 0$ ve $a \leftrightarrow 1$,
- $a \leftrightarrow b \Leftrightarrow b \leftrightarrow a$,
- $a \leq b \Rightarrow a \leftrightarrow b$,
- $a \leftrightarrow b$ ve $a \leftrightarrow c$ ise $b+c$ tanımlı olduğunda $a \leftrightarrow (b+c)$ dir,
- $a \leftrightarrow b$, $a \leftrightarrow c$ ve $b \geq c$ ise $a \leftrightarrow (b \leftrightarrow c)$ dir,
- $a \leftrightarrow b \Leftrightarrow a' \leftrightarrow b'$,
- $a \leftrightarrow b \Leftrightarrow a \leftrightarrow b'$.

ÖNERME 3.32. (Radomir and Halas) $\mathbf{E} = (E, +, 0, 1)$ bir Kafes Etki Cebri olsun. Bu durumda, ondan türetilen $\mathcal{B} = (E, \oplus, \neg, 0)$ Temel Cebri aşağıdaki özelliği sağlar:

$$x \leq \neg y \text{ ve } x \oplus y \leq \neg z \Rightarrow x \oplus (z \oplus y) = (x \oplus y) \oplus z. \quad (3.7)$$

KANIT. $a+b$ nin tanımlı olması için gerek ve yeter koşul $a \leq \neg b$ olmasıydı. Buradan, $a \oplus b = (a \wedge \neg b) + b = a + b$ olur. Biliyoruz ki, $x \leq \neg y$ ve $x \oplus y \leq \neg z$ ise $(x+y)+z$ tanımlıdır. Üstelik, $x+(z+y)$ tanımlı ise $x+(z+y)=(x+y)+z$ idi. Sonuç olarak,

$$x \oplus (z \oplus y) = x + (z + y) = (x + y) + z = (x \oplus y) \oplus z.$$

elde edilir.

□

TANIM 3.33. (3.7) özelliğini sağlayan bir kafes etki cebirine, *Etki Temel Cebri* denir.

ÖNERME 3.34. Bir A Temel Cebri'nin (3.7) özelliğini sağlaması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki özelliği sağlamasıdır:

$$(x \wedge \neg y) \oplus [(\neg(x \oplus y) \wedge z) \oplus y] = (x \oplus y) \oplus (\neg(x \oplus y) \wedge z). \quad (3.8)$$

KANIT. $x, y, z \in \mathbf{A}$ alalım.

($\Leftarrow$) $x \leq \neg y$ ve $x \oplus y \leq \neg z$ olsun. Bu durumda, $x \wedge \neg y = x$ dir ve $\neg \neg z \leq \neg(x \oplus y)$ olacağından $\neg(x \oplus y) \oplus z = z$ dir. Bu durumda (3.8), $x \oplus (z \oplus y) = (x \oplus y) \oplus z$ ifadesine denktir. Böylece (3.7) sağlanmış olur.

($\Rightarrow$) $\mathcal{A}$ nın , (3.7) i sağladığını kabul edelim. Bu durumda, $x \wedge \neg y \leq \neg y$ dir. Ayrıca, $x \wedge \neg y \oplus y = (\neg(x \wedge \neg y) \vee y)^y = (\neg x \vee y)^y = x \oplus y \leq (x \oplus y) \vee \neg z = \neg(\neg(x \oplus y) \wedge z)$ olur. Buradan,

$$(x \wedge \neg y) \oplus [(\neg(x \oplus y) \wedge z) \oplus y] = (x \wedge \neg y) \oplus y \oplus (\neg(x \oplus y) \wedge z) = (x \oplus y) \oplus (\neg(x \oplus y) \wedge z)$$

elde edilir. Böylece, (3.8) sağlanmış olur.

□

TEOREM 3.35. $\mathcal{A} = (A; \oplus, \neg, 0)$, 3.7 (yada 3.8) koşulunu sağlayan bir temel cebir olsun. $\mathcal{A}$ üzerindeki kısmi toplama işlemi aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$a + b \text{ tanımlıdır} \Leftrightarrow a \leq \neg b \text{ ve } a + b := a \oplus b$$

dir. Bu durumda, $\mathcal{E}(\mathcal{A}) = (A, +, 0, 1)$ bir kafes etki cebridir.

KANIT. $\mathcal{E}(\mathcal{A}) = (A, +, 0, 1)$ nin (EA1)-(EA4) koşullarını sağladığını göstereceğiz.

(EA 1) (3.7) de $x=0$ koyarsak,

$$y \leq \neg z \Rightarrow z \oplus y = y \oplus z$$

elde edilir. $a \leq b \Leftrightarrow \neg a \geq b$ olduğu için $a+b$ ve $b+a$ tanımlıdır. Sonuç olarak, $a+b = a \oplus b = b \oplus a = b+a$ olur.

(EA2) $(a+b)+c$ tanımlı olsun. Bu da $a \leq \neg b$ ve $a \oplus b = a+b \leq \neg c$ demektir. O halde, $b \leq a \oplus b \leq \neg c$ olur. Yani, $b+c$ tanımlıdır. Üstelik, $a \oplus b \leq \neg c$, $c \leq \neg(a \oplus b)$ ifadesine denk olduğu için $b \oplus c = c \oplus b \leq \neg(a \oplus b) \oplus b = \neg a \vee b = \neg a$ dir. Bu da, $a+(b+c)$ nin tanımlı olduğunu gösterir. $a+(b+c)$ tanımlı ise $(a+b)+c$ nin de tanımlı olduğu benzer şekilde gösterilebilir. Her iki durumda da (3.7) kullanılarak,

$$(a+b)+c = (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (c \oplus b) = a+(c+b) = a+(b+c)$$

(EA3) Elimizde $a+\neg a=1$ var. $a+b=1$ ise $a \leq b$ dir. $1 = a \oplus b = b \oplus a = (\neg b \vee a)^a = (\neg b)^a$ olduğu için $a = \neg b$ ve $b = \neg a$ olur.

(EA4) $a+1$ tanımlı ise $a \leq \neg 1 = 0$ dir. Buradan, $a=0$ dir.

□

4. İdealler, Zayıf İdealler, Ön İdealler

Temel cebirlerde ve MV-cebirlerinde idealler kongruans çekirdekleri üzerinden incelenir. Ancak, MV-cebirlerinde bir kongruansin çekirdeği, MV-olmayan bir temel cebirde çekirdek olmayabilir. Örneğin, $\mathcal{A}$ bir MV-cebri olsun. Bu durumda, $\emptyset \neq J \subseteq A$ nın bir kongruans çekirdeği olması için gerek ve yeter koşul J nin, $\mathcal{A}$ nın bir ideali olması; yani aşağıdaki koşulları sağlamasıdır:

(P1) Her $a, b \in J$ için $a \oplus b \in J$,

(P2) $a \in J$ ve $a \geq b$ ise $b \in J$.

Ancak, $\mathcal{A}$ bir MV-Cebri değilse, bu koşullar J nin bir ideal olması için yeterli olmayabilir. Bu sebeple, Krnavek ve Kuhr bu koşulları sağlayan alt kümeleri, ön idealler olarak adlandırmıştır. Temel cebirlerde de ön ideal için bu tanıımı kullanacağız.

TANIM 4.1. (*Chajda and Kühr, 2013*) $\mathcal{A} = (A; \oplus, \neg, 0)$ bir Temel Cebir olsun ve $\ominus$ islemi $a, b \in A$ için $a \ominus b = \neg(b \oplus \neg a)$ ile tanımlansın. Bu durumda, $J \subseteq A$ nın bir kongruans çekirdeği olması için gerek ve yeter koşul her $a, b \in A$ için aşağıdaki koşulların sağlanmasıdır:

(I1) $a \ominus b \in J$ ve $b \in J$ ise $a \in J$,

(I2) $c \in J$ olmak üzere, $a \ominus b \in J$ ve $a \geq b$ ise $(c \ominus b) \ominus (c \ominus a) \in J$,

(I3) $c \in J$ olmak üzere, $a \ominus b \in J$ ve $b \ominus a \in J$ ise $(a \ominus c) \ominus (b \ominus c) \in J$.

(I4) $0 \in J$.

Dolayısıyla, yukarıdaki koşulları sağlayan J , $\mathcal{A}$ nın bir idealidir. Eger J sadece (I1) ve (I2) yi sağlıyorsa, zayıf ideal denir. $\mathcal{A}$ nin idealler, ön idealler ve zayıf ideallerinin kümesini sırasıyla $\mathcal{I}$, $\mathcal{P}$ ve $\mathcal{Z}$ ile göstereceğiz.

ÖRNEK 4.2. (*Chajda and Kühr, 2013*) $B = \{0, a, b, c, d, 1\}$ olsun. Aşağıdaki tabloları göz önünde bulunduralım:

$\oplus$	0	a	b	c	d	1
0	0	a	b	c	d	1
a	a	a	d	c	d	1
b	b	d	b	c	d	1
c	c	a	b	c	1	1
d	d	d	d	1	d	1

$\ominus$	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0
a	a	0	a	c	0	0
b	b	b	0	c	0	0
c	c	a	b	0	c	0
d	d	a	b	d	0	0

$J_1 = \{0, a\}$, $J_2 = \{0, c\}$ ve $J_3 = \{0, a, b, d\}$ olsun. Bu durumda, J_1 bir ön ideal, J_2 bir zayıf ideal ve J_3 bir idealdir:

J_1 : (P1) $0 \oplus a = a \in J_1$, $a \oplus a = a \in J_1$, $a \oplus 0 = a \in J_1$ ve $0 \oplus 0 \in J_1$.

(P2) $a \in J_1$ alalım. k , A nın $k \leq a$ koşulunu sağlayan bir elemanı olsun. Bu durumda, $\neg k \oplus a = 1$ dir. Bu, $\neg k = 1$ demektir. O halde, $k = 0 \in J_1$ dir.

Şimdi, $0 \in J_1$ alalım. m , A nın $m \leq 0$ koşulunu sağlayan bir elemanı olsun. Bu durumda, $\neg m \oplus 0 = 1$ dir. Bu, $\neg m = 1$ demektir. O halde, $m = 0 \in J_1$ dir.

Sonuç olarak, J_1 bir ön idealdir.

J_2 : (I1) $m \in A$ için $m \ominus c \in J_2$ olsun. O halde, $m \ominus c = c$ veya $m \ominus c = 0$ dir. Tabloya göre $m \ominus c = c$ olacak şekilde bir $m \in A$ yoktur. O halde, $m \ominus c = 0$ durumunu ele almamız gerekir. Bu durumda, $m = 0$ veya $m = c$ dir. Her iki durumda da $m \in J_2$ dir.

Şimdi, $n \in A$ için $n \ominus 0 \in J_2$ olsun. O halde, $n \ominus 0 = c$ veya $n \ominus 0 = 0$ dir. Bu durumda, $n = c$ veya $n = 0$ dir. Her iki durumda da $n \in J_2$ dir.

(I2) $a \ominus b \in J_2$ ve $a \geq b$ (yani $\neg b \oplus a = 1$) koşullarını sağlayan tek (a, b) ikilisi (c, d) dir. $m \in A$ için $(m \ominus d) \ominus (m \ominus c) \in J_2$ olsun. Bu durumda, $(m \ominus d) \ominus (m \ominus c) = 0$ veya $(m \ominus d) \ominus (m \ominus c) = c$ dir. Önce, $(m \ominus d) \ominus (m \ominus c) = c$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $m \ominus d = c$ olmak zorundadır. Buradan, $m = c \in J_2$ bulunur.

Şimdi, $(m \ominus d) \ominus (m \ominus c) = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda üç ihtimal vardır:

(1) $m \ominus d = 0$: Bu durumda, $m = 0 \in J_2$ dir.

(2) $m \ominus d = a$ ve $m \ominus c = d$: $m \ominus d = a$ olacak şekilde bir $m \in A$ olmadığı için bu ihtimal ortadan kalkar.

(3) $m \ominus d = b$ ve $m \ominus c = d$: $m \ominus d = b$ olacak şekilde bir $m \in A$ olmadığı için bu ihtimal de ortadan kalkar.

Sonuç olarak, J_2 bir zayıf idealdir.

J_3 : $0 \in J_3$ olduğu için (I4) sağlanır. (I1) ve (I2) koşullarının sağlandığı yukarıdakine çok benzer bir şekilde gösterilebilir. Şimdi (I3) koşulunu kontrol edeceğiz: $x \ominus y \in J_3$ ve $y \ominus x \in J_3$ olacak şekilde hiç bir $x, y \in A$ yoktur. O halde, (I3) koşulunu doğru kabul edebiliriz. Bu da, J_3 ün bir ideal olduğunu gösterir.

ÖNERME 4.3. (Chajda and Kühr, 2013) (i) $(A; +, 0, 1)$ bir Kafes Etki Cebri olsun. Bu durumda, $a \oplus b = (a \wedge b') + b$ ve $\neg a = a'$ ile tanımlanan $(A; \oplus, \neg, 0, 1)$ cebirsel yapısı bir etki temel cebridir. Kısmi toplam, $\oplus$ işleminin $a \leq \neg b$ koşulunu sağlayan (a, b) ikililerine kısıtlanışdır.

(Chajda and Kühr, 2013) (ii) $(A; \oplus, \neg, 0, 1)$ bir etki temel cebri olsun. $a \leq \neg b$ koşulunu sağlayan (a, b) ikilileri için $a + b = a \oplus b = (a \wedge b') + b$ olsun. Bu durumda, $(A; +, 0, 1)$ bir kafes etki cebridir.

Pulmannove ve Vincekova, Etki Temel Cebirleri'nde idealleri aşağıdaki gibi karakterize etmiştir:

ÖNERME 4.4. (Pulmannove and Vincekova, 2009) $\mathcal{A} = (A; \oplus, \neg, 0, 1)$ bir etki Temel Cebri olsun ve $a \oslash b = \neg(\neg a \oplus b)$ ile tanımlansın. $\emptyset \neq J \subseteq A$ nin, $\mathcal{A}$ nin bir ideali olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki koşulları sağlamasıdır:

(i) Her $a, b \in J$ için $a \oplus b \in J$,

(ii) $a \in J$ ise her $b \in A$ için $a \oslash b \in J$.

Bu önerme kullanılarak bir Etki Temel Cebirindeki her zayıf idealin bir ideal olduğu gösterilebilir:

TEOREM 4.5. (Chajda and Kühr, 2013) $\mathcal{A}$ bir Etki Temel Cebri olsun. Bu durumda, $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{I}(\mathcal{A})$ dır.

KANIT. $J \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ olsun. O halde, J aynı zamanda bir ön idealdir. Yani J , (i)yi sağlar.

Şimdi, (ii) yi sağladığını gösterelim. $a \in J$, $b \in A$ olsun. $0 \leq b$ olduğu için, $\neg a \oplus 0 \leq \neg a \oplus b$ dir. Buradan, $\neg(\neg a \oplus b) \leq \neg(\neg a \oplus 0) = a$ olur. Bu durumda,

$$a \odot b = \neg(\neg a \oplus b) \leq a$$

olur. J bir ön ideal olduğu için, bu $a \odot b \in J$ demektir. Sonuç olarak, $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \supseteq \mathcal{I}(\mathcal{A})$ olur. Her ideal bir ön ideal olduğu için, $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{I}(\mathcal{A})$ dır.

□

TANIM 4.6. (Chajda and Kühr, 2013) $\mathcal{A} = (A; \oplus, \neg, 0)$ bir Temel Cebir olsun. Her $a, b, c \in A$ için,

$$a \leq b \oplus c \Rightarrow a = b_1 \oplus c_1, b_1, c_1 \in A, b_1 \leq b \text{ ve } c_1 \leq c$$

koşulu sağlanıyor ise, $\mathcal{A}$ nin Riestz Ayrışımı (kısaca RA) özelliği vardır denir.

NOT 4.7. Etki temel cebirlerinde RA'yi ifade etmek için $\oplus$ yerine kısmi toplam “+” kullanılır.

ÖNERME 4.8. (Chajda and Kühr, 2013) Her $\mathcal{A}$ kafes etki cebri için aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) $\mathcal{A}$ bir MV-cebridir

(ii) $\mathcal{A}$ değişmelidir

(iii) $\mathcal{A}$ RA'yn sağlar.

TEOREM 4.9. (Chajda and Kühr, 2013) Her monoton etki temel cebri RA'yn sağlar, dolayısıyla MV-Cebri'dir.

KANIT. $\mathcal{A} = (A; \oplus, \neg, 0)$ bir monoton Etki Temel Cebri olsun. $a \leq b \oplus c$ olacak şekilde $a, b, c \in A$ alalım. $c_1 = a \wedge c$ ve $b_1 = a \odot c_1$ alırsak,

$$b_1 \oplus c_1 = (a_1 \odot c_1) \oplus c_1 = a \vee c_1 = a$$

olur. $c_1 = a \wedge c$ seçtiğimiz için $c_1 \leq c$ dir. O halde, tek göstermemiz gereken $b_1 \leq b$.

$\mathcal{A}$ bir etki temel cebri olduğu için $x \leq \neg y$ durumunda elimizde,

$$x \oplus y = x + y = y + x = y \oplus x$$

var. “ $x \leq y \Rightarrow z \oplus x \leq z \oplus y$ ” özelliğini ve $a \leq b \oplus c$ kabulumuz kullanılarak,

$$c \oplus \neg a \geq c \oplus \neg(b \oplus c) = \neg(b \oplus c) \oplus c = \neg b \vee c \geq \neg b$$

elde edilir. Yani, $\neg(c \oplus \neg a) \leq b$ dir. Ancak,

$$\neg a \oplus c_1 = c_1 \oplus \neg a = (a \wedge c) \oplus \neg a = c \oplus \neg a$$

olduğu için,

$$b_1 = a \oslash c_1 = \neg(\neg a \oplus c_1) = \neg(c \oplus \neg a)$$

elde edilir. Sonuç olarak, $b_1 \leq b$ olur.

□

5. SONUÇ

Bu çalışmada, öncelikle Temel Cebirler'in yapısını ve özelliklerini, daha sonra da kafesler ile arasındaki bağlantıyı inceledik. Bunun sonucunda, bir temel cebir $\mathcal{A} = (A; \oplus, \neg, 0)$ den bir sınırlı kafes (yada bir bölgesel antiton involusyonlu kafes) $\mathcal{L}(A)$ ve her bölgesel antiton involusyonlu kafesten bir temel cebir elde edilebileceğini; üstelik, $\mathcal{L}(\mathcal{A}(L)) = \mathcal{L}$ ve $\mathcal{A}(\mathcal{L}(A)) = \mathcal{A}$ olduğunu gördük. Daha sonra, temel cebirler ile MV-cebirleri arasındaki ilişkiyi inceledik. Bu iki tip cebirsel yapının yapısal özelliklerine baktığımızda, her MV-cebrinin bir değişmeli temel cebir olduğunu ancak her değişmeli temel cebirin bir MV-cebri olmadığını, olması için gerek ve yeter koşulun bu temel cebirin aynı zamanda bir BCC-cebri olması gerektiğini gördük. Bölümün devamında, bir kafes etki cebrinden temel cebir ve bir temel cebirden kafes etki cebri elde edebileceğimizi gördük. Tezin son kısmında, temel cebirlerin idealleri, zayıf ve ön ideallerini inceledik. Burada, bir etki temel cebrinde her zayıf idealin bir ideal olduğu ve her monoton etki temel cebrinin bir MV-cebri olduğu sonucuna ulaştık.

MV-cebirlerinde ve BCK-cebirlerinde türev üzerine bir çok çalışma yapılmıştır. Bizim bir sonraki çalışmamız, temel cebirlerde türev incelemek olacaktır. Ancak, çalışmalarımızın MV-cebirlerindeki türev çalışmalarıyla çakışmaması için, değişmeli olmayan Temel Cebirler'de çalışacağız.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Alshehri, N. ve Bawazeer, S., On Derivatons of BCC-algebras, International Journal of Algebra, Vol. 6, 2012, no. 32, 1491-1498.

Chajda, I., A characterization of commutative basic algebras, Mathematica Bohemica, Vol. 134 (2009), No. 2, 113-120.

Chajda, I. ve Emanovsky, P., Bounded lattices with antitone involutions and properties of MV-algebras, Disciss. Math. Gen. Algebra Appl. 24 (2004), 31-42

Chajda, I. ve Halas, R., A basic algebra is an MV-algebra if and only if it is a BCC-algebra. Int. J. Theor. Phys. 47 (2008), 261-267.,

Chajda, I. ve Halas, R., Many-valued quantum algebras, Algebra Universalis, Vol. 60, pp 63-90, 2009.

Chajda, I., Halas, R., Kuhr, J., Distributive lattices with sectionally antitone involutions. Acta Sci. Math. (Szeged) 71 (2005), 19-33.

Chajda, I. ve Kühr, J., Ideals and congruences of basic algebras, Soft Computing, 2013. vol.17, pp 401-410.

Chajda, I. ve Kühr, J., Algebraic Structures Derived From BCK-Algebras, Miskolc Mathematical Notes, Vol.8 (2007), No. 1, pp. 11-21.

Botur, M., An example of commutative basic algebra which is not an MV-Algebra, Math. Slovaca 60 (2010), No. 2, 171-178.

Garg, Vijay K., Lattice theory with applications, e-book, 2000.

Jie Meng, Young Bae Jun, BCK-Algebras, book, 1994.