



**T.C.
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**FUZZY SAYILARININ ÇİFT DİZİLERİNİN
 $\tilde{\alpha}$. DERECEDEN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI**

**Hazırlayan
Funda BABAARSLAN**

**Danışman
Doç. Dr. A. Nihal TUNCER**

Doktora Tezi

**Mayıs 2016
KAYSERİ**

**T.C.
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**FUZZY SAYILARININ ÇİFT DİZİLERİNİN
 $\tilde{\alpha}$. DERECEDEN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI**

(Doktora Tezi)

**Hazırlayan
Funda BABAARSLAN**

**Danışman
Doç. Dr. A. Nihal TUNCER**

**Mayıs 2016
KAYSERİ**

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan edirim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.

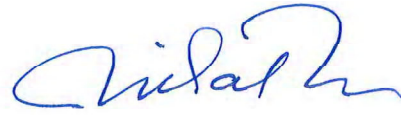
Funda BABAARSLAN

Fuzzy Sayılarının Çift Dizilerinin $\tilde{\alpha}$. Dereceden İstatistiksel Yakınsaklığı adlı Doktora tezi, Erciyes Üniversitesi Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma Yönergesi'ne uygun olarak hazırlanmıştır.



Tezi Hazırlayan

Funda BABAARSLAN



Danışman

Doç. Dr. A. Nihal TUNCER



Matematik ABD Başkanı

Prof. Dr. İlhan ÖZTÜRK

Doç. Dr. A. Nihal TUNCER danışmanlığında **Funda BABAARSLAN** tarafından hazırlanan **“Fuzzy Sayılarının Çift Dizilerinin $\tilde{\alpha}$. Dereceden İstatistiksel Yakınsaklığı”** adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Bölümü** Anabilim Dalında **Doktora** tezi olarak kabul edilmiştir.

26.05.2016

JÜRİ:

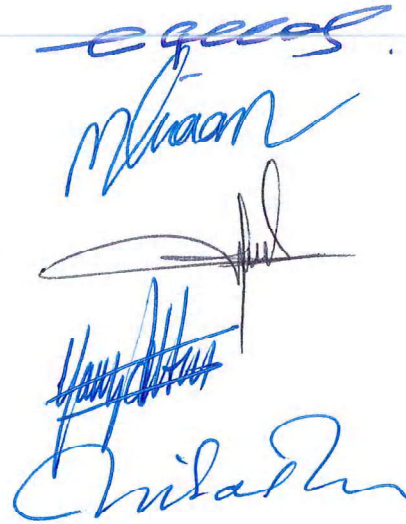
Başkan: Prof. Dr. Rifat ÇOLAK

Üye : Prof. Dr. Mehmet BARAN

Üye : Prof. Dr. Hikmet ÖZARSLAN

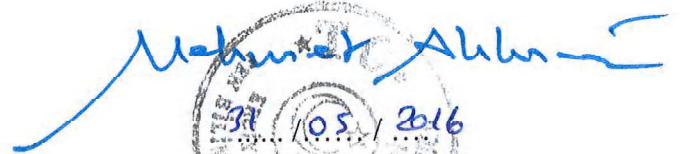
Üye : Doç. Dr. Yavuz ALTIN

Üye : Doç. Dr. A. Nihal TUNCER



ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulunun 31/05/2016 tarih ve 2016.../25-31 sayılı kararı ile onaylanmıştır.



Enstitü Müdürü
Prof. Dr. Mehmet AKKURT

ÖNSÖZ / TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın tamamlanmasında emek ve yardımlarını esirgemeyen ve çalışmalarım süresince değerli fikir ve tecrübeleri ile bana büyük destek sağlayan saygıdeğer hocam Doç. Dr. A. Nihal TUNCER'e içtenlikle teşekkür ederim.

Bilimsel katkılarını ve yardımlarını esirgemeyen Fırat Üniversitesi öğretim üyeleri saygıdeğer hocalarım Prof. Dr. Rifat ÇOLAK, Doç. Dr. Yavuz ALTIN ve Doç. Dr. Hıfı ALTINOK'a ve Erciyes Üniversitesi öğretim üyeleri saygıdeğer hocalarım Prof. Dr. Mehmet BARAN ve Prof. Dr. Hikmet ÖZARSLAN'a teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım sırasında birçok konuda yardımlarını gördüğüm Bozok Üniversitesi öğretim üyesi eşim Yrd. Doç. Dr. Murat BABAARSLAN'a ve hayatım boyunca gösterdikleri anlayış ile maddi ve manevi desteklerini hiç eksik etmeyen aileme en içten dileklerle teşekkürlerimi sunarım.

Funda BABAARSLAN

Mayıs 2016, KAYSERİ

FUZZY SAYILARININ ÇİFT DİZİLERİNİN $\tilde{\alpha}$. DERECEDEN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

Funda BABAARSLAN

Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Doktora Tezi, Mayıs 2016
Danışman: Doç. Dr. A. Nihal TUNCER

ÖZET

Bu çalışmanın birinci ve ikinci bölümünde reel ya da kompleks terimli diziler ve fuzzy sayı dizileri için çalışmamıza temel oluşturan bazı tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, $0 < s, t \leq 1$ reel sayılar olmak üzere herhangi bir $\tilde{\alpha} = (s, t)$ için, çift fuzzy sayı dizilerinin $\tilde{\alpha}$. dereceden istatistiksel yakınsaklık ve $\tilde{\alpha}$. dereceden kuvvetli Cesàro toplanabilirlik kavramları tanımlanarak aralarındaki ilişkiler incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, $\lambda = (\lambda_n)$ ve $\mu = (\mu_m)$ dizileri pozitif reel sayıların azalmayan iki dizisi ve $(\bar{\lambda}_{nm}) = (\lambda_n) \cdot (\mu_m)$ olmak üzere, çift fuzzy sayı dizileri için $\tilde{\alpha}$. dereceden $\bar{\lambda}$ – istatistiksel yakınsaklığı ve $\tilde{\alpha}$. dereceden kuvvetli $\bar{\lambda}$ – toplanabilirliği çalışılmıştır.

Beşinci bölümde, $\theta_{r,s} = \{(k_r, l_s)\}$ çift lacunary dizisi için, çift fuzzy sayı dizilerinin $\tilde{\alpha}$. dereceden lacunary istatistiksel yakınsaklık ve $\tilde{\alpha}$. dereceden lacunary kuvvetli p – Cesàro toplanabilirlik kavramları ve bazı teoremler verilmiştir.

Altıncı bölümde, bulunan sonuçlar ifade edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Fuzzy sayısı; Çift dizi; Çift lacunary dizisi; İstatistiksel yakınsaklık; Kuvvetli p – Cesàro toplanabilirlik; $\tilde{\alpha}$. derece; $\bar{\lambda}$ – istatistiksel yakınsaklık; $\bar{\lambda}$ – toplanabilirlik

STATISTICAL CONVERGENCE OF ORDER $\tilde{\alpha}$ OF DOUBLE SEQUENCES OF FUZZY NUMBERS

Funda BABAARSLAN

Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences

Ph. D. Thesis, May 2016

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. A. Nihal TUNCER

ABSTRACT

In the first and second chapters of this thesis, we give some definitions and theorems provided a basis in our study about real and complex sequences and the sequences of fuzzy numbers, respectively.

In the third chapter, for $\tilde{\alpha} = (s, t)$ where $0 < s, t \leq 1$ are real numbers, the concepts of statistical convergence of order $\tilde{\alpha}$ and strongly Cesàro summability of order $\tilde{\alpha}$ are defined for double sequences of fuzzy numbers, then the relations between them are examined.

In the fourth chapter, for $(\bar{\lambda}_{nm}) = (\lambda_n) \cdot (\mu_m)$ where $\lambda = (\lambda_n)$ and $\mu = (\mu_m)$ are two non-decreasing sequences of positive real numbers, the double $\bar{\lambda}$ – statistical convergence of order $\tilde{\alpha}$ and the strongly double $\bar{\lambda}$ – summability of order $\tilde{\alpha}$ are studied for sequences of fuzzy numbers.

In the fifth chapter, for a double lacunary sequence $\theta_{r,s} = \{(k_r, l_s)\}$, the notions of double lacunary statistical convergence of order $\tilde{\alpha}$ and double lacunary strongly p – Cesàro summability of order $\tilde{\alpha}$ are defined for sequences of fuzzy numbers, then some theorems about them are researched.

In the sixth chapter, the obtained results are given.

Keywords: Fuzzy numbers; double sequence; double lacunary sequence; statistical convergence; strongly p – Cesàro summability; order $\tilde{\alpha}$; $\bar{\lambda}$ – statistical convergence; $\bar{\lambda}$ – summability.

İÇİNDEKİLER

FUZZY SAYILARININ ÇİFT DİZİLERİNİN α . DERECEDEN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK.....	iii
YÖNERGEYE UYGUNLUK.....	iii
KABUL VE ONAY	iv
ÖNSÖZ / TEŞEKKÜR	v
ÖZET	vii
ABSTRACT	viii
İÇİNDEKİLER.....	viii
KISALTMALAR VE SİMGELER	xii
GİRİŞ	1

1. BÖLÜM

GENEL KAVRAMLAR

1.1. İstatistiksel Yakınsaklık.....	4
1.2. İstatistiksel Cauchy Dizisi	7
1.3. Kuvvetli p - Cesàro Toplanabilirlik	7
1.4. λ – İstatistiksel Yakınsaklık ve Kuvvetli (V, λ) - Toplanabilirlik	8
1.5. Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık ve Kuvvetli Lacunary Toplanabilirlik	10

2. BÖLÜM

FUZZY KÜMELER VE FUZZY SAYI DİZİLERİ

2.1. Fuzzy Kümeler	12
2.2. Fuzzy Sayıları	15
2.3. Fuzzy Sayı Dizileri.....	21
2.4. Fuzzy Sayı Dizilerinin İstatistiksel Yakınsaklığı ve Kuvvetli Cesàro Toplanabilirliği	23

2.5. Fuzzy Sayı Dizilerinin β . Dereceden İstatistiksel Yakınsaklığı ve β . Dereceden Kuvvetli p - Cesàro Toplanabilirliği	25
2.6. Fuzzy Sayı Dizilerinin λ - İstatistiksel Yakınsaklığı ve Kuvvetli λ - Toplanabilirliği.....	25
2.7. Fuzzy Sayı Dizilerinin β . Dereceden λ - İstatistiksel Yakınsaklığı ve β . Dereceden Kuvvetli λp - Toplanabilirliği.....	26
2.8. Fuzzy Sayı Dizilerinin Lacunary İstatistiksel Yakınsaklığı.....	27
2.9. Çift Fuzzy Sayı Dizileri	27

3. BÖLÜM

ÇİFT FUZZY SAYI DİZİLERİNİN $\tilde{\alpha}$. DERECEDEN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI VE $\tilde{\alpha}$. DERECEDEN KUVVETLİ p - CESÀRO TOPLANABİLİRLİĞİ

3.1. Çift Fuzzy Sayı Dizilerinin $\tilde{\alpha}$. Dereceden İstatistiksel Yakınsaklığı.....	30
3.2. Çift Fuzzy Sayı Dizilerinin $\tilde{\alpha}$. Dereceden Kuvvetli p - Cesàro Toplanabilirliği	40

4. BÖLÜM

ÇİFT FUZZY SAYI DİZİLERİNİN $\tilde{\alpha}$. DERECEDEN $\bar{\lambda}$ – İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI VE $\tilde{\alpha}$. DERECEDEN KUVVETLİ $\bar{\lambda}$ – TOPLANABİLİRLİĞİ

4.1. Çift Fuzzy Sayı Dizilerinin $\tilde{\alpha}$. Dereceden $\bar{\lambda}$ – İstatistiksel Yakınsaklığı	43
4.2. Çift Fuzzy Sayı Dizilerinin $\tilde{\alpha}$. Dereceden Kuvvetli $\bar{\lambda}$ – Toplanabilirliği.....	47

5. BÖLÜM

ÇİFT FUZZY SAYI DİZİLERİNİN $\tilde{\alpha}$. DERECEDEN LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI VE $\tilde{\alpha}$. DERECEDEN LACUNARY KUVVETLİ p - CESÀRO TOPLANABİLİRLİĞİ

5.1. Çift Fuzzy Sayı Dizilerinin $\tilde{\alpha}$. Dereceden Çift Lacunary İstatistiksel Yakınsaklığı	50
5.2. Çift Fuzzy Sayı Dizilerinin $\tilde{\alpha}$. Dereceden Lacunary Kuvvetli p -Cesàro Toplanabilirliği	54

6. BÖLÜM

TARTIŞMA-SONUÇ ve ÖNERİLER

6.1. Tartışma-Sonuç ve Öneriler	60
KAYNAKLAR	63
ÖZGEÇMİŞ	67

KISALTMALAR VE SİMGELER

<u>Sembol</u>	<u>Anlamı</u>
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\delta(K)$	K kümesinin doğal yoğunluğu
S	İstatistiksel yakınsak dizilerin kümesi
σ_1	Cesàro toplanabilir dizilerin kümesi
$\bar{\omega}_p$	Kuvvetli p – Cesàro toplanabilir dizilerin kümesi
S_λ	λ – istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi
$[V, \lambda]$	Kuvvetli (V, λ) – toplanabilir dizilerin kümesi
S_θ	Lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi
N_θ	Kuvvetli lacunary toplanabilir dizilerin kümesi
$L(\mathbb{R})$	Tüm fuzzy sayılarının kümesi
$L(\mathbb{R}^n)$	n -boyutlu tüm fuzzy sayılarının kümesi
$\ell_\infty(F)$	Sınırlı fuzzy sayı dizilerinin kümesi
$S(F)$	İstatistiksel yakınsak fuzzy sayı dizilerinin kümesi
$\omega(F)$	Kuvvetli Cesàro toplanabilir fuzzy sayı dizilerinin kümesi
$S_\lambda(F)$	λ – istatistiksel yakınsak fuzzy sayı dizilerinin kümesi

$S_{\theta}(F)$	Lacunary istatistiksel yakınsak fuzzy sayı dizilerinin kümesi
$\delta_2^{\tilde{\alpha}}(K)$	K kümesinin $\tilde{\alpha}$. dereceden çift doğal yoğunluğu
$S_2^{\tilde{\alpha}}(F)$	$\tilde{\alpha}$. dereceden istatistiksel yakınsak çift fuzzy sayı dizilerinin kümesi
$W_2^{\tilde{\alpha}}(F)$	$\tilde{\alpha}$. dereceden Cesàro toplanabilir çift fuzzy sayı dizilerinin kümesi
$W_2^{p\tilde{\alpha}}(F)$	$\tilde{\alpha}$. dereceden kuvvetli p –Cesàro toplanabilir çift fuzzy sayı dizilerinin kümesi
$(S_{\bar{\lambda}}^{\tilde{\alpha}})(F)$	$\tilde{\alpha}$. dereceden $\bar{\lambda}$ – istatistiksel yakınsak çift fuzzy sayı dizilerinin kümesi
$[V, \bar{\lambda}]^{\tilde{\alpha}}(F)$	$\tilde{\alpha}$. dereceden kuvvetli $\bar{\lambda}$ – toplanabilir çift fuzzy sayı dizilerinin kümesi
$S_{\theta_{r,s}}^{\tilde{\alpha}}(F)$	$\tilde{\alpha}$. dereceden lacunary istatistiksel yakınsak çift fuzzy sayı dizilerinin kümesi
$N_{\theta_{r,s}}^{p\tilde{\alpha}}(F)$	$\tilde{\alpha}$. dereceden lacunary kuvvetli p –Cesàro toplanabilir çift fuzzy sayı dizilerinin kümesi

GİRİŞ

Bulanık mantık (fuzzy logic) kavramı ilk olarak 1965 yılında, Lotfy A. Zadeh [1] tarafından ortaya atılmış ve bulanık mantık kuramı oluşturulmuştur. Sıcak-soğuk, iyi-kötü gibi iki değerli mantık kuramına alternatif olarak geliştirilmiştir. Zadeh aslında mantıkta kesin yargılar içermenin yanısıra herşeyin derecelendirilebileceğini ifade etmektedir. İlk ortaya çıktığı yıllarda “fuzzy (bulanık)” sözcüğünün mantıkla bağdaştırılması kolay olmamıştır. Ancak, fuzzy (bulanık) mantık bilgisayar, yapay zeka, deprem bilimi, sağlık bilimi vb. gibi çoğu alanda kullanılmaya başlamasıyla hızlı bir gelişim göstermiştir.

Fuzzy (bulanık) mantıktan yola çıkarak fuzzy kümeler oluşturulmuştur. Bir küme oluştururken, bir nesnenin bu kümeye ait olup olmadığını belirten karakteristik özelliklerini bilmemiz gerekir. Karakteristik özelliği kesin bir sınır belirtmeyen, göreceli kavramlar içeren bazı nesneler için “Kümenin elemanıdır ya da elemanı değildir” yargısını koyamadığımız durumlarda fuzzy kümeler ortaya çıkmıştır. Örneğin, Zadeh’e göre: “ 1 den çok büyük reel sayıların sınıfı”, “güzel kadınların sınıfı” ya da “uzun boylu adamların sınıfı” kesin bir küme ya da sınıf oluşturmaz. Böyle ifadeler için Zadeh [1], bu kümeleri de karakteristik fonksiyonların genellemesi olan ve üyelik fonksiyonları olarak adlandırılan fonksiyonlar yardımıyla tanımlamıştır.

Fuzzy küme tanımının ardından fuzzy sayıları, Chang ve Zadeh [2] tarafından oluşturulmuştur. Matloka [3], doğal sayılar kümesinden fuzzy sayılarının kümesi içine tanımlı bir fonksiyon olan fuzzy sayı dizilerini tanımlamış ve reel sayı dizileri için bilinen; komşuluk, limit, yakınsaklık, sınırlılık gibi kavramları fuzzy sayı dizileri için incelemiştir.

Daha sonra, 1951 yılında Fast [4] tarafından tanımlanan istatistiksel yakınsaklık kavramı fuzzy sayı dizileri için Nuray ve Savaş [5] tarafından ifade edilmiştir. Ayrıca, Nuray ve Savaş [5] fuzzy sayıları için istatistiksel Cauchy dizisini tanımlamışlardır.

Yine Kwon [6], istatistiksel yakınsaklığı fuzzy sayı dizileri için incelemeye devam etmiş, bu diziler için kuvvetli p -Cesàro toplanabilirlik tanımını oluşturmuştur. Ayrıca, Kwon [6] fuzzy sayı dizileri için istatistiksel yakınsaklık ve kuvvetli p -Cesàro toplanabilirlik kavramları arasındaki ilişkiyi araştırmıştır.

$\lambda=(\lambda_n)$ dizisi, pozitif sayıların $\lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1$, $\lambda_1 = 1$ şartına sahip sonsuza giden ve azalmayan bir dizisi olmak üzere, λ -istatistiksel yakınsaklık ve kuvvetli λ -toplanabilirlik kavramları Savaş [7] tarafından fuzzy sayı dizileri için çalışılmıştır. Ayrıca, Nuray [8] $k_0 = 0$ ve $r \rightarrow \infty$ için $h_r = k_r - k_{r-1} \rightarrow \infty$ şartlarını sağlayan pozitif tamsayıların artan bir dizisi olarak tanımlanan $\theta=(k_r)$ lacunary dizisi için fuzzy sayı dizilerinin lacunary istatistiksel yakınsaklığını tanımlamıştır.

$X=(X_{jk})$ çift fuzzy sayı dizisi, $X: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow L(\mathbb{R})$ ye tanımlı bir fonksiyon olmak üzere Savaş [9], reel sayıların çift dizileri için Pringsheim anlamındaki yakınsaklık kavramını çift fuzzy sayı dizileri için genişletmiştir. Savaş ve Mursaleen [10], böyle diziler için istatistiksel yakınsaklık ve kuvvetli Cesàro toplanabilirlik kavramlarını tanımlamışlar ve aralarındaki ilişkileri incelemişlerdir.

İstatistiksel yakınsaklık kavramı $0 < \alpha \leq 1$ olacak şekilde herhangi bir α reel sayısı için α . derece için Gadjeiev ve Orhan [11] tarafından çalışılmıştır. Çolak [12], reel ya da kompleks dizilerin α . dereceden istatistiksel yakınsaklığını ve α . dereceden kuvvetli p -Cesàro toplanabilirliğini tanımlayıp bu kavramlar arasındaki kapsama ilişkilerini incelemiştir. Daha sonra, Altınok, Altın ve Işık [13] bu kavramları fuzzy sayı dizileri için çalışmışlardır. Ayrıca, Çolak ve Altın [14] α . dereceden istatistiksel yakınsaklık ve α . dereceden kuvvetli p -Cesàro toplanabilirlik kavramlarını çift diziler için oluşturmuşlardır. Bu kavramlara ilaveten Çolak ve Bektaş [15], α . dereceden λ -istatistiksel yakınsaklık kavramını reel ya da kompleks terimli diziler için tanımlamışlardır. Ayrıca, Altınok [16] fuzzy sayı dizileri için β . dereceden λ -istatistiksel yakınsaklık ve kuvvetli λp -toplanabilirlik kavramlarını tanımlamış ve aralarındaki ilişkileri incelemiştir. Savaş [17] λ -istatistiksel yakınsaklık ve kuvvetli λp -toplanabilirlik kavramlarını çift fuzzy sayı dizileri için çalışmıştır.

Çift dizilerin lacunary istatistiksel yakınsaklığı 2005 yılında, Patterson ve Savaş [18] tarafından çalışılmıştır. Daha sonra Çakan, Altay ve Coşkun [19] çift lacunary yoğunluğu tanımlamışlar ve lacunary istatistiksel yakınsaklığı bu tanımdan yararlanarak ifade etmişlerdir. Ayrıca, Şengül ve Et [20], reel sayı dizileri için α . dereceden lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramını incelemişlerdir.

Bu tez çalışmasında, biz öncelikle $0 < s, t \leq 1$ reel sayılar olmak üzere $\tilde{\alpha} = (s, t)$ için çift fuzzy sayı dizilerinin $\tilde{\alpha}$. dereceden istatistiksel yakınsaklığını, $\tilde{\alpha}$. dereceden istatistiksel çift Cauchy dizisini ve $\tilde{\alpha}$. dereceden kuvvetli p -Cesàro toplanabilirliğini tanımlayacağız. Ayrıca çift fuzzy sayı dizileri için $\tilde{\alpha}$. dereceden $\bar{\lambda}$ -istatistiksel yakınsaklık ve $\tilde{\alpha}$. dereceden lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramlarını oluşturacağız.

1. BÖLÜM

GENEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, ilk olarak çalışmamız için temel teşkil eden tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

1.1. İstatistiksel Yakınsaklık

Reel sayılar için istatistiksel yakınsaklık kavramı ilk olarak Fast [4] tarafından tanımlanmıştır. Schoenberg [21], istatistiksel yakınsaklığın temel özelliklerini vermiş ve bu kavramı toplanabilme metodu olarak incelemiştir.

Uzun yıllar, istatistiksel yakınsaklık, Fridy [22], Šalát [23], Connor [24], Maddox [25], Rath ve Tripathy [26], Fridy ve Orhan [27], Mursaleen [28] gibi bir çok matematikçi tarafından çalışılmıştır ve halen çalışılmaya devam edilmektedir.

Tanım 1.1.1. $K \subset \mathbb{N}$ olmak üzere, $|\{k \leq n : k \in K\}|$ ifadesi K kümesinin n den büyük olmayan elemanlarının sayısını gösterebilir. Bu takdirde, K kümesinin doğal yoğunluğu

$$\delta(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in K\}|$$

şeklinde tanımlanır [29].

Örneğin,

$$K = \{1, 2, \dots\} = \mathbb{N} \text{ için } \delta(K) = 1 \text{ ve } K = \{2, 4, 6, \dots\} \text{ için } \delta(K) = \frac{1}{2}$$

dir.

Eğer $\delta(K) = 0$ ise, K kümesine sıfır yoğunluklu küme denir.

Tanım 1.1.2. $x = (x_k)$ reel ya da kompleks terimli bir dizi olmak üzere, bu dizinin terimleri sıfır yoğunluklu bir küme hariç diğer bütün k lar için bir P özelliğini sağlıyorsa (x_k) dizisi hemen hemen her k için P özelliğini sağlıyor denir ve “h.h.k.” ile gösterilir [22].

Tanım 1.1.3. $x = (x_k)$ reel ya da kompleks terimli bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\} \right| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa yani h.h.k. için

$$|x_k - L| < \varepsilon$$

ise $x = (x_k)$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $S - \lim x = L$ şeklinde gösterilir. Eğer $L = 0$ ise $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel sıfır dizisi denir [4].

İstatistiksel yakınsak dizilerin kümesi S ile; sıfıra istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi S_0 ile gösterilir. Yani,

$$S = \left\{ x = (x_k) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\} \right| = 0 \right\}$$

ve

$$S_0 = \left\{ x = (x_k) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\} \right| = 0 \right\}$$

dir.

Örnek 1.1.1. $x = (x_k)$ dizisi

$$x_k = \begin{cases} k, & k = n^2, \quad n = 1, 2, \dots \\ 0, & k \neq n^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

Bu takdirde $1/2$ den küçük olacak şekilde herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$K = \{k : |x_k - 0| \geq \varepsilon\} = \{1, 4, 9, 16, \dots\}$$

olduğundan $\delta(K) = 0$, yani $S - \lim x = 0$ dir.

Burada, “İstatistiksel yakınsak bir dizi adi anlamda da yakınsak mıdır?” sorusu akla gelebilir. Bunun için öncelikle adi anlamda yakınsaklıktan bahsedelim.

$x = (x_k)$ reel ya da kompleks terimli bir dizi ve $L \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için, dizinin ε - komşuluğu dışında sonlu sayıda terimi bulunuyorsa $x = (x_k)$ dizisi L sayısına yakınsıyor denir.

Farzedelim ki, L nin ε - komşuluğu dışında dizinin sonsuz sayıda elemanı bulunsun ancak böyle elemanlarının sayısı dizinin tüm elemanlarına oranla çok az olsun (yani böyle elemanların doğal yoğunluğu sıfır olsun). Bu ise, istatistiksel yakınsaklık olarak bahsettiğimiz kavrama işaret eder. Yani, $h.h.k$ için $|x_k - L| < \varepsilon$ dir.

Sorumuzun cevabı olarak; tanımlardan anlaşılacağı üzere istatistiksel yakınsak bir dizi yakınsak olmayabilir ancak sonlu sayıdaki bir kümenin doğal yoğunluğu sıfır olacağından yakınsak her dizi istatistiksel yakınsaktır [22].

Teorem 1.1.1. Bir dizi istatistiksel yakınsak ise istatistiksel limiti tektir [22].

Teorem 1.1.2. $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ reel ya da kompleks terimli iki dizi olsun.

$c \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

i. $S - \lim x = L_1$ ise $S - \lim(cx) = cL_1$;

ii. $S - \lim x = L_1$ ve $S - \lim y = L_2$ ise $S - \lim(x + y) = L_1 + L_2$ dir [21].

1.2. İstatistiksel Cauchy Dizisi

İstatistiksel yakınsaklık kavramıyla birlikte Fridy [22], Rath ve Tripathy [26] istatistiksel Cauchy dizileri üzerine çalışmalar yapmışlardır.

Tanım 1.2.1. $x = (x_k)$ reel ya da kompleks terimli bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : |x_k - x_m| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

olacak şekilde bir $m = m(\varepsilon)$ sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir [22].

Teorem 1.2.1. Aşağıdaki önermeler denktir.

- i. x dizisi istatistiksel yakınsak bir dizidir;
- ii. x dizisi istatistiksel Cauchy dizisidir;
- iii. $h.h.k.$ için $x_k = y_k$ olacak şekilde yakınsak bir $y = (y_k)$ dizisi vardır [22].

1.3. Kuvvetli p - Cesàro Toplanabilirlik

Tanım 1.3.1. $x = (x_k)$ reel ya da kompleks terimli bir dizi olsun. Eğer

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = L$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisi L ye Cesàro toplanabilirdir denir.

Cesàro toplanabilir dizilerin kümesi

$$\sigma_1 = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - L) = 0, \text{ en az bir } L \text{ için} \right\}$$

ile gösterilir [30].

Tanım 1.3.2. $x = (x_k)$ reel ya da kompleks terimli bir dizi ve $p > 0$ bir reel sayı olsun.

Eğer

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisi L ye kuvvetli p -Cesàro toplanabilirdir denir.

Kuvvetli p - Cesàro toplanabilir dizilerin kümesi

$$\mathcal{O}_p = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p = 0, \text{ en az bir } L \text{ için} \right\}$$

ile gösterilir [25].

Teorem 1.3.1. $0 < p < \infty$ olsun. Bu takdirde;

- i. Bir L sayısına kuvvetli p -Cesàro toplanabilir olan bir dizi L sayısına aynı zamanda istatistiksel yakınsaktır.
- ii. Bir L sayısına istatistiksel yakınsak olan sınırlı bir dizi L sayısına aynı zamanda kuvvetli p -Cesàro toplanabilirdir [24].

1.4. λ – İstatistiksel Yakınsaklık ve Kuvvetli p - Toplanabilirlik

λ – istatistiksel yakınsaklık ilk olarak Mursaleen [28] tarafından tanımlanmıştır. Ayrıca, Mursaleen bu kavram ile istatistiksel yakınsaklık ve Cesàro toplanabilirlik arasındaki ilişkileri incelemiştir.

$\lambda = (\lambda_n)$ dizisi, pozitif reel sayıların

$$\lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1, \quad \lambda_1 = 1$$

$$\lambda_n \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow \infty)$$

şartlarına sahip azalmayan bir dizisi olsun. Bu şartları sağlayan λ dizilerinin kümesi Λ ile gösterilecektir.

Tanım 1.4.1. $\lambda = (\lambda_n) \in \Lambda$ olsun. $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ olmak üzere, eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \left| \left\{ k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisi L ye λ -istatistiksel yakınsaktır denir ve $S_\lambda - \lim x = L$ şeklinde gösterilir [28].

Bütün λ -istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi S_λ ile gösterilir.

Tanım 1.4.2. Bir $\lambda = (\lambda_n) \in \Lambda$ dizisine karşılık gelen genelleştirilmiş de la Vallée-Poussin ortalaması

$$t_n(x) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} x_k$$

olmak üzere, eğer $n \rightarrow \infty$ iken, $t_n(x) \rightarrow L$ ise $x = (x_k)$ dizisi L sayısına (V, λ) -toplanabilirdir denir [31].

Kuvvetli (V, λ) -toplanabilir dizilerin kümesi

$$[V, \lambda] = \left\{ x = (x_n) : \exists L \in \mathbb{R}, \lim_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |x_k - L| = 0 \right\}$$

ile gösterilir.

Teorem 1.4.1. $\lambda \in \Lambda$ olsun. Bu takdirde

- i. $x_k \rightarrow L[V, \lambda]$ ise $x_k \rightarrow L(S_\lambda)$ ve $[V, \lambda] \subset S_\lambda$ kapsaması kesindir;
- ii. $x \in l_\infty$ ve $x_k \rightarrow L(S_\lambda)$ ise $x_k \rightarrow L[V, \lambda]$ dir;
- iii. $S_\lambda \cap l_\infty = [V, \lambda] \cap l_\infty$ dir [28].

1.5. Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık ve Kuvvetli Lacunary Toplanabilirlik

Freedman, Sember ve Raphael [32] lacunary dizisini tanımlamış ve bu diziler için kuvvetli lacunary toplanabilirlik kavramını vermişlerdir. Daha sonra, Fridy ve Orhan [27] istatistiksel yakınsaklığı lacunary diziler için tanımlayarak lacunary istatistiksel yakınsaklık ile kuvvetli lacunary toplanabilirlik arasındaki ilişkileri incelemişlerdir.

Şimdi, sırasıyla bu tanımları verelim.

Tanım 1.5.1. Pozitif tamsayıların artan bir dizisi $\theta = (k_r)$ olsun. Eğer $k_0 = 0$ olmak üzere $r \rightarrow \infty$ için $h_r = k_r - k_{r-1} \rightarrow \infty$ ise $\theta = (k_r)$ dizisine lacunary dizisi denir.

$\theta = (k_r)$ tarafından belirlenen aralıklar $I_r = (k_{r-1}, k_r]$ ile gösterilmek üzere,

$$\sum_{i=k_{r-1}+1}^{k_r} |x_i| = \sum_{i \in I_r} |x_i|$$

olarak alınacak ve $\frac{k_r}{k_{r-1}}$ oranı q_r ile gösterilecektir [32].

Tanım 1.5.2. $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisi L ye lacunary istatistiksel yakınsaktır denir ve $S_\theta - \lim x = L$ şeklinde gösterilir [27].

Lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi S_θ ile gösterilir yani

$$S_\theta = \left\{ x = (x_k) : \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0 \right\}$$

dir.

Tanım 1.5.3. Herhangi bir $\theta = (k_r)$ lacunary dizisi için

$$\lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - L| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisi L ye kuvvetli lacunary toplanabilirdir denir.

Kuvvetli lacunary toplanabilir dizilerin kümesi

$$N_\theta = \left\{ x = (x_k) : \lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - L| = 0 \right\}$$

ile gösterilir [32].

Teorem 1.5.1. $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizi olsun.

- i. $x_k \rightarrow L(N_\theta)$ ise $x_k \rightarrow L(S_\theta)$;
- ii. $x \in l_\infty$ ve $x_k \rightarrow L(S_\theta)$ ise $x_k \rightarrow L(N_\theta)$;
- iii. $S_\theta \cap l_\infty = N_\theta \cap l_\infty$ dir [27].

2. BÖLÜM

FUZZY KÜMELER VE FUZZY SAYI DİZİLERİ

2.1. Fuzzy Kümeler

Tanım 2.1.1. X herhangi bir küme ve A , X in bir alt kümesi olsun. Bu takdirde,

$$f_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \text{ ise} \\ 0, & x \notin A \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $f_A : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna A kümesinin karakteristik fonksiyonu denir. Buna göre X in bir A alt kümesi, karakteristik fonksiyon yardımıyla

$$A = \{x \in X : f_A(x) = 1\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.2. $\mathcal{X}$, elemanları x ile gösterilmiş bir nesneler kümesi olsun. $\mathcal{X}$ kümesinde bir A fuzzy kümesi, $\mathcal{X}$ deki her bir noktayı $[0,1]$ aralığındaki bir reel sayıya karşılık getiren bir $X_A(x)$ karakteristik fonksiyonu ile karakterize edilir [1]. Bu karakteristik fonksiyon $x \in A$ için $X_A(x) \in (0,1]$ ve $x \notin A$ için $X_A(x) = 0$ olarak tanımlanır. Bu şekilde tanımlanmış karakteristik fonksiyon özel olarak üyelik fonksiyonu adını alır. Böylece, bir A fuzzy kümesi

$$A = \{x \in \mathcal{X} : X_A(x) \in (0,1]\}$$

şeklinde ifade edilebilir [1].

Şimdi klasik kümelerdeki bazı kavramların fuzzy kümeler için tanımlarını verelim.

Tanım 2.1.3. Bir A fuzzy kümesinin boş olması için gerek ve yeter şart üyelik fonksiyonunun $\mathcal{X}$ üzerinde özdeş olarak sıfır olmasıdır [1].

Tanım 2.1.4. A ve B fuzzy kümelerinin eşit olması için gerek ve yeter şart her $x \in \mathcal{X}$ için $X_A(x) = X_B(x)$ olmasıdır [1].

Tanım 2.1.5. Bir A fuzzy kümesinin tümleyeni $X_{A'} = 1 - X_A$ olarak tanımlanır [1].

Tanım 2.1.6. A ve B fuzzy kümeleri olmak üzere, A fuzzy kümesinin B nin alt kümesi olması için gerek ve yeter şart $X_A \leq X_B$ olmasıdır [1].

Tanım 2.1.7. A ve B fuzzy kümelerinin birleşimi

$$X_C(x) = \max[X_A(x), X_B(x)]$$

olan bir C fuzzy kümesidir [1].

Tanım 2.1.8. A ve B fuzzy kümelerinin kesişimi

$$X_D(x) = \min[X_A(x), X_B(x)]$$

olan bir D fuzzy kümesidir [1].

Ayrıca, yukarıda verdiğimiz birleşim, kesişim ve tümleyen tanımlarından yola çıkarak bu işlemlerin klasik kümelerde bildiğimiz bazı özelliklerinin fuzzy kümeler için de sağlandığını gösterelim.

A, B ve C fuzzy kümeler olmak üzere,

i. $(A \cup B)' = A' \cap B',$

ii. $(A \cap B)' = A' \cup B',$

iii. $C \cup (A \cap B) = (C \cup A) \cap (C \cup B),$

iv. $C \cap (A \cup B) = (C \cap A) \cup (C \cap B)$

özellikleri sağlanır. Ancak klasik kümelerde sağlanan $A \cap A' = \emptyset$ ve $A \cup A' = \mathcal{X}$ özellikleri fuzzy kümeler için sağlanmaz.

Yukarıdaki işlemlere ilaveten, fuzzy kümelerinin toplama, çarpma ve mutlak farkı işlemleri de aşağıdaki gibidir.

Tanım 2.1.9. A ve B fuzzy kümelerinin cebirsel çarpımı

$$X_{AB} = X_A X_B$$

şeklinde tanımlanır. Yani, $AB \subset A \cap B$ dir [1].

Tanım 2.1.10. A ve B fuzzy kümelerinin cebirsel toplamı $A+B$,

$$X_{A+B} = X_A + X_B$$

şeklinde tanımlanır. Burada X_{A+B} toplamı 1 e eşit veya 1 den küçüktür [1].

Tanım 2.1.11. A ve B fuzzy kümelerinin mutlak farkı $|A-B|$,

$$X_{|A-B|} = |X_A - X_B|$$

şeklinde tanımlanır [1].

Tanım 2.1.12. Bir A fuzzy kümesinin normal olması için gerek ve yeter şart $X(x_0) = 1$ olacak şekilde en az bir $x_0 \in \mathcal{X}$ olmasıdır [1].

Tanım 2.1.13. A bir fuzzy kümesi ve $\gamma \in (0,1]$ olsun. Bu takdirde,

$$A^\gamma = \{x \in \mathcal{X} : X_A(x) \geq \gamma\}$$

kümesine A fuzzy kümesinin γ -kesimi denir [1].

Tanım 2.1.14. A bir fuzzy kümesi olsun. Bu takdirde,

$$\text{supp}(A) = \{x \in \mathcal{X} : X_A(x) > 0\}$$

kümesine A fuzzy kümesinin desteği denir [1].

Tanım 2.1.15. Bir A fuzzy kümesinin konveks olması için gerek ve yeter şart her $\lambda \in [0,1]$ ve her $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ için

$$X_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{X_A(x_1), X_A(x_2)\}$$

olmasıdır. Burada $X_A(x)$, $\mathcal{X}$ e bağlı bir konveks fonksiyondur [1].

Ayrıca, bir A fuzzy kümesinin konveks olması için gerek ve yeter şart her $\gamma \in (0,1]$ için A^γ kümesinin konveks olmasıdır [1].

2.2. Fuzzy Sayıları

Fuzzy sayılarını tanımlamadan önce reel sayılarda aralık kavramını tanımlayalım.

Tanım 2.2.1. Bütün reel sayıların kümesini $\mathbb{R}$ ile gösterelim.

a ve b iki reel sayı olmak üzere

$$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

şeklinde tanımlanan reel sayı kümesine kapalı bir aralık denir. a ve b aralığın sınırları veya bitim noktalarıdır.

Bir A aralığı, $a \leq x \leq b$ olacak şekildeki x reel sayılarının kümesidir. A aralığının uç noktaları $\underline{A}$ ve $\overline{A}$ ile gösterilir. Yani $A = [\underline{A}, \overline{A}]$ şeklindedir. Ayrıca $a = b$ alınırsa A aralığı bir reel sayıya indirgenir. Burada elde edilen $a = [a, a]$ kümesine tek nokta kümesi denir.

Bir A aralığı için genişlik, büyüklük, yansıma ve tersi kavramları aşağıdaki gibi tanımlanır.

Genişlik : $W(A) = \bar{A} - \underline{A}$

Büyüklik: $|A| = \max(|\underline{A}|, |\bar{A}|)$

$$= \begin{cases} |\underline{A}|, & |\underline{A}| \geq |\bar{A}| \\ |\bar{A}|, & |\underline{A}| \leq |\bar{A}| \end{cases}$$

Yansıma : $A^- = [\underline{A}, \bar{A}]^- = [-\bar{A}, -\underline{A}]$

Ters : $A^{-1} = [\underline{A}, \bar{A}]^{-1} = \left[\frac{1}{\bar{A}}, \frac{1}{\underline{A}} \right], \quad 0 \notin [\underline{A}, \bar{A}]$

Örnek 2.2.1. $A = [3, 6]$ aralığı için,

Genişlik : $W(A) = 6 - 3 = 3$

Büyüklik: $|A| = \max(|3|, |6|) = 6$

Yansıma : $A^- = [3, 6]^- = [-6, -3]$

Ters : $A^{-1} = [3, 6]^{-1} = \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{3} \right]$

dir.

$A = [\underline{A}, \bar{A}]$ ve $B = [\underline{B}, \bar{B}]$ olmak üzere, reel sayılar için tanımlanmış olan " $\leq$ " ve "<" sıralama bağıntılarını aralıklar için genişletebiliriz. Buna göre,

$$A \leq B \Leftrightarrow \underline{A} \leq \underline{B} \text{ ve } \bar{A} \leq \bar{B}$$

ve

$$A < B \Leftrightarrow \underline{A} < \underline{B} \text{ ve } \bar{A} < \bar{B}$$

dir.

Ayrıca, A ve B aralıkları için aritmetik işlemler aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\textbf{Toplama: } A + B = [\underline{A}, \overline{A}] + [\underline{B}, \overline{B}] = [\underline{A} + \underline{B}, \overline{A} + \overline{B}]$$

$$\textbf{Çıkarma: } A - B = [\underline{A}, \overline{A}] - [\underline{B}, \overline{B}] = [\underline{A} - \overline{B}, \overline{A} - \underline{B}]$$

$$\textbf{Çarpma: } A \cdot B = [\underline{A}, \overline{A}] \cdot [\underline{B}, \overline{B}]$$

$$= [\min(\underline{A} \cdot \underline{B}, \overline{A} \cdot \overline{B}, \underline{A} \cdot \overline{B}, \overline{A} \cdot \underline{B}), \max(\underline{A} \cdot \underline{B}, \overline{A} \cdot \overline{B}, \underline{A} \cdot \overline{B}, \overline{A} \cdot \underline{B})]$$

$$\textbf{Bölme: } A : B = [\underline{A}, \overline{A}] : [\underline{B}, \overline{B}] = [\underline{A}, \overline{A}] \cdot \left[\frac{1}{\overline{B}}, \frac{1}{\underline{B}} \right], \quad 0 \notin [\underline{B}, \overline{B}]$$

Reel sayı doğrusu üzerindeki bütün kapalı ve sınırlı A aralıklarının kümesi D ile gösterilsin. $A, B \in D$ için

$$d(A, B) = \max(|\underline{A} - \underline{B}|, |\overline{A} - \overline{B}|)$$

şeklinde tanımlanmış bir d fonksiyonu D üzerinde bir metrik tanımlar ve (D, d) tam metrik uzaydır [33].

Tanım 2.2.2. Bir fuzzy sayısı aşağıdaki şartları sağlayan bir $X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonudur:

- i) X normaldir, yani $X(x_0) = 1$ olacak şekilde bir $x_0 \in \mathbb{R}$ vardır;
- ii) X fuzzy konvektir, yani herhangi bir $x, y \in \mathbb{R}$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ için

$$X(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{X(x), X(y)\}$$

dir;

- iii) X üst- yarı süreklidir;

- iv) $X^0 = \{x \in \mathbb{R} : X(x) > 0\}$ kümesinin kapanışı kompaktır .

Tüm fuzzy sayılarının kümesi $L(\mathbb{R})$ ile gösterilir. $X \in L(\mathbb{R})$ kümesinin γ -kesim kümesi

$$X^\gamma = \{x \in \mathbb{R} : X(x) > \gamma\}$$

şeklinde tanımlanır.

$\gamma \in [0,1]$ olmak üzere, $X, Y \in L(\mathbb{R})$ için γ -kesim kümeleri sırasıyla $X^\gamma = [\underline{X}^\gamma, \overline{X}^\gamma]$ ve $Y^\gamma = [\underline{Y}^\gamma, \overline{Y}^\gamma]$ olsun. $k \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere, X ve Y fuzzy sayıları için toplama, çıkarma ve skalerle çarpma özellikleri aşağıdaki gibidir:

$$[X + Y]^\gamma = [\underline{X}^\gamma + \underline{Y}^\gamma, \overline{X}^\gamma + \overline{Y}^\gamma]$$

$$[X - Y]^\gamma = [\underline{X}^\gamma - \overline{Y}^\gamma, \overline{X}^\gamma - \underline{Y}^\gamma]$$

$$k \cdot X^\gamma = [k \cdot \underline{X}^\gamma, k \cdot \overline{X}^\gamma]$$

Her bir reel sayı kendi karakteristik fonksiyonu ile gösterilebilir. Ayrıca her karakteristik fonksiyon bir fuzzy sayısı olduğundan dolayı reel sayılar kümesi fuzzy sayılar kümesinin bir alt kümesidir ve fuzzy sayıları için geçerli olan tüm özellikler reel sayılar için de geçerlidir.

Örneğin; $5 \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\overline{5} \in L(\mathbb{R})$ fuzzy sayısı

$$\overline{5}(x) = \begin{cases} 1, & x=5 \text{ ise} \\ 0, & x \neq 5 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Fuzzy sayıları için sıralama bağıntısı

$$X \leq Y \Leftrightarrow \forall \gamma \in [0,1] \text{ için } \underline{X}^\gamma \leq \underline{Y}^\gamma \text{ ve } \overline{X}^\gamma \leq \overline{Y}^\gamma$$

dir. Bu " $\leq$ " bağıntısı bir kısmi sıralama bağıntısıdır.

Kesin küçüklük bağıntısı ise

$$X < Y \Leftrightarrow \forall \gamma \in [0,1] \text{ için, } \underline{X}^\gamma < \underline{Y}^\gamma \text{ ve } \overline{X}^\gamma < \overline{Y}^\gamma$$

şeklindedir [34].

$L(\mathbb{R})$ üzerinde Hausdorff metriği olarak bilinen metrik,

$$d(X^\gamma, Y^\gamma) = \max\left(\left|\underline{X}^\gamma - \underline{Y}^\gamma\right|, \left|\overline{X}^\gamma - \overline{Y}^\gamma\right|\right)$$

olmak üzere

$$\bar{d} : L(\mathbb{R}) \times L(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\bar{d}(X, Y) = \sup_{0 \leq \gamma \leq 1} d(X^\gamma, Y^\gamma)$$

şeklinde tanımlanır ve $(L(\mathbb{R}), \bar{d})$ tam metrik uzaydır [35].

$\mathbb{R}^n$, n-boyutlu Öklid uzayını göstermek üzere $C(\mathbb{R}^n)$ uzayını aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$C(\mathbb{R}^n) = \{A \subset \mathbb{R}^n : A \text{ kompakt ve konveks}\}.$$

Bu uzay, $A, B \in C(\mathbb{R}^n)$ ve $\lambda \in \mathbb{R}^n$ için

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

ve

$$\lambda A = \{\lambda a : a \in A\}$$

operatörleri ile lineer yapıya sahiptir.

$A, B \in C(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere bu uzay için Hausdorff metriği ise

$$\delta_{\infty}(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \|a - b\|, \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} \|a - b\| \right\}$$

şeklinde tanımlanır. $(C(\mathbb{R}^n), \delta_{\infty})$ tam metrik uzaydır.

Bir fuzzy sayısı n -boyut için aşağıdaki biçimde genelleştirilebilir.

Tanım 2.2.3. Bir X fuzzy sayısı aşağıda verilen özellikleri sağlayan bir $X : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ fonksiyondur:

- i. X normaldir, yani, $X(x_0) = 1$ olacak şekilde bir $x_0 \in \mathbb{R}^n$ vardır,
- ii. X fuzzy konvektir; yani her $x, y \in \mathbb{R}^n$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ için

$$X(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{X(x), X(y)\}$$

dir,

- iii. X üst-yarı süreklidir,

- iv. $\{x \in \mathbb{R}^n : X(x) > 0\}$ in kapanışı kompakttır [36].

Bütün n -boyutlu fuzzy sayılarının kümesi $L(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir. $L(\mathbb{R}^n)$ için, $X + Y$ toplama ve λX skalerle çarpma işlemleri, $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $0 \leq \gamma \leq 1$ olmak üzere γ -kesimi ile aşağıdaki gibi oluşturulur:

$$[X + Y]^{\gamma} = [X]^{\gamma} + [Y]^{\gamma}$$

ve

$$[\lambda X]^{\gamma} = \lambda[X]^{\gamma}$$

dir.

Ayrıca, $1 \leq q < \infty$ için

$$d_q(X, Y) = \left(\int_0^1 \delta_\infty(X^\gamma, Y^\gamma)^q d_\gamma \right)^{\frac{1}{q}}$$

ve

$$d_\infty = \sup_{0 \leq \gamma \leq 1} \delta_\infty(X^\gamma, Y^\gamma)$$

metriklerini tanımlayalım.

$q \leq r$ olmak üzere $d_q \leq d_r$ iken $d_\infty(X, Y) = \lim_{q \rightarrow \infty} d_q(X, Y)$ dir .

Kolaylık için, $1 \leq q < \infty$ olmak üzere d_q ifadesi d ile gösterilir.

2.3. Fuzzy Sayı Dizileri

Fuzzy sayılarının bir $X = (X_k)$ dizisi, doğal sayılar kümesinden $L(\mathbb{R}^n)$ içine tanımlı bir X fonksiyonudur. Bu durumda her bir k pozitif tamsayısına bir $X(k)$ fuzzy sayısı karşılık gelir. Bundan sonraki bölümlerde $X(k)$ yerine X_k yazacağız [3].

Tanım 2.3.1. $X_0 \in L(\mathbb{R}^n)$ ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Buna göre X_0 fuzzy sayısının ε - komşuluğu $d(X, X_0) < \varepsilon$ olacak şekilde bütün X fuzzy sayılarının kümesidir. Bir X_0 fuzzy sayısının ε - komşuluğu $K(X_0, \varepsilon)$ ile gösterilir [3].

Tanım 2.3.2. $X = (X_k)$ bir fuzzy sayı dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için $k > N$ iken $d(X_k, X_0) < \varepsilon$ olacak şekilde bir N sayısı mevcut ise (X_k) dizisi yakınsaktır ve limiti X_0 dir denir. Bu durumda $\lim_{k \rightarrow \infty} X_k = X_0$ yazılır.

Bütün yakınsak fuzzy sayı dizilerinin kümesi $c(F)$ ile gösterilir [3].

Teorem 2.3.1. Yakınsak bir $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisinin limiti tektir [3].

Teorem 2.3.2. $X = (X_k)$ ve $Y = (Y_k)$ fuzzy sayı dizilerinin limitleri sırasıyla X_0 ve Y_0 olsun. Bu takdirde

- i. $\lim_{k \rightarrow \infty} (X_k + Y_k) = X_0 + Y_0$;
- ii. $\lim_{k \rightarrow \infty} (X_k - Y_k) = X_0 - Y_0$;
- iii. $\lim_{k \rightarrow \infty} (X_k \cdot Y_k) = X_0 \cdot Y_0$;
- iv. $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{X_k}{Y_k} \right) = \frac{X_0}{Y_0}$ (Bütün k lar için $0 \notin \text{supp} Y_k$ ve $0 \notin \text{supp} Y_0$)

dir [3].

Tanım 2.3.3. Her $\varepsilon > 0$ için $k, m > N$ olduğunda $d(X_k, X_m) < \varepsilon$ olacak şekilde pozitif bir N tamsayısı mevcut ise $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisine bir Cauchy dizisi denir [3].

Tanım 2.3.4. Her $k \in \mathbb{N}$ için $L \leq X_k \leq U$ olacak şekilde L ve U fuzzy sayıları mevcut ise $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisine sınırlıdır denir [3].

Bütün sınırlı fuzzy sayı dizilerinin kümesi $\ell_\infty(F)$ ile gösterilir.

Teorem 2.3.3. Yakınsak her fuzzy sayı dizisi sınırlıdır [3].

Tanım 2.3.5. $X = (X_k)$ bir fuzzy sayı dizisi ve $\{k_n\}$ doğal sayıların artan bir dizisi olsun. Bu durumda (X_{k_n}) dizisine $X = (X_k)$ dizisinin bir alt dizisi denir [3].

Teorem 2.3.4. Yakınsak bir $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisinin her alt dizisi de yakınsaktır ve her iki dizinin limiti aynıdır [3].

2.4. Fuzzy Sayı Dizilerinin İstatistiksel Yakınsaklığı ve Kuvvetli Cesàro Toplanabilirliği

Tanım 2.4.1. $X = (X_k)$ fuzzy sayılarının bir dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : d(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise, $X = (X_k)$ dizisi X_0 fuzzy sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $S - \lim X_k = X_0$ yazılır.

Bütün istatistiksel yakınsak fuzzy sayı dizilerinin kümesi $S(F)$ ile gösterilir [5].

Özel olarak $X_0 = \bar{0}$ alınırsa $S(F)$ yerine $S_0(F)$ yazılır. Ayrıca sonlu bir kümenin doğal yoğunluğu sıfır olduğundan yakınsak bir fuzzy sayı dizisi istatistiksel yakınsaktır yani $c(F) \subset S(F)$ dir, ancak istatistiksel yakınsak bir fuzzy sayı dizisinin yakınsak olması gerekmez.

Örnek 2.4.1. $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$X_k(x) = \begin{cases} \begin{cases} x-2, & 2 \leq x \leq 3 \text{ ise} \\ -x+4, & 3 \leq x \leq 4 \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumda} \end{cases} & , \quad k = m^3 \text{ ise} \\ \begin{cases} x-5, & 5 \leq x \leq 6 \text{ ise} \\ -x+7, & 6 \leq x \leq 7 \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumda} \end{cases} & , \quad k \neq m^3 \text{ ise} \end{cases}$$

olsun.

$$X_0(x) = \begin{cases} x-5, & 5 \leq x \leq 6 \text{ ise} \\ -x+7, & 6 \leq x \leq 7 \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

olmak üzere,

$X = (X_k)$ dizisinin γ – kesim kümesi

$$[X_k]^\gamma = \begin{cases} [\gamma+2, 4-\gamma], & k = m^3 \text{ ise} \\ [\gamma+5, 7-\gamma], & k \neq m^3 \text{ ise} \end{cases}$$

dir.

$[X_0]^\gamma = [\gamma+5, 7-\gamma]$ olmak üzere

$$\lim_n \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : d([X_k]^\gamma, [X_0]^\gamma) \geq \varepsilon \right\} \right| \leq \lim_n \frac{\sqrt[3]{n}}{n} = 0$$

dir.

Böylece $X = (X_k)$ dizisi X_0 fuzzy sayısına istatistiksel yakınsaktır ancak $\{k \leq n : d(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}$ kümesi sonlu olmadığından dolayı $X = (X_k)$ dizisi yakınsak değildir.

Tanım 2.4.2. $X = (X_k)$ fuzzy sayılarının bir dizisi olmak üzere eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : d(X_k, X_m) \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

olacak şekilde bir $m = m(\varepsilon)$ sayısı varsa, bu durumda $X = (X_k)$ dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir [5].

Tanım 2.4.3. $X = (X_k)$ fuzzy sayılarının bir dizisi olsun. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n d(X_k, X_0) = 0$$

olacak şekilde bir X_0 fuzzy sayısı varsa $X = (X_k)$ dizisi X_0 fuzzy sayısına kuvvetli Cesàro toplanabilirdir denir.

Bütün kuvvetli Cesàro toplanabilir fuzzy sayı dizilerinin kümesi $\omega(F)$ ile gösterilir [6].

2.5. Fuzzy Sayı Dizilerinin β . Dereceden İstatistiksel Yakınsaklığı ve β . Dereceden Kuvvetli p - Cesàro Toplanabilirliği

Tanım 2.5.1. $X = (X_k)$ fuzzy sayılarının bir dizisi ve $\beta \in (0,1]$ bir reel sayı olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n^\beta} |\{k \leq n : d(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise, $X = (X_k)$ dizisi X_0 fuzzy sayısına β . dereceden istatistiksel yakınsaktır denir ve $S^\beta(F) - \lim X_k = X_0$ yazılır.

Bütün β . dereceden istatistiksel yakınsak fuzzy sayılarının kümesi $S^\beta(F)$ ile gösterilir [13].

Tanım 2.5.2. $X = (X_k)$ fuzzy sayılarının bir dizisi ve $0 < p < \infty$ olsun. $\beta \in (0,1]$ olmak üzere eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\beta} \sum_{k=1}^n [d(X_k, X_0)]^p = 0$$

olacak şekilde bir X_0 fuzzy sayısı varsa $X = (X_k)$ dizisi X_0 fuzzy sayısına β . dereceden kuvvetli p - Cesàro toplanabilirdir denir.

Bütün β . dereceden kuvvetli p - Cesàro toplanabilir fuzzy sayı dizilerinin kümesi $\omega^\beta(F, p)$ ile gösterilir [13].

2.6. Fuzzy Sayı Dizilerinin λ - İstatistiksel Yakınsaklığı ve Kuvvetli λ - Toplanabilirliği

Tanım 2.6.1. $X = (X_k)$ bir fuzzy sayı dizisi ve $\lambda = (\lambda_n) \in \Lambda$ olsun.

$I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ olmak üzere, eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : d(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $X = (X_k)$ dizisi X_0 fuzzy sayısına λ -istatistiksel yakınsaktır denir ve $S_\lambda - \lim X_k = X_0$ ile gösterilir [7].

Tanım 2.6.2. $X = (X_k)$ bir fuzzy sayı dizisi ve $\lambda = (\lambda_n) \in \Lambda$ olsun.

Eğer

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} d(X_k, X_0) = 0$$

olacak şekilde bir X_0 fuzzy sayısı varsa $X = (X_k)$ dizisi X_0 fuzzy sayısına kuvvetli λ -toplanabilirdir denir [7].

2.7. Fuzzy Sayı Dizilerinin β . Dereceden λ -İstatistiksel Yakınsaklığı ve β . Dereceden Kuvvetli λ_p -Toplanabilirliği

Tanım 2.7.1. $X = (X_k)$ bir fuzzy sayı dizisi ve $\lambda = (\lambda_n) \in \Lambda$ olsun. $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ olmak üzere $\beta \in (0, 1]$ reel sayısı ve her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n^\beta} |\{k \in I_n : d(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $X = (X_k)$ dizisi X_0 fuzzy sayısına β . dereceden λ -istatistiksel yakınsaktır denir ve $S_\lambda^\beta - \lim X_k = X_0$ ile gösterilir [16].

Tanım 2.7.2. $X = (X_k)$ bir fuzzy sayı dizisi ve $\lambda = (\lambda_n) \in \Lambda$ olsun. $0 < p < \infty$ ve $\beta \in (0, 1]$ olmak üzere eğer

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n^\beta} \sum_{k \in I_n} [d(X_k, X_0)]^p = 0$$

olacak şekilde bir X_0 fuzzy sayısı varsa $X = (X_k)$ dizisi X_0 fuzzy sayısına β . dereceden kuvvetli λp – toplanabilirdir denir [16].

2.8. Fuzzy Sayı Dizilerinin Lacunary İstatistiksel Yakınsaklığı

Tanım 2.8.1. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : d(X_k, X_0) \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

olacak şekilde bir X_0 fuzzy sayısı varsa $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi X_0 fuzzy sayısına lacunary istatistiksel yakınsaktır denir ve $S_\theta - \lim X = X_0$ şeklinde gösterilir.

Bütün lacunary istatistiksel yakınsak fuzzy sayı dizilerinin kümesi $S_\theta(F)$ ile gösterilir [8].

2.9. Çift Fuzzy Sayı Dizileri

Tanım 2.9.1. $X = (X_{jk})$ çift fuzzy sayı dizisi, $X : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow L(\mathbb{R})$ ye tanımlı bir fonksiyondur. $(j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ noktasındaki fonksiyonun değeri $X(j, k) = X_{jk}$ ile gösterilir ve çift dizinin (j, k) . terimi olarak ifade edilir [9].

Tanım 2.9.2. $X = (X_{jk})$ çift fuzzy sayı dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için, $j, k \geq N$ iken $d(X_{jk}, L) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ varsa bu dizi Pringsheim anlamında yakınsaktır veya L ye P-yakınsaktır denir, $P - \lim X = L$ şeklinde gösterilir.

Bütün P-yakınsak çift fuzzy sayı dizilerinin kümesi $c_2(F)$ ile gösterilir [9].

Tanım 2.9.3. $X = (X_{jk})$ çift fuzzy sayı dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için, $p \geq j \geq N$ ve $q \geq k \geq N$ olmak üzere $d(X_{pq}, X_{jk}) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ varsa $X = (X_{jk})$ çift dizisine çift Cauchy dizisi denir [10].

Tanım 2.9.4. $X = (X_{jk})$ çift fuzzy sayı dizisi olmak üzere eğer her j ve k için $d(X_{jk}, 0) < M$ olacak şekilde pozitif bir M sayısı varsa yani

$$\|X\|_{(\infty, 2)} = \sup_{j, k} d(X_{jk}, 0) < \infty$$

ise $X = (X_{jk})$ dizisi sınırlıdır denir.

Bütün sınırlı çift fuzzy sayı dizilerinin kümesi $\ell_{\infty}^2(F)$ ile gösterilir [10].

Tanım 2.9.5. $X = (X_{jk})$ çift fuzzy sayı dizisi ve X_0 bir fuzzy sayısı olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \frac{1}{nm} \left| \{(j, k); j \leq n, k \leq m : d(X_{jk}, X_0) \geq \varepsilon\} \right| = 0$$

ise $X = (X_{jk})$ dizisi X_0 fuzzy sayısına istatistiksel yakınsaktır denir.

Bütün istatistiksel yakınsak çift fuzzy sayı dizilerinin kümesi $S_2(F)$ ile gösterilir [10].

$X = (X_{jk})$ çift fuzzy sayı dizisi X_0 fuzzy sayısına yakınsak ise aynı sayıya istatistiksel yakınsaktır. Ancak istatistiksel yakınsak bir çift fuzzy sayı dizisinin yakınsak olması gerekmez.

Teorem 2.9.1. Yakınsak bir çift fuzzy sayı dizisinin limiti tektir [10].

Tanım 2.9.6. $X = (X_{jk})$ çift fuzzy sayı dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \frac{1}{nm} \left| \{(j, k); j \leq n, k \leq m : d(X_{jk}, X_{NM}) \geq \varepsilon\} \right| = 0$$

olacak şekilde $N = N(\varepsilon)$ ve $M = M(\varepsilon)$ doğal sayıları varsa $X = (X_{jk})$ çift dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir [10].

Teorem 2.9.2. $X = (X_{jk})$ çift fuzzy sayı dizisi olmak üzere aşağıdaki önermeler denktir:

- i. $X = (X_{jk})$ dizisi X_0 fuzzy sayısına istatistiksel yakınsaktır;
- ii. $X = (X_{jk})$ dizisi istatistiksel Cauchy dizisidir;
- iii. $\delta_2(K) = 1$ ve $\lim_i X_{j_i k_i} = 1$ olacak şekilde bir $K = \{(j_i, k_i)\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $i = 1, 2, 3, \dots$

kümesi vardır [10].

Tanım 2.9.7. $X = (X_{jk})$ çift fuzzy sayı dizisi ve p pozitif bir reel sayı olsun. Eğer,

$$\lim_{n,m} \frac{1}{nm} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m [d(X_{jk}, X_0)]^p = 0$$

olacak şekilde bir X_0 fuzzy sayısı varsa $X = (X_{jk})$ dizisi X_0 a kuvvetli p -Cesàro toplanabilirdir denir.

Bütün kuvvetli p -Cesàro toplanabilir çift fuzzy sayı dizilerinin kümesi $w_p^2(F)$ ile gösterilir [10].

Teorem 2.9.3. p pozitif bir reel sayı ve $X = (X_{jk})$ çift fuzzy sayı dizisi olsun.

- i. $X = (X_{jk})$ dizisi X_0 fuzzy sayısına kuvvetli p -Cesàro toplanabilir ise X_0 sayısına istatistiksel yakınsaktır;
- ii. $X = (X_{jk})$ dizisi sınırlı ve X_0 fuzzy sayısına istatistiksel yakınsak ise, bu dizi X_0 fuzzy sayısına kuvvetli p -Cesàro toplanabilirdir [10].

3. BÖLÜM

ÇİFT FUZZY SAYI DİZİLERİNİN $\tilde{\alpha}$. DERECEDEDEN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI VE $\tilde{\alpha}$. DERECEDEDEN KUVVETLİ p - CESÀRO TOPLANABİLİRLİĞİ

Biz, bu bölümde öncelikle $0 < s, t \leq 1$ reel sayılar olmak üzere $\tilde{\alpha} = (s, t)$ için çift fuzzy sayı dizilerinin $\tilde{\alpha}$. dereceden istatistiksel yakınsaklığını ve $\tilde{\alpha}$. dereceden istatistiksel çift Cauchy dizisini tanımlayacağız. Daha sonra, çift fuzzy sayı dizileri için $\tilde{\alpha}$. dereceden kuvvetli p -Cesàro toplanabilirliği tanımlayıp, bu kavramlar arasındaki kapsama ilişkilerini göstereceğiz.

3.1. Çift Fuzzy Sayı Dizilerinin $\tilde{\alpha}$. Dereceden İstatistiksel Yakınsaklığı

Tanımları vermeden önce bize kolaylık sağlayacağını düşündüğümüz bazı kısaltmalar verelim.

$s, t, u, v \in (0, 1]$ olmak üzere (s, t) ikilisini $\tilde{\alpha}$ ile ; (u, v) ikilisini $\tilde{\beta}$ ile gösterelim.

Buna göre

$$\tilde{\alpha} \preceq \tilde{\beta} \Leftrightarrow s \leq u \text{ ve } t \leq v,$$

$$\tilde{\alpha} \prec \tilde{\beta} \Leftrightarrow s < u \text{ ve } t < v,$$

$$\tilde{\alpha} \cong \tilde{\beta} \Leftrightarrow s = u \text{ ve } t = v,$$

$$\tilde{\alpha} \in (0, 1] \Leftrightarrow s, t \in (0, 1],$$

$$\tilde{\beta} \in (0, 1] \Leftrightarrow u, v \in (0, 1],$$

$$\tilde{\alpha} \cong 1 \Leftrightarrow s = t = 1,$$

$$\tilde{\beta} \cong 1 \Leftrightarrow u = v = 1,$$

$$\tilde{\alpha} > 1 \Leftrightarrow s > 1 \text{ ve } t > 1$$

dir [14].

Öncelikle çift istatistiksel yakınsaklık kavramı için temel teşkil eden çift doğal yoğunluk kavramından bahsedelim.

Tanım 3.1.1. $K \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pozitif tam sayıların iki boyutlu bir kümesi olsun. $j \leq n$ ve $k \leq m$ olacak şekilde K da (j, k) nin sayıları $K(n, m)$ ile gösterilsin. $0 < s, t \leq 1$ olmak üzere, eğer

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \frac{K(n, m)}{n^s m^t}$$

limiti Pringsheim anlamında mevcutsa, K kümesi $\tilde{\alpha}$. dereceden çift doğal yoğunluğa sahiptir denir ve $\delta_2^{\tilde{\alpha}}(K)$ ile gösterilir [37].

Örneğin $K = \{(j^3, k^3) : j, k \in \mathbb{N}\}$ olsun. $\tilde{\alpha} \in (1/3, 1]$ için

$$\delta_2^{\tilde{\alpha}}(K) = \lim_{n, m \rightarrow \infty} \frac{K(n, m)}{n^s m^t} \leq \lim_{n, m \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n} \sqrt[3]{m}}{n^s m^t} = 0$$

dir. Yani K kümesi $\tilde{\alpha}$. dereceden çift sıfır doğal yoğunluğa sahiptir.

Tanım 3.1.2. $X = (X_{jk})$ bir çift fuzzy sayı dizisi ve $\tilde{\alpha} \in (0, 1]$ herhangi bir reel sayı olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \frac{1}{n^s m^t} \left| \{(j, k); j \leq n, k \leq m : d(X_{jk}, X_0) \geq \varepsilon\} \right| = 0$$

ise $X = (X_{jk})$ dizisi, X_0 fuzzy sayısına $\tilde{\alpha}$. dereceden istatistiksel yakınsaktır diyeceğiz ve $S_2^{\tilde{\alpha}} - \lim X_{jk} = X_0$ yazacağız.

Bütün $\tilde{\alpha}$. dereceden istatistiksel yakınsak çift fuzzy sayı dizilerinin kümesini $S_2^{\tilde{\alpha}}(F)$ ile göstereceğiz.

$X = (X_{jk})$ çift dizisi X_0 fuzzy sayısına yakınsak ise bu dizi her bir $\tilde{\alpha} \in (0, 1]$ için aynı fuzzy sayısına $\tilde{\alpha}$. dereceden istatistiksel yakınsaktır ancak tersi doğru değildir. Bunu göstermek için aşağıdaki örneği verelim.

Örnek 3.1.1. $X = (X_{jk})$ bir çift fuzzy sayı dizisi olmak üzere, eğer $j = n^3$ ve $k = m^3$ ise

$$X_{jk}(x) = \begin{cases} 0 & , x \in (-\infty, jk) \cup (jk+2, \infty) \text{ ise} \\ x - (jk) & , x \in [jk, jk+1] \text{ ise} \\ -x + (jk+2) & , x \in [jk+1, jk+2] \text{ ise} \end{cases}$$

olsun. Diğer durumlarda

$$X_0(x) = \begin{cases} 0 & , x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty) \text{ ise} \\ x - 1 & , x \in [1, 2] \text{ ise} \\ -x + 3 & , x \in (2, 3] \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere $(X_{jk}) = X_0$ olsun.

$X = (X_{jk})$ dizisinin γ - kesim kümesi

$$[X_{jk}]^\gamma = \begin{cases} [\gamma + jk, (jk+2) - \gamma], & j = n^3, k = m^3 \text{ ise} \\ [\gamma + 1, 3 - \gamma], & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

dir.

$[X_0]^\gamma = [\gamma + 1, 3 - \gamma]$ olmak üzere $X = (X_{jk})$ dizisi X_0 fuzzy sayısına $\tilde{\alpha} \in (1/3, 1]$ için $\tilde{\alpha}$. dereceden istatistiksel yakınsaktır ancak yakınsak değildir.

Teorem 3.1.1. $\tilde{\alpha} \in (0, 1]$, $X = (X_{jk})$ ve $Y = (Y_{jk})$ çift fuzzy sayı dizileri olsun. Bu takdirde;

i. Eğer $S_2^{\tilde{\alpha}} - \lim X_{jk} = X_0$ ve $c \in \mathbb{C}$ ise $S_2^{\tilde{\alpha}} - \lim cX_{jk} = cX_0$,

ii. Eğer $S_2^{\tilde{\alpha}} - \lim X_{jk} = X_0$ ve $S_2^{\tilde{\alpha}} - \lim Y_{jk} = Y_0$ ise $S_2^{\tilde{\alpha}} - \lim (X_{jk} + Y_{jk}) = X_0 + Y_0$ dir.

İspat.

i. $\tilde{\alpha} \in (0,1]$, $c \in \mathbb{R}$ ve $\varepsilon > 0$ alalım. X_{jk} , Y_{jk} , X_0 ve Y_0 kümelerinin γ -kesim kümeleri sırasıyla X_{jk}^γ , Y_{jk}^γ , X_0^γ ve Y_0^γ olsun.

$$\mathcal{D}_\infty(cX_{jk}^\gamma, cX_0^\gamma) = |c| \mathcal{D}_\infty(X_{jk}^\gamma, X_0^\gamma)$$

olduğundan

$$d(cX_{jk}^\gamma, cX_0^\gamma) = |c| d(X_{jk}^\gamma, X_0^\gamma)$$

yazabiliriz. Buradan

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n^s m^t} \left| \left\{ (j, k); j \leq n, k \leq m : d(cX_{jk}^\gamma, cX_0^\gamma) \geq \varepsilon \right\} \right| \\ & \leq \frac{1}{n^s m^t} \left| \left\{ (j, k); j \leq n, k \leq m : d(X_{jk}^\gamma, X_0^\gamma) \geq \frac{\varepsilon}{|c|} \right\} \right| \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. $S_2^{\tilde{\alpha}} - \lim X_{jk} = X_0$ olduğundan $S_2^{\tilde{\alpha}} - \lim cX_{jk} = cX_0$ dir.

$$\begin{aligned} \text{ii. } \mathcal{D}_\infty(X_{jk}^\gamma + Y_{jk}^\gamma, X_0^\gamma + Y_0^\gamma) & \leq \mathcal{D}_\infty(X_{jk}^\gamma + Y_{jk}^\gamma, Y_{jk}^\gamma + X_0^\gamma) + \mathcal{D}_\infty(Y_{jk}^\gamma + X_0^\gamma, X_0^\gamma + Y_0^\gamma) \\ & = \mathcal{D}_\infty(X_{jk}^\gamma, X_0^\gamma) + \mathcal{D}_\infty(Y_{jk}^\gamma, Y_0^\gamma) \end{aligned}$$

olduğundan

$$d(X_{jk} + Y_{jk}, X_0 + Y_0) \leq d(X_{jk}, X_0) + d(Y_{jk}, Y_0)$$

dir. Böylece,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n^s m^t} \left| \left\{ (j, k); j \leq n, k \leq m : d(X_{jk} + Y_{jk}, X_0 + Y_0) \geq \varepsilon \right\} \right| \\ & \leq \frac{1}{n^s m^t} \left| \left\{ (j, k); j \leq n, k \leq m : d(X_{jk}, X_0) + d(Y_{jk}, Y_0) \geq \varepsilon \right\} \right| \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{n^s m^t} \left| \left\{ (j, k); j \leq n, k \leq m : d(X_{jk}, X_0) \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right|$$

$$+ \frac{1}{n^s m^t} \left| \left\{ (j, k); j \leq n, k \leq m : d(Y_{jk}, Y_0) \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right|$$

olduğundan ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.2. $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in (0, 1]$ olmak üzere $\tilde{\alpha} \preceq \tilde{\beta}$ ise

$$S_2^{\tilde{\alpha}}(F) \subseteq S_2^{\tilde{\beta}}(F)$$

dir ve $\tilde{\alpha} < \tilde{\beta}$ olacak şekilde bazı $\tilde{\alpha}$ ve $\tilde{\beta}$ için kapsama kesindir.

İspat.

$\tilde{\alpha} \preceq \tilde{\beta} \Leftrightarrow s \leq u$ ve $t \leq v$ olduğundan, her $\varepsilon > 0$ için

$$\frac{1}{n^u m^v} \left| \left\{ (j, k); j \leq n, k \leq m : d(X_{jk}, X_0) \geq \varepsilon \right\} \right|$$

$$\leq \frac{1}{n^s m^t} \left| \left\{ (j, k); j \leq n, k \leq m : d(X_{jk}, X_0) \geq \varepsilon \right\} \right|$$

dir. Bu eşitsizlikten $S_2^{\tilde{\alpha}}(F) \subseteq S_2^{\tilde{\beta}}(F)$ olduğunu kolaylıkla görürüz.

Kapsamanın kesin olduğunu göstermek için Örnek 3.1.1 deki $X = (X_{jk})$ dizisini ele alalım. $\tilde{\beta} \in (1/3, 1]$ için $X = (X_{jk})$ dizisi X_0 fuzzy sayısına $\tilde{\beta}$. dereceden istatistiksel yakınsaktır ancak $\tilde{\alpha} \in (0, 1/3]$ için $X = (X_{jk})$ dizisi X_0 fuzzy sayısına $\tilde{\alpha}$. dereceden istatistiksel yakınsak değildir.

Teorem 3.1.3. $X = (X_{jk})$ dizisi X_0 fuzzy sayısına $\tilde{\alpha}$. dereceden istatistiksel yakınsak ise $\delta_2^{\tilde{\alpha}}(K) = \infty$ ve $\lim_i X_{j_i, k_i} = X_0$ şartlarını sağlayan bir $K = \{(j_i, k_i)\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $i=1, 2, \dots$ kümesi mevcuttur.

İspat.

$X = (X_{jk})$ dizisi X_0 fuzzy sayısına $\tilde{\alpha}$. dereceden istatistiksel yakınsak ve

$$K_l = \left\{ (j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : d(X_{jk}, X_0) < \frac{1}{l} \right\}, \quad l=1, 2, \dots$$

olsun. Tanım 3.1.2 den $\delta_2^{\tilde{\alpha}}(K_l^C) = 0$ dir. Buna göre $\delta_2^{\tilde{\alpha}}(K_l) = \infty$ olduğu açıktır. Aynı zamanda K_l kümesinin tanımından

$$K_1 \supset K_2 \supset \dots \supset K_j \supset K_{j+1} \supset \dots \quad (3.1)$$

dir.

Kabul edelim ki $\{H_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ pozitif reel sayıların kesin artan bir dizisi olsun.

$(p_1, q_1) \in K_1$ olacak şekilde keyfi bir sayı seçelim. (3.1) den $j \geq p_2, k \geq q_2$ iken $\frac{K_2(n, m)}{n^s \cdot m^t} > H_2$ yi sağlayan, $p_2 > p_1$ ve $q_2 > q_1$ olacak şekilde $(p_2, q_2) \in K_2$ seçebiliriz.

Buna ilaveten $j \geq p_3, k \geq q_3$ iken $\frac{K_3(n, m)}{n^s \cdot m^t} > H_3$ i sağlayan, $p_3 > p_2$ ve $q_3 > q_2$ olacak şekilde $(p_3, q_3) \in K_3$ seçebiliriz. Bu yolla devam edilirse $j \geq p_r$ ve $k \geq q_r$ iken

$$(p_r, q_r) \in K_r \quad (r=1, 2, 3, \dots) \quad \text{ve} \quad \frac{K_r(n, m)}{n^s \cdot m^t} > H_r \quad (3.2)$$

olacak şekilde $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ in elemanlarının bir $(p_1, q_1) < (p_2, q_2) < \dots < (p_r, q_r) < \dots$ dizisini elde ederiz.

Şimdi K kümesini aşağıdaki gibi inşa edelim:

$\{(u, v) : 1 \leq u \leq p_1, 1 \leq v \leq q_1\}$ kümesinin her bir elemanı ve herhangi bir $r \geq 2$ doğal sayısı için $K_r \cap \{(u, v) : p_{r-1} < u \leq p_r, q_{r-1} < v \leq q_r\}$ kümesinin elemanları K kümesinin

de elemanı olsun. (3.1) ve (3.2) den herhangi bir $r \in \mathbb{N}$ için $p_r \leq j < p_{r+1}$, $q_r \leq k < q_{r+1}$ olacak şekilde $(j, k) \in K$ seçebiliriz.

Böylece

$$\frac{K(n, m)}{n^s \cdot m^t} \geq \frac{K_r(n, m)}{n^s \cdot m^t} > H_r$$

elde ederiz. Buradan $\delta_2^{\tilde{\alpha}}(K) = \infty$ olduğu açıktır.

Ayrıca, $\varepsilon > 0$ olsun. $\frac{1}{r} < \varepsilon$ olacak şekilde bir r seçelim. $j \geq p_r, k \geq q_r$ olacak şekilde $(j, k) \in K$ olsun. Bu takdirde $p_i \leq j < p_{i+1}$, $q_i \leq k < q_{i+1}$ olacak şekilde bir $i \geq r$ sayısı vardır. Ancak K kümesinin tanımından $(j, k) \in K_i$ dir ve böylece $d(X_{jk}, X_0) < \frac{1}{i} \leq \frac{1}{r} < \varepsilon$ dir. Bu ise $X = (X_{jk})$ dizisinin X_0 fuzzy sayısına yakınsak olduğunu gösterir.

Teorem 3.1.4. Her bir $\tilde{\alpha} \in (0, 1]$ için $S_2^{\tilde{\alpha}}(F) \cap \ell_\infty^2(F)$ kümesi $\ell_\infty^2(F)$ normlu lineer uzayının kapalı bir alt uzayıdır.

İspat.

$S_2^{\tilde{\alpha}}(F) \cap \ell_\infty^2(F)$ kümesinin $\ell_\infty^2(F)$ nin lineer bir alt uzayı olduğunu kolaylıkla gösterebiliriz. Şimdi bu kümenin kapalı olduğunu gösterelim.

$$X^{(nm)} = (X_{jk}^{(nm)}) \in S_2^{\tilde{\alpha}}(F) \cap \ell_\infty^2(F), \quad (n, m = 1, 2, 3, \dots)$$

ve

$$X^{(nm)} \rightarrow X = (X_{jk}) \in \ell_\infty^2(F)$$

olsun.

Bu durumda, $j, k \rightarrow \infty$ için

$$d(X^{(nm)}, X) < \frac{\varepsilon}{3}$$

dir. Ayrıca Teorem 3.1.2 de $\tilde{\beta} \cong 1$ alındığında $S_2^{\tilde{\alpha}}(F) \subseteq S_2^1(F)$ olduğundan ve $S_2^1(F) \cap \ell_\infty^2(F)$ kümesi $\ell_\infty^2(F)$ de kapalı olduğundan [10], $X = (X_{jk}) \in S_2^1(F) \cap \ell_\infty^2(F)$ dir.

Her bir $(n, m = 1, 2, 3, \dots)$ için $X^{(nm)} \in S_2^{\tilde{\alpha}}(F) \subseteq S_2^1(F)$ olduğundan $X^{(nm)}$ dizisi

$n, m = 1, 2, 3, \dots$ için Y_{nm} fuzzy sayısına istatistiksel yakınsaktır.

Şimdi, (Y_{nm}) dizisinin Y fuzzy sayısına yakınsak olduğunu ve $X = (X_{jk})$ dizisinin Y fuzzy sayısına $\tilde{\alpha}$. dereceden istatistiksel yakınsak olduğunu göstermeliyiz.

Her $j, k \in \mathbb{N}$ için

$$d(Y_{nm}, Y_{pr}) \leq d(X_{jk}^{(nm)}, Y_{nm}) + d(X_{jk}^{(nm)}, X_{jk}^{(pr)}) + d(X_{jk}^{(pr)}, Y_{pr}) \quad (3.3.)$$

yazabiliriz.

$\varepsilon > 0$ olsun. $X^{(nm)} \rightarrow X = (X_{jk}) \in \ell_\infty^2(F)$ olduğundan her $p \geq n \geq N$ ve $r \geq m \geq N$ için

$$d(X_{jk}^{(nm)}, X_{jk}^{(pr)}) < \frac{\varepsilon}{3}$$

olacak şekilde $N \in \mathbb{N}$ vardır.

$X^{(nm)}$ ve $X^{(pr)}$, sırasıyla Y_{nm} ve Y_{pr} ye istatistiksel yakınsak olduğundan

$$\delta_2(A_{nm}) = 1 \text{ ve } \lim_{\substack{j,k \\ j,k \in A_{nm}}} X_{jk}^{(nm)} = Y_{nm}$$

ve

$$\delta_2(A_{pr}) = 1 \text{ ve } \lim_{\substack{j,k \\ j,k \in A_{pr}}} X_{jk}^{(pr)} = Y_{pr}$$

olacak şekilde $A_{nm}, A_{pr} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ vardır [10].

$$\delta_2(A_{nm}) = 1 = \delta_2(A_{pr}) \text{ olduğundan}$$

$$d(X_{jk}^{(nm)}, Y_{nm}) < \frac{\varepsilon}{3}$$

ve

$$d(X_{jk}^{(pr)}, Y_{pr}) < \frac{\varepsilon}{3}$$

olacak şekilde $j, k \in A_{nm} \cap A_{pr}$ seçebiliriz.

Böylece (3.3) den $p \geq n \geq N$ ve $r \geq m \geq N$ için $d(Y_{nm}, Y_{pr}) \leq \varepsilon$ elde ederiz. Bu ise bize (Y_{nm}) dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu verir. Dolayısıyla $\lim_{n,m \rightarrow \infty} Y_{nm} = Y$ olacak şekilde bir Y fuzzy sayısı vardır.

Şimdi $l > 0$ olmak üzere

$$A_l = \{(j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : d(X_{jk}, Y) \geq l\}$$

alalım. $d(X^{(pr)}, X) < \frac{l}{3}$ ve $d(Y_{pr}, Y) < \frac{l}{3}$ olacak şekilde $(p, r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ seçelim.

Ayrıca,

$$B_l = \left\{ (j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : d(X_{jk}^{(pr)}, Y_{pr}) \geq \frac{l}{3} \right\}$$

olsun.

Keyfi bir (j, k) için

$$\begin{aligned} d(X_{jk}, Y) &\leq d(X_{jk}, X_{jk}^{(pr)}) + d(X_{jk}^{(pr)}, Y_{pr}) + d(Y_{pr}, Y) \\ &\leq \frac{2l}{3} + d(X_{jk}^{(pr)}, Y_{pr}) \end{aligned}$$

elde ederiz. Yani $A_l \subset B_l$ dir. Dolayısıyla $\delta_2^{\tilde{\alpha}}(B_l) = 0$ olduğundan $\delta_2^{\tilde{\alpha}}(A_l) = 0$ dir. Bu ise bize $X = (X_{jk}) \in S_2^{\tilde{\alpha}}(F)$ olduğunu gösterir. Yani $S_2^{\tilde{\alpha}}(F)$ kümesi $\ell_\infty^2(F)$ de kapalıdır.

Tanım 3.1.3. $X = (X_{jk})$ bir çift fuzzy sayı dizisi ve $\tilde{\alpha} \in (0, 1]$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \frac{1}{n^s m^t} \left| \left\{ (j, k); j \leq n, k \leq m : d(X_{jk}, X_{NM}) \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

olacak şekilde $N = N(\varepsilon)$ ve $M = M(\varepsilon)$ sayıları mevcut ise $X = (X_{jk})$ dizisine $\tilde{\alpha}$. dereceden istatistiksel Cauchy dizisidir diyeceğiz.

Teorem 3.1.5. $\tilde{\alpha} \in (0, 1]$ olmak üzere, $X = (X_{jk})$ dizisi $\tilde{\alpha}$. dereceden istatistiksel yakınsak ise bu dizi $\tilde{\alpha}$. dereceden istatistiksel Cauchy dizisidir.

İspat. $X = (X_{jk})$ dizisi $\tilde{\alpha}$. dereceden istatistiksel yakınsak olsun. Bu takdirde, $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \frac{1}{n^s m^t} \left| \left\{ (j, k); j \leq n, k \leq m : d(X_{jk}, X_0) \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

dir.

$d(X_{NM}, X_0) \geq \varepsilon$ olacak şekilde N ve M sayılarını seçelim.

$$\begin{aligned} & \{(j, k); j \leq n, k \leq m : d(X_{jk}, X_{NM}) \geq \varepsilon\} \subseteq \{(j, k); j \leq n, k \leq m : d(X_{jk}, X_0) \geq \varepsilon\} \\ & \cup \{(N, M) : d(X_{NM}, X_0) \geq \varepsilon\} \end{aligned}$$

yazabiliriz.

$$\begin{aligned} & \lim_{n, m \rightarrow \infty} \frac{1}{n^s m^t} \left| \{(j, k); j \leq n, k \leq m : d(X_{jk}, X_{NM}) \geq \varepsilon\} \right| \\ & \leq \lim_{n, m \rightarrow \infty} \frac{1}{n^s m^t} \left| \{(j, k); j \leq n, k \leq m : d(X_{jk}, X_0) \geq \varepsilon\} \right| \\ & + \lim_{n, m \rightarrow \infty} \frac{1}{n^s m^t} \left| \{(N, M) : d(X_{NM}, X_0) \geq \varepsilon\} \right| \end{aligned}$$

olduğundan ve kabulümüzden, $X = (X_{jk})$ dizisi $\tilde{\alpha}$. dereceden istatistiksel Cauchy dizisidir.

3.2. Çift Fuzzy Sayı Dizilerinin $\tilde{\alpha}$. Dereceden Kuvvetli p - Cesàro Toplanabilirliği

Tanım 3.2.1. $X = (X_{jk})$ bir çift fuzzy sayı dizisi ve $\tilde{\alpha} > 0$ olmak üzere eğer

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \frac{1}{n^s m^t} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m X_{jk} = X_0$$

ise $X = (X_{jk})$ dizisi sonlu X_0 limitine $\tilde{\alpha}$. dereceden Cesàro toplanabilirdir diyeceğiz.

Bütün $\tilde{\alpha}$. dereceden Cesàro toplanabilir çift fuzzy sayı dizilerinin kümesini $W_2^{\tilde{\alpha}}(F)$ ile göstereceğiz.

Tanım 3.2.2. $X = (X_{jk})$ bir çift fuzzy sayı dizisi, p pozitif bir reel sayı ve $\tilde{\alpha} > 0$ olsun. Eğer

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \frac{1}{n^s m^t} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m [d(X_{jk}, X_0)]^p = 0$$

olacak şekilde bir X_0 fuzzy sayısı varsa $X = (X_{jk})$ dizisi X_0 fuzzy sayısına $\tilde{\alpha}$. dereceden kuvvetli p -Cesàro toplanabilirdir diyeceğiz.

Bütün $\tilde{\alpha}$. dereceden kuvvetli p -Cesàro toplanabilir çift fuzzy sayı dizilerinin kümesini $W_2^{p\tilde{\alpha}}(F)$ ile göstereceğiz.

Teorem 3.2.1. p pozitif bir reel sayı ve $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} > 0$ olsun. $\tilde{\alpha} \preceq \tilde{\beta}$ ise

$$W_2^{p\tilde{\alpha}}(F) \subseteq W_2^{p\tilde{\beta}}(F)$$

dir ve $\tilde{\alpha} \prec \tilde{\beta}$ olacak şekildeki bazı $\tilde{\alpha}$ ve $\tilde{\beta}$ için kapsama kesindir.

İspat. $X = (X_{jk}) \in W_2^{p\tilde{\alpha}}(F)$ olsun. p pozitif reel sayısı ve $\tilde{\alpha} \preceq \tilde{\beta}$ için

$$\frac{1}{n^u m^v} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m [d(X_{jk}, X_0)]^p \leq \frac{1}{n^s m^t} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m [d(X_{jk}, X_0)]^p$$

yazabiliriz. $n, m \rightarrow \infty$ için limit alındığında $W_2^{p\tilde{\alpha}}(F) \subseteq W_2^{p\tilde{\beta}}(F)$ olduğunu görürüz.

Böylece teorem ispatlanır.

Teorem 3.2.2. $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in (0,1]$, $\tilde{\alpha} \preceq \tilde{\beta}$ ve $0 < p < \infty$ olsun. Eğer $X = (X_{jk})$ dizisi $\tilde{\alpha}$. dereceden X_0 fuzzy sayısına kuvvetli p -Cesàro toplanabilir ise $X = (X_{jk})$ dizisi aynı X_0 sayısına $\tilde{\beta}$. dereceden istatistiksel yakınsaktır.

İspat.

$H_{nm} = \{(j,k); j \leq n, k \leq m: d(X_{jk}, X_0) \geq \varepsilon\}$ olsun. $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m [d(X_{jk}, X_0)]^p &= \sum_{(j,k) \in H_{nm}} [d(X_{jk}, X_0)]^p + \sum_{(j,k) \notin H_{nm}} [d(X_{jk}, X_0)]^p \\ &\geq \sum_{(j,k) \in H_{nm}} [d(X_{jk}, X_0)]^p \end{aligned}$$

$$\geq \left| \{(j, k); j \leq n, k \leq m : d(X_{jk}, X_0) \geq \varepsilon\} \right| \varepsilon^p$$

dir.

$\tilde{\alpha} \preceq \tilde{\beta}$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^s m^t} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m [d(X_{jk}, X_0)]^p &\geq \frac{1}{n^s m^t} \left| \{(j, k); j \leq n, k \leq m : d(X_{jk}, X_0) \geq \varepsilon\} \right| \varepsilon^p \\ &\geq \frac{1}{n^u m^v} \left| \{(j, k); j \leq n, k \leq m : d(X_{jk}, X_0) \geq \varepsilon\} \right| \varepsilon^p \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece, $X = (X_{jk})$ dizisi X_0 fuzzy sayısına $\tilde{\alpha}$. dereceden kuvvetli p -Cesàro toplanabilirse yine X_0 sayısına $\tilde{\beta}$. dereceden istatistiksel yakınsaktır. Bu ise ispatımızı tamamlar.

4. BÖLÜM

ÇİFT FUZZY SAYI DİZİLERİNİN $\tilde{\alpha}$. DERECEDEN

$\bar{\lambda}$ – İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI VE $\tilde{\alpha}$. DERECEDEN KUVVETLİ $\bar{\lambda}$ – TOPLANABİLİRLİĞİ

Bu bölümde çift fuzzy sayı dizileri için $\tilde{\alpha}$. dereceden $\bar{\lambda}$ – istatistiksel yakınsaklık ve $\tilde{\alpha}$. dereceden kuvvetli $\bar{\lambda}$ – toplanabilirlik tanımlarını vereceğiz ve aralarındaki ilişkileri inceleyeceğiz.

4.1. Çift Fuzzy Sayı Dizilerinin $\tilde{\alpha}$. Dereceden $\bar{\lambda}$ – İstatistiksel Yakınsaklığı

Tanım 4.1.1. $X = (X_{jk})$ çift fuzzy sayı dizisi ve $\tilde{\alpha} \in (0,1]$ olsun. Ayrıca,

$\lambda = (\lambda_n)$ ve $\mu = (\mu_m)$ dizileri

$$\lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1, \lambda_1 = 1$$

$$\lambda_n \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow \infty)$$

ve

$$\mu_{m+1} \leq \mu_m + 1, \mu_1 = 1$$

$$\mu_m \rightarrow +\infty \quad (m \rightarrow \infty)$$

şartlarına sahip pozitif reel sayıların azalmayan iki dizisi olsun [17].

$I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$, $J_m = [m - \mu_m + 1, m]$ ve $(\bar{\lambda}_{nm})^{\tilde{\alpha}} = (\lambda_n)^s \cdot (\mu_m)^t$ olmak üzere eğer $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{nm} \frac{1}{(\bar{\lambda}_{nm})^{\tilde{\alpha}}} \left| \left\{ j \in I_n, k \in J_m : d(X_{jk}, X_0) \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

ise $X = (X_{jk})$ dizisi X_0 fuzzy sayısına $\tilde{\alpha}$. dereceden $\bar{\lambda}$ – istatistiksel yakınsaktır diyeceğiz.

Bütün $\tilde{\alpha}$. dereceden $\bar{\lambda}$ – istatistiksel yakınsak çift fuzzy sayı dizilerinin kümesini $(S_{\bar{\lambda}}^{\tilde{\alpha}})(F)$ ile göstereceğiz.

Teorem 4.1.1. $\tilde{\alpha} \in (0, 1]$, $X = (X_{jk})$ ve $Y = (Y_{jk})$ çift fuzzy sayı dizileri olsun. Bu takdirde;

- i. Eğer $S_{\bar{\lambda}}^{\tilde{\alpha}} - \lim X_{jk} = X_0$ ve $c \in \mathbb{R}$ ise $S_{\bar{\lambda}}^{\tilde{\alpha}} - \lim cX_{jk} = cX_0$,
- ii. Eğer $S_{\bar{\lambda}}^{\tilde{\alpha}} - \lim X_{jk} = X_0$ ve $S_{\bar{\lambda}}^{\tilde{\alpha}} - \lim Y_{jk} = Y_0$ ise $S_{\bar{\lambda}}^{\tilde{\alpha}} - \lim (X_{jk} + Y_{jk}) = X_0 + Y_0$

dir.

İspat.

i. $\tilde{\alpha} \in (0, 1]$, $c \in \mathbb{R}$ ve $\varepsilon > 0$ alalım. X_{jk} , Y_{jk} , X_0 ve Y_0 kümelerinin γ – kesim kümeleri sırasıyla X_{jk}^γ , Y_{jk}^γ , X_0^γ ve Y_0^γ olsun.

$$\mathcal{D}_\infty(cX_{jk}^\gamma, cX_0^\gamma) = |c| \mathcal{D}_\infty(X_{jk}^\gamma, X_0^\gamma)$$

olduğundan

$$d(cX_{jk}^\gamma, cX_0^\gamma) = |c| d(X_{jk}^\gamma, X_0^\gamma)$$

yazabiliriz.

Buradan

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(\bar{\lambda}_{nm})^{\bar{\alpha}}} \left| \left\{ j \in I_n, k \in J_m : d(cX_{jk}, cX_0) \geq \varepsilon \right\} \right| \\ & \leq \frac{1}{(\bar{\lambda}_{nm})^{\bar{\alpha}}} \left| \left\{ j \in I_n, k \in J_m : d(X_{jk}, X_0) \geq \frac{\varepsilon}{|c|} \right\} \right| \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. $S_{\bar{\lambda}}^{\bar{\alpha}} - \lim X_{jk} = X_0$ olduğundan $S_{\bar{\lambda}}^{\bar{\alpha}} - \lim cX_{jk} = cX_0$ dir.

$$\begin{aligned} \text{ii. } \delta_{\infty}(X_{jk}^{\gamma} + Y_{jk}^{\gamma}, X_0^{\gamma} + Y_0^{\gamma}) & \leq \delta_{\infty}(X_{jk}^{\gamma} + Y_{jk}^{\gamma}, Y_{jk}^{\gamma} + X_0^{\gamma}) + \delta_{\infty}(Y_{jk}^{\gamma} + X_0^{\gamma}, X_0^{\gamma} + Y_0^{\gamma}) \\ & = \delta_{\infty}(X_{jk}^{\gamma}, X_0^{\gamma}) + \delta_{\infty}(Y_{jk}^{\gamma}, Y_0^{\gamma}) \end{aligned}$$

olduğundan

$$d(X_{jk} + Y_{jk}, X_0 + Y_0) \leq d(X_{jk}, X_0) + d(Y_{jk}, Y_0)$$

dir. Böylece,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(\bar{\lambda}_{nm})^{\bar{\alpha}}} \left| \left\{ j \in I_n, k \in J_m : d(X_{jk} + Y_{jk}, X_0 + Y_0) \geq \varepsilon \right\} \right| \\ & \leq \frac{1}{(\bar{\lambda}_{nm})^{\bar{\alpha}}} \left| \left\{ j \in I_n, k \in J_m : d(X_{jk}, X_0) + d(Y_{jk}, Y_0) \geq \varepsilon \right\} \right| \\ & \leq \frac{1}{(\bar{\lambda}_{nm})^{\bar{\alpha}}} \left| \left\{ j \in I_n, k \in J_m : d(X_{jk}, X_0) \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right| \\ & \quad + \frac{1}{(\bar{\lambda}_{nm})^{\bar{\alpha}}} \left| \left\{ j \in I_n, k \in J_m : d(Y_{jk}, Y_0) \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right| \end{aligned}$$

olduğundan ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.2. $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in (0,1]$ reel sayılar ve $\tilde{\alpha} \preceq \tilde{\beta}$ olsun. $X = (X_{jk})$ dizisi X_0 fuzzy sayısına $\tilde{\alpha}$. dereceden $\bar{\lambda}$ – istatistiksel yakınsak ise bu dizi X_0 sayısına $\tilde{\beta}$. dereceden $\bar{\lambda}$ – istatistiksel yakınsaktır.

İspat. $\tilde{\alpha} \preceq \tilde{\beta}$ olduğundan, her $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(\lambda_n)^u \cdot (\mu_m)^v} \left| \left\{ j \in I_n, k \in J_m : d(X_{jk}, X_0) \geq \varepsilon \right\} \right| \\ & \leq \frac{1}{(\lambda_n)^s \cdot (\mu_m)^t} \left| \left\{ j \in I_n, k \in J_m : d(X_{jk}, X_0) \geq \varepsilon \right\} \right| \end{aligned}$$

dir. $n, m \rightarrow \infty$ için limit alınarak $(S_{\bar{\lambda}}^{\tilde{\alpha}})(F) \subseteq (S_{\bar{\lambda}}^{\tilde{\beta}})(F)$ olduğunu kolaylıkla elde ederiz.

Teorem 4.1.3. $\tilde{\alpha} \in (0,1]$ olsun. $X = (X_{jk})$ dizisi X_0 fuzzy sayısına $\tilde{\alpha}$. dereceden istatistiksel yakınsak ve $\liminf_{nm \rightarrow \infty} \frac{(\bar{\lambda}_{nm})^{\tilde{\alpha}}}{(nm)^{\tilde{\alpha}}} > 0$ ise bu dizi X_0 sayısına $\tilde{\alpha}$. dereceden $\bar{\lambda}$ – istatistiksel yakınsaktır.

İspat. $\varepsilon > 0$ için

$$\{j \leq n, k \leq m : d(X_{jk}, X_0) \geq \varepsilon\} \supset \{j \in I_n, k \in J_m : d(X_{jk}, X_0) \geq \varepsilon\}$$

olduğundan,

$$\frac{1}{n^s m^t} \left| \{j \leq n, k \leq m : d(X_{jk}, X_0) \geq \varepsilon\} \right| \geq \frac{1}{n^s m^t} \left| \{j \in I_n, k \in J_m : d(X_{jk}, X_0) \geq \varepsilon\} \right|$$

$$\geq \frac{(\bar{\lambda}_{nm})^{\tilde{\alpha}}}{n^s m^t} \cdot \frac{1}{(\bar{\lambda}_{nm})^{\tilde{\alpha}}} \left| \{j \in I_n, k \in J_m : d(X_{jk}, X_0) \geq \varepsilon\} \right|$$

dir. $S_2^{\tilde{\alpha}} - \lim X_{jk} = X_0$ ve $\liminf_{nm \rightarrow \infty} \frac{(\bar{\lambda}_{nm})^{\tilde{\alpha}}}{(nm)^{\tilde{\alpha}}} > 0$ olduğundan sonuç aşıkardır.

4.2. Çift Fuzzy Sayı Dizilerinin $\tilde{\alpha}$. Dereceden Kuvvetli $\bar{\lambda}$ – Toplanabilirliği

Tanım 4.2.1. $X = (X_{jk})$ çift fuzzy sayı dizisi ve $\tilde{\alpha} > 0$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{nm} \frac{1}{(\bar{\lambda}_{nm})^{\tilde{\alpha}}} \sum_{j \in I_n} \sum_{k \in J_m} d(X_{jk}, X_0) = 0$$

olacak şekilde bir X_0 fuzzy sayısı var ise $X = (X_{jk})$ dizisi X_0 sayısına $\tilde{\alpha}$. dereceden kuvvetli $\bar{\lambda}$ – toplanabilirdir diyeceğiz.

Bütün $\tilde{\alpha}$. dereceden kuvvetli $\bar{\lambda}$ – toplanabilir çift fuzzy sayı dizilerinin kümesini $[V, \bar{\lambda}]^{\tilde{\alpha}}(F)$ ile göstereceğiz.

Eğer $(\bar{\lambda}_{nm}) = nm$ alırsak, $\tilde{\alpha}$. dereceden kuvvetli $\bar{\lambda}$ – toplanabilirlik $[C, 1, 1]^{\tilde{\alpha}}(F)$ ile gösterilen $\tilde{\alpha}$. dereceden kuvvetli Cesàro toplanabilir dizilerin uzayına indirgenir.

Yani

$$\lim_{nm} \frac{1}{(nm)^{\tilde{\alpha}}} \sum_{j,k=1,1}^{nm} d(X_{jk}, X_0) = 0$$

dir.

Teorem 4.2.1. $X = (X_{jk})$ çift fuzzy sayı dizisi ve $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} > 0$ olsun. $\tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta}$ ise

$$[V, \bar{\lambda}]^{\tilde{\alpha}}(F) \subseteq [V, \bar{\lambda}]^{\tilde{\beta}}(F)$$

dir.

İspat. $X \in [V, \bar{\lambda}]^{\tilde{\alpha}}(F)$ olsun. $\tilde{\alpha} \preceq \tilde{\beta}$ için

$$\frac{1}{(\lambda_n)^u \cdot (\mu_m)^v} \sum_{j \in I_n} \sum_{k \in J_m} d(X_{jk}, X_0) \leq \frac{1}{(\lambda_n)^s \cdot (\mu_m)^t} \sum_{j \in I_n} \sum_{k \in J_m} d(X_{jk}, X_0)$$

yazabiliriz. Buradan, $X \in [V, \bar{\lambda}]^{\tilde{\beta}}(F)$ olduğunu görürüz.

Teorem 4.2.2. $0 < \tilde{\alpha} \preceq \tilde{\beta} \leq 1$ olsun. Eğer $X = (X_{jk})$ dizisi X_0 fuzzy sayısına $\tilde{\alpha}$. dereceden kuvvetli $\bar{\lambda}$ – toplanabilir ise, X_0 sayısına $\tilde{\beta}$. dereceden $\bar{\lambda}$ – istatistiksel yakınsaktır yani $[V, \bar{\lambda}]^{\tilde{\alpha}}(F) \subset (S_{\bar{\lambda}}^{\tilde{\beta}})(F)$ dir.

İspat. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için, $X = (X_{jk})$ dizisi X_0 fuzzy sayısına $\tilde{\alpha}$. dereceden kuvvetli $\bar{\lambda}$ – toplanabilir olsun.

$$\sum_{j \in I_n, k \in J_m} d(X_{jk}, X_0) = \sum_{j \in I_n, k \in J_m: d(X_{jk}, X_0) \geq \varepsilon} d(X_{jk}, X_0) + \sum_{j \in I_n, k \in J_m: d(X_{jk}, X_0) < \varepsilon} d(X_{jk}, X_0)$$

$$\geq \sum_{j \in I_n, k \in J_m: d(X_{jk}, X_0) \geq \varepsilon} d(X_{jk}, X_0)$$

$$\geq \left| \{j \in I_n, k \in J_m : d(X_{jk}, X_0) \geq \varepsilon\} \right| \varepsilon$$

olduğundan $\tilde{\alpha} \preceq \tilde{\beta}$ için

$$\frac{1}{(\lambda_n)^s \cdot (\mu_m)^t} \sum_{j \in I_n, k \in J_m} d(X_{jk}, X_0) \geq \frac{1}{(\lambda_n)^s \cdot (\mu_m)^t} \left| \{j \in I_n, k \in J_m : d(X_{jk}, X_0) \geq \varepsilon\} \right| \varepsilon$$

$$\geq \frac{1}{(\lambda_n)^u \cdot (\mu_m)^v} \left| \{j \in I_n, k \in J_m : d(X_{jk}, X_0) \geq \varepsilon\} \right| \varepsilon$$

yazabiliriz. Böylece, $X = (X_{jk})$ dizisi X_0 sayısına $\tilde{\beta}$. dereceden $\bar{\lambda}$ – istatistiksel yakınsaktır.



5. BÖLÜM

ÇİFT FUZZY SAYI DİZİLERİNİN $\tilde{\alpha}$. DERECEDEN LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI VE $\tilde{\alpha}$. DERECEDEN LACUNARY KUVVETLİ p - CESÀRO TOPLANABİLİRLİĞİ

Bu bölümde çift fuzzy sayı dizileri için $\tilde{\alpha}$. dereceden lacunary istatistiksel yakınsaklık ve $\tilde{\alpha}$. dereceden kuvvetli lacunary toplanabilirlik tanımlarını vereceğiz ve aralarındaki ilişkileri inceleyeceğiz.

5.1. Çift Fuzzy Sayı Dizilerinin $\tilde{\alpha}$. Dereceden Lacunary İstatistiksel Yakınsaklığı

Tanım 5.1.1. $\theta_{r,s} = \{(k_r, l_s)\}$ bir çift dizi olmak üzere eğer,

$$k_0 = 0 \text{ ve } r \rightarrow \infty \text{ için } h_r = k_r - k_{r-1} \rightarrow \infty$$

ve

$$l_0 = 0 \text{ ve } s \rightarrow \infty \text{ için } \bar{h}_s = l_s - l_{s-1} \rightarrow \infty$$

olacak şekilde negatif olmayan tamsayıların artan iki dizisi mevcut ise $\theta_{r,s} = \{(k_r, l_s)\}$ çift dizisine çift lacunary dizi denir [18].

$k_{r,s} = k_r l_s$ ve $h_{r,s} = h_r \bar{h}_s$ ile; $\theta_{r,s}$ tarafından belirlenen aralıklar $I_{r,s} = \{(k,l) : k_{r-1} < k \leq k_r \text{ ve } l_{s-1} < l \leq l_s\}$ ile; $q_r = \frac{k_r}{k_{r-1}}$, $\bar{q}_s = \frac{l_s}{l_{s-1}}$ olmak üzere $q_{r,s} = q_r \bar{q}_s$ ile gösterilir [18].

Tanım 5.1.2. $X = (X_{kl})$ çift fuzzy sayı dizisi, $\theta_{r,s}$ çift lacunary dizisi ve $\tilde{\alpha} \in (0,1]$ olsun. Eğer $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{r,s} \frac{1}{(h_{r,s})^{\tilde{\alpha}}} \left| \{(k,l) \in I_{r,s} : d(X_{kl}, X_0) \geq \varepsilon\} \right| = 0$$

ise $X = (X_{kl})$ dizisi $\tilde{\alpha}$. dereceden X_0 fuzzy sayısına lacunary istatistiksel yakınsaktır diyeceğiz ve $S_{\theta_{r,s}}^{\tilde{\alpha}} - \lim X_{kl} = X_0$ ile göstereceğiz. Yukarıdaki ifadede $(h_{r,s})^{\tilde{\alpha}}$ ile $(h_r)^s (\bar{h}_s)^t$ gösterilmektedir.

Bütün $\tilde{\alpha}$. dereceden lacunary istatistiksel yakınsak çift fuzzy sayı dizilerinin kümesini $S_{\theta_{r,s}}^{\tilde{\alpha}}(F)$ ile gösterelim.

Teorem 5.1.1. $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in (0,1]$ reel sayılar olsun. $\tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta}$ ise

$$S_{\theta_{r,s}}^{\tilde{\alpha}}(F) \subset S_{\theta_{r,s}}^{\tilde{\beta}}(F)$$

dir.

İspat. $\tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta}$ olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\frac{1}{(h_{r,s})^{\tilde{\beta}}} \left| \{(k,l) \in I_{r,s} : d(X_{kl}, X_0) \geq \varepsilon\} \right| \leq \frac{1}{(h_{r,s})^{\tilde{\alpha}}} \left| \{(k,l) \in I_{r,s} : d(X_{kl}, X_0) \geq \varepsilon\} \right|$$

dir. $r \rightarrow \infty$ ve $s \rightarrow \infty$ için limit alarak teoremi ispatlarız.

Teorem 5.1.2. Herhangi bir $\theta_{r,s}$ çift lacunary dizisi için $\liminf q_r > 1$ ve $\liminf \bar{q}_s > 1$ ise

$$S_2^{\tilde{\alpha}}(F) \subseteq S_{\theta_{r,s}}^{\tilde{\alpha}}(F)$$

dir.

İspat. $\liminf q_r = \eta_1 > 1$ ve $\liminf \bar{q}_s = \eta_2 > 1$ olduğunu kabul edelim. $\delta_1 = \frac{\eta_1 - 1}{2}$ ve

$\delta_2 = \frac{\eta_2 - 1}{2}$ alalım. Bu takdirde, $r \geq r_0$ için $q_r \geq 1 + \delta_1$ ve $s \geq s_0$ için $\bar{q}_s \geq 1 + \delta_2$ olacak şekilde r_0 ve s_0 pozitif tamsayıları vardır.

Böylece, $r \geq r_0$ ve $s \geq s_0$ için

$$\begin{aligned} (h_{r,s})^{\tilde{\alpha}} \frac{1}{(k_r l_s)^{\tilde{\alpha}}} &= \left(1 - \frac{k_{r-1}}{k_r}\right)^{\tilde{\alpha}} \left(1 - \frac{l_{s-1}}{l_s}\right)^{\tilde{\alpha}} \\ &= \left(1 - \frac{1}{q_r}\right)^{\tilde{\alpha}} \left(1 - \frac{1}{\bar{q}_s}\right)^{\tilde{\alpha}} \\ &\geq \left(1 - \frac{1}{1 + \delta_1}\right)^{\tilde{\alpha}} \left(1 - \frac{1}{1 + \delta_2}\right)^{\tilde{\alpha}} \\ &= \left(\frac{\delta_1}{1 + \delta_1}\right)^{\tilde{\alpha}} \left(\frac{\delta_2}{1 + \delta_2}\right)^{\tilde{\alpha}} \end{aligned}$$

dir.

$X = (X_{kl}) \in S_2^{\tilde{\alpha}}(F)$ olsun. Böylece, $\forall \varepsilon > 0$ için ve $r \geq r_0$ ve $s \geq s_0$ için

$$\frac{1}{(k_r l_s)^{\tilde{\alpha}}} |\{k \leq k_r, l \leq l_s : d(X_{kl}, X_0) \geq \varepsilon\}| \geq \frac{1}{(k_r l_s)^{\tilde{\alpha}}} |\{(k, l) \in I_{r,s} : d(X_{kl}, X_0) \geq \varepsilon\}|$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(h_{r,s})^{\tilde{\alpha}}}{(k_{r,s})^{\tilde{\alpha}}} \frac{1}{(h_{r,s})^{\tilde{\alpha}}} \left| \{(k,l) \in I_{r,s} : d(X_{kl}, X_0) \geq \varepsilon\} \right| \\
&\geq \left(\frac{\delta_1}{1+\delta_1} \right)^{\tilde{\alpha}} \left(\frac{\delta_2}{1+\delta_2} \right)^{\tilde{\alpha}} \frac{1}{(h_{r,s})^{\tilde{\alpha}}} \left| \{(k,l) \in I_{r,s} : d(X_{kl}, X_0) \geq \varepsilon\} \right|
\end{aligned}$$

olduğundan $X = (X_{kl}) \in S_{\theta_{r,s}}^{\tilde{\alpha}}(F)$ dir. Böylece ispatımız tamamlanmış olur.

Teorem 5.1.3. Herhangi bir $\theta_{r,s}$ çift lacunary dizisi için $\limsup q_r^{\tilde{\alpha}} < \infty$ ve $\limsup \bar{q}_s^{\tilde{\alpha}} < \infty$ ise

$$S_{\theta_{r,s}}^{\tilde{\alpha}}(F) \subseteq S_2^{\tilde{\alpha}}(F)$$

dir.

İspat. $\limsup q_r^{\tilde{\alpha}} < \infty$ ve $\limsup \bar{q}_s^{\tilde{\alpha}} < \infty$ olduğunu kabul edelim. Böylece her r ve s için $q_r^{\tilde{\alpha}} < K$ ve $\bar{q}_s^{\tilde{\alpha}} < K$ olacak şekilde bir $K > 0$ vardır.

$$S_{\theta_{r,s}}^{\tilde{\alpha}} - \lim X_{jk} = X_0$$

ve

$$T_{r,s} = \left| \{(k,l) \in I_{r,s} : d(X_{kl}, X_0) \geq \varepsilon\} \right|$$

olsun.

Tanım 5.1.2 den $\varepsilon > 0$ ve her $r > r_0$ ve $s > s_0$ için $\frac{T_{r,s}}{(h_{r,s})^{\tilde{\alpha}}} < \varepsilon$ olacak şekilde

$r_0, s_0 \in \mathbb{N}$ vardır.

$$M := \max \{T_{r,s} : 1 \leq r \leq r_0 \text{ ve } 1 \leq s \leq s_0\}$$

alalım. $k_{r-1} < n \leq k_r$ ve $l_{s-1} < m \leq l_s$ olacak şekilde n ve m sayılarının mevcut olduğunu kabul edelim.

Böylece,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(nm)^{\tilde{\alpha}}} \left| \{k \leq n, l \leq m : d(X_{kl}, X_0) \geq \varepsilon\} \right| &\leq \frac{1}{(k_{r-1}l_{s-1})^{\tilde{\alpha}}} \left| \{k \leq k_r, l \leq l_s : d(X_{kl}, X_0) \geq \varepsilon\} \right| \\
&= \frac{1}{(k_{r-1}l_{s-1})^{\tilde{\alpha}}} \left\{ \sum_{i,j=1,1}^{r,s} T_{i,j} \right\} \\
&\leq \frac{Mr_0s_0}{(k_{r-1}l_{s-1})^{\tilde{\alpha}}} + \frac{1}{(k_{r-1}l_{s-1})^{\tilde{\alpha}}} \left\{ \sum_{i,j=r_0+1,s_0+1}^{r,s} T_{i,j} \right\} \\
&\leq \frac{Mr_0s_0}{(k_{r-1}l_{s-1})^{\tilde{\alpha}}} + \frac{1}{(k_{r-1}l_{s-1})^{\tilde{\alpha}}} \left\{ \sum_{i,j=r_0+1,s_0+1}^{r,s} \frac{T_{i,j}h_{i,j}^{\tilde{\alpha}}}{h_{i,j}^{\tilde{\alpha}}} \right\} \\
&\leq \frac{Mr_0s_0}{(k_{r-1}l_{s-1})^{\tilde{\alpha}}} + \frac{1}{(k_{r-1}l_{s-1})^{\tilde{\alpha}}} \left(\sup_{i,j \geq r_0,s_0} \frac{T_{i,j}}{h_{i,j}^{\tilde{\alpha}}} \right) \left\{ \sum_{i,j=r_0+1,s_0+1}^{r,s} h_{i,j}^{\tilde{\alpha}} \right\} \\
&\leq \frac{Mr_0s_0}{(k_{r-1}l_{s-1})^{\tilde{\alpha}}} + \varepsilon \frac{1}{(k_{r-1}l_{s-1})^{\tilde{\alpha}}} \left\{ \sum_{i,j=r_0+1,s_0+1}^{r,s} h_{i,j}^{\tilde{\alpha}} \right\} \\
&\leq \frac{Mr_0s_0}{(k_{r-1}l_{s-1})^{\tilde{\alpha}}} + \varepsilon K^2
\end{aligned}$$

olduğundan ispat tamamlanmış olur.

5.2. Çift Fuzzy Sayı Dizilerinin $\tilde{\alpha}$. Dereceden Lacunary Kuvvetli p -Cesàro Toplanabilirliği

Tanım 5.2.1. $X = (X_{kl})$ çift fuzzy sayı dizisi, $\theta_{r,s}$ çift lacunary dizisi, p pozitif bir reel sayı ve $\tilde{\alpha} > 0$ olsun. Eğer

$$\lim_{r,s} \frac{1}{(h_{r,s})^{\tilde{\alpha}}} \sum_{(k,l) \in I_{r,s}} [d(X_{kl}, X_0)]^p = 0$$

olacak şekilde bir X_0 fuzzy sayısı var ise $X = (X_{kl})$ dizisi X_0 fuzzy sayısına $\tilde{\alpha}$. dereceden lacunary kuvvetli p -Cesàro toplanabilirdir diyeceğiz.

Bütün $\tilde{\alpha}$. dereceden lacunary kuvvetli p -Cesàro toplanabilir çift fuzzy sayı dizilerinin kümesini $N_{\theta_{r,s}}^{p\tilde{\alpha}}(F)$ ile göstereceğiz.

Teorem 5.2.1. p pozitif bir reel sayı ve $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} > 0$ olsun. $\tilde{\alpha} \preceq \tilde{\beta}$ ise

$$N_{\theta_{r,s}}^{p\tilde{\alpha}}(F) \subseteq N_{\theta_{r,s}}^{p\tilde{\beta}}(F)$$

dir.

İspat. p pozitif reel sayısı ve $\tilde{\alpha} \preceq \tilde{\beta}$ için

$$\frac{1}{(h_{r,s})^{\tilde{\beta}}} \sum_{(k,l) \in I_{r,s}} [d(X_{kl}, X_0)]^p \leq \frac{1}{(h_{r,s})^{\tilde{\alpha}}} \sum_{(k,l) \in I_{r,s}} [d(X_{kl}, X_0)]^p$$

olduğundan ispat açıktır.

Teorem 5.2.2. $\tilde{\alpha} > 0$ olmak üzere, herhangi bir $\theta_{r,s}$ çift lacunary dizisi için $\liminf q_r > 1$ ve $\liminf \bar{q}_s > 1$ ise

$$W_2^{p\tilde{\alpha}}(F) \subset N_{\theta_{r,s}}^{p\tilde{\alpha}}(F)$$

dir.

İspat. $\liminf q_r > 1$ ve $\liminf \bar{q}_s > 1$ olsun. Bu takdirde, her $r, s \geq 1$ için $q_r \geq 1 + \delta_1$ ve $\bar{q}_s \geq 1 + \delta_2$ olacak şekilde $\delta_1 > 0$ ve $\delta_2 > 0$ vardır.

Böylece,

$$\frac{(h_r)^{\tilde{\alpha}}}{(k_r)^{\tilde{\alpha}}} = \left(\frac{\delta_1}{1 + \delta_1} \right)^{\tilde{\alpha}}$$

ve

$$\frac{(h_s)^{\tilde{\alpha}}}{(l_s)^{\tilde{\alpha}}} = \left(\frac{\delta_2}{1 + \delta_2} \right)^{\tilde{\alpha}}$$

dir.

$X = (X_{kl})$ çift fuzzy sayı dizisi olmak üzere $X \in W_2^{p\tilde{\alpha}}(F)$ olsun.

Böylece

$$\begin{aligned} N_{r,s} &= \frac{1}{(h_{r,s})^{\tilde{\alpha}}} \sum_{k \in I_r} \sum_{l \in I_s} [d(X_{kl}, X_0)]^p \\ &= \frac{1}{(h_{r,s})^{\tilde{\alpha}}} \left[\sum_{k=1}^{k_r} \sum_{l=1}^{l_s} [d(X_{kl}, X_0)]^p - \sum_{k=1}^{k_r} \sum_{l=1}^{l_{s-1}} [d(X_{kl}, X_0)]^p \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=1}^{k_{r-1}} \sum_{l=1}^{l_s} [d(X_{kl}, X_0)]^p + \sum_{k=1}^{k_{r-1}} \sum_{l=1}^{l_{s-1}} [d(X_{kl}, X_0)]^p \right] \end{aligned}$$

yazabiliriz.

$$\begin{aligned} N_{r,s} &= \frac{(k_r l_s)^{\tilde{\alpha}}}{(h_{r,s})^{\tilde{\alpha}}} \left(\frac{1}{(k_r l_s)^{\tilde{\alpha}}} \sum_{k=1}^{k_r} \sum_{l=1}^{l_s} [d(X_{kl}, X_0)]^p \right) \\ &\quad - \frac{(k_r l_{s-1})^{\tilde{\alpha}}}{(h_{r,s})^{\tilde{\alpha}}} \left(\frac{1}{(k_r l_{s-1})^{\tilde{\alpha}}} \sum_{k=1}^{k_r} \sum_{l=1}^{l_{s-1}} [d(X_{kl}, X_0)]^p \right) \\ &\quad - \frac{(k_{r-1} l_s)^{\tilde{\alpha}}}{(h_{r,s})^{\tilde{\alpha}}} \left(\frac{1}{(k_{r-1} l_s)^{\tilde{\alpha}}} \sum_{k=1}^{k_{r-1}} \sum_{l=1}^{l_s} [d(X_{kl}, X_0)]^p \right) \\ &\quad + \frac{(k_{r-1} l_{s-1})^{\tilde{\alpha}}}{(h_{r,s})^{\tilde{\alpha}}} \left(\frac{1}{(k_{r-1} l_{s-1})^{\tilde{\alpha}}} \sum_{k=1}^{k_{r-1}} \sum_{l=1}^{l_{s-1}} [d(X_{kl}, X_0)]^p \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{(k_{r-1}l_s)^{\tilde{\alpha}}}{(h_{r,s})^{\tilde{\alpha}}} \left(\frac{1}{(k_{r-1}l_s)^{\tilde{\alpha}}} \sum_{k=1}^{k_{r-1}} \sum_{l=1}^{l_s} [d(X_{kl}, X_0)]^p \right) \\
& + \frac{(k_{r-1}l_{s-1})^{\tilde{\alpha}}}{(h_{r,s})^{\tilde{\alpha}}} \left(\frac{1}{(k_{r-1}l_{s-1})^{\tilde{\alpha}}} \sum_{k=1}^{k_{r-1}} \sum_{l=1}^{l_{s-1}} [d(X_{kl}, X_0)]^p \right)
\end{aligned}$$

elde ederiz.

$X \in W_2^{p\tilde{\alpha}}(F)$ olduğundan

$$\frac{1}{(k_r l_s)^{\tilde{\alpha}}} \sum_{k=1}^{k_r} \sum_{l=1}^{l_s} [d(X_{kl}, X_0)]^p,$$

$$\frac{1}{(k_r l_{s-1})^{\tilde{\alpha}}} \sum_{k=1}^{k_r} \sum_{l=1}^{l_{s-1}} [d(X_{kl}, X_0)]^p,$$

$$\frac{1}{(k_{r-1} l_s)^{\tilde{\alpha}}} \sum_{k=1}^{k_{r-1}} \sum_{l=1}^{l_s} [d(X_{kl}, X_0)]^p,$$

ve

$$\frac{1}{(k_{r-1} l_{s-1})^{\tilde{\alpha}}} \sum_{k=1}^{k_{r-1}} \sum_{l=1}^{l_{s-1}} [d(X_{kl}, X_0)]^p$$

çift toplamları Pringsheim anlamında sıfıra yakınsaktır. Dolayısıyla $N_{r,s}$ dizisi de sıfıra yakınsaktır. Yani $X \in N_{\theta_{r,s}}^{p\tilde{\alpha}}(F)$ dir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 5.2.3. $\tilde{\alpha} > 0$ olmak üzere, herhangi bir $\theta_{r,s}$ çift lacunary dizisi için $\limsup q_r^{\tilde{\alpha}} < \infty$ ve $\limsup \bar{q}_s^{\tilde{\alpha}} < \infty$ ise

$$N_{\theta_{r,s}}^{p\tilde{\alpha}}(F) \subset W_2^{p\tilde{\alpha}}(F)$$

dir.

İspat. $\limsup q_r^{\tilde{\alpha}} < \infty$ ve $\limsup \bar{q}_s^{\tilde{\alpha}} < \infty$ olduğunu kabul edelim. Böylece her r ve s için $q_r^{\tilde{\alpha}} < K$ ve $\bar{q}_s^{\tilde{\alpha}} < K$ olacak şekilde bir $K > 0$ vardır.

$X \in N_{\theta_{r,s}}^{p\tilde{\alpha}}(F)$ ve $\varepsilon > 0$ olsun.

$$N_{r,s} = \frac{1}{(h_{r,s})^{\tilde{\alpha}}} \sum_{k \in I_r} \sum_{l \in I_s} [d(X_{kl}, X_0)]^p$$

alalım. Böylece, her $k \geq r_0$ ve $l \geq s_0$ için $N_{r,s} < \varepsilon$ olacak şekilde $r_0 > 0$ ve $s_0 > 0$ vardır.

$$M := \max \{ N_{r,s} : 1 \leq r \leq r_0 \text{ ve } 1 \leq s \leq s_0 \}$$

olsun. $k_{r-1} < n \leq k_r$ ve $l_{s-1} < m \leq l_s$ olacak şekilde n ve m sayılarının mevcut olduğunu kabul edelim.

Böylece,

$$\frac{1}{(nm)^{\tilde{\alpha}}} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m [d(X_{kl}, X_0)]^p \leq \frac{1}{(k_{r-1}l_{s-1})^{\tilde{\alpha}}} \sum_{k=1}^{k_r} \sum_{l=1}^{l_s} [d(X_{kl}, X_0)]^p$$

$$\leq \frac{1}{(k_{r-1}l_{s-1})^{\tilde{\alpha}}} \sum_{i,j=1,1}^{r,s} \left(\sum_{(k,l) \in (I_i, I_j)} [d(X_{kl}, X_0)]^p \right)$$

$$= \frac{1}{(k_{r-1}l_{s-1})^{\tilde{\alpha}}} \sum_{i,j=1,1}^{r_0,s_0} (h_{i,j})^{\tilde{\alpha}} N_{i,j} + \frac{1}{(k_{r-1}l_{s-1})^{\tilde{\alpha}}} \sum_{(r_0 < i \leq r) \cup (s_0 < j \leq s)} (h_{i,j})^{\tilde{\alpha}} N_{i,j}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{M}{(k_{r-1}l_{s-1})^{\tilde{\alpha}}} \sum_{i,j=1,1}^{r_0,s_0} (h_{i,j})^{\tilde{\alpha}} + \frac{1}{(k_{r-1}l_{s-1})^{\tilde{\alpha}}} \sum_{(r_0 < i \leq r) \cup (s_0 < j \leq s)} (h_{i,j})^{\tilde{\alpha}} N_{i,j} \\
&\leq \frac{M(k_{r_0}l_{s_0})^{\tilde{\alpha}} r_0 s_0}{(k_{r-1}l_{s-1})^{\tilde{\alpha}}} + \left(\sup_{(i \geq r_0) \cup (j \geq s_0)} N_{i,j} \right) \frac{1}{(k_{r-1}l_{s-1})^{\tilde{\alpha}}} \sum_{(r_0 < i \leq r) \cup (s_0 < j \leq s)} (h_{i,j})^{\tilde{\alpha}} \\
&\leq \frac{M(k_{r_0}l_{s_0})^{\tilde{\alpha}} r_0 s_0}{(k_{r-1}l_{s-1})^{\tilde{\alpha}}} + \varepsilon \frac{1}{(k_{r-1}l_{s-1})^{\tilde{\alpha}}} \sum_{(r_0 < i \leq r) \cup (s_0 < j \leq s)} (h_{i,j})^{\tilde{\alpha}} \\
&\leq \frac{M(k_{r_0}l_{s_0})^{\tilde{\alpha}} r_0 s_0}{(k_{r-1}l_{s-1})^{\tilde{\alpha}}} + \varepsilon K^2
\end{aligned}$$

olduğundan $X \in W_2^{p\tilde{\alpha}}(F)$ elde ederiz. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 5.2.4. $0 < \tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta} < 1$ olmak üzere $X \in N_{\theta_{r,s}}^{p\tilde{\alpha}}(F)$ ise $X \in S_{\theta_{r,s}}^{\tilde{\beta}}(F)$ dir.

İspat. $X \in N_{\theta_{r,s}}^{p\tilde{\alpha}}(F)$ olsun.

$$\begin{aligned}
\sum_{(k,l) \in I_{r,s}} [d(X_{kl}, X_0)]^p &= \sum_{\substack{(k,l) \in I_{r,s} \\ d(X_{kl}, X_0) \geq \varepsilon}} [d(X_{kl}, X_0)]^p + \sum_{\substack{(k,l) \in I_{r,s} \\ d(X_{kl}, X_0) < \varepsilon}} [d(X_{kl}, X_0)]^p \\
&\geq \sum_{\substack{(k,l) \in I_{r,s} \\ d(X_{kl}, X_0) \geq \varepsilon}} [d(X_{kl}, X_0)]^p \\
&\geq \left| \{(k,l) \in I_{r,s} : d(X_{kl}, X_0) \geq \varepsilon\} \right| \varepsilon^p
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$\frac{1}{(h_{r,s})^{\tilde{\alpha}}} \sum_{(k,l) \in I_{r,s}} [d(X_{kl}, X_0)]^p \geq \frac{1}{(h_{r,s})^{\tilde{\alpha}}} \left| \{(k,l) \in I_{r,s} : d(X_{kl}, X_0) \geq \varepsilon\} \right| \varepsilon^p$$

$$\geq \frac{1}{(h_{r,s})^{\bar{\beta}}} \left| \{(k,l) \in I_{r,s} : d(X_{kl}, X_0) \geq \varepsilon\} \right| \varepsilon^p$$

dir. Böylece, $X \in S_{\theta_{r,s}}^{\bar{\beta}}(F)$ olduğunu göstermiş oluruz.



6. BÖLÜM

TARTIŞMA-SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu bölümde üçüncü, dördüncü ve beşinci bölümlerde ifade ve ispat edilen teoremlerle ilgili sonuçlar vereceğiz.

6.1. Tartışma-Sonuç ve Öneriler

Sonuç 6.1.1. Tanım 3.1.2 de $\tilde{\alpha} \cong 1$ alırsak, çift fuzzy sayı dizilerinin $\tilde{\alpha}$. dereceden istatistiksel yakınsaklığı kavramı çift fuzzy sayı dizilerinin istatistiksel yakınsaklığına indirgenir.

Sonuç 6.1.2. Eğer bir $X = (X_{jk})$ çift dizisi $\tilde{\alpha} \in (0,1]$ olacak şekilde bazı $\tilde{\alpha}$ için X_0 fuzzy sayısına $\tilde{\alpha}$. dereceden istatistiksel yakınsaksa, bu durumda X_0 sayısına istatistiksel yakınsaktır. Yani $S_2^{\tilde{\alpha}}(F) \subseteq S_2(F)$ dir.

Buna ilaveten, Teorem 3.1.2 den aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

- i. $\tilde{\alpha} \cong \tilde{\beta}$ ise $S_2^{\tilde{\alpha}}(F) = S_2^{\tilde{\beta}}(F)$ dir,
- ii. $\tilde{\alpha} \cong 1$ ise $S_2^{\tilde{\alpha}}(F) = S_2(F)$ dir.
- iii. Eğer $0 < \tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta} < 1$ ise $S_2^{\tilde{\alpha}}(F) \subseteq S_2^{\tilde{\beta}}(F) \subseteq S_2(F)$ dir.

Sonuç 6.1.3. $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in (0, \infty)$ ve p pozitif reel sayı olmak üzere, Teorem 3.2.1 den aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

- i. $\tilde{\alpha} \cong \tilde{\beta}$ ise $W_2^{p\tilde{\alpha}}(F) = W_2^{p\tilde{\beta}}(F)$ dir,

ii. $0 < p < \infty$ için $W_2^{p\tilde{\alpha}}(F) \subseteq W_2^p(F)$ dir.

Sonuç 6.1.4. Teorem 3.2.2 de $\tilde{\alpha} \equiv \tilde{\beta} \leq 1$ alırsak, X_0 sayısına $\tilde{\alpha}$. dereceden kuvvetli p -Cesáro toplanabilir bir $X = (X_{jk})$ dizisi X_0 sayısına aynı zamanda $\tilde{\alpha}$. dereceden istatistiksel yakınsak olur.

Sonuç 6.1.5. Teorem 4.1.1 den eğer bir $X = (X_{jk})$ çift fuzzy sayı dizisi X_0 fuzzy sayısına $\tilde{\alpha}$. dereceden $\bar{\lambda}$ - istatistiksel yakınsak ise, $\tilde{\alpha} \leq 1$ olduğundan X_0 sayısına $\bar{\lambda}$ - istatistiksel yakınsaktır. Yani, her bir $\tilde{\alpha} \in (0,1]$ için $(S_{\bar{\lambda}}^{\tilde{\alpha}})(F) \subseteq (S_{\bar{\lambda}})(F)$ dir.

Sonuç 6.1.6 $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in (0,1]$ olmak üzere Teorem 4.2.1 den aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

- i. $\tilde{\alpha} \equiv \tilde{\beta}$ ise $[V, \bar{\lambda}]^{\tilde{\alpha}}(F) = [V, \bar{\lambda}]^{\tilde{\beta}}(F)$ dir,
- ii. $\tilde{\alpha} \in (0,1]$ için $[V, \bar{\lambda}]^{\tilde{\alpha}}(F) \subseteq [V, \bar{\lambda}](F)$ dir.

Sonuç 6.1.7. Teorem 4.2.2 den aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

- i. $\tilde{\alpha} \in (0,1]$ olmak üzere, $X = (X_{jk})$ dizisi X_0 fuzzy sayısına $\tilde{\alpha}$. dereceden kuvvetli $\bar{\lambda}$ - toplanabilir ise bu dizi X_0 fuzzy sayısına $\tilde{\alpha}$. dereceden $\bar{\lambda}$ - istatistiksel yakınsaktır yani $[V, \bar{\lambda}]^{\tilde{\alpha}}(F) \subset (S_{\bar{\lambda}}^{\tilde{\alpha}})(F)$ dir.
- ii. $\tilde{\alpha} \in (0,1]$ olmak üzere, $X = (X_{jk})$ dizisi X_0 fuzzy sayısına $\tilde{\alpha}$. dereceden kuvvetli $\bar{\lambda}$ - toplanabilir ise bu dizi X_0 fuzzy sayısına $\bar{\lambda}$ - istatistiksel yakınsaktır yani $[V, \bar{\lambda}]^{\tilde{\alpha}}(F) \subset (S_{\bar{\lambda}})(F)$ dir .

Sonuç 6.1.8. Teorem 5.1.1 den eğer bir $X = (X_{jk})$ çift fuzzy sayı dizisi X_0 fuzzy sayısına $\tilde{\alpha}$. dereceden lacunary istatistiksel yakınsak ise, $\tilde{\alpha} \leq 1$ olduğundan X_0 sayısına lacunary istatistiksel yakınsaktır. Yani, her bir $\tilde{\alpha} \in (0,1]$ için $(S_{\theta_{r,s}}^{\tilde{\alpha}})(F) \subseteq (S_{\theta_{r,s}})(F)$ dir.

Sonuç 6.1.9. $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in (0, \infty)$ olmak üzere Teorem 5.2.1 den aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

- i. $\tilde{\alpha} \equiv \tilde{\beta}$ ise $N_{\theta_{r,s}}^{p\tilde{\alpha}}(F) = N_{\theta_{r,s}}^{p\tilde{\beta}}(F)$ dir,
- ii. $\tilde{\alpha} \in (0, 1]$ için $N_{\theta_{r,s}}^{p\tilde{\alpha}}(F) \subseteq N_{\theta_{r,s}}^p(F)$ dir.

Sonuç 6.1.10. $\tilde{\alpha} > 0$ olmak üzere, Teorem 5.2.2 ve Teorem 5.2.3. den

$1 < \liminf q_r \leq \limsup q_r^{\tilde{\alpha}} < \infty$ ve $1 < \liminf \bar{q}_s \leq \limsup \bar{q}_s^{\tilde{\alpha}} < \infty$ ise $N_{\theta_{r,s}}^{p\tilde{\alpha}}(F) = W_2^{p\tilde{\alpha}}(F)$ elde edilir.

KAYNAKLAR

1. Zadeh, L. A., 1965. Fuzzy Sets. **Information and Control**, **8**: 338-353.
2. Chang, S. L., Zadeh, L. A., 1972. On fuzzy mapping and control. **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics**, **2**: 30-34.
3. Matloka, M., 1986. Sequences of fuzzy numbers. **Busefal**, **28**: 28-37.
4. Fast, H., 1951. Sur la convergence statistique. **Colloquium Mathematicum**, **2**: 241-244.
5. Nuray, F., Savaş, E., 1995. Statistical convergence of sequence of fuzzy numbers. **Mathematica Slovaca**, **45** (3): 269-273.
6. Kwon, J. S., 2000. On statistical and p – Cesàro convergence of fuzzy numbers. **Korean Journal of Computational and Applied Mathematics**, **7** (1): 195–203.
7. Savaş, E., 2000. On strongly λ -summable sequences of fuzzy numbers. **Information Sciences**, **125** (1-4): 181-186.
8. Nuray, F., 1998. Lacunary statistical convergence of sequences of fuzzy numbers. **Fuzzy Sets and Systems**, **(99)**: 353-355.
9. Savaş, E., 1996. A note on double sequences of fuzzy numbers. **Turkish Journal of Mathematics**, **20**: 175–178.
10. Savaş, E., Mursaleen, M. , 2004. On statistically convergent double sequences of fuzzy numbers. **Information Sciences**, **162**: 183–192.
11. Gadjiev, A. D., Orhan, C., 2002. Some approximation theorems via statistical convergence. **Rocky Mountain Journal Mathematics**, **32** (1): 129–138.
12. Çolak, R., 2010. Statistical convergence of order α . **Modern Methods in Analysis and Its Applications**, Anamaya Publication, 121–129.

13. Altınok, H., Altın, Y., Işık, M., 2012. Statistical convergence and strong p -Cesàro summability of order β in sequences of fuzzy numbers. **Iranian Journal of Fuzzy Systems**, **9** (2): 63–73.
14. Çolak, R., Altın, Y., 2013. Statistical convergence of double sequences of order α . **Journal of Function Spaces and Applications**, **2013** (Article ID 682823): 5 pages.
15. Çolak, R., Bektaş, Ç. A., 2011. λ -statistical convergence of order α . **Acta Mathematica Scientia**, **31B** (3): 953-959.
16. Altınok, H., 2012. On λ -statistical convergence of order β of sequences of fuzzy numbers. **International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems**, **20** (2): 303-314.
17. Savaş, E., 2008. On $\overline{\lambda}$ -statistically convergent double sequences of fuzzy numbers. **Journal of Inequalities and Applications**, **2008** (Article ID 147827): 6 pages.
18. Patterson, R. F., Savaş, E., 2005. Lacunary statistical convergence of double sequences. **Mathematical Communications** **10** (2005): 55-61.
19. Çakan, C., Altay, B., Çoşkun, H., 2010. Double lacunary density and lacunary statistical convergence of double sequences. **Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica**, **47** (1): 35-45.
20. Şengül, H., Et, M., 2014. On lacunary statistical convergence of order α . **Acta Mathematica Scientia**, **34B** (2): 473-482.
21. Schoenberg, I.J., 1959. The integrability of certain functions and related summability methods. **American Mathematical Monthly**, **66**: 361-375.
22. Fridy, J.A., 1985. On statistical convergence. **Analysis**, **5**: 301-313.
23. Šalát, T., 1980. On statistically convergent sequences of real numbers. **Mathematica Slovaca**, **30** (2): 139-150.

24. Connor, J.S., 1988. The statistical and strongly p-Cesàro convergence of sequences. **Analysis**, **8**: 47-63.
25. Maddox, I.J., 1988. Elements of Functional Analysis. Cambridge University Press, Second Edition.
26. Rath, D., Tripathy, B.C., 1994. On statistically convergent and statistically Cauchy sequences. **Indian Journal of Pure and Applied Mathematics**, **25** (4): 381-386.
27. Fridy, J.A., Orhan, C., 1993. Lacunary statistical summability. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, **173**: 497-504.
28. Mursaleen, M., 2000. λ – statistical convergence. **Mathematica Slovaca**, **50** (1): 111-115.
29. Niven, I., Zuckerman, H. S., Montgomery, H. L., 1991. An Introduction to The Theory of Numbers. Wiley, New York, Fifth Edition.
30. Powell, R.E., Shah, S.M., 1972. Summability Theory and Its Applications. Van Nostrand-Reinhold, London.
31. Leindler, L., 1965. Über die verallgemeinerte de la Vallée-Poussinsche summierbarkeit allgemeiner Orthogonalreihen. **Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica**, **16**: 375-387.
32. Freedman, A.R., Sember, J.J., Raphael, R., 1978. Some p-Cesàro-type summability spaces. **Proceedings of the London Mathematical Society**, **3** (37): 508-520.
33. Moore, R. E., 1979. Methods and Applications of Interval Analysis. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.
34. Diamond, P., Kloeden, P., 1994. Metric Spaces of Fuzzy Sets: Theory and Applications. World Scientific, Singapore.
35. Puri, M. L., Ralescu, D. A., 1983. Differentials of fuzzy functions. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, **91** (2): 552-558.

36. Puri, M. L., Ralescu, D. A., 1986. Fuzzy random variables. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, **114** (2): 409-422.
37. Bhunia, S., Das, P., Pal, S. K. , 2012. Restricting statistical convergence. **Acta Mathematica Hungarica**, **134** (1):153-161.



ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı, Soyadı: Funda BABAARSLAN

Uyruğu: Türkiye (TC)

Doğum Tarihi ve Yeri: 6 Kasım 1986, Antalya

Medeni Durumu: Evli

Tel: +90 354 2421021#2586

Fax: +90 3542421022

E-mail: funda.kocabiyik@bozok.edu.tr

Yazışma Adresi: Bozok Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü 66100

Yozgat/TÜRKİYE

EĞİTİM

Derece	Kurum	Mezuniyet Tarihi
Yüksek Lisans	EÜ Fen Bilimleri Enstitüsü	2011
Lisans	SDÜ Fen-Edebiyat Fakültesi	2009
Lise	Kumluca Anadolu Lisesi, Kumluca, Antalya	2004

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görev
2011- Halen	Bozok Üniversitesi FEF Matematik Bölümü	Öğretim Görevlisi

YABANCI DİL

İngilizce