

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**NANOTEKNOLOJİDE YEREL OLMAYAN ÇUBUK TEORİSİNİN STATİK
VE DİNAMİK PROBLEMLERİ**

DOKTORA TEZİ

Olca OLDAÇ

Makina Mühendisliği Anabilim Dalı

Makina Mühendisliği Programı

NİSAN 2016

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**NANOTEKNOLOJİDE YEREL OLMAYAN ÇUBUK TEORİSİNİN STATİK
VE DİNAMİK PROBLEMLERİ**

DOKTORA TEZİ

**Olca OLDAÇ
(503022010)**

Makina Mühendisliği Anabilim Dalı

Makina Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ekrem TÜFEKÇİ

NİSAN 2016

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 503022010 numaralı Doktora Öğrencisi Olcay OLDAÇ, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “NANOTEKNOLOJİDE YEREL OLMAYAN ÇUBUK TEORİSİNİN STATİK VE DİNAMİK PROBLEMLERİ” başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. Ekrem TÜFEKÇİ**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Ata MUĞAN**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Oğuz ALTAY
İstanbul Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Uğur GÜVEN
Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Cüneyt FETVACI
İstanbul Üniversitesi

Teslim Tarihi : 07 Mart 2016
Savunma Tarihi : 11 Nisan 2016





Eşime ve aileme,



ÖNSÖZ

Günümüzde cihazların özellikleri büyük bir hızla artarken, boyutları da aynı hızla küçülmektedir. Malzeme boyutları nanometre mertebelerine indiğinde, malzemelerin yeni ve mükemmel fiziksel özellikleri ortaya çıkmaktadır. Atomların ve moleküllerin dizilişini tasarlayarak olağanüstü özelliklere sahip yeni yapay malzemeleri ortaya çıkaran, bunlarla nano boyutlarda cihazları ve sistemleri tasarlayan bu yeni teknolojiye nanoteknoloji denmektedir. Nanoteknolojinin en önemli temel alanlarından biri nanomekaniktir. Nanomekanikğin temel çalışma konusu, nano boyuttaki sistemlerin kuvvet ve yerdeğiştirme ilişkilerinin, dinamik davranışlarının analizi ile fonksiyonel ve elastik karakteristiklerinin incelenmesidir. Karbon nanotüplerin keşfinden sonra, nanomekanik konusunda çalışmalar yoğunlaşmıştır. Son zamanlarda, nano elektromekanik sistemlere (NEMS) olan ilgi, oldukça artmıştır.

Bu çalışmada, yerel olmayan elastisite teorisinin genel denklemleri, silindirik koordinatlarda düzenlenerek çubuk teorisine uygulanmıştır. Değişken eğrilikli ve değişken kesitli olduğu düşünölen çubukların düzlem içi statik ve dinamik problemleri incelenmiştir. Denklemlerin kesin analitik çözümü, başlangıç değerleri yöntemiyle elde edilmiştir.

Çalışmada, nano boyutlardaki çubuk problemlerinde, yerel olmayan elastisitenin kullanılmasının klasik elastisiteye göre çok daha üstün olduğunu göstermek ve nanoyapıların mekanik davranışlarını anlamada yerel olmayan etkilerin önemli olduğunu göstermek amaçlanmıştır.

Bu çalışma TÜBİTAK tarafından 112M404 no.lu “Nanoteknoloji Uygulamalarındaki Eğri Eksenli Çubukların Statik ve Dinamik Problemlerinin Yerel Olmayan Elastisite Teorisi İle Analitik Çözümü” başlıklı proje ile desteklenmiştir. Çalışma, ayrıca İTÜ Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi tarafından da desteklenmiştir.

Değerli tecrübesi ve bilgisi ile çalışmamın her aşamasında bana yol gösteren ve akademik çalışma prensiplerini kazandıran saygıdeğer hocam Prof. Dr. Ekrem TÜFEKÇİ’ye ve değerli arkadaşım Araş. Gör. Yük. Müh. Serhan Aydın AYA’ya teşekkür ederim.

Bu akademik çalışmanın oluşması için, bana her zaman destek olan annem ve babam ile sevgili eşim Özen İLHAN OLDAÇ’a da teşekkürlerimi sunarım.

Mart 2016

Olca OLDAÇ
(Mak.Yük.Mühendisi)



İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ.....	vii
İÇİNDEKİLER	ix
KISALTMALAR	xi
SEMBOLLER	xiii
ÇİZELGE LİSTESİ.....	xv
ŞEKİL LİSTESİ.....	xvii
ÖZET.....	xxiii
SUMMARY.....	xxvii
1. GİRİŞ.....	1
2. NANOTEKNOLOJİDE ÇUBUKLARIN STATİK VE DİNAMİK DAVRANIŞLARI ÜZERİNE YAPILAN ÇALIŞMALAR	3
3. EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLARIN DÜZLEM İÇİ STATİK VE DİNAMİK DAVRANIŞLARINI İFADE EDEN YEREL OLMAYAN DENKLEMLER	11
3.1 Çubukların Düzlem İçi Statik Davranışını İfade Eden Yerel Olmayan Denklemler	11
3.2 Çubukların Düzlem İçi Dinamik Davranışını İfade Eden Yerel Olmayan Denklemler	24
4. DÜZLEM İÇİ STATİK DAVRANIŞI İFADE EDEN YEREL OLMAYAN ÇUBUK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ.....	33
4.1 Çember Eksenli Sabit Kesitli Nano Çubuğun Asal Matrisi	40
4.2 Parabol Eksenli Ve Değişken Kesitli Nano Çubuğun Asal Matrisi	42
4.3 Parabol Eksenli Ve Değişken Kesitli Nano Çubuğun Asal Matrisinin Tersi... ..	45
5. DÜZLEM İÇİ STATİK DAVRANIŞLA İLGİLİ ÖRNEKLER VE DAVRANIŞA ETKİ EDEN PARAMETRELERİN İNCELENMESİ	49
5.1 Serbest Ucundan F_n ile Yüklü, $\pi/2$ Açıklığına Sahip, Çember Eksenli Sabit Kesitli Ankastre-Serbest Çubuk	50
5.2 Serbest Ucundan F_n ile Yüklü, π Açıklığına Sahip, Çember Eksenli Sabit Kesitli Ankastre-Serbest Çubuk	52
5.3 Merkezinden Geçen Kuvvetlerle Yüklü Nano Çember (Nano Ring)	53
5.4 Simetrik Olmayan Yükleme Durumları	55
5.4.1 θ_K Koordinatından F_{nK} etkiyen ankastre-ankastre mesnetli çubuk	56
5.4.2 θ_K Koordinatından M_{bK} etkiyen ankastre-ankastre mesnetli çubuk	58
5.4.3 θ_K Koordinatından F_{nK} etkiyen ankastre-mafsals mesnetli çubuk.....	61
5.4.4 θ_K Koordinatından M_{bK} etkiyen ankastre-mafsals mesnetli çubuk.....	63
5.5 Çeşitli Parametrelerin Nano Çubukların Statik Davranışına Etkisi	65
5.5.1 Nano çubukların statik davranışına sınır şartlarının etkisi.....	72
5.5.2 Boyut parametresi R/γ 'nın ve narinlik oranı λ 'nın etkisi	75
5.5.3 Boyut parametresi R/γ ve çubuk açıklığı θ_T 'nin etkisi	76
5.5.4 Narinlik oranı λ 'nın ve çubuk açıklığı θ_T 'nin etkisi.....	78
5.6 Yayılı Yüklerle Yüklü Çubuk Problemleri	80

5.6.1 Üniform q_n yayılı yüküyle yüklü sabit kesitli ankastre-ankastre çember eksenli çubuk.....	80
5.6.2 Değişken q_n yayılı yüküyle yüklü sabit kesitli ankastre-ankastre çember eksenli çubuk.....	81
5.6.3 Üniform q_n yayılı yüküyle yüklü sabit kesitli mafsallı-mafsallı çember eksenli çubuk.....	85
5.6.4 Değişken q_n yayılı yüküyle yüklü değişken kesitli parabol eksenli çubuk	92
6. ÇUBUKLARIN DÜZLEM İÇİ DİNAMİK PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ VE DAVRANIŞA ETKİ EDEN PARAMETRELERİN İNCELENMESİ.....	97
6.1 Çember Eksenli Sabit Kesitli Çubukların Titreşim Problemlerinin Çözümü ..	97
6.1.1 Çember eksenli sabit kesitli çubukların mod şekilleri	100
6.1.2 Çember eksenli sabit kesitli çubukların titreşimlerine etki eden parametrelerin incelenmesi	103
6.2 Değişken Eğrilikli Ve Değişken Kesitli Çubukların Titreşimleri	109
6.3 Çember Eksenli, Değişken Kesitli Çubukların Titreşimlerine Çeşitli Parametrelerin Etkileri.....	113
6.4 Değişken Eğrilikli Ve Değişken Kesitli Çubukların Titreşimlerine Çeşitli Parametrelerin Etkileri.....	116
7. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	123
KAYNAKLAR.....	133
ÖZGEÇMİŞ.....	141

KISALTMALAR

DC	: Doğru Akım
MD	: Atomistik/Moleküler Dinamik Simülasyonlar
MEMS	: Mikro Elektro Mekanik Sistemler
NEMS	: Nano Elektro Mekanik Sistemler





SEMBOLLER

$A(\theta)$	: Diferansiyel denklem takımının katsayılar matrisi
A	: Çubuğun dik kesit alanı
b	: Çubuk kesitinin derinliği
c	: Boyutsuz frekans
E	: Elastiklik modülü
F_n, F_b, F_t	: Kesite ait iç kuvvet bileşenleri
$F_n^{nl}, F_b^{nl}, F_t^{nl}$	: Kesite ait yerel olmayan iç kuvvet bileşenleri
G	: Kayma modülü
h	: Çubuk kesitinin genişliği
I_n, I_b	: Çubuk eğrisinin normal ve binormal eksenlerine göre kesitin eylemsizlik momentleri
r, θ, z	: Silindirik koordinatları belirten indisler
∇^2	: Laplasyen
K	: Rijitlik matrisi
k_n	: Kayma gerilmesinin kesite üniform yayılmadığını gösteren sabit
σ_{kl}	: Klasik elastisite teorisindeki gerilme tensörü
σ_{kl}^{nl}	: Yerel olmayan elastisite teorisindeki gerilme tensörü
M_n, M_b, M_t	: Kesite ait iç moment bileşenleri
$M_n^{nl}, M_b^{nl}, M_t^{nl}$	: Kesite ait yerel olmayan iç moment bileşenleri
m_n, m_b, m_t	: Çubuğa etkiyen yayılı dış moment bileşenleri
n, b, t	: Normal, binormal ve teğetsel koordinatları belirten indisler
q_n, q_b, q_t	: Çubuğa etkiyen yayılı dış kuvvet bileşenleri
r	: Silindirik koordinat
$\bar{r}$	: Kesit içindeki radyal koordinat
R	: Eğrilik yarıçapı
$\sigma_t, \sigma_{nt}, \sigma_{tb}$	: Frenet koordinat sisteminde çubuk teorisindeki gerilme bileşenleri
u, v, w	: Yer değiştirme bileşenleri
Y	: Asal matris
y	: Diferansiyel denklem takımının değişkenler vektörü
y_0	: Başlangıç değerleri vektörü
ρ	: Özgül kütle
λ	: Narinlik oranı
ω	: Açısal frekans
$\Omega_n, \Omega_b, \Omega_t$	: Kesite ait dönme açısının bileşenleri
θ	: Açısal koordinat
ν	: Poisson oranı

e_0	: Boyutsuz malzeme sabiti
a	: Atomik mesafe
γ	: Yerel olmayan boyut faktörü
R/γ	: Boyut parametresi
ω_{nl}	: Yerel olmayan frekans
ω_l	: Yerel frekans
η	: Kesit değişim katsayısı



ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 5.1 : Çeşitli yükleme ve mesnetleme şartlarındaki çubukların yerel ve yerel olmayan yer değiştirme ve dönme açıları oranları. ($\theta_T = 120^\circ$, $\lambda = 50$, $R/\gamma = 1$).	74
---	-----------





ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 3.1 : Eğri eksenli bir çubukta, Frenet ve silindirik koordinat eksenleri.	13
Şekil 5.1 : Değişken eğrilikli ve kesitli değişken yüklerin etkisindeki çubuk.....	50
Şekil 5.2 : $\pi/2$ açıklığı olan, çember eksenli sabit kesitli ve ankastre-serbest mesnetli çubuk.	50
Şekil 5.3 : Açıklığı π olan, çember eksenli sabit kesitli ve ankastre-serbest mesnetli çubuk.	52
Şekil 5.4 : Çapı doğrultusunda kuvvetle yüklü sabit kesitli nano çember (nano ring).	53
Şekil 5.5 : Nano çemberin yer değiştirme eğrileri (a) yerel ve yerel olmayan teoriyle elde edilen (b) tüm etkilerin incelendiği yerel olmayan teoriyle elde edilen.	55
Şekil 5.6 : θ_K koordinatından F_{nK} , F_{tK} ve M_{bK} tekil yükleri etkileyen 120° açıklığı olan, sabit kesitli çember eksenli nano çubuk.	56
Şekil 5.7 : Yerel ve yerel olmayan teoriyle elde edilen yer değiştirme eğrileri. ($\theta_T=120^\circ$, $\lambda=50$, $R/\gamma=1$, $\theta_K=30^\circ$, F_{nK} , ankastre-ankastre).. ...	56
Şekil 5.8 : Yerel ve yerel olmayan teoriyle elde edilen dönme açısı (Ω_b) eğrileri. ($\theta_T=120^\circ$, $\lambda=50$, $R/\gamma=1$, $\theta_K=30^\circ$, F_{nK} , ankastre-ankastre)	57
Şekil 5.9 : Yerel ve yerel olmayan teoriyle elde edilen eğilme momenti (M_b) eğrileri. ($\theta_T=120^\circ$, $\lambda=50$, $R/\gamma=1$, $\theta_K=30^\circ$, F_{nK} , ankastre-ankastre)	57
Şekil 5.10 : Yerel ve yerel olmayan teorilerle elde edilen teğet doğrultusundaki kuvvet (F_t) eğrileri. ($\theta_T=120^\circ$, $\lambda=50$, $R/\gamma=1$, $\theta_K=30^\circ$, F_{nK} , ankastre-ankastre)	58
Şekil 5.11 : Yerel ve yerel olmayan teorilerle elde edilen normal doğrultusundaki kuvvet (F_n) eğrileri. ($\theta_T=120^\circ$, $\lambda=50$, $R/\gamma=1$, $\theta_K=30^\circ$, F_{nK} , ankastre-ankastre)..	58
Şekil 5.12 : Yerel ve yerel olmayan teoriyle elde edilen yer değiştirme eğrileri. ($\theta_T=120^\circ$, $\lambda=50$, $R/\gamma=1$, $\theta_K=30^\circ$, M_{bK} , ankastre-ankastre).....	59
Şekil 5.13 : Yerel ve yerel olmayan teoriyle elde edilen dönme açısı (Ω_b) eğrileri. ($\theta_T=120^\circ$, $\lambda=50$, $R/\gamma=1$, $\theta_K=30^\circ$, M_{bK} , ankastre-ankastre).. ...	59
Şekil 5.14 : Yerel ve yerel olmayan teoriyle elde edilen moment (M_b) eğrileri. ($\theta_T=120^\circ$, $\lambda=50$, $R/\gamma=1$, $\theta_K=30^\circ$, M_{bK} , ankastre-ankastre)....	60
Şekil 5.15 : Yerel ve yerel olmayan teoriyle elde edilen teğet doğrultusundaki kuvvet (F_t) eğrileri. ($\theta_T=120^\circ$, $\lambda=50$, $R/\gamma=1$, $\theta_K=30^\circ$, M_{bK} , ankastre-ankastre)	60
Şekil 5.16 : Yerel ve yerel olmayan teoriyle elde edilen normal doğrultusundaki kuvvet (F_n) eğrileri. ($\theta_T=120^\circ$, $\lambda=50$, $R/\gamma=1$, $\theta_K=30^\circ$, M_{bK} , ankastre-ankastre)	60
Şekil 5.17 : Yerel ve yerel olmayan teoriyle elde edilen yer değiştirme eğrileri. ($\theta_T=120^\circ$, $\lambda=100$, $R/\gamma=1$, $\theta_K=30^\circ$, F_{nK} , ankastre-mafsal).. ...	61
Şekil 5.18 : Yerel ve yerel olmayan teoriyle elde edilen dönme açısı (Ω_b) eğrileri. ($\theta_T=120^\circ$, $\lambda=100$, $R/\gamma=1$, $\theta_K=30^\circ$, F_{nK} , ankastre-mafsal).. ...	61

Şekil 5.19 : Yerel ve yerel olmayan teoriyle elde edilen eğilme momenti (M_b) eğrileri. ($\theta_T=120^\circ$, $\lambda=100$, $R/\gamma=1$, $\theta_K=30^\circ$, F_{nK} , ankastre-mafsalsal).....	62
Şekil 5.20 : Yerel ve yerel olmayan teoriyle elde edilen teğet doğrultusundaki kuvvet (F_t) eğrileri. ($\theta_T=120^\circ$, $\lambda=100$, $R/\gamma=1$, $\theta_K=30^\circ$, F_{nK} , ankastre-mafsalsal).....	62
Şekil 5.21 : Yerel ve yerel olmayan teoriyle elde edilen normal doğrultusundaki kuvvet (F_n) eğrileri. ($\theta_T=120^\circ$, $\lambda=100$, $R/\gamma=1$, $\theta_K=30^\circ$, F_{nK} , ankastre-mafsalsal).....	62
Şekil 5.22 : Yerel ve yerel olmayan teorilerle elde edilen yer değiştirme eğrileri. ($\theta_T=120^\circ$, $\lambda=100$, $R/\gamma=1$, $\theta_K=30^\circ$, M_{bK} , ankastre-mafsalsal)....	63
Şekil 5.23 : Yerel ve yerel olmayan teorilerle elde edilen dönme açısı (Ω_b) eğrileri. ($\theta_T=120^\circ$, $\lambda=100$, $R/\gamma=1$, $\theta_K=30^\circ$, M_{bK} , ankastre-mafsalsal)....	63
Şekil 5.24 : Yerel ve yerel olmayan teorilerle elde edilen moment (M_b) eğrileri. ($\theta_T=120^\circ$, $\lambda=100$, $R/\gamma=1$, $\theta_K=30^\circ$, M_{bK} , ankastre-mafsalsal).....	64
Şekil 5.25 : Yerel ve yerel olmayan teorilerle elde edilen teğet doğrultusundaki kuvvet (F_t) eğrileri. ($\theta_T=120^\circ$, $\lambda=100$, $R/\gamma=1$, $\theta_K=30^\circ$, M_{bK} , ankastre-mafsalsal).....	64
Şekil 5.26 : Yerel ve yerel olmayan teorilerle elde edilen normal doğrultusundaki kuvvet (F_n) eğrileri. ($\theta_T=120^\circ$, $\lambda=100$, $R/\gamma=1$, $\theta_K=30^\circ$, M_{bK} , ankastre-mafsalsal).....	65
Şekil 5.27 : Orta noktasından bir F_0 tekil kuvvetiyle yüklü ankastre-ankastre mesnetli, sabit kesitli çember eksenli çubuk.	65
Şekil 5.28 : Yerel ve yerel olmayan yer değiştirme oranları u_0/u_{oL} 'ye R/γ 'nın etkisi (Farklı λ değerleri için. Ankastre-ankastre).	66
Şekil 5.29 : Yerel ve yerel olmayan yer değiştirme oranları u_0/u_{oL} 'ye R/γ 'nın etkisi (Farklı etkilerin göz önüne alındığı durum için. Ankastre-ankastre).....	67
Şekil 5.30 : Farklı narinlik değerleri için boyut parametresi R/γ nin yerel (klasik) ve yerel olmayan moment oranlarına (M_{b0}/M_{boL}) etkisi. Ankastre-ankastre.	68
Şekil 5.31 : Yerel ve yerel olmayan moment oranları M_{b0}/M_{boL} 'ye R/γ 'nın etkisi (Farklı etkilerin göz önüne alınması durumu için). Ankastre-ankastre... ..	68
Şekil 5.32 : Yerel ve yerel olmayan yer değiştirme sonuçları ($R/\gamma = 1$, $\theta_T = 120^\circ$, $\lambda = 100$, ankastre- ankastre).....	69
Şekil 5.33 : Yerel ve yerel olmayan yer değiştirme sonuçları ($R/\gamma = 1$, $\theta_T = 30^\circ$, $\lambda = 100$, ankastre- ankastre).....	70
Şekil 5.34 : Farklı etkilerin göz önüne alınmasıyla elde edilen yerel olmayan yer değiştirme sonuçları ($R/\gamma = 1$, $\theta_T = 30^\circ$, $\lambda = 100$, ankastre- ankastre).....	70
Şekil 5.35 : $R/\gamma = 1$, $\theta_T = 120^\circ$ ve $\lambda = 50$ olan çubuk için yerel ve yerel olmayan teorilerle elde edilen dönme açısı diyagramı. Ankastre-ankastre.....	71
Şekil 5.36 : $R/\gamma = 1$, $\theta_T = 120^\circ$ ve $\lambda = 50$ olan çubuk için yerel ve yerel olmayan teorilerle elde edilen binormal moment diyagramı. Ankastre-ankastre.	71
Şekil 5.37 : $R/\gamma = 1$, $\theta_T = 120^\circ$ ve $\lambda = 50$ olan çubuk için yerel ve yerel olmayan teorilerle elde edilen teğetsel kuvvet diyagramı. Ankastre-ankastre.....	71
Şekil 5.38 : $R/\gamma = 1$, $\theta_T = 120^\circ$ ve $\lambda = 50$ olan çubuk için yerel ve yerel olmayan teorilerle elde edilen normal kuvvet diyagramı. Ankastre-ankastre....	72
Şekil 5.39 : Yerel ve yerel olmayan (a) yer değiştirme (b) dönme açısı (c) binormal moment (d) teğetsel kuvvet (e) normal kuvvet sonuçları (mafsal-ankastre, $\theta_T = 120^\circ$, $\lambda = 50$, $R/\gamma = 1$).	72

Şekil 5.40 : Farklı sınır koşulları için R/γ boyut parametresinin yer değiştirme oranına etkisi.	73
Şekil 5.41 : Yerel ve yerel olmayan yer değiştirmelerin oranına (u_0/u_{oL}) boyut parametresi (R/γ) ve narinlik oranının (λ) etkisi. Ankastre-ankastre..	75
Şekil 5.42 : Yerel ve yerel olmayan momentlerin oranına (M_{b0}/M_{boL}) boyut parametresi (R/γ) ve narinlik oranının (λ) etkisi. Ankastre-ankastre..	76
Şekil 5.43 : Yerel ve yerel olmayan yer değiştirme oranına u_0/u_{oL} boyut parametresi R/γ ve çubuk açıklığının θ_T etkisi. Ankastre-ankastre.	77
Şekil 5.44 : Yerel ve yerel olmayan moment oranına (M_{b0}/M_{boL}) boyut parametresi R/γ ve çubuk açıklığının θ_T etkisi. Ankastre-ankastre.	78
Şekil 5.45 : Yerel ve yerel olmayan yer değiştirme oranına u_0/u_{oL} çubuk açıklığı θ_T ve narinlik oranı λ 'nin etkisi. Ankastre-ankastre.	79
Şekil 5.46 : Yerel ve yerel olmayan moment oranına M_{b0}/M_{boL} narinlik oranı λ ve çubuk açıklığı θ_T 'nin etkisi. Ankastre-ankastre.....	79
Şekil 5.47 : Normal eksen doğrultusunda üniform q_n yayılı yüklü çember eksenli ankastre-ankastre çubuk.	80
Şekil 5.48 : Değişken q_n yayılı yükü etkisindeki, sabit kesitli çember eksenli çubuğun yer değiştirme grafiği. ($\theta_T=120^\circ$, $\lambda=50$, $R/\gamma=1$, ankastre-ankastre)	82
Şekil 5.49 : Değişken q_n yayılı yükü etkisindeki, sabit kesitli çember eksenli çubuğun dönme açısı grafiği. ($\theta_T=120^\circ$, $\lambda=50$, $R/\gamma=1$, ankastre-ankastre)	82
Şekil 5.50 : Değişken q_n yayılı yükü etkisindeki, sabit kesitli çember eksenli çubuğun eğilme momenti grafiği. ($\theta_T=120^\circ$, $\lambda=50$, $R/\gamma=1$, ankastre-ankastre).....	83
Şekil 5.51 : Değişken q_n yayılı yükü etkisindeki, sabit kesitli çember eksenli çubuğun normal doğrultudaki (F_n) kuvvet grafiği. ($\theta_T=120^\circ$, $\lambda=50$, $R/\gamma=1$, ankastre-ankastre)	83
Şekil 5.52 : Değişken q_n yayılı yükü etkisindeki, sabit kesitli çember eksenli çubuğun teğetsel doğrultudaki (F_t) kuvvet grafiği. ($\theta_T=120^\circ$, $\lambda=50$, $R/\gamma=1$, ankastre-ankastre)	84
Şekil 5.53 : Sabit kesitli çember eksenli çubuğun yerel (kırmızı,kesikli çizgi) ve yerel olmayan (kırmızı sürekli çizgi) yer değiştirmeleri ($\lambda = 150$), mafsalsal-mafsalsal).....	85
Şekil 5.54 : Sabit kesitli çember eksenli çubuğun yerel (kırmızı,kesikli çizgi) ve yerel olmayan (kırmızı sürekli çizgi) yer değiştirmeleri ($\lambda = 50$), mafsalsal-mafsalsal.	86
Şekil 5.55 : Yerel ve yerel olmayan teoriyle elde edilen yer değiştirmelere, eksenel uzama ve kayma deformasyonunun etkileri. Mafsalsal-mafsalsal.....	86
Şekil 5.56 : Yer değiştirme oranı (u_0/u_{oL}) - boyut parametresi (R/γ) ve farklı narinlik oranları (λ) için eğriler. (a) $\theta_T = 120^\circ$, (b) $\theta_T = 30^\circ$, mafsalsal-mafsalsal.	88
Şekil 5.57 : Yer değiştirme oranının (u_0/u_{oL}) – boyut parametresi (R/γ) ile değişimi- farklı çubuk açıklığı (θ_T) için eğriler. (a) $\lambda = 50$, (b) $\lambda = 150$, mafsalsal-mafsalsal.	89
Şekil 5.58 : Boyut parametresi, narinlik oranı ve çubuk açıklığının yer değiştirme oranına etkileri. Mafsalsal-mafsalsal.	90
Şekil 5.59 : Boyut parametresi, narinlik oranı ve çubuk açıklığının moment oranına etkileri. Mafsalsal-mafsalsal.	91

Şekil 5.60 : Değişken kesitli parabol eksenli normal eksen doğrultusunda değişken q_n yayılı yükünün etkisindeki ankastre-ankastre çubuk.	92
Şekil 5.61 : Değişken q_n yayılı yükü etkisindeki, değişken kesitli parabol eksenli çubuğun yer değiştirme grafiği. ($\theta_T = 120^\circ$, $\lambda=100$, $R/\gamma=1$, ankastre-ankastre).	93
Şekil 5.62 : Değişken q_n yayılı yükü etkisindeki, değişken kesitli parabol eksenli çubuğun dönme açısı grafiği. ($\theta_T = 120^\circ$, $\lambda=100$, $R/\gamma=1$, ankastre-ankastre).....	93
Şekil 5.63 : Değişken q_n yayılı yükü etkisindeki, değişken kesitli parabol eksenli çubuğun eğilme momenti grafiği. ($\theta_T = 120^\circ$, $\lambda=100$, $R/\gamma=1$, ankastre-ankastre).	94
Şekil 5.64 : Değişken q_n yayılı yükü etkisindeki, değişken kesitli parabol eksenli çubuğun teğet doğrultusundaki kuvvet grafiği. ($\theta_T = 120^\circ$, $\lambda=100$, $R/\gamma=1$, ankastre-ankastre).	94
Şekil 5.65 : Değişken q_n yayılı yükü etkisindeki, değişken kesitli parabol eksenli çubuğun normal doğrultusundaki kuvvet grafiği. ($\theta_T = 120^\circ$, $\lambda=100$, $R/\gamma=1$, ankastre-ankastre).	95
Şekil 6.1 : Çember eksenli sabit kesitli çubuğun yerel ve yerel olmayan frekans oranlarının ω_{nl}/ω_l boyut parametresi R/γ ile değişimi ($\theta_T = 30^\circ$ ve $\lambda = 50, 150$).	99
Şekil 6.2 : Çember eksenli sabit kesitli çubuğun yerel ve yerel olmayan frekans oranlarının ω_{nl}/ω_l boyut parametresi R/γ ile değişimi ($\theta_T = 120^\circ$ ve $\lambda = 50, 150$).	99
Şekil 6.3 : Ankastre-ankastre mesnetli çubuğun birinci mod şekli ($\theta_T = 30^\circ$, $\lambda = 150$, $R/\gamma = 1$).	100
Şekil 6.4 : Ankastre-ankastre mesnetli çubuğun ikinci mod şekli ($\theta_T = 30^\circ$, $\lambda = 150$, $R/\gamma = 1$).	100
Şekil 6.5 : Ankastre-ankastre mesnetli çubuğun üçüncü mod şekli ($\theta_T = 30^\circ$, $\lambda = 150$, $R/\gamma = 1$).	101
Şekil 6.6 : Ankastre-ankastre mesnetli çubuğun dördüncü mod şekli ($\theta_T = 30^\circ$, $\lambda = 150$, $R/\gamma = 1$).	101
Şekil 6.7 : Ankastre-ankastre mesnetli çubuğun birinci mod şekli ($\theta_T = 120^\circ$, $\lambda = 150$, $R/\gamma = 1$).	102
Şekil 6.8 : Ankastre-ankastre mesnetli çubuğun ikinci mod şekli ($\theta_T = 120^\circ$, $\lambda = 150$, $R/\gamma = 1$).	102
Şekil 6.9 : Ankastre-ankastre mesnetli çubuğun üçüncü mod şekli ($\theta_T = 120^\circ$, $\lambda = 150$, $R/\gamma = 1$).	102
Şekil 6.10 : Ankastre-ankastre mesnetli çubuğun dördüncü mod şekli ($\theta_T = 120^\circ$, $\lambda = 150$, $R/\gamma = 1$).	103
Şekil 6.11 : Ankastre-ankastre mesnetli çubuğun birinci frekans katsayısı c 'nin R/γ ile değişimi ($\theta_T = 60^\circ$, $\lambda = 50$).	104
Şekil 6.12 : Ankastre-ankastre mesnetli çubuğun birinci doğal frekansının R/γ ile değişimi ($\theta_T = 60^\circ$, $\lambda = 50$).	104
Şekil 6.13 : Ankastre-ankastre mesnetli çubuğun birinci frekans katsayısı c 'nin R/γ ve θ_T ile değişimi ($\lambda = 50$).	105
Şekil 6.14 : Ankastre-ankastre mesnetli çubuğun birinci doğal frekansının R/γ ve θ_T ile değişimi ($\lambda = 50$).	105
Şekil 6.15 : Ankastre-ankastre mesnetli çubuğun birinci doğal frekansının R/γ ile değişimi ($\theta_T = 60^\circ$, $\lambda = 50$).	106

Şekil 6.16 : Ankastre-ankastre mesnetli çubuğun yerel olmayan teoriyle elde edilen birinci boyutsuz frekansının R/γ ile değişimi ($\theta_T = 60^\circ, \lambda = 50$).....	106
Şekil 6.17 : Ankastre-ankastre mesnetli çubuğun birinci doğal frekansının R ve θ_T ile değişimi ($\lambda = 50$).....	107
Şekil 6.18 : Ankastre-ankastre mesnetli çubuğun birinci boyutsuz frekansının R ve θ_T ile değişimi ($\lambda = 50$).	107
Şekil 6.19 : Ankastre-ankastre mesnetli çubuğun yerel ve yerel olmayan birinci frekans katsayıları oranının R/γ ile değişimi ($\theta_T = 60^\circ, \lambda = 50$)....	108
Şekil 6.20 : Ankastre-ankastre mesnetli çubuğun yerel ve yerel olmayan birinci frekans katsayıları oranının R/γ ve θ_T ile değişimi ($\lambda = 50$).	109
Şekil 6.21 : Değişken kesitli çubuklar.	112
Şekil 6.22 : Çember eksenli ve kesit değişimi denklem (6.11) ile bilinen ($\eta = 0,1$) çubuğun birinci mod frekans oranlarının boyut parametresi R/γ ve toplam çubuk açıklığı θ_T ile değişimi.	114
Şekil 6.23 : Çember eksenli ve kesit değişimi denklem (6.11) ile bilinen ($\eta = 0,1$) çubuğun birinci mod frekans oranlarının boyut parametresi R/γ ve toplam çubuk açıklığı θ_T ile değişimi.	114
Şekil 6.24 : Çember eksenli ve kesit değişimi denklem (6.11) ile bilinen ($\eta = 0,1$) çubuğun ikinci mod frekans oranlarının boyut parametresi R/γ ve toplam çubuk açıklığı θ_T ile değişimi.	115
Şekil 6.25 : Çember eksenli, değişken kesitli ($\eta = 0,1$) çubuğun birinci mod frekans oranlarının boyut parametresi R/γ ve toplam çubuk açıklığı θ_T ile değişimi.	115
Şekil 6.26 : Çember eksenli, değişken kesitli ($\eta = 0,1$) çubuğun ikinci mod frekans oranlarının boyut parametresi R/γ ve toplam çubuk açıklığı θ_T ile değişimi....	116
Şekil 6.27 : Parabol eksenli, değişken kesitli ($\eta = 0,1$) ve açıklığı $\theta_T = 120^\circ$ olan çubuğun birinci boyutsuz frekansına R/γ ve λ 'nın etkisi.	117
Şekil 6.28 : Parabol eksenli, değişken kesitli ve açıklığı $\theta_T = 120^\circ$ olan çubuğun ikinci boyutsuz frekansına R/γ ve λ 'nın etkisi.	117
Şekil 6.29 : Parabol eksenli, değişken kesitli ve narinlik oranı $\lambda = 100$ olan çubuğun birinci boyutsuz frekansına R/γ ve θ_T 'nin etkisi.....	118
Şekil 6.30 : Parabol eksenli, değişken kesitli ve narinlik oranı $\lambda = 100$ olan çubuğun ikinci boyutsuz frekansına R/γ ve θ_T 'nin etkisi.....	118
Şekil 6.31 : Parabol eksenli, değişken kesitli, narinlik oranı $\lambda = 100$ ve boyut parametresi $R/\gamma=1$ olan çubuğun birinci ve ikinci boyutsuz frekansına θ_T 'nin etkisi.....	119
Şekil 6.32 : Parabol eksenli, değişken kesitli ($\eta = 0,1$) çubuğun birinci mod frekans oranlarının boyut parametresi R/γ ve toplam çubuk açıklığı θ_T ile değişimi.	120
Şekil 6.33 : Parabol eksenli, değişken kesitli ($\eta = 0,1$) çubuğun birinci mod frekans oranlarının boyut parametresi R/γ ve toplam çubuk açıklığı θ_T ile değişiminin bir diğer gösterimi.	121



NANOTEKNOLOJİDE YEREL OLMAYAN ÇUBUK TEORİSİNİN STATİK VE DİNAMİK PROBLEMLERİ

ÖZET

Modern teknolojiye, cihaz özellikleri büyük bir hızla artmakta, boyutlar ise aynı hızla küçülmektedir. Malzeme boyutları küçülmeye başladıkça, özellikle, nanometre mertebelerine inildiğinde, malzemelerin yeni ve mükemmel fiziksel özellikleri ortaya çıkmaktadır. Atomların ve moleküllerin dizilişi tasarlanarak olağanüstü özelliklere sahip yeni yapay malzemeler ortaya çıkarılmaktadır. Bu malzemelerle, nano boyutlarda cihazlar ve sistemler tasarlanmaktadır. Bu yeni teknolojiye nanoteknoloji denmektedir. Nanoteknolojinin en önemli temel alanlarından biri nanomekaniktir. Nanomekanikğin çalışma konusu, nano boyuttaki sistemlerin kuvvet ve yer değiştirme ilişkilerinin ve titreşim özelliklerinin analizi ile fonksiyonel ve elastik karakteristiklerinin incelenmesidir. Özellikle, karbon nanotüplerin keşfinden sonra, nanomekanik konusundaki çalışmalar yoğunlaşmıştır. Son zamanlarda, nano elektromekanik sistemlerin (NEMS) ortaya çıkması, bunlara olan ilgiyi oldukça arttırmıştır. Literatürde yapılan ve nanotüplerin ve nanoçubukların statik ve dinamik davranışları inceleyen çalışmalar, analizlerinde üç temel yöntem kullanmışlardır:

Atom seviyesinde modelleme. Hibrid: Atom seviyesinde-sürekli ortamlar mekaniği ve Sürekli ortamlar mekaniği.

Atom seviyesinde modelleme yönteminde, genel olarak, klasik moleküler dinamik ve yoğunluk fonksiyonu teorisi kullanılmaktadır. Hibrid yöntemde ise, atomlar arası potansiyel enerji, sürekli ortam analizine doğrudan uygulanmaktadır. Sürekli ortamlar mekaniği teorisi, karbon nanotüpleri ve nano çubukları, sürekli ve homojen makro yapılar olarak ele almaktadır. Atomlar arasındaki kafes boşlukları gibi, malzeme mikro yapılarına ait özellikler ihmal edilmektedir. Klasik veya yerel sürekli ortamlar teorisinin, nano boyuttaki sistemlere uygulanabilirliğinin kısıtlı olmasının esas nedeni, atomlar arası kafes boşluklarından dolayı oluşan malzemedeki ayrık yapının, sürekli ortam kabulü ile modellemeye uygun olmamasıdır. Diğer bir deyişle, nano ölçekte, malzeme özellikleri boyuta bağlı olarak değiştiği için, nano-malzemelerin mekanik davranışının belirlenmesinde, küçük ölçek etkisinin göz önünde bulundurulması gerekmektedir. Nanometre mertebesindeki sistemlerde, küçük ölçek etkisi oldukça önemli hale gelmektedir. Böylece, nano yapılarla ilgili çalışmalarda, boyut etkisinin hesaba katıldığı yerel olmayan sürekli ortam mekaniğinin uygulanmasına başlanmıştır.

Yapılan literatür araştırmasında, çoğunlukla, doğru eksenli nano çubukların statik ve dinamik analizinin ele alındığı görülmektedir. Eğri eksenli nano çubuklarla ilgili sınırlı sayıda çalışma bulunmaktadır. Bunların bir çoğu, atom seviyesinde modelleme veya hibrid yöntemleri kullanmaktadır. Yerel olmayan elastisite teorisinin kullanıldığı az sayıdaki çalışmada ise, yerel olmayan etki olarak, sadece eğilme momenti göz önünde bulundurulmaktadır. Statik problemleri ele alan çalışmalar, sadece eğilme etkisini gözönüne almakta, kayma deformasyonu etkisini ihmal

etmekte, kesme kuvvetinin yerel olmayan etkisini göz önüne almamaktadır. Titreşim problemlerini inceleyen çalışmalarda ise, hem kayma deformasyonu hem de dönme eylemsizliği etkileri genellikle ihmal edilmektedir. Ayrıca, çözümler, çeşitli sayısal ve yaklaşık yöntemlerle elde edilmektedir.

Bu çalışmada, düzlemsel eğri eksenli nano çubukların statik ve dinamik davranışları, yerel olmayan elastisite teorisinin genel denklemleri kullanılarak incelenmiştir. Eringen tarafından verilen yerel olmayan elastisite teorisinin genel denklemleri, silindirik koordinatlarda yazılarak, çubuk teorisine uygulanmıştır. Böylece, yerel olmayan çubuk teorisi denklemleri, değişken yayılı yükleri taşıyan eğrilikli ve değişken kesitli çubuklar için elde edilmiştir. Bu denklemler kullanılarak, düzlemsel eğri eksenli çubukların düzlem içi statik ve dinamik problemleri incelenebilmektedir. Denklemlerde, hem momentlerin ve hem de kuvvetlerin yerel olmayan etkileri gözönüne alınmaktadır. Eksenel uzama ve kayma etkilerinin yanında eksenel ve kayma kuvvetlerinin yerel olmayan etkilerinin de gözönüne alındığı literatürdeki ilk çalışma bu olmuştur.

Eğri eksenli çubuk statik davranışını ifade eden denklemlerin analitik kesin çözümü, başlangıç değerleri yöntemiyle elde edilmiştir. Başlangıç değerleri yönteminin üstünlüğü; yüksek mertebe statik belirsizliklerin, problemin çözümüne ilave bir zorluk katmamasıdır. Herhangi bir bilinen sınır şartı ile kesin analitik çözüm elde etmek mümkündür. Farklı geometri ve kesite sahip çubukların asal matrislerinin analitik ifadeleri elde edilmiştir. Böylece, çubuk eksen eğrisi ve kesiti ne olursa olsun, yer değiştirme, kesit dönmesi ve kesit tesirleri değerleri eksen eğrisi boyunca analitik olarak belirlenebilmektedir. Ayrıca, teoride ortaya çıkan parametreler belirlenerek, bunların statik davranışa etkileri incelenmiştir. Boyut parametresi, çubuk açıklığı, narinlik oranı gibi bazı parametrelerin değişiminin çubuğun statik davranışına etkisini göstermek amacıyla çeşitli çubuk geometrileri, yükleme ve sınır şartları ile ilgili problemler çözülmüştür. Sonuçlar, eksenel uzama ve kayma deformasyonu etkilerini göz önüne alan ve almayan farklı durumlar için hesaplanmıştır.

Çeşitli problemler çözülmüş ve yer değiştirme, dönme açısı ve gerilme bileşenlerinin kesin analitik denklemleri elde edilmiştir. Bu çalışmada önerilen yöntemle boyut parametresi ve çeşitli geometrik parametrelerin eğri eksenli nano çubukların statik davranışına etkileri incelenmiştir. Narinlik oranı $\lambda = R \theta_t / \sqrt{I/A}$, 20 ile 150 arasında ve çubuk açıklığı (θ_t) 10° ve 180° arasında alınmıştır. Boyut parametresi $(R/\gamma)'$ nin 1 ile 10 arasında değiştiği kabul edilerek yerel olmayan boyut faktörü γ 1,56 nm olarak alınmıştır. Poisson oranı ve Young modülü sırasıyla $\nu = 0.3$ ve $E = 1 \text{ TPa}$, alınmıştır. Ancak bu çalışmada, yerel ve yerel olmayan teorilerle elde edilen sonuçların oranları verildiğinden sonuçlar bu değerlere bağlı değildir.

Çubuk statik davranışını ifade eden denklemlerden hareketle, D'Alembert prensibi yardımıyla, dinamik davranışları ifade eden denklemlere ulaşılabilir. Eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini göz önüne alan dinamik denklemlerin kesin çözümü, başlangıç değerleri yöntemiyle, düzlem içi titreşimler için elde edilmiştir. Kesin çözüm, sadece, sabit kesitli, çember eksenli çubuklar için söz konusu olmaktadır. Titreşim ile ilgili çeşitli problemler çözülerek, doğal frekanslar elde edilmiştir. Ayrıca, elde edilen frekanslar yardımıyla mod şekilleri de çizilmiştir. Boyut parametresi, çubuk açıklığı, narinlik oranı gibi bazı parametrelerin değişiminin çubuğun dinamik davranışına etkisini göstermek amacıyla çeşitli örnekler verilmiştir. Ayrıca, değişken eğrilikli ve kesitli çubuklar da,

birçok sabit eğrilikli ve kesitli çubuk elemandan oluşuyormuş gibi modellenmiş ve aynı çözüm yöntemi kullanılarak sonuç elde edilmiştir. Sonuçlar, etkilerin göz önüne alındığı ve alınmadığı farklı durumlar için hesaplanmıştır.

Bu çalışmanın temel amacı, nano boyutlardaki çubukların statik ve dinamik problemlerinde, yerel olmayan elastisitenin kullanılmasının klasik elastisiteye göre çok daha üstün olduğunu ve nanoyapıların mekanik davranışlarını anlamada yerel olmayan etkilerin önemli olduğunu göstermektir.

Çalışmada, eğri eksenli nano çubukların statik davranışları için temeli Eringen'in yerel olmayan elastisite teorisine dayanan boyuta bağlı yeni bir çubuk teorisi sunulmuştur. Yerel olmayan bünye denklemleri klasik çubuk denklemlerine uygulanmıştır. Eksenel uzama ve kayma deformasyonu etkileri ve bunlar ile eğilme momentinin boyuta bağlı etkileri analitik modelde ele alınmıştır. Kesin çözüm için başlangıç değerleri yöntemi kullanılarak sonuçlar analitik olarak elde edilmiştir.

Diğer modelleme yöntemleri bazı kusurlarından dolayı yetersiz kalmaktadır. Atomistik yaklaşımın karmaşık atomik yapıları modelleme kapasitesi yoktur ve hesaplama yönünden pahalı olmaktadır. Öte yandan, klasik sürekli ortam yaklaşımları daha basit formülasyonlar vermekte fakat boyuttan bağımsız olmaları nedeniyle yetersiz kalmaktadırlar. Çalışmaların çoğunda, nano çubuklar kusursuz şekilde düz kabul edilmektedir, fakat sensörler gibi nano teknoloji uygulamalarında kullanılmaları için eğri eksenli üretilebilmektedirler. Bu gerçekten hareketle, nano çubuk denklemleri elde edilerek kesin çözümler geliştirilmiştir.

Ayrıca, mühendislik uygulamaları için yerel olmayan bir sonlu eleman geliştirmek bu çalışmayla mümkün olabilecektir.

Nano bilim ve nano teknolojideki ilerlemeler son on yılda modern dünyayı şekillendirmiştir. Teori, modelleme ve simülasyon bu ilerlemelerde kritik bir rol oynamıştır. Burada önerilen çözüm yöntemi, MEMS ve NEMS uygulamalarındaki eğri eksenli çubuk komponentlerin tasarım ve üretimine yardımcı olacaktır.

Bu çalışmadan elde edilen sonuçların nano aygıtların mühendislik tasarımına yol göstereceği ümit edilmektedir.



STATIC AND DYNAMIC PROBLEMS OF NONLOCAL BEAM THEORY IN NANOTECHNOLOGY

SUMMARY

Today, the device features develop at a great pace, while shrinking the dimensions with the same speed. At nanometer scale, materials have new and excellent physical properties. By designing sequence of atoms and molecules to reveal artificial materials with exceptional properties, and design nano-scale devices and systems with them is a new technology called nanotechnology. One of the most important fundamental areas of nanotechnology is nanomechanics. Subjects of the study are the relations between force and displacement analysis of nano scale systems and to examine the functional and elastic characteristics of these systems. After the discovery of carbon nanotubes, extensive researches have been conducted in nanomechanics. Recently, the interest for the nano-electromechanical systems (NEMS) has increased considerably. In these studies, static and dynamic behavior of nanotubes and nanobeams has been investigated. In the analysis, three main methods have been developed and used:

Atomistic modelling. Hybrid atomistic-continuum mechanics and Continuum mechanics.

In the atomistic modeling method, in general, conventional molecular dynamics and the density functional theory are used. Interatomic potential energy is directly applied into the continuum analysis in the hybrid atomistic-continuum mechanics. Carbon nanotubes are considered as continuous and homogeneous macro-structures in the theory of continuum mechanics. The material properties of the micro-structures, as the lattice spaces between carbon atoms are neglected. The main reason of limited applicability of classical or local continuum theory to nano-scaled systems is that the assumption of continuous media is not appropriate for modeling the discrete structure of the material due to the lattice spacing between atoms. In other words, the material properties are size dependent at nanoscale and so that the small length scale effect should be taken into consideration while determining the mechanical behavior of a nano-material. The small scale effect becomes very important at the order of nanometers. Thus, in the studies of nano structures, the scale effects in these materials started to be taken into account at the implementation of nonlocal continuum mechanics.

Literature survey shows that most of the studies are mainly focused on static and dynamic analysis of nanobeams. A few of these studies have used the nonlocal elasticity theory, and only the bending moment is considered as a nonlocal effect. The studies dealing with the static problems have taken only the effect of bending into account, and the shear deformation effect has been neglected. Rotatory inertia and shear deformation effects are often neglected in the studies investigating the problems of vibration. Also, the solutions are obtained approximately by using various numerical methods.

In this study, a curved planar nanobeam having variable curvature and a variable cross-section will be discussed by using the equations of the nonlocal elasticity theory. The nonlocal constitutive equations of Eringen are arranged in cylindrical coordinate and implemented into the classical beam equations. Thus, the equations for nonlocal beams with varying curvature under varying loads are obtained. Using these equations, both static and dynamic problems of planar curved nanobeams are solved. The nonlocal effects of the three forces as well as the three moments are considered while deriving the equations. The governing equations for in-plane static problems of a nanobeam with varying curvature and cross-section bearing distributed loads are presented. The nonlocal effects of moments and forces are considered in the equations. In addition, the axial extension and shear deformation effects are considered in the analysis. This is the first study which includes the nonlocal effects of axial and shear forces in the formulation.

The resulting differential equations are solved analytically using the method of initial values. Superiority of the initial value method is that high order statical indeterminacy adds no extra difficulty to the solution. The solution can be obtained for any boundary condition. The fundamental matrix of beams with different geometries and cross-sections are obtained analytically. Thus, in any case of beam axis and cross-sections, the deformation, slope and stress resultants can be defined analytically along the beam axis. The effects of the parameters such as small scale parameter, opening angle, slenderness ratio on the static behavior of the beam are also studied. In order to assess the versatility of the method, several examples with different geometries, loading and boundary conditions are solved. The results are obtained for different cases considering or neglecting the effects of axial extension, shear deformation and rotatory inertia.

Various problems are solved and the exact analytical equations of the displacements, rotation and the stress resultants are obtained. The effects of nanoscale parameter and variation of geometric parameters on the static behavior of a circular nanobeam analyzed and discussed through the proposed method. The slenderness ratio of the beam $\lambda = R \theta_t / \sqrt{I/A}$ is changed from 20 to 150 and opening angle of the beam (θ_t) is taken as between 10° and 180° . Small scale parameter (R/γ) is considered to change from 1 to 10 and γ is taken as 1.56 nm. Poisson's ratio and Young's modulus is taken as $\nu = 0.3$ and $E = 1 \text{ TPa}$, respectively. However, in this study the results do not depend on these values, since they are given as ratio of the results of local and nonlocal theories.

The equations of motion are derived by means of d'Alembert principle. The solutions of dynamic problems of in-plane vibrations considering axial extension, shear deformation and rotatory inertia effects are presented. In the solution process, initial value method is used. Exact solution are only available for constant cross section, circular curvature nanobeams. Natural frequencies are obtained for different vibration problems. In addition, using these natural frequencies mode shapes are obtained and shown in figures. The effects of parameters such as small scale parameter, opening angle and slenderness ratio to the dynamic behaviour of beams are investigated and examples are presented. Additionally, curved beams with varying curvature and cross-section are modelled as if they consist of a lot of beams with constant cross section and circular curvature. And using same solution method the result are obtained. The results are obtained for different cases considering or neglecting the effects of axial extension, shear deformation and rotatory inertia.

The objective of this study is to show that the nonlocal elasticity is a better approach for static and dynamic analysis of nanobeams. Instead of using classical beam theory, using nonlocal elasticity theory reveals the nonlocal effects which is significant to understand the mechanical behavior of nanobeams.

A new size-dependent general beam theory is presented within the framework of Eringen's nonlocal elasticity theory for static behavior of curved nanobeams. Nonlocal constitutive equations are implemented in the classical beam equations. Axial extension and shear deformation effects and their size-dependent effects along with the size-dependent effects of bending moment are incorporated in the analytical model. Initial value method is used for the exact solution and the results are obtained analytically.

Other modeling techniques are suffering from some shortcomings. Atomistic approach is incapable of modeling complex atomic structures and computationally expensive. On the other hand, classical continuum approach gives relatively simple formulations but it is inadequate for modeling because of the size-free deficiency. In most of the studies, nanobeams are assumed to be perfectly straight beams, but they may also be fabricated curved to be used as sensors, resonators for nanotechnology applications. Motivated by this fact, the nonlocal beam equations are obtained and an exact solution is developed for the static problems of planar curved nanobeams.

Also, for engineering applications, it may be possible to develop an exact nonlocal beam finite element.

Advances in nanoscience and nanotechnology shaped the modern world in the last decade. Theory, modeling and simulation have played a critical role in these advances. With the solution method proposed herein, it would be very helpful in design and fabrication of curved beam components in MEMS and NEMS applications, particularly those whose main duties are to transfer securely the applied forces.

It is expected that the results obtained from the present study are got to instruct the engineering design of nano devices.



1. GİRİŞ

Nanometre boyutlarındaki malzemeler; makro boyutlardaki malzemelere kıyasla daha önce görülmeyen yeni üstün fiziksel, kimyasal veya biyolojik özelliklere sahip olmaktadır. Malzemeler daha kuvvetli, alabildiğine esnek, çok daha hafif veya daha farklı ısı ve elektrik iletme özelliklerine sahip olabilmektedir. Magnetik ve optik özelliklerinde önemli ölçüde artma veya azalma olabilmekte ve hatta renkleri bile değişebilmektedir (altının, nano boyutlara indikçe renginin mavi veya kırmızı olması gibi). Mevcut nano yapıya, yabancı bir atomun yapışması, o yapının elektronik özelliklerini farkedilebilir şekilde değiştirmektedir. Bir nano yapının fiziksel özellikleri ve mukavemeti onun boyutuna bağlı olarak önemli değişimler gösterebilmektedir.

Nano ölçekteki yapıların olağandışı özellikler gösterdiği farkedildikten sonra, nano yapılar oldukça fazla dikkat çekmişlerdir. Nano çubuklar ise, bir yapı elemanı olarak biosensörlerde, yarı iletken nano kablolarda, atomik kuvvet mikroskoplarında, mikro elektro mekanik sistemlerde (MEMS) ve nano elektro mekanik sistemlerde (NEMS) veya güçlendirme elemanı olarak nano kompozitlerde olduğu gibi bir çok uygulamada yaygın bir şekilde kullanılmaktadır.

Çubuklar, birçok mühendislik alanında ve öncü endüstri kollarında yapısal eleman olarak kullanılmaktadır. Mühendislik problemleri içerisinde, çubuk teorisi ve eğri eksenli çubukların davranışları geniş bir yer tutar. Eğri eksenli çubuklar, en basit yapı elemanlarından biri olarak, çok sayıda modern mühendislik yapısının temelini oluşturmaktadır. Seneler boyunca araştırmacıların ilgilendiği bir konu olmakla birlikte, eğri eksenli çubuklar üzerine yapılan çalışmalar hala devam etmektedir.

Nano malzemelerle çalışmak ve deney yapmak, çok yüksek hassasiyet ve büyük maliyetler gerektirmektedir. Bu nedenle, araştırmacılar küçük boyut etkisini hesaba katan daha iyi matematiksel modeller üzerine yoğunlaşmaktadırlar. Bu çalışmalarda karşılaşılan en önemli sorunlardan biri, geleneksel teorilerin, nanoteknolojik olguları açıklamakta yeterli olamamasıdır. Bu amaçla, bazı araştırmacılar atomistik/moleküler dinamik simülasyonları (MD) kullanmışlardır. Ancak, nano

yapıların simülasyonları, çok karmaşık olabilmektedir ve kullanılan hesaplama programlarının ve bilgisayarların kapasiteleriyle sınırlıdır. Öte yandan, sürekli ortam modeli yaklaşımı, simülasyonlara göre daha basit formüller vermekte ve hesaplamalar daha kolay olmaktadır. Klasik sürekli ortam modellerinde, bir noktadaki gerilme durumu aynı noktadaki birim şekil değişimiyle belirlenmektedir. Mikro yapılarla birlikte nano yapıların malzeme davranışları için, klasik teorisinin kullanılmasında problemler ortaya çıkmıştır. Bunun nedeni, klasik elastisite teorisinin boyuttan bağımsız tanımıdır. Malzeme özelliklerinin atomistik hesaplamaları, doğaları gereği yerel değildir. Bundan dolayı, yerel olmayan karakter sergileyen sürekli bir gerilme-şekil değiştirme modeli önerilmiştir. Son yıllarda yerel olmayan sürekli ortam mekaniği konusunda geliştirilen birçok model vardır. Bunlardan en yaygın olanı Eringen'in yerel olmayan elastisite teorisidir. Bu teoride, bir noktadaki gerilme durumu hesaplanırken, o nokta etrafındaki diğer noktalarda olan şekil değiştirmeler de hesaba katılmaktadır.

2. NANOTEKNOLOJİDE ÇUBUKLARIN STATİK VE DİNAMİK DAVRANIŞLARI ÜZERİNE YAPILAN ÇALIŞMALAR

Nano boyutlu çubuk yapılar, büyük rijitlik ve mukavemet değerleri, düşük yoğunlukları ve üstün iletkenlikleriyle, nano elektro mekanik sistemlerde, ultra duyarlı algılayıcılarda, yarı iletken nano kablolar ve atomik kuvvet mikroskoplarında temel yapı elemanları olarak kullanılmaktadır (Kong vd., 2000; Li ve Chou, 2003; Craighead, 2000; Roukes, 2001; Ekinci, 2005). Özel bir uygulama olarak, küçük boyut ve büyük yüzeyli karbon nano tüpler, yoğun kimyasal ortamlardaki dayanıklılığıyla dikkat çekmektedir (Zhao vd. 2002). Bu malzemelerin boyutları çok küçük olduğundan, deney yapmak çok güçtür. Bazı metal ve polimerlerle yapılan deneysel çalışmalardan elde edilen sonuçlar, mikro ve nano ölçekteki malzemenin mekanik özelliklerinin ve mekanik davranışının boyuta bağlı olduğunu göstermektedir. Birçok deneysel çalışmada, nano ölçekteki malzemenin elastiklik modülünün normal boyutlardaki malzemelerin elastiklik modülüne göre aşırı yüksek olduğu bulunmuştur (Treacy vd., 1996; McFarland ve Colton, 2005). Salvetat vd. (1999) karbon nanotüplerin elastik modülünün 1 TPa civarında olduğunu hesaplamıştır. Bir diğer çalışmada, McFarland ve Colton (2005) mikro konsol çubuk için ölçülen rijitlik değerlerinin klasik çubuk teorisi ile ölçülen değerlere göre 4 kat daha büyük olduğunu belirtmiştir. Bu boyuttaki yapılarla çalışmak için yüksek hassaslık gerekmektedir. Buna rağmen, metal ve polimerler ile bu mertebede yapılan deneysel çalışmalardan, mikro ve nano ölçekte malzemelerde, mekanik özelliklerin ve malzeme deformasyonu davranışının boyuta bağlı olduğu genel bir sonuç olarak elde edilmiştir. Nano malzemelerin özellikleri bariz bir biçimde normal boyutlardaki malzemelerden farklı olduğundan, uygulamada büyük bir potansiyele sahiptir.

Nano çubukların yapısal eleman olarak, biosensör (Joshi vd., 2011; Huang vd., 2012), MEMS (mikro elektro-mekanik sistemler) ve NEMS (nano elektro-mekanik sistemler) cihazlar (Ouakad ve Younis, 2010; Lee ve Campbell, 2013), yarı iletken nano kablolar (Kumar vd., 2012) gibi birçok alanda kullanımı söz konusudur.

Deneysel çalışmaların zorluğu nedeniyle, araştırmacılar, atomlar arası kafes boşlukları, tane boyutu gibi mikro ve nano ölçekteki küçük boyut etkisinin hesaba katıldığı matematik modellerin geliştirilmesi için çalışmışlardır. Bu modelleri oluşturmak için bazı araştırmacılar atomistik/moleküler dinamik (MD) simülasyonları kullanmışlardır. Bu simülasyonlar nano yapılarındaki atomlar/moleküller arasındaki atomik etkileşimleri modellemek için çeşitli farklı atomlar arası potansiyelleri kullanmışlardır. Bir MD simülasyonunda, çeşitli ampirik potansiyel çiftleriyle tanımlanan bağ enerjilerinin fonksiyonu için birçok denklem mevcuttur. Bu denklemlerin çeşitliliği doğruluk derecesine ve moleküler sistemin tipine bağlıdır. Sayısal yaklaşım ile yapılan çözümler, deneysel yolla ulaşmanın neredeyse imkansız olduğu sonuçlara ulaşılmasını sağlamaktadır (Srivastava ve Wei, 2003, Arash vd., 2011). Ancak, bu simülasyonlar nano yapıları modellemek için çok kompleks olmakta, ve ayrıca hesaplamaların limitleri ile yani bilgisayar donanımının kapasitesiyle kısıtlanmaktadır. Diğer yandan, yüksek mertebe sürekli ortam yaklaşımı daha az hesaplama gücüne ihtiyaç duymaktadır ve daha basit formülasyona sahiptir (Arash ve Wang, 2012; Baretta vd. 2014; Rafiee ve Monghadam, 2014). Literatürde verilen sürekli ortam modelleri genellikle klasik (yerel) veya yerel olmayan sürekli ortam teorilerine dayanır. Narinliği düşük karbon nanotüp ince cidarlı bir boru gibi düşünülebilir ve şekil değişimi bir elastik çubuğa benzer şekilde düşünülebilir. Çubuk yaklaşımı Harik (2001) tarafından incelenmiş ve sürekli çubuk yaklaşımının geçerliliğini kontrol edilmiştir. Önerilen geometrik parametreler ile MD benzetimleri arasındaki ilişki araştırılmıştır.

Klasik sürekli ortam modellerinde, verilen bir noktadaki gerilme durumu aynı noktadaki birim şekil değiştirme durumu ile belirlenmektedir. Klasik elastisite teorisinin boyuttan bağımsız tanımını nedeniyle mikro ve nano yapıların mekanik davranışı için klasik modellerin kullanımının uygunluğu tartışılır durumdadır. Malzeme özelliklerinin atomistik hesaplamaları kendi doğaları gereği yerel değildir. Sonuç olarak, sürekli bir ortam modelini ifade eden gerilme-birim şekil değiştirme bağıntıları yerel olmayan karakter sergileyecektir. Son yıllarda, yerel olmayan sürekli ortamlar için kullanışlı çeşitli teoriler geliştirilmiş ve çalışmalarda uygulanmıştır. Bunların en popüler olanlarından biri, verilen bir noktadaki gerilme durumunun cismin üzerindeki bütün noktalardaki birim şekil değiştirme durumlarıyla belirlendiği Eringen'in integral teorisi veya yerel olmayan elastisite teorisidir (Eringen, 1983).

Diğer teoriler, bünye denklemlerinin gerilme veya birim şekil değiştirme gradyanına bağlı olduğu birim şekil değiştirme gradyanı teorisi (Vardoulakis ve Giannakopoulos, 2006; Wang vd., 2010; Hadjesfandiari ve Dargush, 2011; Akgöz ve Civalek, 2013; Li 2013), mikro-dönme vektörünün yer değiştirme vektöründen bağımsız alındığı mikropolar teori (Eringen, 1967) ve gerilme-çifti tensörünün çapraz-simetrik olduğu gerilme-çifti teorisidir (Koiter, 1964; Anthoine, 2000). Gerilme-çifti teorisi, basit mesnetli bir eğri eksenli çubuğun statik eğilme ve serbest titreşim problemlerine uygulanmıştır (Liu ve Reddy, 2011). Berrabah vd. (2013) basit mesnetli bir nano çubuğun eğilme burkulma ve serbest titreşimlerini incelemek üzere, bir yerel olmayan kayma deformasyonu teorisi ortaya atmıştır. Ek olarak malzeme boyut parametresini içeren yerel olmayan sürekli ortam teorileri arasında, Eringen'in yerel olmayan elastisite teorisi, günümüzde nano-ölçekli sensörler gibi cihazlar için geliştirilen boyuta bağlı sürekli ortam modelleri arasında ön plana çıkmıştır (Baretta vd, 2014). Bu model; kafes dinamiklerinin atomik teorisi ve fonon yayılımı üzerine yapılan deneysel gözlemler ile uyumlu olan, verilen bir noktadaki gerilme ile cismin tamamındaki birim şekil değiştirme arasındaki gerilme-birim şekil değiştirme bağıntısını içermektedir (Narendar vd., 2011). Peddieson vd. (2003) daha sonraları çeşitli araştırmacılar tarafından nano yapıların mekanik problemlerine uygulanan, yerel olmayan tipte bir Euler-Bernoulli çubuk modeli ve sürekli ortam modeli ortaya koymuştur. Wang vd. (2006) tarafından geliştirilen yerel olmayan Timoshenko çubuk modeli klasik modellere kıyasla fazladan iki malzeme parametresi içermektedir. Wang ve Shindo (2006) karbon nano tüplerin statik analizi için nonlocal Euler-Bernoulli çubuk teorisini önermiştir. Nano tüplerin statik şekil değiştirmesine boyut parametresinin etkisi açıkça belirtilmiştir. Mahmoud vd. (2012) nano çubukların statik şekil değiştirmesine yerel olmayan elastisitenin etkisini incelemiştir. Sonlu elemanlar metodunu kullanarak, Phadikar ve Pradhan (2010) nano çubukları doğrusal olmayan bir formülasyonla incelemişlerdir. Euler-Bernoulli yerel olmayan çubuk teorisine dayanarak nano çubukların statik davranışını incelemek için Marotti de Sciarra (2014) yerel olmayan sonlu eleman metodunu geliştirmiştir. Eltaher vd. (2014) nano çubukların serbest titreşimleri için bir sonlu eleman metodu oluşturmuşlardır. Formülasyonda Eringen'in yerel olmayan bünye denklemleri kullanılmıştır. Nano çubukların dinamik analizinde yerel olmayan parametre, sınır ve yükleme koşulları incelenmiştir. Salvatat vd. (2014), yüksek mertebeden Euler-Bernoulli yerel olmayan çubuk teorisine dayanan bir yerel

olmayan sonlu eleman yöntemi geliştirmişlerdir. Üniform yayılı yük etkisindeki basit mesnetli bir çubuk problemini çözerek, sonucu diferansiyel denklemin kesin çözüm sonucuyla karşılaştırmışlardır.

Yerel olmayan sürekli ortam mekaniği kullanılarak, nano çubukları, plakları ve kabukları modellemek için yerel olmayan bir teori geliştirilmiş ve birçok araştırmacı yerel olmayan nano yapıların eğilme, burkulma ve dalga yayılımı problemlerini incelemiştir (Wang, 2005; Wang ve Shindo, 2006, Polizzotto vd., 2006). Reddy (2007) yerel olmayan diferansiyel bünye denklemlerini kullanarak, klasik Euler-Benoulli, Timoshenko, Levinson and Reddy çubuk teorilerini iyileştirmiştir. Pradhan ve Sarkar (2009), Eringen'in yerel olmayan elastisite teorisini kullanarak, fonksiyonel olarak derecelendirilmiş çubukların eğilme burulma ve titreşim problemlerini incelemiştir. Paola (2013) yerel olmayan etkileri modelleyerek Timoshenko çubuğunun dinamik davranışını incelemiştir. Behera ve Chakraverty (2014), Rayleigh-Ritz yöntemindeki sınır karakteristik ortogonal polinom fonksiyonlarını kullanarak homojen olmayan nano çubukların serbest titreşimlerini ele almıştır. Alotta vd. (2014), yerel olmayan Timoshenko çubuğu için sonlu eleman yöntemi geliştirmişlerdir. Zemri vd. (2015), Eringen'in yerel olmayan bünye denklemlerini kullanarak fonksiyonel olarak derecelendirilmiş nano çubukların eğilme, burkulma ve titreşimlerini incelemek için yerel olmayan kayma deformasyonu teorisi geliştirmişlerdir. Zhang vd. (2015) basit mesnetli kenarları olan ön gerilmeli bir dikdörtgen plağın titreşimlerini incelemek için bir mikro yapı çubuk-kafes modeli önermişlerdir. Guven (2014), başlangıç gerilmeleri ve magnetik alan etkisindeki tek duvarlı karbon nano tüplerin titreşimlerini incelemiştir. Bu çalışmada, tek duvarlı karbon nano tüp bir Timoshenko çubuğu olarak modellenmiştir. Çalışmada başlangıç gerilmeleri ve magnetik alanın etkileri çeşitli boyut parametreleri için verilmiştir.

Sedighi (2014a) yerel olmayan nano-köprülerin kararlılık problemini, moleküller arası kuvvetleri ve yüzey etkisini göz önüne alarak incelemiştir. Mahmoud vd. (2012) nano çubukların statik çökmelerine yerel olmayan elastisite ve yüzey özelliklerinin etkilerini incelemiştir. Yüzey/hacim oranı nispeten büyük olan yapılarda, yüzey özelliklerinin önemli olduğu vurgulanmıştır. Phadikar ve Pradhan (2010) nano çubukları incelemek için lineer olmayan formülasyonla bir sonlu eleman yöntemi geliştirmiştir. Kiani (2014) yerel olmayan gerilmelere dayanan yeni bir

modelle karbon nanotüplerin burkulmasını incelemiştir. Sedighi ve Daneshmand (2014) ve Sedighi vd. (2015a, 2015b) tarafından yerel olmayan nano yapıların kararlılık analizleri detaylı olarak ele alınmıştır.

Karbon nano tüplerle ilgili yapılan teorik çalışmalar, genellikle, düz karbon nano tüpleri ele almaktadır. Fakat, bu yapısal elemanların uzunlamasına biçimleri tamamen düz değildir (Joshi vd., 2010; Guo vd., 2000; Shao vd., 2009). Fisher vd. (2003) ve Bradshaw vd. (2003) modelleme yapmak ve sonlu eleman sonuçlarıyla birleştirmek için mikro mekanik yöntemleri kullanmışlardır. Bu çalışmalar nano tüpün eğriliğinin önemini açıkça ortaya koymuştur. Guven (2014), nano ölçekli bir çubukta eksenel doğrultudaki dalga yayılımını yerel olmayan elastisite teorisi ile iki parametreye göre incelemiştir.

Mayoof ve Hawwa (2009) eksenli boyunca eğriliği olan tek duvarlı karbon nano tüpün lineer olmayan titreşimlerini incelemek için klasik Euler-Bernoulli teorisini kullanmıştır. Arefi ve Salimi (2015) başlangıçta bir eğriliğe sahip karbon nano tüpleri Timoshenko çubuk teorisini kullanarak incelemiştir. Rijitlik, başlangıç eğriliği ve boyut etkileri incelenmiştir. Tam olarak düz olmayan bir biçimin karbon nano tüplerin daha rijit davranmasına neden olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Nano yapılar sensörler gibi nano teknolojik uygulamalarda kullanıldığı biçimde eğri olarak üretilebilir. Nano çubukların kullanıldığı cihazları tasarlayan mühendisler ve bilim adamları için, eğri eksenli nano çubukların statik davranışının detaylı bir şekilde anlaşılması yararlı olacaktır. Wang vd. (2012) nano ring ve nano çubukların burkulmalarının analitik çözümleri için yerel olmayan teoriyi kullanmışlardır. Sonuçlar, küçük boyut etkisinin burkulma basıncı değerlerini düşürdüğünü göstermiştir. Ayrıca, probleme bağlı olarak burkulma modları etkilenebilmektedir. Artan ve Tepe (2011), kendi düzlemine dik yüklerin etkisi altındaki eğri eksenli bir karbon nano tüpü yerel olmayan elastisite teoremini kullanarak incelemiş, çözümü başlangıç değerleri yöntemiyle elde etmiştir.

Literatür incelemesi nano çubukların statik davranışıyla ilgili daha önce yapılan çalışmaların genellikle doğru eksenli nano çubuklarla sınırlı kaldığını göstermektedir. Eğri eksenli nano çubuklarla ilgili sınırlı sayıda makale mevcuttur. Bunların bir çoğu eksenel uzama ve kayma şekil değiştirme etkisini ihmal etmekte, yalnızca eğilme momentinin yerel olmayan etkisini göz önüne almaktadır. Sayısal ve yaklaşık çözüm yöntemleri kullanılmıştır. Eksenel uzama ve kayma etkilerinin

yanında eksenel ve kayma kuvvetlerinin yerel olmayan etkileri de gözönünde bulundurulduğu literatürdeki ilk çalışma bu olmuştur.

Nano çubukların titreşimleriyle ilgili yapılan çalışmalarda, çoğunlukla doğru eksenli nano çubukların doğal frekanslarının belirlenmesi amacıyla çeşitli teorik incelemeler yapılmıştır. Dequesnes vd. (2004) eksenel uzamayı da hesaba katarak ankastre-ankastre karbon nanotüplerin ilk doğal frekansını moleküler dinamik ve sürekli ortam modelleriyle hesaplamıştır. Lineer olmayan sürekli ortam modeli ile moleküler dinamik modelinin birbiriyle oldukça uyumlu olduğu sonucuna varmış ve hesaplama işleminin daha az masraflı olduğunu belirtmişlerdir. Witkamp vd. (2006) ve Poot vd. (2007) elektrostatik DC yükündeki değişime karşı eğilme doğal frekanslarındaki değişimi belirlemek için lineer olmayan çubuk modeli kullanmıştır. Elishakoff ve Pentaras (2009) farklı sınır koşullarında (basit mesnetli ve ankastre mesnetli) çift duvarlı karbon nanotüplerin doğal frekanslarını belirlemek için Bubnov-Galerkin ve Petrov-Galerkin yöntemlerini kullanarak analitik ifadeleri çıkarmıştır. Doğrusal çubuk modeli kullanılarak bu tip sistemlerin doğal frekanslarını hızlıca hesaplayabilmenin mümkün olduğu gösterilmiştir. Çalışmalarında kesme kuvveti ve dönme eylemsizliği etkilerini hesaba katmışlardır. Bresse-Timoshenko teorisi ve Euler-Bernoulli modeli ile kıyasladıklarında çok iyi sonuçlar elde ettiklerini belirtmişlerdir. Bir diğer çalışmada, Elishakoff ve Pentaras (2009), basitleştirilmiş Bresse-Timoshenko çubuk modelini, basit mesnetli karbon nanotüplerin doğal frekanslarını bulmak için geliştirmişlerdir. Çalışmalarında kesme kuvveti ve dönme eylemsizliği etkilerini hesaba katmışlardır. Bresse-Timoshenko teorisi ve Euler-Bernoulli modeli ile kıyasladıklarında çok iyi sonuçlar elde ettiklerini belirtmişlerdir. Li vd. (2015a), başlangıç kuvvetinin boyutsuz hali düşünüldüğünde, aynı uzunlukta ve çekme zorlanmasındaki mikro/nano ölçekli çeşitli çubuklar için daha büyük eksenel kuvvetin daha yüksek açısal doğal frekansa neden olabildiğini belirtmişlerdir. Karbon nanotüplerin dinamik davranışını anlamak amacıyla yapılan birçok çalışmada, farklı dinamik yüklerdeki titreşimler teorik olarak incelenmiştir. Chiu vd. (2008), ankastre-ankastre karbon nanotüpün dinamik davranışını lineer olmayan çubuk olarak modelleyip, Galerkin yöntemiyle araştırmıştır. Karbon nanotüplerin lineer rejimde küçük elektrik yüklerinde dahi rasgele ısı gürültü nedeniyle kullanışsız olduğu kanısına varmıştır. Georgantzinos vd. (2009) tek duvarlı karbon nanotüplerin titreşim karakteristiğini belirlemek için doğrusal yay-kütle

modeli sunmuştur. Conley vd. (2009) karbon nanotüplerin düzlem içi ve düzlem dışı titreşimleri için bir model öne sürmüştür. Doğrusal karbon nanotüp rezonatörlerinde düzlemsel olmayan hareketlerin olabileceğini belirtmiş, bunu, nanotüpün simetrisine ve deforme olurken uzamış olmasına bağlamışlardır.

Karbon nanotüplerin dinamik davranışını anlamak amacıyla yapılan birçok çalışmada, farklı dinamik yüklerdeki titreşimler teorik olarak incelenmiştir. Postma vd. (2008), ankastre-ankastre karbon nanotüpün dinamik davranışını lineer olmayan çubuk olarak modelleyip, Galerkin yöntemiyle araştırmışlardır. Karbon nanotüplerin lineer rejimde küçük elektrik yüklerinde dahi, rasgele ısı gürültü nedeniyle kullanışsız olduğu kanısına varmıştır. Georgantzinos vd. (2009) tek duvarlı karbon nanotüplerin titreşim karakteristiğini belirlemek için doğrusal yay-kütle modeli geliştirmiştir. Conley vd. (2009) karbon nanotüplerin düzlem içi ve düzlem dışı titreşimleri için bir model öne sürmüştür. Doğrusal karbon nanotüp rezonatörlerinde düzlemsel olmayan hareketlerin olabileceğini belirtmiş, bunu nanotüpün simetrisine ve şekil değiştirirken uzamış olmasına bağlamışlardır.

Ansari vd. (2015) viskoelastik Timoshenko nano çubukların serbest titreşimini yerel olmayan elastisite teorisini kullanarak incelemiştir. Tek duvarlı karbon nanotüplerin malzeme özellikleri kullanılarak zamana bağlı denklemler çözülmeye çalışılmıştır. Yerel olmayan parametreler, viskoelastisite katsayısı ve nano çubuk uzunluğunun viskoelastik nano çubuğun zaman cevabına olan etkisi verilen sayısal sonuçlarla yorumlanmıştır. Arash vd. (2015) nanomekanik rezonatörler ve kullanımları konusunda yaptıkları incelemede, konu ile ilgili yapılmış olan teorik çalışmaları da özetlemiştir. Bu çalışmalara örnek olarak, sürekli ortam yaklaşımı, moleküler simulasyon gibi yöntemler verilebilir. Önemli kullanım alanı bulunan nanomekanik rezonatörler, yapılan bu teorik çalışmalarla daha iyi tasarlanabilecektir. Zenkour ve Sobhy (2015) ısı etkisindeki nano çubukların eğilme analizi için basitleştirilmiş üç bilinmeyen şekil değişimi olan (kesme ve normal şekil değişimleri) yerel olmayan çubuk teorisini sunmuştur. Çalışmada Eringen'in yerel olmayan bünye denklemleri kullanılmıştır. Hamilton prensibi kullanılarak denklemler oluşturulmuştur. Sonuçlar literatürdeki benzer çalışmalarla karşılaştırılmıştır. Bağdatlı (2015) farklı mesnetleme koşullarındaki Euler-Bernoulli nano çubuklarının lineer olmayan titreşimlerini incelemiştir. Problemin doğrusal kısmında, mod şekillerinin ve frekansların kesin

özmleri verilmiştir. Lineer olmayan kısımda ise, pertürbasyon tekniği ile bulunan yaklaşık çözümler hareket denklemlerine uygulanmıştır.

Baretta vd. (2015) burulma momenti etkisindeki fonksiyonel olarak derecelendirilmiş yerel olmayan viskolelastik çember eksenli nano çubukları incelemiştir. Eringen'in yerel olmayan elastik davranış ifadeleri kullanılarak ilgili formülasyon yapılmıştır.

Li vd. (2015b) serbest ucundan tekil yükle zorlanan konsol çubukta yerel olmayan etkilerin var olup olmadığını araştırmıştır. Sonuçta, bu yükleme durumda eğilme yerel olmayan etkilerinin olmadığı sonucuna varılmıştır. Farklı yükleme durumları incelendiğinde ise yerel olmayan etkilerin varlığı tespit edilmiştir. Sarvestani ve Naghashpour (2015) mekanik yükler etkisindeki karbon nanotüpler için yeni bir teorik çözüm sunmuştur. Çözümde, eğri eksenli nanotüp modeli dşnlmştir. Eringen'in yerel olmayan elastisite teorisinin baz alındığı toroidal elastisite yöntemi kullanılmıştır. Eğri eksenli nanotüp yapıların davranışını ifade eden denklemler toroidal eksen takımında geliştirilmiştir. Sayısal sonuçlar, yerel olmayan parametrenin artırılması ile yer değiştirme sonuçlarının arttığını göstermiştir. Bu alışma, geometri ve yerel olmayan parametrelerin nanotüplerin mekanik davranışına etkisini göstermiştir. Taghizadegh vd. (2015) yaptıkları çalışmada yerel olmayan integral elastisite teorisini kullanarak iki boyutlu sonlu eleman formülasyonu geliştirmişlerdir. Farklı yükleme durumları ve mesnetleme koşulları için nano çubukların eğilme problemleri incelenmiştir. İncelemede, klasik çubuk teorisi ve üç boyutlu elastisite teorisi kullanılarak oluşturulan yerel olmayan sonlu elemanlar yöntemi kullanılmıştır. Elde edilen sonuçlar, elastisite, analitik ve sayısal yerel olmayan diferansiyel sonuçları ile kıyaslanmıştır.

3. EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLARIN DÜZLEM İÇİ STATİK VE DİNAMİK DAVRANIŞLARINI İFADE EDEN YEREL OLMAYAN DENKLEMLER

3.1 Çubukların Düzlem İçi Statik Davranışını İfade Eden Yerel Olmayan Denklemler

Yerel ve yerel olmayan elastisite teorisinin gerilmeleri arasındaki ilişki Eringen (1983) tarafından aşağıdaki kısmi diferansiyel denklemlerle verilmektedir:

$$(1 - \gamma^2 \nabla^2) \boldsymbol{\sigma}^{nl} = \boldsymbol{\sigma}^l \quad (3.1)$$

Burada, γ yerel olmayan parametreyi, ∇^2 Laplasyen operatörünü, $\boldsymbol{\sigma}^{nl}$ yerel olmayan elastisite teorisinin gerilme tansörünü, $\boldsymbol{\sigma}^l$ yerel (klasik) elastisite teorisinin gerilme tansörünü göstermektedir. Bu denklemler, yerel ve yerel olmayan elastisite teorilerindeki gerilmeler arasındaki ilişkiyi vermektedir. Bu denklemler kullanılarak eğri eksenli çubukların yerel olmayan denklemleri, gerilme tansörünün silindirik koordinatlardaki Laplasyen'i hesaplanarak elde edilebilir. Bu denklem silindirik koordinatlarda düzenlenirse;

$$\sigma_{rr}^{nl} - \gamma^2 (\nabla^2 \boldsymbol{\sigma}^{nl})_{rr} = \sigma_{rr}^l \quad (3.2)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{nl} - \gamma^2 (\nabla^2 \boldsymbol{\sigma}^{nl})_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}^l \quad (3.3)$$

$$\sigma_{r\theta}^{nl} - \gamma^2 (\nabla^2 \boldsymbol{\sigma}^{nl})_{r\theta} = \sigma_{r\theta}^l \quad (3.4)$$

$$\sigma_{rz}^{nl} - \gamma^2 (\nabla^2 \boldsymbol{\sigma}^{nl})_{rz} = \sigma_{rz}^l \quad (3.5)$$

$$\sigma_{\theta z}^{nl} - \gamma^2 (\nabla^2 \boldsymbol{\sigma}^{nl})_{\theta z} = \sigma_{\theta z}^l \quad (3.6)$$

$$\sigma_{zz}^{nl} - \gamma^2 (\nabla^2 \boldsymbol{\sigma}^{nl})_{zz} = \sigma_{zz}^l \quad (3.7)$$

ifadeleri elde edilir. Yerel olmayan elastisite teorisindeki $\boldsymbol{\sigma}^{nl}$ gerilme tansörünün Laplasyeni Povstenko (1995) tarafından aşağıdaki eşitliklerle verilmektedir:

$$(\nabla^2 \sigma^{nl})_{rr} = \nabla^2 \sigma_{rr}^{nl} - \frac{4}{r^2} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} (\sigma_{rr}^{nl} - \sigma_{\theta\theta}^{nl}) \quad (3.8)$$

$$(\nabla^2 \sigma^{nl})_{\theta\theta} = \nabla^2 \sigma_{\theta\theta}^{nl} + \frac{4}{r^2} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} (\sigma_{rr}^{nl} - \sigma_{\theta\theta}^{nl}) \quad (3.9)$$

$$(\nabla^2 \sigma^{nl})_{r\theta} = \nabla^2 \sigma_{r\theta}^{nl} - \frac{4}{r^2} \sigma_{r\theta}^{nl} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sigma_{rr}^{nl} - \sigma_{\theta\theta}^{nl}) \quad (3.10)$$

$$(\nabla^2 \sigma^{nl})_{rz} = \nabla^2 \sigma_{rz}^{nl} - \frac{1}{r^2} \sigma_{rz}^{nl} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{nl}}{\partial \theta} \quad (3.11)$$

$$(\nabla^2 \sigma^{nl})_{\theta z} = \nabla^2 \sigma_{\theta z}^{nl} - \frac{1}{r^2} \sigma_{\theta z}^{nl} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \sigma_{rz}^{nl}}{\partial \theta} \quad (3.12)$$

$$(\nabla^2 \sigma^{nl})_{zz} = \nabla^2 \sigma_{zz}^{nl} \quad (3.13)$$

burada, skaler büyüklüğün Laplasyen ifadesi,

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (3.14)$$

olarak bilinmektedir. Eğri eksenli çubukların denklemleri Frenet koordinat sisteminde verilmektedir. Silindirik ve Frenet koordinat sistemleri arasındaki ilişkinin incelenebilmesi amacıyla her iki koordinant sistemi Şekil 3.1’de gösterilmektedir. Çubuk teorisinde, üç boyutlu yükleme durumu için σ_t , σ_{tn} ve σ_{tb} gerilmeleri mevcuttur. Çubuk kesitinin rijit olduğu, yani herhangi bir boyut değişimine ve çarpılmaya uğramadığı varsayımıyla, diğer gerilmelerin, yani σ_n , σ_b ve σ_{nb} değerlerinin sıfır oldukları ifade edilmektedir. Silindirik koordinatlardaki gerilmeler ile Frenet koordinatlarındaki gerilmeler arasındaki ilişki aşağıda verilmektedir:

$$\sigma_n = -\sigma_{rr} = 0 \quad (3.15)$$

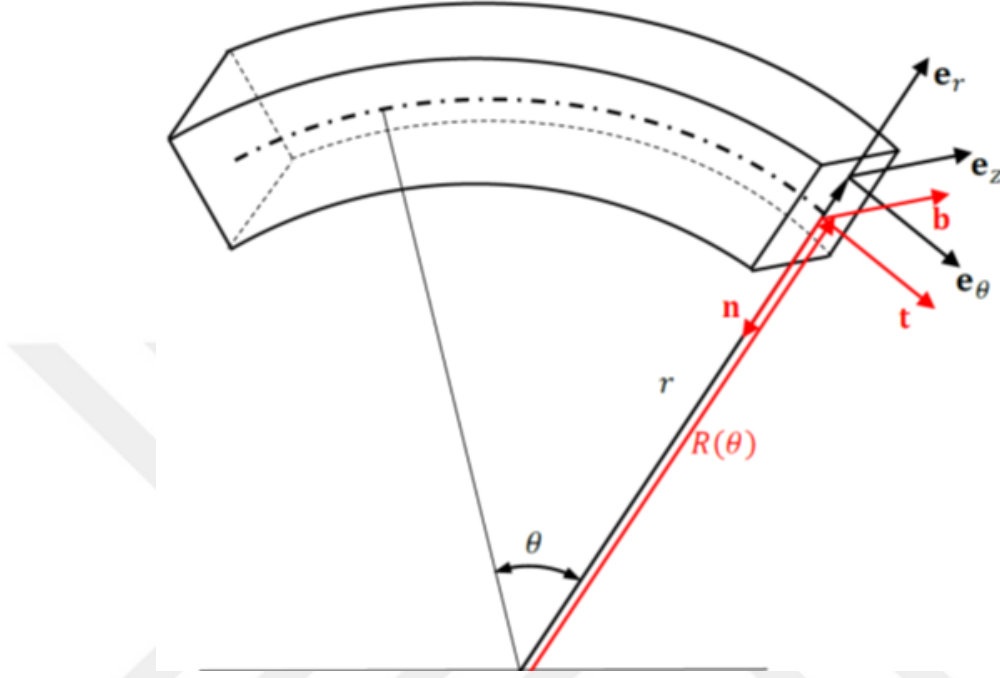
$$\sigma_b = \sigma_{zz} = 0 \quad (3.16)$$

$$\sigma_t = \sigma_{\theta\theta} \neq 0 \quad (3.17)$$

$$\sigma_{tn} = -\sigma_{r\theta} \neq 0 \quad (3.18)$$

$$\sigma_{tb} = \sigma_{\theta z} \neq 0 \quad (3.19)$$

$$\sigma_{nb} = -\sigma_{rz} = 0 \quad (3.20)$$



Şekil 3.1 : Eğri eksenli bir çubukta, Frenet ve silindirik koordinat eksenleri.

Bu ilişki hem yerel hem de yerel olmayan gerilmeler için aynıdır. Çubuğun eğrilik yarıçapının sadece θ açısal koordinatının fonksiyonu olduğu varsayılmaktadır. Yani, $R = R(\theta)$ olduğundan silindirik koordinat r ve diferansiyeli şu şekilde tarif edilebilir:

$$r = R(\theta) + \bar{r}; \quad \partial r = \partial \bar{r} \quad (3.21)$$

burada $\bar{r}$ kesit içindeki radyal koordinatı göstermektedir. Çubuk teorisinde, kesit boyutlarının eğrilik yarıçapının yanında çok küçük olduğu yani $\bar{r}/R(\theta) \ll 1$ kabulüyle, yaklaşık olarak $(1 + \bar{r}/R(\theta)) \cong 1$ şeklinde alınabilir.

Bu çalışmada, düzlemsel yükleme durumundaki düzlemsel eğri eksenli çubuklar ele alındığından $\sigma_{tb} = \sigma_{\theta z} = 0$ olacaktır. Bu durumda, eğri eksenli düzlemsel çubuğun, düzlemindeki davranışını ifade eden, θ koordinatındaki kesit tesirleri olan F_n^{nl} , F_t^{nl} ve M_b^{nl} sadece θ koordinatına bağlıdır. Kesit tesirlerinin silindirik koordinatlardaki türevleri:

$$\frac{\partial F_n^{nl}}{\partial \bar{r}} = 0 \quad \frac{\partial^2 F_n^{nl}}{\partial \bar{r}^2} = 0 \quad \frac{\partial F_n^{nl}}{\partial \theta} \neq 0 \quad \frac{\partial^2 F_n^{nl}}{\partial \theta^2} \neq 0 \quad \frac{\partial F_n^{nl}}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial^2 F_n^{nl}}{\partial z^2} = 0 \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial F_t^{nl}}{\partial \bar{r}} = 0 \quad \frac{\partial^2 F_t^{nl}}{\partial \bar{r}^2} = 0 \quad \frac{\partial F_t^{nl}}{\partial \theta} \neq 0 \quad \frac{\partial^2 F_t^{nl}}{\partial \theta^2} \neq 0 \quad \frac{\partial F_t^{nl}}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial^2 F_t^{nl}}{\partial z^2} = 0 \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial M_b^{nl}}{\partial \bar{r}} = 0 \quad \frac{\partial^2 M_b^{nl}}{\partial \bar{r}^2} = 0 \quad \frac{\partial M_b^{nl}}{\partial \theta} \neq 0 \quad \frac{\partial^2 M_b^{nl}}{\partial \theta^2} \neq 0 \quad \frac{\partial M_b^{nl}}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial^2 M_b^{nl}}{\partial z^2} = 0 \quad (3.24)$$

olarak bilinmektedir.

Silindirik koordinatlardaki denge denklemleri;

$$\frac{\partial \sigma_{rr}^{nl}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr}^{nl} - \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{nl}}{\partial z} = 0 \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial r} + \frac{2\sigma_{r\theta}^{nl}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{nl}}{\partial z} = 0 \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zr}^{nl}}{\partial r} + \frac{\sigma_{zr}^{nl}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}^{nl}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{nl}}{\partial z} = 0 \quad (3.27)$$

olarak bilinmektedir. Bu denklemler, (3.15-3.21) denklemleri kullanılarak yeniden yazılırsa;

$$-\frac{1}{R(\theta)} \sigma_{\theta\theta}^{nl} + \frac{1}{R(\theta)} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial \theta} = 0 \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{R(\theta)} 2\sigma_{r\theta}^{nl} + \frac{1}{R(\theta)} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{nl}}{\partial z} = 0 \quad (3.29)$$

$$\frac{1}{R(\theta)} \frac{\partial \sigma_{z\theta}^{nl}}{\partial \theta} = 0 \quad (3.30)$$

ifadeleri elde edilir.

Yerel olmayan elastisite teorisinin verdiği gerilmeler arasındaki ilişkilerden, (3.8) denklemi, (3.2) denkleminde yerine konarak aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\sigma_{rr}^{nl} - \gamma^2 \left(\nabla^2 \sigma_{rr}^{nl} - \frac{4}{r^2} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} (\sigma_{rr}^{nl} - \sigma_{\theta\theta}^{nl}) \right) = \sigma_{rr}^l \quad (3.31)$$

(3.14) denklemi, σ_{rr}^{nl} için düzenlenirse;

$$\nabla^2 \sigma_{rr}^{nl} = \frac{\partial^2 \sigma_{rr}^{nl}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}^{nl}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \sigma_{rr}^{nl}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{rr}^{nl}}{\partial z^2} \quad (3.32)$$

eşitliği elde edilir. Bu ifade, (3.31) denkleminde yerine konursa;

$$\sigma_{rr}^{nl} - \gamma^2 \left[\left(\frac{\partial^2 \sigma_{rr}^{nl}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}^{nl}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \sigma_{rr}^{nl}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{rr}^{nl}}{\partial z^2} \right) - \frac{4}{r^2} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} (\sigma_{rr}^{nl} - \sigma_{\theta\theta}^{nl}) \right] = \sigma_{rr}^l \quad (3.33)$$

ifadesine ulaşılır. Çubuk varsayımları, yani (3.15)-(3.20) denklemleri kullanılarak;

$$-\frac{4}{r^2} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} \sigma_{\theta\theta}^{nl} = 0 \quad (3.34)$$

eşitliği elde edilir.

(3.9) denklemi, (3.3) denkleminde yerine konularak aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\sigma_{\theta\theta}^{nl} - \gamma^2 \left[\nabla^2 \sigma_{\theta\theta}^{nl} + \frac{4}{r^2} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} (\sigma_{rr}^{nl} - \sigma_{\theta\theta}^{nl}) \right] = \sigma_{\theta\theta}^l \quad (3.35)$$

(3.14) denklemi $\sigma_{\theta\theta}^{nl}$ için düzenlenirse;

$$\nabla^2 \sigma_{\theta\theta}^{nl} = \frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial z^2} \quad (3.36)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik, (3.35) denkleminde yerine konursa, aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\sigma_{\theta\theta}^{nl} - \gamma^2 \left[\left(\frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial z^2} \right) + \frac{4}{r^2} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} (\sigma_{rr}^{nl} - \sigma_{\theta\theta}^{nl}) \right] = \sigma_{\theta\theta}^l \quad (3.37)$$

(3.15)-(3.20) denklemleri kullanılarak;

$$\sigma_{\theta\theta}^{nl} - \gamma^2 \left[\left(\frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial z^2} \right) + \frac{4}{r^2} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} \sigma_{\theta\theta}^{nl} \right] = \sigma_{\theta\theta}^l \quad (3.38)$$

(3.34) denklemi, bu denklemde yerine konursa;

$$\sigma_{\theta\theta}^{nl} - \gamma^2 \left[\left(\frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial z^2} \right) \right] = \sigma_{\theta\theta}^l \quad (3.39)$$

eşitliği elde edilir.

(3.10) denklemi, (3.4) denkleminde yerine konur ve düzenlenirse;

$$\sigma_{r\theta}^{nl} - \gamma^2 \left[\nabla^2 \sigma_{r\theta}^{nl} - \frac{4}{r^2} \sigma_{r\theta}^{nl} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sigma_{rr}^{nl} - \sigma_{\theta\theta}^{nl}) \right] = \sigma_{r\theta}^l \quad (3.40)$$

bulunur. (3.14) denklemi, $\sigma_{r\theta}^{nl}$ için düzenlenerek;

$$\nabla^2 \sigma_{r\theta}^{nl} = \frac{\partial^2 \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial z^2} \quad (3.41)$$

ifadesi elde edilir. Bu, (3.40) denkleminde yerine konursa;

$$\sigma_{r\theta}^{nl} - \gamma^2 \left[\left(\frac{\partial^2 \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial z^2} \right) - \frac{4}{r^2} \sigma_{r\theta}^{nl} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sigma_{rr}^{nl} - \sigma_{\theta\theta}^{nl}) \right] = \sigma_{r\theta}^l \quad (3.42)$$

elde edilir. (3.15)-(3.20) denklemleri kullanılarak;

$$\sigma_{r\theta}^{nl} - \gamma^2 \left[\left(\frac{\partial^2 \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial z^2} \right) - \frac{4}{r^2} \sigma_{r\theta}^{nl} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial \theta} \right] = \sigma_{r\theta}^l \quad (3.43)$$

denkleminde ulaşılır.

F_t^{nl} kesit tesirini elde etmek için, $\sigma_{\theta\theta}^{nl}$ gerilme ifadesinin, yani, (3.39) denkleminin kesit üzerinde integre edilmesi gerekir:

$$\begin{aligned} \iint_A \left[\sigma_{\theta\theta}^{nl} - \gamma^2 \left[\left(\frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial z^2} \right) \right] \right] dA \\ = \iint_A [\sigma_{\theta\theta}^l] dA \end{aligned} \quad (3.44)$$

(3.21) denklemini, bu denklemde yerine konursa;

$$\begin{aligned} \iint_A \left[\sigma_{\theta\theta}^{nl} - \gamma^2 \left[\left(\frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{R(\theta) + \bar{r}} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{(R(\theta) + \bar{r})^2} \frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial \theta^2} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial z^2} \right) \right] \right] dA = \iint_A [\sigma_{\theta\theta}^l] dA \end{aligned} \quad (3.45)$$

elde edilir. $\bar{r}/R(\theta) \ll 1$ varsayımıyla;

$$\begin{aligned} \iint_A [\sigma_{\theta\theta}^{nl}] dA - \gamma^2 \iint_A \frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial \bar{r}^2} dA - \frac{\gamma^2}{R(\theta)} \iint_A \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial \bar{r}} dA \\ - \frac{\gamma^2}{(R(\theta))^2} \iint_A \frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial \theta^2} dA - \gamma^2 \iint_A \frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial z^2} dA = \iint_A [\sigma_{\theta\theta}^l] dA \end{aligned} \quad (3.46)$$

ifadesi elde edilir. Leibniz integral kuralı (Abramowitz ve Stegun, 1972) kullanılarak, kısmi türev operatörünün ve integralin sırası değiştirilirse;

$$\begin{aligned}
& \iint_A \sigma_{\theta\theta}^{nl} dA - \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{r}^2} \iint_A \sigma_{\theta\theta}^{nl} dA - \gamma^2 \frac{1}{R(\theta)} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \iint_A \sigma_{\theta\theta}^{nl} dA \\
& - \gamma^2 \frac{1}{(R(\theta))^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \iint_A \sigma_{\theta\theta}^{nl} dA - \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \iint_A \sigma_{\theta\theta}^{nl} dA \\
& = \iint_A \sigma_{\theta\theta}^l dA
\end{aligned} \tag{3.47}$$

ifadesine ulaşılabılır. Burada;

$$\iint_A \sigma_{\theta\theta}^{nl} dA = F_t^{nl} \quad \iint_A \sigma_{\theta\theta}^l dA = F_t^l \tag{3.48}$$

eşitlikleri bu denklemde yerine konarak;

$$F_t^{nl} - \gamma^2 \frac{\partial^2 F_t^{nl}}{\partial \bar{r}^2} - \gamma^2 \frac{1}{R(\theta)} \frac{\partial F_t^{nl}}{\partial \bar{r}} - \frac{\gamma^2}{(R(\theta))^2} \frac{\partial^2 F_t^{nl}}{\partial \theta^2} - \gamma^2 \frac{\partial^2 F_t^{nl}}{\partial z^2} = F_t^l \tag{3.49}$$

elde edilir. Burada, F_t^{nl} , θ koordinatındaki kesit tesiridir ve sadece θ koordinatının fonksiyonudur. Bu yüzden, (3.23) denklemi kullanılarak;

$$F_t^{nl} - \frac{\gamma^2}{(R(\theta))^2} \frac{\partial^2 F_t^{nl}}{\partial \theta^2} = F_t^l \tag{3.50}$$

eşitliği elde edilir.

Benzer şekilde, F_n^{nl} kesit tesirini elde etmek için, (3.43) eşitliğinin kesit üzerinde integre edilmesi gerekir:

$$\begin{aligned}
& \iint_A \left[\sigma_{r\theta}^{nl} - \gamma^2 \left[\left(\frac{\partial^2 \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial z^2} \right) - \frac{4}{r^2} \sigma_{r\theta}^{nl} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial \theta} \right] \right] dA = \iint_A \sigma_{r\theta}^l dA
\end{aligned} \tag{3.51}$$

(3.26) denklemi düzenlenerek,

$$-\frac{2\sigma_{r\theta}^{nl}}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial \theta} = \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{nl}}{\partial z} \quad (3.52)$$

bulunur. Bu eşitlik, (3.51) denkleminde yerine konursa;

$$\begin{aligned} \iint_A \left[\sigma_{r\theta}^{nl} - \gamma^2 \left[\left(\frac{\partial^2 \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial z^2} \right) + \frac{2}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial \bar{r}} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{nl}}{\partial z} \right] \right] dA = \iint_A \sigma_{r\theta}^l dA \end{aligned} \quad (3.53)$$

elde edilir. (3.21) denklemi, bu eşitlikte yerine konur ve $\bar{r}/R(\theta) \ll 1$ varsayımı yapılırsa (çubuk varsayımı) aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\begin{aligned} \iint_A \sigma_{r\theta}^{nl} dA - \gamma^2 \iint_A \frac{\partial^2 \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial \bar{r}^2} dA - \frac{\gamma^2}{R(\theta)} \iint_A \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial \bar{r}} dA - \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \iint_A \frac{\partial^2 \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial \theta^2} dA \\ - \gamma^2 \iint_A \frac{\partial^2 \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial z^2} dA - \frac{2\gamma^2}{R(\theta)} \iint_A \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial \bar{r}} dA - \frac{2\gamma^2}{R(\theta)} \iint_A \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{nl}}{\partial z} dA \\ = \iint_A \sigma_{r\theta}^l dA \end{aligned} \quad (3.54)$$

Leibniz integral kuralı kullanılarak;

$$\begin{aligned} \iint_A \sigma_{r\theta}^{nl} dA - \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{r}^2} \iint_A \sigma_{r\theta}^{nl} dA - \frac{\gamma^2}{R(\theta)} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \iint_A \sigma_{r\theta}^{nl} dA \\ - \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \iint_A \sigma_{r\theta}^{nl} dA - \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \iint_A \sigma_{r\theta}^{nl} dA \\ - \frac{2\gamma^2}{R(\theta)} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \iint_A \sigma_{r\theta}^{nl} dA - \frac{2\gamma^2}{R(\theta)} \frac{\partial}{\partial z} \iint_A \sigma_{\theta z}^{nl} dA = \iint_A \sigma_{r\theta}^l dA \end{aligned} \quad (3.55)$$

elde edilir. Burada;

$$\iint_A \sigma_{r\theta}^{nl} dA = -F_n^{nl} \quad \iint_A \sigma_{r\theta}^l dA = -F_n^l \quad \iint_A \sigma_{\theta z}^{nl} dA = F_b^{nl} \quad (3.56)$$

eşitlikleri yerine konarak ve F_n^{nl} ve F_b^{nl} 'in θ koordinatındaki kesit tesiri olduğu ve sadece θ koordinatına bağlı olduğu bilinerek, yani denklem (3.22) kullanılarak;

$$F_n^{nl} - \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \frac{\partial^2 F_n^{nl}}{\partial \theta^2} = F_n^l \quad (3.57)$$

eşitliği elde edilir.

Benzer şekilde, M_b^{nl} binormal momenti, $\sigma_{\theta\theta}^{nl}$ gerilme ifadesi $\bar{r}$ koordinatı ile çarpılarak kesit üzerinde integre edilirse;

$$\begin{aligned} & \iint_A \left\{ \sigma_{\theta\theta}^{nl} - \gamma^2 \left[\left(\frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial z^2} \right) \right] \right\} \bar{r} dA \\ &= \iint_A \sigma_{\theta\theta}^l \bar{r} dA \end{aligned} \quad (3.58)$$

elde edilir. Bu denklem, kısmi integrasyon ifadesi olan;

$$\begin{aligned} & \iint_A \frac{\partial}{\partial z} [f(\bar{r}, z)] g(\bar{r}, z) dA \\ &= \iint_A \frac{\partial}{\partial z} [f(\bar{r}, z) g(\bar{r}, z)] dA - \iint_A f(\bar{r}, z) \frac{\partial}{\partial z} [g(\bar{r}, z)] dA \end{aligned} \quad (3.59)$$

eşitliği kullanılarak aşağıdaki gibi düzenlenebilir:

$$\begin{aligned} & \iint_A \sigma_{\theta\theta}^{nl} \bar{r} dA - \gamma^2 \iint_A \frac{\partial^2}{\partial \bar{r}^2} [\sigma_{\theta\theta}^{nl} \bar{r}] dA + 2\gamma^2 \iint_A \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial \bar{r}} dA \\ & - \frac{\gamma^2}{R(\theta)} \iint_A \frac{\partial}{\partial \bar{r}} [\sigma_{\theta\theta}^{nl} \bar{r}] dA + \frac{\gamma^2}{R(\theta)} \iint_A \sigma_{\theta\theta}^{nl} dA \\ & - \frac{\gamma^2}{(R(\theta))^2} \iint_A \frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial \theta^2} \bar{r} dA - \gamma^2 \iint_A \frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial z^2} \bar{r} dA \\ &= \iint_A \sigma_{\theta\theta}^l \bar{r} dA \end{aligned} \quad (3.60)$$

Leibniz integral kuralı kullanılarak;

$$\begin{aligned}
& \iint_A \sigma_{\theta\theta}^{nl} \bar{r} dA - \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{r}^2} \iint_A [\sigma_{\theta\theta}^{nl} \bar{r}] dA + 2\gamma^2 \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \iint_A \sigma_{\theta\theta}^{nl} dA \\
& - \frac{\gamma^2}{R(\theta)} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \iint_A [\sigma_{\theta\theta}^{nl} \bar{r}] dA + \frac{\gamma^2}{R(\theta)} \iint_A \sigma_{\theta\theta}^{nl} dA \\
& - \frac{\gamma^2}{(R(\theta))^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \iint_A \sigma_{\theta\theta}^{nl} \bar{r} dA - \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \iint_A \sigma_{\theta\theta}^{nl} \bar{r} dA \\
& = \iint_A \sigma_{\theta\theta}^l \bar{r} dA
\end{aligned} \tag{3.61}$$

ifadesine ulaşılır. Burada,

$$\iint_A \sigma_{\theta\theta}^{nl} \bar{r} dA = M_b^{nl} \quad \iint_A \sigma_{\theta\theta}^l \bar{r} dA = M_b^l \quad \iint_A \sigma_{\theta\theta}^l dA = F_t^l \tag{3.62}$$

eşitlikleri yerine konur ve M_b^{nl} ve F_t^{nl} kesit tesirlerinin sadece θ koordinatına bağlı olduğu hatırlanarak ve denklem (3.24) kullanılarak;

$$M_b^{nl} - \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \frac{\partial^2 M_b^{nl}}{\partial \theta^2} + \frac{\gamma^2}{R(\theta)} F_t^{nl} = M_b^l \tag{3.63}$$

elde edilir.

Yerel elastisite teorisinin verdiği, çubuğun düzlemindeki statik davranışını ifade eden denklemler (Tüfekci ve Arpacı, 2006);

$$\frac{dw(\theta)}{d\theta} = u(\theta) + \frac{R(\theta)}{EA(\theta)} F_t^l(\theta) \tag{3.64}$$

$$\frac{du(\theta)}{d\theta} = -w(\theta) + \frac{k_n R(\theta) F_n^l(\theta)}{GA(\theta)} + R(\theta) \Omega_b(\theta) \tag{3.65}$$

$$\frac{d\Omega_b(\theta)}{d\theta} = \frac{R(\theta)}{EI_b(\theta)} M_b^l(\theta) \tag{3.66}$$

$$\frac{dM_b^l(\theta)}{d\theta} = -R(\theta) F_n^l(\theta) - R(\theta) m_b(\theta) \tag{3.67}$$

$$\frac{dF_t^l(\theta)}{d\theta} = F_n^l(\theta) - R(\theta) q_t(\theta) \tag{3.68}$$

$$\frac{dF_n^l(\theta)}{d\theta} = -F_t^l(\theta) - R(\theta)q_n(\theta) \quad (3.69)$$

olarak bilinmektedir. Bu denklemlerde u ve w normal ve teğetsel doğrultulardaki yer değiştirmeleri; n , b ve t indisleri sırasıyla normal, binormal ve teğet doğrultuları göstermek üzere Ω_b kesitin binormal eksen etrafındaki dönme açısını; θ , açısal koordinatı; $R(\theta)$, şekil değiştirmemiş çubuk ekseninin eğrilik yarıçapını, F_n^l , F_t^l ile F_n^{nl} ve F_t^{nl} normal ve teğet doğrultusundaki iç kuvvetleri; M_b^l binormal doğrultusunda vektör veren iç momentini; E ve G malzemenin elastiklik (Young) ve kayma modüllerini; k_n kayma gerilmesinin kesite üniform olarak yayılmadığını karakterize eden sabiti; A , kesit alanını; I_b , binormal eksene göre eylemsizlik momentini temsil etmektedir. q_n ve q_t yayılı dış kuvvetleri, m_b yayılı dış momentini göstermektedir.

Burada, çubuk eğriliğinin ve kesitin ayrıca dış yayılı yüklerin, sadece, θ koordinatının fonksiyonu olduğu varsayılmaktadır. Yerel teoremin çubuk denklemleri kullanılarak, elde edilmiş olan yerel ve yerel olmayan teorilerdeki kesit tesirleri arasındaki ilişkiler, düzenlenerek, ilk üç denklemde yerine konacaktır.

Bu denklem takımının son üç denklemi, yani denge denklemleri hem yerel hem de yerel olmayan teoride aynıdır. (3.67)-(3.69) denklemleri θ koordinatına göre türetilirse;

$$\frac{d^2 M_b^{nl}}{d\theta^2} = -R \frac{dF_n^{nl}}{d\theta} - \frac{dR}{d\theta} F_n^{nl} - R \frac{dm_b}{d\theta} - \frac{dR}{d\theta} m_b \quad (3.70)$$

$$\frac{d^2 F_t^{nl}}{d\theta^2} = \frac{dF_n^{nl}}{d\theta} - R \frac{dq_t}{d\theta} - \frac{dR}{d\theta} q_t \quad (3.71)$$

$$\frac{d^2 F_n^{nl}}{d\theta^2} = -\frac{dF_t^{nl}}{d\theta} - R \frac{dq_n}{d\theta} - \frac{dR}{d\theta} q_n \quad (3.72)$$

eşitlikleri elde edilir. Burada, kesit tesirlerinin birinci türevleri, yani denklem (3.68)-(3.69), yerine konur ve düzenlenirse;

$$\frac{d^2 M_b^{nl}}{d\theta^2} = R F_t^{nl}(\theta) + [R(\theta)]^2 q_n(\theta) - \frac{dR(\theta)}{d\theta} F_n^{nl} - R \frac{dm_b}{d\theta} - \frac{dR(\theta)}{d\theta} m_b \quad (3.73)$$

$$\frac{d^2 F_t^{nl}}{d\theta^2} = -F_t^{nl}(\theta) - R(\theta)q_n(\theta) - R(\theta)\frac{dq_t}{d\theta} - \frac{dR(\theta)}{d\theta}q_t \quad (3.74)$$

$$\frac{d^2 F_n^{nl}}{d\theta^2} = -F_n^{nl}(\theta) + R(\theta)q_t(\theta) - R(\theta)\frac{dq_n}{d\theta} - \frac{dR(\theta)}{d\theta}q_n \quad (3.75)$$

ifadeleri bulunur. Bunlar, yerel ve yerel olmayan kesit tesirleri arasındaki ilişkileri veren (3.50), (3.57) ve (3.63) denklemlerinde yerine konur ve düzenlenirse,

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2}\right) F_t^{nl}(\theta) + \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} R(\theta)q_n(\theta) + \frac{\gamma^2}{R(\theta)} \frac{dq_t}{d\theta} + \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \frac{dR}{d\theta} q_t \\ = F_t^l \end{aligned} \quad (3.76)$$

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2}\right) F_n^{nl}(\theta) - \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} R(\theta)q_t(\theta) + \frac{\gamma^2}{R(\theta)} \frac{dq_n}{d\theta} + \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \frac{dR}{d\theta} q_n \\ = F_n^l \end{aligned} \quad (3.77)$$

$$\begin{aligned} M_b^{nl} - \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} [R(\theta)]^2 q_n(\theta) + \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \frac{dR}{d\theta} F_n^{nl} + \frac{\gamma^2}{R(\theta)} \frac{dm_b}{d\theta} \\ + \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \frac{dR}{d\theta} m_b = M_b^l \end{aligned} \quad (3.78)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu ifadeler, çubuk denklemlerinin ilk üçünde yerine konarak, yerel olmayan elastisite teorisinin verdiği denklemler;

$$\begin{aligned} \frac{dw(\theta)}{d\theta} = u(\theta) + \frac{R(\theta)}{EA(\theta)} \left(1 + \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2}\right) F_t^{nl}(\theta) \\ + \frac{R(\theta)}{EA(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} R(\theta)q_n(\theta) + \frac{R(\theta)}{EA(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} R \frac{dq_t}{d\theta} \\ + \frac{R(\theta)}{EA(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \frac{dR}{d\theta} q_t \end{aligned} \quad (3.79)$$

$$\begin{aligned} \frac{du(\theta)}{d\theta} = & -w(\theta) + R(\theta)\Omega_b(\theta) + \frac{k_n R(\theta)}{GA(\theta)} \left(1 + \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \right) F_n^{nl}(\theta) \\ & - \frac{k_n [R(\theta)]^2}{GA(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} q_t(\theta) + \frac{k_n [R(\theta)]^2}{GA(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \frac{dq_n}{d\theta} \\ & + \frac{k_n R(\theta)}{GA(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \frac{dR}{d\theta} q_n \end{aligned} \quad (3.80)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega_b(\theta)}{d\theta} = & \frac{R(\theta)}{EI_b(\theta)} M_b^{nl} + \frac{R(\theta)}{EI_b(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \frac{dR}{d\theta} F_n^{nl} \\ & - \frac{R(\theta)}{EI_b(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} [R(\theta)]^2 q_n(\theta) + \frac{R(\theta)}{EI_b(\theta)} \frac{\gamma^2}{R(\theta)} \frac{dm_b}{d\theta} \\ & + \frac{R(\theta)}{EI_b(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \frac{dR}{d\theta} m_b \end{aligned} \quad (3.81)$$

$$\frac{dM_b^{nl}(\theta)}{d\theta} = -R(\theta)F_n^{nl}(\theta) - R(\theta)m_b(\theta) \quad (3.82)$$

$$\frac{dF_t^{nl}(\theta)}{d\theta} = F_n^{nl}(\theta) - R(\theta)q_t(\theta) \quad (3.83)$$

$$\frac{dF_n^{nl}(\theta)}{d\theta} = -F_t^{nl}(\theta) - R(\theta)q_n(\theta) \quad (3.84)$$

olarak elde edilir.

Böylece elde edilmiş olan, eğri eksenli çubukların düzlem içi yerel olmayan statik davranışlarını ifade eden diferansiyel denklem takımının kesin çözümü, başlangıç değerleri yöntemi kullanılarak, analitik olarak elde edilebilmektedir. Çubuk eksen eğrisi ve kesiti ne olursa olsun, yer değiştirmelerin ve kesit tesirlerinin, çubuk eksen eğrisi boyunca analitik olarak belirlenmesi, başlangıç değerleri yöntemi ile mümkün olabilmektedir.

3.2 Çubukların Düzlem İçi Dinamik Davranışını İfade Eden Yerel Olmayan Denklemler

Yerel olmayan elastisite teorisinden elde edilen, yerel olmayan çubuk teorisinin genel denklemleri, (3.79)-(3.84) denklemleri ile verilmektedir. Denklemlerde, eksen

eğrisinin uzaması ve kayma deformasyonu etkileri göz önüne alınmaktadır. D’Alambert prensibi yardımı ile çubuk teorisinin bu genel denklemleri kullanılarak çubuk titreşimlerini de incelemek mümkündür. Bu prensibe göre, maddesel bir sistemin hareketinden dolayı, bir t anında meydana gelen eylemsizlik kuvvetleri aktif dış kuvvetler olarak, sisteme etki eden gerçek kuvvetlerle birlikte göz önüne alınırsa; sistem bütün bu kuvvetlerin etkisi altında, t anındaki konumunda dengede bulunur. Çubuğa dışarıdan etkiyen yayılı kuvvet ve moment $\mathbf{q}$ ve $\mathbf{m}$ vektörleridir. Dinamik problemin incelenmesinde, bu dış yük vektörlerinin düzlem içindeki bileşenlerinin kütle atalet kuvvetleri olarak alınması gerekmektedir (Tüfekci ve Arpacı, 1998);

$$q_n(\theta) = -\rho A(\theta) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \rho A(\theta) \omega^2 u \quad (3.85)$$

$$q_t(\theta) = -\rho A(\theta) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \rho A(\theta) \omega^2 w \quad (3.86)$$

$$m_b(\theta) = -\rho I_b(\theta) \frac{\partial^2 \Omega_b}{\partial t^2} = \rho I_b(\theta) \omega^2 \Omega_b \quad (3.87)$$

burada u , w , Ω_b , M_b^{nl} , F_t^{nl} ve F_n^{nl} yer değiştirme, dönme açısı ve kesit tesirlerinin zamanın harmonik fonsiyonları olduğu varsayımı yapılmaktadır. Bu ifadelerin türevleri;

$$\frac{dq_n(\theta)}{d\theta} = \rho A(\theta) \omega^2 \frac{du(\theta)}{d\theta} + \rho \frac{dA(\theta)}{d\theta} \omega^2 u(\theta) \quad (3.88)$$

$$\frac{dq_t(\theta)}{d\theta} = \rho A(\theta) \omega^2 \frac{dw(\theta)}{d\theta} + \rho \frac{dA(\theta)}{d\theta} \omega^2 w(\theta) \quad (3.89)$$

$$\frac{dm_b(\theta)}{d\theta} = \rho I_b(\theta) \omega^2 \frac{d\Omega_b(\theta)}{d\theta} + \rho \frac{dI_b(\theta)}{d\theta} \omega^2 \Omega_b(\theta) \quad (3.90)$$

olarak elde edilir. Bunlar, yerel olmayan elastisitenin çubuk denklemlerinde yerine konursa;

$$\begin{aligned}
\frac{dw(\theta)}{d\theta} &= u(\theta) + \frac{R(\theta)}{EA(\theta)} \left(1 + \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \right) F_t^{nl}(\theta) \\
&+ \frac{R(\theta)}{EA(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} R(\theta) \rho A(\theta) \omega^2 u(\theta) \\
&+ \frac{R(\theta)}{EA(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} R \rho A(\theta) \omega^2 \frac{dw(\theta)}{d\theta} \\
&+ \frac{R(\theta)}{EA(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} R \rho \frac{dA(\theta)}{d\theta} \omega^2 w(\theta) \\
&+ \frac{R(\theta)}{EA(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \frac{dR}{d\theta} \rho A(\theta) \omega^2 w(\theta)
\end{aligned} \tag{3.91}$$

$$\begin{aligned}
\frac{du(\theta)}{d\theta} &= -w(\theta) + R(\theta) \Omega_b(\theta) + \frac{k_n R(\theta)}{GA(\theta)} \left(1 + \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \right) F_n^{nl}(\theta) \\
&- \frac{k_n [R(\theta)]^2}{GA(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \rho A(\theta) \omega^2 w \\
&+ \frac{k_n [R(\theta)]^2}{GA(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \rho A(\theta) \omega^2 \frac{du(\theta)}{d\theta} \\
&+ \frac{k_n [R(\theta)]^2}{GA(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \rho \frac{dA(\theta)}{d\theta} \omega^2 u(\theta) \\
&+ \frac{k_n R(\theta)}{GA(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \frac{dR}{d\theta} \rho A(\theta) \omega^2 u
\end{aligned} \tag{3.92}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\Omega_b(\theta)}{d\theta} &= \frac{R(\theta)}{EI_b(\theta)} M_b^{nl} + \frac{R(\theta)}{EI_b(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \frac{dR}{d\theta} F_n^{nl} \\
&- \frac{R(\theta)}{EI_b(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} [R(\theta)]^2 \rho A(\theta) \omega^2 u \\
&+ \frac{R(\theta)}{EI_b(\theta)} \frac{\gamma^2}{R(\theta)} \rho I_b(\theta) \omega^2 \frac{d\Omega_b(\theta)}{d\theta} \\
&+ \frac{R(\theta)}{EI_b(\theta)} \frac{\gamma^2}{R(\theta)} \rho \frac{dI_b(\theta)}{d\theta} \omega^2 \Omega_b(\theta) \\
&+ \frac{R(\theta)}{EI_b(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \frac{dR}{d\theta} \rho I_b(\theta) \omega^2 \Omega_b
\end{aligned} \tag{3.93}$$

$$\frac{dM_b(\theta)}{d\theta} = -R(\theta)F_n(\theta) - R(\theta)\rho I_b(\theta)\omega^2\Omega_b(\theta) \quad (3.94)$$

$$\frac{dF_t(\theta)}{d\theta} = F_n(\theta) - R(\theta)\rho A(\theta)\omega^2 w(\theta) \quad (3.95)$$

$$\frac{dF_n(\theta)}{d\theta} = -F_t(\theta) - R(\theta)\rho A(\theta)\omega^2 u(\theta) \quad (3.96)$$

elde edilir. Bu denklemler düzenlenirse;

$$\begin{aligned} \frac{dw(\theta)}{d\theta} = & \frac{\left(1 + \frac{R(\theta)}{EA(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} R(\theta)\rho A(\theta)\omega^2\right)}{\left(1 - \frac{R(\theta)}{EA(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} R\rho A(\theta)\omega^2\right)} u(\theta) \\ & + \frac{\frac{R(\theta)}{EA(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \frac{dR}{d\theta} \rho A(\theta)\omega^2}{\left(1 - \frac{R(\theta)}{EA(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} R\rho A(\theta)\omega^2\right)} w(\theta) \\ & + \frac{\frac{R(\theta)}{EA(\theta)} \left(1 + \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2}\right)}{\left(1 - \frac{R(\theta)}{EA(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} R\rho A(\theta)\omega^2\right)} F_t^{nl}(\theta) \end{aligned} \quad (3.97)$$

$$\begin{aligned} \frac{du(\theta)}{d\theta} = & - \frac{\left(1 + \frac{k_n[R(\theta)]^2}{GA(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \rho A(\theta)\omega^2\right)}{\left(1 - \frac{k_n[R(\theta)]^2}{GA(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \rho A(\theta)\omega^2\right)} w(\theta) \\ & + \frac{\frac{k_n R(\theta)}{GA(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \frac{dR}{d\theta} \rho A(\theta)\omega^2}{\left(1 - \frac{k_n[R(\theta)]^2}{GA(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \rho A(\theta)\omega^2\right)} u(\theta) \\ & + \frac{R(\theta)}{\left(1 - \frac{k_n[R(\theta)]^2}{GA(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \rho A(\theta)\omega^2\right)} \Omega_b(\theta) \\ & + \frac{\frac{k_n R(\theta)}{GA(\theta)} \left(1 + \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2}\right)}{\left(1 - \frac{k_n[R(\theta)]^2}{GA(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \rho A(\theta)\omega^2\right)} F_n^{nl}(\theta) \end{aligned} \quad (3.98)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\Omega_b(\theta)}{d\theta} = & -\frac{\frac{R(\theta)}{EI_b(\theta)} \frac{\gamma^2}{(R(\theta))^2} [R(\theta)]^2 \rho A(\theta) \omega^2}{\left(1 - \frac{[R(\theta)]^2}{EI_b(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \rho I_b(\theta) \omega^2\right)} u(\theta) \\
& + \frac{\frac{R(\theta)}{EI_b(\theta)} \frac{\gamma^2}{(R(\theta))^2} \frac{dR}{d\theta} \rho I_b(\theta) \omega^2}{\left(1 - \frac{[R(\theta)]^2}{EI_b(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \rho I_b(\theta) \omega^2\right)} \Omega_b(\theta) \\
& + \frac{\frac{R(\theta)}{EI_b(\theta)}}{\left(1 - \frac{[R(\theta)]^2}{EI_b(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \rho I_b(\theta) \omega^2\right)} M_b^{nl}(\theta) \\
& + \frac{\frac{R(\theta)}{EI_b(\theta)} \frac{\gamma^2}{(R(\theta))^2} \frac{dR}{d\theta}}{\left(1 - \frac{[R(\theta)]^2}{EI_b(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \rho I_b(\theta) \omega^2\right)} F_n^{nl}(\theta)
\end{aligned} \tag{3.99}$$

$$\frac{dM_b(\theta)}{d\theta} = -R(\theta) \rho I_b(\theta) \omega^2 \Omega_b(\theta) - R(\theta) F_n(\theta) \tag{3.100}$$

$$\frac{dF_t(\theta)}{d\theta} = -R(\theta) \rho A(\theta) \omega^2 w(\theta) + F_n(\theta) \tag{3.101}$$

$$\frac{dF_n(\theta)}{d\theta} = -R(\theta) \rho A(\theta) \omega^2 u(\theta) - F_t(\theta) \tag{3.102}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu denklemler; matrisel formda;

$$\frac{d\mathbf{y}(\theta)}{d\theta} = \mathbf{A}(\theta) \mathbf{y}(\theta) \tag{3.103}$$

olarak yazılabilir. Burada $\mathbf{A}(\theta)$ matrisi, katsayılar matrisidir.

$$\mathbf{A}(\theta) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} & A_{46} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} & A_{56} \\ A_{61} & A_{62} & A_{63} & A_{64} & A_{65} & A_{66} \end{bmatrix} \tag{3.104}$$

Katsayılar matrisinin elemanları;

$$A_{12} = \frac{\left(1 + \frac{R(\theta)}{EA(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} R(\theta) \rho A(\theta) \omega^2\right)}{\left(1 - \frac{R(\theta)}{EA(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} R \rho A(\theta) \omega^2\right)} \quad (3.105)$$

$$A_{13} = \frac{\frac{R(\theta)}{EI_b(\theta)} \frac{\gamma^2}{(R(\theta))^2} \frac{dR}{d\theta} \rho I_b(\theta) \omega^2}{\left(1 - \frac{[R(\theta)]^2}{EI_b(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \rho I_b(\theta) \omega^2\right)} \quad (3.106)$$

$$A_{15} = \frac{\frac{R(\theta)}{EI_b(\theta)}}{\left(1 - \frac{[R(\theta)]^2}{EI_b(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \rho I_b(\theta) \omega^2\right)} \quad (3.107)$$

$$A_{21} = - \frac{\left(1 + \frac{k_n [R(\theta)]^2}{GA(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \rho A(\theta) \omega^2\right)}{\left(1 - \frac{k_n [R(\theta)]^2}{GA(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \rho A(\theta) \omega^2\right)} \quad (3.108)$$

$$A_{21} = - \frac{\left(1 + \frac{k_n [R(\theta)]^2}{GA(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \rho A(\theta) \omega^2\right)}{\left(1 - \frac{k_n [R(\theta)]^2}{GA(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \rho A(\theta) \omega^2\right)} \quad (3.109)$$

$$A_{22} = \frac{\frac{k_n R(\theta)}{GA(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \frac{dR}{d\theta} \rho A(\theta) \omega^2}{\left(1 - \frac{k_n [R(\theta)]^2}{GA(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \rho A(\theta) \omega^2\right)} \quad (3.110)$$

$$A_{23} = \frac{R(\theta)}{\left(1 - \frac{k_n [R(\theta)]^2}{GA(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \rho A(\theta) \omega^2\right)} \quad (3.111)$$

$$A_{26} = \frac{\frac{k_n R(\theta)}{GA(\theta)} \left(1 + \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2}\right)}{\left(1 - \frac{k_n [R(\theta)]^2}{GA(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \rho A(\theta) \omega^2\right)} \quad (3.112)$$

$$A_{32} = - \frac{\frac{R(\theta)}{EI_b(\theta)} \frac{\gamma^2}{(R(\theta))^2} [R(\theta)]^2 \rho A(\theta) \omega^2}{\left(1 - \frac{[R(\theta)]^2}{EI_b(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \rho I_b(\theta) \omega^2\right)} \quad (3.113)$$

$$A_{33} = \frac{\frac{R(\theta)}{EI_b(\theta)} \frac{\gamma^2}{(R(\theta))^2} \frac{dR}{d\theta} \rho I_b(\theta) \omega^2}{\left(1 - \frac{[R(\theta)]^2}{EI_b(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \rho I_b(\theta) \omega^2\right)} \quad (3.114)$$

$$A_{34} = \frac{\frac{R(\theta)}{EI_b(\theta)}}{\left(1 - \frac{[R(\theta)]^2}{EI_b(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \rho I_b(\theta) \omega^2\right)} \quad (3.115)$$

$$A_{36} = \frac{\frac{R(\theta)}{EI_b(\theta)} \frac{\gamma^2}{(R(\theta))^2} \frac{dR}{d\theta}}{\left(1 - \frac{[R(\theta)]^2}{EI_b(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \rho I_b(\theta) \omega^2\right)} \quad (3.116)$$

$$A_{43} = -R(\theta) \rho I_b(\theta) \omega^2 \quad (3.117)$$

$$A_{46} = -R(\theta) \quad (3.118)$$

$$A_{51} = -R(\theta) \rho A(\theta) \omega^2 \quad (3.119)$$

$$A_{56} = 1 \quad (3.120)$$

$$A_{62} = -R(\theta) \rho A(\theta) \omega^2 \quad (3.121)$$

$$A_{65} = -1 \quad (3.122)$$

şekindedir. Bu diferansiyel denklem takımının kesin analitik çözümü, katsayılar matrisinin sabit olması durumunda mevcuttur. Bu durum, sabit kesitli çember eksenli çubuğa karşı gelmektedir. Dolayısıyla;

$$R(\theta) = R \quad \frac{dR}{d\theta} = 0 \quad A(\theta) = A \quad I_b(\theta) = I_b \quad (3.123)$$

alınarak denklemler, aşağıdaki şekilde sadeleşirler:

$$\frac{dw(\theta)}{d\theta} = \frac{\left(1 + \frac{R}{EA} \frac{\gamma^2}{R^2} R \rho A \omega^2\right)}{\left(1 - \frac{R}{EA} \frac{\gamma^2}{R^2} R \rho A \omega^2\right)} u(\theta) + \frac{\frac{R}{EA} \left(1 + \frac{\gamma^2}{R^2}\right)}{\left(1 - \frac{R}{EA} \frac{\gamma^2}{R^2} R \rho A \omega^2\right)} F_t^{nl}(\theta) \quad (3.124)$$

$$\begin{aligned} \frac{du(\theta)}{d\theta} = & - \frac{\left(1 + \frac{k_n R^2}{GA} \frac{\gamma^2}{R^2} \rho A \omega^2\right)}{\left(1 - \frac{k_n R^2}{GA} \frac{\gamma^2}{R^2} \rho A \omega^2\right)} w(\theta) + \frac{R}{\left(1 - \frac{k_n R^2}{GA} \frac{\gamma^2}{R^2} \rho A \omega^2\right)} \Omega_b(\theta) \\ & + \frac{\frac{k_n R}{GA} \left(1 + \frac{\gamma^2}{R^2}\right)}{\left(1 - \frac{k_n R^2}{GA} \frac{\gamma^2}{R^2} \rho A \omega^2\right)} F_n^{nl}(\theta) \end{aligned} \quad (3.125)$$

$$\frac{d\Omega_b(\theta)}{d\theta} = - \frac{\frac{R}{EI_b} \frac{\gamma^2}{R^2} R^2 \rho A \omega^2}{\left(1 - \frac{R^2}{EI_b} \frac{\gamma^2}{R^2} \rho I_b \omega^2\right)} u(\theta) + \frac{\frac{R}{EI_b}}{\left(1 - \frac{R^2}{EI_b} \frac{\gamma^2}{R^2} \rho I_b \omega^2\right)} M_b^{nl}(\theta) \quad (3.126)$$

$$\frac{dM_b(\theta)}{d\theta} = -R\rho I_b \omega^2 \Omega_b(\theta) - R F_n(\theta) \quad (3.127)$$

$$\frac{dF_t(\theta)}{d\theta} = -R\rho A \omega^2 w(\theta) + F_n(\theta) \quad (3.128)$$

$$\frac{dF_n(\theta)}{d\theta} = -R\rho A \omega^2 u(\theta) - F_t(\theta) \quad (3.129)$$

Bu durumda, **A** matrisinin elemanları aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$A_{12} = \frac{\left(1 + \frac{R}{EA} \frac{\gamma^2}{R^2} R\rho A \omega^2\right)}{\left(1 - \frac{R}{EA} \frac{\gamma^2}{R^2} R\rho A \omega^2\right)} \quad (3.130)$$

$$A_{15} = \frac{\frac{R}{EA} \left(1 + \frac{\gamma^2}{R^2}\right)}{\left(1 - \frac{R}{EA} \frac{\gamma^2}{R^2} R\rho A \omega^2\right)} \quad (3.131)$$

$$A_{21} = - \frac{\left(1 + \frac{k_n R^2}{GA} \frac{\gamma^2}{R^2} \rho A \omega^2\right)}{\left(1 - \frac{k_n R^2}{GA} \frac{\gamma^2}{R^2} \rho A \omega^2\right)} \quad (3.132)$$

$$A_{23} = \frac{R}{\left(1 - \frac{k_n R^2}{GA} \frac{\gamma^2}{R^2} \rho A \omega^2\right)} \quad (3.133)$$

$$A_{26} = \frac{\frac{k_n R}{GA} \left(1 + \frac{\gamma^2}{R^2}\right)}{\left(1 - \frac{k_n R^2}{GA} \frac{\gamma^2}{R^2} \rho A \omega^2\right)} \quad (3.134)$$

$$A_{32} = -\frac{\frac{R}{EI_b} \frac{\gamma^2}{R^2} R^2 \rho A \omega^2}{\left(1 - \frac{R^2}{EI_b} \frac{\gamma^2}{R^2} \rho I_b \omega^2\right)} \quad (3.135)$$

$$A_{34} = \frac{\frac{R}{EI_b}}{\left(1 - \frac{R^2}{EI_b} \frac{\gamma^2}{R^2} \rho I_b \omega^2\right)} \quad (3.136)$$

$$A_{43} = -R \rho I_b \omega^2 \quad (3.137)$$

$$A_{46} = -R \quad (3.138)$$

$$A_{51} = -R \rho A \omega^2 \quad (3.139)$$

$$A_{56} = 1 \quad (3.140)$$

$$A_{62} = -R \rho A \omega^2 \quad (3.141)$$

$$A_{65} = -1 \quad (3.142)$$

Bu matris yardımıyla, başlangıç değerleri yöntemi kullanılarak, titreşim problemlerinin kesin analitik çözümü bulunur.

4. DÜZLEM İÇİ STATİK DAVRANIŞI İFADE EDEN YEREL OLMAYAN ÇUBUK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

Eğri eksenli çubukların kendi düzlemindeki şekil değiştirmelerine ait (3.79)-(3.84) denklemleri, birinci dereceden değişken katsayılı lineer diferansiyel denklemlerdir. Denklemler matris şeklinde ifade edildiğinde;

$$\frac{d\mathbf{y}(\theta)}{d\theta} = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{y}(\theta) + \mathbf{f}(\theta) \quad (4.1)$$

olacaktır. Burada $\mathbf{y}(\theta)$, 6 elemanlı değişkenler vektörünü ve $\mathbf{A}(\theta)$, 6×6 elemanlı katsayılar matrisini, $\mathbf{f}(\theta)$ ise 6 elemanlı yayılı dış yüklere ait vektörü ifade etmektedir. Denklemin çözümü,

$$\mathbf{y}(\theta) = \mathbf{Y}(\theta, \theta_o)\mathbf{y}_o + \mathbf{Y}(\theta, \theta_o) \int_{\theta_o}^{\theta} \mathbf{Y}^{-1}(\psi, \theta_o)\mathbf{f}(\psi)d\psi \quad (4.2)$$

olarak bilinmektedir. Burada, başlangıç değerleri, $\theta_o = 0$ referans koordinatında hesaplanacaktır. $\mathbf{y}_o = \mathbf{y}(\theta_o)$ başlangıç değerleri, sınır şartlarından elde edilecektir. $\mathbf{Y}(\theta, \theta_o)$ referans koordinatı için hesaplanan asal matristir ve homojen denklem takımının çözümünden elde edilir. Tekil kuvvet ve momentlerin etkidiği çubuğa ait denklemlerin yani, çubuk üzerine hiçbir yayılı kuvvet ya da momentin etkimemesi durumunda homojen denklem takımının çözümü (4.3) deki gibi olmaktadır:

$$\mathbf{y}(\theta) = \mathbf{Y}(\theta, 0)\mathbf{y}_o \quad (4.3)$$

$\mathbf{f}(\theta)$ dış yayılı yük vektörünün özdeş olarak sıfır olması yani, çubuk üzerine hiçbir yayılı kuvvet ya da momentin etkimemesi durumunda, çubuğun kendi düzlemindeki statik davranışını ifade eden denklemler;

$$\frac{dw(\theta)}{d\theta} = u(\theta) + \frac{R(\theta)}{EA(\theta)} \left(1 + \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \right) F_t^{nl}(\theta) \quad (4.4)$$

$$\frac{du(\theta)}{d\theta} = -w(\theta) + R(\theta)\Omega_b(\theta) + \frac{k_n R(\theta)}{GA(\theta)} \left(1 + \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \right) F_n^{nl}(\theta) \quad (4.5)$$

$$\frac{d\Omega_b(\theta)}{d\theta} = \frac{R(\theta)}{EI_b(\theta)} M_b^{nl} + \frac{R(\theta)}{EI_b(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \frac{dR}{d\theta} F_n^{nl} \quad (4.6)$$

$$\frac{dM_b(\theta)}{d\theta} = -R(\theta)F_n(\theta) \quad (4.7)$$

$$\frac{dF_t(\theta)}{d\theta} = F_n(\theta) \quad (4.8)$$

$$\frac{dF_n(\theta)}{d\theta} = -F_t(\theta) \quad (4.9)$$

şeklindedir. Bu denklemlerin çözümü aşağıdaki gibi elde edilir:

$$F_t^{nl}(\theta) = F_{no}^{nl} \sin \theta + F_{to}^{nl} \cos \theta \quad (4.10)$$

$$F_n^{nl}(\theta) = F_{no}^{nl} \cos \theta - F_{to}^{nl} \sin \theta \quad (4.11)$$

$$M_b^{nl}(\theta) = M_{bo}^{nl} + \int_0^\theta R(\psi) \sin \psi d\psi F_{to}^{nl} - \int_0^\theta R(\psi) \cos \psi d\psi F_{no}^{nl} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned}
\Omega_b(\theta) = & \Omega_{bo} + \int_0^\theta \frac{R(\phi)}{EI_b(\phi)} d\psi M_{bo}^{nl} \\
& + \left\{ \int_0^\theta \frac{R(\phi)}{EI_b(\phi)} \int_0^\phi R(\psi) \sin \psi d\psi d\psi \right. \\
& - \int_0^\theta \frac{R(\phi)}{EI_b(\phi)} \frac{\gamma^2}{(R(\theta))^2} \frac{dR}{d\phi} \sin \phi d\psi \left. \right\} F_{to}^{nl} \\
& + \left\{ \int_0^\theta \frac{R(\phi)}{EI_b(\phi)} \frac{\gamma^2}{(R(\theta))^2} \frac{dR}{d\phi} \cos \phi d\psi \right. \\
& - \int_0^\theta \frac{R(\phi)}{EI_b(\phi)} \int_0^\phi R(\psi) \cos \psi d\psi d\psi \left. \right\} F_{no}^{nl}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

u ve w yer değiştirme bileşenleri ise (4.4) ve (4.5)'in cözümünden elde edilecektir. Homojen denklemler;

$$\frac{dw(\theta)}{d\theta} = u(\theta) \tag{4.14}$$

$$\frac{du(\theta)}{d\theta} = -w(\theta) \tag{4.15}$$

ve homojen denklemlerin cözümü;

$$w(\theta) = w_o \cos \theta + u_o \sin \theta \tag{4.16}$$

$$u(\theta) = -w_o \sin \theta + u_o \cos \theta \tag{4.17}$$

$$\begin{bmatrix} w(\theta) \\ u(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_o \\ u_o \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

$$\mathbf{y}(\theta) = \mathbf{Y}(\theta, \theta_o) \mathbf{y}_o \tag{4.19}$$

Homojen olmayan denklemlerin cözümü (4.2) denklemiyle elde edilebilir.

$$\mathbf{Y}^{-1}(\theta, 0) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \tag{4.20}$$

$$\mathbf{f}(\theta) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R(\theta)}{EA(\theta)} \left(1 + \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \right) F_t^{nl}(\theta) \\ R(\theta)\Omega_b(\theta) + \frac{k_n R(\theta)}{GA(\theta)} \left(1 + \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \right) F_n^{nl}(\theta) \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

$$\begin{bmatrix} w(\theta) \\ u(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_o \\ u_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_0^\theta \begin{bmatrix} f_1(\phi) \cos \phi \\ -f_2(\phi) \sin \phi \end{bmatrix} d\phi \cos \theta + \int_0^\theta \begin{bmatrix} f_1(\phi) \sin \phi \\ +f_2(\phi) \cos \phi \end{bmatrix} d\phi \sin \theta \\ -\int_0^\theta \begin{bmatrix} f_1(\phi) \cos \phi \\ -f_2(\phi) \sin \phi \end{bmatrix} d\phi \sin \theta + \int_0^\theta \begin{bmatrix} f_1(\phi) \sin \phi \\ +f_2(\phi) \cos \phi \end{bmatrix} d\phi \cos \theta \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} w(\theta) &= \cos \theta w_o + \sin \theta u_o \\ &+ \int_0^\theta (f_1(\phi) \cos \phi - f_2(\phi) \sin \phi) d\phi \cos \theta \\ &+ \int_0^\theta (f_1(\phi) \sin \phi + f_2(\phi) \cos \phi) d\phi \sin \theta \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} u(\theta) &= -\sin \theta w_o + \cos \theta u_o \\ &- \int_0^\theta (f_1(\phi) \cos \phi - f_2(\phi) \sin \phi) d\phi \sin \theta \\ &+ \int_0^\theta (f_1(\phi) \sin \phi + f_2(\phi) \cos \phi) d\phi \cos \theta \end{aligned} \quad (4.24)$$

Denklemler düzenlenirse aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$\begin{aligned}
w(\theta) = & \cos \theta w_o + \sin \theta u_o - \int_0^\theta R(\psi) \sin \psi d\psi \cos \theta \Omega_{bo} + \int_0^\theta R(\psi) \cos \psi d\psi \sin \theta \Omega_{bo} \\
& - \int_0^\theta R(\psi) \left(\int_0^\phi \frac{R(\phi)}{EI_b(\phi)} d\psi \right) \sin \psi d\psi \cos \theta M_{bo}^{nl} \\
& + \int_0^\theta R(\psi) \left(\int_0^\phi \frac{R(\phi)}{EI_b(\phi)} d\psi \right) \cos \psi d\psi \sin \theta M_{bo}^{nl} \\
& + \int_0^\theta \frac{R(\psi)}{EA(\psi)} \left(1 + \frac{\gamma^2}{[R(\psi)]^2} \right) \cos^2 \psi d\psi \cos \theta F_{to}^{nl} \\
& + \int_0^\theta \frac{k_n R(\psi)}{GA(\psi)} \left(1 + \frac{\gamma^2}{[R(\psi)]^2} \right) \sin^2 \psi d\psi \cos \theta F_{to}^{nl} \\
& - \int_0^\theta R(\psi) \left(\int_0^\phi \frac{R(\phi)}{EI_b(\phi)} \int_0^\phi R(\psi) \sin \psi d\psi d\psi \right) \sin \psi d\psi \cos \theta F_{to}^{nl} \\
& + \int_0^\theta R(\psi) \left(\int_0^\phi \frac{R(\phi)}{EI_b(\phi)} \frac{\gamma^2}{(R(\theta))^2} \frac{dR}{d\phi} \sin \phi d\psi \right) \sin \psi d\psi \cos \theta F_{to}^{nl} \\
& + \int_0^\theta \frac{R(\psi)}{EA(\psi)} \left(1 + \frac{\gamma^2}{[R(\psi)]^2} \right) \cos \phi \sin \psi d\psi \sin \theta F_{to}^{nl} \\
& + \int_0^\theta R(\psi) \left[\int_0^\phi \frac{R(\phi)}{EI_b(\phi)} \int_0^\phi R(\psi) \sin \psi d\psi d\psi \right] \cos \psi d\psi \sin \theta F_{to}^{nl} \\
& - \int_0^\theta R(\psi) \left[\int_0^\phi \frac{R(\phi)}{EI_b(\phi)} \frac{\gamma^2}{(R(\theta))^2} \frac{dR}{d\phi} \sin \phi d\psi \right] \cos \psi d\psi \sin \theta F_{to}^{nl} \\
& - \int_0^\theta \frac{k_n R(\psi)}{GA(\psi)} \left(1 + \frac{\gamma^2}{[R(\psi)]^2} \right) \sin \phi \cos \psi d\psi \sin \theta F_{to}^{nl} \\
& + \int_0^\theta \frac{R(\psi)}{EA(\psi)} \left(1 + \frac{\gamma^2}{[R(\psi)]^2} \right) \sin \psi \cos \psi d\psi \cos \theta F_{no}^{nl} \\
& - \int_0^\theta R(\psi) \left(\int_0^\phi \frac{R(\phi)}{EI_b(\phi)} \frac{\gamma^2}{(R(\theta))^2} \frac{dR}{d\phi} \cos \phi d\psi \right) \sin \psi d\psi \cos \theta F_{no}^{nl} \\
& + \int_0^\theta R(\psi) \left(\int_0^\phi \frac{R(\phi)}{EI_b(\phi)} \int_0^\phi R(\psi) \cos \psi d\psi d\psi \right) \sin \psi d\psi \cos \theta F_{no}^{nl} \\
& - \int_0^\theta \frac{k_n R(\psi)}{GA(\psi)} \left(1 + \frac{\gamma^2}{[R(\psi)]^2} \right) \cos \phi \sin \psi d\psi \cos \theta F_{no}^{nl} \\
& + \int_0^\theta \frac{R(\psi)}{EA(\psi)} \left(1 + \frac{\gamma^2}{[R(\psi)]^2} \right) \sin^2 \psi d\psi \sin \theta F_{no}^{nl} \\
& + \int_0^\theta R(\psi) \left[\int_0^\phi \frac{R(\phi)}{EI_b(\phi)} \frac{\gamma^2}{(R(\theta))^2} \frac{dR}{d\phi} \cos \phi d\psi \right] \cos \psi d\psi \sin \theta F_{no}^{nl} \\
& - \int_0^\theta R(\psi) \left[\int_0^\phi \frac{R(\phi)}{EI_b(\phi)} \int_0^\phi R(\psi) \cos \psi d\psi d\psi \right] \cos \psi d\psi \sin \theta F_{no}^{nl} \\
& + \int_0^\theta \frac{k_n R(\psi)}{GA(\psi)} \left(1 + \frac{\gamma^2}{[R(\psi)]^2} \right) \cos^2 \psi d\psi \sin \theta F_{no}^{nl}
\end{aligned} \tag{4.25}$$

$$\begin{aligned}
u(\theta) = & -\sin \theta w_o + \cos \theta u_o + \int_0^\theta R(\psi) \sin \psi d\psi \sin \theta \Omega_{bo} + \int_0^\theta R(\psi) \cos \psi d\psi \cos \theta \Omega_{bo} \\
& + \int_0^\theta R(\psi) \int_0^\phi \frac{R(\phi)}{EI_b(\phi)} d\psi \sin \psi d\psi \sin \theta M_{bo}^{nl} \\
& + \int_0^\theta R(\psi) \int_0^\phi \frac{R(\phi)}{EI_b(\phi)} d\psi \cos \psi d\psi \cos \theta M_{bo}^{nl} \\
& - \int_0^\theta \frac{R(\psi)}{EA(\psi)} \left(1 + \frac{\gamma^2}{[R(\psi)]^2} \right) \cos \phi \cos \psi d\psi \sin \theta F_{to}^{nl} \\
& - \int_0^\theta \frac{k_n R(\psi)}{GA(\psi)} \left(1 + \frac{\gamma^2}{[R(\psi)]^2} \right) \sin \phi \cos \psi d\psi \cos \theta F_{to}^{nl} \\
& + \int_0^\theta \frac{R(\psi)}{EA(\psi)} \left(1 + \frac{\gamma^2}{[R(\psi)]^2} \right) \cos \phi \sin \psi d\psi \cos \theta F_{to}^{nl} \\
& + \int_0^\theta R(\psi) \int_0^\phi \frac{R(\phi)}{EI_b(\phi)} \int_0^\phi R(\psi) \sin \psi d\psi d\psi \cos \psi d\psi \cos \theta F_{to}^{nl} \\
& - \int_0^\theta R(\psi) \int_0^\phi \frac{R(\phi)}{EI_b(\phi)} \frac{\gamma^2}{(R(\theta))^2} \frac{dR}{d\phi} \sin \phi d\psi \cos \psi d\psi \cos \theta F_{to}^{nl} \\
& + \int_0^\theta R(\psi) \int_0^\phi \frac{R(\phi)}{EI_b(\phi)} \int_0^\phi R(\psi) \sin \psi d\psi d\psi \sin \psi d\psi \sin \theta F_{to}^{nl} \\
& - \int_0^\theta R(\psi) \int_0^\phi \frac{R(\phi)}{EI_b(\phi)} \frac{\gamma^2}{(R(\theta))^2} \frac{dR}{d\phi} \sin \phi d\psi \sin \psi d\psi \sin \theta F_{to}^{nl} \\
& - \int_0^\theta \frac{k_n R(\psi)}{GA(\psi)} \left(1 + \frac{\gamma^2}{[R(\psi)]^2} \right) \sin \phi \sin \psi d\psi \sin \theta F_{to}^{nl} \\
& - \int_0^\theta \frac{R(\psi)}{EA(\psi)} \left(1 + \frac{\gamma^2}{[R(\psi)]^2} \right) \sin \phi \cos \psi d\psi \sin \theta F_{no}^{nl} \\
& + \int_0^\theta R(\psi) \int_0^\phi \frac{R(\phi)}{EI_b(\phi)} \frac{\gamma^2}{(R(\theta))^2} \frac{dR}{d\phi} \cos \phi d\psi \sin \psi d\psi \sin \theta F_{no}^{nl} \\
& - \int_0^\theta R(\psi) \int_0^\phi \frac{R(\phi)}{EI_b(\phi)} \int_0^\phi R(\psi) \cos \psi d\psi d\psi \sin \psi d\psi \sin \theta F_{no}^{nl} \\
& + \int_0^\theta \frac{k_n R(\psi)}{GA(\psi)} \left(1 + \frac{\gamma^2}{[R(\psi)]^2} \right) \cos \phi \sin \psi d\psi \sin \theta F_{no}^{nl} \\
& + \int_0^\theta \frac{R(\psi)}{EA(\psi)} \left(1 + \frac{\gamma^2}{[R(\psi)]^2} \right) \sin \phi \sin \psi d\psi \cos \theta F_{no}^{nl} \\
& + \int_0^\theta R(\psi) \int_0^\phi \frac{R(\phi)}{EI_b(\phi)} \frac{\gamma^2}{(R(\theta))^2} \frac{dR}{d\phi} \cos \phi d\psi \cos \psi d\psi \cos \theta F_{no}^{nl} \\
& - \int_0^\theta R(\psi) \int_0^\phi \frac{R(\phi)}{EI_b(\phi)} \int_0^\phi R(\psi) \cos \psi d\psi d\psi \cos \psi d\psi \cos \theta F_{no}^{nl} \\
& + \int_0^\theta \frac{k_n R(\psi)}{GA(\psi)} \left(1 + \frac{\gamma^2}{[R(\psi)]^2} \right) \cos \phi \cos \psi d\psi \cos \theta F_{no}^{nl}
\end{aligned} \tag{4.26}$$

elde edilir. Bu eşitlikler, kısaltmalar yardımıyla ifade edilebilir:

$$\begin{bmatrix} w(\theta) \\ u(\theta) \\ \Omega_b(\theta) \\ M_b^{nl}(\theta) \\ F_t^{nl}(\theta) \\ F_n^{nl}(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} & Y_{15} & Y_{16} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} & Y_{25} & Y_{26} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} & Y_{35} & Y_{36} \\ Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} & Y_{45} & Y_{46} \\ Y_{51} & Y_{52} & Y_{53} & Y_{54} & Y_{55} & Y_{56} \\ Y_{61} & Y_{62} & Y_{63} & Y_{64} & Y_{65} & Y_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ u_0 \\ \Omega_{b0} \\ M_{b0}^{nl} \\ F_{t0}^{nl} \\ F_{n0}^{nl} \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Böylece, eğri eksenli çubuk için kesit ve eksen eğrisinden bağımsız bir asal matris elde edilmiş olur. (4.28)

$$[Y] = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} & Y_{15} & Y_{16} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} & Y_{25} & Y_{26} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} & Y_{35} & Y_{36} \\ Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} & Y_{45} & Y_{46} \\ Y_{51} & Y_{52} & Y_{53} & Y_{54} & Y_{55} & Y_{56} \\ Y_{61} & Y_{62} & Y_{63} & Y_{64} & Y_{65} & Y_{66} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

$$\mathbf{y}(\theta) = \mathbf{Y}(\theta, \theta_0) \mathbf{y}_0 \quad (4.29)$$

Burada $\mathbf{Y}(\theta, \theta_0)$ asal matris; $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(\theta_0)$ θ_0 koordinatındaki başlangıç değerler vektörüdür. Bu çalışmada $\theta_0 = 0$ alınmıştır. Asal matris aşağıdaki ifadeleri sağlamalıdır:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(\theta_1, \theta_2) \mathbf{Y}(\theta_2, \theta_3) &= \mathbf{Y}(\theta_1, \theta_3), \quad \mathbf{Y}(\theta_1, \theta_2) = \mathbf{Y}^{-1}(\theta_2, \theta_1) \\ \frac{d\mathbf{Y}(\theta, \theta_0)}{d\theta} &= \mathbf{A}(\theta) \mathbf{Y}(\theta, \theta_0), \quad \mathbf{Y}(\theta_0, \theta_0) = \mathbf{I} \end{aligned} \quad (4.30)$$

Burada $\mathbf{I}$ birim matristir. İki bölge, $\theta = \theta_K$ kooordinatından tekil yükler etkileyen çember eksenli bir çubuk için aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\mathbf{y}_1(\theta_1) = \mathbf{Y}(\theta_1, \theta_0) \mathbf{y}_{10} \quad \text{için} \quad -\theta_A \leq \theta_1 \leq \theta_K \quad (4.31)$$

$$\mathbf{y}_2(\theta_2) = \mathbf{Y}(\theta_2, \theta_K) \mathbf{y}_{2K} \quad \text{için} \quad \theta_K \leq \theta_2 \leq \theta_B \quad (4.32)$$

$\mathbf{y}_{2K}$ ikinci bölge için θ_K koordinatındaki başlangıç değerler vektörüdür. $\mathbf{y}_{10}$ ve $\mathbf{y}_{2K}$ vektörlerinin oniki bileşeninin hesaplanabilmesi için sınır ve süreklilik şartlarından elde edilen oniki denklem kullanılır. Bu noktadaki süreklilik şartı:

$$\mathbf{y}_1(\theta_K) + \mathbf{K} = \mathbf{y}_{2K} \quad (4.33)$$

$\mathbf{K} = [0 \ 0 \ 0 \ M_{Kb} \ F_{Kt} \ F_{Kn}]^T$ vektörü K noktasında bulunan tekil yükler vektörüdür. Böylece, (4.32) denklemini yeniden yazılırsa:

$$\mathbf{y}_2(\theta_2) = \mathbf{Y}(\theta_2, \theta_K) \mathbf{y}_1(\theta_K) + \mathbf{Y}(\theta_2, \theta_K) \mathbf{K} \quad (4.34)$$

(4.34) denklemi (4.30) kullanılarak yeniden yazılırsa:

$$\mathbf{y}_2(\theta_2) = \mathbf{Y}(\theta_2, \theta_0) \mathbf{y}_{10} + \mathbf{Y}(\theta_2, \theta_0) \mathbf{Y}^{-1}(\theta_K, \theta_0) \mathbf{K} \quad (4.35)$$

Böylece; yer değiştirme, dönme açısı ve kuvvet bileşenlerinin analitik ifadeleri her iki bölge için de elde edilebilir.

Çubuğa sabit yayılı yüklerin etkimesi durumunda dış yük vektörü olan $\mathbf{f}$ nin ve asal matris $\mathbf{Y}$ nin tersi olan $\mathbf{Y}^{-1}$ in hesaplanması gereklidir. (4.2) ifadesinden çözüm aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{bmatrix} w \\ u \\ \Omega_b \\ M_b \\ F_t \\ F_n \end{bmatrix} = [\mathbf{Y}]_{6 \times 6} \begin{bmatrix} w_0 \\ u_0 \\ \Omega_{b0} \\ M_{b0} \\ F_{t0} \\ F_{n0} \end{bmatrix} + [\mathbf{Y}]_{6 \times 6} \int_0^\phi [\mathbf{Y}]^{-1}_{6 \times 6} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{bmatrix} d\psi \quad (4.36)$$

4.1 Çember Eksenli Sabit Kesitli Nano Çubuğun Asal Matrisi

Bu kısımda, çeşitli yükleme ve mesnetleme şartlarındaki, farklı eksen eğrisi ve kesit alanı değişimine sahip nano çubukların, yer değiştirme ve dönme açısı gibi büyüklüklerinin hesaplanabilmesi için gerekli olan asal matris ve asal matrisin tersinin analitik ifadeleri elde edilmiştir. Yerel olmayan elastisite teorisiyle hesaplanan, çember eksenli, sabit kesitli çubukların asal matrisi:

$$Y_{11} = \cos \theta ; \quad Y_{12} = \sin \theta ; \quad Y_{13} = R(1 - \cos \theta) ; \quad Y_{14} = \frac{R^2(\theta - \sin \theta)}{EI_b} \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} Y_{15} = & \frac{R^3}{EI_b} \left(\theta - \frac{3 \sin \theta}{2} + \frac{\theta \cos \theta}{2} \right) + \frac{R}{2EA} (\theta \cos \theta + \sin \theta) \left(1 + \frac{\gamma^2}{R^2} \right) \\ & + \frac{k_n R}{2GA} (\theta \cos \theta - \sin \theta) \left(1 + \frac{\gamma^2}{R^2} \right) \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$Y_{16} = -\frac{R^3}{EI_b} \left(1 - \cos \theta - \frac{\theta \sin \theta}{2}\right) + \frac{R\theta \sin \theta}{2EA} \left(1 + \frac{\gamma^2}{R^2}\right) + \frac{k_n R\theta \sin \theta}{2GA} \left(1 + \frac{\gamma^2}{R^2}\right) \quad (4.39)$$

$$Y_{21} = -\sin \theta ; \quad Y_{22} = \cos \theta ; \quad Y_{23} = R_0 \sin \theta ; \quad Y_{24} = \frac{2R^2}{EI_b} \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^2 \quad (4.40)$$

$$Y_{25} = \frac{R^3}{EI_b} \left(1 - \cos \theta - \frac{\theta \sin \theta}{2}\right) - \frac{R\theta \sin \theta}{2EA} \left(1 + \frac{\gamma^2}{R^2}\right) - \frac{k_n R\theta \sin \theta}{2GA} \left(1 + \frac{\gamma^2}{R^2}\right) \quad (4.41)$$

$$Y_{26} = \frac{R^3}{2EI_b} (\theta \cos \theta - \sin \theta) + \frac{R}{2EA} (\theta \cos \theta - \sin \theta) \left(1 + \frac{\gamma^2}{R^2}\right) + \frac{k_n R}{2GA} (\theta \cos \theta + \sin \theta) \left(1 + \frac{\gamma^2}{R^2}\right) \quad (4.42)$$

$$Y_{31} = 0 ; \quad Y_{32} = 0 ; \quad Y_{33} = 1 ; \quad (4.43)$$

$$Y_{34} = \frac{R\theta}{EI_b} \quad (4.44)$$

$$Y_{35} = \frac{R^2}{EI_b} (\theta - \sin \theta) \quad (4.45)$$

$$Y_{36} = -\frac{2R^2}{EI_b} \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^2 \quad (4.46)$$

$$Y_{41} = 0 ; \quad Y_{42} = 0 ; \quad Y_{43} = 0 ; \quad Y_{44} = 1 ; \quad (4.47)$$

$$Y_{45} = R(1 - \cos \theta) \quad (4.48)$$

$$Y_{46} = -R \sin \theta \quad (4.49)$$

$$Y_{51} = 0 ; \quad Y_{52} = 0 ; \quad Y_{53} = 0 ; \quad Y_{54} = 0 \quad (4.50)$$

$$Y_{55} = \cos \theta ; \quad Y_{56} = \sin \theta \quad (4.51)$$

$$Y_{61} = 0 ; \quad Y_{62} = 0 ; \quad Y_{63} = 0 ; \quad Y_{64} = 0 ; \quad (4.52)$$

$$Y_{65} = -\sin \theta ; \quad Y_{66} = \cos \theta \quad (4.53)$$

4.2 Parabol Eksenli Ve Değişken Kesitli Nano Çubuğun Asal Matrisi

$$R(\theta) = \frac{R}{(\cos \theta)^3} ; \quad I_b(\theta) = \frac{I_b}{\cos \theta} ; \quad A(\theta) = \frac{A}{\cos \theta} \quad (4.54)$$

olması durumunda, asal matris elemanları aşağıdaki gibi analitik olarak elde edilebilir:

$$Y_{11} = \cos \theta \quad (4.55)$$

$$Y_{12} = \sin \theta \quad (4.56)$$

$$Y_{13} = \frac{1}{2} R \sin \theta \tan \theta \quad (4.57)$$

$$Y_{14} = \frac{R^2}{6EI_b} \sin \theta (\tan \theta) \quad (4.58)$$

$$\begin{aligned} Y_{15} = & \frac{R\theta \cos \theta}{EA} - \frac{k_n R\theta \cos \theta}{GA} + \frac{5\gamma^2 \theta \cos \theta}{16EAR} + \frac{k_n \gamma^2 \theta \cos \theta}{16GAR} \\ & + \frac{3R\gamma^2 \theta \cos \theta}{EI_b} - \frac{3R\gamma^2 \theta \sec \theta}{4EI_b} + \frac{k_n R \sin \theta}{GA} + \frac{R^3 \sin \theta}{120EI_b} \\ & + \frac{13\gamma^2 \sin \theta}{48EAR} - \frac{7k_n \gamma^2 \sin \theta}{48GAR} - \frac{9R\gamma^2 \sin \theta}{4EI_b} \\ & - \frac{R \log[\cos \theta] \sin \theta}{EA} + \frac{k_n R \log[\cos \theta] \sin \theta}{GA} \\ & - \frac{3R\gamma^2 \log[\cos \theta] \sin \theta}{EI_b} + \frac{15\gamma^2 \sin 3\theta}{128EAR} + \frac{3k_n \gamma^2 \sin 3\theta}{128GAR} \\ & + \frac{5\gamma^2 \sin 5\theta}{384EAR} + \frac{k_n \gamma^2 \sin 5\theta}{384GAR} - \frac{R^3 \cos 2\theta [\sec \theta]^3 \tan \theta}{120EI_b} \end{aligned} \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned}
Y_{16} = & -\frac{R \cos \theta}{EA} - \frac{R^3 \cos \theta}{24EI_b} + \frac{\gamma^2 \cos \theta}{12EAR} + \frac{k_n \gamma^2 \cos \theta}{24GAR} - \frac{3R\gamma^2 \cos \theta}{4EI_b} \\
& - \frac{9\gamma^2 \cos 3\theta}{128EAR} - \frac{5k_n \gamma^2 \cos 3\theta}{128GAR} - \frac{5\gamma^2 \cos 5\theta}{384EAR} \\
& - \frac{k_n \gamma^2 \cos 5\theta}{384GAR} - \frac{R \cos \theta \log[\cos \theta]}{EA} \\
& + \frac{k_n R \cos \theta \log[\cos \theta]}{GA} - \frac{3R\gamma^2 \cos \theta \log[\cos \theta]}{2EI_b} + \frac{R \sec \theta}{EA} \quad (4.60) \\
& + \frac{R^3 \sec \theta}{12EI_b} + \frac{3R\gamma^2 \sec \theta}{4EI_b} - \frac{R^3 [\sec \theta]^3}{24EI_b} - \frac{R\theta \sin \theta}{EA} \\
& + \frac{k_n R\theta \sin \theta}{GA} + \frac{\gamma^2 \theta \sin \theta}{16EAR} + \frac{5k_n \gamma^2 \theta \sin \theta}{16GAR} - \frac{3R\gamma^2 \theta \sin \theta}{2EI_b}
\end{aligned}$$

$$Y_{21} = -\sin \theta \quad (4.61)$$

$$Y_{22} = \cos \theta \quad (4.62)$$

$$Y_{23} = R_0 \sin \theta \left(1 + \frac{1}{2} [\tan \theta]^2 \right) \quad (4.63)$$

$$Y_{24} = \frac{R^2 \sin \theta \tan \theta}{2EI_b} + \frac{R^2 \sin \theta [\tan \theta]^3}{3EI_b} \quad (4.64)$$

$$\begin{aligned}
Y_{25} = & \frac{k_n R \cos \theta}{GA} + \frac{R^3 \cos \theta}{120EI_b} - \frac{\gamma^2 \cos \theta}{24EAR} - \frac{k_n \gamma^2 \cos \theta}{12GAR} - \frac{9R\gamma^2 \cos \theta}{4EI_b} \\
& + \frac{5\gamma^2 \cos 3\theta}{128EAR} + \frac{9k_n \gamma^2 \cos 3\theta}{128GAR} + \frac{\gamma^2 \cos 5\theta}{384EAR} \\
& + \frac{5k_n \gamma^2 \cos 5\theta}{384GAR} - \frac{R \cos \theta \log[\cos \theta]}{EA} \\
& + \frac{k_n R \cos \theta \log[\cos \theta]}{GA} - \frac{3R\gamma^2 \cos \theta \log[\cos \theta]}{EI_b} \\
& - \frac{k_n R \sec \theta}{GA} + \frac{R^3 \sec \theta}{60EI_b} + \frac{9R\gamma^2 \sec \theta}{4EI_b} - \frac{7R^3 [\sec \theta]^3}{120EI_b} \\
& + \frac{R^3 [\sec \theta]^5}{30EI_b} - \frac{R\theta \sin \theta}{EA} + \frac{k_n R\theta \sin \theta}{GA} - \frac{5\gamma^2 \theta \sin \theta}{16EAR} \\
& - \frac{k_n \gamma^2 \theta \sin \theta}{16GAR} - \frac{3R\gamma^2 \theta \sin \theta}{EI_b} - \frac{3R\gamma^2 \theta \sec \theta \tan \theta}{4EI_b}
\end{aligned} \tag{4.65}$$

$$\begin{aligned}
Y_{26} = & -\frac{R\theta \cos \theta}{EA} + \frac{k_n R\theta \cos \theta}{GA} + \frac{\gamma^2 \theta \cos \theta}{16EAR} + \frac{5k_n \gamma^2 \theta \cos \theta}{16GAR} \\
& - \frac{3R\gamma^2 \theta \cos \theta}{2EI_b} + \frac{R \sin \theta}{EA} + \frac{R^3 \sin \theta}{24EI_b} - \frac{7\gamma^2 \sin \theta}{48EAR} \\
& + \frac{13k_n \gamma^2 \sin \theta}{48GAR} + \frac{3R\gamma^2 \sin \theta}{4EI_b} + \frac{R \log[\cos \theta] \sin \theta}{EA} \\
& - \frac{k_n R \log[\cos \theta] \sin \theta}{GA} + \frac{3R\gamma^2 \log[\cos \theta] \sin \theta}{2EI_b} \\
& + \frac{3\gamma^2 \sin 3\theta}{128EAR} + \frac{15k_n \gamma^2 \sin 3\theta}{128GAR} + \frac{\gamma^2 \sin 5\theta}{384EAR} \\
& + \frac{5k_n \gamma^2 \sin 5\theta}{384GAR} + \frac{R^3 \sec \theta \tan \theta}{12EI_b} + \frac{3R\gamma^2 \sec \theta \tan \theta}{4EI_b} \\
& - \frac{R^3 [\sec \theta]^3 \tan \theta}{8EI_b}
\end{aligned} \tag{4.66}$$

$$Y_{33} = 1 \tag{4.67}$$

$$Y_{34} = \frac{R \tan \theta}{EI_b} \quad (4.68)$$

$$Y_{35} = \frac{-18\gamma^2\theta + 9\gamma^2 \sin 2\theta + 2R^2[\tan \theta]^3}{12EI_b} \quad (4.69)$$

$$Y_{36} = \frac{3\gamma^2[\sin \theta]^2}{2EI_b} - \frac{R^2[\tan \theta]^2}{2EI_b} \quad (4.70)$$

$$Y_{44} = 1 \quad (4.71)$$

$$Y_{45} = \frac{1}{2}R[\tan \theta]^2 \quad (4.72)$$

$$Y_{46} = -R \tan \theta \quad (4.73)$$

$$Y_{55} = \cos \theta \quad (4.74)$$

$$Y_{56} = \sin \theta \quad (4.75)$$

$$Y_{65} = -\sin \theta \quad (4.76)$$

$$Y_{66} = \cos \theta \quad (4.77)$$

4.3 Parabol Eksenli Ve Değişken Kesitli Nano Çubuğun Asal Matrisinin Tersi

Parabol eksenli ve değişken kesitli çubuk için elde edilen asal matrisin tersinin de analitik ifadelerinin bulunması mümkündür:

$$YI_{11} = \cos \theta \quad (4.78)$$

$$YI_{12} = -\sin \theta \quad (4.79)$$

$$YI_{13} = \frac{1}{2}R[\tan \theta]^2 \quad (4.80)$$

$$YI_{14} = -\frac{R^2[\tan \theta]^3}{6EI_b} \quad (4.81)$$

$$\begin{aligned}
YI_{15} = & -\frac{R\theta \cos \theta}{EA} + \frac{k_n R\theta \cos \theta}{GA} - \frac{5\gamma^2 \theta \cos \theta}{16EAR} - \frac{k_n \gamma^2 \theta \cos \theta}{16GAR} \\
& - \frac{9R\gamma^2 \phi \cos \theta}{4EI_b} - \frac{k_n R \sin \theta}{GA} - \frac{R^3 \sin \theta}{120EI_b} - \frac{13\gamma^2 \sin \theta}{48EAR} \\
& + \frac{7k_n \gamma^2 \sin \theta}{48GAR} + \frac{9R\gamma^2 \sin \theta}{4EI_b} + \frac{R \log[\cos \theta] \sin \theta}{EA} \\
& - \frac{k_n R \log[\cos \theta] \sin \theta}{GA} + \frac{3R\gamma^2 \log[\cos \theta] \sin \theta}{2EI_b} \\
& - \frac{15\gamma^2 \sin 3\theta}{128EAR} - \frac{3k_n \gamma^2 \sin 3\theta}{128GAR} - \frac{5\gamma^2 \sin 5\theta}{384EAR} \\
& - \frac{k_n \gamma^2 \sin 5\theta}{384GAR} + \frac{R^3 \cos 2\theta [\sec \theta]^3 \tan \theta}{120EI_b}
\end{aligned} \tag{4.82}$$

$$\begin{aligned}
YI_{16} = & -\frac{k_n R \cos \theta}{GA} - \frac{R^3 \cos \theta}{120EI_b} + \frac{\gamma^2 \cos \theta}{24EAR} + \frac{k_n \gamma^2 \cos \theta}{12GAR} + \frac{3R\gamma^2 \cos \theta}{2EI_b} \\
& - \frac{5\gamma^2 \cos 3\theta}{128EAR} - \frac{9k_n \gamma^2 \cos 3\theta}{128GAR} - \frac{\gamma^2 \cos \theta}{384EAR} - \frac{5k_n \gamma^2 \cos 5\theta}{384GAR} \\
& + \frac{R \cos \theta \log[\cos \theta]}{EA} - \frac{k_n R \cos \theta \log[\cos \theta]}{GA} \\
& + \frac{3R\gamma^2 \cos \theta \log[\cos \theta]}{2EI_b} + \frac{k_n R \sec \theta}{GA} - \frac{R^3 \sec \theta}{60EI_b} \\
& - \frac{3R\gamma^2 \sec \theta}{2EI_b} + \frac{7R^3 [\sec \theta]^3}{120EI_b} - \frac{R^3 [\sec \theta]^5}{30EI_b} + \frac{R\theta \sin \theta}{EA} \\
& - \frac{k_n R\theta \sin \theta}{GA} + \frac{5\gamma^2 \theta \sin \theta}{16EAR} + \frac{k_n \gamma^2 \theta \sin \theta}{16GAR} + \frac{9R\gamma^2 \theta \sin \theta}{4EI_b}
\end{aligned} \tag{4.83}$$

$$YI_{21} = \sin \theta \tag{4.84}$$

$$YI_{22} = \cos \theta \tag{4.85}$$

$$YI_{23} = -R \tan \theta \tag{4.86}$$

$$YI_{24} = \frac{R^2 [\tan \theta]^2}{2EI_b} \tag{4.87}$$

$$\begin{aligned}
YI_{25} = & \frac{R \cos \theta}{EA} + \frac{R^3 \cos \theta}{24EI_b} - \frac{\gamma^2 \cos \theta}{12EAR} - \frac{k_n \gamma^2 \cos \theta}{24GAR} + \frac{9\gamma^2 \cos 3\theta}{128EAR} \\
& + \frac{5k_n \gamma^2 \cos 3\theta}{128GAR} + \frac{5\gamma^2 \cos 5\theta}{384EAR} + \frac{k_n \gamma^2 \cos 5\theta}{384GAR} \\
& + \frac{R \cos \theta \log[\cos \theta]}{EA} - \frac{k_n R \cos \theta \log[\cos \theta]}{GA} \\
& + \frac{3R\gamma^2 \cos \theta \log[\cos \theta]}{EI_b} - \frac{R \sec \theta}{EA} - \frac{R^3 \sec \theta}{12EI_b} \\
& + \frac{R^3 [\sec \theta]^3}{24EI_b} + \frac{R\theta \sin \theta}{EA} - \frac{knR\theta \sin \theta}{GA} - \frac{\gamma^2 \theta \sin \theta}{16EAR} \\
& - \frac{5k_n \gamma^2 \theta \sin \theta}{16GAR} + \frac{3R\gamma^2 \theta \sin \theta}{2EI_b}
\end{aligned} \tag{4.88}$$

$$\begin{aligned}
YI_{26} = & \frac{R\theta \cos \theta}{EA} - \frac{k_n R\theta \cos \theta}{GA} - \frac{\gamma^2 \theta \cos \theta}{16EAR} - \frac{5k_n \gamma^2 \theta \cos \theta}{16GAR} \\
& + \frac{3R\gamma^2 \theta \cos \theta}{2EI_b} - \frac{R \sin \theta}{EA} - \frac{R^3 \sin \theta}{24EI_b} + \frac{7\gamma^2 \sin \theta}{48EAR} \\
& - \frac{13k_n \gamma^2 \sin \theta}{48GAR} - \frac{3R\gamma^2 \sin \theta}{2EI_b} - \frac{R \log[\cos \theta] \sin \theta}{EA} \\
& + \frac{k_n R \log[\cos \theta] \sin \theta}{GA} - \frac{3R\gamma^2 \log[\cos \theta] \sin \theta}{EI_b} \\
& - \frac{3\gamma^2 \sin 3\theta}{128EAR} - \frac{15k_n \gamma^2 \sin 3\theta}{128GAR} - \frac{\gamma^2 \sin 5\theta}{384EAR} - \frac{5k_n \gamma^2 \sin 5\theta}{384GAR} \\
& - \frac{R^3 \sec \theta \tan \theta}{12EI_b} + \frac{R^3 [\sec \theta]^3 \tan \theta}{8EI_b}
\end{aligned} \tag{4.89}$$

$$YI_{33} = 1 \tag{4.90}$$

$$YI_{34} = -\frac{R \tan \theta}{EI_b} \tag{4.91}$$

$$YI_{35} = \frac{3\gamma^2 \theta \cos \theta}{2EI_b} - \frac{3\gamma^2 \sin \theta}{2EI_b} - \frac{R^2 \sin \theta [\tan \theta]^2}{6EI_b} \tag{4.92}$$

$$YI_{36} = -\frac{3\gamma^2\theta \sin \theta}{2EI_b} - \frac{5R^2 \sec \theta [\tan \theta]^2}{12EI_b} - \frac{R^2 \cos 2\theta \sec \theta [\tan \theta]^2}{12EI_b} \quad (4.93)$$

$$YI_{44} = 1 \quad (4.94)$$

$$YI_{45} = \frac{1}{2}R \sin \theta \tan \theta \quad (4.95)$$

$$YI_{46} = \frac{1}{2}R \sin \theta + \frac{1}{2}R \sec \theta \tan \theta \quad (4.96)$$

$$YI_{55} = \cos \theta \quad (4.97)$$

$$YI_{56} = -\sin \theta \quad (4.98)$$

$$YI_{65} = \sin \theta \quad (4.99)$$

$$YI_{66} = \cos \theta \quad (4.100)$$

5. DÜZLEM İÇİ STATİK DAVRANIŞLA İLGİLİ ÖRNEKLER VE DAVRANIŞA ETKİ EDEN PARAMETRELERİN İNCELENMESİ

Bu bölümde düzlem içi statik davranışla ilgili çeşitli problemlerin çözümleri verilerek yer değiştirme, dönme açısı ile iç kuvvet ve momentler elde edilmiştir. Boyut parametresi R/γ , narinlik oranı λ ve çubuk açıklığı θ_T gibi parametreler ile sınır ve yükleme koşullarının statik davranışa etkileri incelenmiştir. Statik problemler çözülürken aşağıdaki parametreler gözönünde bulundurulmuştur:

- Boyut parametresi (R/γ), 1 ve 10 arasında değişmekte, yerel olmayan boyut faktörü $\gamma = 1,56$ nm olarak alınmaktadır.
- Çubuk açıklığı (θ_T), 10° ve 180° arasında alınmaktadır.
- Çubuğun narinlik oranı $\lambda = R \theta_T / \sqrt{I/A}$ 20° 'den 150° 'ye kadar değişmektedir.
- Sınır koşulları ankastre-serbest, ankastre-ankastre, mafsal-ankastre ve mafsal-mafsal olarak alınmaktadır.
- Analiz ve örneklerde M_b , F_t , F_n tekil yükleri ve q_n , q_t , m_b yayılı yükleri ele alınmıştır.
- Eksenel uzama ve kayma deformasyonu etkileri ve bunların yerel olmayan etkileri denklemlere dahil edilmiştir. Sonuçlar dört farklı durum için hesaplanmıştır:
 - Durum: Tüm etkiler dahil.
 - Durum: Hiçbir etki dahil değil.
 - Durum: Yalnızca kayma etkisi dahil.
 - Durum: Yalnızca eksenel uzama dahil.

Başlangıç değerleri w_0 , u_0 , Ω_{b0} , M_{b0}^{nl} , F_{t0}^{nl} , F_{n0}^{nl} , bilinirse, (4.2) denkleminde verilen çözüm analitik olarak elde edilebilmektedir. Bu değerler çubuğun sınır koşulları kullanılarak lineer denklemler sisteminden elde edilebilir.

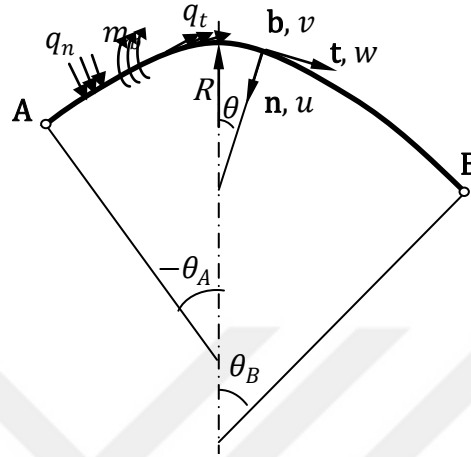
Klasik sınır koşulları aşağıdaki gibi bilinmektedir:

1- Mafsal Uç: $w_A = 0$, $u_A = 0$, $M_{bA}^{nl} = 0$.

2- Ankastre Uç: $w_A = 0, \quad u_A = 0, \quad \Omega_{bA} = 0.$

3- Serbest Uç: $M_{bA}^{nl} = 0, \quad F_{tA}^{nl} = 0, \quad F_{nA}^{nl} = 0.$

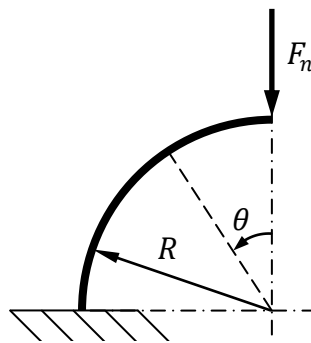
Bu çalışmada genel bir durum olarak, değişken eğrilikli ve kesitli değişken yüklerin etkisindeki bir çubuk ele alınmıştır. (Şekil 5.1).



Şekil 5.1 : Değişken eğrilikli ve kesitli değişken yüklerin etkisindeki çubuk.

Bilinmeyen başlangıç değerleri, her uç için yazılacak üçer adet lineer denklemle çözülmektedir. Bundan sonra, çubuğun yer değiştirmesinin, dönme açısının, iç kuvvet ve momentlerinin kesin analitik ifadesini belirtmek mümkün olmaktadır.

5.1 Serbest Ucundan F_n ile Yüklü, $\pi/2$ Açıklığına Sahip, Çember Eksenli Sabit Kesitli Ankastre-Serbest Çubuk



Şekil 5.2 : $\pi/2$ açıklığı olan, çember eksenli sabit kesitli ve ankastre-serbest mesnetli çubuk.

Ankastre-serbest mesnetli, çember eksenli ve sabit kesitli çubuğun serbest ucundaki yer değiştirme ve dönme açısı değerleri, yerel olmayan elastisite teorisi ile:

$$w_0 = \left(\frac{F_n k_n R}{2GA} - \frac{F_n R}{2EA} \right) \left(1 + \frac{\gamma^2}{R^2} \right) + \frac{F_n R^3}{2EI_b} \quad (5.1)$$

$$u_0 = \left(\frac{F_n k_n \pi R}{4GA} + \frac{F_n \pi R}{4EA} \right) \left(1 + \frac{\gamma^2}{R^2} \right) + \frac{F_n \pi R^3}{4EI_b} \quad (5.2)$$

$$\Omega_{b0} = \frac{F_n R^2}{EI_b} \quad (5.3)$$

olarak elde edilmiştir. Çubuk eksenini boyunca, teğetsel yer değiştirme, $w = w(\theta)$, normal yer değiştirme, $u = u(\theta)$ ve dönme açısı, $\Omega_b = \Omega_b(\theta)$ değerlerinin değişimi aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

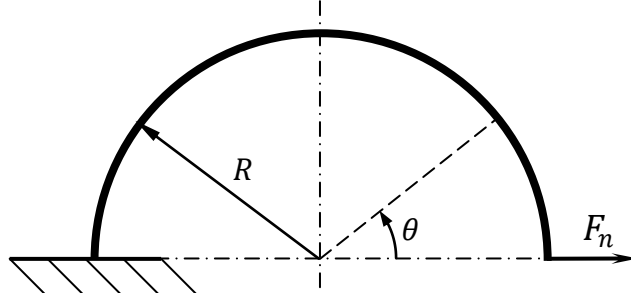
$$\begin{aligned} w = & \left[\left(\frac{F_n k_n R}{2GA} - \frac{F_n R}{2EA} \right) \left(1 + \frac{\gamma^2}{R^2} \right) + \frac{F_n R^3}{2EI_b} \right] \cos \theta \\ & + \left[\left(\frac{F_n k_n R}{2GA} + \frac{F_n R}{2EA} \right) \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) \left(1 + \frac{\gamma^2}{R^2} \right) \right. \\ & \left. + \frac{F_n R^3}{2EI_b} \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) \right] \sin \theta \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$u = \left[\left(\frac{F_n R}{2EA} + \frac{F_n k_n R}{2GA} \right) \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) \left(1 + \frac{\gamma^2}{R^2} \right) + \frac{F_n R^3}{2EI_b} \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) \right] \cos \theta \quad (5.5)$$

$$\Omega_b = \frac{F_n R^2}{EI_b} \cos \theta \quad (5.6)$$

Çubuk boyutları büyüdükçe γ/R değeri küçülecek, yeterince büyük boyutta γ^2/R^2 değeri 1 değerinin yanında ihmal edilerek, yerel elastisite teorisinin sonuçlarına ulaşılacaktır.

5.2 Serbest Ucundan F_n ile Yüklü, π Açıklığına Sahip, Çember Eksenli Sabit Kesitli Ankastre-Serbest Çubuk



Şekil 5.3 : Açıklığı π olan, çember eksenli sabit kesitli ve ankastre-serbest mesnetli çubuk.

Çubuğun serbest ucundaki yer değiştirme ve dönme açısı değerleri, yerel olmayan elastisite teorisi ile:

$$w_0 = -\frac{2F_n R^3}{EI_b} \quad (5.7)$$

$$u_0 = -\left(\frac{F_n k_n \pi R}{2GA} + \frac{F_n \pi R}{2EA}\right)\left(1 + \frac{\gamma^2}{R^2}\right) - \frac{F_n \pi R^3}{2EI_b} \quad (5.8)$$

$$\Omega_{b0} = -\frac{2F_n R^2}{EI_b} \quad (5.9)$$

olarak elde edilmiştir. Çubuk eksenli boyunca, teğetsel yer değiştirme, $w = w(\theta)$, normal yer değiştirme, $u = u(\theta)$ ve eğim açısı, $\Omega_b = \Omega_b(\theta)$ değerlerinin değişimi aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\begin{aligned} w(\theta) = & -\frac{F_n R^3}{EI_b} \left(1 + \cos\theta + \frac{\theta + \pi}{2} \sin\theta\right) \\ & - \left(\frac{F_n R}{EA} + \frac{F_n k_n R}{2GA}\right) \left(1 + \frac{\gamma^2}{R^2}\right) \left(\frac{\theta + \pi}{2}\right) \sin\theta \end{aligned} \quad (5.10)$$

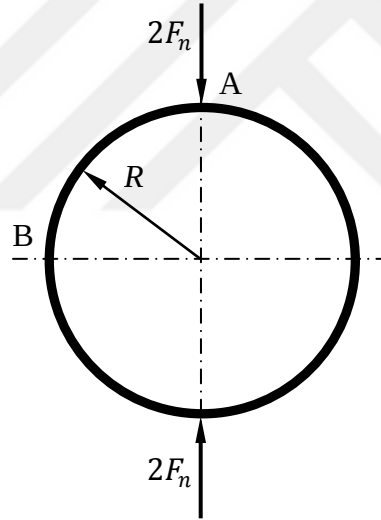
$$u(\theta) = -\frac{F_n R}{2EA} \left(1 + \frac{\gamma^2}{R^2}\right) [(\theta + \pi) \cos \theta - \sin \theta] - \frac{F_n R^3}{2EI_b} [(\theta + \pi) \cos \theta - \sin \theta] \quad (5.11)$$

$$- \frac{F_n k_n R}{2GA} \left(1 + \frac{\gamma^2}{R^2}\right) [(\theta + \pi) \cos \theta + \sin \theta]$$

$$\Omega_b(\theta) = -\frac{F_n R^2}{EI_b} (1 + \cos \theta) \quad (5.12)$$

5.3 Merkezinden Geçen Kuvvetlerle Yüklü Nano Çember (Nano Ring)

Bu örnekte, birçok mühendislik uygulamasında yaygın olarak kullanılan tam çember yükleme sisteminin davranışı incelenmiştir.



Şekil 5.4 : Çapı doğrultusunda kuvvetle yüklü sabit kesitli nano çember (nano ring).

Şekil 5.4'teki gibi, çapı doğrultusunda tekil kuvvetlerle yüklü bir nano çemberin, A ve B noktalarında ortaya çıkacak yer değiştirmeler;

$$u_A = \left(\frac{F_n \pi R^3}{4EI_b} - \frac{2F_n R^3}{\pi EI_b} \right) + \frac{\pi}{4} \left(\frac{F_n R}{EA} + \frac{F_n k_n R}{GA} \right) \left(1 + \frac{\gamma^2}{R^2} \right) \quad (5.13)$$

$$u_B = \left(\frac{F_n R^3}{2EI_b} - \frac{2F_n R^3}{\pi EI_b} \right) + \left(\frac{F_n R}{2EA} - \frac{F_n k_n R}{2GA} \right) \left(1 + \frac{\gamma^2}{R^2} \right) \quad (5.14)$$

momentler ise,

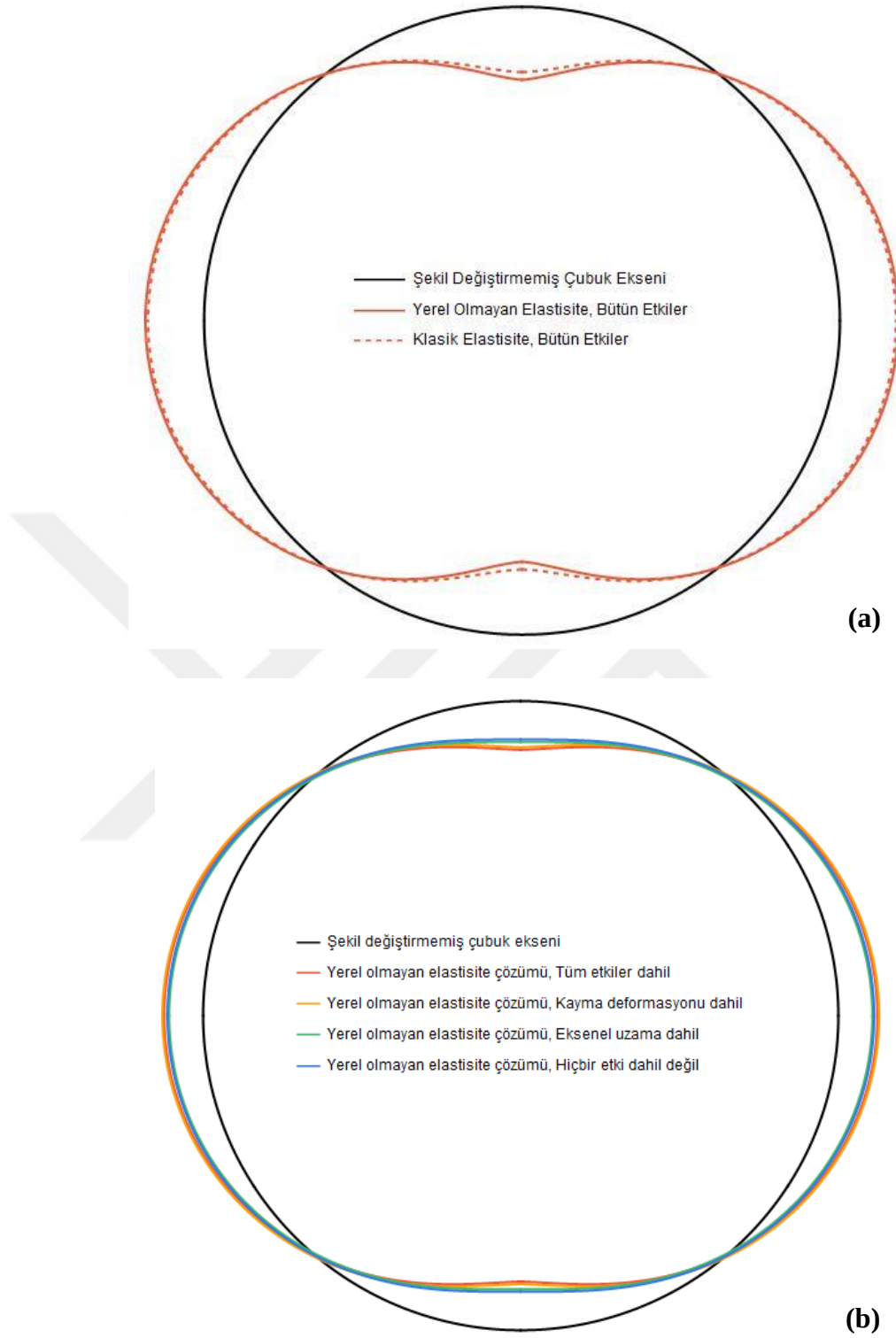
$$M_{bA} = -\frac{2F_n R}{\pi} \quad (5.15)$$

$$M_{bB} = F_n R \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \quad (5.16)$$

olarak elde edilmiştir.

Elde edilen sonuçlardan açıkça anlaşıldığı gibi, çubuk boyutları R , yerel olmayan boyut faktörü γ 'dan ne kadar büyük olursa, yerel olmayan teorinin sonuçları yerel teorinin sonuçlarına o kadar yaklaşmaktadır. Yerel teorinin verdiği sonuçlara ise, γ^2/R^2 teriminin 1 değeri yanında ihmal edilmesiyle (R değerinin γ 'dan çok büyük olması durumunda) ulaşılmaktadır.

Şekil 5.5(a)'da, γ/R oranı 1 ve narinlik oranı $\lambda = 20$ olan bir halkanın yerel ve yerel olmayan teorilerle elde edilmiş ve Şekil 5.5(b)'de, ise yerel olmayan teorinin çeşitli etkileri göz önüne alarak verdiği yerdeğiştirme grafiği görülmektedir.

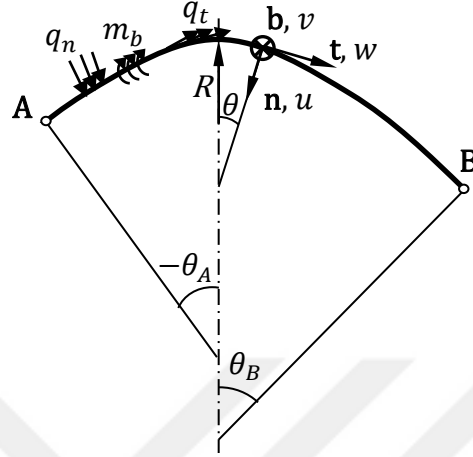


Şekil 5.5 : Nano çemberin yer değiştirme eğrileri (a) yerel ve yerel olmayan teoriyle elde edilen (b) tüm etkilerin incelendiği yerel olmayan teoriyle elde edilen.

5.4 Simetrik Olmayan Yükleme Durumları

Bu kısımda, literatürde eksikliği görülen, simetrik olmayan sınır şartlarına sahip çubukların farklı konumlarına etkiyen tekil yükleme durumları incelenmiştir. Bu

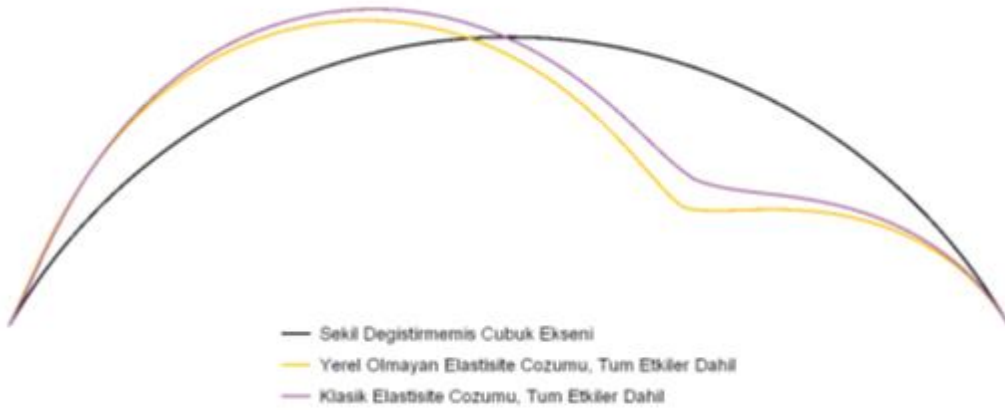
amaçla, önce ankastre-ankastre sonra da ankastre-mafsallı mesnetli sabit kesitli çember eksenli çubukların, Şekil 5.6'da görüldüğü gibi, herhangi bir θ_K koordinatından F_{nK} ve M_{bK} tekil yükleriyle ayrı ayrı yüklenmeleri durumundaki davranışları incelenmiştir.



Şekil 5.6 : θ_K koordinatından F_{nK} , F_{tK} ve M_{bK} tekil yükleri etkileyen 120° açıklığı olan, sabit kesitli çember eksenli nano çubuk.

5.4.1 θ_K Koordinatından F_{nK} etkileyen ankastre-ankastre mesnetli çubuk

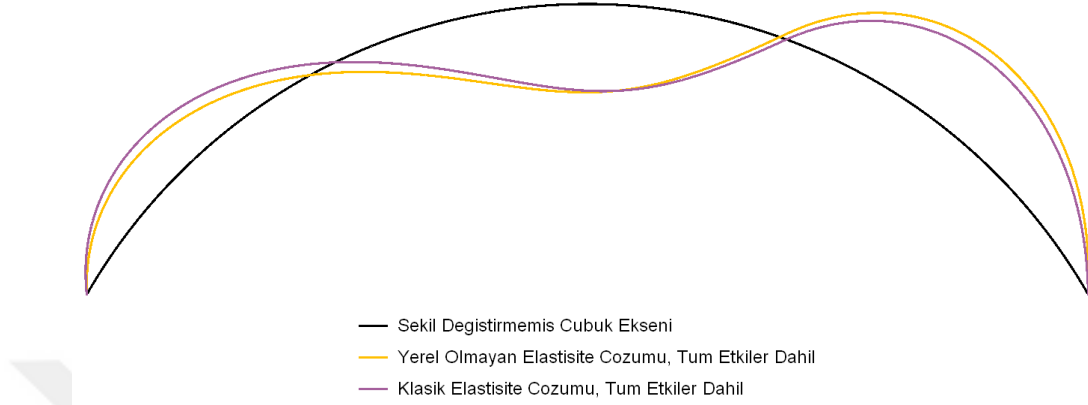
Bu örnekte, ankastre-ankastre mesnetli, sabit kesitli çember eksenli çubuğun, herhangi bir θ_K koordinatından F_{nK} tekil kuvvetiyle yüklenmesi durumu ele alınmıştır.



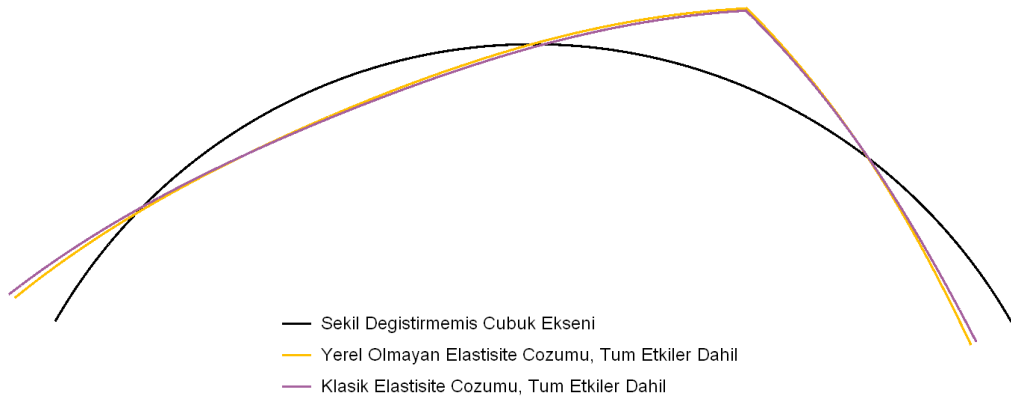
Şekil 5.7 : Yerel ve yerel olmayan teoriyle elde edilen yer değiştirme eğrileri. ($\theta_T=120^\circ$, $\lambda=50$, $R/\gamma=1$, $\theta_K=30^\circ$, F_{nK} , ankastre-ankastre).

Açıklığı $\theta_T=120^\circ$, narinlik oranı $\lambda=50$, boyut parametresi $R/\gamma=1$, tekil yükün etkidiği konum $\theta_K=30^\circ$ olan ve normal doğrultuda etkileyen F_{nK} yükünü taşıyan çubukta ortaya çıkan yer değiştirmeler, dönme açısı, moment, teğet ve normal kuvvetler, tüm etkilerin gözönüne alındığı yerel olmayan teorisinin verdiği sonuçlar, tüm etkilerin dahil edildiği yerel sonuçlarla birlikte Şekil 5.7'de verilmiştir.

Sonuçlar, çubuğun şekil değiştirmemiş eksen eğrisi üzerine çizilmiştir. Şekilden de görüldüğü gibi, yerel olmayan teorinin verdiği yer değiştirme değerleri klasik teorinin verdiğinden bir miktar farklıdır. R/γ değeri büyüdükçe bu farkın azaldığı görülmüştür. Şekil 5.8’de, dönme açısı grafiği verilmektedir.

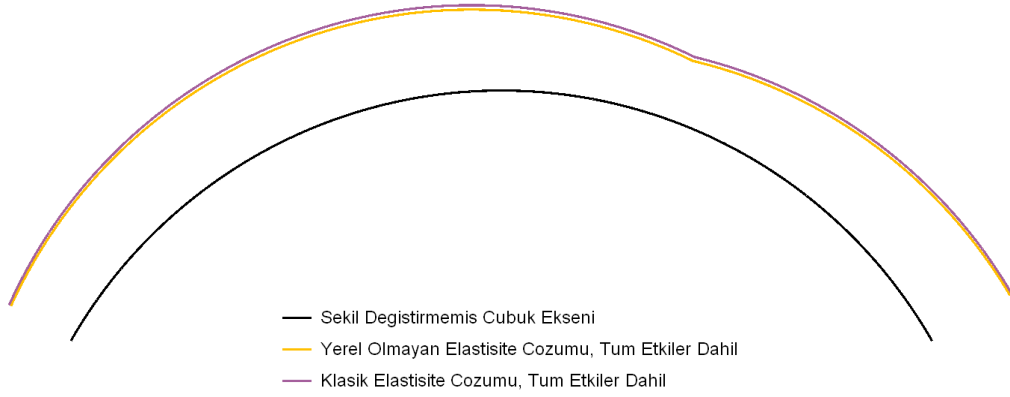


Şekil 5.8 : Yerel ve yerel olmayan teoriyle elde edilen dönme açısı (Ω_b) eğrileri. ($\theta_T=120^\circ$, $\lambda=50$, $R/\gamma=1$, $\theta_K=30^\circ$, F_{nK} , ankastre-ankastre).



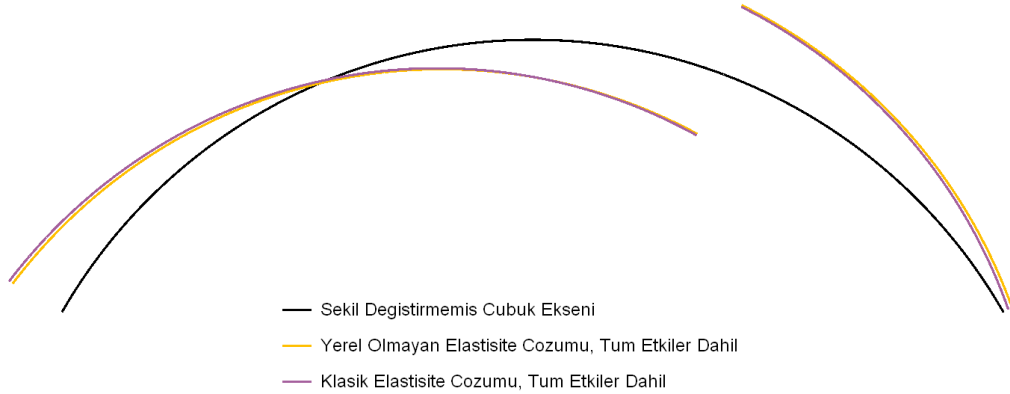
Şekil 5.9 : Yerel ve yerel olmayan teoriyle elde edilen eğilme momenti (M_b) eğrileri. ($\theta_T=120^\circ$, $\lambda=50$, $R/\gamma=1$, $\theta_K=30^\circ$, F_{nK} , ankastre-ankastre).

Şekil 5.9’da M_b momenti grafiği görülmektedir. Burada yerel ve yerel olmayan teoriler arasındaki farkın oldukça küçük olduğu görülmektedir. R/γ değeri büyüdükçe hemen hemen üst üste çıkan eğriler elde edilmektedir.



Şekil 5.10 : Yerel ve yerel olmayan teorilerle elde edilen teğet doğrultusundaki kuvvet (F_t) eğrileri. ($\theta_T=120^\circ$, $\lambda=50$, $R/\gamma=1$, $\theta_K=30^\circ$, F_{nK} , ankastre-ankastre).

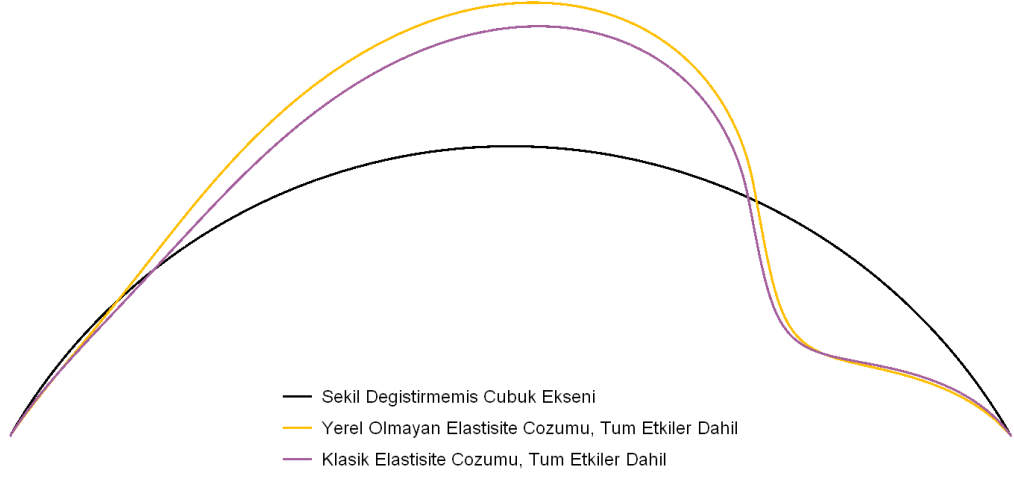
Şekil 5.10 ve 5.11’de, F_t ve F_n eğrileri verilmektedir. Yerel ve yerel olmayan teorilerin, hemen hemen aynı sonuçları verdikleri görülmektedir.



Şekil 5.11 : Yerel ve yerel olmayan teorilerle elde edilen normal doğrultusundaki kuvvet (F_n) eğrileri. ($\theta_T=120^\circ$, $\lambda=50$, $R/\gamma=1$, $\theta_K=30^\circ$, F_{nK} , ankastre-ankastre).

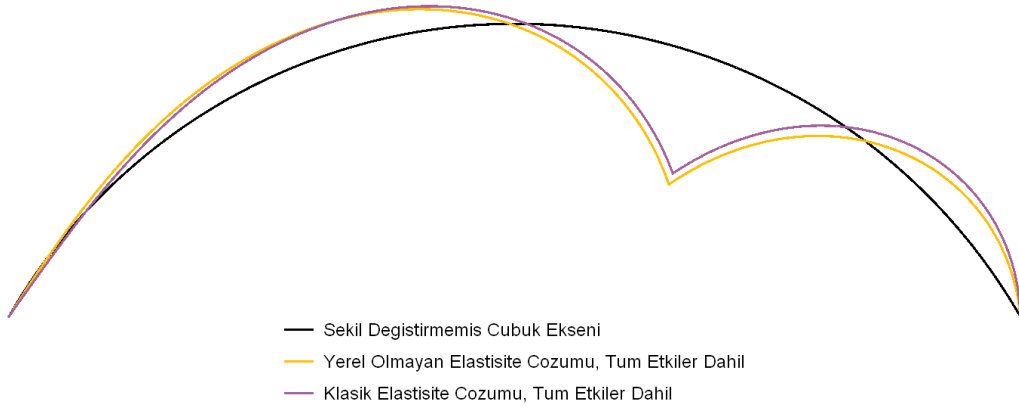
5.4.2 θ_K Koordinatından M_{bK} etkileyen ankastre-ankastre mesnetli çubuk

Bu örnekte, ankastre-ankastre mesnetli, sabit kesitli çember eksenli çubuğun, herhangi bir θ_K koordinatından M_{bK} tekil momentle yüklenmesi durumu ele alınmıştır. Açıklığı $\theta_T=120^\circ$, narinlik oranı $\lambda=50$, boyut parametresi $R/\gamma=1$, yükün etkidiği konum $\theta_K=30^\circ$ olan ve normal doğrultuda etkileyen M_{bK} yükünü taşıyan çubukta ortaya çıkan yer değiştirmeler, dönme açısı, moment, teğet ve normal kuvvetler, tüm etkilerin gözönüne alındığı yerel olmayan teorinin verdiği sonuçlar, tüm etkilerin dahil edildiği klasik teorinin sonuçlarıyla birlikte verilmiştir. Sonuçlar, çubuğun şekil değiştirmemiş eksen eğrisi üzerine çizilmiştir.



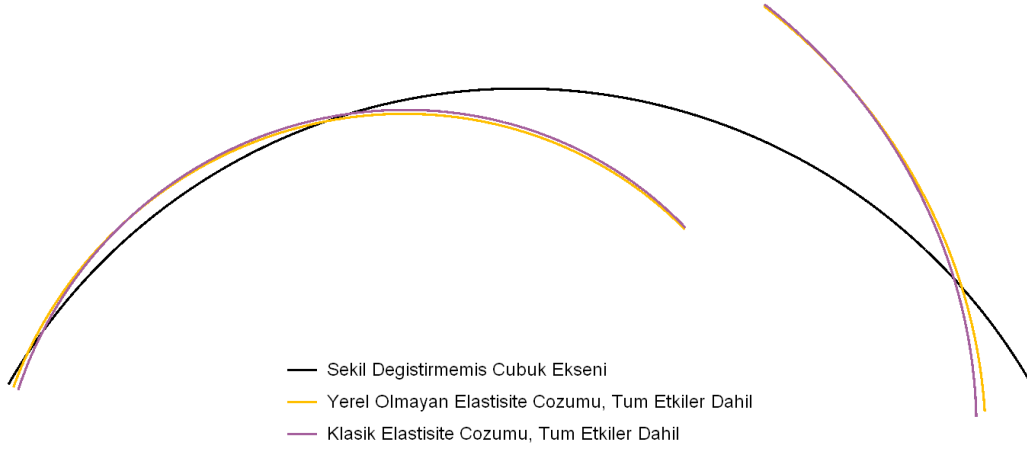
Şekil 5.12 : Yerel ve yerel olmayan teoriyle elde edilen yer değıştirme eğrileri.
($\theta_T=120^\circ$, $\lambda=50$, $R/\gamma=1$, $\theta_K=30^\circ$, M_{bK} , ankastre-ankastre).

Çubukta meydana gelen şekil değıştirmelerin ve dönme açılarının yerel ve yerel olmayan teorilerle elde edilen değerlerle çizilen grafiğı Şekil 5.12 ve 5.13’de verilmektedir. Şekillerden de görüldüğü gibi, yerel ve yerel olmayan teorinin verdiği sonuçlar arasında küçük bir farklılık vardır.

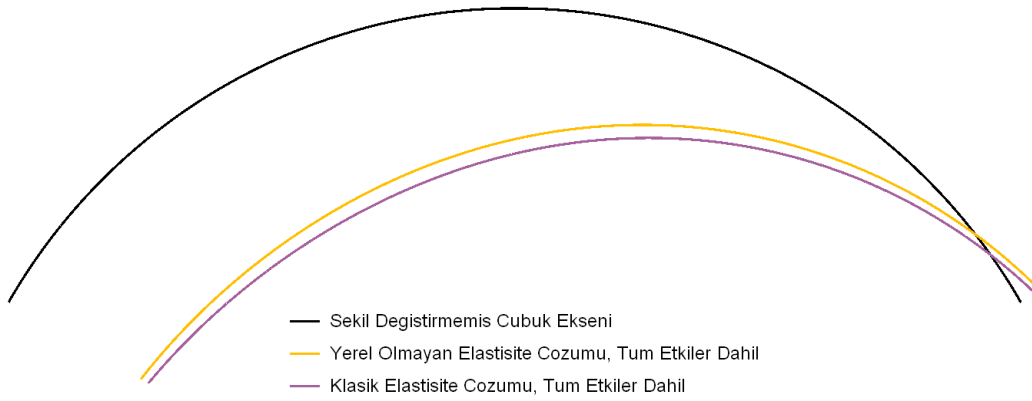


Şekil 5.13 : Yerel ve yerel olmayan teoriyle elde edilen dönme açısı (Ω_b)
eğrileri. ($\theta_T=120^\circ$, $\lambda=50$, $R/\gamma=1$, $\theta_K=30^\circ$, M_{bK} , ankastre-ankastre).

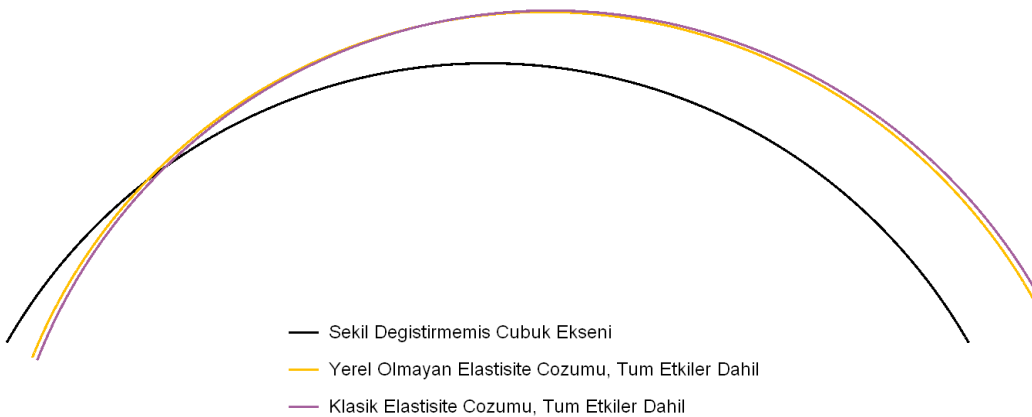
Çubukta ortaya çıkan moment değışiminin yerel ve yerel olmayan teorilerle elde edilen değerlerle çizilen grafiğı Şekil 5.14’te verilmektedir. Burada, farkın çok az olduğı görülmektedir. R/γ değeri büyüdükçe eğriler, hemen hemen üst üste çıkmaktadır.



Şekil 5.14 : Yerel ve yerel olmayan teoriyle elde edilen moment (M_b) eğrileri. ($\theta_T=120^\circ$, $\lambda=50$, $R/\gamma=1$, $\theta_K=30^\circ$, M_{bK} , ankastre-ankastre).



Şekil 5.15 : Yerel ve yerel olmayan teoriyle elde edilen teğet doğrultusundaki kuvvet (F_t) eğrileri. ($\theta_T=120^\circ$, $\lambda=50$, $R/\gamma=1$, $\theta_K=30^\circ$, M_{bK} , ankastre-ankastre).

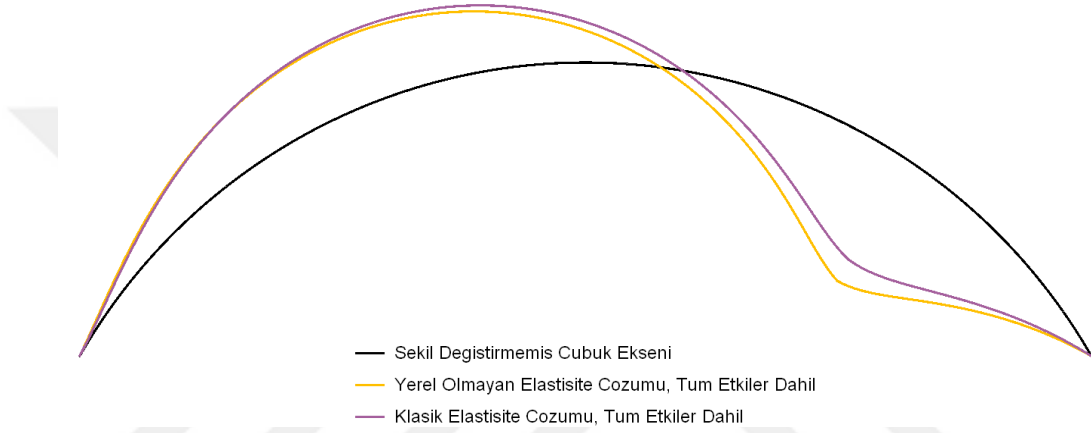


Şekil 5.16 : Yerel ve yerel olmayan teoriyle elde edilen normal doğrultusundaki kuvvet (F_n) eğrileri. ($\theta_T=120^\circ$, $\lambda=50$, $R/\gamma=1$, $\theta_K=30^\circ$, M_{bK} , ankastre-ankastre).

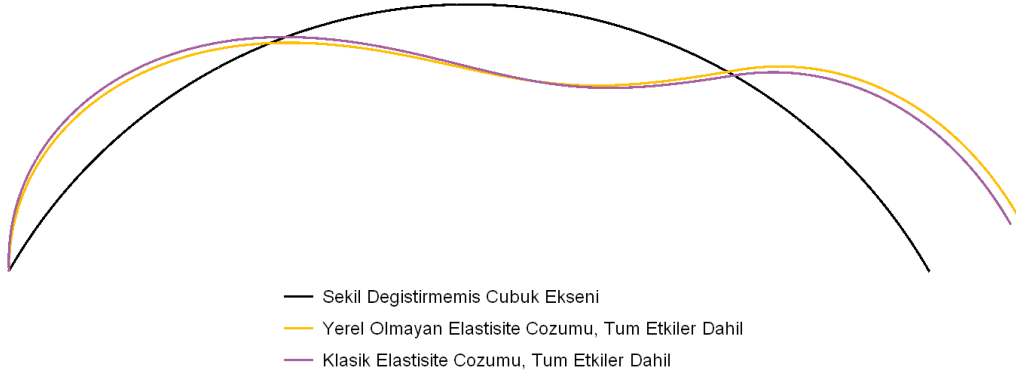
Çubukta ortaya çıkan teğet ve normal doğrultusundaki kuvvetlerin değişiminin yerel ve yerel olmayan teoriyle çizilen grafiği Şekil 5.15 ve 5.16’da verilmektedir. İki teorinin sonuçları arasındaki fark, R/γ değeri büyüdükçe azalmaktadır.

5.4.3 θ_K Koordinatından F_{nK} etkiyen ankastre-mafsals mesnetli çubuk

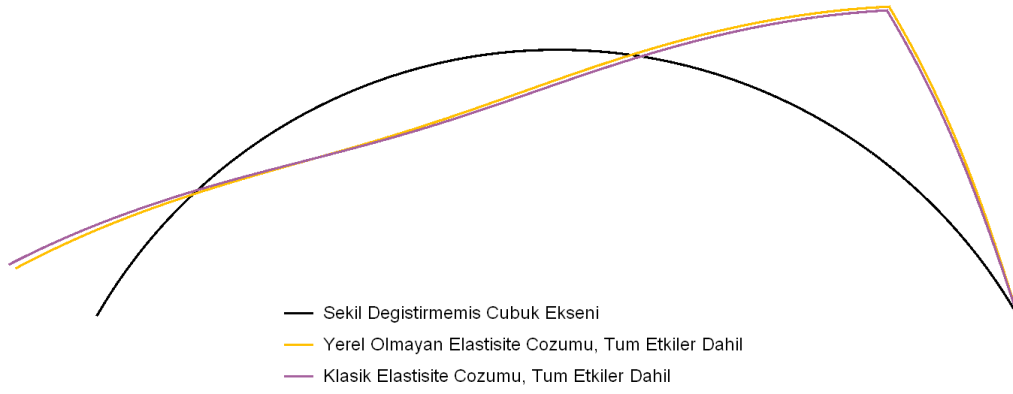
Bu örnekte, ankastre-mafsals mesnetli, çember eksenli sabit kesitli çubuğun, herhangi bir θ_K koordinatından F_{nK} tekil kuvvetiyle yüklenmesi durumu ele alınmıştır. Açıklığı $\theta_T=120^\circ$, narinlik oranı $\lambda=100$, boyut parametresi $R/\gamma=1$, yükün etkidığı konum $\theta_K=30^\circ$ olan ve normal doğrultuda etkiyen F_{nK} tekil kuvvetini taşıyan çubukta ortaya çıkan yer değiştirmeler, dönme açısı, moment, teğet ve normal kuvvetler, tüm etkilerin gözönüne alındığı yerel ve yerel olmayan teorilerle elde edilmiştir. Sonuçlar, çubuğun şekil değiştirmemiş eksen eğrisi üzerine çizilmiştir.



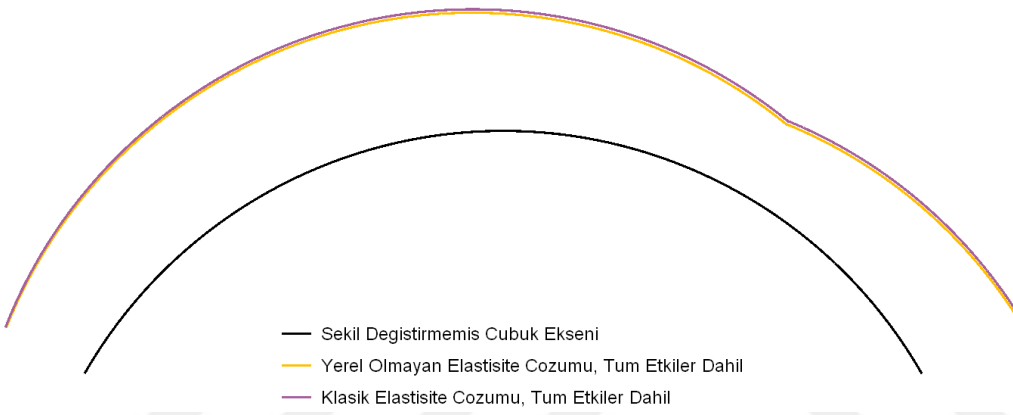
Şekil 5.17 : Yerel ve yerel olmayan teoriyle elde edilen yer değiştirme eğrileri. ($\theta_T=120^\circ$, $\lambda=100$, $R/\gamma=1$, $\theta_K=30^\circ$, F_{nK} , ankastre-mafsals).



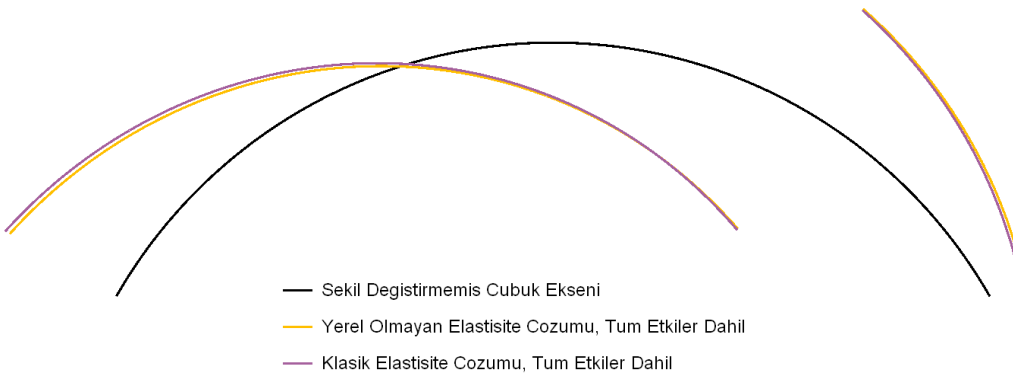
Şekil 5.18 : Yerel ve yerel olmayan teoriyle elde edilen dönme açısı (Ω_b) eğrileri. ($\theta_T=120^\circ$, $\lambda=100$, $R/\gamma=1$, $\theta_K=30^\circ$, F_{nK} , ankastre-mafsals).



Şekil 5.19 : Yerel ve yerel olmayan teoriyle elde edilen eğilme momenti (M_b) eğrileri. ($\theta_T=120^\circ$, $\lambda=100$, $R/\gamma=1$, $\theta_K=30^\circ$, F_{nK} , ankastre-mafsalsal).



Şekil 5.20 : Yerel ve yerel olmayan teoriyle elde edilen teğet doğrultusundaki kuvvet (F_t) eğrileri. ($\theta_T=120^\circ$, $\lambda=100$, $R/\gamma=1$, $\theta_K=30^\circ$, F_{nK} , ankastre-mafsalsal).



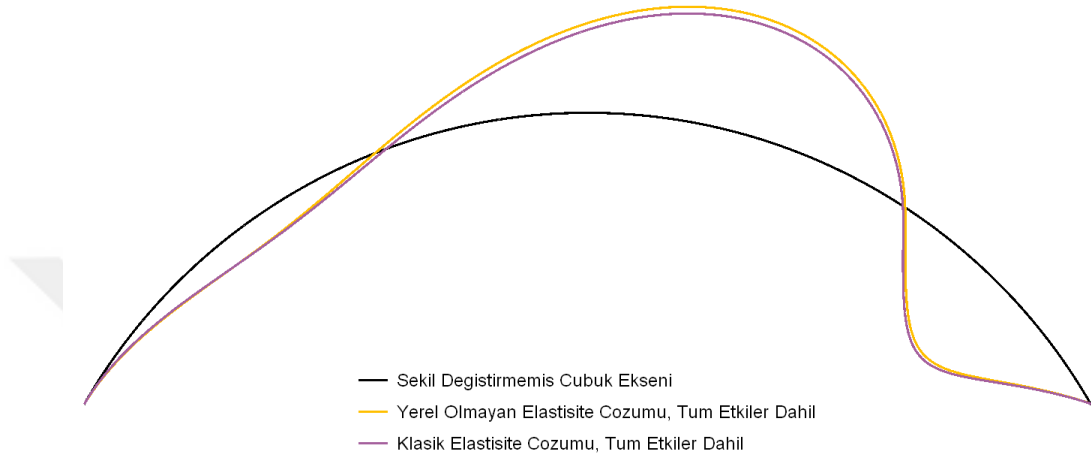
Şekil 5.21 : Yerel ve yerel olmayan teoriyle elde edilen normal doğrultusundaki kuvvet (F_n) eğrileri. ($\theta_T=120^\circ$, $\lambda=100$, $R/\gamma=1$, $\theta_K=30^\circ$, F_{nK} , ankastre-mafsalsal).

Yerel ve yerel olmayan teoriyle hesaplanan yer değıştirmelerin, dönme açısının, momentin ve teğet ile normal doğrultulardaki kuvvetlerin grafikleri Şekil 5.17-5.21 arasında verilmektedir. Şekillerden de görüldüğü gibi, yer değıştirme ve dönme açısı grafiklerinde, yerel ve yerel olmayan teorinin verdiği sonuçlar arasında bir miktar farklılıkların mevcut olduğu ve moment ile normal kuvvet grafiklerinde ise, yerel ve

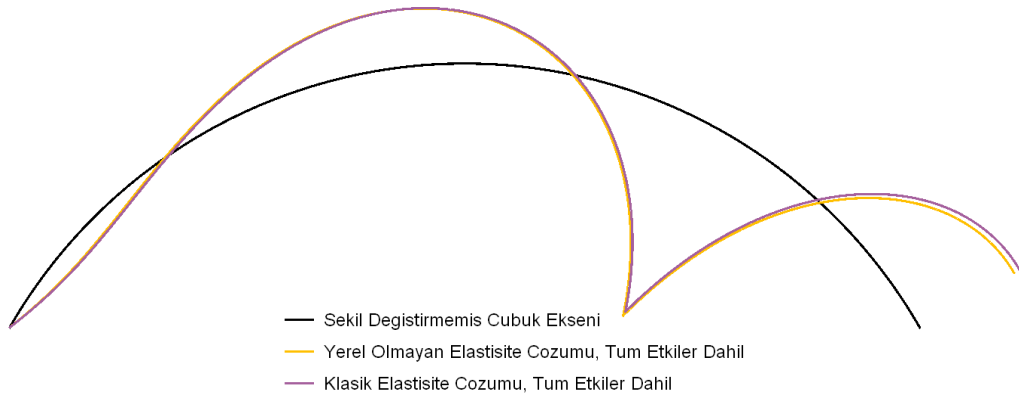
yerel olmayan teorinin verdiği sonuçlar arasındaki farklılıkların daha az olduğu görülmektedir.

5.4.4 θ_K Koordinatından M_{bK} etkiyen ankastre-mafsals mesnetli çubuk

Bu örnekte, ankastre-mafsals mesnetli, sabit kesitli çember eksenli çubuğun, herhangi bir θ_K koordinatından M_{bK} tekil kuvvetiyle yüklenmesi durumu ele alınmıştır.



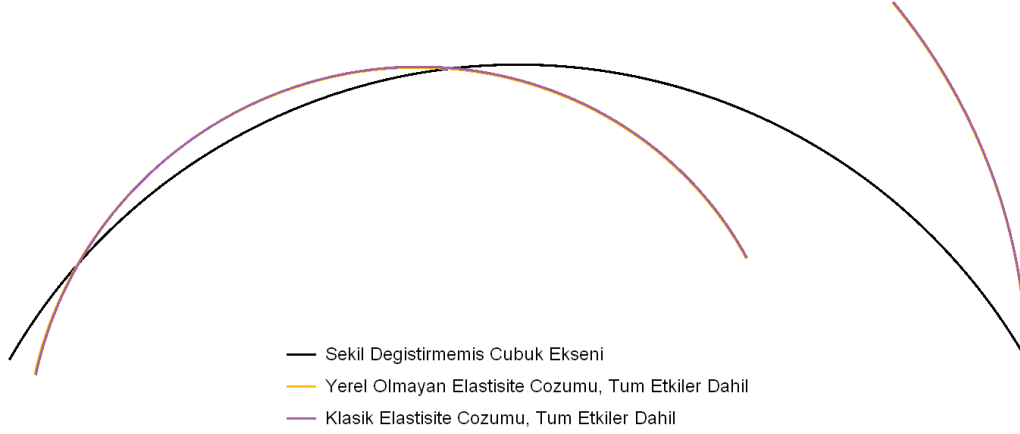
Şekil 5.22 : Yerel ve yerel olmayan teorilerle elde edilen yer değıştirme eğrileri. ($\theta_T=120^\circ$, $\lambda=100$, $R/\gamma=1$, $\theta_K=30^\circ$, M_{bK} , ankastre-mafsals).



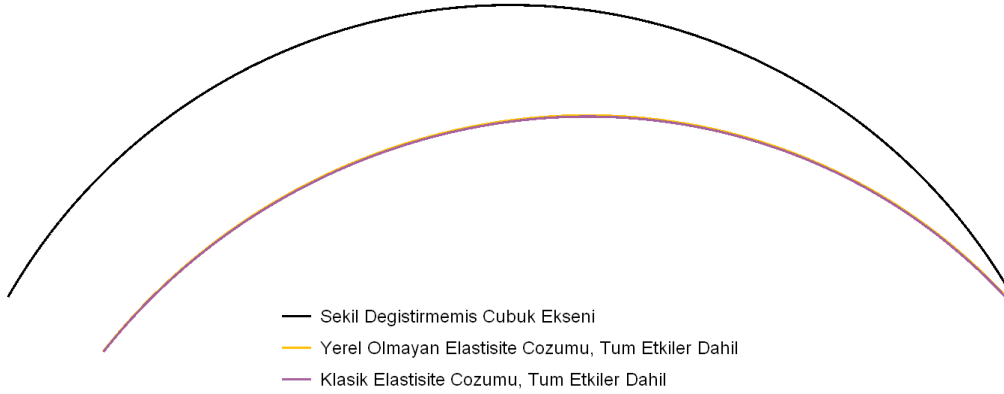
Şekil 5.23 : Yerel ve yerel olmayan teorilerle elde edilen dönme açısı (Ω_b) eğrileri. ($\theta_T=120^\circ$, $\lambda=100$, $R/\gamma=1$, $\theta_K=30^\circ$, M_{bK} , ankastre-mafsals).

Açıklığı $\theta_T=120^\circ$, narinlik oranı $\lambda=100$, boyut parametresi $R/\gamma=1$, yükün etkidığı konum $\theta_K=30^\circ$ olan ve normal doğrultuda etkiyen M_{bK} tekil kuvvetini taşıyan çubukta ortaya çıkan yer değıştirmeler, dönme açısı, moment, teğet ve normal kuvvetler, tüm etkilerin gözönüne alındığı yerel ve yerel olmayan teorilerle elde edilmiştir. Sonuçlar, çubuğun şekil değıştirmemiş eksen eğrisi üzerine çizilmiştir. Şekil 5.22-5.23'den de görüldüğü gibi, yerel ve yerel olmayan teorinin verdiği sonuçlar arasında küçük bir fark vardır.

Çubukta ortaya çıkan eğilme momenti değişiminin, yerel ve yerel olmayan teoriyle hesaplanan grafiği Şekil 5.24'te verilmektedir. Şekilden de görüldüğü gibi, yerel ve yerel olmayan teorinin verdiği sonuçlar arasında hemen hemen hiç fark yoktur.

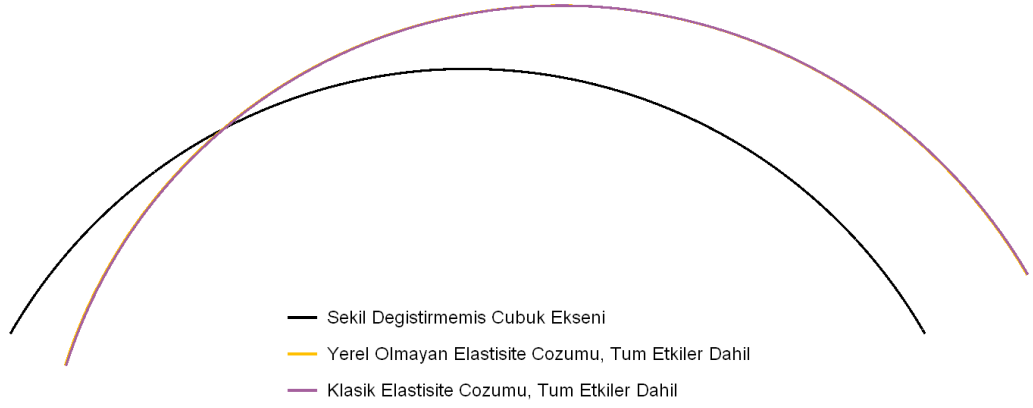


Şekil 5.24 : Yerel ve yerel olmayan teorilerle elde edilen moment (M_b) eğrileri. ($\theta_T=120^\circ$, $\lambda=100$, $R/\gamma=1$, $\theta_K=30^\circ$, M_{bK} , ankastre-mafsal).



Şekil 5.25 : Yerel ve yerel olmayan teorilerle elde edilen teğet doğrultusundaki kuvvet (F_t) eğrileri. ($\theta_T=120^\circ$, $\lambda=100$, $R/\gamma=1$, $\theta_K=30^\circ$, M_{bK} , ankastre-mafsal).

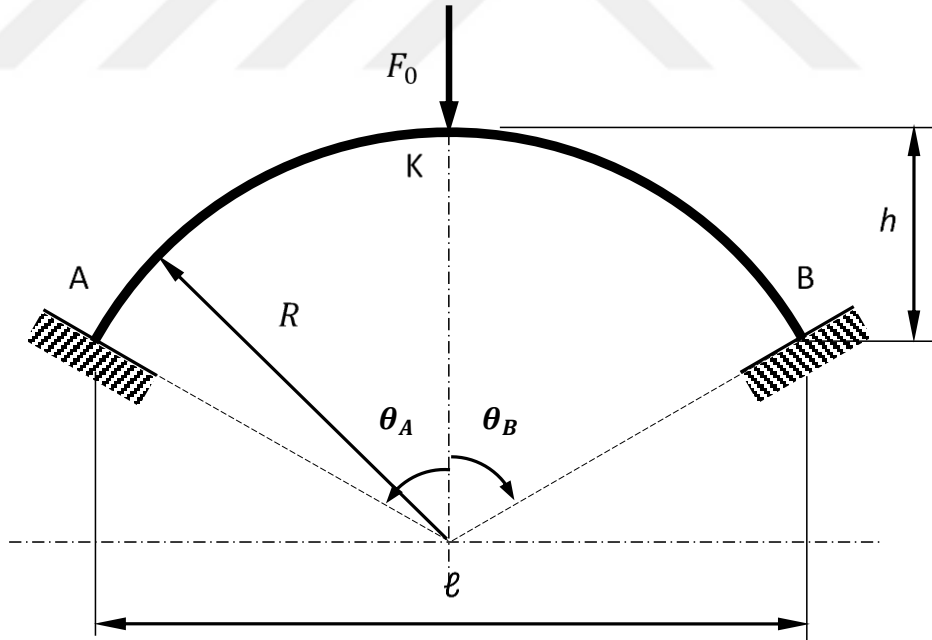
Çubukta ortaya çıkan teğet ve normal doğrultularındaki kuvvetlerin değişiminin, yerel ve yerel olmayan teoriyle hesaplanan grafikleri Şekil 5.25 ve 5.26'da verilmektedir. Şekillerden, yerel ve yerel olmayan teorinin verdiği sonuçlar arasında hemen hemen hiç fark olmadığı görülmektedir.



Şekil 5.26 : Yerel ve yerel olmayan teorilerle elde edilen normal doğrultusundaki kuvvet (F_n) eğrileri. ($\theta_T=120^\circ$, $\lambda=100$, $R/\gamma=1$, $\theta_K=30^\circ$, M_{bK} , ankastre-mafsals).

5.5 Çeşitli Parametrelerin Nano Çubukların Statik Davranışına Etkisi

Bu bölümde, çember eksenli nano çubukların statik davranışına çeşitli parametrelerin etkileri incelenmiştir. Bunun için, Şekil 5.27’de gösterilen, açıklığı $\theta_T = 120^\circ$ olan ankastre-ankastre mesnetli, orta noktasından bir F_0 tekil kuvvetiyle yüklü sabit kesitli çember eksenli çubuğun davranışları incelenmiştir.

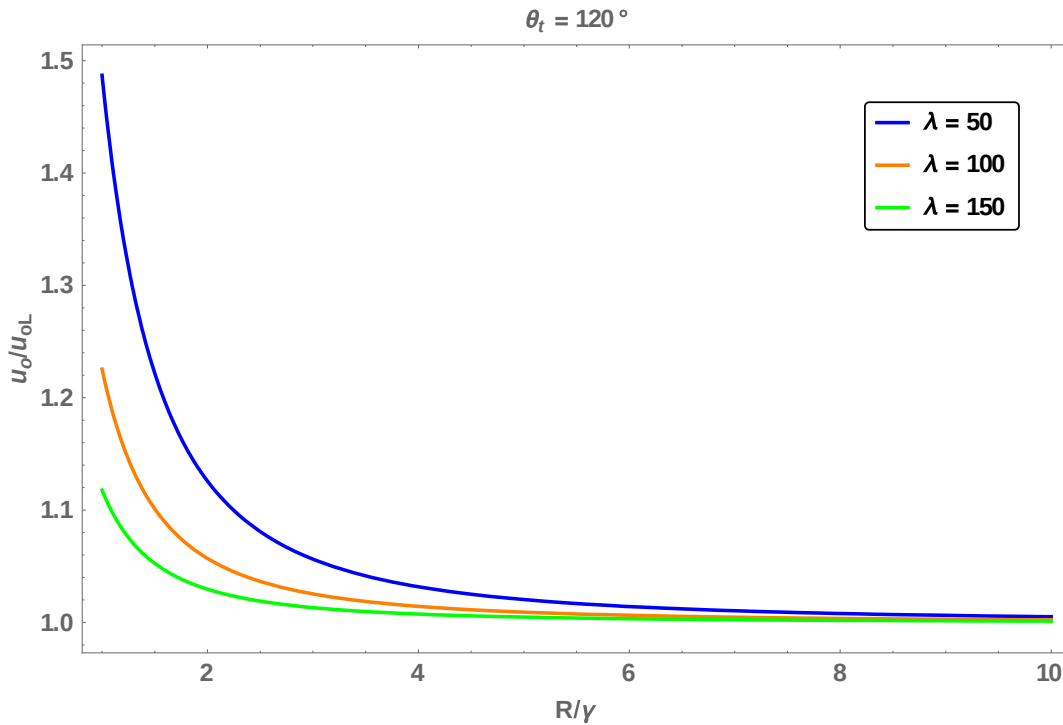


Şekil 5.27 : Orta noktasından bir F_0 tekil kuvvetiyle yüklü ankastre-ankastre mesnetli, sabit kesitli çember eksenli çubuk.

Bu amaçla, çubuğun tepe noktasına ait, yerel ve yerel olmayan yer değiştirme oranlarına (u_o/u_{oL}), boyut parametresi R/γ , narinlik oranı λ , ve açıklık θ_T

değerlerinin etkileri incelenmiştir. Aynı inceleme, çubuğun tepe noktasına ait, yerel ve yerel olmayan momentlerin oranları (M_{bo}/M_{boL}) için yapılmıştır.

Şekil 5.28’de yer değiştirme oranı (u_0/u_{0L}), ile boyut parametresi (R/γ) nin değişimi gösterilmektedir. Çubuk açıklığı $\theta_T = 120^\circ$ olup, farklı narinlik oranlarındaki ($\lambda = 50, 100$ ve 150) durum incelenmiştir. Küçük narinlik oranlarında (kısa kalın çubuklarda), boyut parametresinin daha önemli olduğu görülmektedir. Çubuk açıklığı küçüldüğünde bu etki azalmaktadır.

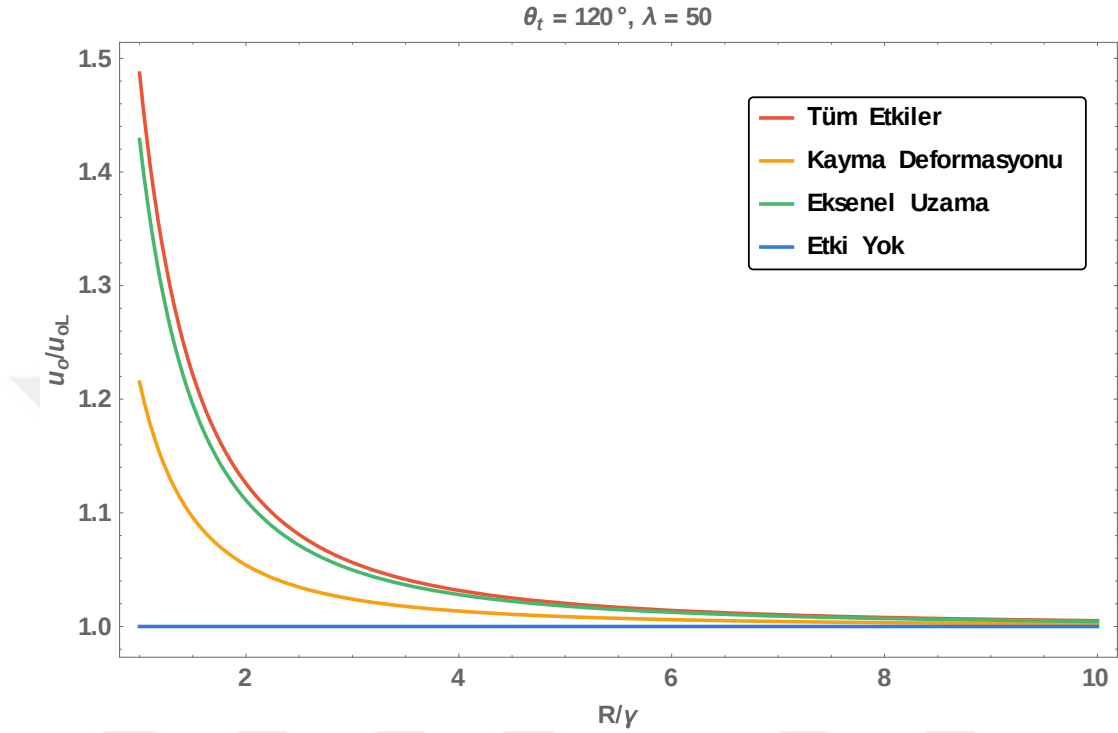


Şekil 5.28 : Yerel ve yerel olmayan yer değiştirme oranları u_0/u_{0L} 'ye R/γ 'nın etkisi (Farklı λ değerleri için. Ankastre-ankastre).

Farklı çubuk açıklığı ve narinlik oranlarında, eksenel uzama ve kayma deformasyonunun yer değiştirme oranına etkileri incelenmiştir. $\theta_T = 120^\circ$ ve $\lambda = 50$ için sonuçlar Şekil 5.29’da verilmiştir. Eksenel uzamanın veya kayma deformasyonunun dahil edilmesi gibi durumlardaki analiz sonuçları arasındaki farklılık, narinlik oranı arttıkça artmaktadır. Şekilden görüldüğü üzere, tüm çubuk açıklığı ve narinlik oranları için eksenel uzama en önemli faktördür.

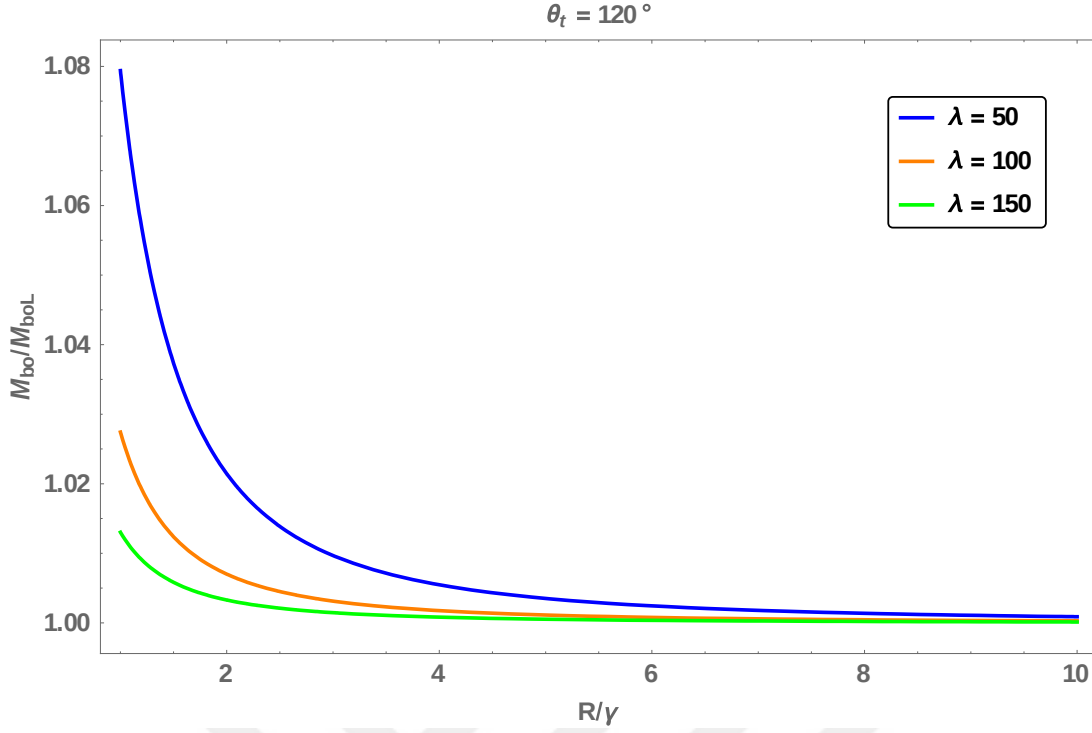
Narin ve derin çubuklarda, eğilme etkisinin yanında eksenel ve kayma deformasyonları oldukça önemsiz kalırlar. Bu nedenle bunlar ihmal edilebilir ve elde edilen sonuçlar da kabul edilebilir sınırlar içinde olur. Ayrıca, çubuk kısa ve kalın olduğunda kayma deformasyonu etkisi de önem kazanmaktadır. Tüm etkilerin ihmal

edildiği durumda (sadece eğilmenin yerel olmayan etkisi göz önüne alındığında), yer değiştirmeler yerel ve yerel olmayan teoriler için aynı bulunmaktadır. Li (2015) tarafından tekil yük etkisindeki düz nano çubuklar için de benzer sonuçlar verilmiştir.

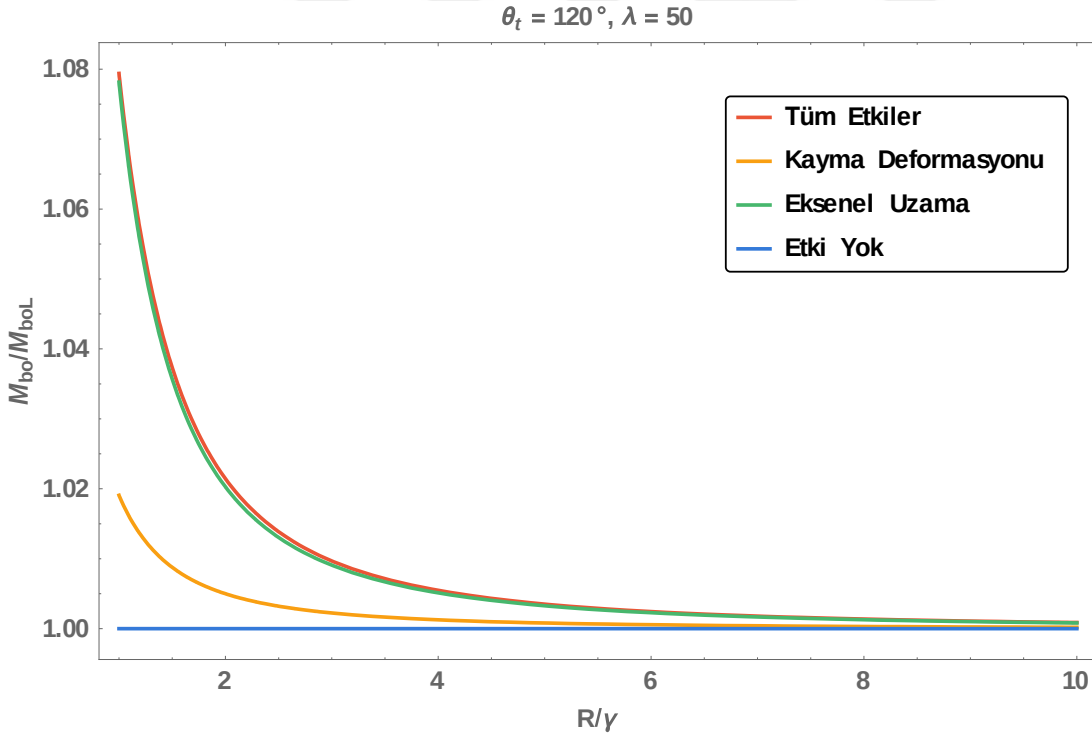


Şekil 5.29 : Yerel ve yerel olmayan yer değiştirme oranları u_0/u_{0L} 'ye R/γ 'nın etkisi (Farklı etkilerin göz önüne alındığı durum için. Ankastre-ankastre).

Şekil 5.30'da moment oranının boyut parametresi R/γ ile değişimi verilmiştir. Burada, çubuk açıklığı $\theta_T = 120^\circ$ ve narinlik oranları $\lambda = 50, 100$ ve 150 'dir. Moment oranı; büyük açıklık değerlerinde, azalan narinlik oranı ile artmaktadır. Ayrıca, çubuk açıklığı azaldıkça farklı narinlik oranları için elde edilen moment oranları birbirine yakın değerler almaktadır.



Şekil 5.30 : Farklı narinlik değerleri için boyut parametresi R/γ nin yerel (klasik) ve yerel olmayan moment oranlarına (M_{b0}/M_{b0L}) etkisi. Ankastre-ankastre.



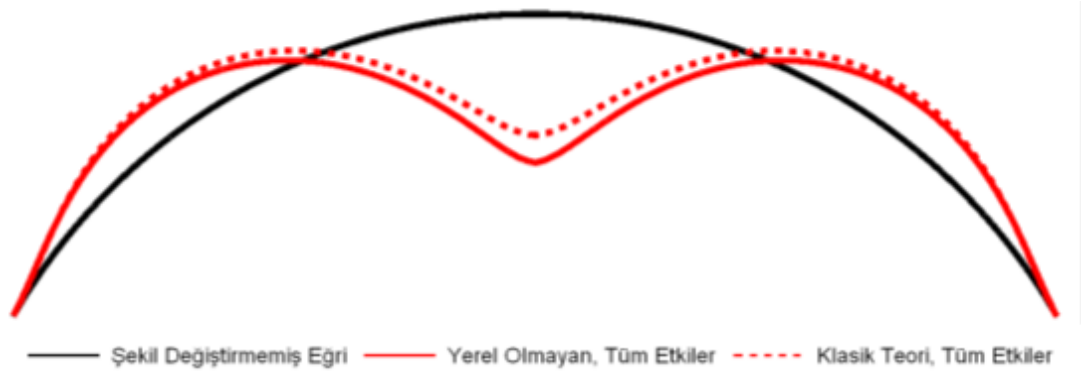
Şekil 5.31 : Yerel ve yerel olmayan moment oranları M_{b0}/M_{b0L} 'ye R/γ 'nin etkisi (Farklı etkilerin göz önüne alınması durumu için). Ankastre-ankastre.

Eksenel uzama ve kayma deformasyonu etkilerinin incelendiği $\theta_T = 120^\circ$ açıklığa, $\lambda = 50$ narinlik oranına sahip olan çubuğun analiz sonuçları Şekil 5.31'de verilmiştir. Eksenel uzamanın dahil edilmesi veya kayma deformasyonunun dahil

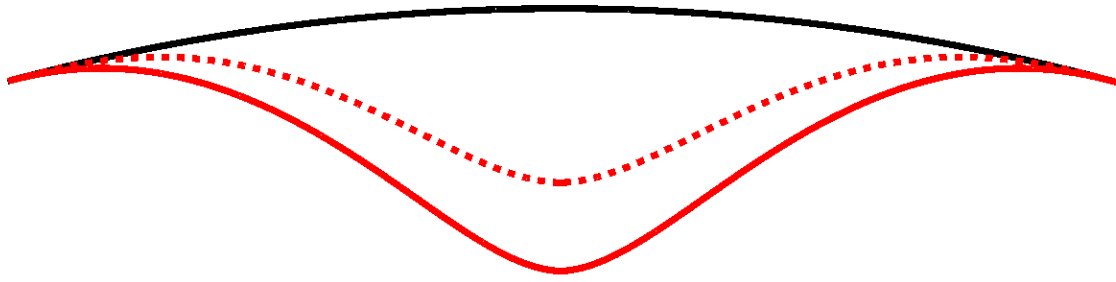
edilmesi durumlarındaki analiz sonuçları arasındaki farklılık da narinlik oranı arttıkça artmaktadır. Tüm açıklık değerleri için eksenel uzamanın en önemli etken olduğu gözlemlenmiştir. Tüm narinlik oranı değerlerinde, moment oranı, azalan açıklık değerlerine bağlı olarak artmaktadır.

Klasik (yerel) teoriden bilindiği üzere, Euler çubuk teorisi sadece narin (ince ve uzun) çubuklar için uygun sonuçlar vermekte olup, sıg (ekseninin yüksekliği açıklığına göre küçük olan) çubuklar için uygun olmayan sonuçlar vermektedir. Narin ve sıg çubuklar farklı dinamik ve statik davranış göstermektedir (Tüfekçi ve Arpacı, 2006; Tüfekçi, 2001).

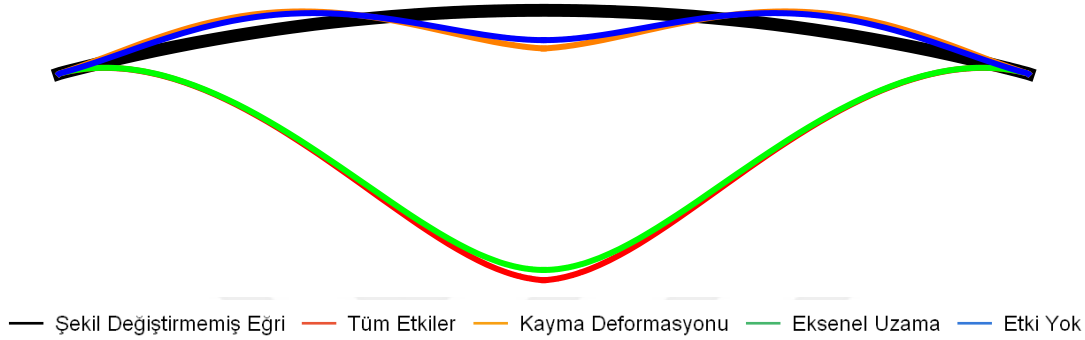
Sıglık etkisini göstermek için, Şekil 5.27’de görülen ankastre-ankastre mesnetli, orta noktasından kuvvet etkiyen çubuk incelenecektir. Örnekte; $\theta_T = \theta_A + \theta_B$ ve $\theta_A = \theta_B$ dir. Yerel ve yerel olmayan teoriler ile elde edilen yer değiştirme değerleri Şekil 5.32’de $\theta_T = 120^\circ$, $\lambda = 100$ için ve Şekil 5.33’de $\theta_T = 30^\circ$, $\lambda = 100$ için verilmiştir. Yerel (klasik) teori ile elde edilen sonuçlar kesik çizgili gösterilmiş olup diğerleri ise yerel olmayan teori ile elde edilen sonuçlardır. Her iki teorinin sonuçları arasında önemli farklılıklar olduğu görülmektedir. Çubuk orta noktası için her iki teorinin verdiği sonuçların oranlarının, azalan çubuk açıklığı ile arttığı ve artan boyut parametresi değeri ile azaldığı görülmüştür.



Şekil 5.32 : Yerel ve yerel olmayan yer değiştirme sonuçları ($R/\gamma = 1$, $\theta_T = 120^\circ$, $\lambda = 100$, ankastre- ankastre).



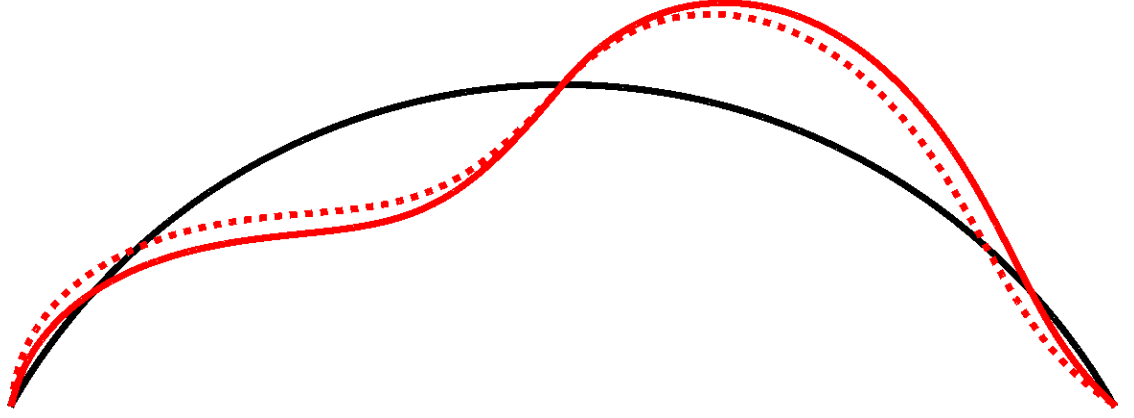
Şekil 5.33 : Yerel ve yerel olmayan yer değiştirme sonuçları ($R/\gamma = 1$, $\theta_T = 30^\circ$, $\lambda = 100$, ankastre- ankastre).



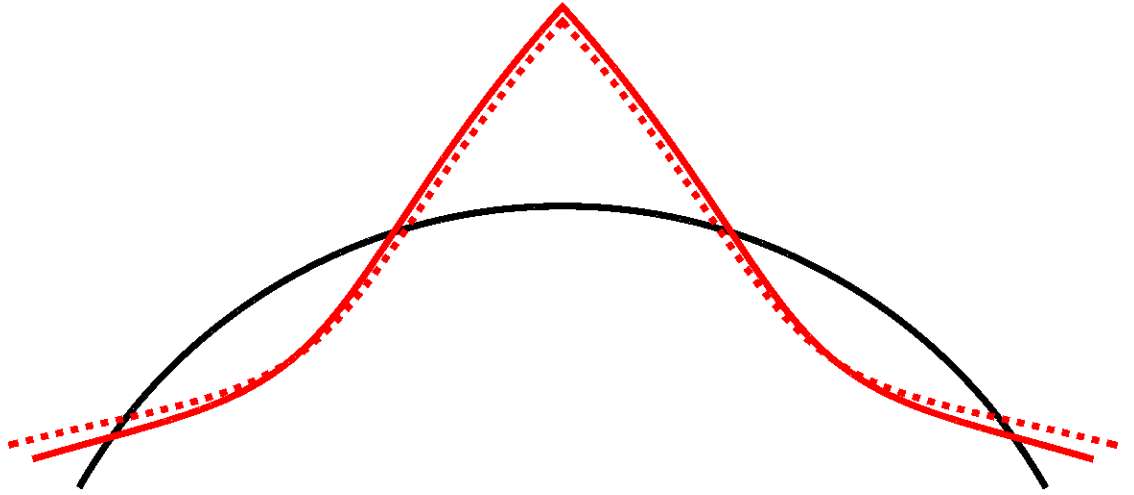
Şekil 5.34 : Farklı etkilerin göz önüne alınmasıyla elde edilen yerel olmayan yer değiştirme sonuçları ($R/\gamma = 1$, $\theta_T = 30^\circ$, $\lambda = 100$, ankastre- ankastre).

Şekil 5.34'te yerel olmayan elastisite teorisi ile elde edilen, farklı etkilerin incelendiği yer değiştirme eğrileri görülmektedir. Burada yeşil renkli çizgi sadece eksenel uzamanın dahil edildiği sonuçları, turuncu renkli çizgi ise sadece kayma etkisinin dahil edildiği sonuçları göstermektedir. Orta noktaya ait sonuçlar ve yer değiştirme eğrisi incelendiğinde, $\theta_T = 30^\circ$ ve $\lambda = 100$ için sadece yer değiştirme değeri değil, yer değiştirme karakteristiğinin de farklı olduğu görülmektedir. Çubuk narin (uzun ve ince) olsa dahi, eksenel uzama etkisi sık çubuklar için önemlidir. Bu nedenle, gerçekçi sonuçlar elde edebilmek için eksenel uzama ve kayma deformasyonu etkilerinin ihmal edilmemesi gerekmektedir.

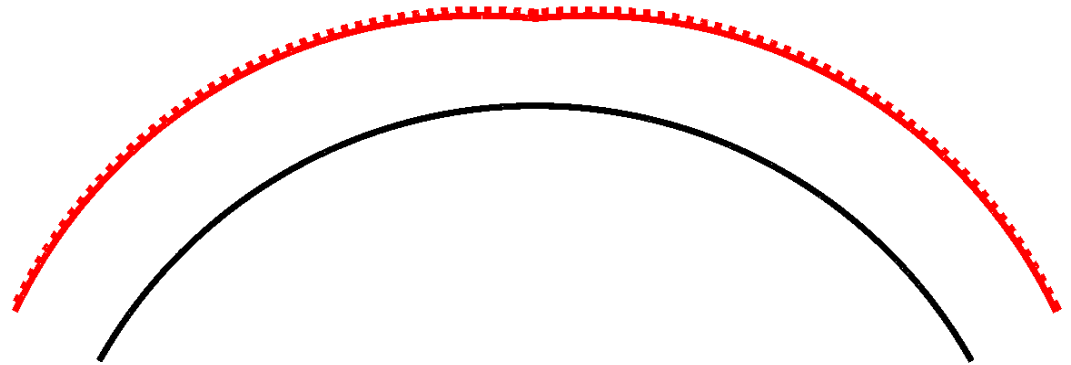
$R/\gamma = 1$, $\theta_t = 120^\circ$ and $\lambda = 50$ olan çubuğa ait dönme açısı (Ω_b), binormal moment (M_b), teğetsel kuvvet (F_t) ve normal kuvvet (F_n) diyagramları Şekil 5.35-5.38'de verilmiştir. Kırmızı sürekli çizgi yerel olmayan teori ile elde edilen sonuçları, kırmızı kesikli çizgi ise yerel (klasik) teori ile elde edilen sonuçları göstermektedir.



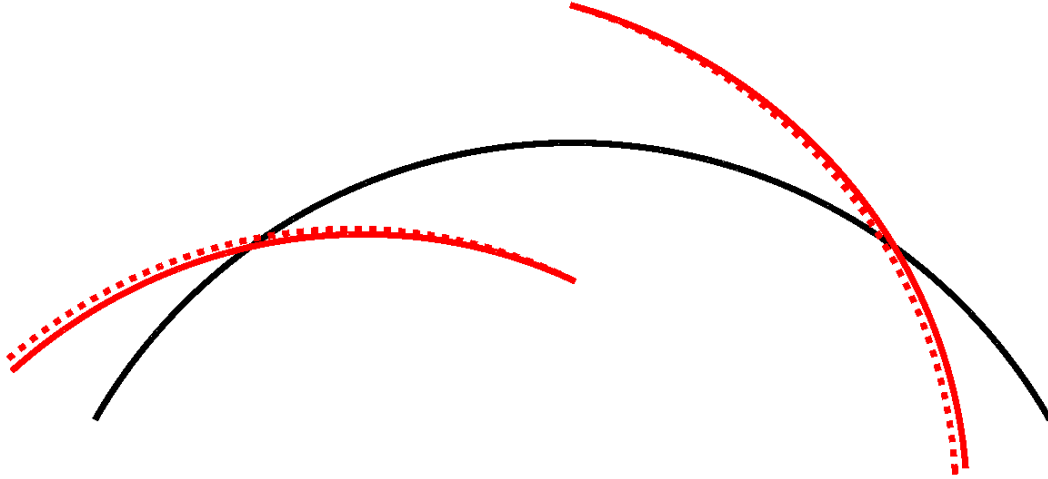
Şekil 5.35 : $R/\gamma = 1$, $\theta_T = 120^\circ$ ve $\lambda = 50$ olan çubuk için yerel ve yerel olmayan teorilerle elde edilen dönme açısı diyagramı. Ankastre-ankastre.



Şekil 5.36 : $R/\gamma = 1$, $\theta_T = 120^\circ$ ve $\lambda = 50$ olan çubuk için yerel ve yerel olmayan teorilerle elde edilen binormal moment diyagramı. Ankastre-ankastre.



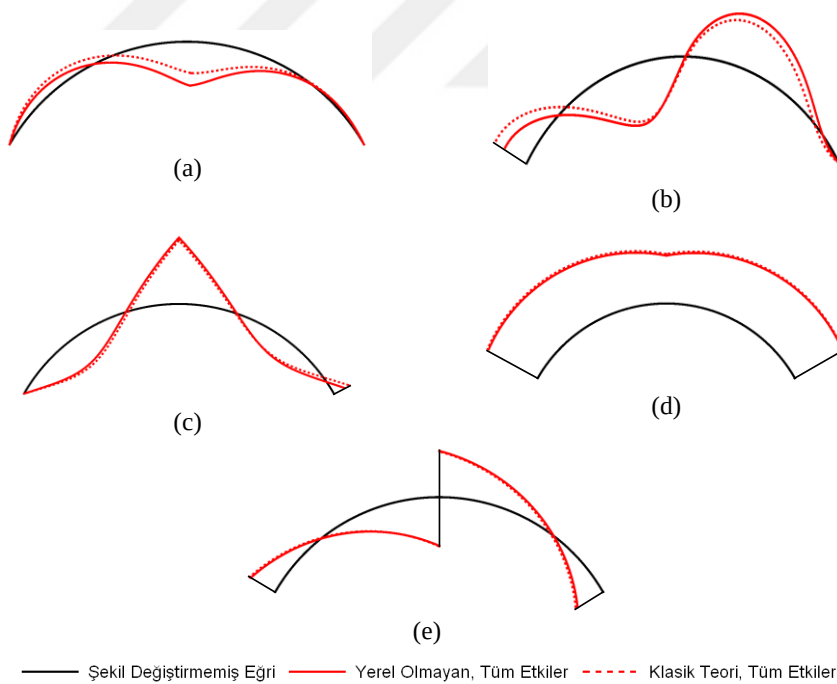
Şekil 5.37 : $R/\gamma = 1$, $\theta_T = 120^\circ$ ve $\lambda = 50$ olan çubuk için yerel ve yerel olmayan teorilerle elde edilen teğetsel kuvvet diyagramı. Ankastre-ankastre.



Şekil 5.38 : $R/\gamma = 1$, $\theta_T = 120^\circ$ ve $\lambda = 50$ olan çubuk için yerel ve yerel olmayan teorilerle elde edilen normal kuvvet diyagramı. Ankastre-ankastre.

5.5.1 Nano çubukların statik davranışına sınır şartlarının etkisi

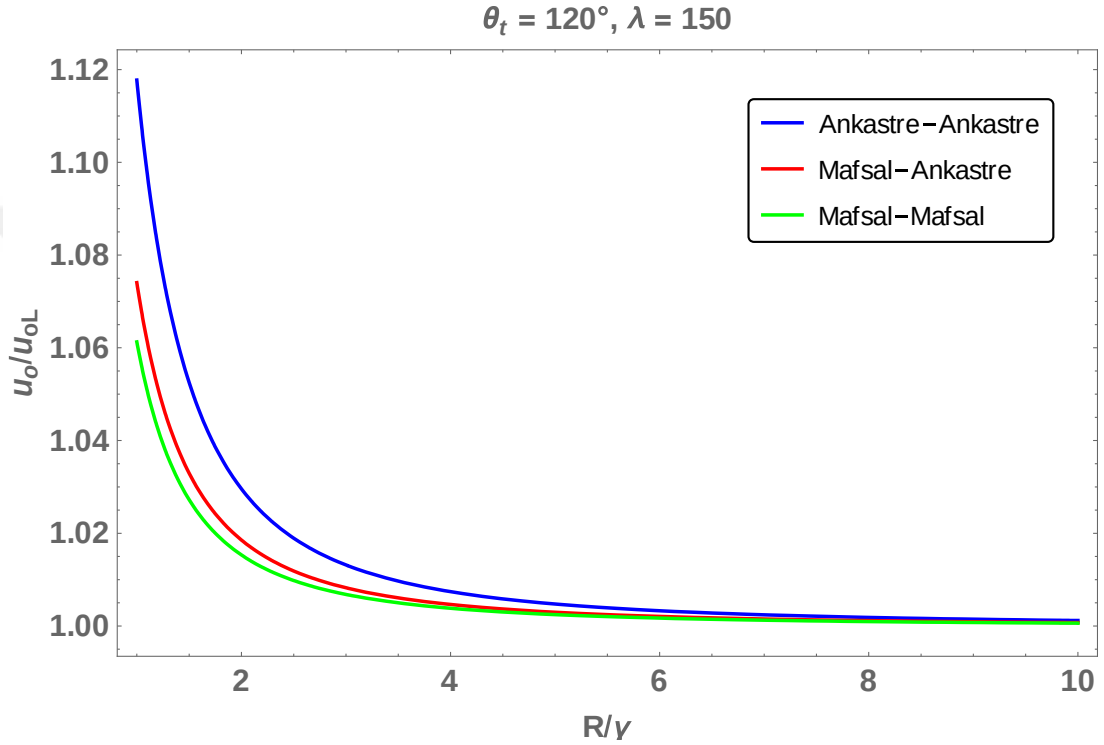
Önceki örneklerde, ankastre-ankastre mesnetli çubuk ile ilgili detaylı analizler gerçekleştirilmiştir. Bu kısımda, sınır koşullarının (mafsal-ankastre ve mafsal-mafsal) nano çubuğun statik davranışına etkisi incelenecektir.



Şekil 5.39 : Yerel ve yerel olmayan (a) yer değiştirme (b) dönme açısı (c) binormal moment (d) teğetsel kuvvet (e) normal kuvvet sonuçları (mafsal-ankastre, $\theta_T = 120^\circ$, $\lambda = 50$, $R/\gamma = 1$).

Mafsal-ankastre mesnetli çubukta; boyut parametresi, narinlik oranı ve çubuk açıklığının yer değiştirme ve moment oranına etkisi araştırılmıştır. Sonuçlar,

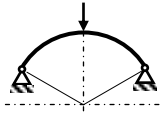
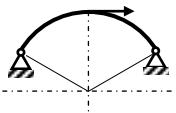
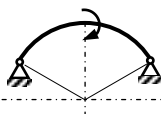
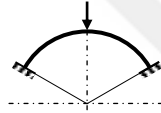
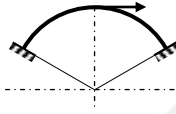
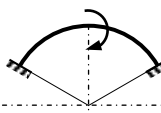
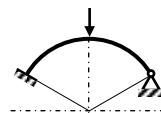
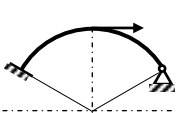
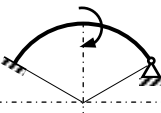
ankastre-ankastre mesnetli çubuk için yapılan sonuçlar ile benzerlik göstermektedir, bu sebepten burada verilmeyecektir (Şekil 5.10, 5.11). $R/\gamma=1$, $\theta_T = 120^\circ$ ve $\lambda = 50$ olan mafsalsal-ankastre mesnetli çubuk için yer değiştirme, dönme açısı (Ω_b) ve binormal moment (M_b), teğetsel kuvvet (F_t) ve normal kuvvet (F_n) diyagramları Şekil 5.39’da verilmiştir. Yer değiştirme ve dönme açısı için elde edilen sonuçlarda, ankastre-ankastre mesnetli çubuklar için elde edilmiş olan sonuçlara göre daha küçük fark ortaya çıkmıştır.



Şekil 5.40 : Farklı sınır koşulları için R/γ boyut parametresinin yer değiştirme oranına etkisi.

Şekil 5.40’da farklı sınır koşulları için yer değiştirme oranının u_0/u_{0L} boyut parametresi R/γ ile değişimi verilmiştir. Burada, çubuk açıklığı $\theta_T = 120^\circ$ ve narinlik oranı $\lambda = 150$ ’dir. Boyut parametresinden en fazla etkilenen ankastre-ankastre mesnetli çubuk olmuştur. Mafsalsal-ankastre veya mafsalsal-mafsalsal çubuklarda sabit bir çubuk açıklığı değeri için, eğer narinlik oranı azalırsa (kısa ve kalın çubuklar için), eğrilerin birbirine yakınlığı ve boyut etkisinin önemli ölçüde arttığı gözlenmiştir.

Çizelge 5.1 : Çeşitli yükleme ve mesnetleme şartlarındaki çubukların yerel ve yerel olmayan yer değiştirme ve dönme açıları oranları ($\theta_T = 120^\circ$, $\lambda = 50$, $R/\gamma = 1$).

		Tüm Etkiler	Eksenel Uz.	Kayma Def.	Etki Yok
	$\frac{u_0}{u_{0L}}$	1.36406	1.29453	1.13543	1
	$\frac{w_0}{w_{0L}}$	1.17921	1.14423	1.04743	1
	$\frac{\Omega_{b0}}{\Omega_{b0L}}$	0.96825	0.97567	0.99293	1
	$\frac{w_0}{w_{0L}}$	0.96825	0.97567	0.99293	1
	$\frac{\Omega_{b0}}{\Omega_{b0L}}$	1.01987	1.00237	1.01758	1
	$\frac{u_0}{u_{0L}}$	1.48699	1.42853	1.21499	1
	$\frac{w_0}{w_{0L}}$	1.37311	1.30450	1.13453	1
	$\frac{\Omega_{b0}}{\Omega_{b0L}}$	0.96583	0.93209	1.02748	1
	$\frac{u_0}{u_{0L}}$	2.03697	1.01461	1.02824	1
	$\frac{\Omega_{b0}}{\Omega_{b0L}}$	1.04750	1.00606	1.04238	1
	$\frac{u_0}{u_{0L}}$	1.40005	1.33234	1.15290	1
	$\frac{\Omega_{b0}}{\Omega_{b0L}}$	0.66189	0.70091	0.93618	1
	$\frac{w_0}{w_{0L}}$	1.28485	1.22737	1.09486	1
	$\frac{\Omega_{b0}}{\Omega_{b0L}}$	0.979295	0.96171	1.01690	1
	$\frac{u_0}{u_{0L}}$	0.66189	0.70091	0.93618	1
	$\frac{\Omega_{b0}}{\Omega_{b0L}}$	1.04033	1.00692	1.03503	1

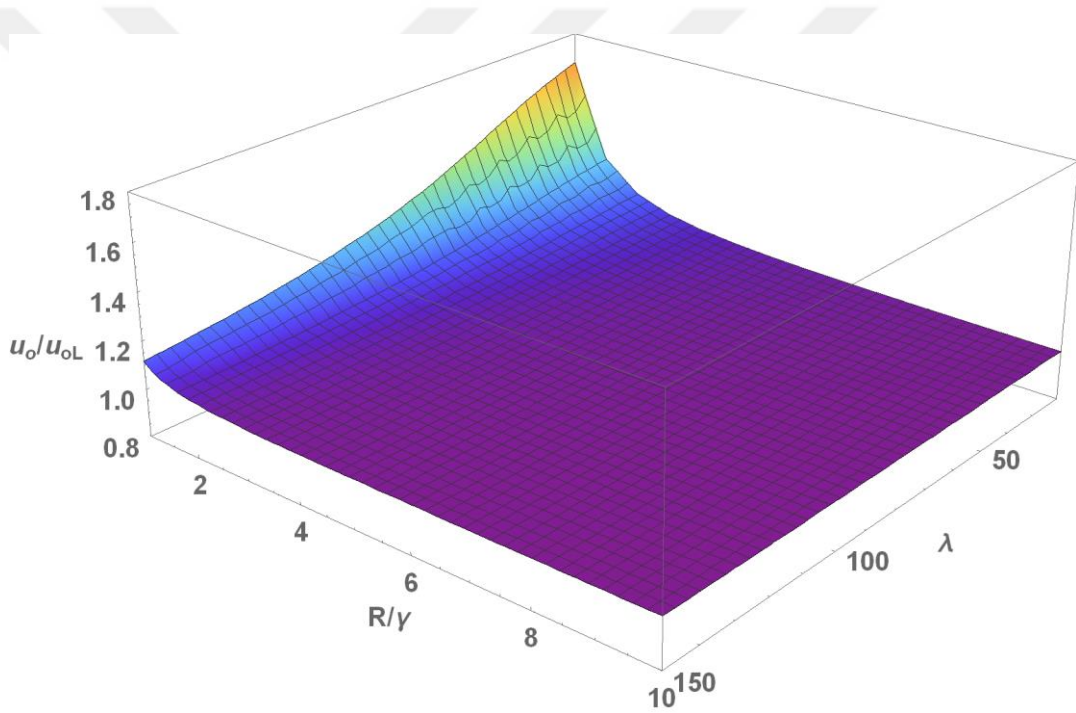
Çizelge 5.1’de yer değiştirme (u_0/u_{0L} veya w_0/w_{0L}) ve dönme açısı oranı (Ω_{b0}/Ω_{b0L}) çeşitli sınır koşulları için verilmiştir. Eksenel uzama ve kayma

deformasyonu etkileri incelenmiştir. Çubuk için $\theta_T = 120^\circ$, $\lambda = 50$, $R/\gamma = 1$ değerleri alınmıştır.

Tüm yükleme ve sınır koşulları için aksenal uzama en büyük etkiye sahiptir. Kayma deformasyonu etkisi kısa ve kalın çubuklar için mutlaka göz önünde bulundurulmalıdır.

5.5.2 Boyut parametresi R/γ 'nın ve narinlik oranı λ 'nın etkisi

Bu örnekte, açıklığı $\theta_T = 120^\circ$ olan, ankastre-ankastre mesnetli, sabit kesitli çember aksenli çubuğun, tepe noktasından F_n tekil kuvvetiyle yüklenmesi durumu ele alınarak, boyut parametresi R/γ 'nın ve narinlik oranı λ 'nın etkileri, diyagramlarla incelenmiştir.

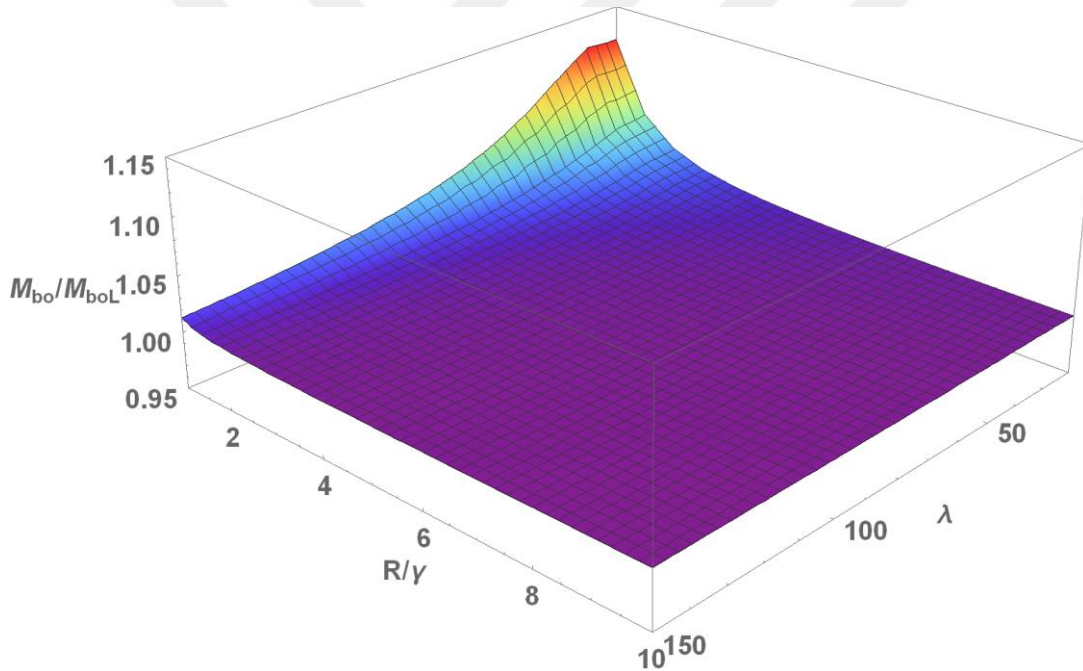


Şekil 5.41 : Yerel ve yerel olmayan yer değiştirmelerin oranına (u_o/u_{oL}) boyut parametresi (R/γ) ve narinlik oranının (λ) etkisi. Ankastre-ankastre.

Şekil 5.41'de, çubuğun tepe noktasına ait yerel ve yerel olmayan yer değiştirme oranına (u_o/u_{oL}), boyut parametresi (R/γ), ve narinlik oranının (λ) etkisi görülmektedir. Bu şekilden, boyut parametresi R/γ 'nın büyük değerleri için, değişen narinlik oranı λ değerlerinin yer değiştirme oranını neredeyse etkilemediği, sabit kaldığı gözlenmektedir. Bu sonuç, hem yerel hem de yerel olmayan teorinin sonuçlarının narinlik oranı λ değişiminden hemen hemen aynı şekilde etkilendiğini göstermektedir. Değişen boyut parametresi R/γ değerlerinin yer değiştirme oranına

etkisi, her narinlik oranı λ değeri için, benzer değişim göstermekte ve küçük narinlik oranı λ değerlerinde bu etki artmaktadır.

Şekil 5.42’de, çubuğun tepe noktasına ait yerel ve yerel olmayan moment oranına (M_{bo}/M_{boL}), boyut parametresi (R/γ), ve narinlik oranının (λ) etkisi verilmektedir. Bu şekilden, değişen narinlik oranı λ değerlerinin, boyut parametresi R/γ ’nın 3’ten küçük değerlerinde, moment oranlarındaki etkisinin belirgin olduğu, 3’ten büyük her boyut parametresi R/γ değeri için, hemen hemen sabit kaldığı gözlenmektedir. Değişen boyut parametresi R/γ değerlerinin, narinlik oranı λ ’nın 70’den daha küçük narinlik oranlarında, moment oranında önemli bir değişim olduğu, 70’den büyük her narinlik oranı λ değeri için, hemen hemen aynı karakterde olduğu görülmektedir. Yani, her narinlik oranı λ değeri için, moment oranının (M_{bo}/M_{boL}), boyut parametresi R/γ değişiminden aynı karakterde etkilendiği anlaşılmaktadır.

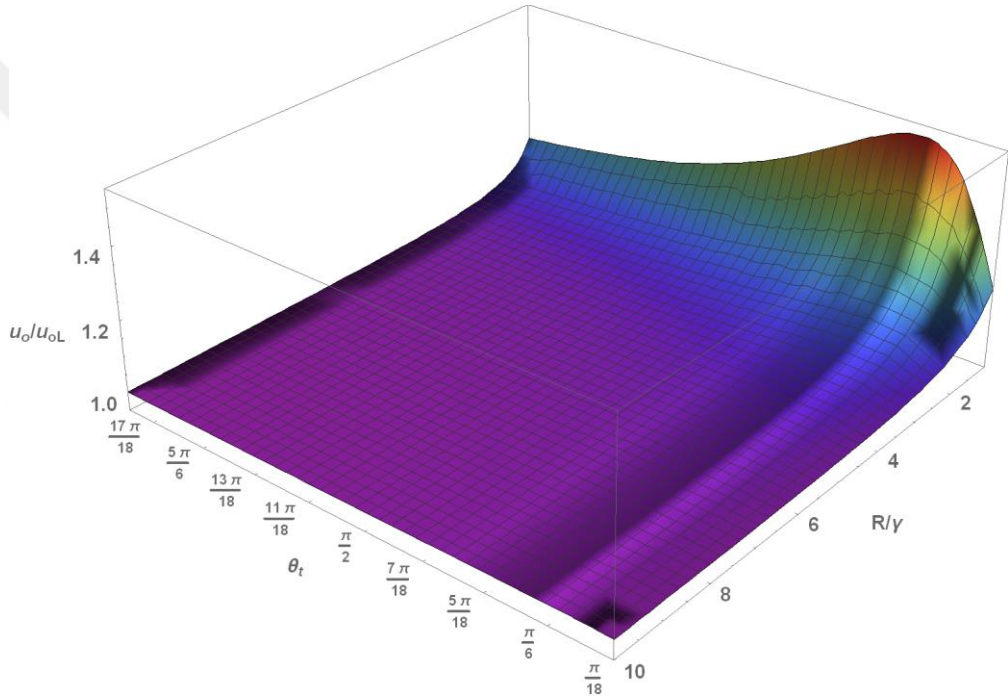


Şekil 5.42 : Yerel ve yerel olmayan momentlerin oranına (M_{bo}/M_{boL}) boyut parametresi (R/γ) ve narinlik oranının (λ) etkisi. Ankastre-ankastre.

5.5.3 Boyut parametresi R/γ ve çubuk açıklığı θ_T ’nin etkisi

Bu örnekte, narinlik oranı $\lambda=100$ olan, ankastre-ankastre mesnetli, sabit kesitli çember eksenli çubuğun, tepe noktasından F_n tekil kuvvetiyle yüklenmesi durumu ele alınarak, boyut parametresi R/γ ve çubuk açıklığı θ_T ’nin etkileri, diyagramlarla verilmiştir.

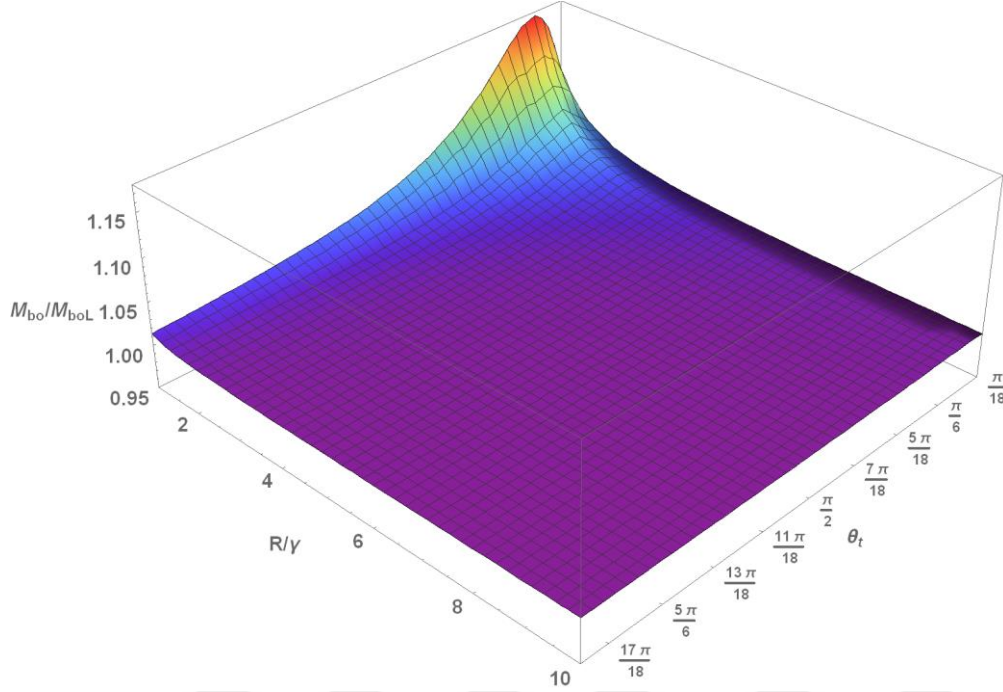
Şekil 5.43’de, çubuğun tepe noktasına ait yerel ve yerel olmayan yer değiştirmelerin oranına (u_o/u_{oL}), boyut parametresi (R/γ), ve çubuk açıklığı θ_T ’nin etkisi görülmektedir. Bu şekilden, büyük açıklık θ_T ve büyük boyut parametresi R/γ değerleri için, yer değiştirme oranı (u_o/u_{oL})’nin hemen hemen sabit kaldığı, küçük açıklık ve küçük boyut parametresi değerlerinde değişimin önemli olduğu, büyük değişimlerin ortaya çıktığı gözlenmektedir. Değişen boyut parametresi R/γ değerlerinin, her çubuk açıklığı θ_T değeri için, yer değiştirme oranının aynı karakterde değişim gösterdiği görülmektedir. Her boyut parametresi R/γ değeri için çubuk açıklığının küçük değerlerinde ($\theta_T < \pi/6$), yer değiştirme oranında ani azalma görülmektedir.



Şekil 5.43 : Yerel ve yerel olmayan yer değiştirme oranına u_o/u_{oL} boyut parametresi R/γ ve çubuk açıklığının θ_T etkisi. Ankastre-ankastre.

Şekil 5.44’te, çubuğun tepe noktasına ait yerel ve yerel olmayan moment oranına (M_{bo}/M_{boL}), boyut parametresi (R/γ) ve çubuk açıklığı (θ_T) etkisi verilmektedir. Bu şekilden de, çubuk açıklığı θ_T ’nin ve boyut parametresi R/γ ’nın büyük değerlerinde, yerel ve yerel olmayan moment oranının (M_{bo}/M_{boL}) etkilenmediği, ancak, çubuk açıklığı θ_T ’nin ve boyut parametresi R/γ ’nın küçük değerlerinde yerel ve yerel olmayan moment oranının (M_{bo}/M_{boL}) değişiminin önem kazandığı görülmektedir. Değişen boyut parametresi R/γ değerlerinin, çubuk açıklığı θ_T ’nin büyük değerlerinde, moment oranına çok az etkisi olurken, küçük θ_T değerlerinde

önemli bir değişim olduğu görülmektedir. Sonuç olarak, yerel ve yerel olmayan moment oranı (M_{bo}/M_{boL})'nin, küçük boyut parametresi (R/γ) ve küçük çubuk açıklığı (θ_T) değerlerinden belirgin şekilde etkilendiği anlaşılmaktadır.

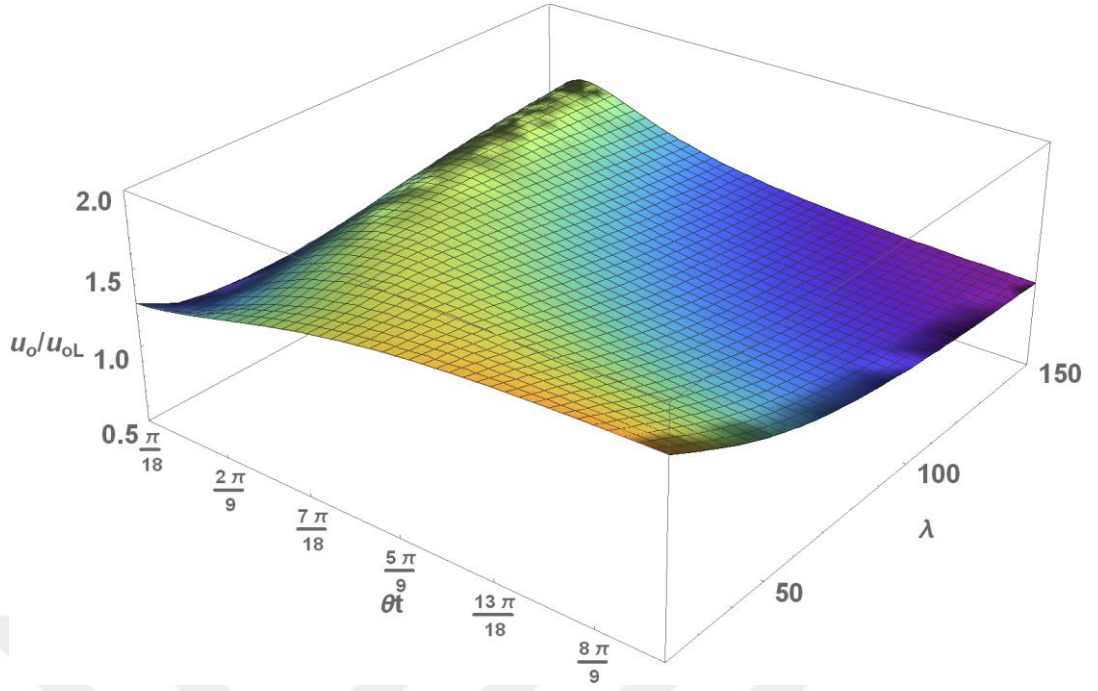


Şekil 5.44 : Yerel ve yerel olmayan moment oranına (M_{bo}/M_{boL}) boyut parametresi R/γ ve çubuk açıklığının θ_T etkisi. Ankastre-ankastre.

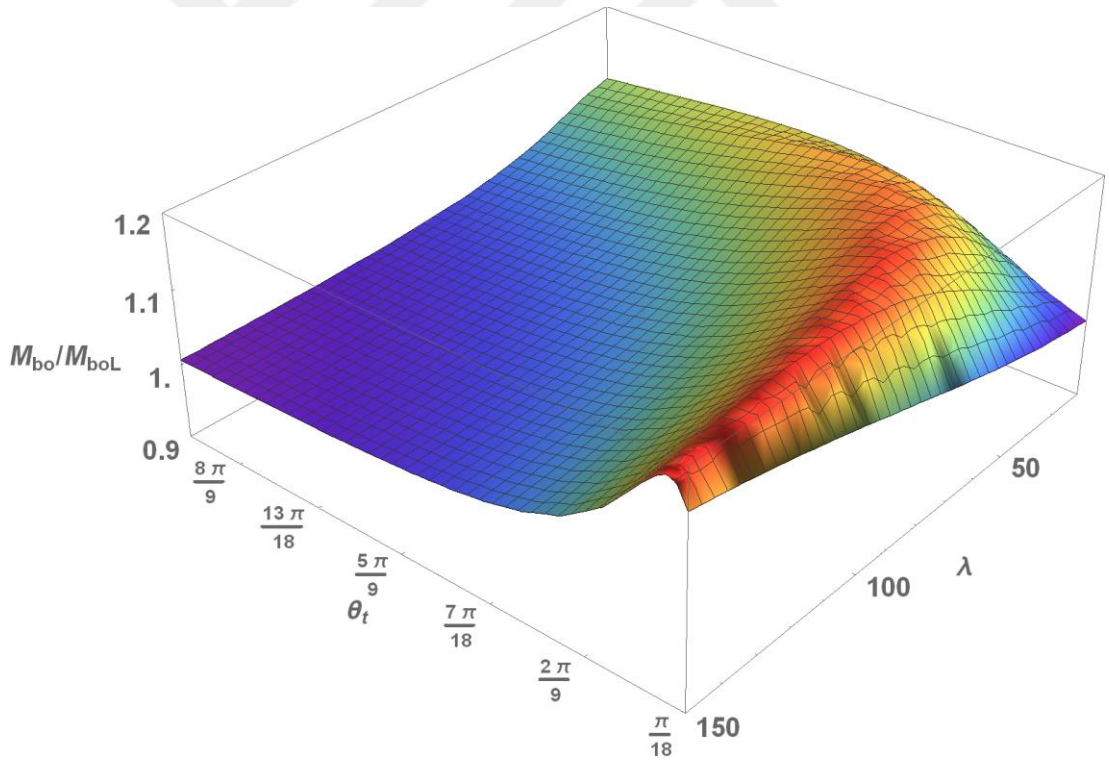
5.5.4 Narinlik oranı λ 'nın ve çubuk açıklığı θ_T 'nin etkisi

Bu örnekte, boyut parametresi $R/\gamma = 1$ olan, ankastre-ankastre mesnetli, sabit kesitli çember eksenli çubuğun, tepe noktasından F_n tekil kuvvetiyle yüklenmesi durumu ele alınarak, narinlik oranı λ ve çubuk açıklığı θ_T 'nin etkileri, diyagramlarla verilmiştir.

Şekil 5.45'te, çubuğun tepe noktasına ait yerel ve yerel olmayan yer değiştirme oranına (u_o/u_{oL}), narinlik oranı λ ve çubuk açıklığı θ_T 'nin etkisi görülmektedir. Bu şekilden, çubuk açıklığı θ_T ve narinlik oranı λ 'nın büyük değerleri için, yer değiştirme oranı (u_o/u_{oL}) 'nin az etkilendiği görülmektedir. Küçük çubuk açıklığı θ_T değerlerinde, her narinlik oranı λ için yer değiştirme oranının etkilendiği görülmektedir.



Şekil 5.45 : Yerel ve yerel olmayan yer değiştirme oranına u_o/u_{oL} çubuk açıklığı θ_T ve narinlik oranı λ 'nın etkisi. Ankastre-ankastre.



Şekil 5.46 : Yerel ve yerel olmayan moment oranına M_{bo}/M_{boL} narinlik oranı λ ve çubuk açıklığı θ_T 'nin etkisi. Ankastre-ankastre.

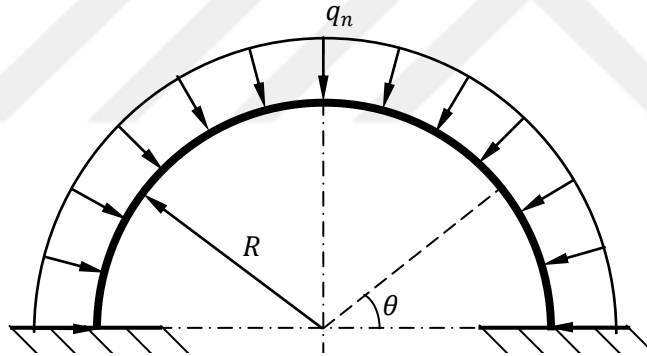
Şekil 5.46'da, çubuğun tepe noktasına ait yerel ve yerel olmayan moment oranına (M_{bo}/M_{boL}), narinlik oranı λ ve çubuk açıklığı θ_T etkisi verilmektedir. Bu şekilden, çubuk açıklığı θ_T 'nin ve narinlik oranı λ 'nın büyük değerlerinde, yerel ve yerel

olmayan moment oranının (M_{bo}/M_{boL}), çok değişmediği, θ_T ve λ 'nın büyük değerlerinde (M_{bo}/M_{boL}), değişiminin oldukça önem kazandığı anlaşılmaktadır. Her narinlik oranı λ değeri için, değişen çubuk açıklığı θ_T 'nin küçük değerlerinde, moment oranının önce hızlı bir artış ve sonra hızlı bir düşüş gösterdiği görülmektedir. Yani, çubuk narin (ince ve uzun) olduğunda, özellikle küçük θ_T değerlerinde yerel olmayan teorinin sonuçlarının oldukça büyük olduğu sonucu elde edilmiştir.

5.6 Yayılı Yüklerle Yüklü Çubuk Problemleri

Tezin bu kısmında, en genel durum için elde edilmiş olan, değişken yayılı yüklerin etkidiği değişken eğrilikli ve değişken kesitli çubuklara ait çözüm ifadeleri kullanılarak, çeşitli örnekler çözülecek ve elde edilen sonuçlar verilecektir.

5.6.1 Üniform q_n yayılı yüküyle yüklü sabit kesitli ankastre-ankastre çember eksenli çubuk



Şekil 5.47 : Normal eksen doğrultusunda üniform q_n yayılı yüküyle yüklü çember eksenli ankastre-ankastre çubuk.

Bu örnekte; sabit kesitli, çember eksenli ve ankastre-ankastre sınır koşullarındaki bir çubuk incelenmiştir (Şekil 5.47). Çubuk normal eksen doğrultusunda üniform q_n yayılı yüküyle yüküdür. θ_T açıklığına sahip çubuğun tepe noktasındaki u_o yer değiştirme değerinin analitik ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$u_o = \frac{2q_n R^2 \theta_t \left[\sin \frac{\theta_t}{4} \right]^2 \left(\begin{array}{c} EAGAR^4 \left(\theta_t - 2 \sin \frac{\theta_t}{2} \right) \\ + EI_b (GA + EAK_n) (R^2 + \gamma^2) \theta_t \\ - 2EI_b (GA - EAK_n) (R^2 + \gamma^2) \sin \frac{\theta_t}{2} \end{array} \right)}{EA \left(\begin{array}{c} -4EAGAR^4 + 4EAGAR^4 \cos \theta_t \\ + EAGAR^4 \theta_t^2 + EAGAR^4 \theta_t \sin \theta_t \\ + EI_b (GA + EAK_n) (R^2 + \gamma^2) \theta_t^2 \\ + EI_b (GA - EAK_n) (R^2 + \gamma^2) \theta_t \sin \theta_t \end{array} \right)} \quad (5.17)$$

tepe noktasındaki M_{bo} moment değerinin analitik ifadesi de aşağıdaki gibidir:

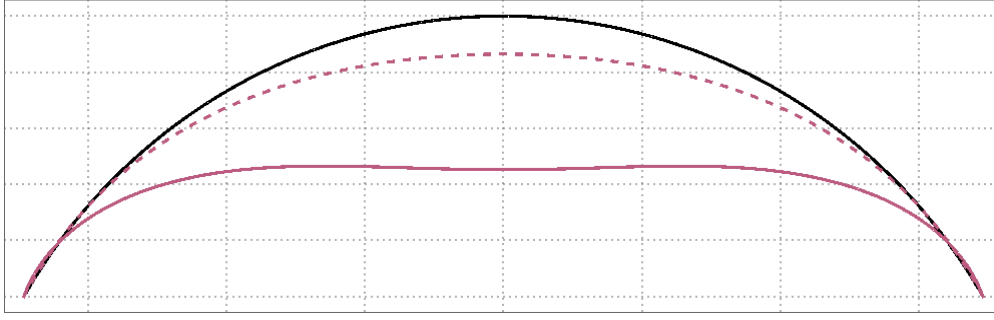
$$M_{bo} = q_n \left(\gamma^2 - \frac{\left(4EI_b GAR^4 \left(-1 + \cos \theta_t + \theta_t \sin \frac{\theta_t}{2} \right) \right)}{\left(\begin{array}{c} -4EAGAR^4 + 4EAGAR^4 \cos \theta_t \\ + EAGAR^4 \theta_t^2 + EAGAR^4 \theta_t \sin \theta_t \\ + EI_b (GA + EAK_n) (R^2 + \gamma^2) \theta_t^2 \\ + EI_b (GA - EAK_n) (R^2 + \gamma^2) \theta_t \sin \theta_t \end{array} \right)} \right) \quad (5.18)$$

5.6.2 Değişken q_n yayılı yüküyle yüklü sabit kesitli ankastre-ankastre çember eksenli çubuk

Bu örnekte, $\theta_T=120^\circ$ açıklığa sahip, sabit kesitli çember eksenli çubuğa normal eksen doğrultusunda değişken q_n yükü etkimesi durumu incelenmiştir. Çubuk, her iki ucundan da ankastre olarak mesnetlenmiştir. Narinlik oranı $\lambda=50$ ve boyut parametresi $R/\gamma=1$ olarak alınmıştır. Yayılı yükün dağılımı ise:

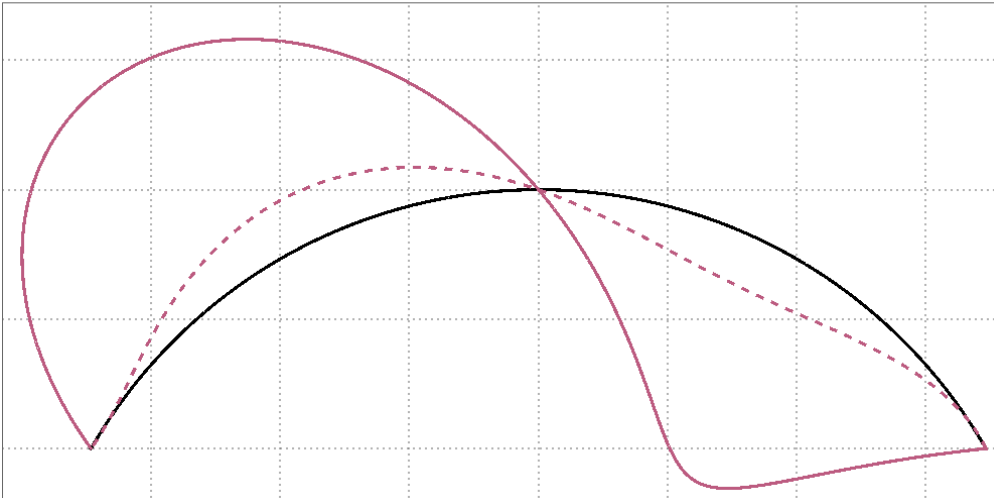
$$q_n(\theta) = \left(1 - \frac{9}{\pi^2} \theta^2 \right) q_0 \quad (5.19)$$

olarak belirlenmiştir. Bu durumda ortaya çıkan yer değiştirme, dönme açısı, moment, teğet ve normal doğrultulardaki kuvvetler, hem yerel hem de yerel olmayan teorilerle hesaplanmış ve grafikleri elde edilmiştir.



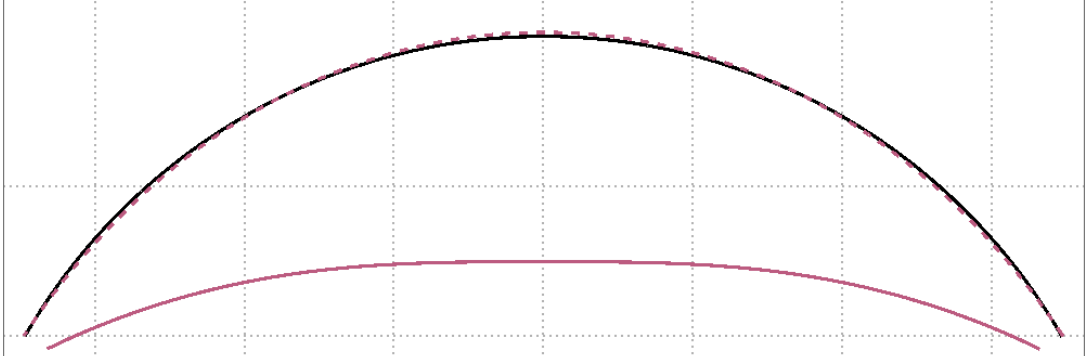
Şekil 5.48 : Değişken q_n yayılı yükü etkisindeki, sabit kesitli çember eksenli çubuğun yer değiştirme grafiği. ($\theta_T=120^\circ$, $\lambda=50$, $R/\gamma=1$, ankastre-ankastre).

Şekil 5.48’de, değişken q_n yayılı yükü etkisindeki, sabit kesitli çember eksenli çubuğun, yerel ve yerel olmayan teorilerle hesaplanmış yer değiştirme grafiği görülmektedir. Yerel olmayan teorinin sonucu sürekli çizgiyle, yerel teorininki ise kesikli çizgiyle gösterilmektedir. Sonuçların birbirinden oldukça farklı olduğu görülmektedir.



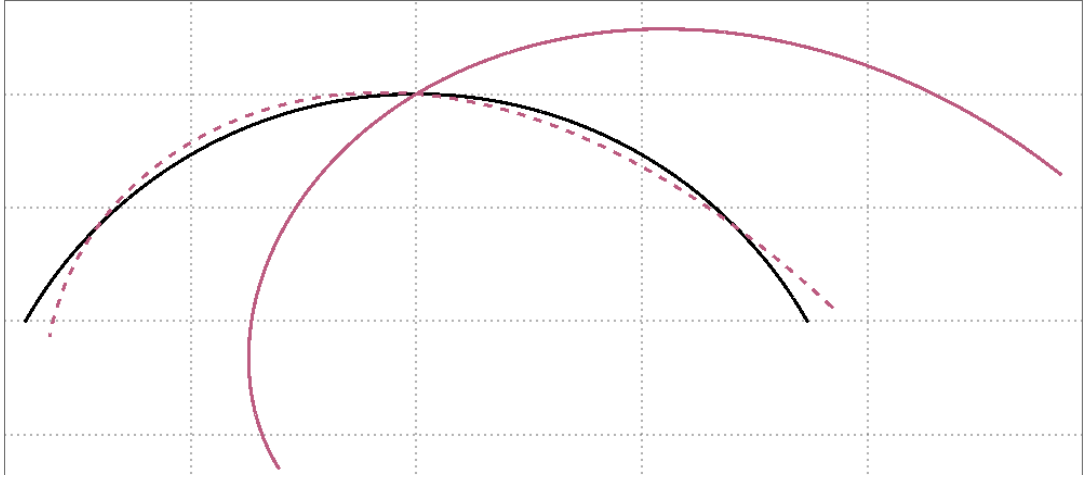
Şekil 5.49 : Değişken q_n yayılı yükü etkisindeki, sabit kesitli çember eksenli çubuğun dönme açısı grafiği. ($\theta_T=120^\circ$, $\lambda=50$, $R/\gamma=1$, ankastre-ankastre).

Şekil 5.49’da, çubuğun yerel ve yerel olmayan teorilerle hesaplanmış dönme açısı grafiği görülmektedir. Yerel olmayan teorinin sonucunun, yerel teorinin sonucundan oldukça farklı olduğu görülmektedir.



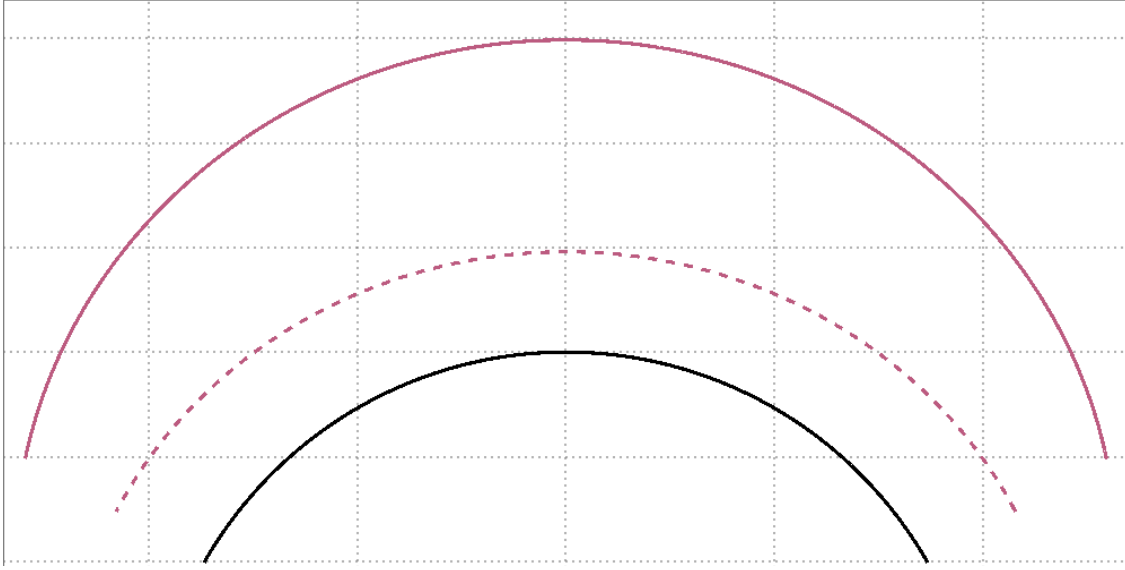
Şekil 5.50 : Değişken q_n yayılı yükü etkisindeki, sabit kesitli çember eksenli çubuğun eğilme momenti grafiği. ($\theta_T=120^\circ$, $\lambda=50$, $R/\gamma=1$, ankastre-ankastre).

Şekil 5.50’de, çubuğun, yerel ve yerel olmayan teorilerle hesaplanmış binormal (eğilme) momenti (M_b) grafiği görülmektedir. Yerel olmayan teorinin sonucunun, yerel teorinin sonucundan oldukça farklı olmasının yanı sıra, yerel teorinin moment diyagramının işaret değiştirdiği, yerel olmayan teoride ise hep aynı işaretli olduğu görülmektedir.



Şekil 5.51 : Değişken q_n yayılı yükü etkisindeki, sabit kesitli çember eksenli çubuğun normal doğrultudaki (F_n) kuvvet grafiği. ($\theta_T=120^\circ$, $\lambda=50$, $R/\gamma=1$, ankastre-ankastre).

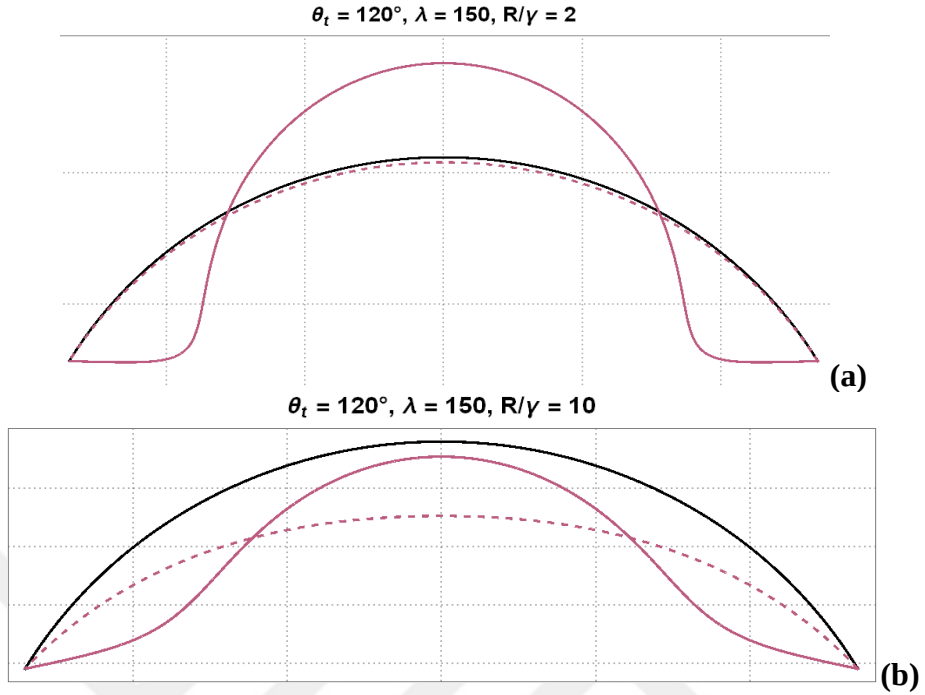
Şekil 5.51’de, çubuğun, yerel ve yerel olmayan teorilerle hesaplanmış normal (kesme) kuvvet (F_n) grafiği görülmektedir. Yerel olmayan teorinin sonucunun, yerel teorinin sonucundan oldukça farklı olmasının yanı sıra, yerel teorinin kuvvet diyagramının, çubuğun tepe noktasının sağında ve solunda kalan bölgelerde birer kez işaret değiştirdiği, yerel olmayan teoride ise hep aynı bölgede olduğu görülmektedir.



Şekil 5.52 : Değişken q_n yayılı yükü etkisindeki, sabit kesitli çember eksenli çubuğun teğetsel doğrultudaki (F_t) kuvvet grafiği. ($\theta_T=120^\circ$, $\lambda=50$, $R/\gamma=1$, ankastre-ankastre).

Şekil 5.52’de, çubuğun, yerel ve yerel olmayan teorilerle hesaplanmış teğetsel kuvvet (F_t) grafiği görülmektedir. Yerel olmayan teorinin sonucu, yerel teorinin sonucundan oldukça farklıdır. Yerel ve yerel olmayan teorilerin kuvvet diyagramlarının aynı karakterde olduğu görülmektedir.

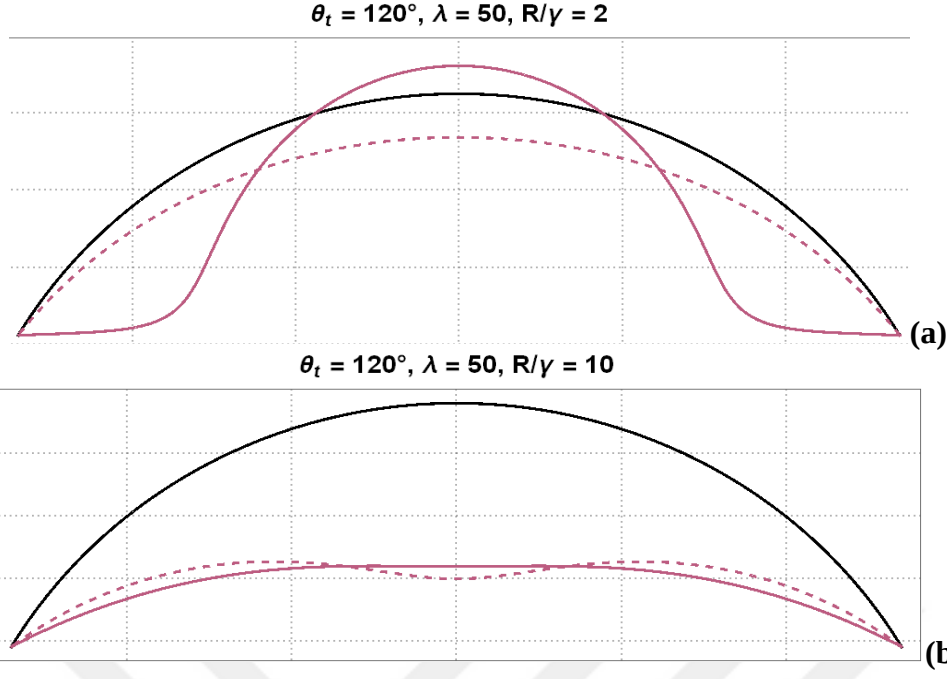
5.6.3 Üniform q_n yayılı yüküyle yüklü sabit kesitli mafsalsal-mafsalsal çember eksenli çubuk



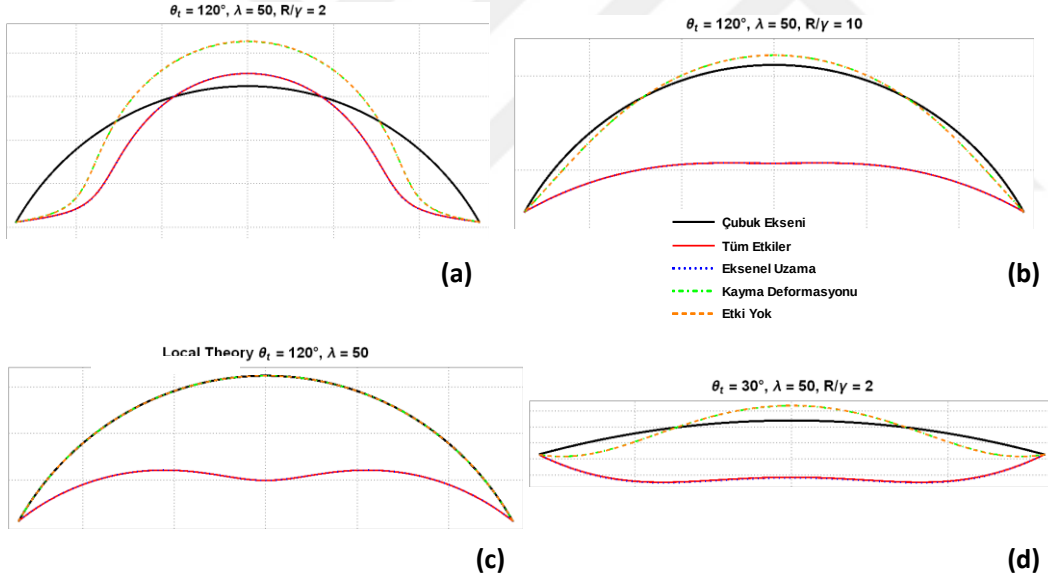
Şekil 5.53 : Sabit kesitli çember eksenli çubuğun yerel (kırmızı, kesikli çizgi) ve yerel olmayan (kırmızı sürekli çizgi) yer değiştirmeleri ($\lambda = 150$), mafsalsal-mafsalsal.

Bu bölümde, sabit kesitli çember eksenli mafsalsal-mafsalsal sınır koşullarına sahip bir çubuk incelenmektedir. Çubuk üniform q_n yayılı yüküyle yüklüdür. Şekil 5.53(a) ve Şekil 5.53 (b) de çubuk açıklığı $\theta_T = 120^\circ$, narinlik oranı $\lambda = 150$ olan çubuğun boyut parametresi $R/\gamma = 2$ ve $R/\gamma = 10$ değerleri için yer değiştirme diyagramları verilmektedir. Şekilde; siyah sürekli çizgi, kırmızı sürekli çizgi ve kırmızı kesikli çizgi sırasıyla şekil değiştirmemiş çubuk eksenini, yerel olmayan yer değiştirme ve klasik yer değiştirmeyi göstermektedir. Şekil 5.53 (a)'dan görülebildiği gibi, tepe noktasındaki yer değiştirmeler ve eğrilerin karakteristikleri farklıdır. Şekil 5.53 (b)'de görüldüğü üzere boyut parametresi (R/γ) arttıkça bu fark azalmaktadır.

Şekil 5.54 narinlik oranı $\lambda = 50$ olan çubuğun yerel ve yerel olmayan yer değiştirmelerini göstermektedir. Şekil 5.53 ve Şekil 5.54 kıyaslandığında azalan narinlik oranıyla yer değiştirmeler arasındaki farkın azaldığı görülmektedir.



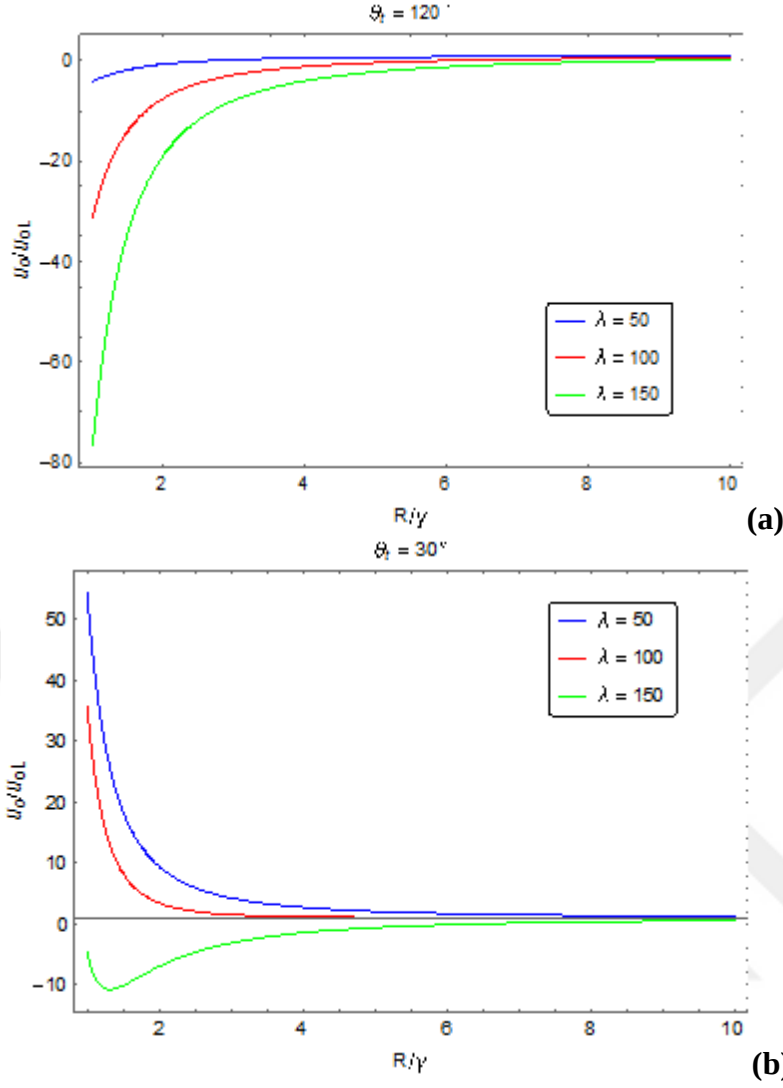
Şekil 5.54 : Sabit kesitli çember eksenli çubuğun yerel (kırmızı,kesikli çizgi) ve yerel olmayan (kırmızı sürekli çizgi) yer değiştirmeleri ($\lambda = 50$), mafsalsal-mafsalsal.



Şekil 5.55 : Yerel ve yerel olmayan teoriyle elde edilen yer değiştirmelere, eksenel uzama ve kayma deformasyonunun etkileri. Mafsalsal-mafsalsal.

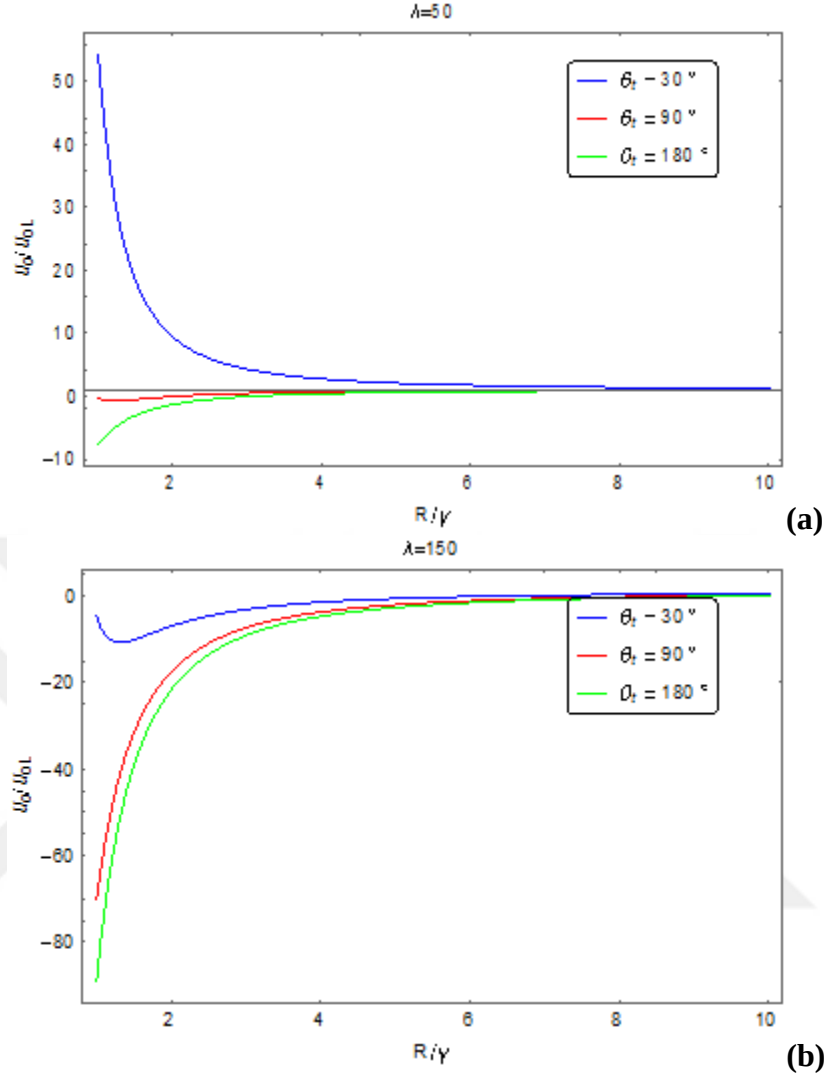
Şekil 5.55, narinlik oranı $\lambda = 50$ olan çubuk için yerel ve yerel olmayan teoriyle elde edilen yer değiştirmelere, eksenel uzama ve kayma deformasyonunun etkilerini göstermektedir. Yer değiştirmeler, kayma deformasyonu etkisini dahil eden durum için ve bütün etkileri ihmal eden durum için hemen hemen aynı olmaktadır. Eksenel uzamayı dahil eden durum ile bütün etkileri dahil eden durum da hemen hemen aynı sonuçları vermektedir. Çubuk kısa ve kalın ise (küçük narinlik oranı), eksenel uzama

ve kayma deformasyonu etkilerinin dahil olup olmaması durumları arasındaki fark beklenildiği gibi önemli olacaktır. Boyut parametresi R/γ arttığında, durumlar arasındaki fark önemli olmakta ve yer değiştirme karakteristikleri farklı hale gelmektedir (Şekil 5.55a-b). Uzun ve ince çubuk (büyük narinlik oranı) için, durumlar arasındaki fark beklenildiği gibi ihmal edilebilir hale gelecektir. Şekil 5.55 (c) klasik teoriyle elde edilen yer değiştirmeleri dört durum için göstermektedir. Yalnızca kayma deformasyonunu dahil eden ve bütün etkileri ihmal eden durumlar için hemen hemen hiç deformasyon gözlenmemiştir. Bununla beraber, bu durumlar için yerel olmayan teoriyle elde edilen yer değiştirmeler sıfır değildir. Şekil 5.55 (d), açıklığı $\theta_T = 30^\circ$ olan çubukta bütün durumlar için yer değiştirmeleri göstermektedir. Farklı durumlar için yer değiştirmeler arasındaki fark daha büyük olmakta ve eğri formları küçük çubuk açıklığına sahip çubuklar için kesinlikle farklı olmaktadır.



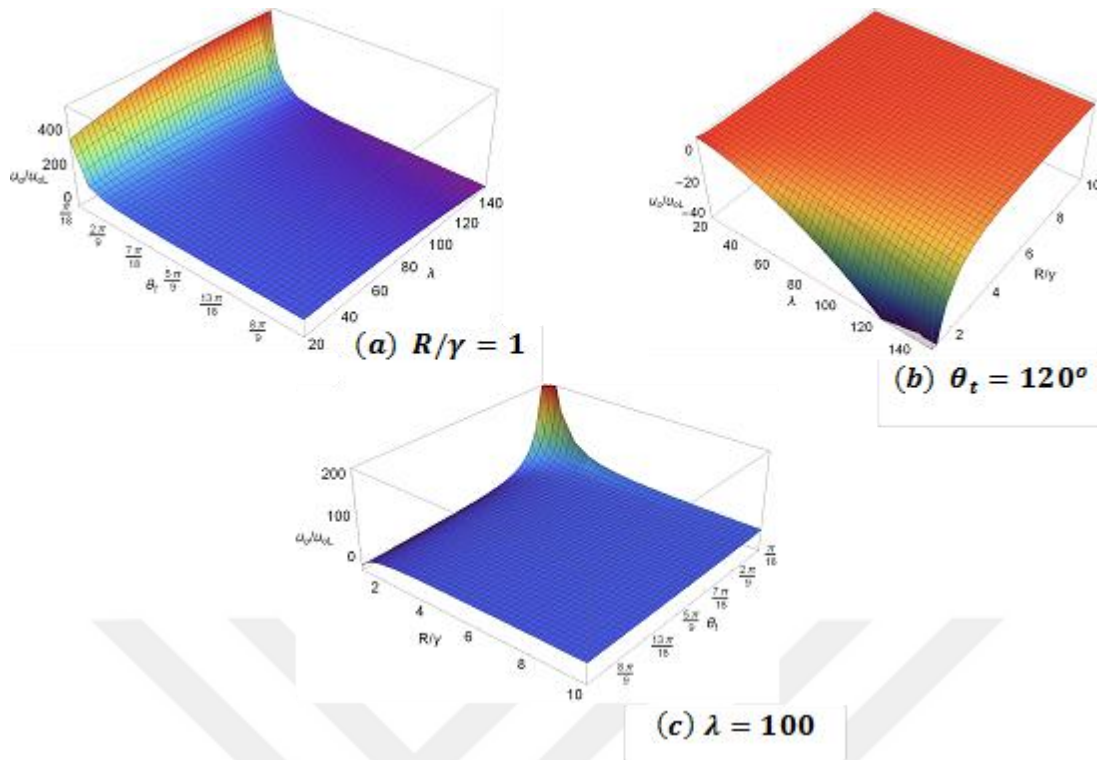
Şekil 5.56 : Yer değıştirme oranı (u_o/u_{oL}) - boyut parametresi (R/γ) ve farklı narinlik oranları (λ) için eğriler. (a) $\theta_T = 120^\circ$, (b) $\theta_T = 30^\circ$, mafsals-mafsals.

Şekil 5.56’da, yerel ve yerel olmayan teoriyle elde edilen yer değıştirme oranlarının (u_o/u_{oL}), boyut parametresi (R/γ) ile değışimi gösterilmiştir. Eğriler farklı narinlik oranları (λ) için çizilmiştir. Şekil 5.56(a)’da çubuk açıklığı $\theta_T = 120^\circ$ ve Şekil 5.56(b)’de çubuk açıklığı $\theta_T = 30^\circ$ dir. Yerel ve yerel olmayan teoriyle elde edilen yer değıştirme eğrileri çubuk açıklığının daha büyük değeri için tamamıyla farklı olmaktadır (Şekil 5.56a). Azalan narinlik oranıyla birlikte yer değıştirme eğrileri benzer olmaktadır. Yer değıştirme oranı, nispeten büyük çubuk açıklığı θ_T değeri için, boyut parametresi R/γ ’nın azalan değeriinde negatif yönde artmaktadır. Daha küçük çubuk açıklığı değeri için (Şekil 5.56b) klasik ve yerel olmayan teoriyle elde edilen yer değıştirme eğrileri benzerdir. Ancak, nispeten daha büyük narinlik oranı için eğrilerin biçimleri farklı olmaktadır.



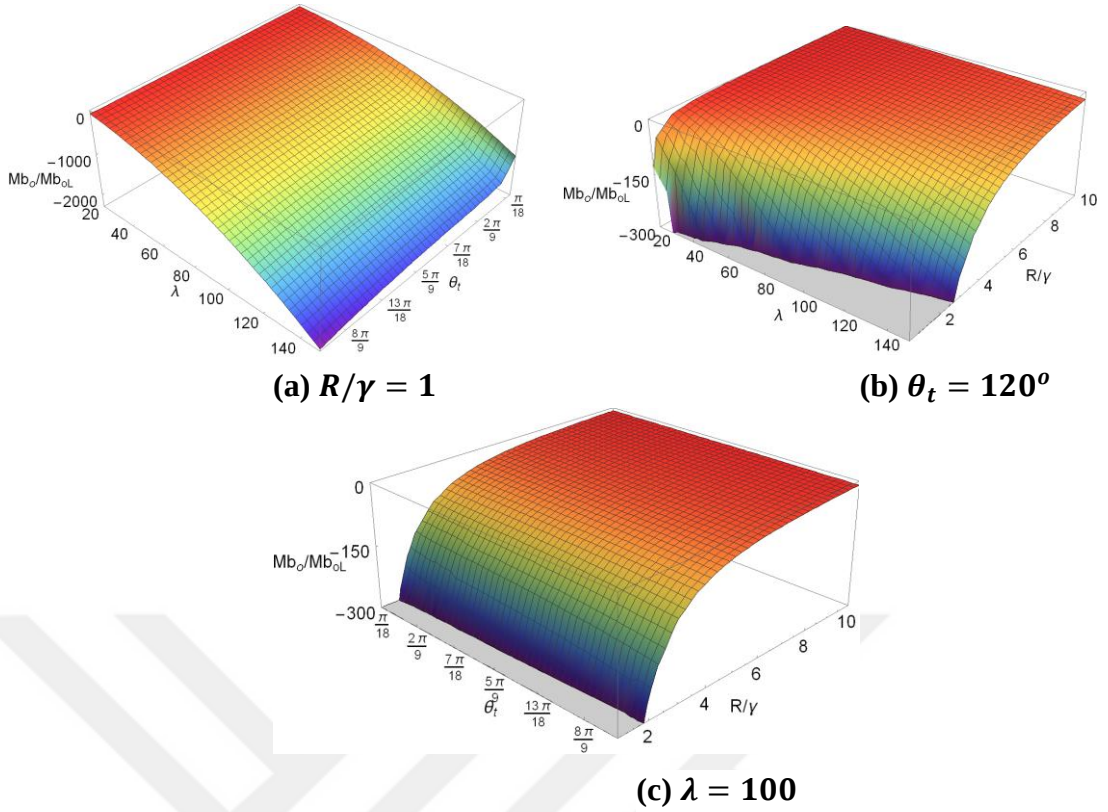
Şekil 5.57 : Yer değiştirme oranının (u_o/u_{oL}) – boyut parametresine (R/γ) ile değişimi- farklı çubuk açıklığı (θ_T) için eğriler. (a) $\lambda = 50$, (b) $\lambda = 150$, mafsal-mafsal.

Şekil 5.57 klasik ve yerel olmayan teoriyle elde edilen yer değiştirmelerin oranının (u_o/u_{oL}), boyut parametresine (R/γ) göre değişimini göstermektedir. $\lambda = 50$ (Şekil 5.57a) ve $\lambda = 150$ (Şekil 5.57b). Eğriler farklı çubuk açıklığı (θ_T) değerleri için çizilmiştir. Daha küçük narinlik oranı ve daha büyük çubuk açıklığı için, klasik ve yerel olmayan teoriyle elde edilen yer değiştirme eğrileri arasında farklı karakteristikler gözlenmiştir. (Şekil 5.57a). Uzun ve ince bir çubuk (narin) için, daha küçük çubuk açıklığında da yer değiştirme eğrilerinin karakteristikleri farklıdır. (Şekil 5.57b).



Şekil 5.58 : Boyut parametresi, narinlik oranı ve çubuk açıklığının yer değiştirme oranına etkileri. Mafsal-mafsal.

Şekil 5.58 üniform q_n yayılı yüküyle yüklü mafsal-mafsal sınır koşullarındaki çubuğun yer değiştirme oranına boyut parametresi, narinlik oranı ve çubuk açıklığının etkilerini göstermektedir. Artan narinlik oranıyla çubuk açıklığının etkisi artmakta ve yer değiştirme oranı u_o/u_{oL} daha büyük çubuk açıklığı ve daha büyük narinlik oranı için negatif olmaktadır (Şekil 5.58a). Yer değiştirme oranının negatif olmasının anlamı klasik ve yerel olmayan teoriyle elde edilen yer değiştirme eğrisinin Şekil 5.58(a)'da görüldüğü gibi farklı olmasıdır. $\theta_T = 120^\circ$ olan çubukta yer değiştirme oranına boyut parametresinin etkisi artan narinlik oranıyla artmaktadır ve yer değiştirme oranı u_o/u_{oL} daha küçük boyut parametresi R/γ ve daha büyük narinlik oranı için negatif olmaktadır. (Şekil 5.58b). Narinlik oranı $\lambda = 100$ olan çubuğun yer değiştirme oranı u_o/u_{oL} , boyut parametresi R/γ 'nin ve açıklık değeri θ_T 'nin küçük değerleri için artmaktadır (Şekil 5.58c)



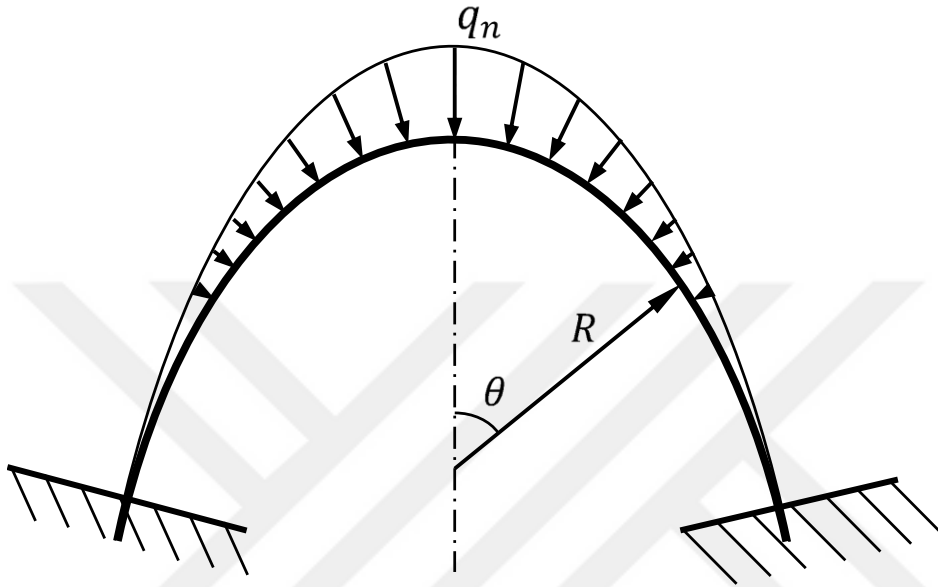
Şekil 5.59 : Boyut parametresi, narinlik oranı ve çubuk açıklığının moment oranına etkileri. Mafsal-mafsal.

Şekil 5.59, mafsal-mafsal mesnetli çubuğun moment oranına, boyut parametresi, narinlik oranı ve çubuk açıklığının etkisini göstermektedir. $R/\gamma = 1$ olan çubuğun moment oranı M_{b_o}/M_{b_oL} , azalan çubuk açıklığı θ_T değeriyle bütün λ değerleri için artmaktadır (Şekil 5.59a). Moment oranı, her açıklık değeri için, λ değerinin değişiminden oldukça etkilenmektedir. Açıklığı $\theta_T = 120^\circ$ olan çubuğun moment oranı, daha büyük λ ve daha küçük R/γ değerleri için hızla değişmektedir. (Şekil 5.59b). Her λ değeri için, R/γ 'nın büyük değerlerinde, moment oranı daha az değişmektedir. Moment oranı M_{b_o}/M_{b_oL} çubuk açıklığı ve narinlik oranının bütün değerleri için boyut parametresi R/γ 'dan etkilenmektedir (Şekil 5.59c). Boyut parametresi R/γ 'nın her değeri için değişen çubuk açıklığıyla birlikte moment oranı biraz değişmektedir.

Üniform q_n yayılı yükü ile yüklü mafsal-ankastre çubuğun yer değiştirme ve moment oranlarına, narinlik oranının, çubuk açıklığının ve boyut parametresinin etkilerinin, mafsal-mafsal çubuktaki etkiler ile benzer karakteristikler gösterdiği için, detaylı inceleme burada verilmemiştir.

5.6.4 Değişken q_n yayılı yüküyle yüklü değişken kesitli parabol eksenli çubuk

Bu örnekte, $\theta_T=120^\circ$ açıklığa sahip, değişken kesitli parabol eksenli çubuğa normal eksen doğrultusunda değişken q_n yayılı yükünün etkimesi durumu incelenecektir. Ankastre-ankastre mesnetli bu çubuğa ait narinlik oranı $\lambda=100$ ve boyut parametresi $R/\gamma=1$ olarak alınmıştır. (Şekil 5.60).



Şekil 5.60 : Değişken kesitli parabol eksenli normal eksen doğrultusunda değişken q_n yayılı yükünün etkisindeki ankastre-ankastre çubuk.

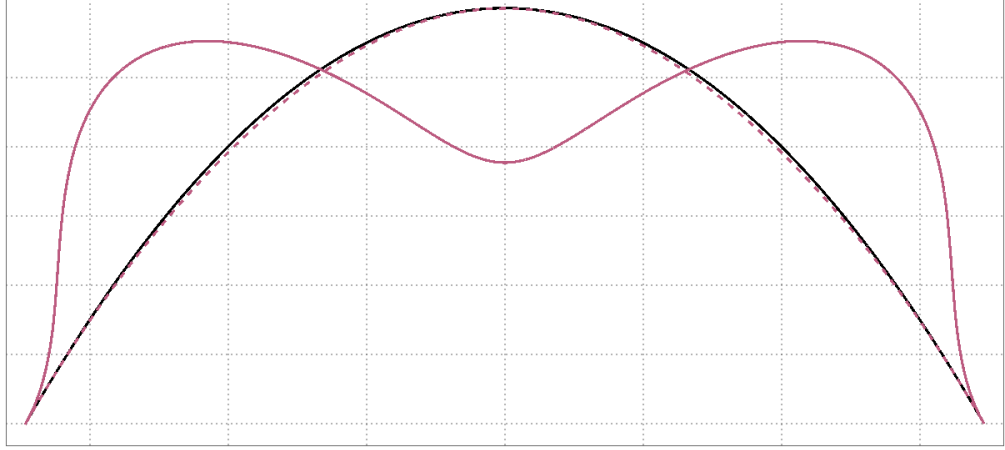
Çubuğun eğrilik yarıçapı, atalet momenti ve kesit alanı;

$$R(\theta) = \frac{R}{(\cos \theta)^3} ; \quad I_b(\theta) = \frac{I_b}{\cos \theta} ; \quad A(\theta) = \frac{A}{\cos \theta} \quad (5.20)$$

olarak alınmıştır. Yayılı yükün dağılımı ise aşağıdaki ifadeyle bilinmektedir:

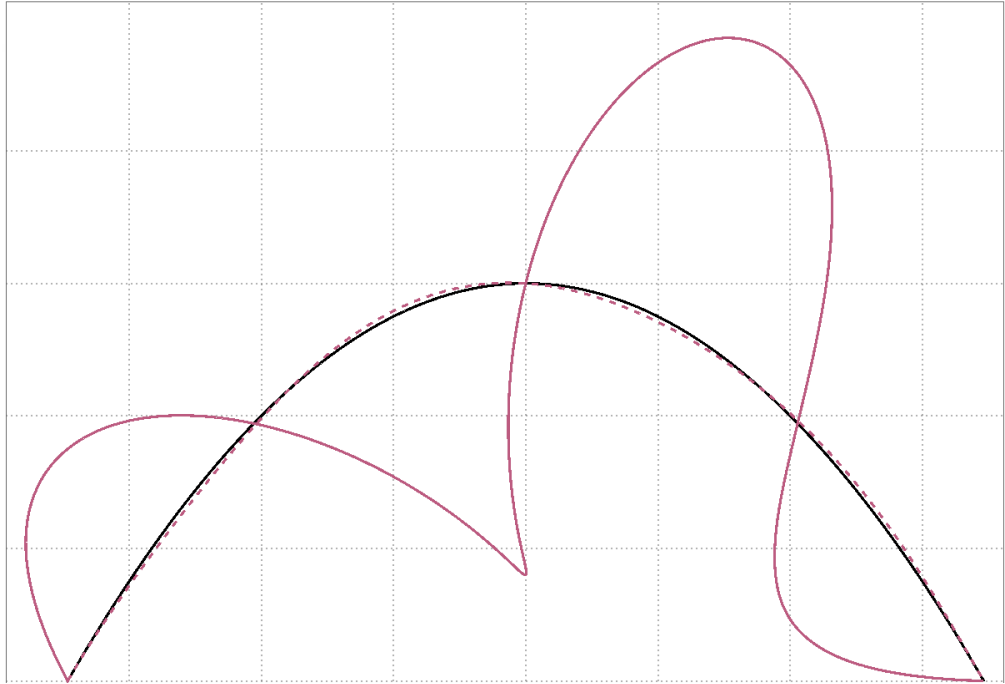
$$q_n(\theta) = \left[1 - \left(\frac{\theta}{\theta_t/2} \right)^2 \right] q_0 \quad (5.21)$$

Bu durumda ortaya çıkan yer değiştirme, dönme açısı, moment, teğet ve normal doğrultulardaki kuvvetler, hem yerel hem de yerel olmayan teorilerle hesaplanmış ve grafikleri elde edilmiştir. Verilen şekillerde, siyah sürekli çizgiyle şekil değiştirmemiş çubuk eksen, kırmızı sürekli çizgiyle yerel olmayan teorinin sonuçları ve kırmızı kesikli çizgiyle de yerel teorinin sonuçları verilmektedir.

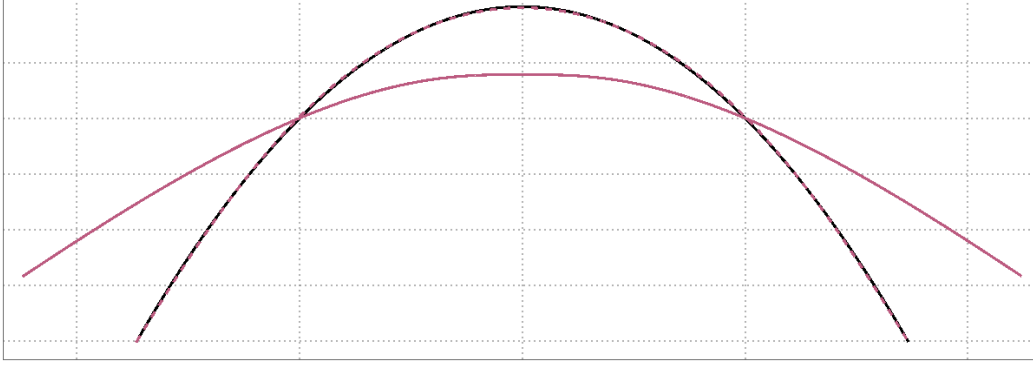


Şekil 5.61 : Değişken q_n yayılı yükü etkisindeki, değişken kesitli parabol eksenli çubuğun yer değiştirme grafiği. ($\theta_T = 120^\circ$, $\lambda=100$, $R/\gamma=1$, ankastre-ankastre).

Şekil 5.61’de verilen yer değiştirme grafiğinden, yerel ve yerel olmayan teorilerin sonuçlarının oldukça farklı olduğu, yerel teoriyle hesaplanan sonuçların, nano boyutlardaki problemler için yetersiz kalacağı görülmektedir. Yerel ve yerel olmayan teorilerin grafiklerinin karakter olarak farklı olduğu da dikkat çekmektedir. Şekil 5.62’de, çubuğun dönme açısı grafiği verilmektedir. Yerel ve yerel olmayan teorilerin sonuçlarının oldukça farklı olduğu görülmektedir.

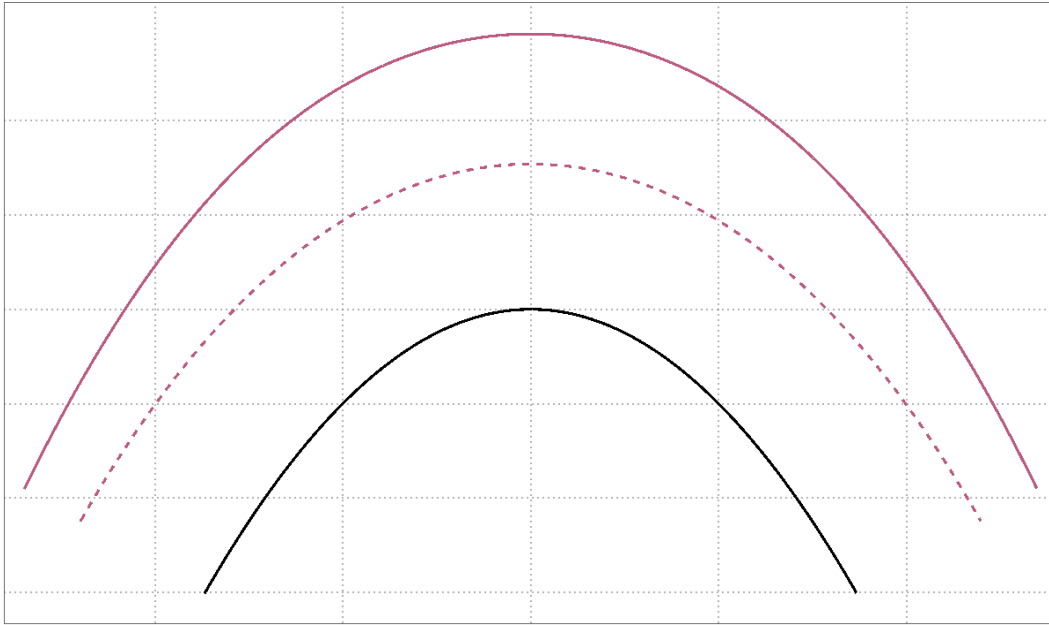


Şekil 5.62 : Değişken q_n yayılı yükü etkisindeki, değişken kesitli parabol eksenli çubuğun dönme açısı grafiği. ($\theta_T = 120^\circ$, $\lambda=100$, $R/\gamma=1$, ankastre-ankastre).



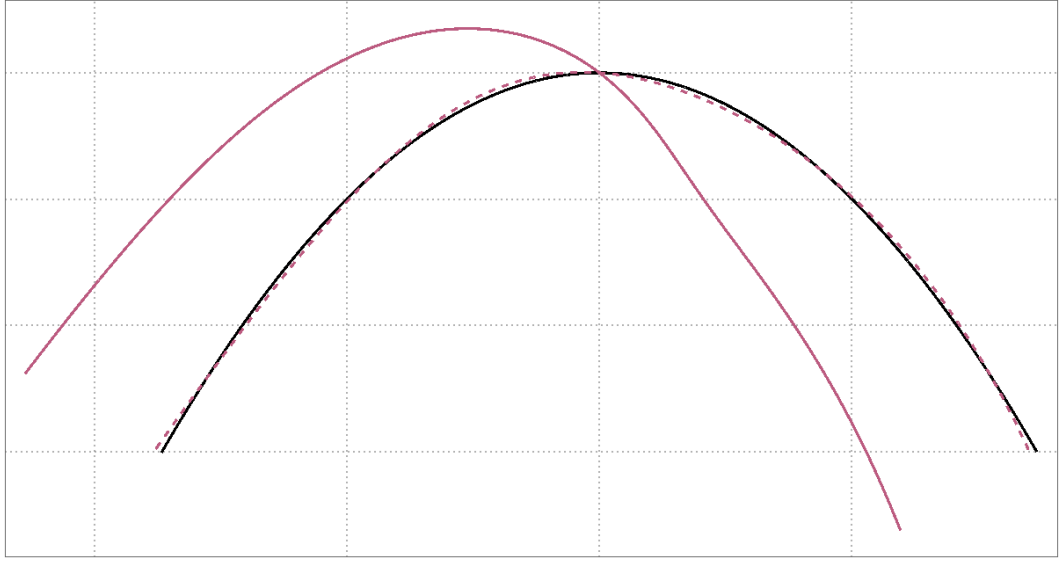
Şekil 5.63 : Değişken q_n yayılı yükü etkisindeki, değişken kesitli parabol eksenli çubuğun eğilme momenti grafiği. ($\theta_T = 120^\circ$, $\lambda=100$, $R/\gamma=1$, ankastre-ankastre).

Şekil 5.63’de, çubuğa ait eğilme momenti diyagramları görülmektedir. Burada, yerel teoriyle hesaplanan değerlerin ihmal edilecek mertebelerde kalırken, yerel olmayan teorinin sonuçlarının önemli ölçüde farklı olduğu görülmektedir. Bu farklılık, boyut parametresi R/γ değerinin büyümesiyle ortadan kalkmaktadır.



Şekil 5.64 : Değişken q_n yayılı yükü etkisindeki, değişken kesitli parabol eksenli çubuğun teğet doğrultusundaki kuvvet grafiği. ($\theta_T = 120^\circ$, $\lambda=100$, $R/\gamma=1$, ankastre-ankastre).

Şekil 5.64’de, teğet doğrultusundaki iç kuvvetin grafiği verilmektedir. Burada, her iki teoriyle çizilen grafiğin benzer karakteristikte olduğu fakat değerler arasında önemli ölçüde fark olduğu görülmektedir.



Şekil 5.65 : Değişken q_n yayılı yükü etkisindeki, değişken kesitli parabol eksenli çubuğun normal doğrultusundaki kuvvet grafiği .($\theta_T = 120^\circ$, $\lambda=100$, $R/\gamma=1$, ankastre-ankastre).

Şekil 5.65’de, çubuğa ait normal doğrultudaki iç kuvvetin diyagramları görülmektedir. Burada, her iki teorinin sonuçları arasında önemli karakteristik ve değer farklılığı vardır. Bu farklılık, boyut parametresi R/γ değerinin artmasıyla ortadan kalkmaktadır.



6. ÇUBUKLARIN DÜZLEM İÇİ DİNAMİK PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ VE DAVRANIŞA ETKİ EDEN PARAMETRELERİN İNCELENMESİ

Yerel olmayan çubuk teorisinin, düzlemsel eğri eksenli çubukların kendi düzlemlerindeki titreşimlerini ifade eden denklemler (3.97)-(3.102) denklemleriyle verilmektedir. Denklemlerde eğilme momentinin yanı sıra, hem eksenel kuvvetin hem de kayma şekil değiştirmesinin yerel olmayan etkileri göz önüne alınmaktadır. Dönme eylemsizliği etkisinin de yerel olmayan etkisi denklemlerde yer almaktadır. Elde edilen denklem takımı, değişken eğrilikli ve değişken kesitli çubuklar için, değişken katsayılı birinci mertebeden lineer diferansiyel denklem takımıdır. Bu diferansiyel denklem takımının, başlangıç değerleri yöntemiyle kesin çözümünün elde edilmesi mümkün değildir. Ancak sabit katsayılı diferansiyel denklem takımı olan denklem (3.124)-(3.129) için, başlangıç değerleri yöntemiyle kesin analitik çözüm elde edilmesi mümkündür. Bu durum, sabit kesitli çember eksenli çubuğa denk gelmektedir.

6.1 Çember Eksenli Sabit Kesitli Çubukların Titreşim Problemlerinin Çözümü

Yerel olmayan çubuk teorisiyle nano boyuttaki çember eksenli, sabit kesitli çubukların sönümsüz serbest titreşimlerini ifade eden diferansiyel denklemler (3.124)-(3.129) denklemleriyle verilmektedir. Bu denklem takımının başlangıç değerleri yöntemiyle kesin çözümü de;

$$\mathbf{y}(\theta) = e^{\mathbf{A}\theta} \mathbf{y}_o \quad (6.1)$$

olarak bilinmektedir (Tüfekci ve Arpacı, 1998; Tüfekci, 2001). Burada, $\mathbf{y}_o$ referans koordinatındaki başlangıç değerleri vektörü, $\mathbf{A}(\theta)$ katsayılar matrisidir ve bu matrisin elemanları (3.130)-(3.142) denklemleriyle bilinmektedir. Başlangıç değerleri vektörü $\mathbf{y}_o$ değerleri, sınır şartları yardımıyla elde edilecektir. Çubuğun her iki ucundaki mesnet şartına bağlı olarak ilgili denklemler aşağıdaki gibi yazılmalıdır:

Mafsallı uç için: $w(\theta_A) = 0$; $u(\theta_A) = 0$; $M_b(\theta_A) = 0$;

Ankastre uç için: $w(\theta_A) = 0$; $u(\theta_A) = 0$; $\Omega_b(\theta_A) = 0$;

Serbest uç için: $M_b(\theta_A) = 0$; $F_t(\theta_A) = 0$; $F_n(\theta_A) = 0$;

Her iki uç için yazılan toplam 6 sınır şartından, başlangıç değerleri vektörünün 6 bileşeni çözülecektir. Ancak, sınır şartlarından elde edilen denklemler homojen denklem takımı oluşturmaktadır. Bu homojen denklem takımının sıfırdan farklı çözümünün olması için katsayılar matrisinin determinantının sıfır olması gerekmektedir. Buradan elde edilecek denklemin çözümü, frekans değerlerini vermektedir.

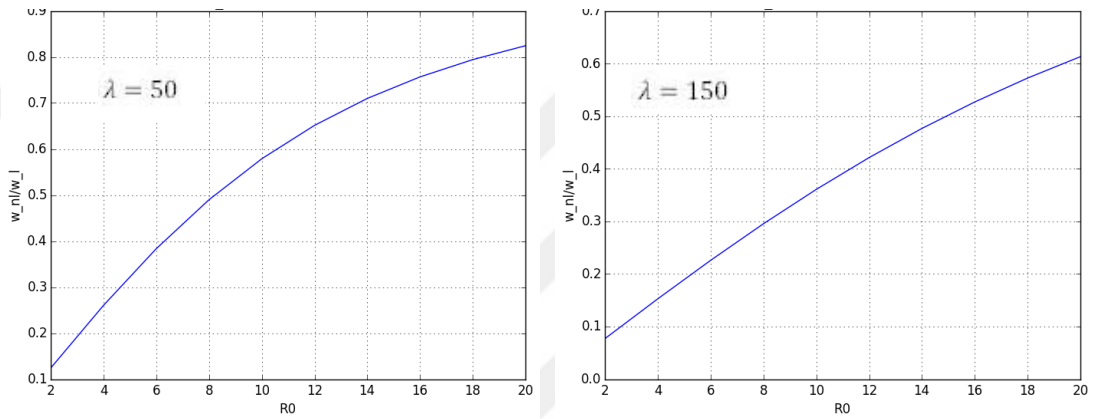
Ayrıca, elde edilen frekanslar yardımıyla, denklemler, değişkenlerden birine göre normalize edilerek mod şekilleri de elde edilmiş ve mod şekilleri çizilmiştir.

Yazılmış olan bilgisayar kodlarıyla, çeşitli çubuk geometrileri ile ilgili problemler çözülmüştür. Titreşim problemlerinin çözümünde şu parametreler mevcuttur:

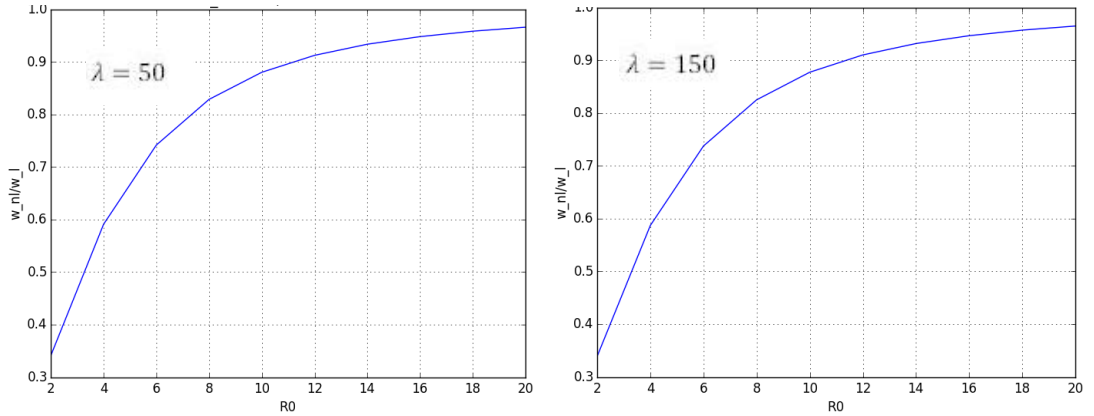
1. Çubuğun toplam açıklığı: Çubuk açıklığı için, 10° 'den 180° 'ye kadar çeşitli açıklıklar alınmıştır.
2. Mesnetleme durumu: Ankastre-ankastre, mafsallı-ankastre, mafsallı-mafsallı, ankastre-serbest ve serbest-serbest mesnetleme durumları incelenmiştir.
3. Narinlik oranı ($\lambda = R \theta_T / \sqrt{I/A}$), olarak tarif edilen narinlik oranı değeri için, nispeten kalın bir geometriden ($\lambda = 50$), ince bir geometriye kadar ($\lambda = 150$) çeşitli durumlar ele alınmıştır.
4. Boyut parametresi: R/γ için 1'den 10'a kadar değişen değerler alınmıştır. Burada γ yerel olmayan boyut faktörünü simgelemektedir. Bu faktör, küçüklüğü ifade etmektedir. ($\gamma = a.e_0$).
5. Mod sayısı: Çubukların ilk dört moduna ait frekans değerleri ve mod şekilleri elde edilmiştir.
6. Etkiler: Denklemlere eksenel uzama, kayma şekil değiştirmesi ve dönme eylemsizliği etkileriyle, eğilme momentinin, kesme ve eksenel kuvvetlerinin yerel olmayan etkileri de dahil edilmiştir. Bu etkilerin önemini belirlemek amacıyla, denklemlerde, bu etkiler tek başlarına veya çeşitli kombinasyonlarıyla gözönüne alınarak, çözümler elde edilmiştir.

Yazılan bilgisayar kodu, tüm bu parametrelerin doğal frekanslara olan etkilerini incelemeye uygun olacak şekilde geliştirilmiştir. Ayrıca bilgisayar kodu, çeşitli çubuk açıklıkları, mesnetleme şartları, narinlik oranı, boyut parametresi, mod sayısı ve söz konusu etkiler için frekans değerlerini hesaplayarak, ilgili mod şekillerini çizecek şekilde oluşturulmuştur.

Öncelikle, çember eksenli sabit kesitli ve açıklığı $\theta_T = 30^\circ$ ve $\theta_T = 120^\circ$ derece ve narinlik oranları ($\lambda = 50$ ve $\lambda = 150$) olan çubukların yerel ve yerel olmayan frekans oranlarının ω_{nl}/ω_l boyut parametresi R/γ ile değişimi incelenmiştir. Boyut parametresi $\gamma=2$ olarak alınmıştır.



Şekil 6.1 : Çember eksenli sabit kesitli çubuğun yerel ve yerel olmayan frekans oranlarının ω_{nl}/ω_l boyut parametresi R/γ ile değişimi ($\theta_T = 30^\circ$ ve $\lambda = 50, 150$).



Şekil 6.2 : Çember eksenli sabit kesitli çubuğun yerel ve yerel olmayan frekans oranlarının ω_{nl}/ω_l boyut parametresi R/γ ile değişimi ($\theta_T = 120^\circ$ ve $\lambda = 50, 150$).

Şekil 6.1 ve 6.2'den görüldüğü gibi küçük çubuk açıklığı değerlerinde, narinlik oranı arttıkça, frekans oranının boyut parametresinden daha çok etkilendiği, büyük açıklık değerlerinde ise narinlik oranının değişiminin etkisinin daha az olduğu görülmektedir.

6.1.1 Çember eksenli sabit kesitli çubukların mod şekilleri

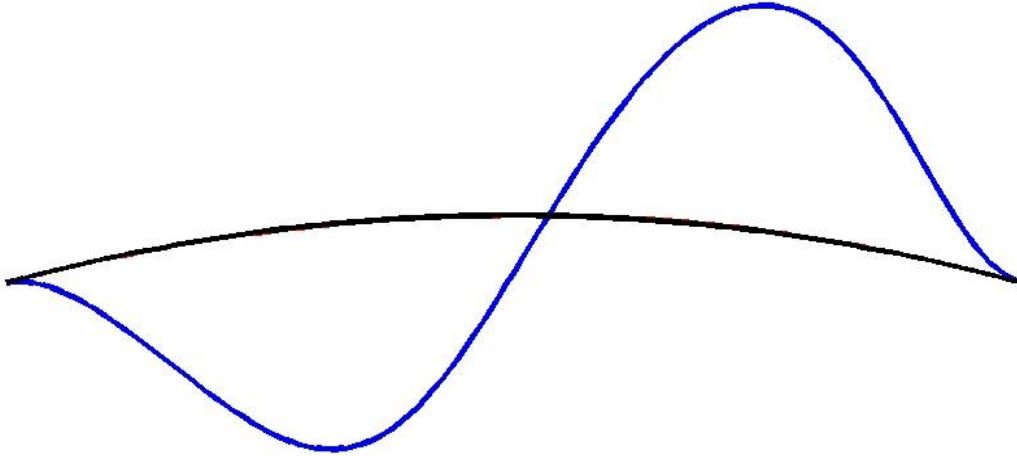
Ankastre-ankastre mesnetli çubuğun, çeşitli açıklık, narinlik ve boyut parametresi değerleri için frekansları, hem yerel olmayan hem de yerel teorinin verdiği denklemler kullanılarak elde edilmiştir. Burada verilen tüm şekillerde, siyah çizgiyle gösterilen eğri, şekil değiştirmemiş çubuğun eksenini, kırmızıyla gösterilen çizgi, yerel olmayan teoriden elde edilen mod şeklini ve maviyle gösterilen çizgi de yerel teorinin verdiği mod şeklini göstermektedir.

Şekil 6.3’de, açıklığı $\theta_T = 30^\circ$ ve narinlik oranı $\lambda = 150$ olan çubuğun birinci mod şekilleri verilmektedir.



Şekil 6.3 : Ankastre-ankastre mesnetli çubuğun birinci mod şekli
($\theta_T = 30^\circ$, $\lambda = 150$, $\frac{R}{\gamma} = 1$).

Şekil 6.4’de, açıklığı $\theta_T = 30^\circ$ ve narinlik oranı $\lambda = 150$ olan çubuğun ikinci mod şekilleri verilmektedir. Yerel ve yerel olmayan teorilerin ikinci mod şekilleri birbiriyle aynıdır.



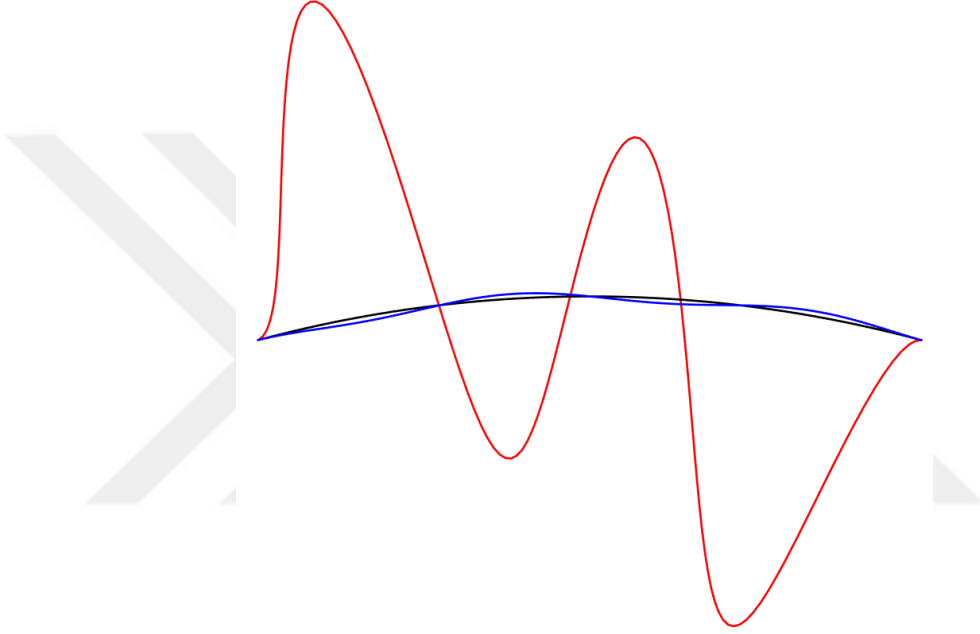
Şekil 6.4 : Ankastre-ankastre mesnetli çubuğun ikinci mod şekli
($\theta_T = 30^\circ$, $\lambda = 150$, $\frac{R}{\gamma} = 1$).

Şekil 6.5’de, açıklığı $\theta_T = 30^\circ$ ve narinlik oranı $\lambda = 150$ olan çubuğun üçüncü mod şekilleri verilmektedir. Bu şekilden, yerel teorinin hesapladığı mod şeklinin, eğilme şekil değiştirmesi baskın şekilde olduğu, buna karşın, yerel olmayan teorinin hesapladığı mod şeklinin ise, eksenel şekil değiştirmenin daha baskın olarak, eğilme şekil değiştirmesinden olduğu görülmektedir.



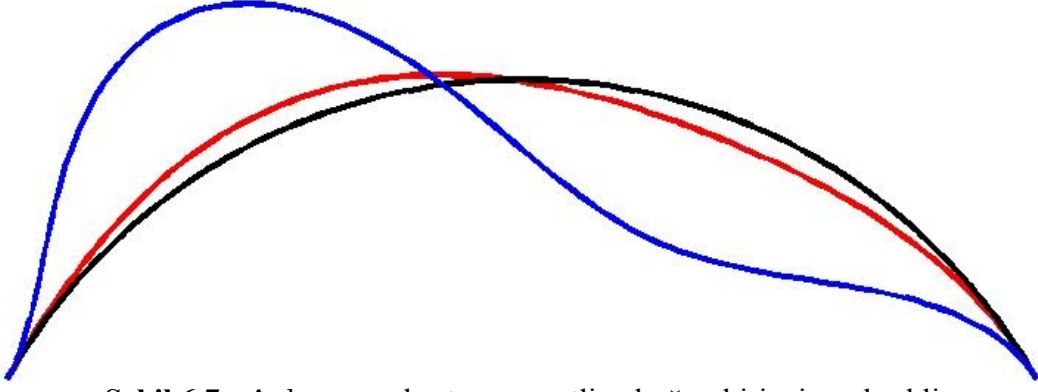
Şekil 6.5 : Ankastre-ankastre mesnetli çubuğun üçüncü mod şekli
 $(\theta_T = 30^\circ, \lambda = 150, \frac{R}{Y} = 1)$.

Şekil 6.6’da, aynı çubuğun dördüncü mod şekilleri verilmektedir. Bu şekilden, yerel ve yerel olmayan teorilerin hesapladığı mod şekillerinin birbirlerine benzediği görülmektedir.

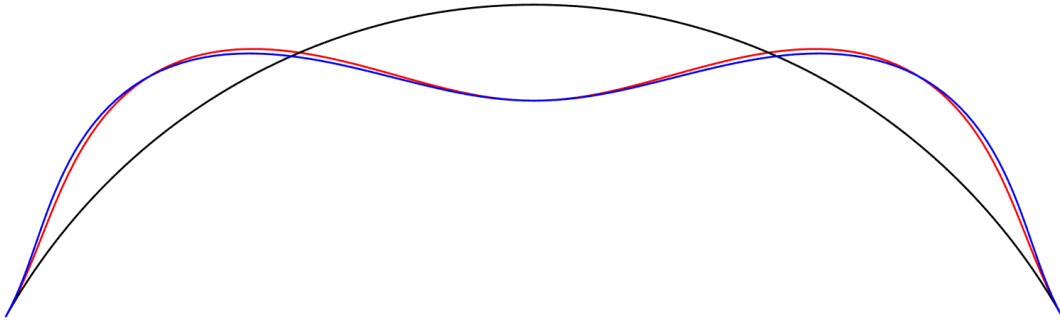


Şekil 6.6 : Ankastre-ankastre mesnetli çubuğun dördüncü mod şekli
 $(\theta_T = 30^\circ, \lambda = 150, \frac{R}{Y} = 1)$.

Şekil 6.7’de, açıklığı $\theta_T = 120^\circ$ ve narinlik oranı $\lambda = 150$ olan çubuğun birinci mod şekilleri verilmektedir. Bu şekilden, yerel ve yerel olmayan teorilerin hesapladığı mod şekillerinin benzer karakterde olduğu görülmektedir. Bu çubuğun birinci mod şeklinin, açıklığı $\theta_T = 30^\circ$ ve narinlik oranı $\lambda = 150$ olan çubuğun birinci modundan (Şekil 6.3) farklı olduğu, ikinci mod şekline (Şekil 6.4) benzediği dikkat çekmektedir (Tüfekci, 2001). Bu, yerel teoride görülen mod geçişinin, yerel olmayan teoriyle hesaplanan sonuçlarda da görüldüğünü ortaya koymaktadır.

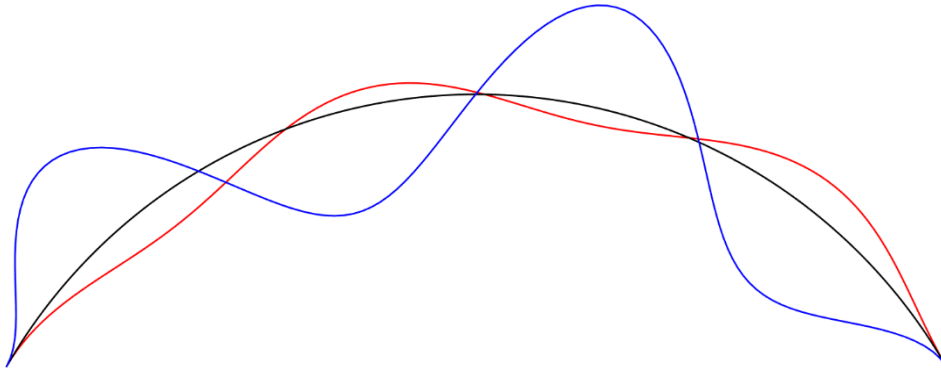


Şekil 6.7 : Ankastre-ankastre mesnetli çubuğun birinci mod şekli
 $(\theta_T = 120^\circ, \lambda = 150, \frac{R}{\gamma} = 1)$.

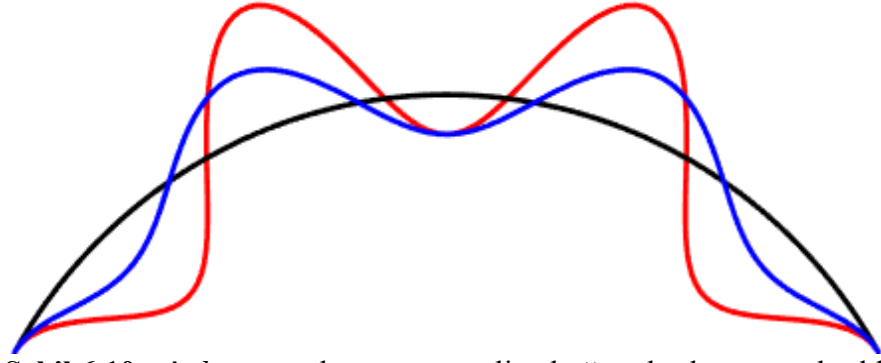


Şekil 6.8 : Ankastre-ankastre mesnetli çubuğun ikinci mod şekli
 $(\theta_T = 120^\circ, \lambda = 150, \frac{R}{\gamma} = 1)$.

Şekil 6.8-6.10 arasında, bu çubuğun ikinci, üçüncü ve dördüncü mod şekilleri verilmektedir. Bu şekillerden de görülebileceği gibi, bu iki teorinin mod şekilleri aynıdır.



Şekil 6.9 : Ankastre-ankastre mesnetli çubuğun üçüncü mod şekli
 $(\theta_T = 120^\circ, \lambda = 150, \frac{R}{\gamma} = 1)$.



Şekil 6.10 : Ankastre-ankastre mesnetli çubuğun dördüncü mod şekli
($\theta_T = 120^\circ$, $\lambda = 150$, $\frac{R}{\gamma} = 1$).

6.1.2 Çember eksenli sabit kesitli çubukların titreşimlerine etki eden parametrelerin incelenmesi

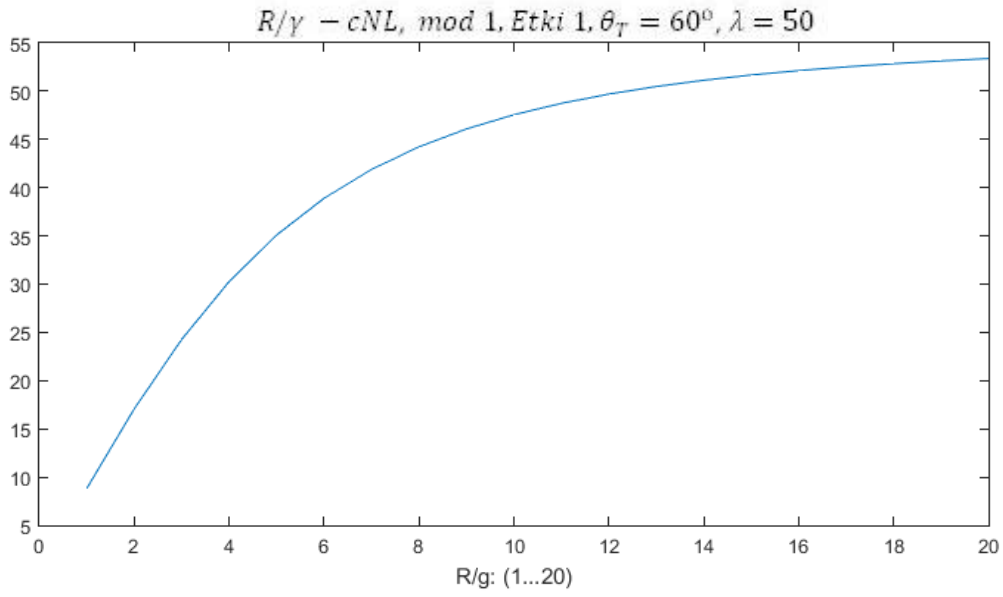
Bu bölümde, parametrik analiz için bir kod yazılmış ve çubuğun toplam açıklığını, mesnetleme durumunu, λ narinlik oranını, R/γ boyut parametresini, mod sayısını değişken alarak çeşitli değerler atayabilecek duruma getirilmiştir. Ayrıca, program, eksenel uzama, kayma şekil değiştirmesi ve dönme eylemsizliği etkilerini teker teker veya çeşitli kombinasyonlarıyla göz önüne alacak şekilde geliştirilmiştir.

İlk olarak, boyut parametresi R/γ 'nın frekans üzerindeki etkisi incelenmiştir. Bunun için, açıklığı $\theta_T = 60^\circ$ ve narinlik oranı $\lambda = 50$ olan çubuğun birinci doğal frekanslarına olan etki ele alınmıştır. Bu çubuk için, aynı malzemeden yapılmış, yani γ 'nın değerinin sabit tutulduğu, R yarıçapının değiştiği çubuklar ele alınmıştır. Yani, R/γ 'nın artışıyla, R yarıçapı değiştirilmiştir. Boyutsuz frekans değeri;

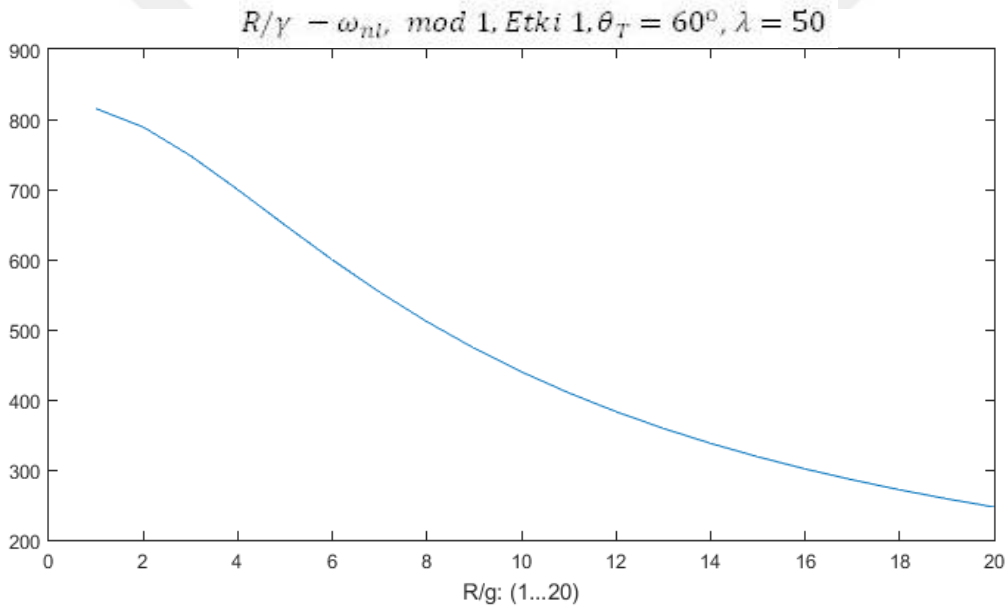
$$c = (R_0 \theta_T)^2 \sqrt{\frac{\rho A_0}{EI_{b0}}} \omega \quad (6.2)$$

olarak belirlenmiştir.

Şekil 6.11'de, açıklığı $\theta_T = 60^\circ$ ve narinlik oranı $\lambda = 50$ olan çubuğun birinci boyutsuz frekansına R/γ 'nın etkisi verilmektedir. Burada, artan R/γ değerleriyle, boyutsuz frekansın bir değere yakınsadığı, yani yerel olmayan etkinin azaldığı görülmektedir.

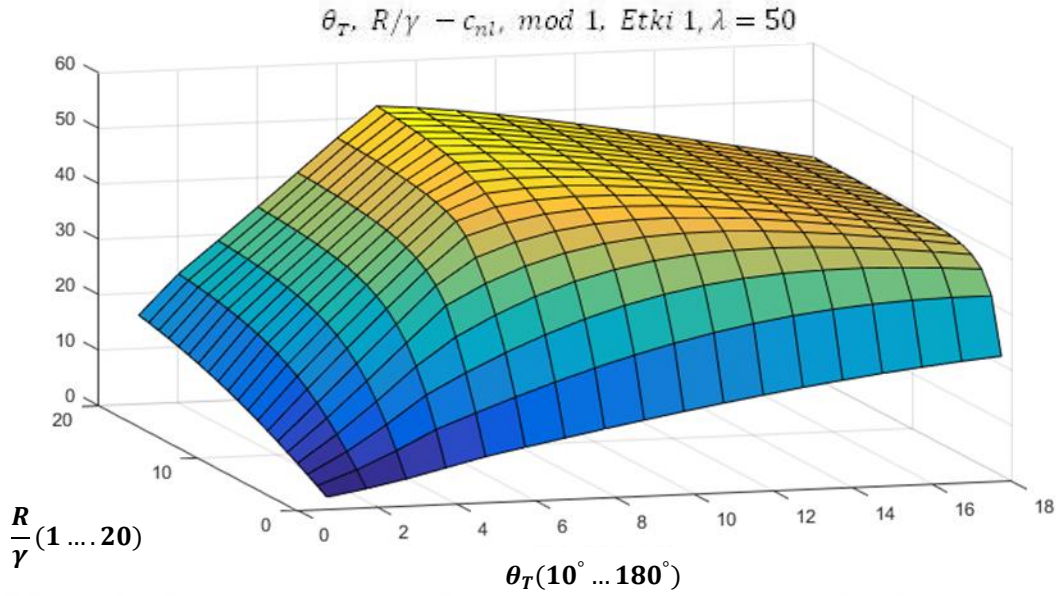


Şekil 6.11 : Ankastre-ankastre mesnetli çubuğun birinci frekans katsayısı c 'nin R/γ ile değişimi ($\theta_T = 60^\circ, \lambda = 50$).



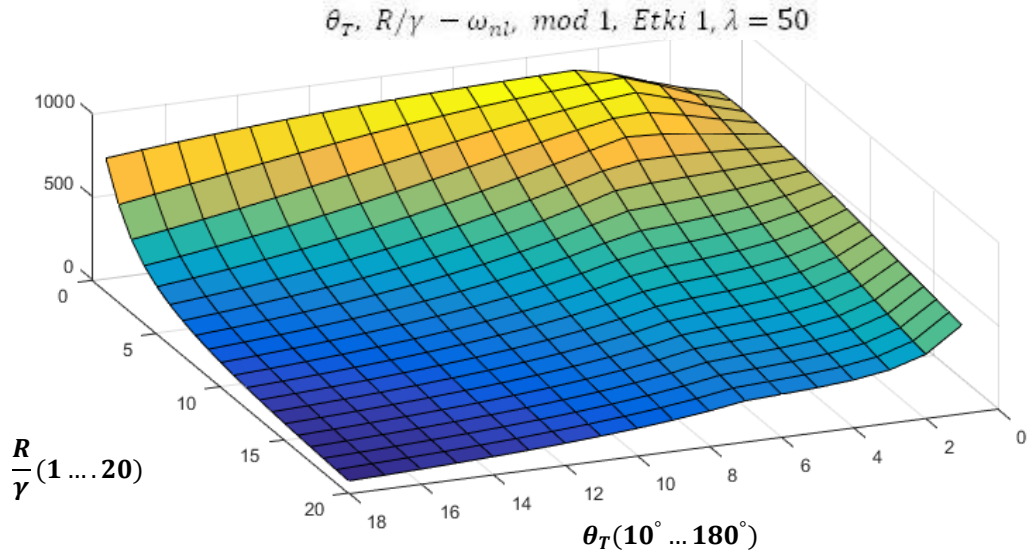
Şekil 6.12 : Ankastre-ankastre mesnetli çubuğun birinci doğal frekansının R/γ ile değişimi ($\theta_T = 60^\circ, \lambda = 50$).

Şekil 6.12'de, açıklığı $\theta_T = 60^\circ$ ve narinlik oranı $\lambda = 50$ ve $\gamma = 2$ olan çubuğun birinci doğal frekansına R/γ 'nin etkisi verilmektedir. Burada, artan R/γ değerleriyle, frekansın bir değere yakınsadığı, yani yerel olmayan etkinin öneminin azaldığı görülmektedir. Boyutsuz frekansın artması ve frekans değerininse azalmasıyla bu iki sonucun çelişiyor gibi görünmesinin nedeni, R yarıçapının değişmesidir.

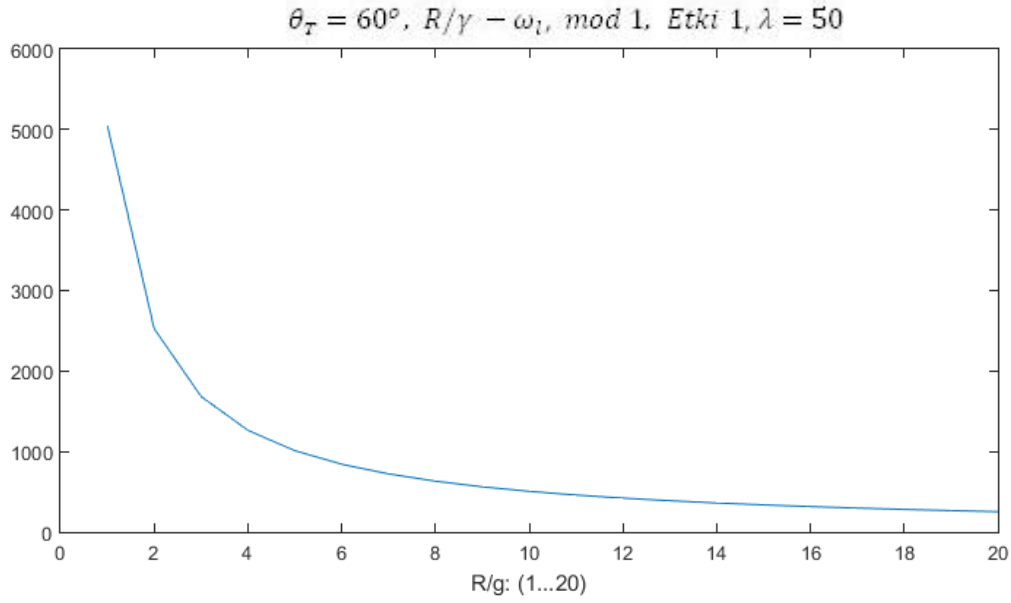


Şekil 6.13 : Ankastre-ankastre mesnetli çubuğun birinci frekans katsayısı c 'nin R/γ ve θ_T ile değişimi ($\lambda = 50$).

Şekil 6.13 ve 6.14'te, R/γ ve toplam açıklık θ_T 'nin, yerel olmayan teorinin verdiği frekansa ve boyutsuz frekansa etkileri görülmektedir. Burada, R/γ 'nin ve θ_T 'nin küçük değerlerinde doğal frekansın önemli değişimler gösterdiği, büyük R/γ ve θ_T değerlerinde ise, frekansın pek etkilenmediği görülmektedir.

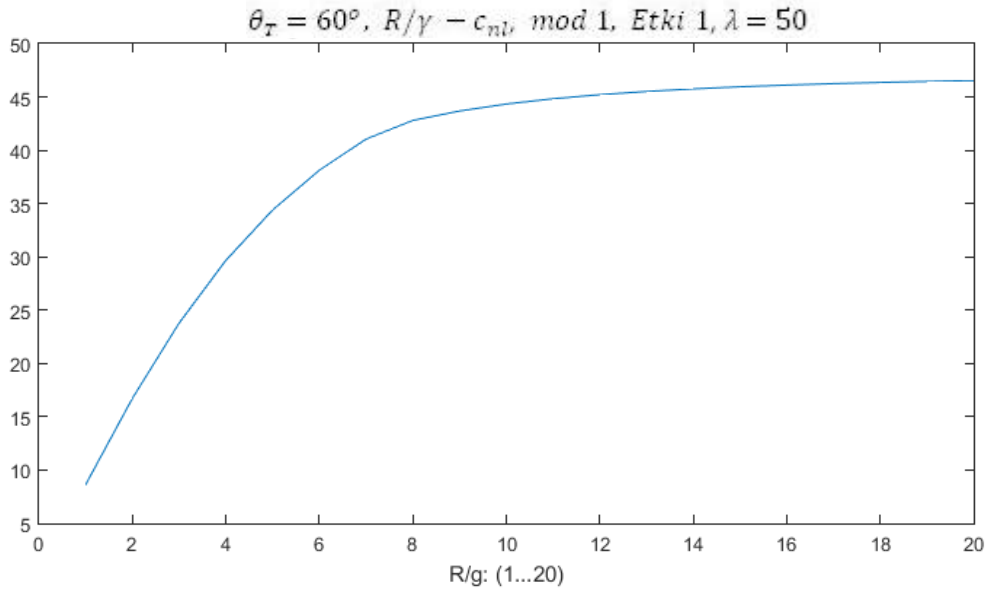


Şekil 6.14 : Ankastre-ankastre mesnetli çubuğun birinci doğal frekansının R/γ ve θ_T ile değişimi ($\lambda = 50$).

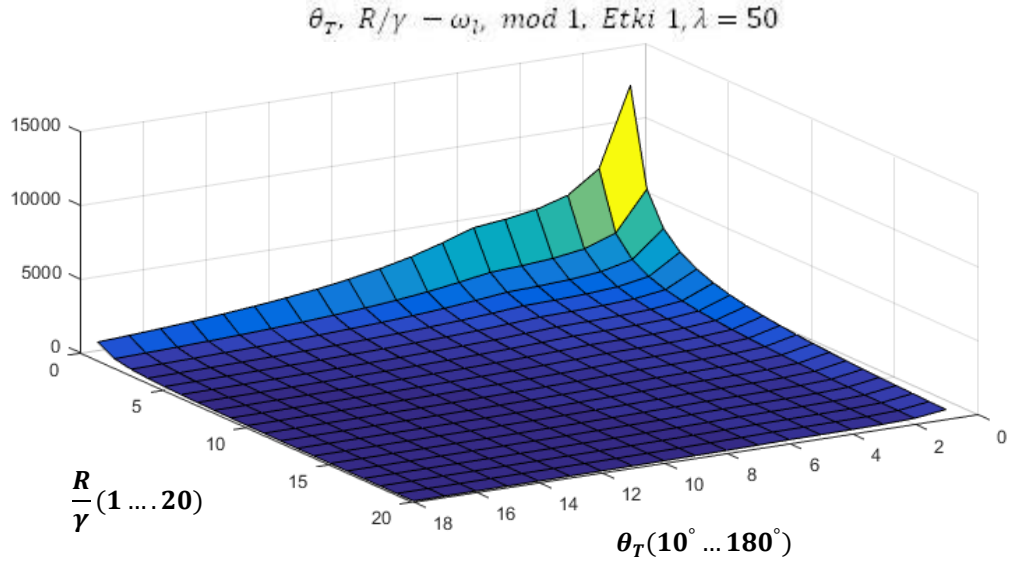


Şekil 6.15 : Ankastre-ankastre mesnetli çubuğun birinci doğal frekansının R/γ ile değişimi ($\theta_T = 60^\circ$, $\lambda = 50$).

Şekil 6.15’de, yerel teoriyle hesaplanan doğal frekansa R/γ ’nın etkisi görülmektedir. Yerel teoride, γ ’nın etkisi yoktur. Ancak, yerel olmayan teorinin sonuçlarıyla kıyaslayabilmek için bu ölçekte verilmiştir. Yatay eksen, yerel teori için sadece R değişimini göstermektedir. Aynı θ_T değeri için artan R değeriyle, doğrusal çubuğa yakınsanmaktadır.



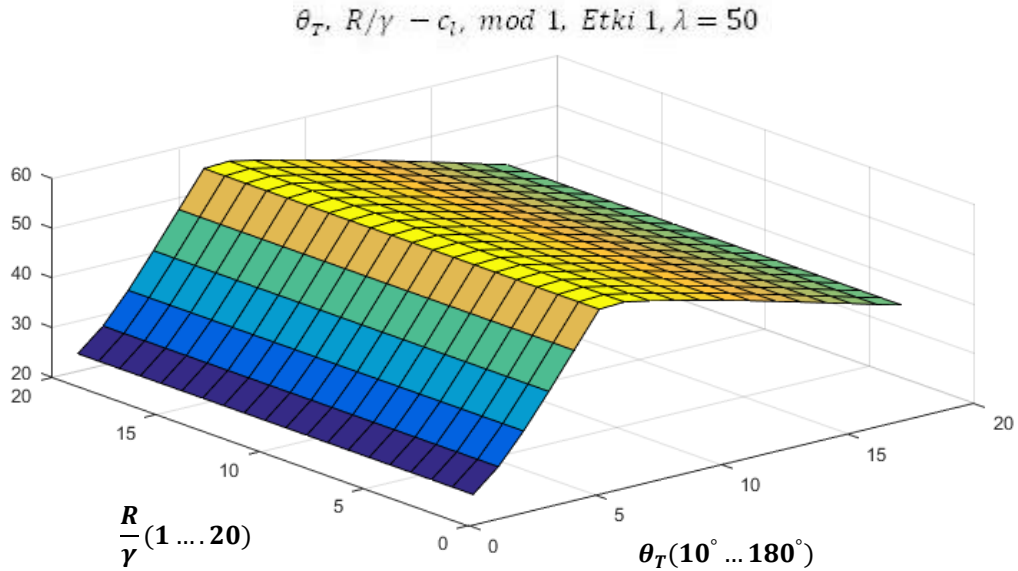
Şekil 6.16 : Ankastre-ankastre mesnetli çubuğun yerel olmayan teoriyle elde edilen birinci boyutsuz frekansının R/γ ile değişimi ($\theta_T = 60^\circ$, $\lambda = 50$).



Şekil 6.17 : Ankastre-ankastre mesnetli çubuğun birinci doğal frekansının R ve θ_T ile değişimi ($\lambda = 50$).

Şekil 6.16'da, yerel olmayan teoriyle hesaplanan boyutsuz frekans katsayısına R/γ 'nın etkisi görülmektedir. Burada, artan R/γ değerleriyle, boyutsuz frekansın bir değere yakınsadığı, yani yerel olmayan etkinin azaldığı görülmektedir.

Şekil 6.17'de, yerel teoriyle hesaplanan doğal frekansa R/γ ve toplam açıklık θ_T 'nin etkisi görülmektedir. Küçük eğrilik yarı çaplarında ve küçük açıklık oranlarında frekans değerlerinde önemli değişiklikler görülmektedir.

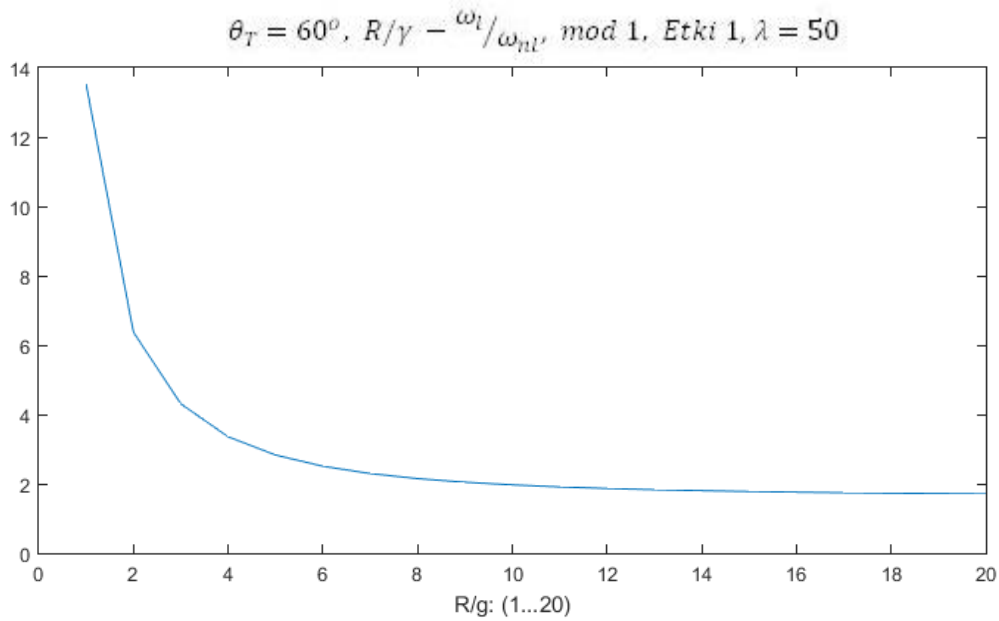


Şekil 6.18 : Ankastre-ankastre mesnetli çubuğun birinci boyutsuz frekansının R ve θ_T ile değişimi ($\lambda = 50$).

Şekil 6.18'de, yerel teoriyle hesaplanan doğal frekansa R/γ ve toplam açıklık θ_T 'nin etkisi görülmektedir. Yerel teoride, γ 'nın etkisi yoktur. Ancak, yerel olmayan

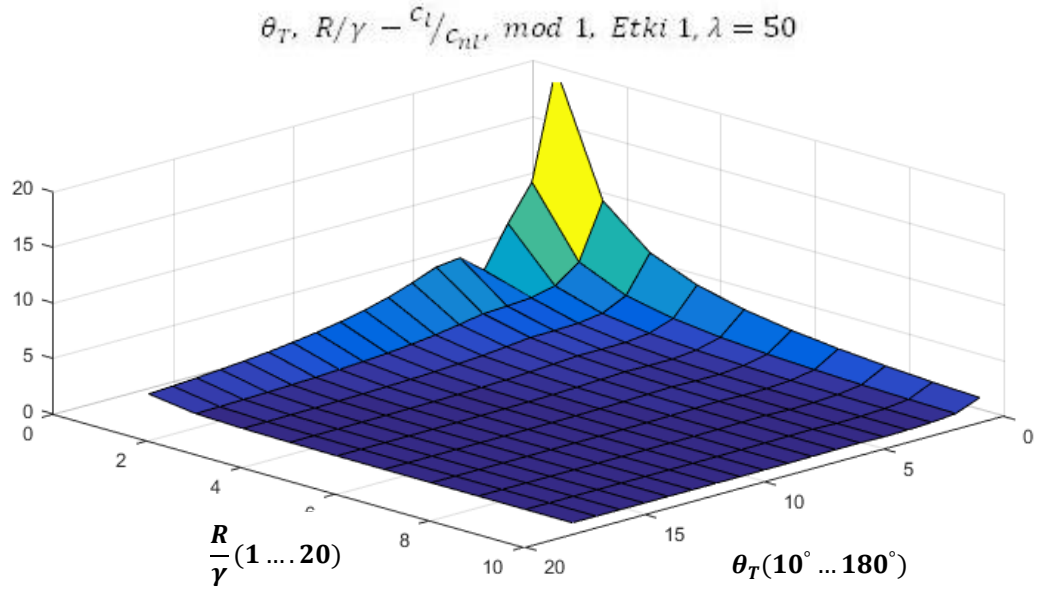
teorinin sonuçlarıyla kıyaslayabilmek için bu ölçekte verilmiştir. R/γ eksen, yerel teori için sadece R değişimini göstermektedir. Aynı θ_T değeri için, artan R değeriyle, boyutsuz frekans katsayısı değişmemektedir. Eğrilik yarıçapının boyutsuz frekans katsayısında bulunması nedeniyle, bu doğrultuda bir değişim beklenmemektedir. Açıklık değeriyle boyutsuz frekansın değişimi de beklendiği gibi, küçük değerlerde hızlı bir artma ve sonrasında ise nispeten yavaş bir azalma göstermektedir.

Şekil 6.19'da, yerel ve yerel olmayan teorilerle hesaplanan boyutsuz frekansların oranına R/γ 'nın etkisi görülmektedir. R/γ 'nın artmasıyla boyutsuz frekanslar oranının bir değere yakınsadığı görülmektedir.



Şekil 6.19 : Ankastre-ankastre mesnetli çubuğun yerel ve yerel olmayan birinci frekans katsayıları oranının R/γ ile değişimi ($\theta_T = 60^\circ, \lambda = 50$).

Şekil 6.20'de, yerel ve yerel olmayan teorilerle hesaplanan boyutsuz frekansların oranına R/γ ve θ_T 'nin etkisi görülmektedir. Boyut parametresi R/γ ve toplam açıklık θ_T 'nin büyük değerlerinde, boyutsuz frekanslar oranının hemen hemen sabit kaldığı ve R/γ ile θ_T 'nin küçük değerlerinde ise önemli değişiklikler gösterdiği görülmektedir.



Şekil 6.20 : Ankastre-ankastre mesnetli çubuğun yerel ve yerel olmayan birinci frekans katsayıları oranının R/γ ve θ_T ile değişimi ($\lambda = 50$).

6.2 Değişken Eğrilikli Ve Değişken Kesitli Çubukların Titreşimleri

Bu kısımda, sürekli değişken eğrilik ve kesite sahip çubukların düzlem içi titreşimleri başlangıç değerleri yöntemiyle incelenmiştir. Sabit kesitli çember eksenli çubuk için elde edilen kesin analitik çözüm yöntemi, değişken eğrilikli ve kesitli çubukların çözümünde kullanılmıştır. Çubuk, sabit kesit alanlarına ve sabit eğriliklere sahip bölgelere ayrılarak modellenmiş ve her bölge, sabit kesitli çember eksenli çubuğun kendi düzlemindeki titreşimlerini veren ifadeler ve çözüm yöntemi kullanılarak incelenmiştir. Çubuk bölgelerinde, eğrilik yarıçapları ve alanları, bölgelerin sahip olduğu ortalama yarıçaplar ve alanlar alınarak belirlenmiş ve böylece, değişken kesitli ve değişken eğrilikli çubuk, birçok sabit kesitli çember eksenli parçanın birleşiminden oluşacak şekilde modellenmiştir. Bu bölgelerin her biri için, yazılan denklemler, başlangıç değerleri yöntemi ile çözülmektedir. Denklemler, eksen uzamasını, kayma deformasyonunu ve dönme eylemsizliğini içermekte ve moment ve kuvvetlerin yerel olmayan etkilerini de gözönüne almaktadır.

Her eleman, sabit kesitli ve çember eksenli bir çubuk olarak düşünülmüş ve her bölge için kesin çözüm, başlangıç değerleri yöntemi ile elde edilmiştir. Elemanların sınır bölgelerindeki kinetik ve kinematik geçiş şartları yazılarak elde edilen denklem takımının çözümünden frekans değerleri elde edilmiştir.

Çubuk, sabit kesitli çember eksenli n parçaya bölündüğünde, her parçanın diferansiyel denklem takımı

$$\frac{d\mathbf{y}_i}{d\theta_i} = \mathbf{A}_i \mathbf{y}_i(\theta_i) \quad (6.3)$$

şeklinde yazılabilir. Burada, $\mathbf{y}_i(\theta_i)$, 6 elemanlı değişkenler vektörünü ve $\mathbf{A}_i$, 6×6 elemanlı katsayılar matrisini ve i indisi de bölge sayısını ifade etmek üzere, her bölge için değişkenler vektörü,

$$\mathbf{y}_i(\theta) = \begin{bmatrix} w_i \\ u_i \\ \Omega_{bi} \\ M_{bi} \\ F_{ti} \\ F_{ni} \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

şeklinde tanımlanabilir. Yukarıda elde edilen $\mathbf{A}_i$ katsayılar matrisi, eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini, ayrıca, moment ve kuvvetlerin yerel olmayan etkilerini de göz önüne alarak elde edilen matristir. Etkiler ayrı ayrı ele alınarak da çözüm yapıp, doğal frekanslar elde edilebilir. $\mathbf{A}_i$ katsayılar matrisinin tüm elemanlarının sabit sayılar olması durumunda, denklem takımının kesin çözümü, aynı şekilde elde edilecektir. $\mathbf{A}_i$ katsayılar matrisinin elemanları (3.130) - (3.142) denklemleri ile verilmektedir.

$\mathbf{A}_i$ katsayılar matrisinin tüm elemanlarının sabit sayılar olması durumunda, denklem takımının kesin çözümü;

$$\mathbf{y}_i(\theta_i) = e^{\mathbf{A}_i \theta_i} \mathbf{y}_i(\theta_{i0}) \quad (6.5)$$

olarak elde edilir. $\theta_{i0} = 0$ olarak belirlenen doğrultu, sabit kesitli her çubuk elemanı için referans doğrultusu olarak alınmaktadır. Burada, $\mathbf{y}_i(\theta_{i0})$, $\theta_i = \theta_{i0}$ koordinatındaki bilinen başlangıç değerleri vektörüdür. $e^{\mathbf{A}_i \theta_i}$ matematiksel olarak ifade edilebilmektedir. $6 * n$ adet bilinmeyen başlangıç değerleri, sabit kesitli her çubuk elemanının iki ucu için yazılan sınır şartları, θ_i koordinatları için yazılan geçiş ve denge şartları yardımıyla elde edilir.

Sınır ve geçiş şartlarından elde edilen $(6n)$ adet denklem homojen denklem takımı oluşturduğundan, sistemin sıfırdan farklı tek bir çözümünün olması, katsayılar matrisinin determinantının sıfıra eşit olması durumunda mümkündür.

Yukarıda ifade edilen çözüm yöntemi sabit kesitli her çubuk elemanına uygulanmaktadır. Çubuk eleman için çubuk açısı aşağıdaki şekilde ifade edilir.

i . çubuk eleman için; $\theta_{i-1} \leq \theta \leq \theta_i$

Sabit mesnet, ankastre mesnet ve serbest uç için sınır şartları aşağıdaki gibidir.

Sabit mesnet: $w_i(\theta) = 0$, $u_i(\theta) = 0$, $M_{bi}(\theta) = 0$,

Ankastre mesnet: $w_i(\theta) = 0$, $u_i(\theta) = 0$, $\Omega_{bi}(\theta) = 0$,

Serbest uç: $M_{bi}(\theta) = 0$, $F_{ti}(\theta) = 0$, $F_{ni}(\theta) = 0$,

İki uç nokta için sınır koşullarından gelen 6 adet eşitlik mevcuttur.

Çubuk elemanların sınır bölgelerinde kinetik ve kinematik geçiş koşullarını sağlayan ifadeler aşağıda verilmektedir. Bu ifadeye göre, komşu çubuk elemanların sınır noktalarındaki büyüklükler birbirlerine eşit olmak zorundadır.

$$\mathbf{y}_i(\theta_i) = \mathbf{y}_{i+1}(\theta_i) \quad (6.6)$$

$$e^{A_i \theta_i} \mathbf{y}_i(\theta_{i0}) = e^{A_{i+1} \theta_i} \mathbf{y}_i(\theta_{(i+1)0}) \quad (6.7)$$

$$w_i(\theta_i) = w_{i+1}(\theta_i) \quad u_i(\theta_i) = u_{i+1}(\theta_i) \quad \Omega_{bi}(\theta_i) = \Omega_{b(i+1)}(\theta_i) \quad (6.8)$$

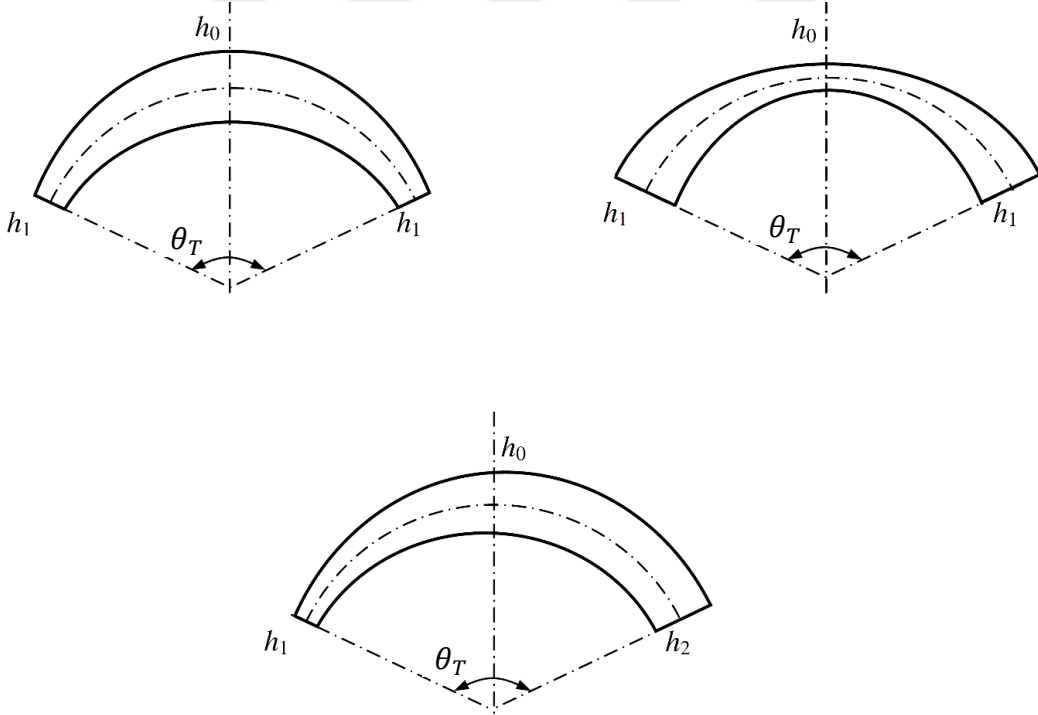
$$M_{bi}(\theta_i) = M_{b(i+1)}(\theta_i) \quad F_{ti}(\theta_i) = F_{t(i+1)}(\theta_i) \quad F_{ni}(\theta_i) = F_{n(i+1)}(\theta_i) \quad (6.9)$$

Eğri eksenli bir çubuk (n) adet elemana ayrılıp, bu denklemler her eleman için uygulanırsa, $[6 * (n - 1)]$ adet geçiş şartı yazılır.

Böylece, sınır ve süreklilik şartlarından gelen $(6 * n)$ adet eşitlik, matris formunda ifade edilir.

$$\begin{bmatrix}
\mathbf{X1} & \mathbf{01} & \mathbf{01} & \cdots & \mathbf{01} & \mathbf{01} \\
e^{A_1\theta_1} & -e^{A_2\theta_1} & \mathbf{02} & \cdots & \mathbf{02} & \mathbf{02} \\
\mathbf{02} & e^{A_2\theta_2} & e^{A_2\theta_1} & \cdots & \mathbf{02} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\mathbf{02} & \mathbf{02} & \mathbf{02} & \cdots & e^{A_{n-1}\theta_{n-1}} & -e^{A_n\theta_{n-1}} \\
\mathbf{01} & \mathbf{01} & \mathbf{01} & \cdots & \mathbf{01} & \mathbf{Xn}
\end{bmatrix}_{6n \times 6n} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{01} \\ \mathbf{y}_{02} \\ \mathbf{y}_{03} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{0(n-1)} \\ \mathbf{y}_{0n} \end{bmatrix}_{6n \times 1} = [\mathbf{0}]_{6n \times 1} \quad (6.10)$$

Burada $\mathbf{X1}$ ve $\mathbf{Xn}$, 3×6 boyutunda eğri eksenli çubuğun A ve B ucundaki sınır şartlarından elde edilen matris; $\mathbf{01}$, 3×6 boyutunda ve $\mathbf{02}$, 6×6 boyutunda sıfır matrisleridir. $\mathbf{y}_{0i} = \mathbf{y}_i(\theta_{0i})$ olarak tanımlanırlar. Elde edilen $6 \times n$ eşitlik, homojen denklem takımı oluşturduklarından, $\mathbf{y}_{0i}$ 'lerin sıfırdan farklı çözümleri ancak katsayılar matrisinin determinantının sıfıra eşit olması durumunda mevcuttur. Determinant ifadesi, ω doğal frekansının bir fonksiyonudur. Böylece doğal frekanslar elde edilir. Aynı çözüm yolu diğer kabuller için de uygulanabilir.



Şekil 6.21 : Değişken kesitli çubuklar.

Bu kısımda Şekil 6.21'de verilen üç farklı geometride değişken dikdörtgen kesitli çubuklar incelenecektir. Çubuk kesitlerinin b boyutu değişmezken, h boyutunun değişimleri;

Birinci çubuk için (ortası kalın kenarları ince);

$$h(\theta) = \begin{cases} h_0 \left(1 + \eta \frac{\theta}{\theta_T} \right) & \theta \leq 0 \\ h_0 \left(1 - \eta \frac{\theta}{\theta_T} \right) & \theta > 0 \end{cases} \quad (6.11)$$

İkinci çubuk için (ortası ince kenarları kalın)

$$h(\theta) = \begin{cases} h_0 \left(1 - \eta \frac{\theta}{\theta_T} \right) & \theta \leq 0 \\ h_0 \left(1 + \eta \frac{\theta}{\theta_T} \right) & \theta > 0 \end{cases} \quad (6.12)$$

üçüncü çubuk için (inceden kalına);

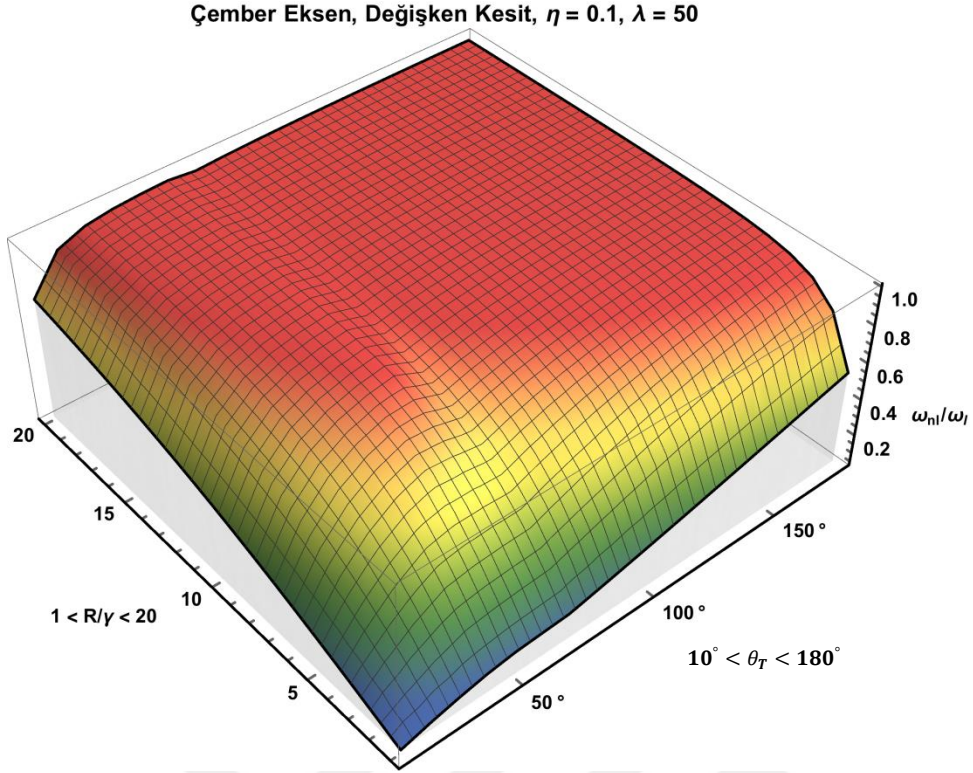
$$h(\theta) = h_0 \left(1 + \eta \frac{\theta}{\theta_T} \right) \quad -\theta_A \leq \theta \leq \theta_B \quad (6.13)$$

olarak alınmıştır.

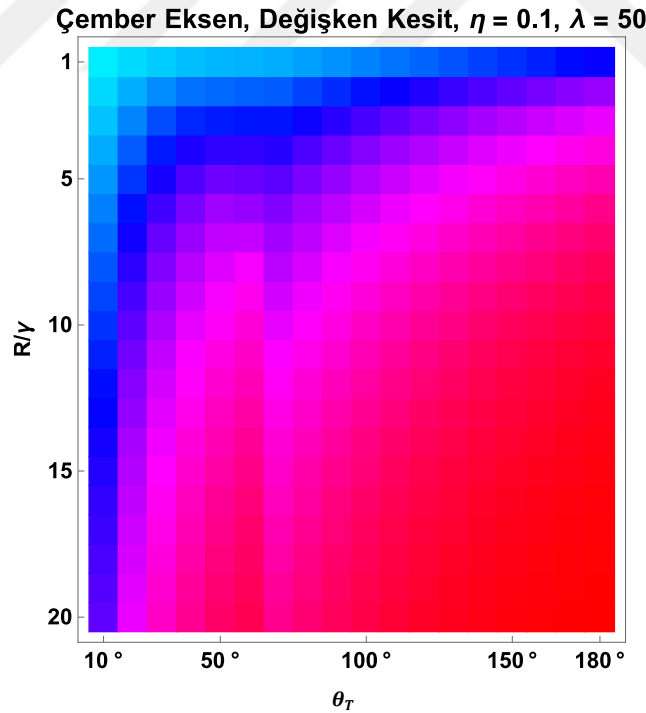
6.3 Çember Eksenli, Değişken Kesitli Çubukların Titreşimlerine Çeşitli Parametrelerin Etkileri

Tezin bu kısmında, çember eksenli sabit kesitli çubukların yerel ve yerel olmayan teorilerle hesaplanan frekans oranlarının, boyut parametresi R/γ , toplam açıklık θ_T ve narinlik oranı λ ile değişimi incelenmiştir. Burada, çember eksenli çubuğun kesit değişimi denklem (6.11)'de verildiği gibi, yani ortası kalın kenarları ince alınmıştır. Çözülen örneklerde, $\eta = 0,1$ olarak alınmıştır.

İlk olarak, Şekil 6.22'de, $\eta = 0,1$ ve $\lambda = 50$ olan çubuğun birinci mod frekans oranlarının boyut parametresi R/γ ve toplam çubuk açıklığı θ_T ile değişimi ele alınmıştır. Şekil 6.22'den de görüldüğü gibi küçük R/γ ve küçük θ_T değerlerinde, birinci mod frekans oranı hızla değişmekte, büyük R/γ ve büyük θ_T değerlerinde ise 1 değerine yakınsamaktadır.

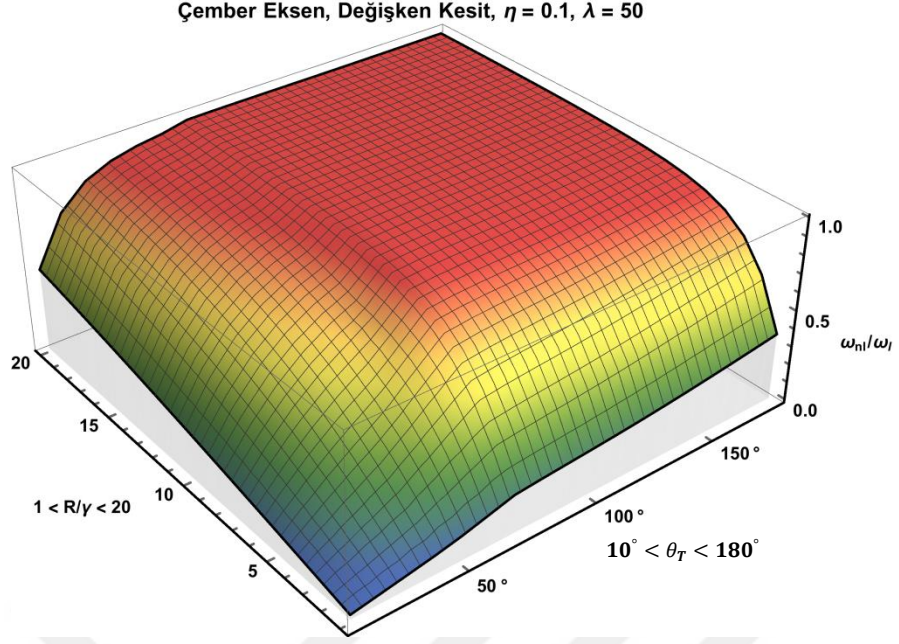


Şekil 6.22 : Çember eksenli ve kesit değişimi denklem (6.11) ile bilinen ($\eta = 0,1$) çubuğun birinci mod frekans oranlarının boyut parametresi R/γ ve toplam çubuk açıklığı θ_T ile değişimi.



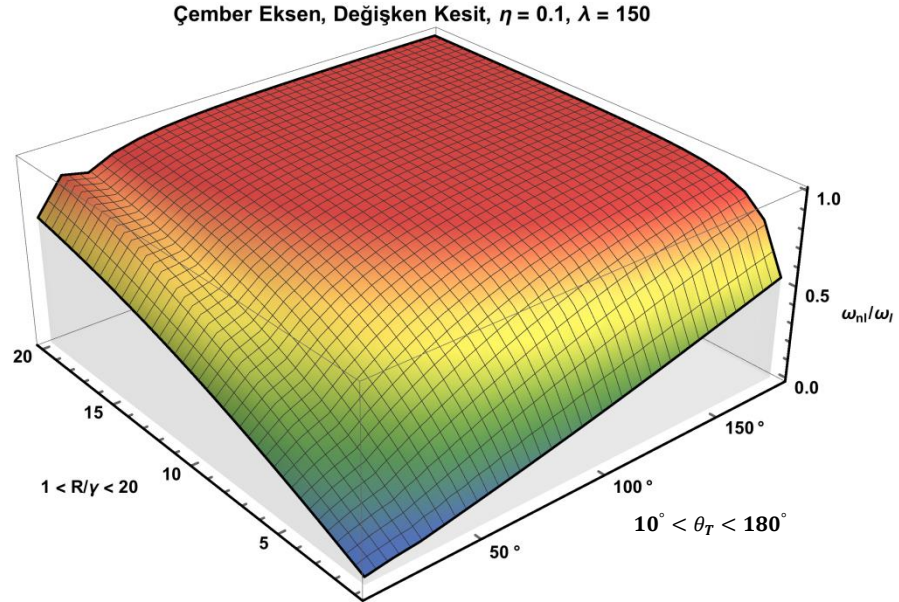
Şekil 6.23 : Çember eksenli ve kesit değişimi denklem (6.11) ile bilinen ($\eta = 0,1$) çubuğun birinci mod frekans oranlarının boyut parametresi R/γ ve toplam çubuk açıklığı θ_T ile değişimi.

Aynı sonuçlar, Şekil 6.23’de farklı bir gösterimle verilmektedir.

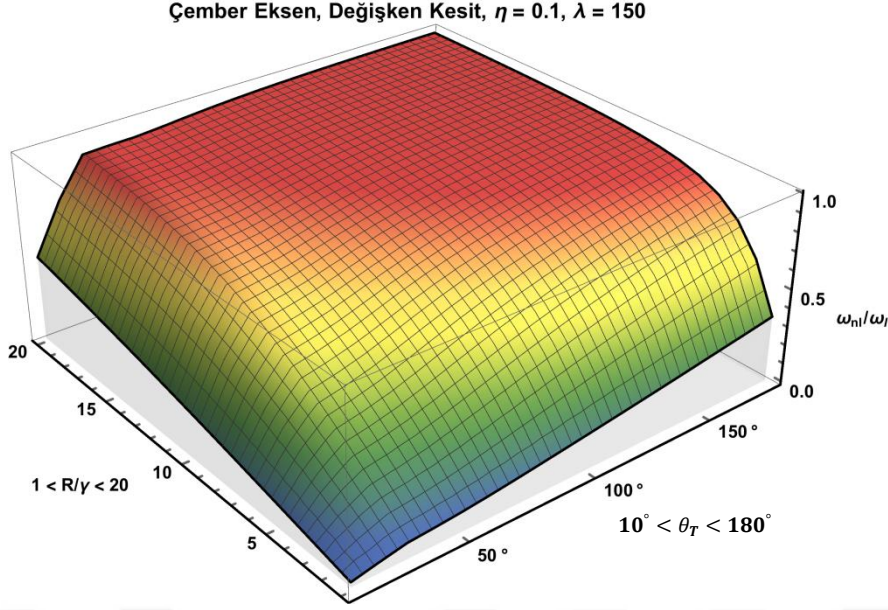


Şekil 6.24 : Çember eksenli ve kesit değişimi denklem (6.11) ile bilinen ($\eta = 0,1$) çubuğun ikinci mod frekans oranlarının boyut parametresi R/γ ve toplam çubuk açıklığı θ_T ile değişimi.

Şekil 6.24’de, aynı çubuğun, ikinci mod frekans oranlarının boyut parametresi R/γ ve toplam çubuk açıklığı θ_T ile değişimi ele alınmıştır. Şekil 6.24’den de görüldüğü gibi küçük R/γ ve küçük θ_T değerlerinde, ikinci mod frekans oranı hızla değişmekte, büyük R/γ ve büyük θ_T değerlerinde ise 1 değerine yakınsamaktadır.



Şekil 6.25 : Çember eksenli, değişken kesitli ($\eta = 0,1$) çubuğun birinci mod frekans oranlarının boyut parametresi R/γ ve toplam çubuk açıklığı θ_T ile değişimi.



Şekil 6.26 : Çember eksenli, değişken kesitli ($\eta = 0,1$) çubuğun ikinci mod frekans oranlarının boyut parametresi R/γ ve toplam çubuk açıklığı θ_T ile değişimi.

Şekil 6.25’de, narinlik oranı $\lambda = 150$ olan çember eksenli değişken kesitli çubuğun birinci ve Şekil 6.26’da da ikinci mod frekans oranlarının boyut parametresi R/γ ve toplam çubuk açıklığı θ_T ile değişimi görülmektedir. Bu şekillerden de açıkça görüldüğü gibi, genel karakter, artan narinlik oranıyla pek değişmemektedir.

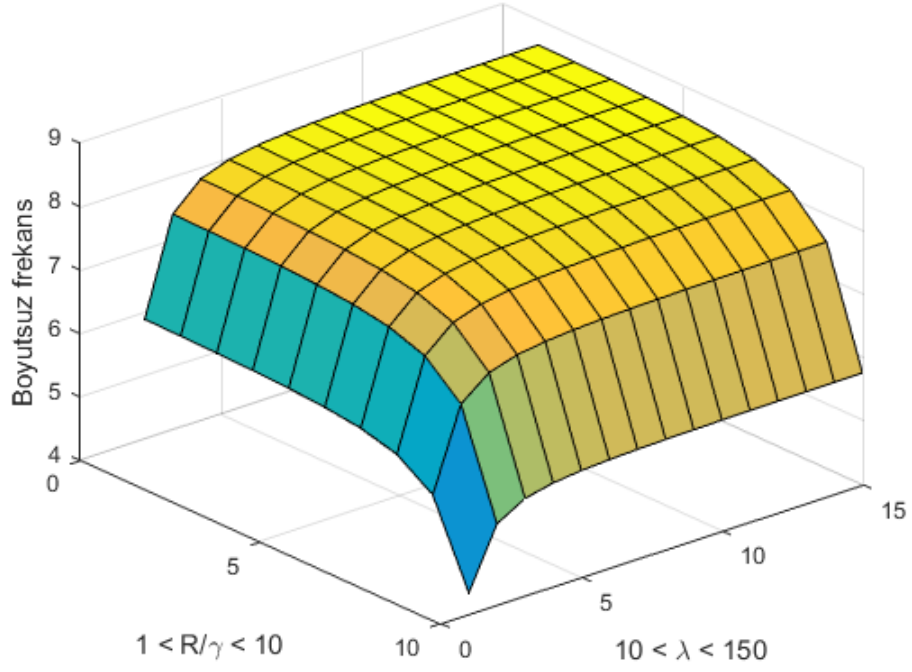
6.4 Değişken Eğrilikli Ve Değişken Kesitli Çubukların Titreşimlerine Çeşitli Parametrelerin Etkileri

Bu kısımda, boyut parametresi R/γ , toplam açıklık θ_T ve narinlik oranı λ ’nın boyutsuz frekans değerine etkileri incelenmiştir. Burada, çubuk eksen eğrisi parabol olarak seçilmiş ve eğrilik yarıçapının açısal koordinat θ ile değişimi;

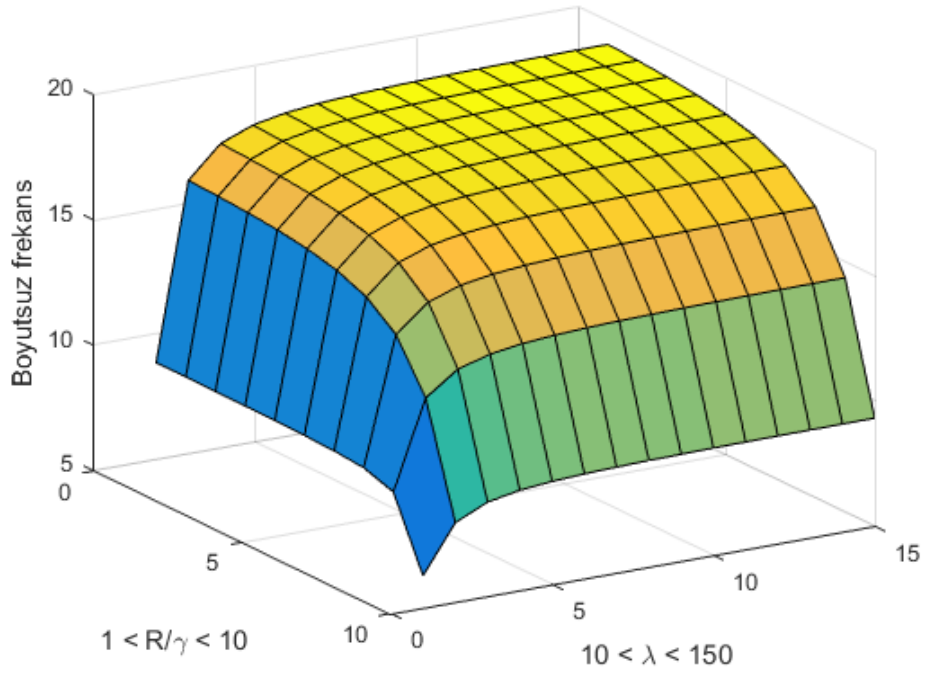
$$R(\theta) = R_0 / \cos^3 \theta \quad (6.14)$$

olarak, çubuk kesitinin h boyutunun değişimi ise denklem (6.12)’de verildiği gibi, yani ortası ince kenarları kalın alınmıştır. Kesit değişim katsayısı $\eta = 0,1$ olarak alınmıştır.

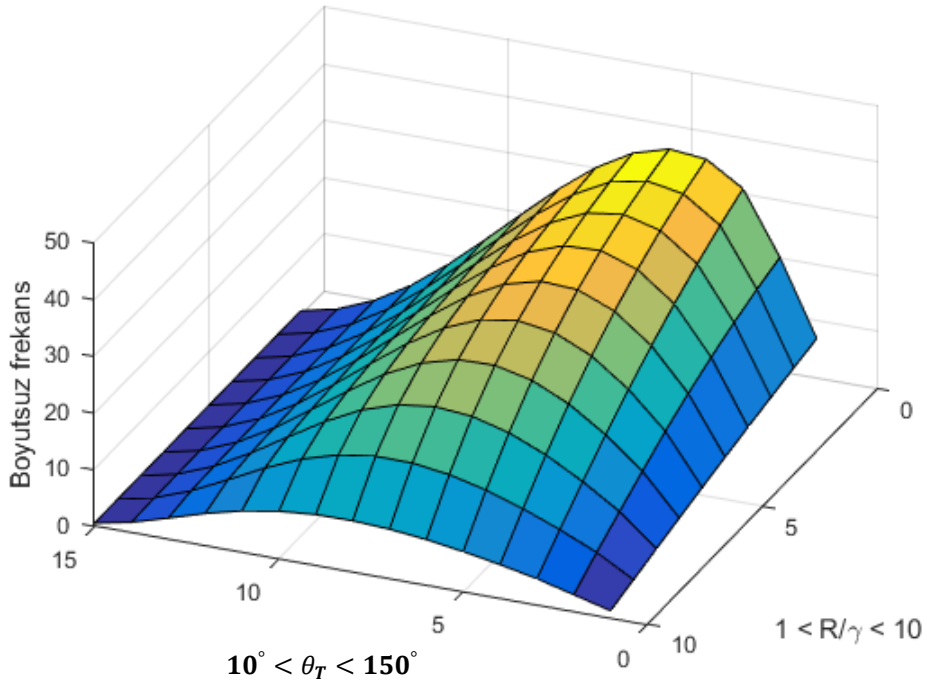
Şekil 6.27 ve 6.28’de, parabol eksenli, değişken kesitli ve açıklığı $\theta_T = 120^\circ$ olan çubuğun, sırasıyla, birinci ve ikinci boyutsuz frekansına R/γ ve λ ’nın etkisi görülmektedir. Boyut parametresi R/γ ve narinlik oranı λ ’nın küçük değerlerinde, boyutsuz frekans değişiminin önemli olduğu, büyük değerlerinde ise bunların değişiminden fazla etkilenmediği görülmektedir.



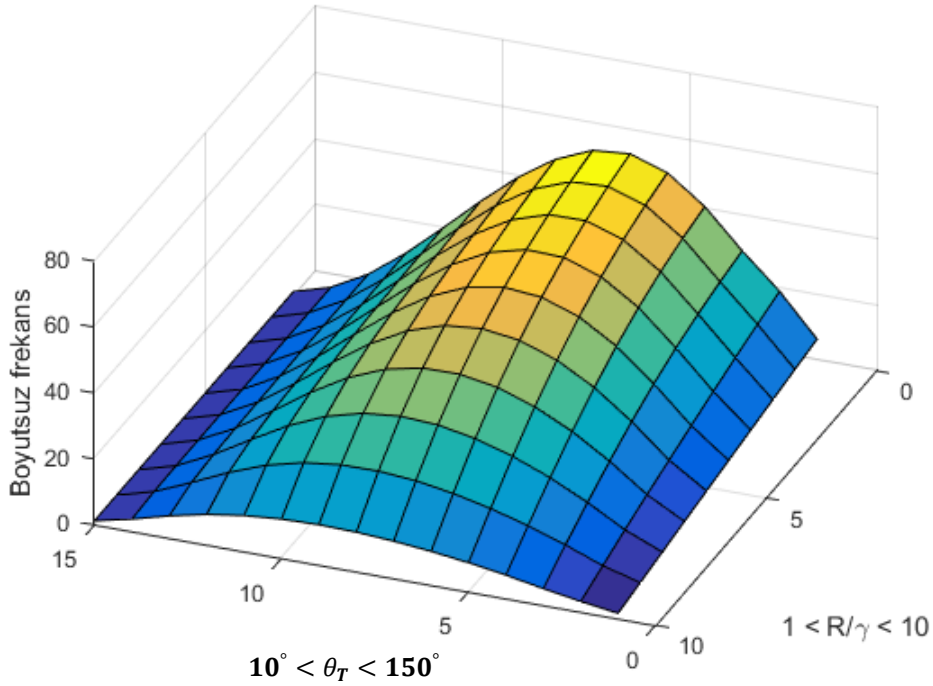
Şekil 6.27 : Parabol eksenli, değişken kesitli ($\eta = 0,1$) ve açıklığı $\theta_T = 120^\circ$ olan çubuğun birinci boyutsuz frekansına R/γ ve λ 'nın etkisi.



Şekil 6.28 : Parabol eksenli, değişken kesitli ve açıklığı $\theta_T = 120^\circ$ olan çubuğun ikinci boyutsuz frekansına R/γ ve λ 'nın etkisi.



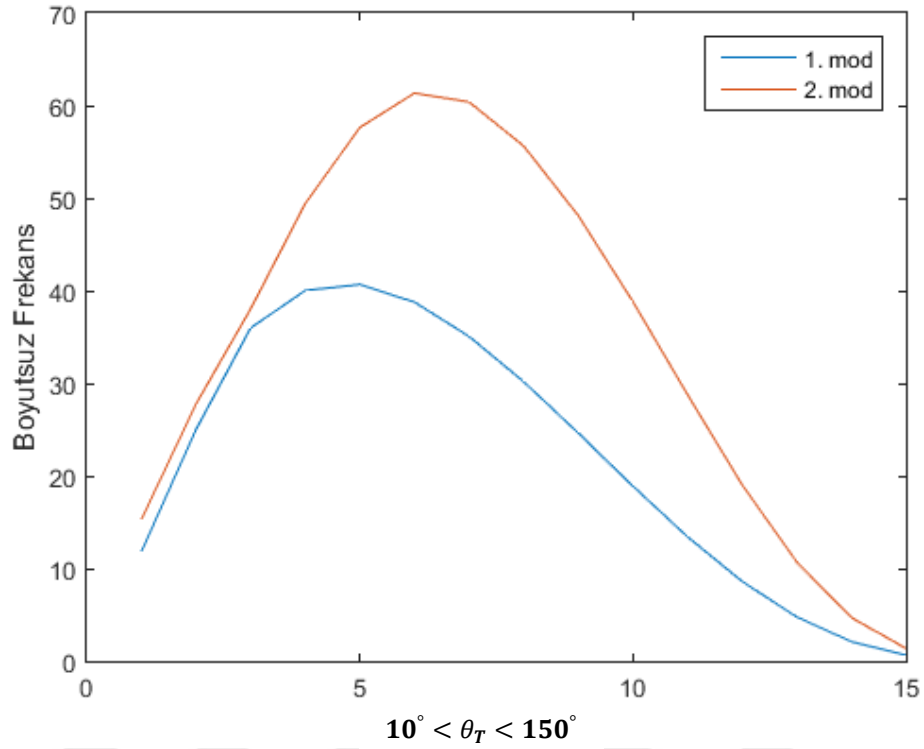
Şekil 6.29 : Parabol eksenli, değişken kesitli ve narinlik oranı $\lambda = 100$ olan çubuğun birinci boyutsuz frekansına R/γ ve θ_T 'nin etkisi.



Şekil 6.30 : Parabol eksenli, değişken kesitli ve narinlik oranı $\lambda = 100$ olan çubuğun ikinci boyutsuz frekansına R/γ ve θ_T 'nin etkisi.

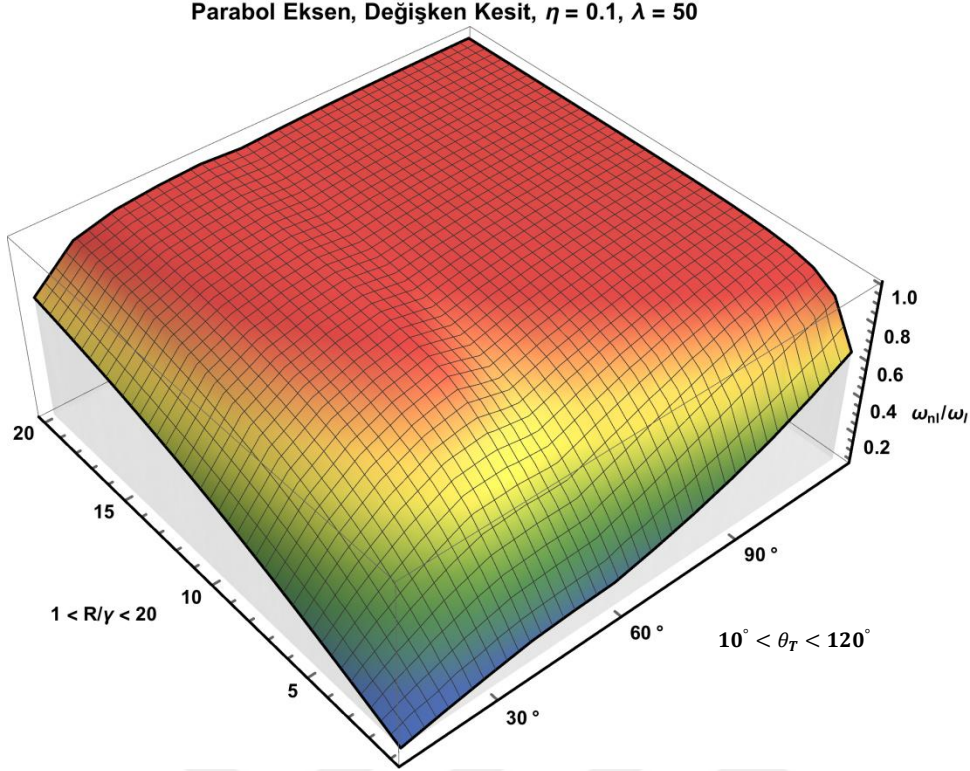
Şekil 6.29 ve 6.30'da, parabol eksenli, değişken kesitli ve narinlik oranı $\lambda = 100$ olan çubuğun, sırasıyla, birinci ve ikinci boyutsuz frekansına R/γ ve θ_T 'nin etkisi görülmektedir. Boyut parametresi R/γ ve toplam açıklık θ_T 'nin küçük değerlerinde,

boyutsuz frekans değişiminin önemli olduğu, büyük değerlerinde ise bunların değişiminden fazla etkilenmediği görölmektedir.



Şekil 6.31 : Parabol eksenli, değişken kesitli, narinlik oranı $\lambda = 100$ ve boyut parametresi $R/\gamma=1$ olan çubuğun birinci ve ikinci boyutsuz frekansına θ_T 'nin etkisi.

Şekil 6.31'de, parabol eksenli, değişken kesitli, narinlik oranı $\lambda = 100$ ve boyut parametresi $R/\gamma = 1$ olan çubuğun, sırasıyla, birinci ve ikinci boyutsuz frekansına θ_T 'nin etkisi görölmektedir. Toplam açıklık θ_T 'nin küçük değerlerinde, boyutsuz frekansın hızla arttığı, belli bir açı değerinden sonra ise biraz daha yavaş azaldığı görölmektedir. Bu, yerel teoremin sonucuna benzemektedir. Ancak yerel teoride azalma, oldukça daha azdır.

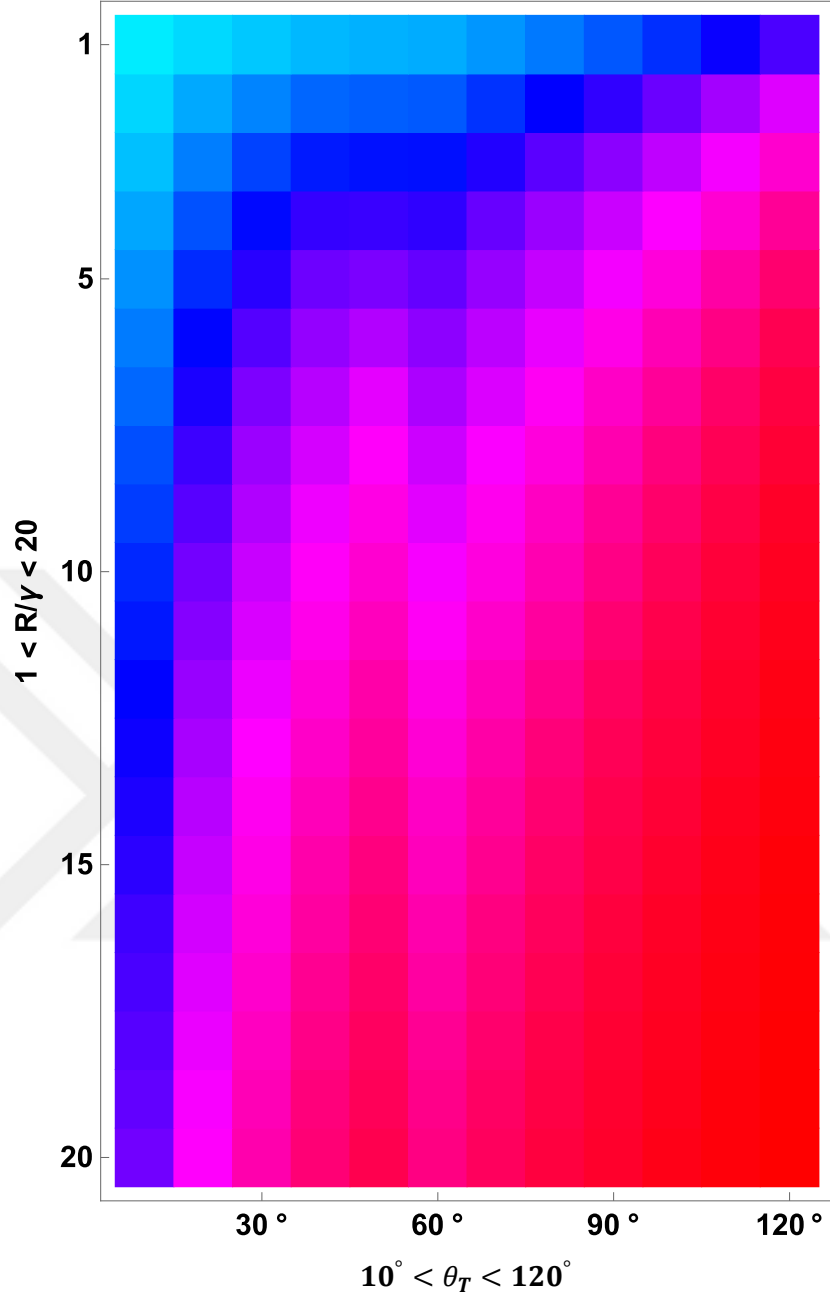


Şekil 6.32 : Parabol eksenli, değişken kesitli ($\eta = 0,1$) çubuğun birinci mod frekans oranlarının boyut parametresi R/γ ve toplam çubuk açıklığı θ_T ile değişimi.

Şekil 6.32’de, parabol eksenli, değişken kesitli ($\eta = 0,1$) ve narinlik oranı $\lambda = 50$ olan çubuğun, birinci mod frekans oranına boyut parametresi R/γ ve toplam açıklık θ_T ’nin etkisi görülmektedir. Küçük boyut parametresi R/γ ve küçük toplam açıklık θ_T değerlerinde, frekans oranının hızla arttığı, büyük boyut parametresi R/γ ve büyük toplam açıklık θ_T değerlerinde ise daha az etkilendiği görülmektedir.

Şekil 6.33’de, parabol eksenli, değişken kesitli ($\eta = 0,1$) ve narinlik oranı $\lambda = 50$ olan çubuğun, birinci mod frekans oranına boyut parametresi R/γ ve toplam açıklık θ_T ’nin etkisi farklı bir gösterimle verilmektedir.

Parabol Eksen, Değişken Kesit, $\eta = 0.1$, $\lambda = 50$



Şekil 6.33 : Parabol eksenli, değişken kesitli ($\eta = 0,1$) çubuğun birinci mod frekans oranlarının boyut parametresi R/γ ve toplam çubuk açıklığı θ_T ile değişiminin bir diğer gösterimi.



7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Tez kapsamında yapılan çalışmaların en önemli kısmı; literatürde daha önce bulunmayan şekilde, Eringen'in yerel olmayan elastisite teorisinde verilen denklemlerin, silindirik koordinatlarda düzenlenmesi ve bu denklemlerin çubuk teorisine uygulanması olmuştur., Doğrusal çubuklar için daha önce yapılan çalışmalarda, Eringen'in yerel olmayan elastisite teorisindeki denklemler, kartezyen koordinatlarda yazılarak, doğru eksenli çubuk denklemlerinde yerine konmuştur. Yerel olmayan elastisite teorisinin denklemlerinin, silindirik koordinatlarda yazılması, kartezyen koordinatlarda yazılmasına göre oldukça karmaşıktır. Ayrıca, silindirik koordinatlarda yazılmış olan bu denklemlerin, eğri eksenli çubuk teorisine uyarlanması da oldukça karmaşıktır. Eğri eksenli çubuklarla ilgili literatürde bulunan daha önceki çalışmalarda, genellikle, küçük eğrilik varsayımıyla, kartezyen koordinatlardaki denklemlere benzer yerel olmayan denklemler elde edilmiştir ve bunlara ait çözüm önerileri bulunmaktadır.

Eringen'in teorisinden elde edilen yerel olmayan ifadeler silindirik koordinatlarda yazılarak, çubuk kabulüyle düzenlenmiş ve eğri eksenli çubukların yerel teoriyle yazılmış denklemlerine uygulanmıştır. Böylece, eğri eksenli çubuklar için yerel olmayan elastisite teorisinin denklemleri elde edilmiştir. Bu düzenleme ile, düzlemsel eğri eksenli çubukların kendi düzlemlerindeki davranışlarını ifade eden denklemler elde edilmiştir. Bu denklemler, birçok probleme uygulanarak, elde edilen sonuçlar yerel teorisinin sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır. Literatürde, bu konuda yapılan çalışmaların hemen hemen tamamı, sonuçlarını yerel sonuçların oranları şeklinde vermektedir. Bu çalışmada da, benzer şekilde, sonuçlar, yerel teorisinin sonuçlarının bir oranı olarak verilmiştir. Çünkü, bu konuda ne deney sonucu ne de çözülmüş benzer örnek bulunamamıştır.

Statik davranışı ifade eden denklemler, değişken eğrilikli ve değişken kesitli çubukların düzlem içi problemleri için, eksenel uzama ve kayma deformasyonu etkilerini de içerecek şekilde ifade edilmiştir. Literatürden farklı olarak, eğilme momentinin yerel etkisinin yanında, eksenel kuvvetin ve kesme kuvvetinin de yerel

etkileri denklemlere dahil edilmiştir. Bütün bu etkilerle oldukça karmaşık hale gelen bu denklem sisteminin kesin analitik çözümü, başlangıç değerleri yöntemiyle elde edilmiştir. Literatürde, yapılan çalışmalarda, bu etkileri düşünen çalışmaya rastlanmamıştır. Ayrıca, değişken eğrilikli ve kesitli çubuğa, değişken yayılı yüklerin etkimesi durumu da göz önüne alınmış ve başlangıç değerleri yöntemiyle kesin çözümü elde edilmiştir. Çeşitli parametrelerin statik davranışa etkilerinin incelendiği, literatürde rastlanmayan detaylı bir parametrik analiz yapılmıştır. Boyut faktörü, narinlik oranı, çubuk açıklığı, mesnet ve yükleme şartlarının statik davranışa etkileri detaylı olarak araştırılmıştır.

Tekil yüklerin etkisinde bulunan çeşitli çubuk örnekleri çözülmüş ve yükün etkidiği noktadaki yer değiştirme ve dönme açısı ile bunların çubuk boyunca değişimlerinin analitik ifadeleri verilmiştir. Daha sonra, herhangi bir koordinatından normal kuvvet ve eğilme momentlerinin etkidiği ankastre-ankastre mesnetli çubukla ilgili problemler çözülmüştür. Yerel ve yerel olmayan teoriyle elde edilen yer değiştirme, dönme açısı ve kesit tesirleri diyagramları birlikte verilmiştir. Aynı problem, ankastre-mafsallı mesnetli çubuklar için tekrarlanmıştır.

Sonraki aşamada, eğri eksenli çubukların statik davranışına etki eden parametrelerin incelenmesine çalışılmıştır. Bu amaçla, ortasından etkiyen F_n normal kuvvetini taşıyan ankastre-ankastre mesnetli çubuk problemi ele alınmıştır. θ_T çubuk açıklığının, R/γ boyut parametresinin ve λ narinlik oranının statik davranışa etkisi incelenmiştir. Küçük λ narinlik oranlarında (kısa kalın çubuklarda), R/γ boyut parametresinin sonucu daha fazla etkilediği görülmektedir. Çubuk açıklığı küçüldüğünde bu etki azalmaktadır. Farklı çubuk açıklığı ve narinlik oranlarında, eksenel uzama ve kayma deformasyonunun yer değiştirme oranına etkileri de incelenmiştir. Eksenel uzamanın veya kayma deformasyonunun dahil edildiği durumlardaki gibi analiz sonuçları arasındaki farklılığın, narinlik oranı arttıkça arttığı görülmüştür. Tüm çubuk açıklığı ve narinlik oranları için eksenel uzamanın en önemli faktör olduğu tespit edilmiştir. Eksenel uzama ve kayma deformasyonu etkilerinin ihmal edildiği durumda, sadece eğilme etkisinin ana etki olduğu narin ve derin çubuklarda kabul edilebilir sonuçlar elde edildiği görülmüştür. Ayrıca, çubuk kısa ve kalın olduğunda kayma deformasyonu etkisinin de önem kazandığı tespit edilmiştir. Tüm etkilerin ihmal edildiği durumda (sadece eğilmenin yerel olmayan etkisi göz önüne alındığında), yer değiştirmeler yerel ve yerel olmayan teoriler için

aynı bulunmuştur. Li (2015) tarafından yapılan çalışmada tekil yük etkisindeki düz nano çubuklar için de benzer sonuçlar verilmiştir. Farklı narinlik oranlarına sahip çubuklar için, her iki teorinin verdiği momentlerin oranları incelenmiştir. Moment oranının; büyük açıklık değerlerinde, azalan narinlik oranı ile arttığı, çubuk açıklığı azaldıkça farklı narinlik oranları için ise birbirine yakın değerler aldığı görülmüştür. Narinlik oranı arttıkça, eksenel uzamanın dahil edildiği veya kayma deformasyonunun dahil edildiği durumlardaki analiz sonuçları arasındaki farklılık da artmıştır. Tüm açıklık değerleri için eksenel uzamanın en önemli etken olduğu görülmüştür. Tüm narinlik oranı değerlerinde, moment oranı, azalan açıklık değerlerine bağlı olarak artmaktadır. Sıgık etkisinin incelenmesinde, yerel ve yerel olmayan teorilerin sonuçları arasında önemli farklılıklar olduğu görülmüştür. Çubuk orta noktası için her iki teorinin verdiği sonuçların oranlarının, azalan çubuk açıklığı ile arttığı ve artan boyut parametresi değeri ile azaldığı tesbit edilmiştir. Farklı etkilerin analize dahil edildiği durumlar incelendiğinde, açıklığı $\theta_T = 30^\circ$ ve narinlik oranı $\lambda = 100$ olan çubuğun sadece orta noktadaki yer değiştirme değerinin değil, yer değiştirme karakteristiğinin de farklı olduğu görülmüştür. Çubuk narin (uzun ve ince) olsa dahi, eksenel uzama etkisinin sıgık çubuklar için önemli olduğu, bu nedenle, gerçekçi sonuçlar elde edebilmek için eksenel uzama ve kayma deformasyonu etkilerinin ihmal edilmemesi gerektiği tespit edilmiştir.

Açıklığı $\theta_T = 120^\circ$ ve narinlik oranı $\lambda = 150$ olan çubuk farklı sınır koşulları için incelendiğinde, yer değiştirme oranı u_0/u_{0L} 'nın boyut parametresi R/γ 'den en fazla etkilendiği sınır koşulunun ankastre-ankastre olduğu görülmüştür. Mafsal-ankastre veya mafsal-mafsal çubuklarda sabit bir çubuk açıklığı değeri için, eğer narinlik oranı azalırsa (kısa ve kalın çubuklar için), eğrilerin birbirine yakınlaştığı ve boyut etkisinin önemli ölçüde arttığı tespit edilmiştir.

$\theta_T = 120^\circ$, $\lambda = 50$, $R/\gamma = 1$ olan çubukların farklı yükleme ve mesnetleme koşulları için yer değiştirme oranı u_0/u_{0L} veya w_0/w_{0L} ve dönme açısı oranı Ω_{b0}/Ω_{b0L} değerleri eksenel uzama ve kayma deformasyonu etkilerini göz önüne alan ve almayan durumlar için tablo olarak verilmiştir. Tüm yükleme ve sınır koşulları için eksenel uzamanın en büyük etkiye sahip olduğu, kayma deformasyonu etkisinin kısa ve kalın çubuklar için mutlaka göz önünde bulundurulması gerektiği görülmüştür.

$\theta_T=120^\circ$ açıklığa sahip, sabit kesitli çember eksenli çubuğa normal eksen doğrultusunda değişken q_n yükünün etkimesi durumunda, yerel olmayan teorinin sonucunun, yerel teorinin sonucundan oldukça farklı olmasının yanı sıra, yerel teorinin moment diyagramının işaret değiştirdiği, yerel olmayan teoride ise hep aynı işaretli olduğu görülmüştür. F_n kuvvet diyagramında yerel teorinin kuvvet diyagramının, çubuğun tepe noktasının sağında ve solunda kalan bölgelerde birer kez işaret değiştirdiği, yerel olmayan teoride ise hep aynı bölgede olduğu görülmüştür. F_t kuvvet diyagramında ise, yerel ve yerel olmayan teorilerin kuvvet diyagramlarının aynı karakterde olduğu fakat sonuçların oldukça farklı olduğu tespit edilmiştir.

Artan narinlik oranıyla çubuk açıklığının etkisi artmakta ve yer değiştirme oranı u_o/u_{oL} , daha büyük çubuk açıklığı ve daha büyük narinlik oranı için negatif olmaktadır. Yer değiştirme oranının negatif olmasının anlamı klasik ve yerel olmayan teoriyle elde edilen yer değiştirme eğrisinin farklı olmasıdır. $\theta_T = 120^\circ$ olan çubukta yer değiştirme oranına boyut parametresinin etkisi artan narinlik oranıyla artmaktadır ve yer değiştirme oranı u_o/u_{oL} daha küçük boyut parametresi R/γ ve daha büyük narinlik oranı için negatif olmaktadır. Narinlik oranı $\lambda = 100$ olan çubuğun yer değiştirme oranı u_o/u_{oL} , boyut parametresi R/γ 'nin ve açıklık değeri θ_T 'nin küçük değerleri için artmaktadır.

Sabit kesitli çember eksenli mafsalsal-mafsalsal sınır koşullarına sahip açıklığı $\theta_T = 120^\circ$, narinlik oranı $\lambda = 150$ olan üniform q_n yayılı yüküyle yüklü çubuğun boyut parametresi $R/\gamma = 2$ ve $R/\gamma = 10$ için elde edilen yer değiştirme diyagramlarından tepe noktasındaki yer değiştirmelerin ve eğrilerin karakteristiklerinin farklı olduğu tespit edilmiştir. Boyut parametresi R/γ arttıkça bu farkın azaldığı gözlenmiştir. Narinlik oranı azaldıkça yer değiştirmeler arasındaki farkın azaldığı tespit edilmiştir. Narinlik oranı $\lambda = 50$ olan çubuk için, yer değiştirmelerin kayma deformasyonu etkisinin dahil edildiği durum için ve bütün etkilerin ihmal edildiği durum için hemen hemen aynı olduğu görülmüştür. Eksenel uzamanın dahil edildiği durum ile bütün etkilerin dahil edildiği durumda da hemen hemen aynı sonuçlar elde edilmiştir. Çubuk kısa ve kalın ise (küçük narinlik oranı), eksenel uzama ve kayma deformasyonu etkilerinin dahil olup olmaması durumları arasındaki farkın beklenildiği gibi önemli olduğu tespit edilmiştir. Boyut parametresi R/γ arttığında, durumlar arasındaki farkın önemli olduğu ve yer değiştirme karakteristiklerinin de farklı hale geldiği görülmüştür. Uzun ve ince çubuk (büyük

narinlik oranı) için, durumlar arasındaki fark beklenildiği gibi ihmal edilebilir hale geldiği gözlenmiştir. Yalnızca kayma deformasyonunu dahil eden ve bütün etkileri ihmal eden durumlar için hemen hemen hiç deformasyon gözlenmemiştir. Bununla beraber, bu durumlar için yerel olmayan teoriyle elde edilen yer değiştirmeler sıfır değildir. Açıklığı $\theta_T = 30^\circ$ olan çubuk incelendiğinde ise, farklı durumlar için yer değiştirmeler arasındaki farkın daha büyük olduğu ve eğri formlarının küçük çubuk açıklığına sahip çubuklar için kesinlikle farklı olduğu görülmüştür. Mafsalsal-mafsalsal sınır şartlarına sahip çubukta, yerel ve yerel olmayan teoriyle elde edilen yer değiştirme eğrilerinin çubuk açıklığının daha büyük değerleri için tamamıyla farklı olduğu, azalan narinlik oranıyla birlikte yer değiştirme eğrilerinin benzer olduğu görülmüştür. Yer değiştirme oranı, nispeten büyük çubuk açıklığı θ_T değerleri için, boyut parametresi R/γ 'nın azalan değerlerinde negatif yönde arttığı ve daha küçük çubuk açıklığı değerleri için klasik ve yerel olmayan teoriyle elde edilen yer değiştirme eğrilerinin benzer olduğu tespit edilmiştir. Ancak, nispeten daha büyük narinlik oranı için eğrilerin biçimlerinin farklı olduğu gözlenmiştir. Daha küçük narinlik oranı ve daha büyük çubuk açıklığı için, klasik ve yerel olmayan teoriyle elde edilen yer değiştirme eğrileri arasında farklı karakteristikler gözlenmiştir. Uzun ve ince bir çubuk (narin) için, daha küçük çubuk açıklığında da yer değiştirme eğrilerinin karakteristiklerinin farklı olduğu görülmüştür.

Artan narinlik oranıyla çubuk açıklığının etkisinin arttığı ve yer değiştirme oranı u_o/u_{oL} 'nın daha büyük çubuk açıklığı ve daha büyük narinlik oranı için negatif olduğu görülmüştür. Yer değiştirme oranının negatif olmasının anlamı klasik ve yerel olmayan teoriyle elde edilen yer değiştirme eğrisinin farklı olmasıdır. $\theta_T = 120^\circ$ olan çubukta yer değiştirme oranına boyut parametresinin etkisi artan narinlik oranıyla arttığı ve yer değiştirme oranı u_o/u_{oL} 'nın daha küçük boyut parametresi R/γ ve daha büyük narinlik oranı için negatif olduğu gözlenmiştir. Narinlik oranı $\lambda = 100$ olan çubuğun yer değiştirme oranı u_o/u_{oL} , nın boyut parametresi R/γ 'nin ve açıklık değeri θ_T 'nin küçük değerleri için arttığı tespit edilmiştir.

Mafsalsal-mafsalsal mesnetli $R/\gamma = 1$ olan çubuğun moment oranı M_{bo}/M_{boL} 'nın azalan çubuk açıklığı θ_T değeriyle bütün λ değerleri için arttığı görülmüştür. Moment oranının, her açıklık değeri için, λ değerinin değişiminden oldukça etkilendiği gözlenmiştir. Açıklığı $\theta_T = 120^\circ$ olan çubuğun moment oranının, daha büyük λ ve daha küçük R/γ değerleri için hızla değiştiği tespit edilmiştir. Her λ değeri için,

R/γ 'nın büyük değerlerinde, moment oranının daha az değiştiği ve moment oranı M_{bo}/M_{boL} 'nin çubuk açıklığı ve narinlik oranının bütün değerleri için boyut parametresi R/γ 'dan etkilendiği görülmüştür. Boyut parametresi R/γ 'nın her değeri için değişen çubuk açıklığıyla birlikte moment oranının biraz değiştiği tespit edilmiştir.

Değişken kesitli ve parabol eksenli $\theta_T=120^\circ$ açıklığa sahip, normal eksen doğrultusunda değişken q_n yayılı yükünün etkidiği çubuğun yer değiştirme grafiğinden, yerel ve yerel olmayan teorilerin sonuçlarının oldukça farklı olduğu, yerel teoriyle hesaplanan sonuçların, nano boyutlardaki problemler için yetersiz kalacağı görülmüştür. Yerel ve yerel olmayan teorilerin grafiklerinin karakter olarak farklı olduğu da dikkat çekici bir durum olarak belirtilmiştir. Eğilme momenti diyagramları incelendiğinde, yerel teoriyle hesaplanan değerlerin ihmal edilecek mertebelerde kaldığı, yerel olmayan teorisinin sonuçlarının önemli ölçüde farklı olduğu gözlenmiştir. Bu farklılığın, boyut parametresi R/γ değerinin büyümesiyle ortadan kalktığı görülmüştür.

Statik davranışı ifade eden denklemler kullanılarak, D'Alembert prensibiyle, dinamik davranışı ifade eden denklemler elde edilmiştir. Dinamik kütle kuvvetleri, yayılı yükler olarak ifade edilmiş ve denklemler düzenlenmiştir. Böylece düzenlenen titreşim denklemlerinin kesin çözümü başlangıç değerleri yöntemiyle elde edilmiştir. Kesin çözüm, sadece sabit eğrilikli ve sabit kesitli çubuk durumunda mevcuttur. Bu da, çember eksenli uniform kesitli çubuğa karşı gelmektedir.

Düzlem içi titreşimleri ifade eden denklemlerde, eksenel uzama ve kayma deformasyonu etkilerinin yanında, dönme eylemsizliği etkisi de göz önüne alınmıştır. Dönme eylemsizliği etkisinin de yerel olmayan terimleri bu denklemlerde yer almaktadır. Literatürde, bu etkileri düşünen bir çalışmaya rastlanmamıştır. Ayrıca, literatürde rastlanmayan, çeşitli parametrelerin (boyut faktörü, narinlik oranı, çubuk açıklığı ve mesnetleme şartları) serbest titreşimlere olan etkileri incelenerek, detaylı bir parametrik analiz yapılmıştır. Eğri eksenli çubukların titreşim mod şekilleri de çizilmiştir.

Daha sonra, çember eksenli sabit kesitli çubukların kesin çözüm yöntemi kullanılarak, değişken eğrilikli ve değişken kesitli çubukların serbest titreşimleri incelenmiştir. Değişken eğrilikli ve değişken kesitli çubuk, küçük bölgelere

ayrılarak, her bir bölgenin ortalama bir sabit eğriliği ve sabit kesiti olduğu düşünülerek, bir çözüm yöntemi geliştirilmiştir. Birçok çember eksenli sabit kesitli çubuk parçasından oluştuğu varsayılan, değişken eğrilikli ve değişken kesitli çubuğun titreşimleri, çember eksenli sabit kesitli çubuklar için kullanılan başlangıç değerleri yöntemiyle çözülmüştür.

Çember eksenli sabit kesitli çubuğun yerel ve yerel olmayan frekans oranları ω_{nl}/ω_l nın, boyut parametresi R/γ ile değişimi ($\theta_T = 30^\circ$ ve $\lambda = 50, 150$) ve ($\theta_T = 120^\circ$ ve $\lambda = 50, 150$) durumları için incelendiğinde; küçük çubuk açıklığı değerlerinde, narinlik oranı arttıkça, frekans oranının boyut parametresinden daha çok etkilendiği, büyük açıklık değerlerinde ise narinlik oranının değişiminin etkisinin daha az olduğu görülmüştür. Ankastre-ankastre mesnetli çubuğun, çeşitli açıklık, narinlik ve boyut parametresi değerleri için frekansları, hem yerel olmayan hem de yerel teorinin verdiği denklemler kullanılarak elde edilmiştir. Açıklığı $\theta_T = 30^\circ$ ve narinlik oranı $\lambda = 150$ olan çubuk için yerel ve yerel olmayan teorilerin ikinci mod şekillerinin birbiriyle aynı olduğu görülmüştür. Aynı çubuk için yerel teorinin hesapladığı mod şeklinin, eğilme şekil değiştirmesi baskın şekilde oluştuğu, buna karşın, yerel olmayan teorinin hesapladığı mod şeklinin ise, eksenel şekil değiştirmenin daha baskın olarak, eğilme şekil değiştirmesinden oluştuğu tespit edilmiştir. Dördüncü modda ise yerel ve yerel olmayan teorilerin hesapladığı mod şekillerinin birbirlerine benzediği görülmüştür.

Açıklığı $\theta_T = 120^\circ$ ve narinlik oranı $\lambda = 150$ olan çubuğun yerel ve yerel olmayan teorilerin hesapladığı birinci mod şekillerinin benzer karakterde olduğu görülmüştür. Bu çubuğun birinci mod şeklinin, açıklığı $\theta_T = 30^\circ$ ve narinlik oranı $\lambda = 150$ olan çubuğun birinci modundan farklı olduğu, ikinci modunun ise benzediği dikkat çekmektedir (Tüfekci, 2001). Bu, yerel teoride görülen mod geçişinin, yerel olmayan teoriyle hesaplanan sonuçlarda da görüldüğünü ortaya koymaktadır. Bu çubuğun ikinci, üçüncü ve dördüncü mod şekillerinin her iki teoride de aynı olduğu görülmüştür.

Çember eksenli sabit kesitli çubuklarda, boyut parametresi R/γ 'nın frekans üzerindeki etkisi incelenmiştir. Bunun için, açıklığı $\theta_T = 60^\circ$ ve narinlik oranı $\lambda = 50$ olan çubuğun birinci doğal frekanslarına olan etki ele alınmıştır. Bu çubuk için, aynı malzemedan yapılmış, yani γ 'nın değerinin sabit tutulduğu, R yarıçapının değiştiği çubuklar ele alınmıştır. Yani, R/γ 'nın artışıyla, R yarıçapı değiştirilmiştir.

Açıklığı $\theta_T = 60^\circ$ ve narinlik oranı $\lambda = 50$ olan çubuğun, artan R/γ değerleriyle, birinci boyutsuz frekansının bir değere yakınsadığı, yani yerel olmayan etkinin azaldığı görülmüştür. Açıklığı $\theta_T = 60^\circ$ ve narinlik oranı $\lambda = 50$ ve $\gamma = 2$ olan çubukta, artan R/γ değerleriyle, birinci doğal frekansın bir değere yakınsadığı, yani yerel olmayan etkinin öneminin azaldığı tespit edilmiştir. Boyutsuz frekansın artması ve frekans değerinin ise azalmasıyla bu iki sonucun çelişiyor gibi görünmesinin nedeninin, R yarıçapının değişmesinin olduğu görülmüştür.

Boyut parametresi R/γ 'nın ve θ_T 'nin küçük değerlerinde doğal frekansın önemli değişimler gösterdiği, büyük R/γ ve θ_T değerlerinde ise, frekansın pek etkilenmediği görülmüştür. Ankastre-ankastre mesnetli çubuğun birinci doğal frekansının R/γ ile değişimi ($\theta_T = 60^\circ$, $\lambda = 50$) incelendiğinde aynı θ_T değeri için artan R değeriyle, doğrusal çubuğa yakınsandığı gözlenmiştir. Aynı çubuk için yerel olmayan teoriyle hesaplanan boyutsuz frekans katsayısına R/γ 'nın etkisi incelenmiş, artan R/γ değerleriyle, boyutsuz frekansın bir değere yakınsadığı, yani yerel olmayan etkinin azaldığı görülmüştür. Açıklık değeriyle boyutsuz frekansın değişimi de beklendiği gibi, küçük değerlerde hızlı bir artma ve sonrasında ise nispeten yavaş bir azalma gösterdiği tespit edilmiştir.

Boyut parametresi R/γ 'nın artmasıyla boyutsuz frekanslar oranının bir değere yakınsadığı görülmüştür. ($\theta_T = 60^\circ$, $\lambda = 50$). Narinlik oranı ($\lambda = 50$) için, boyut parametresi R/γ 'nin ve toplam açıklık θ_T 'nin büyük değerlerinde, boyutsuz frekanslar oranının hemen hemen sabit kaldığı ve R/γ ile θ_T 'nin küçük değerlerinde ise önemli değişiklikler gösterdiği görülmüştür.

Kesit değişim katsayısı $\eta = 0,1$ ve $\lambda = 50$ olan çember eksenli çubuğun, küçük R/γ ve küçük θ_T değerlerinde, birinci mod frekans oranı hızla değişmekte, büyük R/γ ve büyük θ_T değerlerinde ise 1 değerine yakınsamakta olduğu görülmüştür. Kesit değişim katsayısı $\eta = 0,1$ ve $\lambda = 150$ olan çember eksenli çubukta ise, küçük R/γ ve küçük θ_T değerlerinde, ikinci mod frekans oranı hızla değişmekte, büyük R/γ ve büyük θ_T değerlerinde ise 1 değerine yakınsamakta olduğu görülmüştür.

Kesit değişim katsayısı $\eta = 0,1$ olan parabol eksenli, değişken kesitli ve açıklığı $\theta_T = 120^\circ$ olan çubuğun, boyut parametresi R/γ ve narinlik oranı λ 'nın küçük değerlerinde, boyutsuz frekans değişiminin önemli olduğu, büyük değerlerinde ise bunların değişiminden fazla etkilenmediği görülmüştür. Parabol eksenli, değişken

kesitli ve narinlik oranı $\lambda = 100$ olan çubukta ise, boyut parametresi R/γ ve toplam açıklık θ_T 'nin küçük değerlerinde, boyutsuz frekans değişiminin önemli olduğu, büyük değerlerinde ise bunların değişiminden fazla etkilenmediği görülmüştür.

Parabol eksenli, değişken kesitli, narinlik oranı $\lambda = 100$ ve boyut parametresi $R/\gamma = 1$ olan çubukta, toplam açıklık θ_T 'nin küçük değerlerinde, boyutsuz frekansın hızla arttığı, belli bir açı değerinden sonra ise biraz daha yavaş azaldığı görülmüştür. Bu, yerel teoremin sonucuna benzemektedir. Ancak yerel teorideki azalmanın daha az olduğu gözlenmiştir. Parabol eksenli, değişken kesitli ($\eta = 0,1$) ve narinlik oranı $\lambda = 50$ olan çubuğun, küçük boyut parametresi R/γ ve küçük toplam açıklık θ_T değerlerinde, birinci mod frekans oranının hızla arttığı, büyük boyut parametresi R/γ ve büyük toplam açıklık θ_T değerlerinde ise daha az etkilendiği görülmüştür.

Yerel olmayan teoremin verdiği frekans değerlerinin, yerel teoremin sonuçlarından daima küçük olduğu, boyut parametresi büyüdükçe, sonuçların yerel teoremin sonuçlarına yakınsadığı görülmüştür. Çubuk açıklığı ve narinlik oranının doğal frekanslara etkisi de, beklenildiği gibi, yerel olmayan teorideki ile benzerdir.

Yerel olmayan teoremin sonuçlarının yerel teoremin sonuçlarından, özellikle küçük ölçekli sistemler incelendiğinde, oldukça farklı olduğu görülmüştür. Burada geliştirilen yöntemin, diferansiyel denklemin kesin analitik çözümü olması nedeniyle, sayısal çözüm veren veya moleküler dinamik benzeşimi gibi yöntemleri kullanan benzer çalışmalardan daha doğru ve hızlı sonuçlar verdiği görülmüştür. Moleküler dinamik benzeşimini kullanan çalışmaların başarısı modelin gelişmiş olmasına bağlı olmasına rağmen, bunu çözecek bilgisayar donanımının kapasitesiyle sınırlı kalmaktadır. Bu da, çözüm için harcanan emeğin ve zamanın çok fazla olduğunu göstermektedir. Burada geliştirilen yöntemle, oldukça hızlı ve güvenilir çözümler elde edilecektir.

Bu çalışmadan sonra, uzaysal eğri çubuklar için denklemler düzenlenebilir. Böylece, DNA sarmalları gibi uzaysal eğri eksenli çubuk problemlerinin kesin analitik çözümlerinin elde edilmesi mümkün olabilir. Bu denklemler kullanılarak, eğri eksenli çubukların kararlılık problemlerinin de incelenmesi mümkün olabilir. Ayrıca burada geliştirilen kesin analitik çözüm yöntemiyle, yerel olmayan bir çubuk sonlu elemanı geliştirilebilir.



KAYNAKLAR

- Abramowitz, M., Stegun, I. A.** (1972). *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. 9. baskı, New York: Dover, p. 11.
- Akgoz, B., Civalek, O.** (2012). Longitudinal vibration analysis for microbars based on strain gradient elasticity theory. *Journal of Vibration and Control*, 20, 606-616.
- Akgoz, B., Civalek, O.** (2013). Buckling analysis of linearly tapered micro-columns based on strain gradient elasticity. *Structural Engineering and Mechanics*, 48 (2), 195-205.
- Alotta, G., Giuseppe, F., Massimiliano, Z.** (2014). Finite element method for a nonlocal Timoshenko beam model. *Finite Element Analysis and Design*, 89, 77-92
- Ansari, R., Oskouie, F. M., Sadeghi, F., Bazdid-Vahdati, M.** (2015). Free vibration of fractional viscoelastic Timoshenko nanobeams using the nonlocal elasticity theory. *Physica E*, 74, 318-327.
- Anthoine, A.** (2000). Effect of couple-stresses on the elastic bending of beams. *International Journal of Solids and Structures* 37, 1003-1018.
- Arash, B., Jiang, J.W., Rabczuk, T.** (2015). A review on nanomechanical resonators and their applications in sensors and molecular transportation. *Applied Physics Reviews*, 2, 021301:1-20.
- Arash, B., Wang, Q., Duan, W. H.** (2011). Detection of gas atoms via vibration of graphenes. *Physics Letter A*, 375 (24), 2411–2415.
- Arash, B., Wang, Q.** (2012). A review on the application of nonlocal elastic models in modeling of carbon nanotubes and graphenes. *Computational Materials Science*, 51, 303-313.
- Arefi, A. and Salimi, M.** (2015). Investigations on vibration and buckling of carbon nanotubes with small initial curvature by nonlocal elasticity theory. *Fullerenes, Nanotube Carbon Nanostructures* 23, 105-112.
- Artan R., Tepe A.** (2011). Nonlocal Effects in Curved Single-Walled Carbon Nanotubes. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 18 (5), 347-351.
- Bağdathı, S.M.** (2015). Non-linear vibration of nanobeams with various boundary condition based on nonlocal elasticity theory. *Composites: Part B*, 80, 43-52.
- Baretta, R., Marotti de Sciarra, F., Diaco, M.** (2014). Small-scale effects in nanorods. *Acta Mechanica*, 225 (7) 1945-1953.
- Baretta, R., Feo, L., Luciano, R.** (2015). Torsion of functionally graded nonlocal viscoelastic circular nanobeams. *Composites: Part B*, 72, 217, 222.

- Behera, L., Chakraverty, S.** (2014). Free vibration of nonhomogeneous Timoshenko nanobeams. *Meccanica*, 49 (1):51-67.
- Berrabah, H. M., Tounsi, A., Semmah, A., Bedia, E. A. A.** (2013). Comparison of various refined nonlocal beam theories for bending, vibration and buckling analysis of nanobeams. *Structural Engineering and Mechanics*, 48 (3), 351-365.
- Bradshaw, R. D., Fisher, F. T. and Brinson, L. C.** (2003). Fiber waviness in nanotube-reinforced polymer composites-II: Modeling via numerical approximation of the dilute strain concentration tensor. *Composites Science and Technology*, 63, 1705-1722.
- Conley, W.G., Rhoads, F., Raman, A., Krousgrill, C.M., Yu, L., Mohammadi, S.** (2009). Exploiting parametric effects in resonant nanosystems. *The NSF Engineering Research and Innovation Conference*, Honolulu, Hawaii.
- Craighead, H. G.** (2000). Nanoelectromechanical systems. *Science*, 290 (5496), 1532-1535.
- Dequesnes, M., Tang, S., Aluru, N.R.** (2004). Static and dynamic analysis of carbon nanotube-based switches. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 126, 230–237.
- Ekinci, K. L.** (2005). Electromechanical transducers at the nanoscale: Actuation and sensing of motion in nanoelectromechanical systems (NEMS), *Small*, 1 (8-9), 786-797.
- Elishakoff, I., Pentaras, D.** (2009). Natural frequencies of carbon nanotubes based on simplified Bresse-Timoshenko theory. *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience*, 6 (7), 1527-1531.
- Eltaher, M. A., Alshorbagy, A. E. and Mahmoud, F. F.** (2014). Vibration analysis of Euler-Bernoulli nanobeams by using finite element method. *Applied Mathematical Modelling*, 37, 4787-4797.
- Eringen, A. C.** (1967). Theory of micropolar plates. *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik*, 18, 12-30.
- Eringen, A. C.** (1972). Linear theory of nonlocal elasticity and dispersion of plane waves. *International Journal of Engineering Science*, 10, 425–435.
- Eringen, A. C.** (1983). On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves. *Journal of Applied Physics*, 54, 4703-4710.
- Fisher, F. T., Bradshaw, R. D. and Brinson, L. C.** (2003). Fiber waviness in nanotube-reinforced polymer composites-I: Modulus predictions using effective nanotube properties. *Composites Science and Technology*, 63 1689-1703.
- Georgantzinos, S.K., Giannopoulos, G.I., Anifantis, N.K.** (2009). An efficient numerical model for vibration analysis of single-walled carbon nanotubes. *Computational Mechanics*, 43 (6), 731-741.

- Guo, R., Barisci, J. N., Innis, P. C., Too, C. O., Wallace, G. G., Zhou, D.** (2000). Electrohydrodynamic polymerization of 2-methoxyaniline-5-sulfonic acid. *Synthetic Met*, 114 (3), 267-272.
- Guven, U.** (2014). Transverse vibrations of single-walled carbon nanotubes with initial stress under magnetic field. *Composite Structures*. 0263-8223.
- Guven, U.** (2014). A generalized nonlocal elasticity solution for the propagation of longitudinal stress waves in bars. *European Journal of Mechanics - A/Solids*. 45, 75–79.
- Hadjesfandiari, A.R., Dargush, G.F.** (2011). Couple stress theory for solids. *International Journal of Solids and Structures*, 48, 2496-2510.
- Harik, V. M.** (2001). Ranges of applicability for the continuum beam model in the mechanics of carbon nanotubes and nanorods. *Solid State Communications*, 120, 331-335.
- Huang, C., Ye, C., Wang, S., Stakenborg, T., Lagae, L.** (2012). Gold nanoring as a sensitive plasmonic biosensor for on-chip DNA detection. *Applied Physics Letter*, 100, 173114.
- Joshi, A.Y., Sharma, S.C., Harsha, S.P.** (2011). Zeptogram scale mass sensing using single walled carbon nanotube based biosensors. *Sensors and Actuators A*, 168, 275-280.
- Joshi, A. Y., Sharma, S. C. and Harsha, S. P.** (2010). Dynamic analysis of a clamped wavy single walled carbon nanotube based nanomechanical sensors. *Journal of Nanotechnology in Engineering and Medicine*, 1, 031007-7.
- Kiani, K.** (2014). Axial buckling analysis of vertically aligned ensembles of single-walled carbon nanotubes using nonlocal discrete and continuous models. *Acta Mechanica*, 225 (12) 3569-3589.
- Koiter, W.T.** (1964). Couple-stresses in the theory of elasticity: I and II. *Proceedings of the Koninklijke Nederlands Akademie Van Wetenschappen B67*, 17-44.
- Kong, J., Franklin, N.R., Zhou, C., Chapline, M.G., Peng, S., Cho, K., Dai, H.** (2000). Nanotube molecular wires as chemical sensors. *Science*, 287, 622-625.
- Kumar, R.R., Rao, K.N., Phani, A.R.** (2012). Growth of silicon nanowires by electron beam evaporation using indium catalyst. *Materials Letters*, 66, 110-112.
- Li, C., Chen, L., Shen, J.P.** (2015a). Vibrational Responses of Micro/Nanoscale Beams: Size-Dependent Nonlocal Model Analysis Comparisons. *Journal of Mechanics*, 31, 7-19.
- Li, C., Chou, T. W.** (2003). Single-walled carbon nanotubes as ultra-high frequency nanomechanical resonators. *Physical Review B*, 68 (7), 073405
- Li, C., Yao, L., Chen, W., Li, S.** (2015b). Comments on nonlocal effects in nano-cantilever beams. *International Journal of Engineering Science*, 87, 47-57.

- Lee, S.W., Campbell, E.E.B.** (2013). Nanoelectromechanical devices with carbon nanotubes. *Current Applied Physics*, 13, 1844-1859.
- Liu, Y. P., Reddy, J. N.** (2011). A nonlocal curved beam model based on a modified couple stress theory. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 11 (3), 495-512.
- Mahmoud, F. F., Eltaher, M. A., Alshorbagy, A. E. and Meletis, E.I.** (2012) Static analysis of nanobeams including surface effects by nonlocal finite elements. *Journal of Mechanical Science and Technology* 26, 3555-3563
- Marotti de Sciarra, F.** (2014). Finite element modelling of nonlocal beams. *Physica E*, 59, 144-149.
- Mayoof, F. N., Hawwa, M. A.** (2009). Chaotic behavior of a curved carbon nanotube under harmonic excitation. *Chaos, Solitons & Fractals*, 42 (3), 1860-1867.
- McFarland, A.W., Colton, J.S.** (2005). Role of material microstructure in plate stiffness with relevance to microcantilever sensors. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 15, 1060-1067.
- Narendar, S., Mahapatra, D. R. and Gopalakrishnan, S.** (2011). Prediction of nonlocal scaling parameter for armchair and zigzag single-walled carbon nanotubes based on molecular structural mechanics, nonlocal elasticity and wave propagation. *International Journal of Engineering Science*, 49, 509-522.
- Ouakad, H.M., Younis, M.I.** (2010). The dynamic behavior of MEMS arch resonators actuated electrically. *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 45, 704-713.
- Paola, M. D., Giuseppe, F., Massimiliano Z.** (2013). Non-local stiffness and damping models for shear-deformable beams. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 40, 69-83
- Peddie, J., Buchanan, G. R. and McNitt, R. P.** (2003). Application of nonlocal continuum models to nanotechnology. *International Journal of Engineering Science*, 41, 305-312.
- Phadikar, J. K. and Pradhan, S. C.** (2010). Variational formulation and finite element analysis for nonlocal elastic nanobeams and nanoplates. *Computational Materials Science*, 49 (3), 492-499.
- Polizzotto, C., Fuschi, P., Pisano, A. A.** (2006). A nonhomogeneous nonlocal elasticity model. *European Journal of Mechanics a-Solid*, 25 (2), 308-333
- Poot, M. B., Witkamp, M. A., Van der Zant, H. S. J.** (2007). Modelling suspended carbon nanotube resonators. *Physica Status Solidi B*, 244 (11), 4252-4256
- Chiu, H.-Y., Hung, P., Postma, H.W.Ch., Bockrath, M.** (2008). Atomic-Scale Mass Sensing Using Carbon Nanotube Resonators. *Nano Letters*, 8, 4342-4346.

- Povstenko, Y. Z.** (1995). Straight disclinations in nonlocal elasticity. *International Journal of Engineering Science*, 33 (4), 575-582.
- Pradhan, S. C., Sarkar, A.** (2009). Analyses of tapered fgm beams with nonlocal theory. *Structural Engineering and Mechanics*, 32 (6), 811-833.
- Rafiee, R., Monghadam, R. M.** (2014). On the modeling of carbon nanotubes: A critical review. *Composites Part B: Engineering*, 56, 435-449.
- Reddy, J. N.** (2007). Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams. *International Journal of Engineering Science*, 45, 288-307.
- Roukes, M.** (2001). Nanoelectromechanical systems face the future. *Physics World*, 14, 25-31.
- Salvetat, J.P., Briggs, G.A.D., Bonard, J.M., Bacsá, R.R., Kulik, A.J., Stöckli, T.** (1999). Elastic and shear moduli of single-walled carbon nanotube ropes. *Physical Review Letters*, 82, 944-947.
- Salvetat, J.P., Briggs, G.A.D., Bonard, J.M., Bacsá, R.R., Kulik, A.J., Stöckli, T., de Sciarra, F.M.** (2014). Finite element modelling of nonlocal beams. *Physica E*, 59, 144-149.
- Sarvestani, H.Y., Naghashpour, A.** (2015). Curved Nanotube Structures under Mechanical Loading. *Journal of Nanomaterials*, ID:958138.
- Sedighi, H. M.** (2014a). The influence of small scale on the pull-in behavior of nonlocal nanobridges considering surface effect, Casimir and van der Waals attractions. *International Journal of Applied Mechanics*, 6 (3) Article Number: 1450030 DOI: 10.1142/S1758825114500306.
- Sedighi, H. M.** (2014b). Size-dependent dynamic pull-in instability of vibrating electrically actuated microbeams based on the strain gradient elasticity theory. *Acta Astronautica*, 95, 111–123.
- Sedighi, H. M., Daneshmand, F.** (2014). Static and dynamic pull-in instability of multi-walled carbon nanotube probes by He's iteration perturbation method. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 28 (9), 3459-3469.
- Sedighi, H. M., Daneshmand, F., Abadyan, M.** (2015a). Modeling the effects of material properties on the pull-in instability of nonlocal functionally graded nano-actuators. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 1-16 DOI 10.1002/zamm.201400160
- Sedighi, H. M., Daneshmand, F., Abadyan, M.** (2015b). Modified model for instability analysis of symmetric FGM double-sided nano-bridge: Corrections due to surface layer, finite conductivity and size effect. *Composite Structures*, 132, 545–557.
- Shao, L. H., Luo, R. Y., Bai, S. L., Wang, J.** (2009). Prediction of effective moduli of carbon nanotube-reinforced composites with waviness and debonding. *Composite Structures*, 87, 274-281.
- Srivastava, D., Wei, C.** (2003). Nanomechanics of carbon nanotubes and composites. *Applied Mechanics Reviews*, 56, 215-230.

- Taghizadeh, M., Oversy, H.R., Ghannadpour, S.A.M.** (2015). Nonlocal integral elasticity analysis of beam bending by using finite element method. *Structural Engineering and Mechanics*, 54 (4), 755-769.
- Treacy, M. M. J., Ebbesen, T. W., Gibson, J. W.** (1996). Exceptionally high Young's modulus observed for individual carbon nanotubes. *Nature*, 381 (6584), 678-680
- Tufekci, E., Dogruer, O. Y.** (2006). Exact solution of out-of-plane problems of an arch with varying curvature and cross section. *Journal of Engineering Mechanics-ASCE*, 132 (6), 600-609.
- Tufekci, E.** (2001). Exact solution of free in-plane vibration of shallow circular arches. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 1, 409-428.
- Tufekci, E., Arpacı, A.** (1998). Exact solution of in-plane vibrations of circular arches with account taken of axial extension, transverse shear and rotatory inertia effects. *Journal of Sound and Vibration*, 209 (5), 845-856.
- Tufekci, E., Arpacı, A.** (2006). Analytical solutions of in-plane static problems for non-uniform curved beams including axial and shear deformations. *Structural Engineering and Mechanics*, 22 (2), 131-150.
- Vardoulakis, I., Giannakopoulos, A.E.** (2006). An example of double forces taken from structural analysis. *International Journal of Solids and Structures*, 43, 4047-4062.
- Wang, B., Zhao, J., Zhou, S.** (2010). A micro scale Timoshenko beam model based on strain gradient elasticity theory. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 29, 591-599.
- Wang, C. M., Zhang, Y. Y., Ramesh, S. S. and Kitipornchai, S.** (2006). Buckling analysis of micro- and nano-rods/tubes based on nonlocal Timoshenko beam theory. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 39, 3904-3909.
- Wang, C.M., Xiang, Y., Yang, J., Kitipornchai, S.** (2012). Buckling of nano-rings/arches based on nonlocal elasticity. *International Journal of Applied Mechanics*, 4, 1250025-1250025-13
- Wang, Q.** (2005) Wave propagation in carbon nanotubes via nonlocal continuum mechanics. *Journal of Applied Physics*, 89, 124301.
- Wang, Q., Shindo, Y.** (2006). Nonlocal continuum models for carbon nanotubes subjected to static loading. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 1, 663-680.
- Witkamp, B., Poot, M., Van der Zant, H.S.J.** (2006). Bending-mode vibration of a suspended nanotube resonator. *Nano Letters* 6 (12), 2904–2908
- Zenkour, A.M., Sobhy, M.** (2015). A simplified shear and normal deformations nonlocal theory for bending of nanobeams in thermal environment. *Physica E*, 70, 121-128.

- Zemri, A., Houari, M. S. A., Bousahla, A. A., Tounsi, A.** (2015). A mechanical response of functionally graded nanoscale beam: an assessment of a refined nonlocal shear deformation theory beam theory. *Structural Engineering Mechanics*, 54 (4), 693-710.
- Zhang, Z., Wang C. M., Challamel, N.** (2015). Eringen's length-scale coefficients for vibration and buckling of nonlocal rectangular plates with simply supported edges. *Journal of Engineering Mechanics*, 141 (2), 04014117
- Zhao, Q., Gan, Z. H., Zhuang, O. K.** (2002). Electrochemical sensors based on carbon nanotubes. *Electroanalysis*, 14 (23), 1609-13.





ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : Olcay Oldaç
Doğum Tarihi ve Yeri : 03.07.1975 - Adana
E-posta : olcay_oldac@yahoo.com.tr
olcay.oldac@tr.kspg.com



ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 1998, İ.T.Ü, Makina, Makina Mühendisliği
- **Yükseklisans** : 2000, İ.T.Ü, Makina Mühendisliği, İmalat

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLER:

- 1999-2003 yılları arasında İstanbul Teknik Üniversitesi Makine Fakültesi Mukavemet Birimin'de Araştırma Görevlisi olarak çalıştı.
- 2003-2004 yılları arasında GU Yapı Elemanları'nda Ürün Geliştirme Mühendisi olarak çalıştı.
- 2004-2009 yılları arasında Uzel Makine Sanayi A.Ş.'de Kalite ve Ürün Geliştirme Mühendisi olarak çalıştı.
- 2009 yılından bu yana MS Motor Service Istanbul A.Ş.'de Ürün ve Kalite Müdürü olarak çalışmaktadır.

DOKTORA TEZİNDEN TÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER:

- Tufekci, E., Aya, S.A., **Oldac, O.** (2016). In-Plane Static Analysis of Nonlocal Curved Beams with Varying Curvature and Cross-Section. *International Journal of Applied Mechanics*, 8, No.1 1650010 (28)
- Tufekci, E., Aya, S.A., **Oldac, O.** (2015). A Unified Formulation for Static Behavior of Nonlocal Curved Beams. *Structural Engineering and Mechanics*.
- Aya, S.A., **Oldac, O.**, Tufekci, E. (2016). A Nonlocal Elasticity Approach for the In-Plane Static Analysis of Nanoarches. *Proceedings of the 2nd World Congress on New Technologies (NewTech'16)*, Budapest, Hungary – August 19 – 20, 2016.

DOKTORA TEZİNİ DESTEKLEYEN KURUMLAR:

Bu çalışma TÜBİTAK tarafından 112M404 no.lu “Nanoteknoloji Uygulamalarındaki Eğri Eksenli Çubukların Statik ve Dinamik Problemlerinin Yerel Olmayan Elastisite Teorisi İle Analitik Çözümü” başlıklı proje ile desteklenmiştir. Çalışma, ayrıca İTÜ Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi tarafından da desteklenmiştir.

DİĞER YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER:

Tufekci, E., **Oldac, O.** (2000). Free and Forced Vibrations of a Rotating Elastic Disk. *The First International Conference on Structural Stability and Dynamics*, Taipei Taiwan, December 7-9, 2000.

Tufekci, E., Bostancı, T., Ozdemirci, O., **Oldac, O.** (2002). Experimental Verification of Numerical & Analytical Solutions of Free Vibrations of Curved Beams. *The Second International Conference on Structural Stability and Dynamics*, 225-230, Singapore, 2002.

