



ENTROPİYE DAYALI DÜZGÜN DAĞILIMA UYGUNLUK TESTLERİ

Ömer Osman KUTSAL

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
İSTATİSTİK ANABİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

HAZİRAN 2016

Ömer Osman KUTSAL tarafından hazırlanan “ENTROPİYE DAYALI DÜZGÜN DAĞILIMA UYGUNLUK TESTLERİ” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç.Dr. Fikri GÖKPINAR

İstatistik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Başkan: Prof.Dr. Hülya BAYRAK

İstatistik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye : Doç.Dr.Müh.Yb. Özkan BALI

Harekat Araştırması Anabilim Dalı, Kara Harp Okulu

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Tez Savunma Tarihi: 06/06/2016

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Prof. Dr. Metin GÜRÜ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Ömer Osman KUTSAL

06/06/2016

ENTROPİYE DAYALI DÜZGÜN DAĞILIMA UYGUNLUK TESTLERİ
(Yüksek Lisans Tezi)

Ömer Osman KUTSAL

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2016

ÖZET

İstatistiksel bir modelin uyum iyiliği, gözlenen bir veri setinin istatistiksel modele uyumluluğunu test eder. Bu çalışmada, düzgün (tekdüze) dağılım için literatürde bulunan ve klasik uyum iyiliği testleri olarak adlandırılan testlerden Kolmogorov-Smirnov (1933-1939), Anderson-Darling (1954), Cramer von Mises (1928-1930), Shapiro-Wilk (1972), Watson (1961) ve Zhang (2002) tarafından öne sürülen üç test istatistiği Z_K , Z_A , Z_C ve entropiye dayalı geliştirilen uyum iyiliği testlerinden Zamanzade (2014)'nin önerdiği TB1 ve TB2 testleri incelenmiştir. Ayrıca Monte Carlo simülasyon metoduyla belirtilen test istatistiklerinin deneysel I.tip hata oranları ve testin gücü hesaplanmış, testin gücü bakımından Stephens (1974) tarafından kullanılan A_k , B_k , C_k alternatif dağılım aileleri ile karşılaştırılması yapılmış ve elde edilen sonuçlar yorumlanmıştır. Deneysel çalışmalar için MATLAB R2013b programı kullanılmıştır.

Bilim Kodu : 20512
Anahtar Kelimeler : Düzgün (Tekdüze) dağılım, Entropi, Uygunluk Testleri
Sayfa Adedi : 73
Danışman : Doç. Dr. Fikri GÖKPINAR

THE GOODNESS OF FIT TESTS OF UNIFORMITY BASED ON ENTROPY
(M. Sc. Thesis)

Ömer Osman KUTSAL

GAZİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

June 2016

ABSTRACT

The goodness of fit of a statistical model tests how well it fits a set of observations. In this study, some classical goodness of fit tests such as Kolmogorov-Smirnov (1933-1939), Anderson-Darling (1954), Cramer von Mises (1928-1930), Shapiro-Wilk (1972), Watson (1961) and proposed by Zhang (2002) Z_K , Z_A , Z_C tests and new goodness of fit tests which are based on entropy discovered recently by Zamanzade (2014) for uniform distribution TB1 and TB2 tests are investigated. Also, these tests are compared according to their Type I error rates and power of tests by using Monte Carlo method with alternatives distribution families A_k , B_k , C_k which were used by Stephens (1974) and the obtained results are interpreted. MATLAB R2013b software was used for experimental studies.

Science Code : 20512
Key Words : Uniform Distribution, Entropy, Goodness of Fit Tests
Page Number : 73
Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Fikri GÖKPINAR

TEŞEKKÜR

Tezimizin başlangıcından bitimine kadar bana inanan, yardım ve katkılarını benden esirgemeyen hocam Doç.Dr. Fikri GÖKPINAR'a teşekkürü bir borç bilirim. Tez jürisindeki değerli katkıları için Prof.Dr. Hülya BAYRAK ve Doç.Dr.Müh.Yb. Özkan BALİ hocalarıma teşekkürler. Çalışmam boyunca deneyimleri ile bana yol gösteren ve gereken izinleri almamda kolaylık sağlayan amirlerime müteşekkirim. Bildiklerini paylaşan ve yeri geldiğinde benim için de mesai yapan, çalışma arkadaşlarıma teşekkürler. Bilgisi ve ilgisi ile her zaman desteğini gördüğüm Müh.Ütğm. Seyfullah ALVER'e, Öğ.Ütğm. Kadir GÜÇ'e ve Öğ.Ütğm. Umut YALÇIN'a teşekkürler. Her konuda sabırla yardımcı olan eşim Atiye KUTSAL'a ve desteklerini her daim hissettiğim, annem, babam ve ablama teşekkür ederim. Uzaktan yardımın vazgeçilmezi, her zaman katkı sağlayan kardeşim Talha KUTSAL'a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ÇİZELGELERİN LİSTESİ.....	ix
ŞEKİLLERİN LİSTESİ.....	x
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	xi
1.GİRİŞ.....	1
2. UYUM İYİLİĞİ TESTLERİ.....	7
2.1. Kolmogorov-Smirnov, Lilliefors Uyum İyiliği Testi.....	8
2.2. Anderson-Darling Uyum İyiliği Testi	9
2.3. Shapiro-Wilk Uyum İyiliği Testi	10
2.4. Cramer-von Mises Uyum İyiliği Testi	11
2.5. Watson Uyum İyiliği Testi	12
2.6. Zhang Uyum İyiliği Testi	12
2.7. Entropiye Dayalı Uyum İyiliği Testleri.....	13
3. SİMÜLASYON ÇALIŞMASI.....	19
3.1. Güç Eğrilerinin Grafik ile Karşılaştırması	38
4. UYGULAMA.....	47
4.1. Kolmogorov-Smirnov-Lilliefors Testinin Uygulanması.....	47
4.2. Anderson-Darling Testinin Uygulanması	48
4.3. Cramer Von Mises Testinin Uygulanması	48
4.4. Shapiro-Wilk Testinin Uygulanması.....	49
4.5. Watson Testinin Uygulanması	49

	Sayfa
4.6. Zhang Testlerinin Uygulanması	50
4.7. Entropiye Dayalı Testlerin Uygulanması	50
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	53
KAYNAKÇA.....	55
EKLER.....	59
EK-1. Kritik Değerler Tablosu	60
EK-2. Entropi.....	66
ÖZGEÇMİŞ	73

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 3.1. Kolmogorov ve Simirnov testi elde kritik değer fonksiyonu	20
Çizelge 3.2. Anderson ve Darling testi için elde kritik değer fonksiyonu	21
Çizelge 3.3. Cramer von Mises testi için elde kritik değer fonksiyonu ve değerleri	21
Çizelge 3.4. Shapiro Wilk testi için elde kritik değer fonksiyonu ve değerleri	22
Çizelge 3.5. Watson testi için elde kritik değer fonksiyonu ve değerleri	23
Çizelge 3.6 Zhang Z_K testi için elde kritik değer fonksiyonu ve değerleri	24
Çizelge 3.7. Zhang Z_A testi için elde kritik değer fonksiyonu ve değerleri	25
Çizelge 3.8. Zhang Z_C testi için elde kritik değer fonksiyonu ve değerleri	26
Çizelge 3.9, TB1 testi için elde kritik değer fonksiyonu ve değerleri	27
Çizelge 3.10. TB2 testi için elde kritik değer fonksiyonu ve değerleri	28
Çizelge 3.11. Farklı n değerleri için, TB1 ve TB2'ye dayalı tekdüze dağılıma uygunluk testi için önerilen m değerleri	29
Çizelge 3.12. Alternatif dağılımların birikimli olasılık yoğunluk fonksiyonları	30
Çizelge 3.13. Uyum iyiliği testlerinin deneysel I.tip hata oranları	33
Çizelge 3.14. m=3, n=10 için testin gücü sonuçları.....	34
Çizelge 3.15. m=4, n=20 için testin gücü sonuçları.....	35
Çizelge 3.16. m=5, n=30 için testin gücü sonuçları.....	36
Çizelge 3.17. m=6, n=40 için testin gücü sonuçları.....	37

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1. Sürekli tekdüze dağılım için olasılık yoğunluk fonksiyonu	7
Şekil 3.1. A1 dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu	30
Şekil 3.2. Ak dağılım ailesinin olasılık yoğunluk fonksiyonu	31
Şekil 3.3. Bk dağılım ailesinin olasılık yoğunluk fonksiyonu	31
Şekil 3.4. Ck dağılım ailesinin olasılık yoğunluk fonksiyonu	32
Şekil 3.5. A1,5 dağılımı için testin gücü	40
Şekil 3.6. A2 dağılımı için testin gücü	41
Şekil 3.7. B1,5 dağılımı için testin gücü	42
Şekil 3.8. B2 dağılımı için testin gücü	43
Şekil 3.9. B3 dağılımı için testin gücü	44
Şekil 3.10. C1,5 dağılımı için testin gücü	45
Şekil 3.11. C2 dağılımı için testin gücü	46

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı kısaltma ve simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Kısaltmalar	Açıklamalar
AD	Anderson-Darling Testi
A_k, B_k, C_k	Alternatif Dağılım Aileleri
$f(x)$	Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu
$F(x)$	Dağılım Fonksiyonu
$F_0(x)$	Yokluk hipotezinde belirtilen dağılım fonksiyonu
$F_n(x)$	Gözlenen dağılım fonksiyonu
$H(f)$	Entropi Fonksiyonu
HA	Alizadeh Noughabi Entropi Tahmin edicisi
HC	Correa Entropi Tahmin edicisi
HE	Ebrahimi Entropi Tahmin edicisi
HN	Noughabi ve Noughabi Entropi Tahmin edicisi
HV	Vasicek Entropi Tahmin edicisi
HVE	Van Es Entropi Tahmin edicisi
HY	Yousefzade ve Arghami Entropi Tahmin edicisi
KS	Kolmogorov-Smirnov Testi
MSE	Mean Square Error
SW	Shapiro-Wilk Testi
TB1, TB2	Zamanzade Entropiye Dayalı Testler
U^2	Watson Testi
W^2	Cramer von Mises Testi
Z_K, Z_A, Z_C	Zhang Testi
$\sim U(0,1)$	(0,1) Aralığında Tanımlı Tekdüze Dağılım

1. GİRİŞ

İstatistiksel hesaplamalarda, bir veri kümesinin belirtilen bir dağılımdan ya da istatistiksel modelden gelip gelmediğini belirlemek için ‘Uyum İyiliği’ testleri kullanılır. Uyum iyiliği testlerinde veri kümesinin, varsayılan bir modelden ne kadar saptığını bir ölçü birimi yardımı ile ölçerek, bu modele ne derecede uyduğunu tespit etmek üzerine dayanmaktadır.

Veri kümesinin varsayılan dağılıma uygun olup olmadığı grafik yöntemle veya betimleyici istatistikler yardımıyla da belirlenebilir. Örneğin, veri kümesinin histogramının çizilmesi ile varsayılan dağılıma uygun olup olmadığı kabaca anlaşılabilir. Böylece, grafiksel yöntemlerle varsayılan dağılımdan sapmanın şekil ve büyüklüğü hakkında bir fikir edinilebilir. Bununla birlikte, söz konusu sapmanın, veri kümesinin dağılımının varsayılan dağılım olarak kabul edilmemesi için önemli bir sapma olup olmadığının belirlenmesi için yeterli olmayabilmektedir. Bu durumda ise veri kümesini varsayılan dağılımı gösterip göstermediklerinin belirlenmesinde, hipotez testi yapılmaktadır. Bu amaçla kurulan hipotez testlerine, uyum iyiliği testleri denilmektedir. Uyum iyiliği testleri sayesinde, gözlenmiş veri kümesinin varsayılan dağılımdan gelip gelmedikleri kurulan hipotezlere bağlı olarak test edilebilmektedir. Literatürde, 1900 yılı civarından başlayarak günümüze kadar üretilmiş birçok uyum iyiliği testi bulunmaktadır.

Pearson (1900) parametrik olmayan ve klasik istatistikte sıkça kullanılan bir test istatistiği geliştirilmiştir. Pearson’ın Ki-Kare testi en bilinen uyum iyiliği testlerinden biridir. Bu test, gözlenen ve beklenen veri frekansları arasındaki farklara dayalıdır. Sınıflama veya sıralama ölçme düzeyinde ölçülmüş gözlenen frekanslarının olasılık dağılımıyla, beklenen frekanslarının olasılık dağılımı arasındaki uyumu ortaya çıkaran bir testtir. Test istatistiğinin ki-kare dağılımı göstermesi için örnek hacminin ve sınıf sayısının yeterli olması ve sınıflar için hesaplanacak beklenen frekansın 5’ten küçük olmaması gerekmektedir.

1920’li yılların sonundan itibaren uyum iyiliği testleri ile ilgili birçok araştırma yapılmıştır. Deneysel dağılımlara dayalı uyum iyiliği testleri üreten Cramer (1928), Kolmogorov (1933), Simirnov (1939), Anderson ve Darling (1954), Liliefors (1969) uyum iyiliği testleri üzerine çalışmış önemli araştırmacılardan bazılarıdır.

Kolmogorov-Smirnov test istatistiği deneysel dağılım fonksiyonuna dayalı uyum iyiliği testleri arasında en sık kullanılan yöntemlerden birisidir. Bu test istatistiği ilk olarak

Kolmogorov (1933) tarafından geliştirilmiş ancak uyum iyiliği testlerinde kullanılması Smirnov (1939) tarafından uyarlanmıştır. Bu sebeple literatürde Kolmogorov-Smirnov uyum iyiliği testi olarak geçmektedir. Kolmogorov-Smirnov testi, teorik ($F(x)$) ve deneysel ($\hat{F}(x)$) dağılım fonksiyonu arasındaki maksimum mutlak farka dayanır. Kolmogorov-Smirnov uyum iyiliği testine göre, deneysel dağılım fonksiyonu sonuçları test edilen dağılımın fonksiyonu $F_0(x)$ 'e yeterince yakın değilse, gözlemlenen verilerin test edilen dağılımdan gelmemektedir sonucuna varılır. Kolmogorov-Smirnov testi, eğer dağılım tamamıyla belli ise (dağılımın şekli ve tüm parametreleri biliniyorsa) doğru bir şekilde uygulanabilir. Yığının bazı parametreleri örnekten tahmin edildiğinde maksimum sapmanın dağılımı bilinmemektedir Massey (1951). Bir başka deyişle dağılımın bazı parametreleri örnekten tahmin edildiğinde Kolmogorov-Smirnov test istatistiğinin dağılımı farklılaştığından bu yöntemin kullanılması uygun olmamaktadır. Normal dağılım için parametrelerin örnekten tahmin edildiği durumda Lilliefors (1969), Kolmogorov-Smirnov testinin kritik değerlerini elde etmiştir.

Cramer-von Mises tarafından önerilen test (1928), deneysel dağılım fonksiyonuyla ilişkili testlerdendir ve sürekli dağılımları test etmek için daha uygundur. Bu test, yokluk hipotezi altında deneysel dağılım fonksiyonu ve teorik dağılım fonksiyonu arasındaki farkı ölçmeye yöneliktir. Kolmogorov-Smirnov testi deneysel dağılım fonksiyonu ile teorik dağılım fonksiyonu arasındaki en büyük farka dayanırken, Cramer-von Mises testi ise bu farkların karelerinin ağırlıklı ortalamasına dayanır.

Cramer von Mises ve Kolmogorov Smirnov gibi deneysel dağılımı temel alarak türetilen bir diğer test istatistiği ise Anderson ve Darling tarafından geliştirilmiştir. Literatürde Anderson ve Darling test istatistiği birçok durumda Cramer von Mises test istatistiğinden daha duyarlı ve dolayısıyla daha güçlü olduğu ifade edilmektedir Anderson ve Darling (1954). Farrel ve Stewart (2006), Anderson ve Darling testinin Cramer von Mises testine göre daha güçlü olmasının sebebinin dağılımın kuyruk kısmına daha fazla ağırlık vermesinden kaynaklandığını ifade etmektedir Farrel ve Stewart (2006). Arshad ve diğerleri (2003) ise yaptığı çalışmalarda, Anderson ve Darling testinin deneysel dağılım fonksiyonlarına dayalı testler içinde en güçlüsü olduğunu ifade etmiştir.

Deneysel dağılım fonksiyonuna dayalı diğer bir önemli test ise Watson (1961) tarafından ortaya atılmıştır. Watson uyum iyiliği testinin en önemli özelliği, seçilen n hacimli

örnekten elde edilen istatistiğin dağılımı bu örneğin geldiği $F(x)$ dağılım fonksiyonundan bağımsız olmasıdır. Watson oluşturduğu test istatistiğini Cramer von Mises ve Kolmogorov-Smirnov test istatistikleriyle kıyaslamıştır. Karesel bir formda geliştirdiği test istatistiği Cramer von Mises istatistiğinin geliştirilmiş bir formu olup, yazar araştırmasında geliştirdiği istatistiğin Cramer von Mises tarafından geliştirilen test istatistiğine göre limit dağılımının daha sade olduğunu belirtmiştir.

Uyum iyiliği testleri için deneysel dağılım fonksiyonun yanı sıra, sıra istatistikleri kullanılabilir. Bu testlerden en önemlilerinden biri olan Shapiro ve Wilk (1965), örnek sıra istatistiklerinin uygun bir lineer bileşenin karesinin, kareler toplamına oranıyla elde edilen bir test istatistiği önermiştir. Shapiro ve Wilk testi küçük örnekler için geliştirilmiş bir testtir. Bu test, çarpıklık veya basıklık katsayılarına dayalı, normal dağılımdan ayrılışı ölçen ilk testtir Althouse ve diğerleri (1997). Shapiro ve Wilk testi Royston (1982a) tarafından büyük örnekler için yeniden düzenlenmiştir.

Stephens (1974) yaptığı çalışmada, Shapiro Wilk ile deneysel dağılıma dayanan uyum iyiliği testleri olan Kolmogorov-Smirnov, Watson ve Anderson-Darling test istatistiklerini kıyaslamıştır. Deneysel dağılım fonksiyonuna dayalı test istatistiklerinin daha kolay hesaplanabilir olduğunu ve uyum iyiliği testlerinin klasik ki-kare uyum iyiliği testine göre daha güçlü olduğunu ifade etmiştir. Bununla birlikte Stephens, parametrelerin tahmin edildiği durumda Anderson-Darling test istatistiğinin limit dağılımı, tahmin edilen parametrelere göre değişiklik gösterdiğini tespit etmiştir. Parametrelerin tahmin edilmesi durumunda oluşan bu yeni kritik değerler ve test istatistiğinin dağılımı Stephens (1987) tarafından oluşturulmuştur.

Uyum iyiliği testleri deneysel dağılım fonksiyonuna dayalı olanların yanı sıra, deneysel moment üreten fonksiyonlara dayalı olan birçok test mevcuttur. Herhangi bir rasgele değişken için karakteristik fonksiyon veya varsa moment üreten fonksiyon tek olduğundan dolayı, bu fonksiyonların uyum iyiliği testlerinde kullanmak uygundur. Bu fikirden yola çıkarak Epps ve diğerleri (1982), moment üreten fonksiyona dayanan, Epps ve Pulley'de (1983), karakteristik fonksiyonu temel alan bir test geliştirmişlerdir. Epps-Pulley testi karakteristik fonksiyonun iki farklı hesaplaması arasındaki sapmayı temel almaktadır Epps ve Pulley (1983). Zghoul (2010) tarafından alternatif bir uyum iyiliği testi geliştirilmiştir.

Bu test Epps ve Pulley tarafından önerilen testten farklı olarak teorik ve deneysel moment üreten fonksiyonları arasındaki sapmalara dayanmaktadır.

Karakteristik fonksiyon, Moment üreten fonksiyon veya dağılım fonksiyonu gibi herhangi bir rasgele değişkenin dağılımını tek olarak belirleyebilen bir karakteristik olan entropi de uyum iyiliği testlerinde kullanılmaktadır. Entropi için, rasgele örneğe dayalı tahmini ilk olarak Vasicek (1976) tarafından yapılmıştır. Bu tahminlere örnek entropisi adı verilir. Vasicek, örnek entropisi normal dağılım için Vasicek (1976) ve Arizona ve Ohta (1989), düzgün dağılım (Bundan sonra tekdüze dağılım olarak ifade edilecektir.) için Dudewicz ve van der Meulen (1981) ve üstel dağılım için Ebrahimi ve diğerleri (1994) tarafından elde edilmiş ve bu örnek entropisine dayalı olarak uyum iyiliği testleri geliştirilmiştir.

Correa (1995)'in tekdüze dağılıma uygunluk için önerdiği entropi tahmin edicisi Vasicek (1976)'in tahmin edicisinden daha küçük MSE değerlerine sahip olduğunu göstermiştir. Ebrahimi (1994), Vasicek (1976) entropi tahmin edicisini sınırlardaki sıra istatistiklerini yeniden düzenleyerek yeni bir tahmin edici önermiştir. Ayrıca, Vasicek (1976)'in önerdiği entropi tahmin edicisi ile kendisinin önerdiği tahmin edicisinin ilişkili olduğunu göstermiştir. Yousefzadeh ve Arghami (2008) ise sürekli rasgele değişkenler için yeni bir entropi tahmin edicisi elde etmiştir. Noughabi (2010)'nin normal dağılım için yeni bir entropi tahmin edici ve buna dayalı bir test istatistiği önermiştir. Vexler ve Gurevich (2010) entropiye dayalı uyum iyiliği testini parametrik olasılık yoğunluk fonksiyonlarını parametrik olmayan yöntemlerle tahmin ederek elde etmişlerdir. Noughabi ve Noughabi (2013) genel olarak sürekli dağılımlar için entropi tahmin edicisi önermiştir.

Zamanzade (2014) ise Dudewicz ve Van der Muelen (1981)'nin çalışmalarından faydalananarak, Vasicek (1976) ve Yousefzadeh ve Arghami (2008)'nin entropi tahmin edicilerini yeniden düzenleyerek alternatif bir test istatistiği önermiştir.

Bu çalışmada, tekdüze dağılım için farklı uyum iyiliği testleri incelenmiştir. Tekdüze dağılımın birçok önemli uygulama alanı vardır. Örneğin, herhangi bir dağılımdan rasgele sayı üretmek için $(0,1)$ parametrelili tekdüze dağılımdan rasgele sayı üretilmesi gerekmektedir. Üretilen rasgele sayılar, birbirinden bağımsız ve görülme olasılıkları eşit olmaktadır. Bununla birlikte gerçek sistemlerin tamamının stokastik davranışı her zaman tekdüze dağılımla açıklanamayabilir. Bir sistem içinde tekdüze dağılımdan ziyade diğer

teorik (üstel, normal, v.b.) dağılımlarla karşılaşılmaktadır. Sistemin stokastik özelliğinden dolayı tekdüze dağılımdan elde edilen rasgele sayıların teorik veya deneysel dağılımlara dönüştürülmesine ihtiyaç duyulmaktadır. Dağılım fonksiyonlarının görüntüsü her zaman $[0,1]$ kapalı aralığında sınırlı olduğundan, ters fonksiyon tekniği gibi yöntemlerle, tekdüze dağılımdan üretilecek rasgele sayılar ile istenilen dağılım için rasgele sayılar üretilebilmektedir. Tekdüze dağılım, haberleşme ve elektronik mühendisliği alanında da sıkça kullanılmaktadır. Görüntü iyileştirilmesi yöntemlerinde ve bir analog işareti sayısal (dijital) işarete dönüştürmek için tekdüze dağılımdan yararlanılmaktadır. Belirtilen sebeplerle bir veri kümesinin tekdüze dağılıma uyup uymadığının güçlü ve az maliyetle tespit edilebilmesi önemlidir.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling, Cramer von Mises, Shapiro-Wilk, Watson, Zhang ve entropiye dayalı geliştirilen uyum iyiliği testlerinden Zamanzade (2014)'nin önerdiği iki test istatistiği teorik olarak incelenmiştir.

Çalışmanın üçüncü bölümünde, ikinci bölümde teorik olarak tanıtılan testlerin farklı örnek hacimlerindeki kritik değerleri, 100000 örnek için Monte Carlo benzetim çalışması ile elde edilmiştir. Uyum iyiliği testlerinin ana sorunlardan biri, test istatistiğinin dağılımı kolayca elde edilemediğinden, kritik değerler tam olarak elde edilememektedir. Bu sebeple, Monte Carlo simülasyonları kullanarak bu test istatistiklerinin kritik değerleri, yaygın olarak kullanılan alfa ($\alpha = 0,01, 0,05, 0,1$) değerlerinde elde edilmiştir. Bu kritik değerlere göre, deneysel I. tip bir hata ve testin gücü hesaplanabilmektedir. 10000 örnek için I.tip hata oranları incelenmiştir. Stephens (1974) tarafından önerilen yaygın olarak kullanılan A_k , B_k , C_k alternatif dağılım aileleri ile ilgili testlerin güçleri $\alpha = 0,01, 0,05, 0,1$ için ve farklı örnek hacimlerinde kıyaslanmıştır. Ayrıca, uyum iyiliği testlerinin, alternatif dağılım aileleri karşısındaki güçleri, grafikler (güç eğrileri) ile incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, ikinci bölümde teorik olarak tanıtılan ve üçüncü bölümde kritik değerleri deneysel olarak elde edilen testlerin kullanımına ilişkin, deneysel olarak üretilen rasgele bir örnek üzerinden, uyum iyiliği testlerinin pratik kullanımına ilişkin uygulama yapılmıştır.

Beşinci bölümde ise sonuç ve önerilere yer verilmiştir.



2. UYUM İYİLİĞİ TESTLERİ

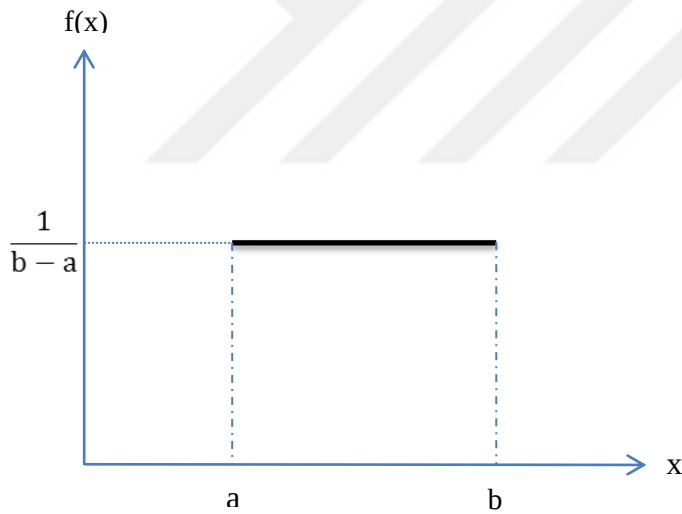
Bu bölümde, tekdüze dağılıma ilişkin olarak kullanılan uyum iyiliği testleri incelenmiştir. Örnek verisinin tekdüze dağılımdan gelip gelmediğinin hipotez testi üzerinde durulacaktır.

Tekdüze dağılım, klasik tanımlaması ile aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

X sürekli rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = f(x; a, b) = \frac{1}{b-a}, a \leq x \leq b$$

ise X sürekli rasgele değişkeni $[a, b]$ kapalı aralığında tekdüze dağılıma sahiptir denir ve olasılık yoğunluk fonksiyonu Şekil 2.1'deki gibi ifade edilir.



Şekil 2.1. Sürekli tekdüze dağılım için olasılık yoğunluk fonksiyonu

X sürekli rasgele değişkeninin birikimli olasılık yoğunluk (dağılım) fonksiyonu,

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_a^x f(w)dw = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

dir.

Sürekli tekdüze dağılımın entropi fonksiyonu,

$$H(f) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log(f(x)) dx = - \int_a^b \frac{1}{b-a} \log\left(\frac{1}{b-a}\right) dx = \log(b-a)$$

olarak elde edilir.

$F(x) = \frac{x-a}{b-a}$; $a \leq x \leq b$ tekdüze dağılımından n hacimli bir rasgele örnek $X_1, X_2, \dots, X_n$ olsun. $F_0(x)$ tekdüze dağılımın dağılım fonksiyonu, $F_n(x)$ ise örnekten elde edilen deneysel dağılım fonksiyonunu göstermektedir. Hipotezler,

H_0 : Y_1 'ına ilişkin dağılım tekdüzedir.

H_1 : Y_1 'ına ilişkin dağılım tekdüze değildir.

veya

$$H_0: F(x) = F_0(x)$$

$$H_1: F(x) \neq F_0(x) \tag{2.1}$$

şeklindedir.

Bu bölümün geri kalanında, tekdüze dağılıma ilişkin performans kıyaslaması yapılacak uyum iyiliği testleri kısaca tanıtılmıştır.

2.1. Kolmogorov-Simirnov, Lilliefors Uyum İyiliği Testi

Kolmogorov-Smirnov test istatistiği deneysel dağılım fonksiyonuna dayalı uyum iyiliği testleri arasında en sık kullanılan yöntemlerden birisidir. Kolmogorov (1933) ve Smirnov (1939) tarafından oranlama ya da eşit aralıklı düzeyde ölçülen değişkenler için geliştirilmiş uyum iyiliği testidir. Kolmogorov testi ve Smirnov testi benzerlik nedeniyle Kolmogorov-Smirnov (KS) uyum iyiliği testi olarak da bilinmektedir. Bu test yokluk hipotezinde belirtilen dağılım fonksiyonu $F_0(x)$ ile tüm x 'ler için örneğin dağılım fonksiyonu olan $F_n(x)$ arasındaki mutlak farklara dayanır. Test istatistiği,

$$D = \max_x |F_n(x) - F_0(x)| \text{ şeklindedir.}$$

D istatistiği, $F_0(x)$ sürekli ve tamamen bilinirken (dağılımın hiçbir parametresi gözlemlerden tahmin edilmemişken) test edilen $F_n(x)$ 'den bağımsızdır. Bu istatistiğin dağılımı, dağılımın tüm parametreleri bilinirken elde edilmekte aksi halde D istatistiğinin dağılımı bulunamamaktadır.

Lilliefors testi de rasgele örneğin belirli bir dağılım fonksiyonu ile uygun olup olmadığını araştırır. Örnekten tahmin edilmesi gereken, bilinmeyen parametreler söz konusu olduğunda, Kolmogorov-Smirnov testi uygulanamaz. Bu durumda Lilliefors testinden yararlanılmaktadır. Verilen n hacimli örnek için D test istatistiği;

$$D = \max_x |F^*(x) - F_n(x)|$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada $F_n(x)$ örneğin birikimli olasılık yoğunluk fonksiyonu ve $F^*(x)$, $a=\min(x)$, $b=\max(x)$ parametrelili birikimli tekdüze dağılım fonksiyonudur. Eğer hesaplanan D değeri tablodaki kritik değeri aşıyorsa, dağılımın tekdüze dağılımdan geldiği yokluk hipotezi H_0 reddedilir.

2.2. Anderson-Darling Uyum İyiliği Testi

Anderson ve Darling (1954), Kolmogorov-Smirnov testini uyarlayarak Anderson-Darling (AD) test istatistiğini önermişlerdir. Buna göre, n örnek hacmi olmak üzere A^2 test istatistiği aşağıdaki gibidir.

$$A^2 = -n - \frac{S^2}{n}$$

Burada,

$$S^2 = \sum_{j=1}^n [(2j-1)(\ln(F(X_{(j)})) + \ln(1 - F(X_{(n+1-j)})))]$$

biçiminde elde edilir ve $X_{(j)}$ 'ler j. sıra istatistikleridir.

Küçük örneklem için formülde aşağıdaki düzeltme yapılır. A_d^2 , düzeltilmiş A^2 'yi göstermek üzere aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Burada,

$$A_d^2 = A^2 \left(1 + \frac{0,75}{n} + \frac{2,25}{n^2} \right)$$

dir.

Anderson-Darling test istatistiği söz konusu $F_0(x)$ 'den bağımsız bir test istatistiğidir. Parametrelerin tahmin edildiği durumda Anderson-Darling test istatistiğinin limit dağılımı tahmin edilen parametrelere göre değişiklik gösterir, Stephens (1976). Parametrelerin tahmin edilmesi durumunda oluşan bu yeni kritik değerler ve test istatistiğinin dağılımı normal ve üstel dağılım için Stephens (1976) tarafından oluşturulmuştur. Tekdüze dağılım için ise farklı örnek hacimlerindeki kritik değerler, 100000 Monte Carlo simülasyonu ile elde edilmiştir.

2.3. Shapiro-Wilk Uyum İyiliği Testi

Shapiro-Wilk testi, Lilliefors gibi parametrik olmayan bir uyum iyiliği testidir. Shapiro-Wilk (1965) tarafından önerilen bu test, örneğe ait sıra istatistiklerinin uygun bir lineer bileşenin karesinin, kareler toplamına bölümüyle elde edilir.

$$W = \frac{(\sum_{i=1}^n a_i X_{(i)})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

şeklindedir. Burada,

$$a' = (a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{m'V^{-1}}{(m'V^{-1}V^{-1}m)^{1/2}}$$

olarak ifade edilir.

Burada m , standart normal dağılımda n adet sıra istatistiğinin beklenen değerlerinin vektörü,

V ise sıra istatistiklerinin varyans kovaryans matrisidir.

Shapiro-Wilk (1972) konum parametresi bilindiği durum için pratik ve daha kullanışlı bir istatistik geliştirmiştir. Bu istatistik,

$$W_s = \frac{(\sum_i^n x_i)^2}{n[(n+1) \sum_i^n x_i^2 - (\sum_i^n x_i)^2]}$$

şeklindedir.

2.4. Cramer-von Mises Uyum İyiliği Testi

Cramer von Mises testi, Kolmogorov-Smirnov uyum iyiliği testine alternatif olarak kullanılabilmektedir ve Kolmogorov-Smirnov uyum iyiliği testi gibi deneysel dağılıma dayanan parametrik olmayan bir testtir. Cramer von Mises testi karmaşık yapısıyla uyum iyiliği testlerinde sıkça kullanılan bir yöntem olmuştur.

Minimum uzaklık tahmin edicisi olan ve başka birçok araştırmada da önemli bir ölçüt olan bu karesel yapı, Cramer-Von Mises tarafından uyum iyiliğini test etmek amacıyla ele alınmıştır. Deneysel dağılım ve teorik dağılımın kıyaslanmasına yarayan bu istatistik, gözlemlenen verinin dağılımının, geldiği iddia edilen dağılıma uyumunu araştırır.

Cramer-von Mises test istatistiğinin genel formu aşağıdaki gibidir.

$$W^2 = n \int_{-\infty}^{+\infty} [F_n(x) - F_0(x)]^2 dF_0(x)$$

Bu istatistiğin hesaplama formülü aşağıdaki gibidir.

$$W^2 = \sum_{i=1}^n (F_0(X_{(i)}) - \frac{2i-1}{2n})^2 + \frac{1}{12n}$$

Burada, $F_n(x)$ deneysel dağılım fonksiyonu, $F_0(x)$ H_0 hipotezinde belirtilen dağılım fonksiyonu ve $X_{(i)}$ i. sıra istatistiğidir. Herhangi bir örnek hacmi için hesaplanan kritik değer, kritik değerden küçük ise dağılımın tekdüze dağılımdan geldiği sonucuna ulaşılır.

2.5. Watson Uyum İyiliği Testi

Watson (1961), deneysel dağılım fonksiyonuna dayalı yöntemlerden Kolmogorov-Smirnov ve Cramer von Mises testlerinin limit dağılımının karmaşık ve kullanışsız olduğunu ifade etmiştir.

Buna karşın,

$$U_n^2 = n \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ F_n(x) - F_0(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} [F_n(x) - F_0(x)] dF_0(x) \right\}^2 dF_0(x)$$

istatistiğinin daha kullanışlı limit dağılımına sahip olduğunu ifade etmiştir (Watson, 1961).

Watson'ın oluşturduğu istatistiğin hesaplama formülü aşağıdaki gibidir.

$$v_i = F(X_{(i)}) \text{ ve } \bar{v} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F(X_{(i)}) \text{ olmak üzere,}$$

$$U_n^2 = \sum_{i=1}^n \left(v_i - \frac{2i-1}{2n} - \bar{v} + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{12n}$$

şeklindedir.

Watson (1962) daha sonraki araştırmasında bu test istatistiğinin dağılımı üzerinde durmuştur. Geliştirdiği istatistiğin dağılımının $F_0(x)$ 'den bağımsız olduğunu göstermiştir. Herhangi bir örnek hacmi için test istatistiğinin hesaplanan değeri, kritik değerinden büyük ise H_0 hipotezi red edilir.

2.6. Zhang Uyum İyiliği Testi

Zhang (2002) tarafından Kolmogorov-Smirnov, Cramér-von Mises ve Anderson-Darling istatistikleri kullanılarak, geleneksel uyum iyiliği testlerinden daha güçlü sonuçlar veren alternatif bir uyum iyiliği testi olarak öne sürülmüştür.

Zhang tarafından öne sürülen üç test istatistiği aşağıdaki gibidir.

$$Z_K = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\left(i - \frac{1}{2} \right) \log \left(\frac{i - \frac{1}{2}}{n F_0(X_{(i)})} \right) + \left(n - i + \frac{1}{2} \right) \log \left(\frac{n - i + \frac{1}{2}}{n \{1 - F_0(X_{(i)})\}} \right) \right)$$

$$Z_A = - \sum_{i=1}^n \left[\frac{\log\{F_0(X_{(i)})\}}{n - i + \frac{1}{2}} + \frac{\log\{1 - F_0(X_{(i)})\}}{i - \frac{1}{2}} \right]$$

$$Z_C = \sum_{i=1}^n \left[\log \left(\frac{F_0(X_{(i)})^{-1} - 1}{\frac{n - 0,5}{i - 0,75} - 1} \right) \right]^2$$

2.7. Entropiye Dayalı Uyum İyiliği Testleri

X sürekli rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu f olmak üzere, X'in entropisi H(f), Shannon(1948) tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$H(f) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log(f(x)) dx$$

Vasicek (1976), van Es (1992), Ebrahimi ve diğerleri (1994), Yousefzadeh ve Arghami (2008), Noughabi (2010) ve Noughabi ve Noughabi (2013) H(f) entropi tahmin edicisi için farklı önerilerde bulunmuşlardır.

Tüm tahmin ediciler arasında, Vasicek (1976) entropi tahmin edicisi istatistiksel işlemlerin gelişmesinde yaygın olarak kullanılmaktadır. $X_1, X_2, \dots, X_n$ örnek olmak üzere, Vasicek (1976) tahmin edicisi aşağıdaki gibidir.

$$HV_{mn} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \left\{ \frac{n}{2m} (X_{(i+m)} - X_{(i-m)}) \right\}$$

dir.

Burada, m, $\frac{n}{2}$ den küçük pozitif tam sayıdır.

Eğer $i > n$ ise $X_{(i)} = X_{(n)}$ ve $i < 1$ ise $X_{(i)} = X_{(1)}$ dir.

$X_{(1)} < X_{(2)} < \dots < X_{(n)}$ ise n hacimli örneğin sıra istatistikleridir.

$n, m \rightarrow \infty$ ve $\frac{m}{n} \rightarrow 0$ iken $H_V \rightarrow H(f)$ dir.

Ebrahimi (1994), Vasicek (1976) entropi tahmin edicisini sınırlardaki sıra istatistiklerini ($X_{(1)}$ ve $X_{(n)}$) yeniden düzenleyerek aşağıdaki HE entropi tahmin edicisini önermiştir.

$$HE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \left\{ \frac{n}{c_{im}} (X_{(i+m)} - X_{(i-m)}) \right\},$$

burada,

$$c_i, i < m \text{ için } 1 + \frac{i-1}{m},$$

$$m+1 \leq i \leq n-m \text{ için } 2,$$

$$i \geq n-m+1 \text{ için } 1 + \frac{n-i}{m}$$

dir.

Yousefzadeh ve Arghami (2008) ise sürekli rasgele değişkenler için HY entropi tahmin edicisini elde etmiştir.

$$HY = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \left\{ \frac{(X_{(i+m)} - X_{(i-m)})}{\hat{F}_Y(X_{(i+m)}) - \hat{F}_Y(X_{(i-m)})} \right\} \left\{ \frac{\hat{F}_Y(X_{(i+m)}) - \hat{F}_Y(X_{(i-m)})}{\sum_{i=1}^n (\hat{F}_Y(X_{(i+m)}) - \hat{F}_Y(X_{(i-m)}))} \right\},$$

burada,

$$\hat{F}_Y(X_{(i)}) = \frac{n-1}{n(n+1)} \left(i + \frac{1}{n-1} + \frac{(X_{(i)} - X_{(i-1)})}{(X_{(i+1)} - X_{(i-1)})} \right); i=2,3, \dots, n-1$$

$$\hat{F}_Y(X_{(1)}) = \frac{1}{n+1}$$

$$\hat{F}_y(X_{(n)}) = \frac{n}{n+1}$$

dir.

Bilgi teorisinde ve daha sonra farklı alanlarda da yaygın olarak kullanılan Shannon (1948) teoremine göre, f olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip ve $(0,1)$ aralığında tanımlı tüm sürekli dağılımlar arasında entropi ($H(f)$), tekdüze dağılım ile maksimum olur. Zamanzade (2014)'nin, bu özelliğe dayanarak Dudewicz ve Van der Muelen (1981)'nin entropiye dayalı tekdüze dağılıma ilişkin yaptığı çalışmayı ve Vasicek (1976) ve Yousefzadeh ve Arghami (2008)'nin entropi tahmin edicilerini yeniden düzenleyerek önerdiği test istatistiği aşağıdaki gibidir.

(a, b) aralığında tanımlı, $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna ve $F(x)$ birikimli olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip bir dağılımdan alınan n hacimli rasgele örneğin gözlemlenen değerlerinin sıra istatistikleri $X_{(1)} < X_{(2)} < \dots < X_{(n)}$ olsun.

$X_{(0)} = a$ ve $X_{(n+1)} = b$ olmak üzere;

$$P(X_{(i-1)} < X < X_{(i)}) = w_i; i = 1, 2, \dots, n+1.$$

olarak tanımlanırsa,

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1 \text{ olur.}$$

w_i 'ler $X_{(i)}$ ile $X_{(i-1)}$ arasındaki f eğrisinin altında kalan alan olduğundan,

$i=1,2,\dots,n+1$ için $f_i = f(X_{(i)})$ ve $d_i = X_{(i)} - X_{(i-1)}$ olmak üzere, yaklaşık olarak $w_i = \frac{f_{i-1}+f_i}{2} d_i$ dir.

Olabilirlik fonksiyonunu maksimum yapmak için Lagrange eşitliği yazılarak,

$$L = \sum_{i=0}^{n+1} \log(f_i) - 2\lambda \left(\sum_{i=1}^{n+1} w_i - 1 \right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial f_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n+1$$

denklemini çözülür.

Böylece yeniden düzenlenmiş birikimli olasılık yoğunluk fonksiyonu, basit cebirsel denklemlerle hesaplanacak aşağıda şekle gelmiş olur.

$$\hat{F}_n X_{(i)} = \sum_{j=1}^n w_j = \frac{1}{n+2} \left(i + \frac{X_{(i)} - X_{(i-1)}}{X_{(i+1)} - X_{(i-1)}} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Zamanzade (2014), önerdiği yeniden düzenlenmiş birikimli olasılık yoğunluk fonksiyonu tahmin edicisinin tutarlı olduğunu göstermiştir.

$$E(\hat{F}_n(x)) \rightarrow F(x) \text{ ve } \text{Var}(\hat{F}_n(x)) \rightarrow 0 \text{ dır, } n \rightarrow \infty \text{ iken.}$$

Zamanzade (2014)'nin tekdüze dağılıma uygunluk için önerdiği test istatistikleri aşağıdaki gibidir.

$$TB1=HB1$$

$$TB2=HB2$$

Burada,

$$HB1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \frac{X_{(i+m)} - X_{(i-m)}}{\hat{F}_n(X_{(i+m)}) - \hat{F}_n(X_{(i-m)})}$$

$$HB2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \left(\frac{X_{(i+m)} - X_{(i-m)}}{\hat{F}_n(X_{(i+m)}) - \hat{F}_n(X_{(i-m)})} \right) \left(\frac{\hat{F}_n(X_{(i+m)}) - \hat{F}_n(X_{(i-m)})}{\sum_{i=1}^n (\hat{F}_n(X_{(i+m)}) - \hat{F}_n(X_{(i-m)}))} \right)$$

dir ve m , pencere genişliği olarak adlandırılan ve $\frac{n}{2}$ 'den küçük pozitif bir tamsayıdır.

Ayrıca,

$\begin{cases} X_{(i)} = X_{(1)} ; i < 1 \\ X_{(i)} = X_{(n)} ; i > n \end{cases}$ olmak üzere $\hat{F}_n$ birikimli olasılık yoğunluk fonksiyonu tahmin edicisidir.

$$\hat{F}_n X_{(i)} = \frac{1}{n+2} \left(i + \frac{X_{(i)} - X_{(i-1)}}{X_{(i+1)} - X_{(i-1)}} \right), i = 1, 2, \dots, n.$$

Vasicek (1976), Ebrahimi (1994), Correa (1995), Yousefzadeh ve Arghami (2008), Noughabi ve Noughabi (2013) entropi tahmin edicilerine ait bilgiler EK-2.1.'de bulunmaktadır.



3. SİMÜLASYON ÇALIŞMASI

Bu bölümde, önceki bölümde ele alınan; Kolmogorov ve Simirnov (KS) (1933, 1939), Anderson ve Darling (AD) (1954), Cramer von Mises (W^2) (1928, 1931), Watson (U^2) (1961), Shapiro ve Wilk (SW), Zhang (2002)'in önerdiği üç test (Z_K , Z_A , Z_C) ve entropiye dayalı olanlardan Zamanzade (2014)'nin önerdiği testler (TB1 ve TB2) I.tip hata ve testin gücü bakımından kıyaslanmıştır. Bu kıyaslama için I.tip hata oranı 0,01, 0,05 ve 0,10 olarak alınmıştır.

Kritik değerler 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 100, 150, 200 örnek hacmindeki 100000 örnek için Monte Carlo benzetim çalışması ile elde edilmiştir. Alfa (α) 0,01, 0,05 ve 0,1 için elde edilen kritik değerlerle kritik değer fonksiyonu oluşturulmuştur. Kritik değer fonksiyonu sayesinde tüm örnek hacimleri için yüksek benzerlik oranlarında (%99) (Çizelge 3.1. - Çizelge 3.10.) kritik değerler hesaplanmıştır.

I.tip hata oranı ve testin gücü değerlerini elde etmek için 10000 deneme yapılarak, MATLAB R2013b programı yardımıyla simülasyon çalışmaları gerçekleştirilmiştir. I.tip hata oranı, (0,1) parametrelili tekdüze dağılım kullanılarak elde edilmiştir. Testin gücü için ise belirtilen α düzeylerinde aşağıda Çizelge 3.12.'de belirtilen Stephens (1974) tarafından kullanılan alternatif dağılım aileleriyle (A_k , B_k , C_k) çalışılmıştır.

A_k : Tek modlu simetrik olmayan dağılım,

B_k : Tek modlu simetrik dağılım,

C_k : İki modlu simetrik dağılım.

Çizelge 3.1. Kolmogorov ve Simirnov testi için elde kritik değer fonksiyonu

Kritik Değer Fonksiyonu ($\alpha = 0,05$)	Örnek hacmi (n)	Simülasyon Değeri	Tahmin Değeri	Uyum Yüzdesi
$f(n) = \frac{0,04434 * n^2 + n * 14,83 + 169}{n^2 + n * 55,65 + 131}$	5	0,56263	0,56248	99,97
	6	0,51862	0,51822	99,92
	7	0,48163	0,48281	99,76
	8	0,45298	0,45373	99,83
	9	0,42955	0,42935	99,95
	10	0,40861	0,40855	99,99
	11	0,39150	0,39055	99,76
	12	0,37557	0,37478	99,79
	13	0,36054	0,36082	99,92
	14	0,34802	0,34835	99,91
	15	0,33643	0,33712	99,79
	20	0,29387	0,29400	99,96
	25	0,26501	0,26427	99,72
	30	0,24168	0,24211	99,82
	35	0,22462	0,22470	99,96
	40	0,21019	0,21055	99,83
	45	0,19824	0,19873	99,75
	50	0,18843	0,18867	99,87
	55	0,18019	0,17996	99,87
	100	0,13397	0,13350	99,65
	150	0,10996	0,10947	99,55
	200	0,09513	0,09576	99,34

Çizelge 3.2. Anderson-Darling testi için elde kritik değer fonksiyonu

Kritik Değer Fonksiyonu ($\alpha = 0,05$)
$f(n) = 2,512$

Farklı örnek hacimlerinde yapılan simülasyon çalışmasında Anderson-Darling (AD) testi için elde edilen kritik değerlerde monotonluk sağlanamamıştır. Alfa (α) 0,05 için elde edilen 2,512 kritik değeri tüm örnek hacimleri için geçerlidir ve %99 üzerinde uyum yüzdesine sahiptir.

Çizelge 3.3. Cramer von Mises testi için elde kritik değer fonksiyonu ve değerleri

Kritik Değer Fonksiyonu ($\alpha = 0,05$)
$f(n) = 0,4560$

Farklı örnek hacimlerinde yapılan simülasyon çalışmasında Cramer von Mises (W^2) testi için elde edilen kritik değerlerde monotonluk sağlanamamıştır. Alfa (α) 0,05 için elde edilen 0,456 kritik değeri tüm örnek hacimleri için geçerlidir ve %99 üzerinde uyum yüzdesine sahiptir.

Çizelge 3.4. Shapiro Wilk testi için elde kritik değer fonksiyonu ve değerleri

Kritik Değer Fonksiyonu ($\alpha = 0,05$)	Örnek hacmi (n)	Simülasyon Değeri	Tahmin Değeri	Uyum Yüzdesi
$f(n) = \frac{-0,002551 * n^2 + 3,823 * n + 30,07}{n^2 + 3,681 * n + 20,79}$	5	0,76458	0,76519	99,92
	6	0,67172	0,67088	99,87
	7	0,59466	0,59343	99,79
	8	0,52887	0,52952	99,88
	9	0,47494	0,47636	99,70
	10	0,43046	0,43176	99,70
	11	0,39446	0,39398	99,88
	12	0,36297	0,36169	99,65
	13	0,33278	0,33385	99,68
	14	0,31048	0,30967	99,74
	15	0,28876	0,28850	99,91
	20	0,21426	0,21341	99,60
	25	0,16794	0,16813	99,89
	30	0,13853	0,13815	99,72
	35	0,11687	0,11694	99,94
	40	0,10091	0,10119	99,72
	45	0,08884	0,08905	99,75
	50	0,07897	0,07943	99,42
	55	0,07119	0,07161	99,41
	100	0,03705	0,03724	99,48
	150	0,02386	0,02367	99,20
	200	0,01755	0,01719	98,84

Çizelge 3.5. Watson testi için elde kritik değer fonksiyonu ve değerleri

Kritik Değer Fonksiyonu ($\alpha = 0,05$)	Örnek hacmi (n)	Simülasyon Değeri	Tahmin Değeri	Uyum Yüzdesi
$f(n) = \frac{0,187 * n - 0,161}{n - 0,6313}$	5	0,17720	0,17720	100,00
	6	0,17918	0,17900	99,90
	7	0,17987	0,18026	99,78
	8	0,18090	0,18117	99,85
	9	0,18149	0,18187	99,79
	10	0,18288	0,18242	99,75
	11	0,18394	0,18286	99,41
	12	0,18384	0,18322	99,66
	13	0,18272	0,18353	99,56
	14	0,18392	0,18379	99,93
	15	0,18365	0,18401	99,80
	20	0,18450	0,18478	99,84
	25	0,18542	0,18524	99,90
	30	0,18475	0,18554	99,58
	35	0,18590	0,18575	99,92
	40	0,18622	0,18591	99,84
	45	0,18652	0,18603	99,74
	50	0,18451	0,18613	99,12
	55	0,18668	0,18621	99,75
	100	0,18650	0,18650	100,00
	150	0,18714	0,18671	99,77
	200	0,18698	0,18678	99,89

Çizelge 3.6. Zhang Z_K testi için elde kritik değer fonksiyonu ve değerleri

Kritik Değer Fonksiyonu ($\alpha = 0,05$)	Örnek hacmi (n)	Simülasyon Değeri	Tahmin Değeri	Uyum Yüzdesi
$f(n) = -5.181 * n^{-0,2689} + 6,084$	5	2.72756	2.72306	99,84
	6	2.89142	2.88386	99,74
	7	3.00183	3.01380	99,60
	8	3.11713	3.12208	99,84
	9	3.21463	3.21442	99,99
	10	3.29888	3.29458	99,87
	11	3.37696	3.36516	99,65
	12	3.44280	3.42804	99,57
	13	3.46878	3.48459	99,54
	14	3.53138	3.53588	99,87
	15	3.56700	3.58272	99,56
	20	3.77250	3.76892	99,91
	25	3.90942	3.90374	99,85
	30	4.01368	4.00806	99,86
	35	4.09359	4.09235	99,97
	40	4.17665	4.16259	99,66
	45	4.21960	4.22249	99,93
	50	4.26562	4.27449	99,79
	55	4.32995	4.32028	99,78
	100	4.56925	4.58219	99,72
	150	4.74241	4.73733	99,89
	200	4.83851	4.83757	99,98

Çizelge 3.7. Zhang Z_A testi için elde kritik değer fonksiyonu ve değerleri

Kritik Değer Fonksiyonu ($\alpha = 0,05$)	Örnek hacmi (n)	Simülasyon Değeri	Tahmin Değeri	Uyum Yüzdesi
$f(n) = \frac{3,299 * n^2 + 64,17 * n + 145,8}{n^2 + 15,59 * n + 11,73}$	5	4,78974	4,78832	99,97
	6	4,59925	4,59817	99,98
	7	4,44888	4,45450	99,87
	8	4,33852	4,34171	99,93
	9	4,25705	4,25055	99,85
	10	4,17744	4,17517	99,95
	11	4,11423	4,11166	99,94
	12	4,06237	4,05734	99,88
	13	4,00873	4,01028	99,96
	14	3,96770	3,96907	99,97
	15	3,92913	3,93265	99,91
	20	3,79734	3,79915	99,95
	25	3,71241	3,71359	99,97
	30	3,65316	3,65368	99,99
	35	3,61030	3,60923	99,97
	40	3,57430	3,57486	99,98
	45	3,54990	3,54745	99,93
	50	3,52544	3,52507	99,99
	55	3,50868	3,50642	99,94
	100	3,41869	3,41835	99,99
	150	3,38020	3,38020	100,00
	200	3,35974	3,36055	99,98

Çizelge 3.8. Zhang Z_C testi için elde kritik değer fonksiyonu ve değerleri

Kritik Değer Fonksiyonu ($\alpha = 0,05$)	Örnek hacmi (n)	Simülasyon Değeri	Tahmin Değeri	Uyum Yüzdesi
$f(n) = -106,1 * n^{-0,03496} + 118,5$	5	18,19586	18,20497	99,95
	6	18,90481	18,84222	99,67
	7	19,22376	19,37784	99,20
	8	19,72163	19,83949	99,40
	9	20,26877	20,24491	99,88
	10	20,56236	20,60616	99,79
	11	20,90657	20,93180	99,88
	12	21,18277	21,22814	99,79
	13	21,49716	21,49996	99,99
	14	21,58819	21,75094	99,25
	15	21,72864	21,98402	98,82
	20	23,00843	22,94985	99,75
	25	23,66621	23,69235	99,89
	30	24,23453	24,29472	99,75
	35	24,65065	24,80104	99,39
	40	25,13914	25,23743	99,61
	45	25,75696	25,62067	99,47
	50	25,96819	25,96215	99,98
	55	26,34055	26,26998	99,73
	100	27,98824	28,17762	99,32
	150	29,43764	29,44891	99,96
	200	30,27113	30,34004	99,77

Çizelge 3.9. TB1 testi için elde kritik değer fonksiyonu ve değerleri

Kritik Değer Fonksiyonu ($\alpha = 0,05$)	Örnek hacmi (n)	Simülasyon Değeri	Tahmin Değeri	Uyum Yüzdesi
$f(n) = 5,148 * e^{-\left(\frac{n+4,338}{5,424}\right)^2} + 0,1207$ $* e^{-\left(\frac{n-7,558}{0,4933}\right)^2} + 0,08111$ $* e^{-\left(\frac{n-48,68}{175,9}\right)^2} + 0,03709$ $* e^{-\left(\frac{n+15,49}{29,25}\right)^2}$	5	0,56910	0,56904	99,99
	6	0,42870	0,42880	99,98
	7	0,38083	0,38077	99,99
	8	0,35475	0,35472	99,99
	9	0,27287	0,27328	99,85
	10	0,25707	0,25559	99,42
	11	0,24228	0,24253	99,89
	12	0,23275	0,23159	99,50
	13	0,22045	0,22166	99,45
	14	0,21380	0,21229	99,29
	15	0,20597	0,20334	99,12
	20	0,15235	0,15208	99,30
	25	0,13908	0,13424	96,52
	30	0,11263	0,11322	99,47
	35	0,10652	0,10647	99,58
	40	0,09047	0,09106	99,35
	45	0,08674	0,08623	99,41
	50	0,08358	0,08357	99,99
	55	0,08178	0,08212	99,72
	100	0,06806	0,06749	99,48
	150	0,05788	0,05821	99,84
	200	0,04792	0,04810	99,44

Çizelge 3.10. TB2 testi için elde kritik değer fonksiyonu ve değerleri

Kritik Değer Fonksiyonu ($\alpha = 0,05$)	Örnek hacmi (n)	Simülasyon Değeri	Tahmin Değeri	Uyum Yüzdesi
$f(n) = \frac{0,0003911 * n^2 - 0,03197 * n + 6,113}{n^2 + 18,71 * n - 58,46}$	5	0,09955	0,09923	99,69
	6	0,06463	0,06609	97,74
	7	0,04961	0,04862	98,01
	8	0,04013	0,03990	98,43
	9	0,02921	0,02968	98,98
	10	0,02490	0,02471	98,55
	11	0,02131	0,02165	98,42
	12	0,01859	0,01866	99,62
	13	0,01631	0,01629	99,87
	14	0,01468	0,01447	98,94
	15	0,01316	0,01339	99,25
	20	0,00754	0,00767	98,67
	25	0,00549	0,00537	97,92
	30	0,00380	0,00392	96,67
	35	0,00305	0,00300	98,61
	40	0,00232	0,00238	97,34
	45	0,00197	0,00195	98,86
	50	0,00161	0,00163	99,23
	55	0,00150	0,00149	99,56
	100	0,00068	0,00067	98,73
	150	0,00037	0,00038	98,38
	200	0,00024	0,00025	98,04

Entropiye dayalı testlerde çerçeve genişliğini belirten m değerleri için, tüm entropi tahmin edicilerinin ve entropiye dayalı testlerin simülasyondan elde edilecek sonuçlarla, yığının alternatif dağılımları ve örnek hacmine bağlı olarak minimum hata kareler ortalaması ve maksimum güce erişilen m 'nin optimum değeri seçilir. Pratikte ise yığının dağılımı bilinmediğinden m 'nin optimum değeri belirlenememektedir. Bu yüzden Crzgorzewski ve Wieczorkowski (1999) tarafından önerilen m pencere genişliğinin deneyimsel formülü $m = \sqrt{n} + 0,5$ dir.

Bu çalışmada ise tüm alternatif dağılımlar için güçlü sonuçlar veren, tek bir m değeri içeren Zamanzade (2014) tarafından önerilen Çizelge 3.11 kullanılmıştır.

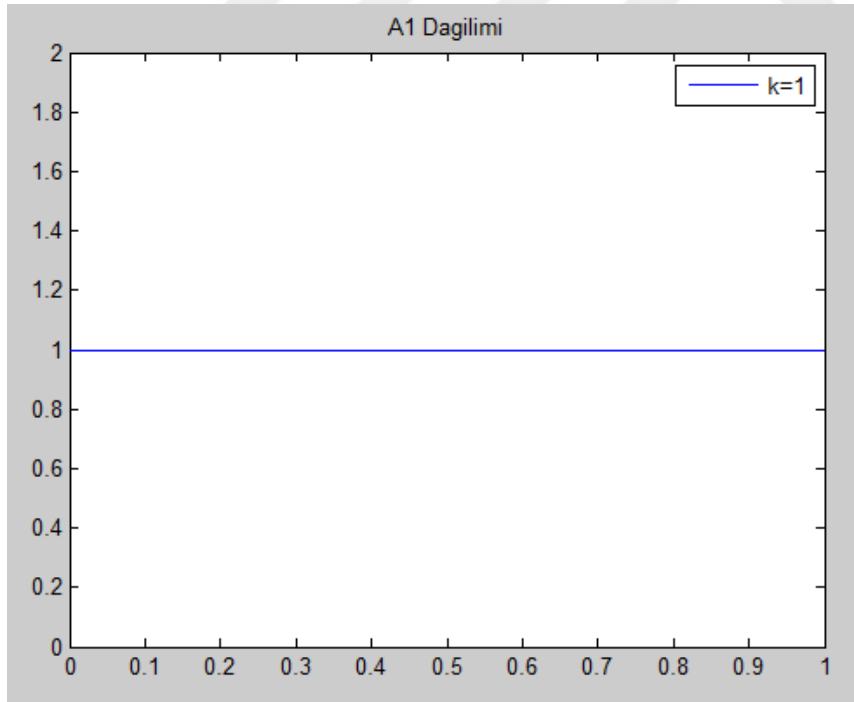
Çizelge 3.11. Farklı n değerleri için, TB1 ve TB2'ye dayalı tekdüze dağılıma uygunluk testi için önerilen m değerleri

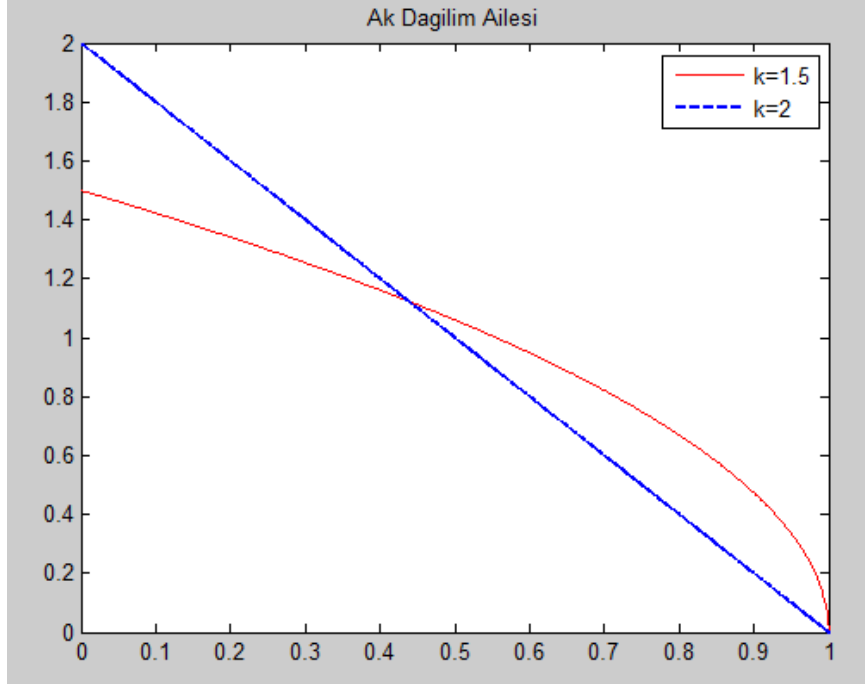
n	m
$n \leq 5$	1
$6 \leq n \leq 8$	2
$9 \leq n \leq 18$	3
$19 \leq n \leq 29$	4
$30 \leq n \leq 39$	5
$40 \leq n \leq 100$	6
$101 \leq n \leq 150$	7
$151 \leq n \leq 200$	8
$n > 200$	9

Çizelge 3.12. Kullanılan alternatif dağılımların birikimli olasılık yoğunluk fonksiyonları

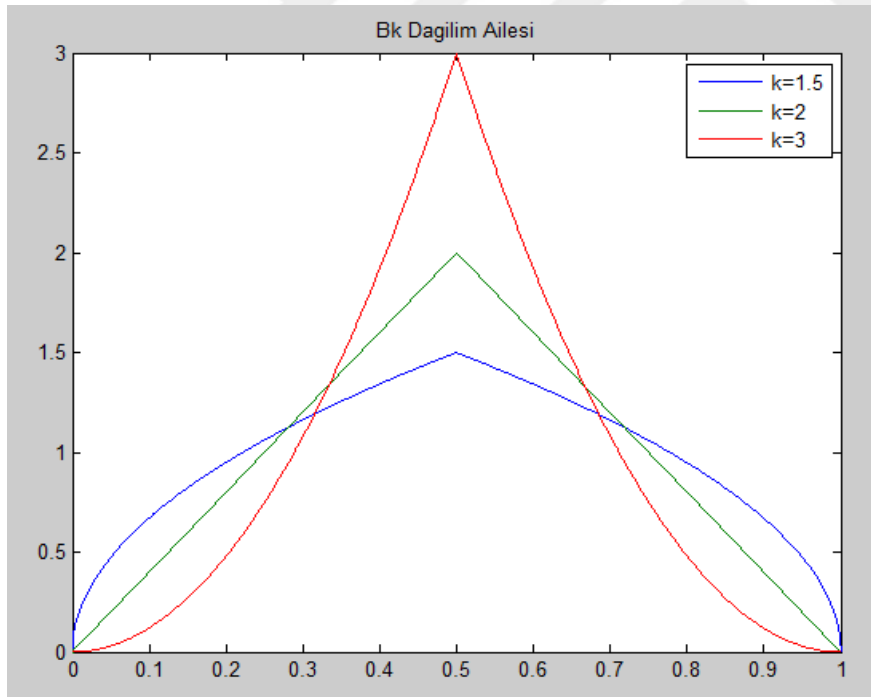
$$\begin{aligned}
A_k: F(x) &= 1 - (1 - x)^k, & 0 \leq x \leq 1 \\
& & k = 1, 1.5, 2. \\
B_k: F(x) &= \begin{cases} 2^{k-1}x^k, & 0 \leq x \leq 0,5 \\ 1 - 2^{k-1}(1 - x)^k, & 0,5 \leq x \leq 1 \end{cases} & k = 1.5, 2, 3. \\
C_k: F(x) &= \begin{cases} 0,5 - 2^{k-1}(0,5 - x)^k, & 0 \leq x \leq 0,5 \\ 0,5 + 2^{k-1}(x - 0,5)^k, & 0,5 \leq x \leq 1 \end{cases} & k = 1.5, 2.
\end{aligned}$$

Burada, A_1 dağılımı ile $F(x)=x$; $0 \leq x \leq 1$ yani tekdüze dağılım ifade edilmektedir. Simülasyon çalışmasında kullanılan ve Çizelge 3.1’de belirtilen dağılımların davranışını görmek için dağılım fonksiyonlarının türevleri alınıp olasılık yoğunluk fonksiyonları elde edilerek Şekil 3.1 - Şekil 3.4’deki grafikler oluşturulmuştur.

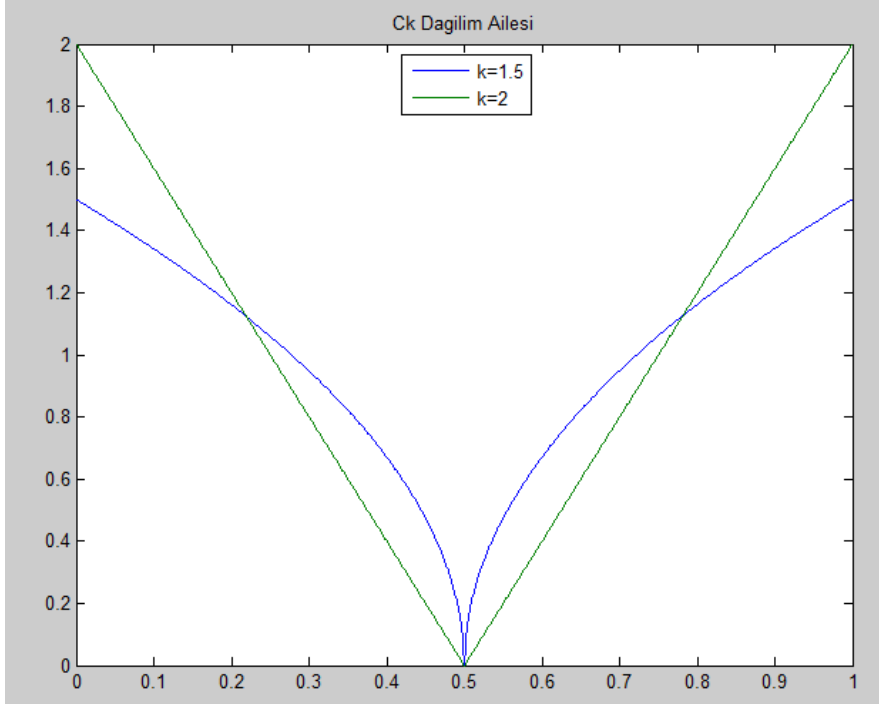
Şekil 3.1. A_1 dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu



Şekil 3.2. A_k dağılım ailesinin olasılık yoğunluk fonksiyonu



Şekil 3. 3. B_k dağılım ailesinin olasılık yoğunluk fonksiyonu



Şekil 3.4. C_k dağılım ailesinin olasılık yoğunluk fonksiyonu

Şekil 3.2 – Şekil 3.4’de gösterildiği gibi k değerleri 1’den arttıkça, dağılım tekdüzelikten uzaklaşmakta ve farklı dağılımlar (simetrik-çarpık ve tek-çift modlu) elde edilmektedir.

Çizelge 3.13’de anlamlılık düzeylerinin üç durumu, yani $\alpha = 0,01$, $\alpha = 0,05$ ve $\alpha = 0,1$ değerleri ele alınmıştır. A₁ dağılımı $F(x) = x$; $0 \leq x \leq 1$ olduğundan, (2.1)’de belirtilen H₀ hipotezinin doğruluğu altında, rasgele sayılar tekdüze (0,1) dağılımından üretilmiş ve I.tip hatalar deneysel olarak hesaplanmıştır.

Çizelge 3.13. Uyum iyiliği testlerinin deneysel I.tip hata oranları

n	α	$\sim U(0,1)$	KS	A^2	W^2	SW	U^2	Z_K	Z_A	Z_C	TB1	TB2
10	0,01	A_1	0,0108	0,0101	0,0101	0,0095	0,0102	0,0103	0,0100	0,0104	0,0101	0,0094
	0,05		0,0524	0,0536	0,0527	0,0485	0,0481	0,0527	0,0508	0,0512	0,0482	0,0477
	0,1		0,1041	0,1057	0,1050	0,0937	0,1042	0,1034	0,1016	0,1028	0,1046	0,1044
20	0,01		0,0108	0,0104	0,0110	0,0125	0,0106	0,0100	0,0109	0,0092	0,0110	0,0110
	0,05		0,0467	0,0457	0,0475	0,0467	0,0500	0,0480	0,0505	0,0474	0,0508	0,0506
	0,1		0,1012	0,1005	0,0978	0,0953	0,0989	0,1003	0,0986	0,0974	0,0980	0,0974
30	0,01		0,0107	0,0107	0,0095	0,0091	0,0110	0,0100	0,0090	0,0088	0,0096	0,0110
	0,05		0,0502	0,0495	0,0475	0,0493	0,0533	0,0530	0,052	0,0494	0,0533	0,0504
	0,1		0,1050	0,1039	0,1024	0,0974	0,0973	0,1038	0,1070	0,1036	0,1025	0,0993
40	0,01		0,0097	0,0099	0,0095	0,0104	0,0105	0,0100	0,0101	0,0083	0,0092	0,0105
	0,05		0,0488	0,0504	0,0500	0,0516	0,0514	0,0504	0,0520	0,0517	0,0513	0,0515
	0,1		0,1021	0,1018	0,1032	0,1036	0,0997	0,1032	0,1014	0,0978	0,1015	0,0997

Çizelge 3.13'deki değerler incelendiğinde farklı örnek hacminde ($n = 10, 20, 30, 40$) tüm uyum iyiliği testlerinin deneysel I.tip hata değerlerinin ilgili anlamlılık düzeyleri civarında değerler aldığı görülmektedir. Bu da tüm testlerin I.tip hata oranları bakımından uygun olduğunu göstermektedir.

Aşağıda Çizelge 3.14 - Çizelge 3.17'de $\alpha=0,01, 0,05$ ve $0,1$ değerleri testin gücü için ele alınmıştır. Alternatif dağılımlar, $A_{1,5}, A_2, B_{1,5}, B_2, B_3, C_{1,5}, C_2$ dağılımları tekdüze dağılımdan farklı olduğundan, (2.1)'de belirtilen H_1 hipotezinin doğruluğu altında, testin gücü deneysel olarak hesaplanmıştır.

En yüksek güç değerlerine sahip olan testlerin güç değerleri Çizelge 3.14 - Çizelge 3.17'de kalın olarak ifade edilmiştir.

Çizelge 3.14. m=3, n=10 için testin gücü sonuçları

α	Alternatif	KS	A ²	W ²	SW	U ²	Z _K	Z _A	Z _C	TB1	TB2
0,01	A _{1,5}	0,04615	0,04940	0,05315	0,00220	0,02615	0,03855	0,05510	0,03125	0,03595	0,03735
	A ₂	0,15505	0,17195	0,19230	0,00085	0,07105	0,13180	0,19565	0,10905	0,11150	0,11535
	B _{1,5}	0,00440	0,00125	0,00300	0,03455	0,03770	0,00335	0,00665	0,00060	0,04940	0,05295
	B ₂	0,00320	0,00015	0,00085	0,10105	0,12750	0,00250	0,01140	0,00010	0,15570	0,17115
	B ₃	0,00350	0,00000	0,00010	0,37595	0,47415	0,00315	0,05935	0,00000	0,50470	0,55425
	C _{1,5}	0,03255	0,03555	0,02905	0,00485	0,03760	0,03490	0,01745	0,02580	0,00665	0,00615
	C ₂	0,06675	0,07235	0,04940	0,00340	0,12305	0,07745	0,02905	0,04840	0,00815	0,00735
0,05	A _{1,5}	0,15390	0,15950	0,17370	0,01830	0,10190	0,13590	0,17520	0,13710	0,14240	0,14610
	A ₂	0,38120	0,40860	0,44060	0,00670	0,21320	0,34310	0,43850	0,36130	0,31310	0,32310
	B _{1,5}	0,03520	0,01490	0,02480	0,16270	0,13500	0,02900	0,06390	0,02550	0,18710	0,20070
	B ₂	0,04530	0,00820	0,02390	0,35180	0,33290	0,04670	0,14340	0,06260	0,41670	0,44870
	B ₃	0,08870	0,02060	0,05820	0,75500	0,75340	0,10800	0,44470	0,27790	0,81210	0,85060
	C _{1,5}	0,11260	0,11880	0,09530	0,01950	0,13420	0,11670	0,06890	0,08750	0,02640	0,02380
	C ₂	0,19730	0,23190	0,15390	0,01380	0,33360	0,22620	0,11960	0,16470	0,03620	0,03150
0,1	A _{1,5}	0,25370	0,25740	0,27760	0,03510	0,17120	0,23260	0,27360	0,24760	0,24380	0,24980
	A ₂	0,53100	0,55200	0,58220	0,01880	0,33750	0,48950	0,57510	0,52860	0,47850	0,49230
	B _{1,5}	0,09260	0,05180	0,07710	0,28220	0,22490	0,08080	0,14560	0,10430	0,31730	0,34280
	B ₂	0,12690	0,05880	0,09930	0,52770	0,47430	0,13180	0,30250	0,24970	0,58300	0,62770
	B ₃	0,24420	0,17860	0,25940	0,88780	0,86270	0,2862	0,68400	0,63440	0,91560	0,93940
	C _{1,5}	0,19410	0,21310	0,17190	0,04220	0,22870	0,20560	0,13430	0,15770	0,06100	0,05380
	C ₂	0,30800	0,35670	0,26560	0,02740	0,46970	0,34510	0,21680	0,24680	0,07310	0,05820

Çizelge 3.15. m=4, n=20 için testin gücü sonuçları

α	Alternatif	KS	A ²	W ²	SW	U ²	Z _K	Z _A	Z _C	TB1	TB2
0,01	A _{1,5}	0,1036	0,1200	0,1294	0,0008	0,0500	0,0943	0,1366	0,0798	0,0850	0,0858
	A ₂	0,4208	0,4911	0,5145	0,0003	0,2100	0,3922	0,5397	0,3861	0,3541	0,3706
	B _{1,5}	0,0066	0,0017	0,0034	0,0767	0,0905	0,0117	0,0449	0,0038	0,1133	0,1415
	B ₂	0,0183	0,0020	0,0046	0,2918	0,3795	0,0418	0,2100	0,0316	0,4172	0,5060
	B ₃	0,0692	0,0280	0,0412	0,8476	0,9182	0,2006	0,7658	0,3595	0,9259	0,9624
	C _{1,5}	0,0453	0,0419	0,0325	0,0027	0,0913	0,0494	0,0142	0,0291	0,0121	0,0055
	C ₂	0,1167	0,1271	0,0702	0,0010	0,3740	0,1421	0,0379	0,0791	0,0398	0,0126
0,05	A _{1,5}	0,2805	0,3094	0,3227	0,0072	0,1675	0,2577	0,3361	0,2747	0,2484	0,2683
	A ₂	0,6904	0,7551	0,7724	0,0022	0,4388	0,6703	0,7864	0,7201	0,6364	0,6635
	B _{1,5}	0,0586	0,0312	0,0426	0,2627	0,2480	0,0819	0,1939	0,1090	0,3072	0,3797
	B ₂	0,1238	0,0938	0,1018	0,6306	0,6573	0,2161	0,5504	0,4037	0,7153	0,8062
	B ₃	0,4203	0,5426	0,5223	0,9784	0,9850	0,6365	0,9595	0,9210	0,9891	0,9972
	C _{1,5}	0,1469	0,1517	0,1154	0,0146	0,2434	0,1536	0,0732	0,1081	0,0620	0,0287
	C ₂	0,3133	0,3685	0,2478	0,0066	0,6560	0,3500	0,1669	0,2202	0,1662	0,0549
0,1	A _{1,5}	0,4089	0,4449	0,4562	0,0199	0,2666	0,3828	0,4588	0,4201	0,3739	0,4007
	A ₂	0,8114	0,8593	0,8657	0,0060	0,5881	0,8002	0,8727	0,8456	0,7690	0,7936
	B _{1,5}	0,1358	0,1036	0,1186	0,4228	0,3736	0,1731	0,3240	0,2610	0,4573	0,5424
	B ₂	0,2650	0,2780	0,2706	0,7953	0,7817	0,3866	0,7092	0,6556	0,8341	0,8995
	B ₃	0,6673	0,8366	0,8072	0,9951	0,9958	0,8298	0,9890	0,9855	0,9977	0,9996
	C _{1,5}	0,2501	0,2673	0,2136	0,0296	0,3722	0,2587	0,1451	0,1809	0,1344	0,0649
	C ₂	0,4549	0,5461	0,4217	0,015	0,7835	0,4935	0,3048	0,3524	0,2954	0,1059

Çizelge 3.16. m=5, n=30 için testin gücü sonuçları

α	Alternatif	KS	A ²	W ²	SW	U ²	Z _K	Z _A	Z _C	TB1	TB2
0,01	A _{1,5}	0,1900	0,2229	0,2321	0,0007	0,0923	0,1746	0,2452	0,1502	0,1482	0,1636
	A ₂	0,6638	0,7520	0,7643	0,0000	0,3827	0,6392	0,7792	0,6436	0,5885	0,6234
	B _{1,5}	0,0132	0,0036	0,0055	0,1244	0,1588	0,0281	0,1076	0,0172	0,1797	0,2461
	B ₂	0,0448	0,0214	0,0195	0,5126	0,6484	0,1359	0,5017	0,1928	0,6646	0,7817
	B ₃	0,2684	0,4024	0,3269	0,9772	0,9953	0,5999	0,9765	0,8763	0,9955	0,9989
	C _{1,5}	0,0591	0,0553	0,0371	0,0012	0,1657	0,0651	0,0144	0,0308	0,0260	0,0084
	C ₂	0,1885	0,2144	0,1162	0,0004	0,6436	0,2141	0,0572	0,1172	0,1490	0,0352
0,05	A _{1,5}	0,4072	0,4589	0,4648	0,0045	0,2413	0,3909	0,4781	0,4200	0,3633	0,3901
	A ₂	0,8729	0,9224	0,9223	0,0006	0,6509	0,8703	0,9338	0,908	0,8413	0,8626
	B _{1,5}	0,0796	0,057	0,0568	0,3685	0,3715	0,1410	0,3188	0,2142	0,4261	0,5388
	B ₂	0,2371	0,2973	0,2426	0,8102	0,8593	0,4381	0,8017	0,7181	0,8827	0,9404
	B ₃	0,7469	0,9376	0,8891	0,9986	0,9995	0,9234	0,9990	0,9979	0,9996	0,9999
	C _{1,5}	0,1902	0,1938	0,1435	0,0083	0,3659	0,1965	0,0857	0,1266	0,1208	0,0450
	C ₂	0,4401	0,5431	0,3913	0,0031	0,8530	0,4736	0,2544	0,3308	0,4115	0,1489
0,1	A _{1,5}	0,5388	0,5930	0,5981	0,0119	0,3440	0,5216	0,6055	0,5672	0,4929	0,5174
	A ₂	0,9412	0,9660	0,9650	0,0022	0,7698	0,9352	0,9675	0,959	0,9188	0,9305
	B _{1,5}	0,1758	0,1690	0,1613	0,5268	0,4957	0,2599	0,4732	0,4053	0,5749	0,6774
	B ₂	0,4380	0,5846	0,5133	0,9057	0,9238	0,6394	0,9039	0,8818	0,9462	0,9783
	B ₃	0,9178	0,9908	0,9802	0,9998	1,0000	0,9808	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000
	C _{1,5}	0,2987	0,3195	0,2576	0,0209	0,5005	0,3011	0,1675	0,2046	0,2169	0,0905
	C ₂	0,6009	0,7228	0,6119	0,0071	0,9246	0,6232	0,4282	0,4833	0,5580	0,258

Çizelge 3.17. m=6, n=40 için testin gücü sonuçları

α	Alternatif	KS	A^2	W^2	SW	U^2	Z_K	Z_A	Z_C	TB1	TB2
0,01	$A_{1,5}$	0,2625	0,3216	0,3288	0,0005	0,1350	0,2496	0,3502	0,2429	0,2188	0,2445
	A_2	0,8237	0,8979	0,8968	0,0000	0,5630	0,8179	0,916	0,8516	0,7884	0,8132
	$B_{1,5}$	0,0153	0,0076	0,0076	0,1940	0,2416	0,0503	0,1924	0,0527	0,2662	0,3739
	B_2	0,0800	0,0871	0,0539	0,6892	0,8235	0,2656	0,7370	0,4612	0,8426	0,9200
	B_3	0,5335	0,8278	0,7106	0,9984	0,9999	0,8732	0,9990	0,9919	0,9999	1,0000
	$C_{1,5}$	0,0806	0,0748	0,0469	0,0019	0,2510	0,0870	0,0192	0,0408	0,0543	0,0136
	C_2	0,2532	0,3213	0,1629	0,0003	0,8308	0,2990	0,1015	0,1764	0,3184	0,0963
0,05	$A_{1,5}$	0,5207	0,5853	0,5858	0,0027	0,3123	0,4997	0,6100	0,5550	0,4646	0,4954
	A_2	0,9554	0,9784	0,9780	0,0003	0,7977	0,9525	0,9799	0,9723	0,9355	0,9484
	$B_{1,5}$	0,1146	0,1080	0,0897	0,4591	0,4763	0,2064	0,4454	0,3392	0,5344	0,6627
	B_2	0,3684	0,5459	0,4291	0,9064	0,9452	0,6351	0,9237	0,8857	0,9574	0,9849
	B_3	0,9285	0,9953	0,9851	0,9999	1,0000	0,9912	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	$C_{1,5}$	0,2291	0,2365	0,1680	0,0056	0,4878	0,2308	0,1029	0,1528	0,1882	0,0628
	C_2	0,5635	0,6912	0,5423	0,0017	0,942	0,5868	0,3683	0,4465	0,6088	0,2966
0,1	$A_{1,5}$	0,6520	0,7099	0,7115	0,0074	0,4379	0,6413	0,7185	0,6863	0,6046	0,6344
	A_2	0,9805	0,9914	0,9918	0,0016	0,8738	0,9797	0,9915	0,9900	0,9705	0,9775
	$B_{1,5}$	0,2227	0,2574	0,2226	0,6290	0,6141	0,3575	0,6006	0,5414	0,6904	0,7932
	B_2	0,5894	0,7942	0,7058	0,9664	0,9757	0,8011	0,9676	0,9601	0,9844	0,9959
	B_3	0,9833	0,9999	0,9996	1,0000	1,0000	0,9990	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	$C_{1,5}$	0,3522	0,3835	0,3101	0,0150	0,6151	0,3469	0,1935	0,2372	0,3052	0,1301
	C_2	0,7302	0,8438	0,7683	0,0039	0,9770	0,7397	0,5586	0,6042	0,7595	0,4502

Çizelge 3.14 incelediğinde n=10 ve $\alpha=0,01$ için U^2 , Z_A , TB2 ve W^2 testlerinin daha güçlü sonuçlar verdiği görülmüştür. Bu testler, kendi aralarında farklı dağılım aileleri için birbirlerine göre daha üstün sonuçlar vermiştir. Örneğin, A_k dağılım ailesi için en yüksek test gücünü hesaplayan Z_A testi olmuştur. W^2 ve AD testleri Z_A 'yı takip etmektedir. B_k dağılım ailesi için en yüksek test gücünü hesaplayan TB2 testi olmuştur. U^2 testi ve TB1 testi, TB2'yi takip etmektedir. C_k dağılım ailesi için U^2 testi en yüksek test gücünü hesaplamıştır. AD ve Z_K testleri U^2 testini takip etmektedir.

Anlamlılık düzeyi değiştiğinde uyum iyiliği testlerinin aralarındaki testin gücü bakımından performansları değişmemiştir. Örneğin, n=10 ve $\alpha=0,05$ için aynı şekilde U^2 , Z_A , TB2 ve W^2 testlerinin daha güçlü sonuçlar verdiği görülmüştür. A_k dağılım ailesi için en yüksek test gücünü hesaplayan W^2 ve Z_A testi olmuştur. AD testi bu testleri takip etmektedir. B_k

dağılım ailesi için en yüksek test gücünü hesaplayan TB2 testi olmuştur. TB1 testi, TB2'yi takip etmektedir. C_k dağılım ailesi için U^2 testi en yüksek test gücünü hesaplamıştır. Z_K ve AD testleri bu testi takip etmektedir. $n=10$ ve $\alpha=0,1$ için de benzer şekilde U^2 , Z_A , TB2 ve W^2 testlerinin daha güçlü sonuçlar verdiği görülmüştür. A_k dağılım ailesi için en yüksek test gücünü hesaplayan W^2 testi olmuştur. Z_A ve AD testleri bu testi takip etmektedir. B_k dağılım ailesi için en yüksek test gücünü hesaplayan TB2 testi olmuştur. TB1 testi TB2'yi takip etmektedir. C_k dağılım ailesi için U^2 testi en yüksek test gücünü hesaplamıştır. AD testi, U^2 testini takip etmektedir.

Çizelge 3.15, Çizelge 3.16 ve Çizelge 3.17 farklı örnek hacimlerinde yapılan kıyaslamaları içermektedir. Örneğin, $n=20$, $n=30$ ve $n=40$ için yapılan güç testlerinde U^2 , Z_A , TB2 ve W^2 testlerinin daha güçlü sonuçlar verdiği görülmüştür. A_k , B_k ve C_k dağılım aileleri için sırasıyla Z_A , TB2 ve U^2 testleri her anlamlılık düzeyinde ($\alpha = 0,01, 0,05, 0,1$) daha güçlü sonuçlara ulaşmıştır. Benzer şekilde, bu testleri sırasıyla W^2 , TB1 ve Z_K testleri takip etmektedir.

Örnek hacmi arttıkça testlerin güç değerleri beklenildiği gibi 1'e ve dolayısıyla birbirlerine yaklaştığı görülmüştür.

3.1. Güç Eğrilerinin Grafik ile Karşılaştırması

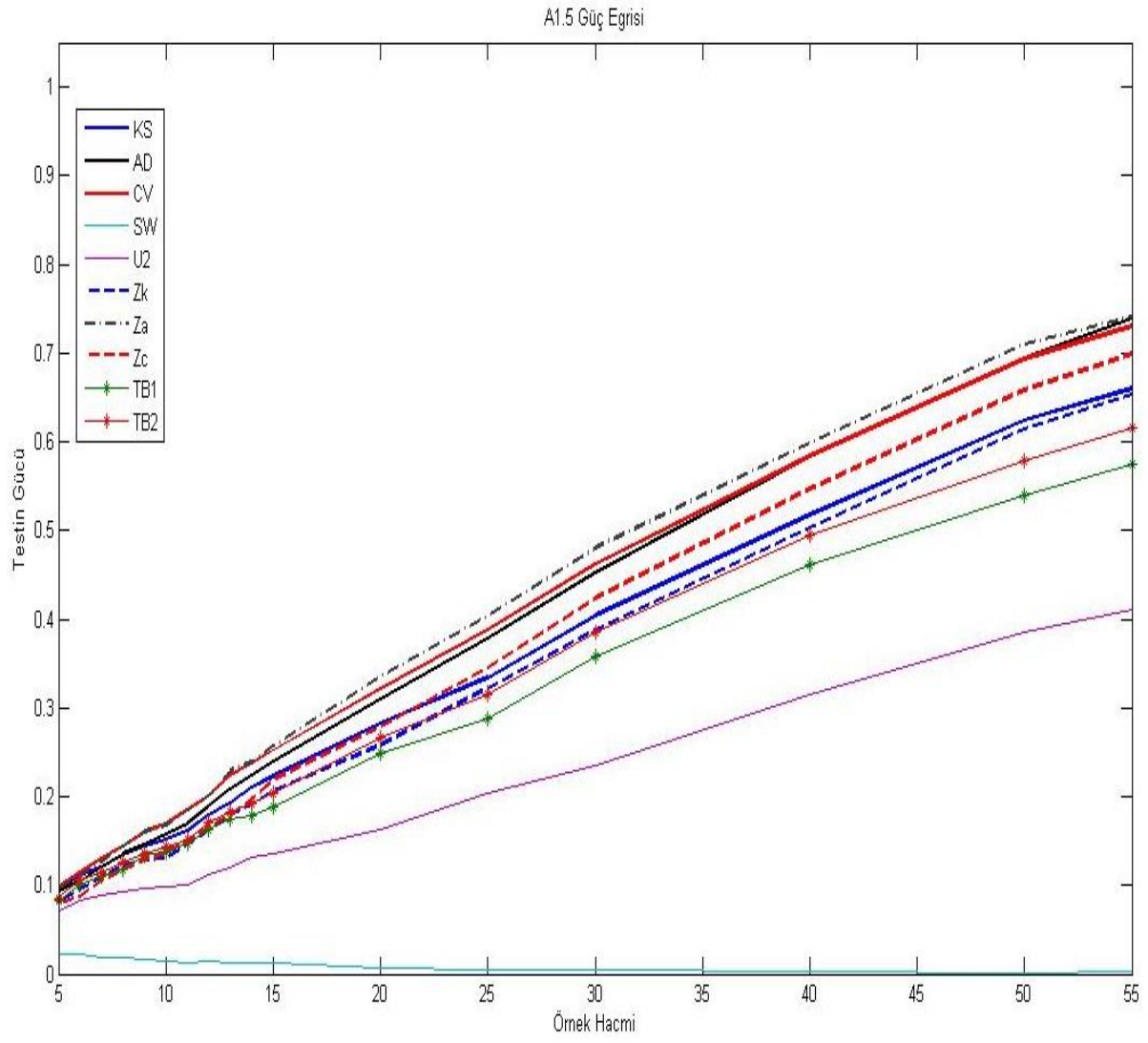
Simülasyon Çalışması 3.1. bölümünde ele alınan ve Stephens (1974) tarafından kullanılan A_k , B_k , C_k alternatif dağılım aileleri karşısında, Uyum İyiliği Testleri bölümünde ele alınan Kolmogorov-Smirnov (KS), Anderson-Darling (AD), Cramer von Mises (W^2), Watson (U^2), Shapiro-Wilk (SW), Zhang (Z_K , Z_A , Z_C) ve entropiye dayalı testlerden Zamanzade (2014)'nin önerdiği TB1 ve TB2 uyum iyiliği testlerin testin gücü eğrileri incelenmiştir. Burada amaç, simülasyon bölümünde kolayca gözlemlenemeyen, uyum iyiliği testlerinin, değişen örnek hacimleri karşısında duyarlılığını ortaya koyabilmektir.

Ele alınan uyum iyiliği testlerinin güç eğrileri farklı renklerde kodlanmıştır. Alternatif dağılımların her biri için farklı örnek hacimleri ile yapılan deneylerde aşağıda Şekil 3.4. - Şekil 3.10.'daki grafikler elde edilmiştir. Uyum iyiliği testlerinin güç eğrileri sayesinde, verilerin örnek hacimlerinin değişimi karşısında testlerin gücü karşılaştırılabilmiştir.

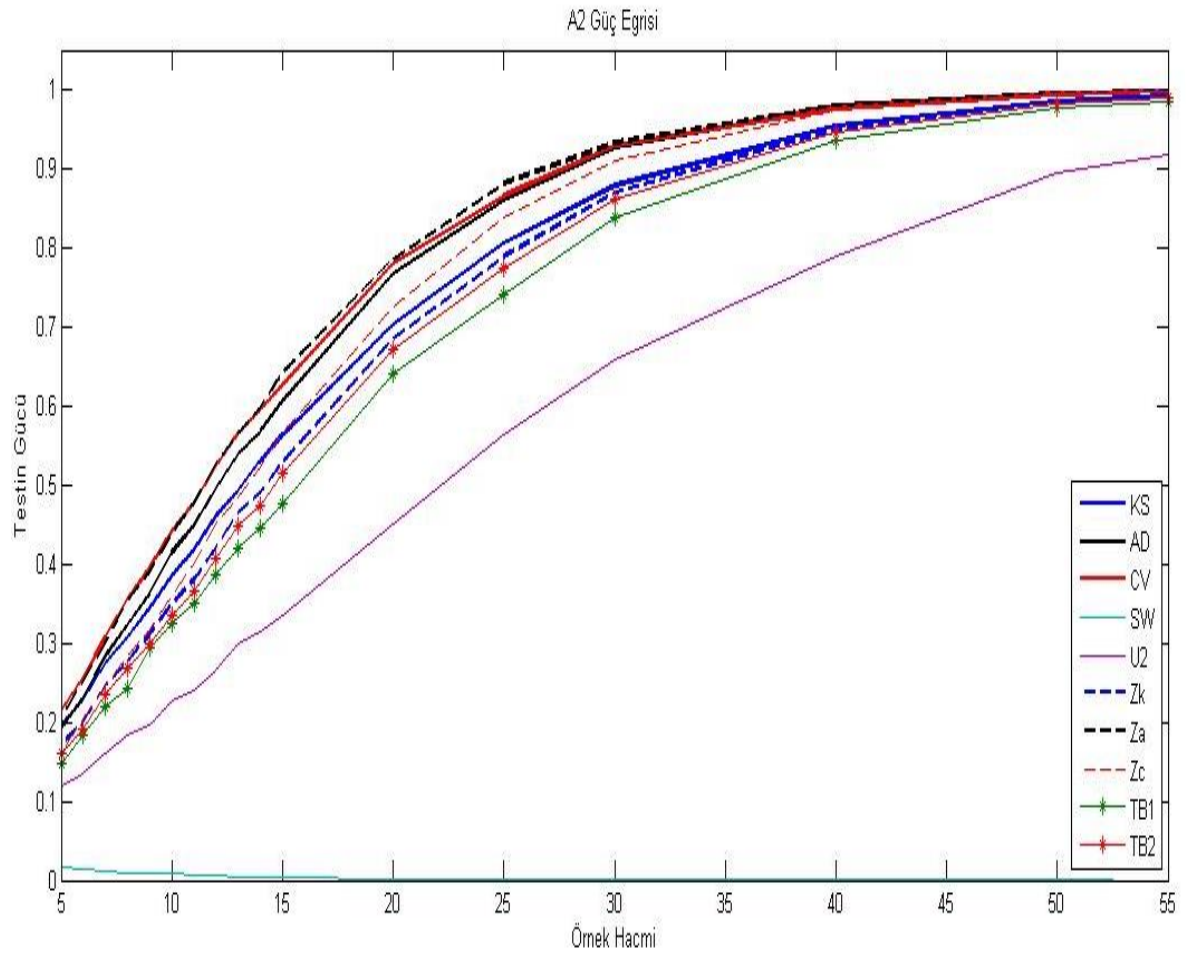
Şekil 3.4 ve Şekil 3.5 A_k dağılım ailesi için elde edilen güç eğrilerini göstermektedir. Şekil 3.1’de gösterildiği gibi A_k dağılım ailesi tek modlu simetrik olmayan bir dağılım şekline sahiptir. Bu dağılım ailesinden gelen veriler karşısında en yüksek güç değerine Z_A testinin ulaştığı simülasyon bölümünde deneysel olarak gösterilmiştir. Şekil 3.4 ve Şekil 3.5’de de Z_A testinin güç eğrisinin diğer uyum iyiliği testlerinden daha yüksek değerlerine sahip olduğu ve daha hızlı 1’e yakınsadığını görülmektedir. Ayrıca, $A_{1.5}$ dağılımından üretilen veriler karşısında W^2 testinin $n=13$ örnek hacmine kadar Z_A testi ile benzer duyarlılığa sahip olduğunu görülmektedir. Örnek hacmi arttıkça, Z_A testinin daha güçlü tepkiler verdiği görülmektedir. Benzer şekilde, A_2 dağılımından gelen veriler karşısında 13’den küçük ve 30’dan büyük örnek hacmine sahip örneklerde Z_A ve W^2 testi benzer güç değerlerine sahip iken, diğer örnek hacmine sahip verilerde Z_A testinin daha duyarlı olduğu görülmektedir.

Şekil 3.1.3 ve Şekil 3.1.5 B_k dağılım ailesi için elde edilen güç eğrilerini göstermektedir. Şekil 3.2’de gösterildiği gibi B_k dağılım ailesi tek modlu simetrik bir dağılım şekline sahiptir. Bu dağılım ailesinden gelen veriler karşısında en yüksek güç değerine TB2 testinin ulaştığı, simülasyon bölümünde deneysel olarak gösterilmiştir. Şekil 3.1.3 ve Şekil 3.1.5’de de TB2 testinin güç eğrisinin diğer uyum iyiliği testlerinden daha yüksek değerlerine sahip olduğu ve daha hızlı 1’e yakınsadığını görülmektedir. Ayrıca, $B_{1.5}$ ve B_2 dağılım ailelerinden üretilen 10’dan küçük örnek hacmine sahip veriler karşısında, TB1 ve TB2 testlerinin benzer duyarlılığa sahip olduğu görülmektedir. Örnek hacmi arttıkça, TB2 testinin daha duyarlı olduğu görülmektedir.

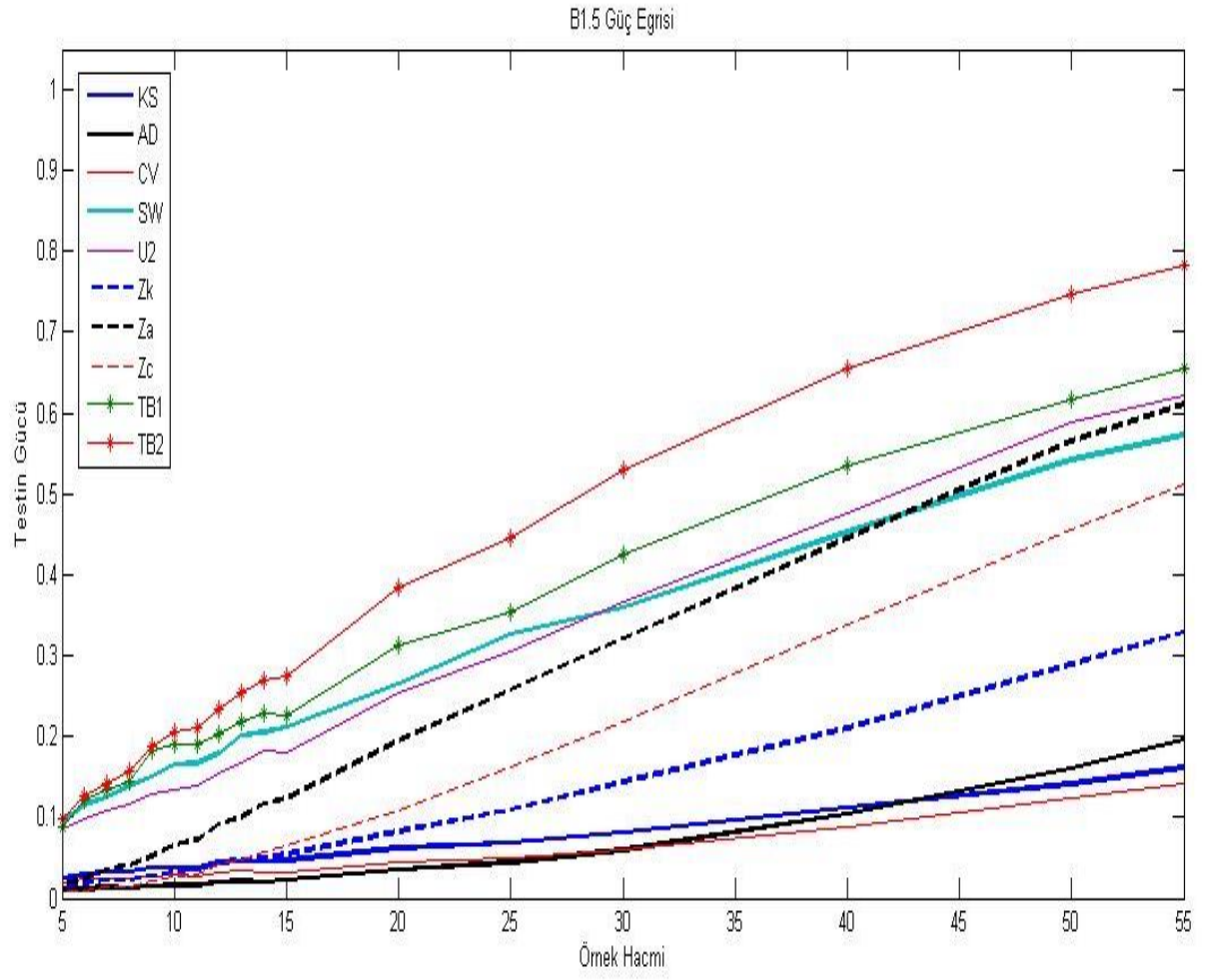
Şekil 3.1.6 ve Şekil 3.1.7 C_k dağılım ailesi için elde edilen güç eğrilerini göstermektedir. Şekil 3.3’de gösterildiği gibi C_k dağılım ailesi iki modlu simetrik olmayan bir dağılım şekline sahiptir. Bu dağılım ailesinden gelen veriler karşısında en yüksek güç değerine U^2 testinin ulaştığı simülasyon bölümünde deneysel olarak gösterilmiştir. Şekil 3.1.6 ve Şekil 3.1.7’de de U^2 testinin güç eğrisinin diğer uyum iyiliği testlerinden daha yüksek değerlere sahip olduğunu ve daha hızlı 1’e yakınsadığını görülmektedir. Ayrıca, $C_{1.5}$ ve C_2 dağılım ailelerinden üretilen, 5 örnek çaplı veriler karşısında KS ve Z_K testleri daha yüksek testin gücüne sahip iken, U^2 testinin artan örnek hacimlerine güçlü tepkiler verdiği, dolayısı ile daha duyarlı olduğu ve 1’e en hızlı yakınsayan test olduğu görülmektedir.



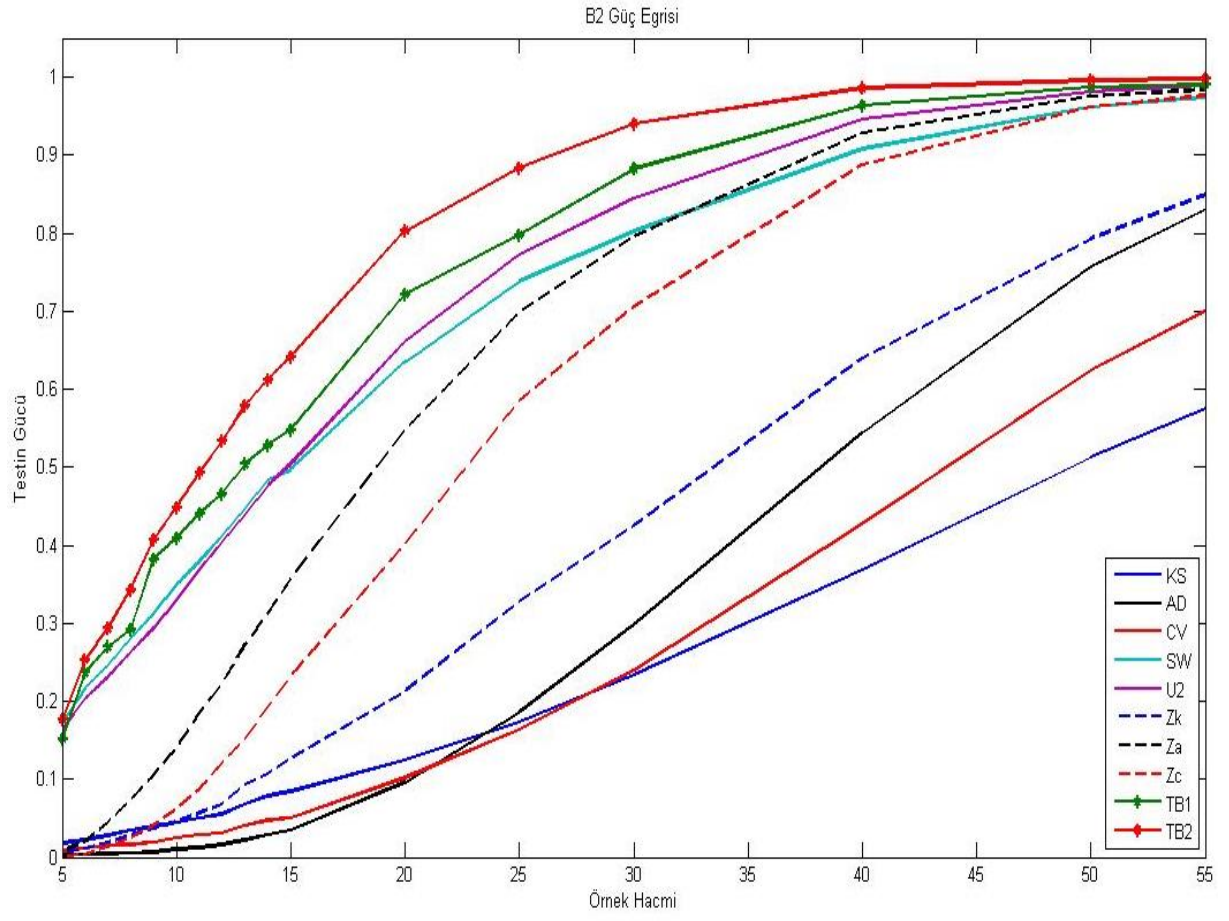
Şekil 3.5. $A_{1.5}$ dağılımı için testin gücü



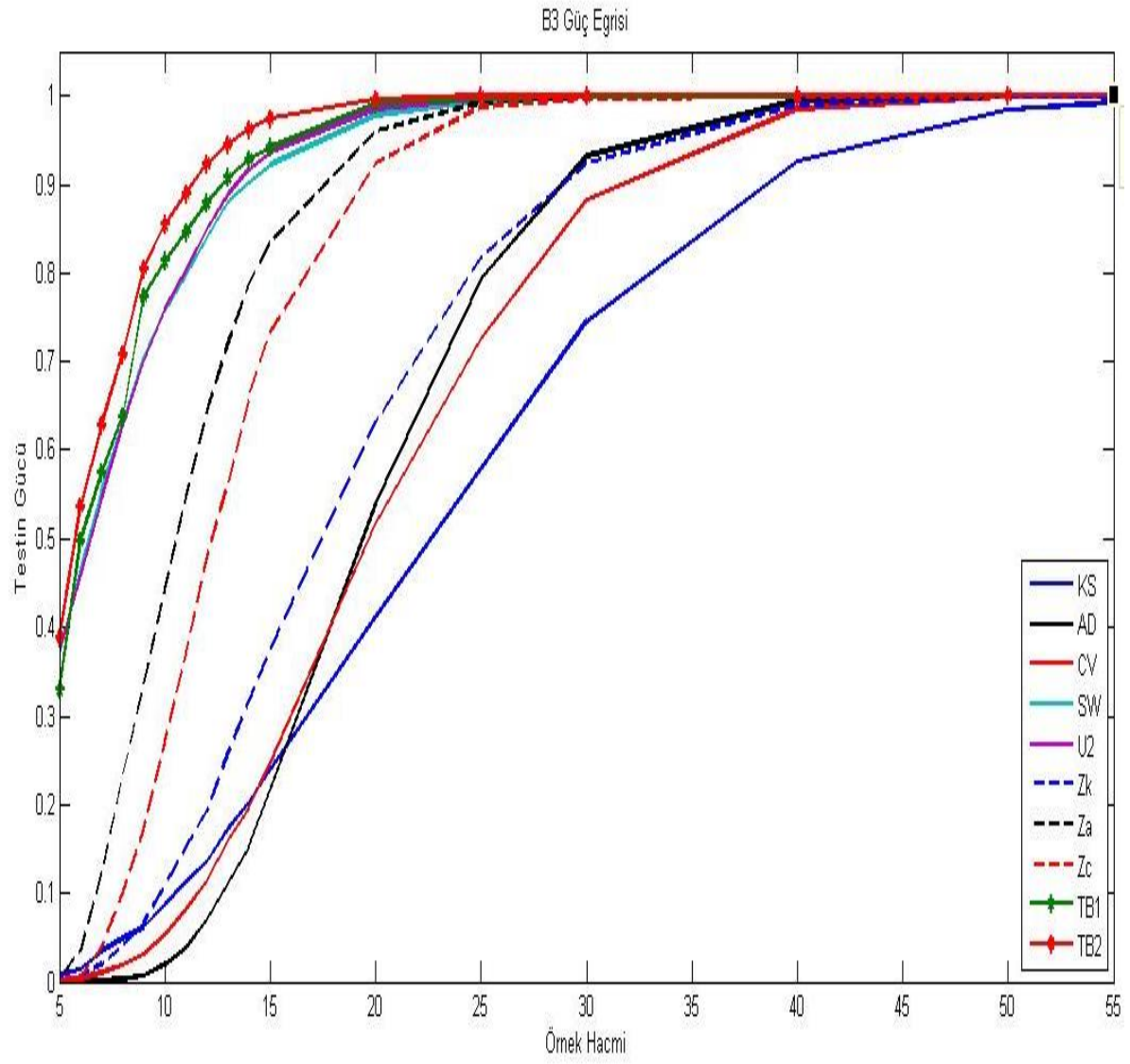
Şekil 3.6. A₂ dağılımı için testin gücü



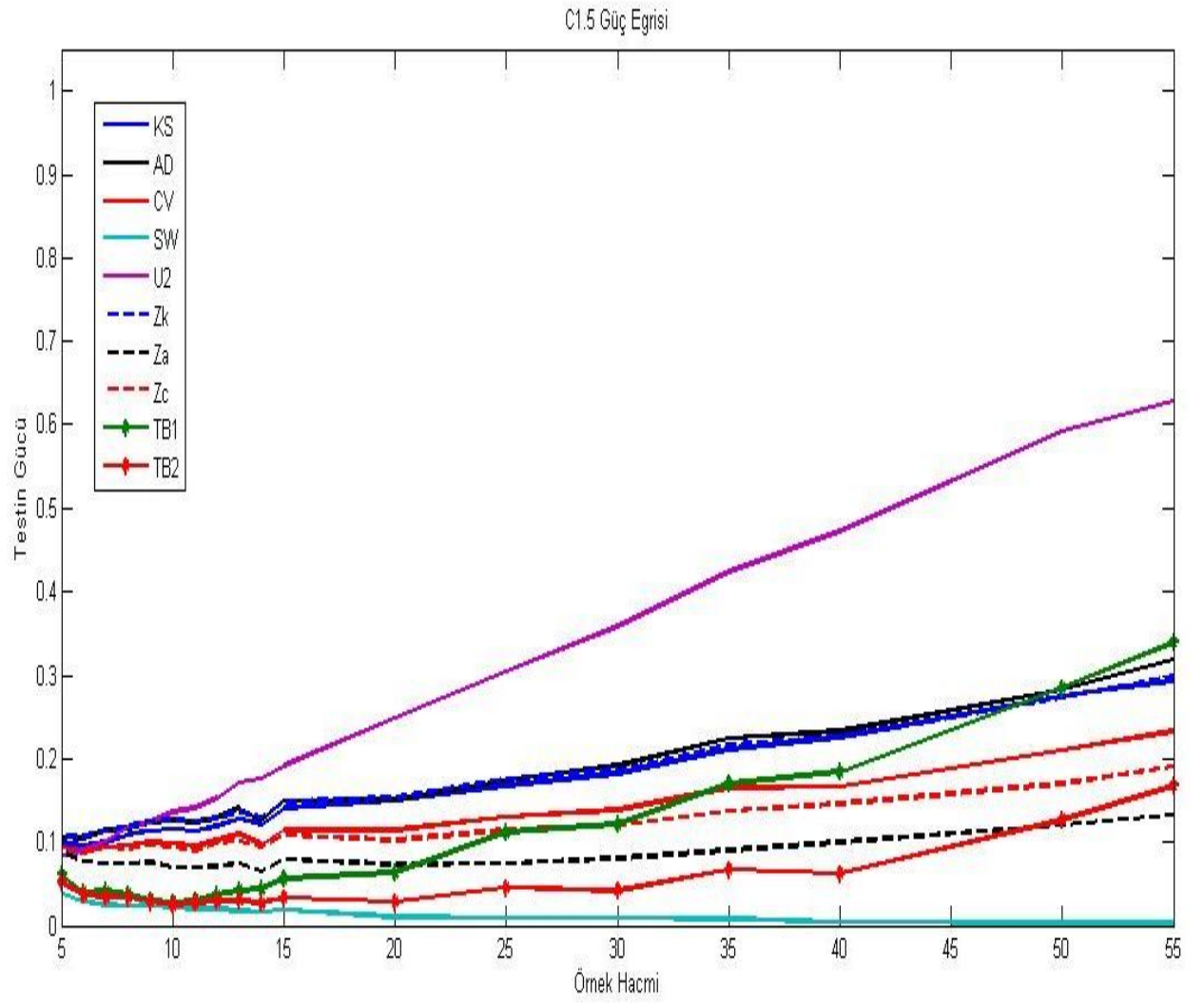
Şekil 3.7. B_{1,5} dağılımı için testin gücü



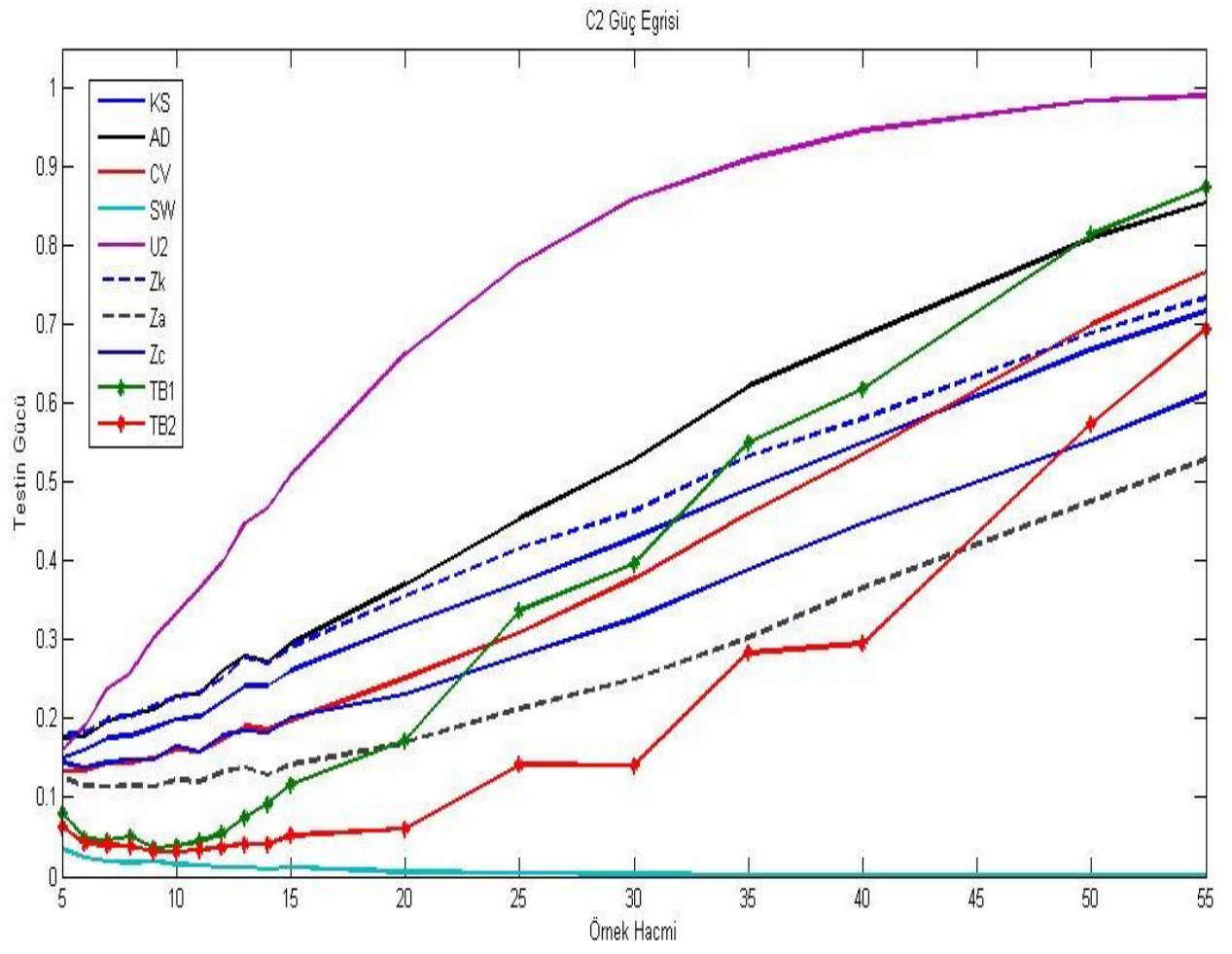
Şekil 3.8. B₂ dağılımı için testin gücü



Şekil 3.9. B_3 dağılımı için testin gücü



Şekil 3.10. $C_{1,5}$ dağılımı için testin gücü



Şekil 3.11. C_2 dağılımı için testin gücü

4. UYGULAMA

Bu bölümde tekdüze dağılama uyum iyiliğinde kullanılan ve 2.bölümde tanıtılan testlerin rasgele üretilmiş bir veri üzerinden uygulanışı gösterilmiştir ve Eşitlik 2.1’de verilen hipotezlerin test edilmesi üzerinde durulmuştur.

$[0,1]$ aralığında üretilmiş, $n=10$ birimlik rasgele sayılar aşağıdaki gibi olsun.

$$x_i = (0,9151; 0,0064; 0,5692; 0,2596; 0,0905; 0,3215; 0,6899; 0,8043; 0,1047; 0,8366)$$

Bu değerler için sıra istatistikleri $i=1, \dots, 10$ olmak üzere;

$$x_{(i)} = (0,0064; 0,0905; 0,1047; 0,2596; 0,3215; 0,5692; 0,6899; 0,8043; 0,8366; 0,9151)$$

şeklindedir.

Örnek verileri $(0,1)$ aralığında olduğundan,

Entropiye dayalı uyum iyiliği testlerinde kullanılacak çerçeve genişliği Çizelge 3.11’de verilen değerlere göre $m=2$ olarak alınmıştır. Alfa (α) 0,05 anlamlılık düzeyinde 2. Bölümde tanıtılan ve 3. Bölümde simülasyon uygulaması yapılan testlerin pratik olarak uygulanışı ele alınmıştır.

4.1. Kolmogorov-Smirnov-Lilliefors Testinin Uygulanması

Kolmogorov-Smirnov (1938) için verilen test istatistiği aşağıdaki gibidir.

$$D = \max_x |F^*(x) - F_n(x)|$$

$$F^*(x_{(i)}) = (0,0064; 0,0905; 0,1047; 0,2596; 0,3215; 0,5692; 0,6899; 0,8043; 0,8366; 0,9151)$$

$$F_n(x) = (0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1)$$

Deneysel dağılım fonksiyonu değerleri ve $F^*(x)$ arasındaki mutlak farkların en büyüğü 0,1953 olarak bulunmuştur. EK 1.1’e göre kritik değer 0,4086 olarak elde edildiğinden

0,1953 < 0,4086 olup Eşitlik 2.1'deki H_0 hipotezi red edilmemiştir. Yani, veriler tekdüze dağılımdan gelmektedir sonucuna ulaşılır.

4.2. Anderson-Darling Testinin Uygulanması

Anderson ve Darling (1954)'nin önerdiği A^2 test istatistiğini hesaplanmak için ilk olarak S^2 dağılımı aşağıdaki gibi elde edilir.

$$S^2 = \sum_{j=1}^{10} [(2j-1)(\ln(F(x_{(j)})) + \ln(1 - F(x_{(11-j)})))] = -105.603$$

$$A^2 = -n - \frac{S^2}{n} = -10 + \frac{1}{10} 105.603 = 0,5603$$

olarak bulunur.

EK 1.1'e göre kritik değer 2,4957 olarak elde edildiğinden $0,5603 < 2,4957$ olup, Eşitlik 2.1'deki H_0 hipotezi red edilmemiştir. Yani, veriler tekdüze dağılımdan gelmektedir sonucuna ulaşılır.

4.3. Cramer Von Mises Testinin Uygulanması

Cramer-von Mises (1928, 1930) test istatistiğinin hesaplanmasında,

$F_0(x_{(i)})$ değerleri $F^*(x_{(i)}) = (0,0064; 0,0905; 0,1047; 0,2596; 0,3215; 0,5692; 0,6899; 0,8043; 0,8366; 0,9151)$ 'dir. Böylece,

$$W^2 = \sum_{i=1}^{10} (F_0(x_{(i)}) - \frac{2i-1}{20})^2 + \frac{1}{120} = 0,0659$$

olarak bulunur.

EK 1.1'e göre kritik değer 0,4513 olarak elde edildiğinden $0,0659 < 0,4513$ olup, Eşitlik 2.1'deki H_0 hipotezi red edilmemiştir. Yani, veriler tekdüze dağılımdan gelmektedir sonucuna ulaşılır.

4.4. Shapiro-Wilk Testinin Uygulanması

Shapiro-Wilk için Stephens (1972) tarafından geliştirilen test istatistiği aşağıdaki gibidir.

$$SW = \frac{(\sum_{i=1}^{10} x_i)^2}{10[(11) \sum_{i=1}^{10} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{10} x_i)^2]} = 0,1535$$

olarak bulunur.

EK 1.1'e göre kritik değer 0,4305 olarak elde edildiğinden $0,1535 < 0,4305$ olup, Eşitlik 2.1'deki H_0 hipotezi red edilmemiştir. Yani, veriler tekdüze dağılımdan gelmektedir sonucuna ulaşılır.

4.5. Watson Testinin Uygulanması

Watson'ın oluşturduğu istatistiğin hesaplama formülü aşağıdaki gibidir.

$$v_i = F(x_{(i)}) \text{ ve } \bar{v} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F(x_{(i)}) \text{ olmak üzere,}$$

$$U_n^2 = \sum_{i=1}^n (v_i - \frac{2i-1}{2n} - \bar{v} + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{12n}$$

şeklindedir.

$v_i = F(x_{(i)}) = x_{(i)}$ olduğundan, $\bar{v} = \bar{x} = 0,4598$ sonucu elde edilir.

$$U_{10}^2 = \sum_{i=1}^{10} (v_i - \frac{2i-1}{20} - 0,4598 + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{120} = 0,1144 \text{ olarak bulunur.}$$

EK 1.1'e göre kritik değer 0,1828 olarak elde edildiğinden $0,1144 < 0,1828$ olup, Eşitlik 2.1'deki H_0 hipotezi red edilmemiştir. Yani, veriler tekdüze dağılımdan gelmektedir sonucuna ulaşılır.

4.6. Zhang Testlerinin Uygulanması

Zhang (2002) tarafından öne sürülen üç test istatistiği aşağıdaki gibidir.

$$Z_K = \max_{1 \leq i \leq 10} \left(\left(i - \frac{1}{2} \right) \log \left(\frac{i - \frac{1}{2}}{10F_0(X_{(i)})} \right) + (10,5 - i) \log \left(\frac{10,5 - i}{10\{1 - F_0(X_{(i)})\}} \right) \right)$$

$$Z_A = - \sum_{i=1}^{10} \left[\frac{\log\{F_0(X_{(i)})\}}{10,5 - i} + \frac{\log\{1 - F_0(X_{(i)})\}}{i - 0,5} \right]$$

$$Z_C = \sum_{i=1}^{10} \left[\log \left(\frac{F_0(X_{(i)})^{-1} - 1}{\frac{9,5}{i - 0,75} - 1} \right) \right]^2$$

$Z_K = 0,8477$, $Z_A = 3,4597$ ve $Z_C = 5,2989$ olarak bulunur.

EK 1.1'e göre kritik değerler sırasıyla 3.2989, 4.1774 ve 20,5624 olarak elde edildiğinden $0,8477 < 3.2989$, $3,4597 < 4.1774$ ve $5,2989 < 20,5624$ olup, Eşitlik 2.1'deki H_0 hipotezi red edilmemiştir. Yani, veriler tekdüze dağılımdan gelmektedir sonucuna ulaşılır.

4.7. Entropiye Dayalı Testlerin Uygulanması

Zamanzade (2014)'nin önerdiği test istatistiği aşağıdaki gibidir.

TB1=HB1

TB2=HB2

Burada,

$$HB1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \frac{X_{(i+m)} - X_{(i-m)}}{\hat{F}_n(X_{(i+m)}) - \hat{F}_n(X_{(i-m)})}$$

$$HB2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \left(\frac{X_{(i+m)} - X_{(i-m)}}{\hat{F}_n(X_{(i+m)}) - \hat{F}_n(X_{(i-m)})} \right) \left(\frac{\hat{F}_n(X_{(i+m)}) - \hat{F}_n(X_{(i-m)})}{\sum_{i=1}^n (\hat{F}_n(X_{(i+m)}) - \hat{F}_n(X_{(i-m)}))} \right)$$

dir ve m, pencere genişliği olarak adlandırılan ve $n/2$ den küçük pozitif bir tamsayıdır.

Ayrıca,

$\begin{cases} X_{(i)} = X_{(1)} ; i < 1 \\ X_{(i)} = X_{(n)} ; i > n \end{cases}$ olmak üzere $\hat{F}_n$ birikimli olasılık yoğunluk fonksiyonu tahmin

edicisidir.

$$\hat{F}_n X_{(i)} = \sum_{j=1}^n w_j = \frac{1}{n+2} \left(i + \frac{X_{(i)} - X_{(i-1)}}{X_{(i+1)} - X_{(i-1)}} \right), i = 1, 2, \dots, n.$$

Bu örnek için $n=10$ ve $m=2$ olduğundan,

$$HB1 = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} \log \left(\frac{X_{(i+2)} - X_{(i-2)}}{\hat{F}_{10}(X_{(i+2)}) - \hat{F}_{10}(X_{(i-2)})} \right)$$

$$HB2 = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} \log \left(\frac{X_{(i+2)} - X_{(i-2)}}{\hat{F}_{10}(X_{(i+2)}) - \hat{F}_{10}(X_{(i-2)})} \right) \left(\frac{\hat{F}_{10}(X_{(i+2)}) - \hat{F}_{10}(X_{(i-2)})}{\sum_{i=1}^{10} (\hat{F}_{10}(X_{(i+2)}) - \hat{F}_{10}(X_{(i-2)}))} \right)$$

$\begin{cases} X_{(i)} = X_{(1)} ; i < 1 \\ X_{(i)} = X_{(10)} ; i > 10 \end{cases}$ olmak üzere

$$\hat{F}_{10} X_{(i)} = \frac{1}{12} \left(i + \frac{X_{(i)} - X_{(i-1)}}{X_{(i+1)} - X_{(i-1)}} \right), i = 1, 2, \dots, 10.$$

olur.

$HB1=0,007285959$ ve $HB2=0,007244786$ olarak bulunur.

EK 1.1'e göre kritik değerler sırasıyla 0,257068 ve 0,024899 olarak elde edildiğinden $0,007285959 < 0,257068$ ve $0,007244786 < 0,024899$ olup, Eşitlik 2.1'deki H_0 hipotezi red edilmemiştir. Yani, veriler tekdüze dağılımdan gelmektedir sonucuna ulaşılır.



5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada tekdüze dağılım için çeşitli uyum iyiliği testlerinin deneysel olarak güç değerleri ve I.tip hata oranları bakımından kıyaslaması yapılmıştır. Stephens (1974) tarafından kullanılan A_k , B_k , C_k alternatif dağılım ailelerinin çeşitli durumlarında, Kolmogorov-Smirnov (KS), Anderson-Darling (AD), Cramer von Mises (W^2), Watson (U^2), Shapiro-Wilk (SW), Zhang (Z_K , Z_A , Z_C) ve entropiye dayalı testlerden Zamanzade (2014)'nin önerdiği TB1 ve TB2 uyum iyiliği testlerinden hangisinin diğerlerine göre daha yüksek güç değerlerine sahip olduğu araştırılmıştır.

Çizelge 3.13 incelendiğinde, I.tip hata oranlarının, alfanın (α) çok yakın komşuluğunda değerler aldığı görülmektedir. A_1 dağılımı tekdüze dağılıma sahip olduğundan I.tip hata oranları için başarılı sonuçlar gözlenmiştir. Alternatif dağılım aileleri ile farklı örnek hacimlerinde yapılan deneysel çalışmaların sonuçlarını içeren Çizelge 3.14 - Çizelge 3.17'nin $A_{1,5}$, A_2 , $B_{1,5}$, B_2 , B_3 , $C_{1,5}$, C_2 satırları genel olarak incelendiğinde, beklenildiği gibi örnek hacmi arttığında testin gücünün de arttığı görülmektedir.

Zhang (2002) tarafından öne sürülen Z_K , Z_A , Z_C testleri, KS, AD ve W^2 testlerinin yeniden düzenlenmiş halleri olduğundan beklenildiği gibi bu testlerle yakın güç değerlerine sahip olduğu görülmüştür.

İncelenen tekdüze dağılım uyum iyiliği testlerinin, farklı dağılım ailelerinden gelen veriler karşısındaki gücünün farklı olduğu deneysel olarak görülmüştür. $A_{1,5}$, A_2 durumları için incelenen her örnek hacminde Z_A testi ve W^2 testi diğer testlere göre en yüksek güç değerlerine sahiptir. $B_{1,5}$, B_2 , B_3 durumları için incelenen her örnek hacminde entropiye dayalı testler özellikle TB2 testi en yüksek güç değerlerine sahiptir. $C_{1,5}$, C_2 durumları için incelenen her örnek hacminde U^2 testi diğer testlere göre en yüksek güç değerlerine sahiptir.

Sonuç olarak, örnek hacmine bağlı olmaksızın, çalışılacak verilerin modu minimum noktada ise Z_A veya W^2 testinin, modu ortalama civarında ve simetrik ise TB1 ve TB2 testinin ve verilerin dağılımı, minimum ve maksimum noktalarda modu olacak şekilde simetrik iki modlu ise U^2 testinin kullanılması önerilmektedir. Bu durumun varlığını daha iyi tespit edebilmek için çalışma, inceleme dışında kalan çeşitli tekdüze dağılım uyum iyiliği testleriyle genişletilebilir. Ayrıca, incelenen uyum iyiliği testleri 3 modlu veya modu maksimum noktasında olan dağılım aileleriyle de testin gücü bakımından kıyaslanabilir.



KAYNAKÇA

- Althouse, L.A., Ware, W.B., and Ferron, J.M. (1997, April). *A Monte Carlo comparison of the g^2 and K^2 tests for normality*. Annual Meeting of the North Carolina Association for Research in Education, Greensboro, NC.
- Anderson T.W. and Darling D.A. (1954). A Test of Goodness of Fit. *Journal of the American Statistical Association JSTOR*, 49(268), 765-769.
- Arizono, I. and Ohta, H. (1989). A Test for Normality Based on Kullback-Leibler Information. *The American Statistician*, 43(1), 20-22.
- Arshad, M., Rasool, M.T. and Ahmed, M.I. (2002). Kolmogorov Smirnov test for Generalized Pareto Distribution. *Pak. J. Appl. Science*, 2, 488-490.
- Baray, A. (2003). Entropi ve Karar Verme. *İ.Ü. İşletme Fakültesi İşletme İktisadi Enstitüsü Yönetim Dergisi*, 14(44), 7-21.
- Correa, J. C. (1995). A new estimator of entropy. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 24(10), 2439-2449.
- Cramer, H. (1928). On the composition of elementary errors. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1928(1), 13-74.
- Crzcgorzewski, P. and Wieczorkowski, R. (1999). Entropy-based goodness-of-fit test for exponentiality. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 28(5), 1183-1202.
- D'Agostino, R.B., Case, W. and Belanger, A. (1988). The Appropriateness of Some Common Procedures for Testing the Equality of Two Independent Binomial Populations. *The American Statistician*, 42(3), 198-202.
- Dudewicz, E.J. and Van der Meulen, E.C. (1981). Entropy-based tests of uniformity. *Journal of the American Statistical Association*, 76(376), 967-974.
- Ebrahimi, N., Pflughoeft, K. and Soofi, E. (1994). Two measures of sample entropy. *Statistics and Probability Letters*, 20, 225-234.
- Epps, T.W. and Pulley, L.B. (1983). A test of normality based on empirical characteristic function. *Biometrika*, 70(3), 723-726.
- Epps, T.W., Singleton, J. and Pulley, L.B. (1982). A test of separate families of distribution based on the empirical moment-generation function. *Biometrika*, 69(2), 391-399.
- Farrell, P.J. and Rogers-Stewart, K. (2006). Comprehensive study of tests for normality and symmetry: Extending the Spiegelhalter test. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 76(9), 803-816.
- Köle, C. ve Gökpınar, F. (2012). Üstel Dağılıma Uygunluk için Bazı Uyum İyiliği Testlerinin I.tip Hata ve Güçleri Bakımından Kıyaslanmaları. *Süleyman Demirel Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 16(3), 318-326.

- Kolmogorov, A. N. (1933). Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione. *Giorn. Ist. Ital. Attuar*, 4, 83-91.
- Lilliefors, H. W. (1969). On the Kolmogorov-Smirnov test for the exponential distribution with Mean. *Journal of the American Statistical Association*, 64(325), 387-389.
- Marhuenda, Y., Morales, D. and Pardo, M.C. (2006). A comparison of uniformity tests. *Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics*, 39(4), 315-327.
- Massey, F.J. (1951). The Kolmogorov-Smirnov Test for Goodness of Fit. *Journal of the American Statistical Association*, 46(253), 68-78.
- Noughabi, H. and Noughabi, R. (2013). On the entropy estimators. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 83(4), 784-792.
- Noughabi, H.A. and Arghami, N.R. (2011). Monte Carlo comparison of seven normality tests. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 81(8), 965-972.
- Noughabi, H.A. (2010). A new estimator of entropy and its application in testing normality, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 80(10), 1151-1162.
- Pearson, K. (1900). On the criterion that a given system of deviations from the probable in the case a correlated system of variables is such that it can be reasonably supposed to have arisen from random sampling. *Philosophical Magazine series 5*, 157-175.
- Royston, J. P. (1982a). An extension of Shapiro and Wilk's W test for normality to large samples. *Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics)*, 31(2), 115 - 124.
- Scholz, F. and Stephens, M. (1987). K-Sample Anderson–Darling Tests. *Journal of the American Statistical Association*, 82 (399), 918-924.
- Shannon, C.E. (1948). A mathematical theory of communications. *The Bell System Technical Journal*, 27, 379-656.
- Shapiro, S.S. and Wilk, M.B. (1972). An analysis of variance test for the exponential distributions complete samples. *Technometrics*, 14(2), 355-370.
- Shapiro, S.S. and Wilk, M.B. (1965). An Analysis of Variance Test for Normality (Complete Samples). *Biometrika*, 52(3/4), 591-611.
- Smirnov, N. (1939). On the estimation of the discrepancy between empirical curves of distribution for two independent samples. *Bulletin Math. University Moscow*, 2, 3-16.
- Stephens, M. A. (1976). Asymptotic results for goodness-of-fit statistics with unknown parameters. *The Annals of Statistics*, 4(2), 357-369,
- Stephens, M.A. (1974). EDF statistics for goodness of fit and some comparisons. *Journal of the American Statistical Association*, 69(347), 730–737.
- Stephens, M.A. (1978). On the W Test for Exponentiality With Origin Known. *Technometrics*, 20(1), 33-35.

- van Es, B. (1992). Estimating functionals related to a density by class of statistics based on spacings. *Scandinavian Journal of Statistics*, 19(1), 61–72.
- Vasicek, O. (1976). A test for normality based on sample entropy. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Methodological)*, 38(1), 54-59.
- Vexler, A. and Gurevich, G. (2010). Empirical likelihood ratios applied to goodness-of-fit tests based on sample entropy. *Computational Statistics and Data Analysis*, 54(2), 531-545.
- Watson, G.S. (1961). Goodness of fit tests on a circle. *Biometrika*, 48(1/2), 109-114.
- Watson, G.S. (1962). Goodness of fit tests on a circle II. *Biometrika*, 49(1/2), 57-63.
- Yap, B.W. and Sim, C.H. (2010). Comparison of various types of normality tests. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 81(12), 2141-2155.
- Yousefzadeh, F. and Arghami, N.R. (2008). Testing exponentially based on type II censored data and a new cdf estimator. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 37(8), 1479–1499.
- Zamanzade, E. (2014). Testing uniformity based on new entropy estimators. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 85(16), 3191-3205.
- Zamanzade, E. and Arghami, N.R. (2011). Testing normality based on new entropy estimators. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 82(11), 1701-1713.
- Zghoul, A.A. (2010). A Goodness of Fit Test for Normality Based on the Empirical Moment Generating Function. *Communication in Statistics Part B - Simulation & Computation*, 39(6), 1532-4141.
- Zhang, J. (2002). Powerful goodness-of-fit tests based on the likelihood ratio. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Statistical Methodology)*, 64(2), 281-294.





EK-1. Kritik Değerler Tablosu

Çizelge EK-1.1. $\alpha=0,01$ için Monte Carlo ile elde edilen Kritik Değerler

n	KS	A²	W²	SW	U²
5	0,667477	3,93904	0,68136	0,896704	0,24037
6	0,616379	3,917742	0,692804	0,824496	0,244503
7	0,574656	3,884824	0,69618	0,747045	0,247038
8	0,541366	3,900661	0,703522	0,680741	0,249227
9	0,512551	3,924201	0,709163	0,616399	0,254302
10	0,490213	3,932223	0,716048	0,561542	0,255818
11	0,470017	3,962373	0,722183	0,511262	0,256343
12	0,448627	3,887989	0,718256	0,467318	0,257959
13	0,431992	3,915899	0,718778	0,429479	0,259309
14	0,418867	3,912485	0,728271	0,395993	0,257524
15	0,403512	3,844182	0,717365	0,367572	0,261250
20	0,352219	3,891957	0,728254	0,268296	0,262532
25	0,317277	3,902117	0,733654	0,206188	0,264338
30	0,288517	3,860759	0,727495	0,166940	0,261183
35	0,267788	3,864319	0,730439	0,139424	0,265014
40	0,252335	3,899097	0,737611	0,118784	0,262838
45	0,239087	3,922815	0,741726	0,103631	0,267430
50	0,226227	3,880206	0,739578	0,091865	0,264709
55	0,216085	3,909478	0,744034	0,082083	0,266917
100	0,161093	3,904916	0,739705	0,041138	0,266704
150	0,132128	3,884176	0,743635	0,026006	0,268415
200	0,114467	3,915527	0,752303	0,018888	0,271467

EK-1.(devam) Kritik Değerler Tablosu

Çizelge EK-1.1. (devam) $\alpha=0,01$ için Monte Carlo ile elde edilen Kritik Değerler

n	Z_K	Z_A	Z_C	TB1	TB2
5	4,079568	5,724075	29,9306	0,977195	0,181015
6	4,273934	5,423952	31,0478	0,758165	0,118753
7	4,419197	5,149161	30,86126	0,659705	0,088659
8	4,552961	4,965151	31,51958	0,599546	0,070615
9	4,681399	4,806863	32,25222	0,492700	0,053123
10	4,804113	4,695706	32,41903	0,453837	0,044524
11	4,904668	4,588809	32,95136	0,417044	0,037317
12	4,921242	4,480843	32,68664	0,391717	0,032254
13	5,001769	4,416411	33,20483	0,371755	0,028350
14	5,068018	4,359690	33,84466	0,348070	0,024447
15	5,081875	4,278404	32,8239	0,336058	0,022059
20	5,316490	4,067277	34,35799	0,249744	0,012688
25	5,528052	3,938244	35,46016	0,219575	0,008841
30	5,598222	3,842321	36,32042	0,178755	0,006089
35	5,758386	3,774089	36,61178	0,164025	0,004812
40	5,788085	3,713861	36,91724	0,140009	0,003605
45	5,858806	3,675740	37,16701	0,131763	0,003055
50	5,883461	3,640414	37,77239	0,125127	0,002576
55	6,009580	3,616353	38,21628	0,119242	0,002237
100	6,197922	3,478700	40,03133	0,091893	0,000922
150	6,433508	3,422360	41,26031	0,071852	0,000485
200	6,492950	3,390727	42,22267	0,059922	0,000304

EK-1.(devam) Kritik Değerler Tablosu

Çizelge EK-1.2. $\alpha=0,05$ için Monte Carlo ile elde edilen Kritik Değerler.

n	KS	A ²	W ²	SW	U ²
5	0,562634	2,521653	0,446101	0,764575	0,177162
6	0,518620	2,531268	0,450052	0,671720	0,179185
7	0,481634	2,498445	0,446536	0,594662	0,179868
8	0,452978	2,511714	0,450686	0,528865	0,180896
9	0,429552	2,511576	0,452860	0,474937	0,181489
10	0,408606	2,495657	0,451300	0,430465	0,182882
11	0,391503	2,510278	0,454245	0,394465	0,183939
12	0,375573	2,500785	0,456023	0,362974	0,183843
13	0,360543	2,492585	0,451463	0,332777	0,182716
14	0,348024	2,505786	0,455639	0,310485	0,183923
15	0,336429	2,497973	0,456057	0,288761	0,183653
20	0,293872	2,507175	0,456056	0,214261	0,184496
25	0,265013	2,520461	0,462814	0,167942	0,185418
30	0,241682	2,498507	0,459361	0,138532	0,184753
35	0,224616	2,488290	0,459839	0,116871	0,185895
40	0,210187	2,509979	0,462929	0,100910	0,186216
45	0,198236	2,512671	0,463439	0,088837	0,186516
50	0,188427	2,512644	0,460983	0,078968	0,184508
55	0,180195	2,506418	0,461930	0,071191	0,186684
100	0,133968	2,485548	0,461053	0,037047	0,186559
150	0,109963	2,511281	0,464460	0,023860	0,187140
200	0,095127	2,488415	0,457928	0,017549	0,186981

EK-1.(devam) Kritik Değerler Tablosu

Çizelge EK-1.2.(devam) $\alpha=0,05$ için Monte Carlo ile elde edilen Kritik Değerler.

n	Z_K	Z_A	Z_C	TB1	TB2
5	2,727559	4,789745	18,19586	0,569103	0,099547
6	2,891416	4,599252	18,90481	0,428696	0,064634
7	3,001834	4,448876	19,22376	0,380827	0,049612
8	3,117126	4,338521	19,72163	0,354753	0,040132
9	3,214632	4,257047	20,26877	0,272874	0,029208
10	3,298877	4,177440	20,56236	0,257068	0,024899
11	3,376960	4,114229	20,90657	0,242277	0,021310
12	3,442799	4,062375	21,18277	0,232750	0,018590
13	3,468778	4,008732	21,49716	0,220453	0,016312
14	3,531378	3,967699	21,58819	0,213801	0,014677
15	3,566995	3,929135	21,72864	0,205971	0,013155
20	3,772498	3,797343	23,00843	0,152350	0,007540
25	3,909420	3,712408	23,66621	0,139078	0,005488
30	4,013680	3,653158	24,23453	0,112629	0,003798
35	4,093591	3,610296	24,65065	0,106522	0,003047
40	4,176649	3,574298	25,13914	0,090467	0,002323
45	4,219604	3,549901	25,75696	0,086740	0,001969
50	4,265625	3,525442	25,96819	0,083577	0,001708
55	4,329951	3,508685	26,34055	0,081083	0,001497
100	4,569250	3,418690	27,98824	0,068455	0,000682
150	4,742414	3,380121	29,43764	0,055885	0,000372
200	4,838506	3,359739	30,27113	0,047518	0,000238

EK-1.(devam) Kritik Değerler Tablosu

Çizelge EK-1.3. $\alpha=0,1$ için Monte Carlo ile elde edilen Kritik Değerler.

n	KS	A²	W²	SW	U²
5	0,508697	1,955472	0,342127	0,674950	0,147966
6	0,468172	1,955745	0,344314	0,583382	0,148217
7	0,434680	1,941724	0,341898	0,512842	0,149321
8	0,408939	1,934249	0,342362	0,455781	0,148845
9	0,387127	1,943679	0,344316	0,410226	0,149383
10	0,367946	1,928840	0,342636	0,374792	0,150271
11	0,352562	1,934349	0,345599	0,341821	0,150433
12	0,338530	1,940290	0,344353	0,316082	0,150548
13	0,324566	1,925179	0,343801	0,292114	0,149867
14	0,314016	1,934342	0,344650	0,272215	0,150635
15	0,303276	1,943808	0,346667	0,254639	0,150052
20	0,264971	1,945823	0,347423	0,190273	0,150405
25	0,238472	1,948967	0,348678	0,151266	0,151371
30	0,217396	1,930559	0,345086	0,125753	0,151088
35	0,201796	1,943259	0,347643	0,106668	0,151871
40	0,189541	1,942942	0,347194	0,092637	0,151439
45	0,178710	1,945015	0,348000	0,081912	0,151622
50	0,169670	1,942684	0,347366	0,073043	0,150515
55	0,161823	1,935435	0,346621	0,066157	0,151095
100	0,120602	1,933723	0,347224	0,035028	0,151380
150	0,098775	1,949083	0,349635	0,022811	0,152265
200	0,085738	1,936624	0,347262	0,016883	0,151809

EK-1.(devam) Kritik Değerler Tablosu

Çizelge EK-1.3. (devam) $\alpha=0,1$ için Monte Carlo ile elde edilen Kritik Değerler.

n	Z_K	Z_A	Z_C	TB1	TB2
5	2,156135	4,415859	14,09131	0,396979	0,064535
6	2,299342	4,288722	14,76085	0,282429	0,041148
7	2,404669	4,178645	15,14966	0,259987	0,032160
8	2,500931	4,094189	15,64167	0,244444	0,026342
9	2,591652	4,033121	16,16276	0,178842	0,018700
10	2,664018	3,971865	16,36916	0,170532	0,016064
11	2,728985	3,929616	16,71773	0,164136	0,014178
12	2,793752	3,888373	17,06877	0,159454	0,012496
13	2,815636	3,850696	17,24978	0,153630	0,011064
14	2,876806	3,818691	17,44939	0,150195	0,010084
15	2,901755	3,787906	17,60166	0,146760	0,009093
20	3,097366	3,689748	18,65668	0,108664	0,005258
25	3,221709	3,622967	19,29027	0,102344	0,003953
30	3,311646	3,575869	19,76855	0,082369	0,002756
35	3,387221	3,542749	20,24159	0,079593	0,002250
40	3,463992	3,516188	20,70445	0,067321	0,001714
45	3,519586	3,496241	21,19397	0,065854	0,001476
50	3,556510	3,477516	21,36543	0,064514	0,001291
55	3,615905	3,463876	21,75577	0,063328	0,001156
100	3,840038	3,393585	23,29249	0,057648	0,000570
150	4,008398	3,363186	24,47946	0,048211	0,000318
200	4,079538	3,346672	25,32542	0,041498	0,000206

EK-2. Entropi

Entropi kavramı bilgi kuramı ile birlikte kullanılan bir kavramdır ve bir sistemdeki belirsizlik miktarını verir. Sistem düzensizliği arttıkça artan herhangi bir fonksiyon entropi fonksiyonu olabilir. İstatistiksel entropi, bir istatistik deneyin belirsizliğinin ölçüsüdür. Deney sonucu ne ölçüde öngörülemez ise entropi o derece büyük olmaktadır. Örneğin, hilesiz bir madeni paranın atılması deneyinde her iki sonucun ortaya çıkma olasılığı birbirine eşit olduğu için belirsizlik maksimum olur ve maksimum entropi söz konusudur. Örneğin; tura gelme olasılığının 0,95, yazı gelme olasılığının ise 0,05 olduğu bir paranın atılmasından önce, deneyin sonucunu tahmin etmeye yönelik belirsizlik daha azdır. Çünkü büyük olasılıkla tura gelecektir yani “Olasılığı düşük olan olayın sürpriz olarak nitelendirilmesi, bu olayın olasılığının ne kadar düşük olduğuna bağlıdır. Gerçekleşme olasılığı az olan bir olayın meydana gelmesi halinde oluşacak sürpriz de bu olasılıkla ters orantılı olarak büyük olacaktır.” (Ross, 1998). Böylece, bir kişinin böyle bir deneyi gerçekleştirmekle elde edeceği bilgi az olacaktır. Bu anlamda entropi ile deneyden elde edilecek bilgi miktarı birbirleri ile ilişkili iki kavram olmaktadır.

Bir E olayının p olasılığı ile meydana gelmesi halinde oluşacak sürprizi $S(p)$ ile gösterelim. Eğer, bir olayın meydana gelme olasılığı 1 ise, yani olay kesin olarak meydana gelecek ise bu olay için sürpriz;

$$S(1) = 0$$

(2.1)

Bu olayın kesin olarak meydana geleceği bilindiği için gerçekleşmesi de bizim için sürpriz olmayacaktır.

$$p < q \text{ ise } S(p) > S(q) \text{ olacağından } S(p), p\text{'nin kesin azalan bir fonksiyonudur.} \quad (2.2)$$

$$S(p), p\text{'nin sürekli bir fonksiyonudur.} \quad (2.3)$$

Bağımsız E ve F olaylarını ele alalım. Bunların olasılıkları sırası ile $P(E)=p$ ve $P(F)=q$ olsun. $P(EF) = pq$ olabildiğine göre, E ve F olaylarının ikisi birden meydana geldiğinde bunların sürprizini de $S(pq)$ olarak ifade edebiliriz. Şimdi de önce E'nin ve ardından da

EK-2.(devam) Entropi

F'nin meydana geldiğini düşünelim. E'nin sürprizi $S(p)$ olduğundan F'nin meydana gelmesi ile ilgili ilave sürpriz $S(pq) - S(p)$ olacaktır. Bununla birlikte F, E'den bağımsız olarak meydana geleceği için bu ilave sürpriz $S(q)$ ile gösterilebilir. Bu durumda,

$$S(pq) = S(p) + S(q), 0 < p \leq 1 \text{ ve } 0 < q \leq 1$$

(2.4)

2.1, 2.2, 2.3 ve 2.4'ün birlikte sağlanması ile,

$$S(p) = -C \log_2 p$$

(2.5)

olarak yazılır (Baray, 2003).

Genelde $C=1$ alınır. Olasılıkları $p_1, p_2, \dots, p_n$ olan $x_1, x_2, \dots, x_n$ değerlerinden birini alabilen X rasgele değişkenini ele alalım. X 'in x_i değerini alması halinde $(-\log_2 p_i)$ de sürpriz olarak düşünülebilir. Bu sürprizin beklenen miktarı

$$H(x) = - \sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i$$

olacaktır. Buradaki, $H(x)$, Enformasyon Teorisinde X rasgele değişkeninin entropisi olarak tanımlanmıştır. Tüm p_i 'ler eşit olduğunda $H(x)$ de maksimum kılınmış olur. Buradaki $H(x)$, X 'in çağrıştırdığı ortalama sürpriz, X 'in belirsizliği ya da X tarafından sağlanan ortalama bilgi miktarı olarak yorumlanır. Bu farklılık aynı kavrama farklı açılardan bakılması sonunda ortaya çıkmaktadır.

Entropi kavramı, dağınım ve dağıntı şeklinde de tanımlanmaktadır. Bir sistemin düzensizliğini ifade eden entropiyi, örneğin bir yazı tura atma işleminde 1 bitlik ve %50 olasılıklı bir değer olarak görebiliriz. Burada paranın adil olduğunu ve yazı tura işleminin dengeli bir şekilde gerçekleştiğini düşünüyoruz. Şayet para hileli ise o zaman sistemin entropisi (üretilen sayıların entropisi) %50'den daha düşüktür. Çünkü daha az düzensizdir. Yani hileli olan tarafa doğru daha düzenli sonuç üretir. Örnek olarak sürekli tura gelen bir paranın ürettiği sayıların entropisi 0'dır (sıfırdır). Literatürde Shannon Entropisi olarak da

EK-2.(devam) Entropi

geçen kavrama göre bir mesajı kodlamak için gereken en kısa ihtimallerin ortalama değeri alfabede bulunan sembollerin logaritmasının entropiye bölümüdür. Yani, kabaca alfabemizde 256 karakter varsa bu sayının logaritmasını ($\log_2 256 = 8$) mesajın entropisine böleriz. Yani mesajdaki değişim ne kadar fazla ise o kadar fazla koda ihtiyaç var demektir. Örneğin, 4 mevsim vardır ve bunlar 2 bit ile kodlanabilir ($\log_2 4 = 2$).

Yaz = 00, Sonbahar = 01, Kış = 10, İlkbahar = 11 gibi.

Dolayısıyla mevsimlerin entropisi 2'dir.

Entropiye Dayalı Testler

Vasicek (1976) sıra istatistiklerinin yüksek değerli ayırımına dayanan her bir gözlemin entropisinin tahminini sağlamıştır. Örnek entropisi de normallik için Vasicek (1976) ve Arizona ve Ohta (1989), tekdüze için Dudewicz ve van der Meulen (1981) ve üstel için Ebrahimi ve diğerleri (1992) uyum iyiliği testlerinin tespitini sağlamıştır. Vasicek, Shannon (1948) tarafından sürekli rasgele değişkenler için tanımlanan (2.6) entropi fonksiyonunu, (2.7)'de belirtilen eşitlikteki formuyla kullanarak entropi tahmincisini elde etmiştir.

$$H(f) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log(f(x)) dx \quad (2.6)$$

$$H(f) = \int_0^1 \log \left\{ \frac{dF^{-1}(p)}{dp} \right\} dp \quad (2.7)$$

Vasicek (1976) daha sonra Eşitlik 1.2'de sıra istatistiklerini kullanarak, $F^{-1}(p)$ 'in türevi yerine farklı operatör kullanarak, deneysel dağılım fonksiyonu olan F^{-1} 'i koymuştur. Vasicek (1976)'ın entropi tahmincisi Eşitlik 2.8'de verildiği şekildedir.

$$HV = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \left\{ \frac{n}{2m} (X_{(i+m)} - X_{(i-m)}) \right\} \quad (2.8)$$

dir.

EK-2.(devam) Entropi

Burada,

$X_{(1)} < X_{(2)} < \dots < X_{(n)}$ ise sürekli dağılımdan gelen n hacimli örneğin sıra istatistiğidir. m , $n/2$ den küçük pozitif tam sayıdır. Eğer $i > n$ ise $X_{(i)} = X_{(n)}$ ve $i < 1$ ise $X_{(i)} = X_{(1)}$ dir.

Vasicek, $n, m \rightarrow \infty$ ve $\frac{m}{n} \rightarrow 0$ iken $HV \rightarrow H(f)$ olduğunu ispatlamıştır Zamanzade (2014).

Van Es (1992) tekdüze dağılıma uygunluk için önerdiği (2.9) entropi tahmin edicisinin tutarlılığını ispatlamıştır.

$$HVE = \frac{1}{n-m} \sum_{i=1}^{n-m} \left(\frac{n+1}{m} (X_{(i+m)} - X_{(i)}) \right) + \sum_{k=m}^n \frac{1}{k} + \log(m) - \log(n+1) \quad (2.9)$$

Correa (1995)'in tekdüze dağılıma uygunluk için önerdiği (2.10) entropi tahmin edicisi Vasicek (1976)'in tahmincisinden daha küçük MSE değerlerine sahiptir.

$$HC = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \left(\frac{\sum_{j=i-m}^{i+m} (X_{(j)} - \bar{X}_{(i)})(j-i)}{n \sum_{j=i-m}^{i+m} (X_{(j)} - \bar{X}_{(i)})^2} \right) \quad (2.10)$$

Burada,

$$\bar{X}_{(i)} = \frac{1}{2m+1} \sum_{j=i-m}^{i+m} X_{(j)}$$

dir.

Ebrahimi (1994), Vasicek (1976) entropi tahmin edicisini sınırlardaki sıra istatistiklerini ($X_{(1)}$ ve $X_{(n)}$) yeniden düzenleyerek yeni bir tahminci (2.11) önermiştir. Ayrıca, Vasicek (1976)'in önerdiği entropi tahmincisi HV ile kendisinin önerdiği tahminci HE arasında Eşitlik 2.12'de verilen ilişkiyi göstermiştir.

$$HE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \left\{ \frac{n}{c_{im}} (X_{(i+m)} - X_{(i-m)}) \right\} \quad (2.11)$$

EK-2.(devam) Entropi

Burada,

$$c_i = \begin{cases} 1 + \frac{i-1}{m}, & i < m \\ 2, & m+1 \leq i \leq n-m \\ 1 + \frac{n-i}{m}, & i \geq n-m+1 \end{cases}$$

dir.

$$HE = HV + \frac{2}{n} \left\{ m \log(2m) + \log \left(\frac{(m-1)!}{(2m-1)!} \right) \right\} \quad (2.12)$$

Yousefzadeh ve Arghami (2008) ise sürekli rasgele değişkenler için yeni bir entropi tahmincisi (2.13) elde etmiştir.

$$HY = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \left\{ \frac{(X_{(i+m)} - X_{(i-m)})}{\hat{F}_y(X_{(i+m)}) - \hat{F}_y(X_{(i-m)})} \right\} \left\{ \frac{\hat{F}_y(X_{(i+m)}) - \hat{F}_y(X_{(i-m)})}{\sum_{i=1}^n (\hat{F}_y(X_{(i+m)}) - \hat{F}_y(X_{(i-m)}))} \right\} \quad (2.13)$$

Burada,

$$\hat{F}_y(X_{(i)}) = \frac{n-1}{n(n+1)} \left(i + \frac{1}{n-1} + \frac{(X_{(i)} - X_{(i-1)})}{(X_{(i+1)} - X_{(i-1)})} \right); i=2,3, \dots, n-1$$

$$\hat{F}_y(X_{(1)}) = \frac{1}{n+1}$$

$$\hat{F}_y(X_{(n)}) = \frac{n}{n+1}$$

dir.

Noughabi (2010)'nin normallik için önerdiği entropi tahmincisi aşağıdaki gibidir.

$$HA = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \left\{ \frac{\hat{f}(X_{(i+m)}) \hat{f}(X_{(i-m)})}{2} \right\} \quad (2.14)$$

EK-2.(devam) Entropi

Burada,

$$\hat{f}(X_i) = \frac{1}{nh} \sum_{j=1}^n k\left(\frac{X_i - X_j}{h}\right)$$

dir ve k , çekirdek fonksiyonu ve s , örnek standart sapması olmak üzere, bant genişliği normal optimum düzeltme ile $h = 1.06sn^{-\frac{1}{5}}$ dir.

Noughabi ve Noughabi (2013) sürekli dağılımlarımlar için (2.15) entropi tahmin edicisi önermiştir.

$$HN = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log\{S_i(n, m)\} \quad (2.15)$$

Burada,

$$S_i(n, m) = \begin{cases} \hat{f}(X_i), & 1 \leq i \leq m \\ \frac{\frac{2m}{n}}{X_{(i+m)} - X_{(i-m)}}, & m+1 \leq i \leq n-m \\ \hat{f}(X_i), & n-m+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

dir. Ayrıca,

$$\hat{f}(X_i) = \frac{1}{nh} \sum_{j=1}^n k\left(\frac{X_i - X_j}{h}\right)$$

dir ve k , çekirdek fonksiyonu ve s , örnek standart sapması olmak üzere, bant genişliği normal optimum düzeltme ile $h = 1.06sn^{-\frac{1}{5}}$ dir.

Zamanzade (2014) ise Dudewicz ve Van der Muelen (1981)'ni takip edip, Vasicek (1976) ve Yousefzadeh ve Arghami (2008)'nin entropi tahmin edicilerini yeniden düzenleyerek aşağıdaki test istatistiğini önermiştir.

EK-2.(devam) Entropi

TB1=HB1

TB2=HB2

Burada,

$$HB1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \frac{X_{(i+m)} - X_{(i-m)}}{\hat{F}_n(X_{(i+m)}) - \hat{F}_n(X_{(i-m)})}$$

$$HB2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \left(\frac{X_{(i+m)} - X_{(i-m)}}{\hat{F}_n(X_{(i+m)}) - \hat{F}_n(X_{(i-m)})} \right) \left(\frac{\hat{F}_n(X_{(i+m)}) - \hat{F}_n(X_{(i-m)})}{\sum_{i=1}^n (\hat{F}_n(X_{(i+m)}) - \hat{F}_n(X_{(i-m)}))} \right)$$

dir ve m, pencere genişliği olarak adlandırılan ve n/2 den küçük pozitif bir tamsayıdır.

Ayrıca,

$\begin{cases} X_{(i)} = X_{(1)} ; i < 1 \\ X_{(i)} = X_{(n)} ; i > n \end{cases}$ olmak üzere $\hat{F}_n$ birikimli olasılık yoğunluk fonksiyonu tahmin

edicisidir.

$$\hat{F}_n X_{(i)} = \sum_{j=1}^n w_j = \frac{1}{n+2} \left(i + \frac{X_{(i)} - X_{(i-1)}}{X_{(i+1)} - X_{(i-1)}} \right), i = 1, 2, \dots, n.$$

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : KUTSAL, Ömer Osman
 Uyuğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 18.03.1987, Kocaeli
 Medeni hali : Evli
 Telefon : 0(312)4175190-4065
 Faks : 0(312)4186689
 e-mail : ookutsal@kho.edu.tr



Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Yüksek Lisans	Gazi Üniversitesi/İstatistik	2016
Yüksek Lisans	Ege Üniversitesi/İşletme	2012
Lisans	Marmara Üniversitesi/Matematik	2009
Lise	Buca Gürçeşme Lisesi (Y.D.A.)	2005

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2012- Halen	Kara Harp Okulu	Öğretim Görevlisi
2010- 2012	T.C. Ziraat Bankası A.Ş.	Bireysel Krediler Müşteri Görevlisi
2009- 2010	Türk Hava Yolları	Ground Services -Part Time

Yayınlar

Kutsal, Ö.O. ve Gökpınar, F. (2016- 12-15 May). Comparison of Goodness of Fit Tests of Uniformity, *International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME-2016)*, Elazığ University.

Kutsal, Ö.O. ve Gökpınar, F. (2016-2-4 Haziran). Tekdüze Dağılıma Uygunluk Testleri ve Güç Karşılaştırması, *17. Uluslararası Ekonometri, Yöneylem Araştırması ve İstatistik Sempozyumu*, Sivas Üniversitesi.



GAZİ GELECEKTİR