

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**LIE ALTGRUBU ÖZELLİKLERİNİN LIE ALTGRUBU ETKİSİYLE OLUŞAN
YÖRÜNGE ALTMANİFOLDLARA YANSIMASI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Fatih TUĞRUL
DANIŞMAN: Prof. Dr. BÜLENT KARAKAŞ

VAN-2016

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**LIE ALTGRUBU ÖZELLİKLERİNİN LIE ALTGRUBU ETKİSİYLE OLUŞAN
YÖRÜNGE ALTMANİFOLDLARA YANSIMASI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ
HAZIRLAYAN: Fatih TUĞRUL

VAN-2016

KABUL VE ONAY SAYFASI

Matematik Anabilim Dalı'nda Prof. Dr. Bülent KARAKAŞ danışmanlığında, Fatih TUĞRUL tarafından sunulan “Lie Altgrubu Özelliklerinin Lie Alt Grubu Etkisiyle Oluşan Yörünge Altmanifoldlara Yansıması” isimli bu çalışma Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili hükümleri gereğince 09/02/2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile başarılı bulunmuş ve Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Bülent KARAKAŞ

İmza:

Üye: Doç. Dr. Şenay BAYDAŞ

İmza:

Üye: Yard. Doç. Dr. Erdal KORKMAZ

İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 12/ 02/ 2016 tarih ve 2016/8-I sayılı kararı ile onaylanmıştır.

İmza

Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Fatih TUĞRUL

ÖZET

LIE ALTGRUBU ÖZELLİKLERİNİN LIE ALTGRUBU ETKİSİYLE OLUŞAN YÖRÜNGE ALTMANİFOLDLARA YANSIMASI

TUĞRUL, Fatih

Yüksek Lisans Tezi, Fen Fakültesi Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Bülent KARAKAŞ

Şubat 2016, 76 sayfa

Lie grup özellikleri ile yörünge uzayları arasındaki ilginin incelendiği bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tezin amacı ve önemi anlatılmıştır. İkinci bölümde literatür bildirişine yer verilmiştir. Üçüncü bölümde grup, topolojik uzay, topolojik gruplar, manifoldlar, vektör alanları, Lie grubu, sol invaryant vektör alanları, Lie cebiri, 1-parametrelili transformasyon grubu ve 1-parametrelili alt gruplar hakkında gerekli bilgilere yer verilmiştir. Dördüncü bölümde Lie transformasyon grubu başlığı altın Adq nun Lie grup etkisi, kuaterniyonlar, killiner form, Killing bilineer form hakkında gerekli bilgilere yer verildi. Beşinci bölümde ele alınan Lie alt grupları bazı özelliklere sahiptir. Bu Lie alt grupları manifoldun noktalarına etki ettirildiğinde Lie alt grubunun sahip olduğu özellikler kullanarak bu noktaların yörüngeleri hakkında işlem yapmadan bazı öngörülerde bulunulabilir. $GL(2, \mathbb{R})$ nin Lie alt grubu olan $O(2)$ ortogonal matrisler cümlesi $O = (0, 0)$ noktası etrafındaki dönme operatörleridir. $O(2)$ cümlesini $\mathbb{R}^2$ deki noktalara etki ettirdiğimizde noktanın orijine olan uzaklığını yarıçap kabul eden çemberler elde edildi. Bu ve benzeri teori ve örnekler için Matlab programında m-file'lar oluşturuldu ve grafikler çizildi.

Anahtar kelimeler: Lie grubu, Lie grup etkisi, Kuaterniyonlar, Yörünge

ABSTRACT

REFLECTION TO ORBIT SUBMANIFOLDS WITH ACTING LIE SUBGROUPS OF PROPERTIES OF LIE SUBGROUPS

TUĞRUL, Fatih

M. Sc. Thesis, Department of Mathematics

Supervisor : Prof.Dr.Bülent KARAKAŞ

February 2016, 76 pages

This thesis which consists of five sections deals with the relation between Lie group properties and orbit spaces. In the first section, the purpose of thesis and its importance are given. In the second section, notice literature is given. In the third section, required information are given about group, topological space, topological group, manifolds, vector fields, Lie group, left invariant vector fields, Lie algebra, 1-parameter transformation group and 1-parameter subgroup. In the fourth section, under the title of transformation groups and forms, Lie transformation group, Lie group action of Adq , quaternions, bilinear form, killing bilinear form, fixed points of Lie group action on surfaces and one dimensional orbits are mentioned and exemplified. In the fifth section, Lie subgroup samples which have some features are discussed. When these Lie subgroups act on the points of manifold, by using Lie subgroup's properties orbits of these points may be predicted without any operations or calculations. The set of orthogonal matrices $O(2)$ which are Lie subgroup of $GL(2, \mathbb{R})$ are rotation operators around the point $O=(0,0)$. When the set of $O(2)$ acts on points of $\mathbb{R}^2$, circles are obtained where it is accepted that the distance between the point and the origin is the radius of the circle. In Matlab, m-files are created and graphs are drawn for these and similar theories and examples.

Key words: Lie group, Lie group action, Quaternions, Orbit



ÖN SÖZ

Bu tez çalışmasında, her türlü ilgi ve yardımlarını esirgemeyen danışmanım Sayın Prof. Dr. Bülent KARAKAŞ'a beni sabırla dinlediği için ve verdiği emeklerden dolayı çok teşekkür ederim. Ayrıca Doç. Dr Şenay BAYDAŞ'a yardımlarından ve desteklerinden dolayı teşekkürlerimi sunarım. Benden manevi desteğini esirgemeyen eşim Yasemin GEZER TUĞRUL'a, babam Mehmet TUĞRUL'a, annem Sabiha TUĞRUL ve kardeşlerime ve de çok değerli abim Cahit TEKİN'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

2016
Fatih TUĞRUL



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	i
ABSTRACT	iii
ÖN SÖZ	v
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLER LİSTESİ	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR	xi
1. TEZİN AMACI VE ÖNEMİ.....	1
2. LİTERATÜR BİLDİRİŞ	2
3. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
3. 1. Grup ve Homomorfizma.....	3
3. 2. Topolojik Uzaylar.....	6
3. 3. Topolojik Gruplar	8
3. 4. Manifoldlar.....	11
3. 5. Vektör Alanları.....	14
3. 6. Lie Grubu	15
3. 7. Sol İnvaryant Vektör Alanları.	17
3. 8. Lie Cebiri	19
3. 9. 1-Parametrelili Transformasyon Grubu	24
3. 10. 1-Parametrelili Alt Gruplar	27
4. TRANSFORMASYON GRUPLARI VE FORMLAR	30
4. 1. Lie Transformasyon Grupları.....	30
4. 2. Lie Grup Etkilerin Sabit Noktaları.	31
4. 3. Adq'nun Lie grup Etkisi.....	36
4. 3. 1. Kuaterniyonlar	36
4. 4. Bilineer form	45
4. 5. Killing Bilineer Form	47

	Sayfa
5. YÖRÜNGELER VE YÖRÜNGE OLUŞTURUCU LİE (ALT) GRUPLARIN BİRLİKTE İRDELENMESİ.....	60
KAYNAKLAR	74
ARAŞTIRMA OLANAKLARI	77
ÖZGEÇMİŞ	79



ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 3. 1. Diferensiyellenebilir yapı	12
Şekil 5. 1. $(-6,3)$ noktasının yörüngesi	33
Şekil 4. 2. S^1 altında bir x noktasının yörüngesi.	35
Şekil 4. 1. Hamilton'un quaterniyon çarpım tablosu.	37
Şekil 5. 1. $X=(1,3)$, $Y=(4,2)$, $Z=(-3,4)$ noktasının S^1 altında yörüngeleri.....	63
Şekil 5. 2. $(8,7)$ noktasının S^1 altındaki görüntüsü.	64
Şekil 5. 3. $X=(3,4,5)$, $Y=(-2,-3,5)$ noktalarının yörüngeleri	67
Şekil 5. 3. Dik dairesel helis	68
Şekil 5. 4. Konisel helis	70
Şekil 5. 5. $T_{(2,3)}\mathbb{R}^2$ 'nin görüntüsü.....	72
Şekil 5. 6. Orijinden geçen bazı doğrular	73

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler

Açıklama

G/H

Bölüm grubu

LG

Sol invaryant vektör alanları cümlesi

$[,]$

Lie Braket operatör

$\otimes$

Kuaterniyon çarpımı

$\oplus$

Kuaterniyon toplamı

$O(n)$

Ortogonal grup

$SO(n)$

Özel ortogonal grup

χ

Vektör alanları cümlesi

$\times$

Vektörel çarpım

S_q

q kuaterniyonun reel kısmı

V_q

q kuaterniyonun vektörel kısmı.

$P(X)$

X 'in kuvvet küm

1. TEZİN AMACI VE ÖNEMİ

Bu tezde bir Lie alt grubunun sahip olduğu özelliklerin, Lie alt grubu etkisi ile diferensiyelenebilir manifoldların noktalarına etki ettirildiğinde oluşan yörünge alt manifoldların bu özelliklere sahip olup olmadığı incelenecektir.

Lie alt grup özelliklerinin yörünge alt manifoldlara taşınma biçimine bağlı olarak, yörünge alt manifoldların bazı özellikleri önceden bilinebilir. Tersine yörünge alt manifoldlarda olmasını istediğimiz özellikler etki eden Lie alt grubu seçiminde yönlendiricidir.

2. LİTERATÜR BİLDİRİŞLERİ

Grup teori Evariste Galois tarafından (1811-1832) kuadratik, kübik cebirsel polinomların çözüm yöntemleri çalışma alanında inşa edildi. Marius Sophus Lie (1842-1899) 1897’de yayınladığı makalesiyle Lie grupları ve transformasyon gruplarını takdim etmiştir (Lovett, 1897). İlk çıkış noktası olarak, sıradan diferansiyel denklemlerin (ODE) çözüm yöntemleri için kullanılmıştır (Helgason, 1975; 2015). Akışkanlar mekaniği, bir noktanın etki grubu altındaki yörüngesi ve yörünge uzayları son yıllarda ağırlıklı olarak çalışılmaktadır (Bryant, 1991; Arvanitoyeorgos, 2007; Pobegailo, 2015; Kunzinger , 2015). Günümüze kadar Lie grupları, Lie cebirleri ve transformasyon grupları matematik, fizik, robotik, tıp bilimi ve sosyal bilimlerde dahil olmak üzere çok sayıda çalışma vardır (Liao, 2009; Fault, 2015; Hirsch ve Weinstein, 2008, Hefny, Rudan ve Ellis, 2014).

3. TEMEL KAVRAMLAR

3.1. Grup ve Homomorfizma

3.1.1. Tanım (Grup): Boş olmayan bir G cümlesi ve aşağıdaki üç şartı sağlayan bir

$$T : (x, y) \in G \times G \rightarrow xTy \in G$$

iç işleminden oluşan (G, T) ikilisine bir grup denir.

(i) T birleşmelidir: Bütün $x, y, z \in G$ elemanları için

$$(xTy)Tz = xT(yTz)$$

(ii) T için G ' de bir tek e birim elemanı

$$\forall x \in G \text{ için } eTx = xTe = x$$

olacak şekilde vardır.

(iii) $\forall x \in G$ elemanı için G ' de bir x' inversi

$$xTx' = x'Tx = e$$

olacak şekilde vardır.

T işlemine bir grup işlemi denir (Hacısalıhoğlu, 1975; Karakaş, 2008).

3.1.2. Tanım: Eğer (G, T) grubun T grup işlemi değişmeli ise yani $yTx = xTy$ ise (G, T) grubuna değişmeli grup veya abelyen grubu denir (Hacısalıhoğlu, 1975; Karakaş, 2008).

3.1.3. Tanım: Bir (G, T) grubundaki G cümlesi sonlu n sayıda elemana sahip ise bu gruba sonlu grup aksi halde bu gruba sonsuz grup denir ve sonlu grup için $|G| = n$ ve sonsuz grup için de $|G| = \infty$ şeklinde yazılır (Hacısalıhoğlu, 1975; Karakaş, 2008).

3.1.4. Tanım (Alt Grup): Bir (G, T) grubunda bir $G' \subset G, G' \neq \emptyset$ ve (G', T) de bir grup ise bu gruba (G, T) grubunun bir alt grubu denir (Hacısalıhoğlu, 1975; Karakaş, 2008).

3.1.5. Teorem: (G, T) bir grup ve $G' \subset G$ ve $G' \neq \emptyset$ ise (G', T) bir alt gruptur $\Leftrightarrow$ aşağıdaki koşullar sağlanır:

- (i) (G, T) nin birim elemanı e ise $e \in G'$ dir.
- (ii) $\forall x \in G$ için $x' \in G'$ dir. (x in G deki inversi x' dir.)
- (iii) $\forall x, y \in G'$ için $xTy' \in G'$ dir (Hacısalıhoğlu, 1975; Karakaş, 2008).

3.1.6. Teorem: (G, T) bir grup ve $G' \subset G$ ve $G' \neq \emptyset$ sonlu bir cümle olsun. (G', T) bir alt gruptur $\Leftrightarrow \forall x, y \in G'$ iken $xTy \in G'$ (Hacısalıhoğlu, 1975; Karakaş, 2008).

3.1.7. Tanım (Normal Alt Grup): G bir grup ve $N < G$ olsun $\forall g \in G$ için $Ng = gN$ ise N ye G 'nin normal alt grubu denir ve $N \triangleleft G$ ile gösterilir (Hacısalıhoğlu, 1975; Karakaş, 2008).

3.1.8. Teorem: G bir grup ve $N < G$ olsun, aşağıdaki ifadeler bir birine denktir.

- i) $N \triangleleft G$
- ii) $\forall g \in G$ için $gNg^{-1} \subseteq N$
- iii) $\forall g \in G$ için $gNg^{-1} = N$

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii) $\forall x \in gNg^{-1}$ olsun. Şu halde $x = ghg^{-1}$ olacak şekilde $h \in H$ vardır. Şu halde (i) den dolayı $gh \in gN = Ng$ olur. Böylece $gh = h_1g$ olacak şekilde $h_1 \in N$ vardır. Bundan dolayı $x = ghg^{-1} = h_1gg^{-1} = h_1 \in N$ elde edilir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $g \in G$ olsun. Şu halde (ii) den g yerine g^{-1} alırsak $g^{-1}Ng \subset N$ ve böylece $N \subset gNg^{-1}$ olur. Sonuç olarak $\forall g \in G$ için $gNg^{-1} = N$ elde edilir.

(iii) $\Rightarrow$ (i) $g \in G$ için (iii) den $gNg^{-1} = N$ dir. $x \in gN$ ise $xg^{-1} \in N$ ve böylece $x \in Ng$ dir. Yani $Ng \subset gN$ dir. (iii) ten dolayı $gNg^{-1} = N$ olduğundan g yerine g^{-1} yazılırsa $Ng \subset gN$ elde edilir (Hacısalıhoğlu, 1975; Karakaş, 2008).

3.1.9. Tanım (Grup Homomorfizmi): (G, T) ve $(G', \perp)$ iki grup olsun, bir

$$f : G \rightarrow G'$$

fonksiyonu için

$$f(xTy) = f(x) \perp f(y), \forall x, y \in G$$

oluyor ise f fonksiyonuna G den G' ye bir homomorfizma veya grup homomorfizmi denir (Hacısalıhoğlu, 1975; Karakaş, 2008).

(G, T) bir abel grup olsun. Bir $x \in G$ elemanının T işlemine göre inversi x' olmak üzere

$$\begin{aligned} f : G &\rightarrow G' \\ x &\rightarrow f(x) = x' \end{aligned}$$

olarak tanımlanan f dönüşümü G' de bir homomorfizmdir.

3.1.10. Teorem: (G, T) ve $(G', \perp)$ birer grup ve

$$f : G \rightarrow G'$$

bir grup homomorfizmi olsun (G, T) nin birim elemanı e ve $(G', \perp)$ nin birim elemanı e' ise $f(e) = e'$ dir (Hacısalıhoğlu, 1975; Karakaş, 2008).

3. 2. Topolojik Uzaylar

3.2.1. Tanım: X boş olmayan bir cümle olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan her $\tau \subset P(X)$ ailesi X üzerinde bir topolojidir denir.

$$(T-1) \emptyset, X \in \tau$$

$$(T-2) \forall G_1, G_2 \in \tau \Rightarrow G_1 \cap G_2 \in \tau$$

$$(T-3) \forall (G_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \tau \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \in \tau \quad (\text{Burada } \Lambda \text{ herhangi bir indis kümesidir}).$$

Üzerinde bir topoloji tanımlanmış olan her X kümesine bir “topolojik uzay” denir ve çoğu kez (X, τ) ile gösterilir (Bourbaki, 1971).

3.2.2. Tanım: (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer A ’nın tümleyeni $X - A$ açık ise A cümlesine bu uzayda kapalıdır denir (Bourbaki, 1971).

3.2.3. Tanım (Topolojik Süreklilik): $(X, \tau), (Y, \tau^*)$ iki topolojik uzay, $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon ve $x \in X$ olsun. Bu durumda

a) $x \in X$ olmak üzere $f(x) \in B \in \tau^*$ özelliğindeki her bir $B \subset Y$ cümlesi için $x \in T \subset f^{-1}(B)$ olacak şekilde bir $T \in \tau$ var ise f fonksiyonuna x noktasına süreklidir denir.

b) Eğer her bir $B \in \tau^*$ cümlesi için $f^{-1}(B) \in \tau$ ise f fonksiyonuna süreklidir denir (Bourbaki, 1971).

3.2.4. Tanım (Bağlantılı Uzaylar): **a)** (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer X boş olmayan ayrık iki açık cümlelerin birleşimi olarak yazılamıyorsa, bu (X, τ) topolojik uzayına bağlantılıdır denir.

b) (X, τ) bir topolojik uzay ve $M \subset X$ bir alt cümle olsun. Eğer (M, τ_M) alt uzayı bağlantılı ise, M cümlesine (X, τ) topolojik uzayında bağlantılıdır denir (Bourbaki, 1971).

3.2.5. Tanım (Kompakt Topoloji): a) (X, τ) bir topolojik uzay ve $\wp$, X in bir örtüsü olsun. Eğer $\wp$ 'nin her elemanı bu uzayda açık ise, $\wp$ 'ye bir açık örtü; eğer $\wp$ 'nin her elemanı bu uzayda kapalı ise, $\wp$ 'ye bir kapalı örtü denir.

b) (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer X 'in her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa, bu topolojik uzaya kompakt topolojik uzay adı verilir.

c) (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ bir alt cümle olsun. Eğer (A, τ_A) alt uzayı kompakt ise, A cümlesi bu topolojide kompakttır denir (Bourbaki, 1971).



3.3. Topolojik Gruplar

3.3.1. Tanım: (G, τ) topolojik uzay ve $(G, \cdot)$ bir grup olsun

$$i) \quad f : G \times G \rightarrow G$$

$$(x, y) \rightarrow f(x, y) = x \cdot y$$

$$ii) \quad inv : G \rightarrow G$$

$$x \rightarrow x^{-1}$$

dönüşümleri sürekli ise $(G, \tau, \cdot)$ üçlüsüne topolojik gruptur denir (Bredon, 1993).

3.3.2. Örnek: $(\mathbb{R}, \tau_s, +)$ bir topolojik gruptur.

$$i) \quad f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow f(x, y) = x + y = \pi_1(x, y) + \pi_2(x, y)$$

izdüşüm fonksiyonları sürekli olduğundan toplamaları da sürekli dir.

$$ii) \quad inv : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow inv(x) = -x = (-1)x = a \cdot I(x)$$

sürekli fonksiyonların sabit bir sayı ile çarpımı sürekli olduğundan inv fonksiyonu da sürekli dir. O halde $(\mathbb{R}, \tau_s, +)$ bir topolojik gruptur.

3.3.3. Örnekler: $GL(n, \mathbb{R})$ bir topolojik gruptur.

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\} \quad , \quad (GL(n, \mathbb{R}), \cdot)$$

bir gruptur. Grup işlemi matrislerin çarpım işlemidir.

$$x : M(n \times n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$$

$$|a_{ij}| \rightarrow (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nn})$$

olarak tanımlansın.

$$\det : M(n \times n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonunu ele alınsın.

$$\begin{array}{ccc} M(n \times n, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\det} & \mathbb{R} \\ x \downarrow & & \text{izd} \downarrow \\ \mathbb{R}^{n^2} & \xrightarrow{DET} & \mathbb{R} \end{array}$$

$\det$ fonksiyonunun temsil fonksiyonu DET , x_{ij} koordinat fonksiyonlarının bir polinomu gibi yazıldığından diferensiyellenebilir. Dolayısıyla DET fonksiyonu süreklidir. x ve izd dönüşümleri indirgenen (C^∞ yapıdan) topolojide süreklidir. O halde

$$\det = x \circ DET \circ (izd)^{-1}$$

fonksiyonu süreklidir.

$\{\det^{-1}\{0\}\} \subset M(n \times n, \mathbb{R})$ kapalıdır ve tümleyeni $GL(n, \mathbb{R})$ açıktır böylece $GL(n, \mathbb{R})$, $M(n \times n, \mathbb{R})$ nin bir açık alt topolojisidir.

$$\begin{array}{ccc} GL(n, \mathbb{R}) \times GL(n, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\odot} & \mathbb{R} \\ x \downarrow & \downarrow x & x \downarrow \\ \mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2} & \xrightarrow{\otimes} & \mathbb{R} \end{array}$$

$x \circ \odot \circ (x \times x)^{-1} = \otimes$ dir. $\otimes, \odot$ nin temsili fonksiyonudur. Dolayısıyla $\odot$ grup işlemi süreklidir.

3.3.4. Önerme: $(G, \tau, \cdot)$ bir topolojik grup ve H, G nin bir alt grubu olsun. Alt uzay topolojisiyle donatılan H grubu G 'nin bir topolojik alt grubudur (Bredon, 1993).

3.3.5. Örnek: $SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n \times n, \mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$ özel lineer grubu $GL(n, \mathbb{R})$ nin bir alt grubu ve $GL(n, \mathbb{R})$ 'nin topolojik alt uzayı olduğundan önerme 3.3.4' ten bir topolojik alt gruptur (Bredon, 1993).

3.3.6. Örnek: $O(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n \times n, \mathbb{R}) \mid \det A \neq 0, A^T A = I = A A^T\}$ ortogonal grubu matris çarpımına göre $GL(n, \mathbb{R})$ 'nin bir alt grubu ve $GL(n, \mathbb{R})$ 'nin topolojik alt uzayı olduğundan önerme 3.3.4' ten bir topolojik alt gruptur (Bredon, 1993).

3.3.7. Örnek: $SO(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n \times n, \mathbb{R}) \mid \det A = 1, A^T A = A A^T = I\}$ özel ortogonal grubu matris çarpımına göre $GL(n, \mathbb{R})$ nin bir alt grubu ve $GL(n, \mathbb{R})$ 'nin topolojik alt uzayı olduğundan önerme 3.3.4 'ten bir topolojik alt gruptur (Bredon, 1993).

3.3.8. Tanım: $(G, \tau, \cdot)$ bir topolojik grup ve H, G nin bir alt grubu olsun. H açık (kapalı) alt cümle ise H ye açık (kapalı) alt gruptur denir (Brickell ve Clark, 1970).

3.3.9. Örnek: $SL(n, \mathbb{R})$, $GL(n, \mathbb{R})$ 'nin kapalı alt grubudur. Gerçekten $SL(n, \mathbb{R})$, $GL(n, \mathbb{R})$ nin matris çarpımına göre bir alt grubudur ve

$$\begin{aligned} \det : M(n \times n, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ A &\rightarrow \det A \end{aligned}$$

fonksiyonu süreklidir. $\{1\} \subset \mathbb{R}$ kapalıdır için $\det^{-1}\{1\} = SL(n \times n, \mathbb{R})$ olduğundan $SL(n \times n, \mathbb{R})$ $GL(n, \mathbb{R})$ nin kapalı alt kümesidir. Böylece $SL(n, \mathbb{R})$, $GL(n, \mathbb{R})$ nin kapalı alt grubudur (Bredon, 1993).

3.3.10. Örnek: $O(n, \mathbb{R})$, $GL(n, \mathbb{R})$ 'nin kapalı alt grubudur. Gerçekten $O(n, \mathbb{R})$, $GL(n, \mathbb{R})$ nin matris çarpımına göre bir alt grubudur ve

$$\begin{aligned} t : M(n \times n, \mathbb{R}) &\rightarrow M(n \times n, \mathbb{R}) \\ A &\rightarrow t(A) = AA^T = I \end{aligned}$$

dönüşümü şeklinde tanımlansın.

$$\begin{array}{ccc} M(n \times n, \mathbb{R}) & \xrightarrow{t} & M(n \times n, \mathbb{R}) \\ x \downarrow & & x \downarrow \\ \mathbb{R}^{n^2} & \xrightarrow{izd} & \mathbb{R}^{n^2} \end{array}$$

$t = x^{-1} \circ izd \circ x$ dönüşümünde izd , x ve x^{-1} sürekli fonksiyonların bileşkesi şeklinde yazıldığından t dönüşümü süreklidir

$I \subset M(n \times n, \mathbb{R})$ kapalı ve $t^{-1}(I) = O(n \times n, \mathbb{R})$ olduğundan $O(n \times n, \mathbb{R})$ kapalıdır. Böylece $O(n, \mathbb{R})$, $GL(n, \mathbb{R})$ nin kapalı alt grubudur (Bredon, 1993).

3.3.11. Örnek: $SO(n \times n, \mathbb{R}) = O(n \times n, \mathbb{R}) \cap SL(n \times n, \mathbb{R})$ olduğundan $SO(n \times n, \mathbb{R})$ kapalıdır. Böylece $SO(n \times n, \mathbb{R})$, $GL(n, \mathbb{R})$ 'nin kapalı alt grubudur (Bredon, 1993).

3.4. Manifold

3.4.1. Tanım (Hausdorff Uzayı): M bir topolojik uzay olsun. M 'nin p ve q gibi farklı noktaları için, M 'de, sırası ile p ve q noktalarını içine alan A_p ve A_q çık alt cümleleri $A_p \cap A_q = \emptyset$ olacak biçimde bulunabilirse M topolojik uzayına bir Hausdorff uzayı denir (Bourbaki, 1971).

3.4.2. Tanım (Topolojik Manifold): M bir topolojik uzay olsun. M için aşağıdaki önermeler doğru ise M ye bir n -boyutlu topolojik manifold (veya topolojik n -manifold) denir.

(M1) M bir Hausdorff uzaydır.

(M2) M nin her bir açık alt cümlesi E^n 'e veya E^n 'in bir açık alt cümlesine homeomorftur.

(M3) M sayılabilir çoklukta açık cümlelerle örtülebilir (Hacısalıoğlu, 1998).

3.4.3. Tanım (Diferensiyellenebilme): $V \subset \mathbb{R}^n$ bir açık cümle, $a \in V$ ve $f : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ olsun. Eğer

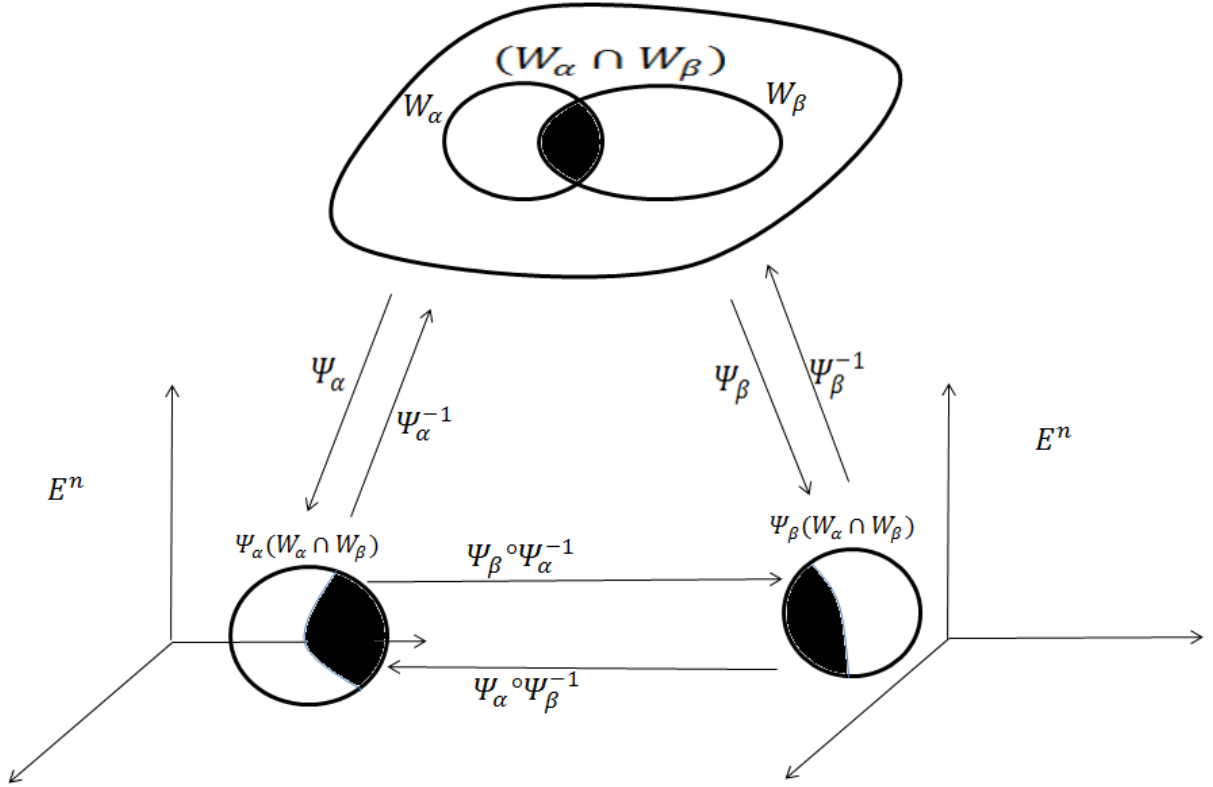
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - T_a(h)}{\|h\|} = 0$$

gerçekleşecek biçimde bir lineer $T_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ fonksiyonu varsa, f fonksiyonunun a noktasında diferensiyellenebilir dir denir; bu durumda T_a lineer fonksiyonuna, f fonksiyonunun noktasındaki ‘‘tam’’ türevi ya da Fréchet türevi denir (Spivak, 1998).

Bir topolojik n -manifold M ve bir $p \in M$ noktasının açık komşulukları da W_α olsun. p noktasının koordinatları, W_α lar değiştikçe, ψ_α değişeceğinden W_α ların sayısı kadar ψ_α vardır. Her bir $\alpha \in A$ için (ψ_α, w_α) üzerindeki koordinat sistemi $(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha)$ ile gösterilsin. p noktasının açık iki komşuluğu W_α ve W_β ise $W_\alpha \cap W_\beta \neq \emptyset$ ise $W_\alpha \cap W_\beta$ nin her bir noktasında

$$(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha) \text{ ve } (x_1^\beta, \dots, x_n^\beta)$$

gibi iki koordinat sistemi tanımlıdır. Bu iki koordinat sistemi arasındaki bağıntıyı görmek mümkündür.



Şekil 3.1 diferansiyellenebilir yapı.

$$\psi_\alpha(W_\alpha \cap W_\beta) \subset U_\alpha \subset E^n \text{ ve } \psi_\beta(W_\alpha \cap W_\beta) \subset U_\beta \subset E^n$$

alt cümleleri ikişer açık cümlelerin birer homeomorfizmi altında görüntüleri olduklarından açık cümlelerdir. Ayrıca

$$\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} : \psi_\alpha(W_\alpha \cap W_\beta) \rightarrow \psi_\beta(W_\alpha \cap W_\beta)$$

ile

$$\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1} : \psi_\beta(W_\alpha \cap W_\beta) \rightarrow \psi_\alpha(W_\alpha \cap W_\beta)$$

fonksiyonları da ikişer homeomorfizmin bileşimi olduklarından birer homeomorfizmdirler. $\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}$ 'nin diferansiyellenebilir olması için $(\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1})_i$

bileşenlerinin diferensiyellenebilir olması gerekir. Aynı şey $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$ için de söylenebilir.

3.4.4. Tanım (Diferensiyellenebilir Yapı): Bir topolojik n -manifold M ve M 'nin bir atlası $S = \{(\psi_\alpha, W_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ olsun. Eğer S atlası için $W_\alpha \cap W_\beta \neq \emptyset$ olmak üzere , $\forall \alpha, \beta \in A$ 'ya karşılık $\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}$ ve $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$ fonksiyonları C^k sınıfından diferensiyellenebilir iseler S ye C sınıfından diferensiyellenebilir denir. S atlası M üzerinde C^k sınıfından olduğu zaman S 'ye M üzerinde C^k sınıfından diferensiyellenebilir yapı adı verilir (Hacısalıhoğlu, 1998).

3.4.5. Tanım (Diferensiyellenebilir Manifold): M bir topolojik n -manifold olsun. M üzerinde C^k sınıfından bir diferensiyellenebilir yapı tanımlanırsa M 'ye C^k sınıfından diferensiyellenebilir manifold denir (Hacısalıhoğlu, 1998).

3.4.6. Tanım (Alt Manifold): M bir k -manifold ve N de bir n - manifold olsun. $\forall p \in M$ noktası için N de bir V ve M de bir U koordinat komşuluğu mevcut ve

$$U = \{m \in V \mid y_{k+1}(m) = \dots = y_n(m) = 0\}$$

ise M 'ye N 'nin bir alt manifoldu denir. Burada $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ koordinat sistemi V 'de ve $\{x_1 = y_1 \downarrow_U, \dots, x_k = y_k \downarrow_U\}$ da U 'daki koordinat sistemidir. Bu tanıma göre $M \subset N$ ve $k \leq n$ olması gerekmektedir (Hacısalıhoğlu, 1998).

3.4.7 Teorem: M bir n -boyutlu manifold olsun. M 'nin her açık alt cümlesi bir diferensiyellenebilir manifold yapısına sahiptir (Brickell ve Clark, 1970).

3.5. Vektör Alanları

$\Phi: M \rightarrow M'$ herhangi bir fonksiyon olsun, $M' \xrightarrow{\psi} M \xrightarrow{\Phi} M'$ özdeşlik ise ($\Phi \circ \psi = I$) ψ ye Φ nin bir kesitidir denir.

$$\begin{aligned} \pi: TM &\rightarrow M \\ X_m &\rightarrow m \end{aligned}$$

fonksiyonun bir kesiti X olsun. X tanım cümlesindeki herhangi bir m noktasına bir X_m tanjant vektörü karşılık getirir. $DX \cap Df \neq \emptyset$ olmak üzere $Xf: M \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu arakesit cümlesi üzerinden $Xf: m \rightarrow X_m f$ şeklinde tanımlanır.

3.5.1. Tanım: Bütün Xf fonksiyonları diferensiyellenebilir ise X kesitine M üzerinde bir vektör alanı denir.

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{X} & TM & \xrightarrow{\pi} & M \\ m & \rightarrow & X_m & \rightarrow & m \end{array}$$

Böylece X , π 'nin bir kesiti ise $\pi \circ X = I$ 'dir (Brickell ve Clark, 1970).

$\Phi: M \rightarrow M'$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. M ve M' üzerinde sırasıyla X ve Y iki vektör alanı olsun. Eğer,

$\Phi_* \circ X = Y \circ \Phi$ oluyor ise X ve Y vektör alanlarına Φ -bağılıdır denir.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\Phi} & M' \\ \downarrow X & \searrow & \downarrow Y \\ TM & \xrightarrow{\Phi_*} & TM' \end{array}$$

M ve M' üzerinde iki vektör alanının Φ -bağılı olması için gerek ve yeter şart $f: M' \rightarrow \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir olmak üzere

$$X(f \circ \Phi) = (Yf) \circ \Phi$$

olmasıdır.

3.5.2. Tanım: Bir X vektör alanı kendisiyle Φ -bağılı ise X , Φ altında (Φ ye göre) invarianttır denir (Brickell ve Clark, 1970).

$$\begin{array}{ccc}
M & \xrightarrow{\Phi} & M \\
\downarrow X & \searrow & \downarrow X \\
TM & \xrightarrow{\Phi_*} & TM
\end{array}$$

$$\Phi_* \circ X = X \circ \Phi, \quad \forall f: M \rightarrow \mathbb{R} \text{ için}$$

$$(\Phi_* \circ X)(f) = X(f \circ \Phi)$$

3.6. Lie Grubu

3.6.1. Tanım: G diferensiyellenebilir manifold yapısına sahip bir grup olsun

$$\theta: G \times G \rightarrow G$$

$$(g_1, g_2) \rightarrow g_1 \cdot g_2$$

grup işlemi diferensiyellenebiliyorsa G' ye bir Lie grubu denir (Brickell ve Clark, 1970; Varadarajan, 1974).

3.6.2. Örnek: S^1 birim çemberi bir Lie grubudur.

Çözüm: S^1 diferensiyellenebilir bir manifolddur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
S^1 \times S^1 &\xrightarrow{J \times J} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mu} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{J^{-1}} S^1 \\
((a, b), (c, d)) &\rightarrow (ac - bd, ad + bc)
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlı işlemle $(S^1, \cdot)$ bir gruptur.

$$\mu(z, w) = z \cdot w \quad z = (a, b), \quad w = (c, d)$$

$$\mu(z, w) = z \cdot w = ((a, b) \cdot (c, d)) = (ac - bd, ad + bc)$$

olmak üzere

$$\mu \circ (J \times J): S^1 \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

dönüşümü diferensiyellenebilirdir. $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ bir regüler alt manifolddur (S^1 in C^∞ yapısından indirgenen topolojisi ile S^1 'in $\mathbb{R}^2$ 'deki topolojisi çakışıktır).

$$\theta: S^1 \times S^1 \rightarrow S^1$$

olup grup fonksiyonu diferensiyellenebilirdir. Dolayısıyla S^1 bir Lie grubudur (Brickell ve Clark 1970).

3.6.3. Örnek: $GL(n, \mathbb{R})$ bir Lie grubudur.

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\} , \quad (GL(n, \mathbb{R}), \cdot)$$

bir gruptur. Grup işlemi matrislerin çarpım işlemidir.

$$\begin{aligned} x : M(n \times n, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R}^{n^2} \\ |a_{ij}| &\rightarrow (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nn}) \end{aligned}$$

olarak tanımlansın.

$$\det : M(n \times n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonunu ele alınsın.

$$\begin{array}{ccc} M(n \times n, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\det} & \mathbb{R} \\ x \downarrow & & \text{izd} \downarrow \\ \mathbb{R}^{n^2} & \xrightarrow{DET} & \mathbb{R} \end{array}$$

$\det$ fonksiyonunun temsil fonksiyonu DET , x_{ij} koordinat fonksiyonlarının bir polinomu gibi yazıldığından diferensiyellenebilirdir. Dolayısıyla DET fonksiyonu süreklidir. x ve izd dönüşümleri indirgenen (C^∞ yapıdan) topolojide süreklidir. O halde

$$\det = x \circ DET \circ (\text{izd})^{-1}$$

fonksiyonu süreklidir.

$\{\det^{-1}\{0\}\} \subset M(n \times n, \mathbb{R})$ kapalıdır ve tümleyeni $GL(n, \mathbb{R})$ açıktır böylece $GL(n, \mathbb{R})$, $M(n \times n, \mathbb{R})$ nin bir açık alt manifoldudur.

$$\begin{array}{ccc} GL(n, \mathbb{R}) \times GL(n, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\odot} & GL(n, \mathbb{R}) \\ x \downarrow \quad \downarrow x & & x \downarrow \\ \mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2} & \xrightarrow{\otimes} & \mathbb{R}^{n^2} \end{array}$$

$x \circ \odot \circ (x \times x)^{-1} = \otimes$ 'dir. $\otimes, \odot$ 'nin temsili fonksiyonudur ve diferensiyellenebilirdir. Sonuç olarak $GL(n, \mathbb{R})$ bir Lie grubudur (Brickell ve Clark, 1970).

3.6.4. Tanım (Lie alt grubu): G bir Lie grubu, H bir Lie grubu olsun. H , G 'nin bir alt grubu ve alt manifoldu ise H , G 'nin bir Lie alt grubu denir (Brickell ve Clark, 1970; Varadarajan, 1974).

3.6.5. Teorem: G bir Lie grubu ve $H \subseteq G$ kapalı alt grubu olsun o zaman H, G 'nin Lie alt grubudur (Brickell ve Clark, 1970; Varadarajan, 1974).

İspat: $SL(n, \mathbb{R}), O(n, \mathbb{R})$ ve $SO(n, \mathbb{R}), GL(n, \mathbb{R})$ 'nin kapalı alt grupları olduklarından , $GL(n, \mathbb{R})$ 'nin Lie alt grubudurlar (Brickell ve Clark, 1970).

3.7. Sol İnvaryant Vektör Alanları

3.7.1. Tanım: G bir Lie grubu , $g \in G$ belli bir eleman olmak üzere $L_g : G \rightarrow G$ sol öteleme X, G üzerinde bir vektör alanı olsun. $X, \forall g \in G$ için $(L_g)_*$ -bağlı ise kendine X 'e G üzerinde sol invaryanttır denir (Brickell ve Clark, 1970).

$$\begin{array}{ll} L_g : G \rightarrow G & (L_g)_* : TG \rightarrow TG \\ g_1 \rightarrow gg_1 & X \rightarrow (L_g)_*(X) \end{array}$$

Eğer X sol invaryant ise $(L_g)_*(X) = X \circ L_g$ ve dolayısıyla $\forall f : G \rightarrow \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir fonksiyonu için

$$((L_g)_*(X))(f) = X(f \circ L_g)$$

$$((L_g)_*X)(g_1) = X(gg_1) \quad g_1 = e \text{ için}$$

$$(L_g)_*(X_e) = X_g$$

dir.

3.7.2. Tanım: G bir Lie grubu olsun. G üzerindeki bir X vektör alanı bütün sol ötelemeler altında invaryant ise X vektör alanına sol invaryant vektör alanı denir (Brickell ve Clark, 1970).

3.7.3. Teorem: G Lie grubu üzerindeki bir X vektör alanı için X sol invaryanttır ancak ve ancak $X(gg_1) = (L_g)_*(X_{g_1})$, $\forall g, g_1 \in G$ dir.

İspat: $L_g : G \rightarrow G$, $g_1 \rightarrow L_g(g_1) = g.g_1$

($\Rightarrow$) X sol invaryant olsun. Bu durumda X kendisiyle L_g - bağlıdır.

$$(L_g)_* \circ X = X \circ L_g \quad \forall g_1 \in G \text{ için}$$

$$(L_g)_*(X_{g_1}) = X(L_g(g_1))$$

$$(L_g)_*(X_{g_1}) = X(gg_1)$$

olur.

$$(\Leftrightarrow) X(gg_1) = (L_g)_*(X_{g_1}) \text{ olsun } \forall g, g_1 \in G \text{ için}$$

$$\Rightarrow X(L_g(g_1)) = (L_g)_*(X_{g_1})$$

$$\Rightarrow (X \circ L_g)(g_1) = ((L_g)_* \circ X)(g_1)$$

$$\Rightarrow X \circ L_g = (L_g)_* \circ X$$

$\Rightarrow X$ sol invarianttır (Brickell ve Clark, 1970).

Teoremden $g_1 = e$ alınırsa $Xg = (L_g)_*(Xe)$ yazılabilir yani G üzerindeki sol invariant vektör alanları e noktasındaki değeriyle tanımlanabilir. $v \in T_e G$ herhangi bir eleman olmak üzere $g \rightarrow (L_g)_* v$ G üzerinde bir sol invariant vektör alanı olup e noktasındaki değeri v dir.

3.7.4. Örnek: Birim çember üzerinde tanımlı sol invariant vektör alanı

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{L_a} & S^1 \\ \downarrow X & & \downarrow X \\ T_e S^1 & \xrightarrow{(L_a)_*} & T_e S^1 \end{array}$$

$$x, a \in S^1 \text{ için } x = x_1 + i.x_2, \quad a = a_1 + i.a_2$$

$$L_a(x) = a.x = (a_1 + i.a_2)(x_1 + i.x_2)$$

$$= (a_1 x_1 - a_2 x_2, a_1 x_2 + a_2 x_1)$$

X vektör alanı çember üzerindeki bir noktaya teğet vektörü bağlayan türev

operatörüdür. $L_{a_1} = a_1 x_1 - a_2 x_2$ ve $L_{a_2} = a_1 x_2 + a_2 x_1$

şeklinde olup

$$(L_a)_* = \begin{bmatrix} (L_{a_1})_{x_1} & (L_{a_1})_{x_2} \\ (L_{a_2})_{x_1} & (L_{a_2})_{x_2} \end{bmatrix}$$

$$(L_a)_*(T) = \begin{bmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 \sin t - a_2 \cos t \\ -a_2 \sin t + a_1 \cos t \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
L_a(x) &= (a_1x_1 - a_2x_2, a_1x_2 + a_2x_1) \\
&= (a_1 \cos t - a_2 \sin t, a_1 \sin t + a_2 \cos t) \\
(X \circ L_a)(x) &= \frac{d}{dt} (a_1 \cos t - a_2 \sin t, a_1 \sin t + a_2 \cos t) \\
&= (-a_1 \sin t - a_2 \cos t, a_1 \sin t + a_2 \cos t) \\
X(L_a(x)) &= (-a_1 \sin t - a_2 \cos t, a_1 \sin t + a_2 \cos t)
\end{aligned}$$

O halde $(X \circ L_a) = ((L_a)_* \circ X)$ olduğundan X sol invariant vektör alanıdır.

3.8. Lie Cebiri

3.8.1. Tanım: V bir K cismi üzerinde vektör uzayı ve

$$[\cdot, \cdot]: V \times V \rightarrow V$$

dönüşümü:

- 1) 2-lineer
 - 2) Alterne ($\forall X, Y \in V$ için $[X, Y] = -[Y, X]$)
 - 3) $\forall X, Y, Z \in V$ için;
- $$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

özelliklerini sağlıyor ise $[\cdot, \cdot]$ dönüşümüne, V üstünde bir Lie operatörü (Lie parantez operatörü) denir (Bu takdirde V vektör uzayına bir Lie cebiri denir.) (Hacısalıhoğlu, 1998; Varadarajan, 1974).

3.8.2. Teorem: E^n üstünde vektör alanları cümlesi $\chi(E^n)$ olsun.

$$\begin{aligned}
[\cdot, \cdot]: \chi(E^n) \times \chi(E^n) &\rightarrow \chi(E^n) \\
(X, Y) &\rightarrow [X, Y]
\end{aligned}$$

dönüşümü, $\forall f \in C^\infty(E^n, \mathbb{R})$ için

$$[X, Y](f) = X(Yf) - Y(Xf),$$

şeklinde tanımlanırsa, $[\cdot, \cdot]$ bir Lie operatörüdür.

İspat: $\chi(E^n)$, $\mathbb{R}$ üstünde bir vektör uzayıdır.

1) $\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall X, Y, Z \in \chi(E^n)$ için $\forall f \in C^\infty(E^n, \mathbb{R})$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} [aX + bY, Z](f) &= (aX + bY)(Zf) - Z((aX + bY)f) \\ &= a(X(Zf)) + b(Y(Zf)) - a(Z(Xf)) - b(Z(Yf)) \\ &= (a[X, Z] + b[Y, Z])(f) \end{aligned}$$

İki fonksiyonun eşitliği tanımına göre $\forall f \in C^\infty(E^n, \mathbb{R})$ için geçerli olan bu eşitlikten

$$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$$

elde edilir. Benzer şekilde, $[,]$ ikinci yere göre de lineer olduğu gösterilebilir.

2) $\forall X, Y \in \chi(E^n)$ $\forall f \in C^\infty(E^n, \mathbb{R})$ için

$$\begin{aligned} [X, Y](f) &= X(Yf) - Y(Xf) = -(Y(Xf) - X(Yf)) \\ &= -([Y, X]f) \\ \Rightarrow [X, Y] &= -[Y, X] \end{aligned}$$

dir.

3) $\forall X, Y, Z \in \chi(E^n)$ ve $\forall f \in C^\infty(E^n, \mathbb{R})$ için,

$$\begin{aligned} [X, [Y, Z]](f) &= X([Y, Z]f) - [Y, Z](Xf) \\ &= X(Y(Zf) - Z(Yf)) - Y(Z(Xf)) + Z(Y(Xf)) \\ &= X(Y(Zf)) - X(Z(Yf)) - Y(Z(Xf)) + Z(Y(Xf)) \dots\dots\dots(1) \end{aligned}$$

benzer düşünceyle

$$[Y, [Z, X]] = Y(Z(Xf)) - Y(X(Zf)) - Z(X(Yf)) + X(Z(Yf)) \dots\dots\dots(2)$$

$$[Z, [X, Y]] = Z(X(Yf)) - Z(Y(Xf)) - X(Y(Zf)) + Y(X(Zf)) \dots\dots\dots(3)$$

yazılabilir, böylece (1), (2) ve (3) eşitliklerini taraf tarafa toplayarak

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

elde edilir. Böylece $\chi(E^n)$ vektör alanları cümlesi bir Lie cebirdir (Hacısalıhoğlu 1998; Varadarajan, 1974).

3.8.3. Teorem: Bir G Lie grubu üstündeki sol invaryant vektör alanları uzayı ile birim noktadaki tanjant uzayı izomorfiktirler (Clark ve Brickell, 1970).

İspat:

$$\psi : LG \rightarrow T_e G$$

$$X \rightarrow \psi(X) = X_e$$

dönüşümü bir vektör uzayı izomorfizmidir, şöyle ki;

i) 1-1 dir. $\Leftarrow$:

$\forall X, Y \in LG$ için,

$$\Psi(X) = \Psi(Y)$$

$$X_e = Y_e$$

$$(L_g)_*(X_e) = (L_g)_*(Y_e) \quad \forall g \in G \text{ için}$$

$$Xg = Yg$$

$$X = Y$$

X, Y sol invaryant olduğundan fonksiyonların eşitliği tanımlıdır.

ii) Lineerdir. $\Leftarrow$:

$$\Psi(\lambda X + \eta Y) = (\lambda X + \eta Y)_e$$

$$= (\lambda X)_e + (\eta Y)_e = \lambda \Psi(X) + \eta \Psi(Y)$$

olduğundan Ψ lineerdir.

iii) örtendir. $\Leftarrow$:

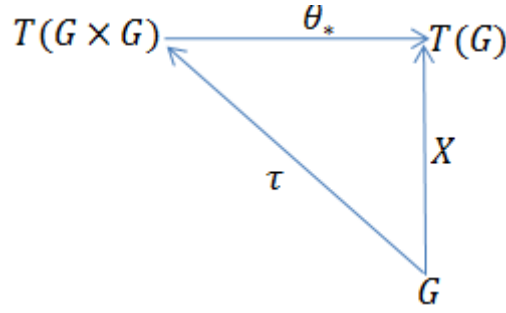
Herhangi bir $v \in T_e G$ için X vektör alanını $X(g) = (L_g)_*(v_e)$ olarak seçelim. X sol invaryanttır, gerçekten

$TG \times TG$ ile $T(G \times G)$ izomorfiktirler.

$\theta : G \times G \rightarrow G$ grup fonksiyonu olmak üzere bir τ fonksiyonu

$$\begin{aligned} \tau : G &\rightarrow T(G \times G) \\ g &\rightarrow \tau(g) = (0_g, v) \end{aligned} \quad (v \in T_e G \text{ belli bir eleman})$$

şeklinde tanımlansın. $T(G \times G)$ ile $T(G) \times T(G)$ difeomorfiktir.



$X = \theta_* \circ \tau$ 'dir ve X diferensiyellenebilirdir.

Leibniz kuralından

$$\theta: G \times G \rightarrow G$$

$$(g_1, g_2) \rightarrow \theta(g_1, g_2) = g_1 g_2$$

$$\theta_{g_1}: G \rightarrow G$$

$$g_2 \rightarrow \theta_{g_1}(g_2) = g_1 g_2 = L_{g_1}(g_2)$$

$$\theta_{g_2}: G \rightarrow G$$

$$g_1 \rightarrow \theta_{g_2}(g_1) = g_1 g_2 = R_{g_2}(g_1)$$

$$\theta = L_{g_1} \circ R_{g_2}$$

$$\theta_*: T(G \times G) \rightarrow TG$$

$$\theta_*(u, v) = (L_{g_1})_*(v) + (R_{g_2})_*(u)$$

Bir g elemanı için $X(g)$ hesaplınsın.

$$X(g) = (\theta_* \circ \tau)(g) = \theta_*(\tau(g))$$

$$= \theta_*(0_g, v) = (L_g)_*(v) + (R_g)_*(0)$$

$$= (L_g)_*(v) = g_*(v)$$

$\forall a \in G$ için

$$L_{a*}(Xg) = a_*(Xg) = a_*(g_*v) = (ag)_*(v)$$

$$= X(ag) = (X \circ L_a)(g)$$

$\Rightarrow (L_a)_*(Xg) = X(ag)$ ve X sol invaryant olduğundan Ψ örtendir.

Böylece LG ile $T_e G$ izomorfiktir.

LG ve $T_e G$ 'nin izomorfik olması $T_e G$ üzerinde bir Lie cebiri yapısı tanımlamaya izin verir.

$T_e G$ deki $[\cdot, \cdot]$ çarpımı

$$v, w \in T_e G, \quad X, Y \in LG, \quad X_e = v, Y_e = w \text{ ise}$$

$$[v, w] = [X, Y]_e$$

şeklinde tanımlansın. Bu işlemle $(T_e G, [\cdot, \cdot])$ bir Lie cebiridir.

3.8.4. Örnek: $SO(2)$ 'nin Lie cebirini hesaplınsın:

$$SO(2) = \left\{ \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$$

şeklinde olup bir Lie alt grubudur. $SO(2)$ nin Lie cebirini hesaplınsın. Bu Lie cebiri $T_e(GL(2, \mathbb{R}))$ ile aynı boyuttadır. Şimdi

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \bigg|_{t=0} \left(\begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} -\sin t & \cos t \\ -\cos t & -\sin t \end{bmatrix} \bigg|_{t=0} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$SO(2)$ 'nin Lie cebiridir ve $so(2)$ ile gösterilir.

$$so(2) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{bmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}$$

dir.

3.8.5. Örnek: $GL(n, \mathbb{R})$ 'nin $O(n)$ Lie alt grubunu ele alınsın. $O(n)$ 'in Lie cebirini hesaplınsın. $A(t) \in O(n)$ olsun ve $A(0) = I$ olsun. O zaman $A(t)A(t)^T = I \quad \forall t \in I \subset \mathbb{R}$ olduğunu biliniyor.

$$0 = \frac{d}{dt} \bigg|_{t=0} (I) = \frac{d}{dt} (A(t)A(t)^T) \bigg|_{t=0}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{d}{dt} (A(t)) \bigg|_{t=0} \cdot A^T(0) + A(0) \frac{d}{dt} A^T(t) \bigg|_{t=0} \\ &= A'(0) + (A^T(0))' \end{aligned}$$

Böylece $o(n) \subseteq S(n, \mathbb{R})$ olur. Burada $S(n, \mathbb{R}) = \{X \in M(n, \mathbb{R}) \mid X + X^T = 0\}$ olduğu biliniyor. Şimdi $o(n)$ in boyutu hesaplınsın. $\dim S(n, \mathbb{R}) = \frac{n^2 - n}{2}$ dir. $Sym^2(\mathbb{R}^n)$, $n \times n$ tipindeki simetrik matrislerin cümlesidir ve $I \subset Sym^2(\mathbb{R}^n)$ dir. O zaman I birim dönüşümü regüler değildir. $A \rightarrow AA^T$ burada $A \in GL(n, \mathbb{R})$ dir.

$$\begin{aligned} \dim o(n) &= \dim GL(n, \mathbb{R}) - \dim Sym^2(\mathbb{R}^n) \\ &= n^2 - \left(\frac{n^2 - n}{2} + n\right) = \frac{n^2 - n}{2} \end{aligned}$$

olur. Böylece $o(n) = S(n, \mathbb{R})$ dir.

3.9. 1-parametrelili Transformasyon Grubu

3.9.1. Tanım: M diferensiyellenebilir bir manifold ve

$$\varphi: M \times \mathbb{R} \rightarrow M$$

diferensiyellenebilir bir dönüşüm verilsin,

$$\varphi(x, 0) = x$$

ve

$$\varphi(\varphi(x, t), s) = \varphi(x, t + s), \forall x \in M, \forall s, t \in \mathbb{R}$$

oluyorsa φ ye M üstünde 1- parametrelili transformasyon grubu olarak etki eder denir (Herman, 1975).

Eğer $\forall t \in \mathbb{R}$ için

$$\varphi_t(x) = \varphi(x, t)$$

olarak tanımlanırsa o zaman $\forall t \in \mathbb{R}$ için

$$\varphi_t: M \rightarrow M$$

diferensiyellenebilir bir dönüşüm $t + s = s + t$ olduğundan

$$\begin{aligned} \varphi_{t+s}(x) &= \varphi(x, t + s) = \varphi(\varphi(x, t), s) \\ &= \varphi(t, \varphi_s(x)) = \varphi_t(\varphi_s(x)) = \varphi_t \circ \varphi_s(x) \end{aligned}$$

olur.

φ_0 , $\forall x \in M$ için

$$\varphi_0(x) = \varphi(x, 0) = x$$

olduğundan φ_0 M üstünde birim dönüşümdür.

$$\varphi_t \circ \varphi_{-t} = \varphi_{-t} \circ \varphi_t = \varphi_0$$

olur. Buradan $\forall \varphi_t$ diferensiyellenebilir dönüşümün tersi φ_{-t} dönüşümüdür ve

$$\varphi_{-t} : M \rightarrow M$$

diferensiyellenebilirdir.

Böylece $\{\varphi_t | t \in \mathbb{R}\}$ transformasyon grubu M 'den M 'ye diffeomorfizmlerin bir abel grubudur ve $t \rightarrow \varphi_t$ dönüşümü reel sayıların toplam gruplarına homeomorftur. M üstünde 1-parametrelili transformasyon grubu M ' deki bir eğri ailesini belirler (grubun yörüngelerini).

$$\varphi_x : \mathbb{R} \rightarrow M$$

dönüşümü

$\varphi_x(t) = \varphi(x, t)$, $\forall x \in M$ için M de diferensiyellenebilir bir eğridir.

$$\varphi_x(0) = \varphi(x, 0)$$

$t=0$ da φ_x eğrisinin tanjant uzayı $T_x M$ dir. φ 'nin diferensiyellenebilir üretici

$$X_x = (\varphi_x)' \downarrow_{t=0}$$

olan X vektör alanıdır. Başka bir deyişle φ nin diferensiyellenebilir üretici 1-parametrelili transformasyon grubunun yörünge eğrilerinin bir tanjant vektör alanıdır.

3.9.2. Örnek: $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0\}$ ve

$$\varphi : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$$

verilsin,

$$\varphi((x_0, y_0), t) = \frac{(2x_0, 2y_0 \cos t + (1 - x_0^2 - y_0^2) \sin t)}{1 + x_0^2 + y_0^2 + (1 - x_0^2 - y_0^2) \cos t - y_0 \sin t} \quad (*)$$

bu dönüşüm diferensiyellenebilirdir. $x_0 \neq 0$ için payda sıfırdan farklı olacağından verilen bu fonksiyon diferensiyellenebilirdir (verilen bu fonksiyonun paydası

$$2 \left[x_0 \sin\left(\frac{t}{2}\right)^2 + y_0 \sin\left(\frac{t}{2}\right) - \cos\left(\frac{t}{2}\right)^2 \right]$$

ifadesine eşittir).

Ayrıca $\varphi((x_0, y_0), t) \in M$ dir. $\forall (x_0, y_0) \in M$ ve $\forall t \in \mathbb{R}$ için

$$\varphi((x_0, y_0), 0) = (x_0, y_0)$$

dir. (*) üstünde yapılan hesaplamalar gösteriyor ki

$$\varphi(\varphi(x_0, y_0), t), s) = \varphi((x_0, y_0), t + s)$$

sağlandığından M üstünde 1-parametrelili transformasyon grubuna sahiptir. $(x_0, y_0) \in M$ sabit noktası için

$$\varphi_{(x_0, y_0)}(t) = \varphi((x_0, y_0), t)$$

M de diferensiyellenebilir bir eğridir.

$$\varphi_{t_0}' = \frac{d}{dt}(x_i \circ c) \downarrow_{t_0} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) \downarrow_{\varphi(t_0)}$$

kullanarak t=0 da tanjant vektörü elde edilir.

$$(\varphi_{(x_0, y_0)})' \downarrow_{t=0} = \frac{d}{dt}(x \circ (\varphi_{(x_0, y_0)})) \downarrow_{t=0} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \downarrow_{(x_0, y_0)} + \frac{d}{dt}(y \circ (\varphi_{(x_0, y_0)})) \downarrow_{t=0} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) \downarrow_{(x_0, y_0)}$$

ile

$$(x \circ (\varphi_{(x_0, y_0)}))(t) = \frac{2x_0}{1 + x_0^2 + y_0^2 + (1 - x_0^2 - y_0^2) \cos t - y_0 \sin t}$$

$$(y \circ (\varphi_{(x_0, y_0)}))(t) = \frac{2y_0 \cos t + (1 - x_0^2 - y_0^2) \sin t}{1 + x_0^2 + y_0^2 + (1 - x_0^2 - y_0^2) \cos t - y_0 \sin t}$$

Bu ifadelerin t' ye göre türevleri alınarak türevlerinde t yerine t=0 yazılarak (*) ifadesinin 1-parametrelili grubun diferensiyellenebilir üretici bulunur. Verilen X

$$\begin{aligned} X_{(x_0, y_0)} &= (\varphi_{(x_0, y_0)})' \downarrow_{t=0} = x_0 y_0 \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_{(x_0, y_0)} + \frac{1 - x_0^2 - y_0^2}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)_{(x_0, y_0)} \\ &= \left(xy \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1 - x^2 - y^2}{2} \frac{\partial}{\partial y} \right)_{(x_0, y_0)} \end{aligned}$$

$$X = xy \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1-x^2-y^2}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial y}$$

(*) 1-parametrelili grup ile tanımlı eğrinin görüntüsüdür. X tanjant vektörü ise çemberin yaylarıdır. Notasyonu basitleştirmek için $x \circ \varphi(x_0, y_0)$ ve $y \circ \varphi(x_0, y_0)$ 'nin yerin x ve y yazılırsa

$$\left(x - \frac{1+x_0^2+y_0^2}{2x_0}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1+x_0^2+y_0^2}{2x_0}\right)^2 - 1$$

Bu denklem merkezi x -ekseni üzerinde olan $\left(\frac{1+x_0^2+y_0^2}{2x_0}, 0\right)$ merkezli ve yarıçapı

$$\left(\frac{1+x_0^2+y_0^2}{2x_0}\right)^2 - 1 \text{ olan çemberdir (Castillo, 2010).}$$

3.10. 1-Parametrelili Alt Gruplar

3.10.1. Tanım: G bir Lie grubu olsun,

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R} &\rightarrow G \\ t &\rightarrow g(t) = g_t \end{aligned}$$

diferensiyellenebilir dönüşümü $g_{t+s} = g_t \cdot g_s$, $g_0 = e$ ve $g_{-t} = (g_t)^{-1}$, $\forall t, s \in \mathbb{R}$ için sağlıyorsa $\{g_t\}$ ye G 'nin 1-parametrelili alt grubu denir (Herman, 1975).

$t \rightarrow g_t$ ye verilen dönüşüm $\mathbb{R}$ den G 'nin içine diferensiyellenebilir bir dönüşümdür. Alt cebir ve alt grup arasındaki ilişkinin özel durumları ve sağ invaryant vektör alanı ya da sol invaryant vektör alanı ile G 'deki 1-parametrelili alt grubu ilişkilerinin sonucu olduğu aşağıda verilmiştir.

3.10.2. Teorem: $\{g_t\}$ $t \in \mathbb{R}$ ile, G 'nin 1-parametrelili alt grubu verilsin, o zaman $t \rightarrow g_t$ eğrisi sol invaryant (sağ invaryant) vektör alanlarının e noktasındaki integral eğrilerinin başlangıcıdır (Castillo, 2010).

İspat: $\alpha(t) = g_t$ eğrisinin $t=0$ daki tanjant vektörü v olsun, $v = \alpha'_0$ yani

$$v[f] = \frac{d}{dt}(f(g_t)) \downarrow_{t=0}, f \in C^\infty(G)$$

benzer olarak $t = s$, α'_s eğrisinin tanjant vektörü, yani

$$\alpha'_s[f] = \frac{d}{dt}(f(g_t)) \downarrow_{t=s}$$

fakat, $g_t = g_s g_{t-s}$ ve $u = t - s$ değişken değişimi yapılarak

$$\begin{aligned} \alpha'_s[f] &= \frac{d}{dt}(f(g_s g_{t-s})) \downarrow_{t=s} = \frac{d}{du}(f(g_s g_u)) \downarrow_{u=0} \\ &= \frac{d}{du}((f \circ L_{g_s})(g_u)) \downarrow_{u=0} = v[f \circ L_{g_s}] = ((L_{g_s})_{*e} v)[f] \end{aligned}$$

yani, $\alpha'_s = (L_{g_s})_{*e} v = X_{g_s} = X_{g(s)}$ burada X sol invaryant vektör alanıdır, öyle ki $X_e = v$ dir. Böylece α , X 'in integral eğrisidir.

Alternatif olarak, önceki ifadeden,

$$\begin{aligned} \alpha'_s[f] &= \frac{d}{dt}(f(g_{t-s} g_s)) \downarrow_{t=s} = \frac{d}{du}(f(g_u g_s)) \downarrow_{u=0} \\ &= \frac{d}{du}((f \circ R_{g_s})(g_u)) \downarrow_{u=0} = v[f \circ R_{g_s}] = ((R_{g_s})_{*e} v)[f] \end{aligned}$$

yazılabilir.

Bunun anlamı $\alpha'_s = (R_{g_s})_{*e} v = X_{g_s} = X_{g(s)}$ v 'nin birim noktadaki değeri sağ invaryant vektör alanının $\alpha(s)$ deki değeridir. G üstünde sağ invaryant veya sol invaryant vektör alanları ($v \in T_e G$) G 'nin $\{g_t\}, t \rightarrow g_t$ 1-parametrelili alt grupları vardır öyle ki verilen vektör alanı e noktasındaki integral eğrisinin başlangıcıdır ($t=0$ da $t \rightarrow g_t$ eğrisinin tanjant vektörü v 'ye eşittir).

Eğer X , G üzerinde herhangi bir vektör alanı ise, e noktasında X 'in bir integral eğrisi vardır. Sıfırın bazı I_e komşuluğunda tanımlı $t \rightarrow \alpha(g, t)$, g de başlayan X 'in bir integral eğrisi ise

$$\alpha(g, t+s) = \alpha(\alpha(g, t), s)$$

her iki tarafındaki bütün t ve s değerleri için tanımlıdır.

G üzerinde sol invaryant vektör alanının tanımlı olması durumunda bütün $t \in \mathbb{R}$ için $\alpha(g, t)$ tanımlıdır.

C, X in, e noktasında başlayan integral eğrisi $[C(t) = \alpha(e, t)]$ ise o zaman $g \in G$ için

$C(t) = (L_g \circ C)(t)$ sıfırın benzer I_e komşuluğunda tanımla C ve

$$\tilde{C}(0) = L_g(C(0)) = L_g(e) = ge = g$$

$t = 0$ da C 'nin tanjant vektörü

$$(L_g)_{*e} C'(0) = (L_g)_{*e} X_e = X_g$$

ve $X \in LG$ 'dir (LG, G nin Lie cebiri). Bu nedenle C, g de başlayan X 'in bir integral eğrisidir. $g \in G$ keyfi değeri için $\alpha(g, t)$ bütün $t \in R$ değerleri için tanımlıdır.

Başka bir deyişle $C(t) = \alpha(g, t)$ yani

$$\alpha(g, t) = (L_g \circ C)(t) = gC(t) = g\alpha(e, t)$$

$g = \alpha(e, s)$ olarak ele alırsak

$$\alpha(\alpha(e, s), t) = \alpha(e, s)\alpha(e, t) = \alpha(e, s+t)$$

elde edilir. G nin 1-parametrelili alt grubu $g_t = \alpha(e, t)$ yardımıyla G 'nin elemanlarının anlamı tanımlanır.

Yukarıdaki türev R_g nin vasıtasıyla L_g yerine

$$\alpha(\alpha(e, s), t) = \alpha(e, s)\alpha(e, t) = \alpha(e, s+t)$$

temel olarak ayrıca tutulabileceği kolayca doğrulanmış olur. Eğer X sağ invaryant ise $\exp X = \alpha(e, 1)$ dönüşüme üstel dönüşüm denir.

$$\exp : LG \rightarrow G$$

ye verilen dönüşüm $\alpha(e, 1)$ elemanı $\exp X$ ile gösterilir. Buradan $\exp tX = \alpha(e, t)$ olduğu kolayca görülebilir. O halde

$$\exp(t+s)X = (\exp tX)(\exp sX)$$

$\exp(X+Y)$ 'nin elemanları $(\exp X)(\exp Y)$ 'nin katsayıları değilse $[X, Y] = 0$ dır.

4. TRANSFORMASYON GRUPLARI VE FORMLAR

4.1. Lie Transformasyon Grupları

4.1.1. Tanım: G bir Lie grubu ve M diferensiyellenebilir bir manifold olsun, verilen

$$\phi: G \times M \rightarrow M$$

fonksiyonu diferensiyelenebilir ve

$$\phi(g, \phi(h, m)) = \phi(gh, m) \quad g, h \in G, m \in M$$

şartını sağlıyor ise G Lie grubu M üzerinde bir Lie transformasyon grubu olarak etki eder denir (Brickell ve Clark, 1970).

4.1.2. Özellik: $\forall g \in G$ için

$$\begin{aligned} \phi_g: M &\rightarrow M \\ m &\rightarrow \phi_g(m) = \phi(g, m) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm diferensiyellenebilirdir (Brickell ve Clark, 1970).

4.1.3. Özellik: $e \in G$ birim elemanı için ϕ_e özdeşlik dönüşümüdür.

İspat: $m \in M$ için $\exists m' \in M$, $\exists h \in G$ elemanları için $\phi_h m' = m$ olacak şekilde vardır. Böylece

$$\phi_e(m) = (\phi_e \circ \phi_h)m' = \phi_{eh}(m') = \phi_h(m') = m$$

elde edilir. Bu da ϕ_e dönüşümünün bir özdeşlik dönüşümü olduğunu gösterir.

4.2. Lie Grup Etkilerin Sabit Noktaları

M diferensiyellenebilir bir manifold ve G bağlantılı sonlu boyutlu bir Lie grubu olsun.

G nin M üzerindeki Lie transformasyon grup etkisi

$$\begin{aligned}\Phi: G \times M &\rightarrow M \\ (g, m) &\rightarrow \Phi(g, m) = g.m\end{aligned}$$

şeklinde verilsin. Seçilen bir $x \in M$ için

$$G(x) = \{\Phi(g, x) \in M \mid g \in G\}$$

cümlesine x 'in yörüngesi denir. Yörünge tanımı, özel bir durum söz konusu değilse her x elemanı için geçerlidir. Seçilen elemanın veya grubun yapısının özel durumlarına bağlı olarak yörünge özel formlara sahip olabilir. Bunlardan ilki bir grubun stabilizeri kavramıdır ve tanımı şöyledir.

4.2.1. Tanım: $\Phi: G \times M \rightarrow M$ Lie grup etkisi verilsin

$$G_x = \{g \in G \mid \Phi(g, x) = x\}$$

cümlesine x 'in stabilizeri denir (Bredon, 1972; Plante, 1985).

4.2.2. Özellik: G_x stabilizer kümesi bir gruptur (Bredon, 1972).

4.2.3. Örnek: $\Phi: G \times M \rightarrow M$ Lie grup etkisi

$G = D$ yer değiştirmeler grubu ve $M = \mathbb{R}^2$ olmak üzere

$$\begin{aligned}D \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (A, x) &\rightarrow A.x\end{aligned}$$

olarak verilsin. Matris formuyla ve açık şekliyle tanımlanan etki

$$A.x = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & t_1 \\ \sin \theta & \cos \theta & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

il verilir. Herhangi bir x elemanının stabilizeri

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & x_1 - x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta & x_2 - x_1 \sin \theta - x_2 \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

matris eşitliğinin çözüm kümesidir. Burada

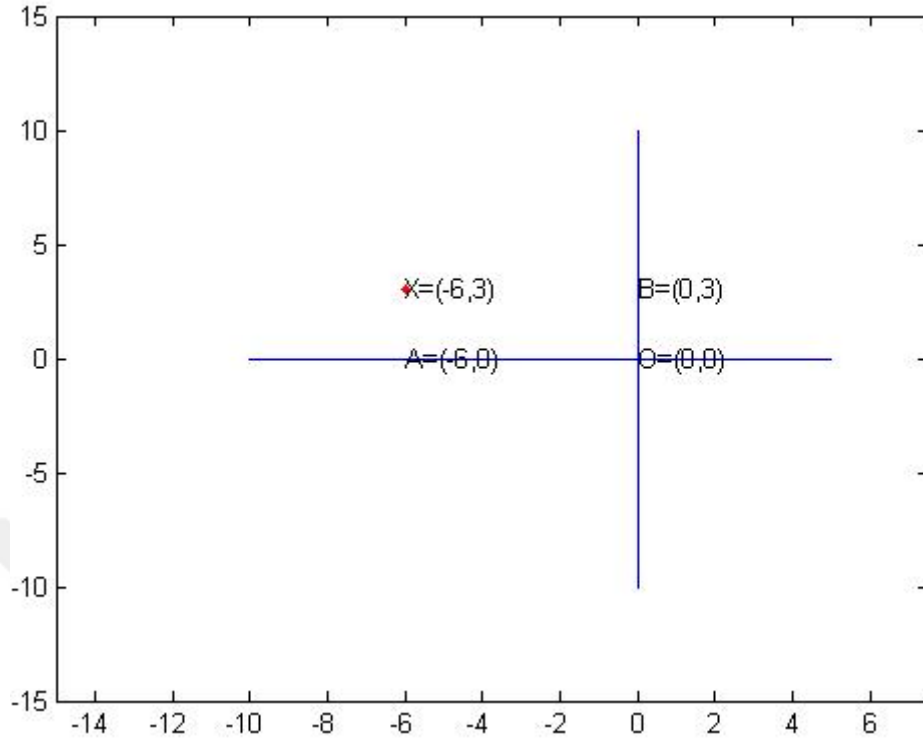
$$t_1 = x_1 - x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta \text{ ve } t_2 = x_2 - x_1 \sin \theta - x_2 \cos \theta$$

dir.

$\forall \theta \in I \subset \mathbb{R}$ için x in stabilizeri D_x ile gösterilir ve $D_x = \{A \in D \mid A.x = x\}$ D 'nin bir alt grubudur.

Bu örnek manuel olarak örneklenebileceği gibi Matlab programı kullanılarak da örneklendirilebilir. Örneğin $x = (-6, 3)$ noktasının stabilizer alt gurubu için Matlab m-file komutları aşağıdaki şekilde verilebilir.

```
for t=0:pi/80:2*pi
a=15
axis([-a 0.5*a -a a])
X=[-6;3;1]
A=[cos(t) -sin(t) -6-(-6)*cos(t)+3*sin(t);
sin(t) cos(t) 3-(-6)*sin(t)-3*cos(t);0 0 1]
B=A*X
plot(B(1),B(2),'r')
line([-10,5],[0,0])
line([0,0],[-10,10])
hold on
text(B(1),B(2),'X=(-6,3)')
text(-6,0,'A=(-6,0)')
text(0,0,'O=(0,0)')
text(0,3,'B=(0,3)')
pause(0.1)
end
```



Şekil 4. 1. $(-6,3)$ noktasının yörüngesi.

G/G_x bölüm uzayının nasıl bir yapıda olduğu incelensin. G_x

$$G_x = \{g \in G \mid \phi(g, x) = x\}$$

şeklinde idi. G_x , manifolddaki x elemanını sabit bırakan elemanların kümesi olup G_x ,

G 'nin bir alt grubudur. G/G_x bir bölüm uzayıdır. Her x için G_x lerin bir tek ortak elemanı vardır. $\bigcap G_x = \{e\}$.

$$\psi: G/G_x \rightarrow G(x)$$

Buradaki ψ , G/G_x bölüm uzayından x 'in yörüngesine yani x 'in bütün pozisyonları olan $G(x)$ 'e tanımlanan bir dönüşümdür. Bu dönüşüm 1-1, örten ve sürekli bir dönüşümdür. Ayrıca ϕ nin $G(x)$ 'e kısıtlanması G 'nin G/G_x üzerindeki soldan etkisine eşittir.

Eğer $G_x = G$ ise o zaman $G(x) = \{x\}$ dir ve x 'e etkinin sabit noktası ya da hareketsiz noktası denir. Eğer etkinin her noktası hareketsiz nokta ise o zaman G 'nin etkisi

aşıkardır denir. Herhangi bir $x \in M$ için $G(x) = M$ oluyorsa o zaman etki geçişlidir denir (Bredon, 1972; Plante, 1985).

4.2.4. Örnek: $\phi: O(2) \times S^1 \rightarrow S^1$, $O(2)$ ortogonal matrisin S^1 birim çemberdeki bir x noktasına $(A, x) \rightarrow A.x$ şeklinde Lie grubu olarak etki ettirilsin.

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \text{ ve } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

için

$$\begin{aligned} A.x &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta x_1 - \sin \theta x_2 \\ \sin \theta x_1 + \cos \theta x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

şeklinde olur. Burada x in yörüngesi S^1 birim çemberidir. Bunu örneğin bir $x \in S^1$ noktası için Matlab uygulamasını veren m-file komutları aşağıdaki şekilde verilebilir.

```
for t=0:pi/80:2*pi
```

```
X=[-1/((3)^1/2);((2)^1/2)/((3)^1/2)]
```

```
A=[cos(t) -sin(t);sin(t) cos(t)]
```

```
B=A*X
```

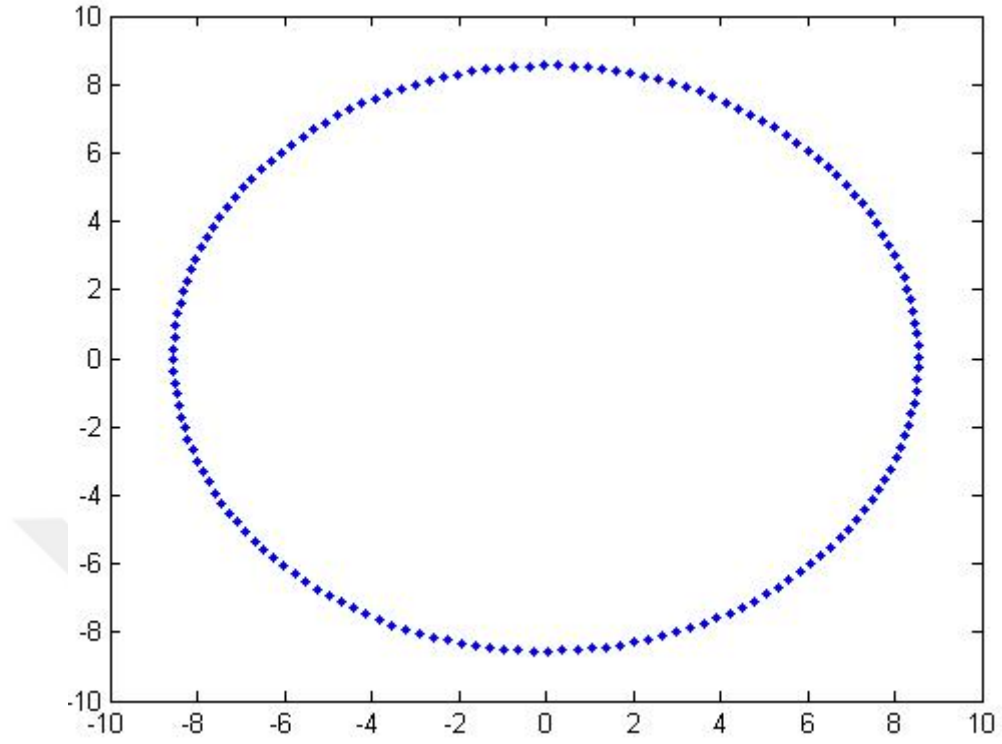
```
plot(B(1),B(2),'.r')
```

```
hold on
```

```
grid on
```

```
pause(0.1)
```

```
end
```



Şekil 4. 2 S^1 altında bir x noktasının yörüngesi.

G Lie grubu ve M manifoldu verilsin, eğer G 'nin M üzerinde her sürekli etkisi sabit noktaya sahip ise (G, M) ikilisine sabit nokta özelliklerine sahiptir denir.

4.3. Adq'nun Lie Grup Etkisi

Ad dönüşümü q bir kuaterniyon olmak üzere tanımlanacaktır. Böylece, kuaterniyonlar hakkında temel bilgiler anlatılarak başlanacaktır.

4.3.1. Kuaterniyonlar

$\mathbb{R}^3$ uzayının standart bazı $\{e_1, e_2, e_3\}$ olmak üzere, K cümlesini

$$K = \{Q | Q = d.1 + a.e_1 + b.e_2 + c.e_3 \text{ } a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

olarak tanımlansın.

K cümlesi üzerinden $\oplus$: toplama ve $\odot$: skaler ile çarpma işlemleri şöyle tanımlanır.

Bir Q elemanı

$$Q = d.1 + a.e_1 + b.e_2 + c.e_3$$

$$Q = S_q + V_q, \quad S_q = d, V_q = a.e_1 + b.e_2 + c.e_3$$

olarak yazılabilir.

$$P + Q = (S_p + S_q) + (V_p + V_q)$$

$$\lambda \odot Q = \lambda S_q + \lambda V_q$$

Bu işlemle birlikte $(K, \oplus, (\mathbb{R}, +, \cdot), \odot)$ sistemi bir vektör uzayıdır (Kuiper, 1998).

4.3.1.2. Tanım: $q_1, q_2 \in K$, $q_1 = S_{q_1} + V_{q_1}$, $q_2 = S_{q_2} + V_{q_2}$

olmak üzere ; $\otimes$

$$q_1 \otimes q_2 = S_{q_1} \cdot S_{q_2} + S_{q_1} \cdot V_{q_2} + S_{q_2} \cdot V_{q_1} - \langle V_{q_1}, V_{q_2} \rangle + V_{q_1} \times V_{q_2}$$

şeklinde tanımlı işleme kuaterniyon çarpımı, bu işlemle birlikte $(K, \otimes)$ nun her bir elemanına bir kuaterniyon denir.

K üzerinde $\otimes$ çarpımı, $\{1, e_1, e_2, e_3\}$ sistemi üzerinden aşağıdaki tablo ile de verilebilir.

Bu çarpım tablosu kuaterniyonların Hamilton tarafından verilen ilk çarpım tablosudur.

$\otimes$	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	1	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	-1	e_3	$-e_2$
e_2	e_2	$-e_3$	-1	e_1
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	-1

Şekil 4. 3. Hamilton'un quaterniyon çarpım tablosu

$\otimes$ quaterniyon çarpımı, $\times$ vektörel çarpımın değişmeli olmaması sonucu değişmeli değildir. Değişim ancak q_1 ve q_2 quaterniyonların sırasıyla V_{q_1} ve V_{q_2} vektörel kısımların lineer bağımlı olması durumunda sağlanır.

4.3.1.3. Tanım: $q \in K$ quaterniyonu için,

Eşlenik: $E_q = S_q - V_q$,

Normu: $N_q = q \otimes E_q$

İnversi: $q^{-1} = \frac{E_q}{N_q}$

olarak tanımlanır (Brickell ve Clark, 1970).

4.3.1.4. Örnek: K quaterniyonlar cümlesi üzerinde Lie grubu ve Lie cebiri yapıları:

$$\psi: K \rightarrow \mathbb{R}^4$$

$$q \rightarrow \psi(q) = (a_0, a_1, a_2, a_3), \quad q = a_0 e_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$$

ile verilen ψ dönüşümü 1:1 ve örtendir. K ile $\mathbb{R}^4$ ün noktaları 1:1 tekabül içindedir.

$$K_0 = K - \{0, 0, 0, 0\}$$

cümlesi $\otimes$ quaterniyon çarpımına göre bir gruptur. Ayrıca $K_0, \mathbb{R}^4$ ün açık alt manifoldu yapısıyla verilebilir.

$$K_0 \times K_0 \rightarrow K_0$$

$$q_1 \otimes q_2 = S_{q_1} \cdot S_{q_2} + S_{q_1} \cdot V_{q_2} + S_{q_2} \cdot V_{q_1} - \langle V_{q_1}, V_{q_2} \rangle + V_{q_1} \times V_{q_2}$$

işlemi, diferensiyellenebilir işlemlerin bir lineer birleşimi olduğundan diferensiyellenebilirdir. Sonuç olarak K_0 bir Lie grubudur.

K_0 in bir x noktasındaki tanjant uzayı $T_x K_0$ olsun.

$$J_* : K \rightarrow T_x K_0$$

$$q = a_0 e_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 \rightarrow \sum_{i=0}^3 a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \downarrow_x$$

dönüşümü bir vektör uzayı olduğu aşıkardır. $q \in K$ belli bir eleman olmak üzere, $x \in K_0$ için

$$X(x) = J_*(xq)$$

eşitliği ile tanımlı X , K_0 üzerinde bir vektör alanıdır. Ayrıca $q \in K_0$ ile belli sol öteleme ile L_q ise;

$$L_{q^*}(Xx) = X(xq)$$

yazılabileceğinden X bir sol invaryant vektör alanıdır. Böylece elde edilen

$$\Lambda : K \rightarrow LK_0$$

$$x \rightarrow X = J_*(xq)$$

dönüşümü lineerdir. Çekirdeği $\{0\}$ uzayıdır.

K ve LK_0 aynı boyuta sahiptir. Böylece Λ bir lineer izomorfizimdir. Λ dönüşümün $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ sistemindeki değerleri

$$\Lambda(e_0) = J_*(xe_0) = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + x_4 \frac{\partial}{\partial x_4}$$

olarak hesaplanır. $J_*(xe_i)$ de x ile e_i arasındaki çarpım $\otimes$ kuaterniyon çarpımıdır. İşlemlerin yapılışına örnek olması için $\Lambda(e_1)$ i açıkça hesaplayalım. $\otimes$ çarpımı için kuaterniyonların çarpımı tablosu kullanılacaktır.

$$\Lambda(e_1) = J_*(x \otimes e_1) = -x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_4 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_4}$$

$$\Lambda(e_2) = J_*(xe_2) = -x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_4 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_4}$$

$$\Lambda(e_3) = J_*(xe_3) = -x_4 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_4}$$

olur (Brickell ve Clark, 1970).

Konu itibariyle ilgi alanımızın içinde olan kısım, birim kuaterniyonlardır.

$$q \in K, \quad q = de_0 + ae_1 + be_2 + ce_3$$

Kuaterniyonu için q_0 'ı hesaplayalım.

$$N_q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

dir.

$$q_0 = \frac{q}{\sqrt{N_q}}$$

idi. Böylece

$$\begin{aligned} q_0 &= \frac{q}{\sqrt{N_q}} = \frac{d}{\sqrt{N_q}} e_0 + \frac{ae_1 + be_2 + ce_3}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}} \\ &= \frac{d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}} + \frac{ae_1 + be_2 + ce_3}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \cdot \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}} \\ &\quad -1 \leq \frac{d}{\sqrt{N_q}} \leq 1 \end{aligned}$$

olduğundan

$$\vec{S}_0 = \frac{ae_1 + be_2 + ce_3}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

birim vektörüne q_0 birim kuaterniyonun ekseni denir.

4.3.1.5. Özellik: K üzerinde aynı eksene sahip olmak bir denklik bağıntısıdır.

K kuaterniyonlar cümlesinin

$$J = \{q \mid Nq = 1, q \in K\}$$

alt cümlesini ele alalım. J birim kuaterniyonlar cümlesidir.

$$q = a_0e_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$$

için

$$N(q) = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

dir. $\mathbb{R}^4$ te birim hiper küre S^3 ise;

$$\begin{aligned}\Phi: J &\rightarrow S^3 \\ q &\rightarrow \Phi(q) = (a_0, a_1, a_2, a_3)\end{aligned}$$

dönüşümü 1:1 karşılık gelmektedir. S^3 , $\mathbb{R}^4$ 'ün diferensiyellenebilir regüler alt manifolddur.

Böylece $J \subset K$ regüler alt manifold yapısıyla aynıdır.

$\forall p, q \in K$ için

$$N(p \otimes q) = N(p).N(q)$$

J 'de $\otimes$ işlemi kapalıdır. J , $\otimes$ işlemine göre gruptur ve grubun birim elemanı $e_0 = (1, 0, 0, 0)$ dır. $J \subset K$ grup yapısına sahip regüler alt manifoldu olduğundan bir Lie alt grubu dolayısıyla bir Lie grubudur. J birim kuaterniyonlar Lie grubu kinematik açıdan önemlidir. Özellikle $\text{ad}J$, $\mathbb{R}^3$ deki dönmeleri karakterize etmeleri açısından uygulamada değişik teknikler vermeyi mümkün kılar.

J birim kuaterniyonlar Lie grubunun Lie cebiri.

$$J = \{q \mid q = a_0 e_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3\}$$

cümlesi $\otimes$ işlemine göre bir gruptur. J 'nin birim elemanı $e_0 = (1, 0, 0, 0)$ dir. $\dim J = 3$ 'tür

$J, \mathbb{R}^4$ 'deki S^3 birim hiperküreyle 1:1 tekabül içindedir.

$$\alpha(0) = e$$

$$a_0(0) = 1$$

$$a_i(0) = 0 \quad 1 \leq i \leq 3$$

olacak şekilde J üzerinde bir α eğrisi

$$\begin{aligned}\alpha: I \subset \mathbb{R} &\rightarrow J \\ t &\rightarrow \alpha(t)\end{aligned}$$

$$\alpha(t) = a_0(t)e_0 + a_1(t)e_1 + a_2(t)e_2 + a_3(t)e_3$$

olsun $\alpha(t) \in J$ den dolayı,

$$\sum_{j=0}^3 a_j(t)^2 = 1$$

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{j=0}^3 a_j(t)^2 \right) = \frac{d}{dt} 1$$

$$\sum_{j=0}^3 a_j(t)' a_j(t) = 0$$

dir. $t = 0$ için

$$\sum_{j=0}^3 a_j(0)' a_j(0) = 0$$

ve

$$a_1(0) = a_2(0) = a_3(0) = 0$$

den dolayı $a_0'(0) = 0$ elde edilir. O halde birim noktadaki tanjant uzayda $a_0'(t)$ 'den bileşen bulunmamaktadır.

Böylece e noktasındaki tanjant uzayının vektörleri,

$$\eta = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \eta_3 e_3$$

formundaki vektörlerle inşa edilebilir. Şimdi J üzerinde tanımlı sol invaryant olan vektör alanı $X_e = \eta$ şeklindedir.

J üzerinde bir $\beta(t)$ eğrisini,

$$\beta(0) = e_0$$

$$\beta(0)' = \eta$$

olarak seçelim.

$$q \in J, q = a_0 e_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 = S_q + V_q$$

ve $\eta \in T_e J$ belli bir eleman olmak üzere,

$$X(q) = (L_q)_*(\eta)$$

J üzerinde bir sol invaryant vektör alanıdır. Ayrıca

$$\begin{aligned} (L_q)_*(\eta) &= (L_q(\beta))_* \downarrow_{t=0} = (q \otimes \beta)' \downarrow_{t=0}, \quad \beta'(0) = \eta \\ &= (S_q + V_q) \otimes (S_\beta + V_\beta)_* \downarrow_{t=0} \\ &= (S_q S_\beta + S_q V_\beta + S_\beta V_q - \langle V_q, V_\beta \rangle + V_q \times V_\beta)_* \downarrow_{t=0} \\ &= (S_q S'_\beta + S_q V'_\beta + S_\beta V_q - \langle V_q, V'_\beta \rangle + V_q \times V'_\beta) \downarrow_{t=0} \\ &= (0 + S_q \eta + 0 - \langle V_q, \eta \rangle + V_q \times \eta) \downarrow_{t=0} \\ &= q \otimes \eta \end{aligned}$$

dir. Böylece $X_L(J)$ 'nin bir bazı,

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right\}$$

$T_q J$ 'nin standart bazı olmak üzere $X_i, 1 \leq i \leq 3$

$$X_i \downarrow_q = \frac{\partial}{\partial x_i} \downarrow_q \quad N(q) = 1$$

olarak tanımlansın. X_i 'lerin e_1, e_2, e_3 deki değerleri hesaplanırsa,

$$X_1 = -x_1 \frac{\partial}{\partial x_0} + x_0 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$X_2 = -x_2 \frac{\partial}{\partial x_0} - x_0 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_0 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$X_3 = -x_3 \frac{\partial}{\partial x_0} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_0 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

elde edilir. X_1 in hesabını açıkça yapalım.

$$X_1 \downarrow_q = q \otimes e_1, \quad q = a_0 e_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$$

$$q \otimes e_1 = (a_0 e_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3) \otimes e_1$$

$$= (a_0 e_0 e_1 + a_1 e_1 e_1 + a_2 e_2 e_1 + a_3 e_3 e_1)$$

$$= a_0 e_1 - a_1 e_0 - a_2 e_3 + a_3 e_2$$

$$= -a_1 e_0 + a_0 e_1 + a_3 e_2 - a_2 e_3$$

ve q 'dan bağımsız olarak koordinat fonksiyonları cinsinden

$$X_1 = -x_1 \frac{\partial}{\partial x_0} + x_0 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

yazılabilir. Dikkat edilirse J 'nin Lie cebiri K 'nın pür imajiner kısmına ait sol invaryant vektör alanı ile verilir.

Şimdi $X_L(J)$ 'nin üzerindeki $[,]$ Lie çarpımı $\{X_1, X_2, X_3\}$ bazı cinsinden hesaplanabilir.

$$[X_1, X_2] = 2X_3$$

$$[X_2, X_3] = 2X_1$$

$$[X_3, X_1] = 2X_2$$

olduğunu görmek kolaydır. Örneğin ;

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] &= X_1 \otimes X_2 - X_2 \otimes X_1 \\ &= (S_{X_1} S_{X_2} - S_{X_1} V_{X_2} + S_{X_2} V_{X_1} - \langle V_{X_1}, V_{X_2} \rangle + V_{X_1} \times V_{X_2}) \\ &\quad - (S_{X_2} S_{X_1} - S_{X_2} V_{X_1} + S_{X_1} V_{X_2} - \langle V_{X_2}, V_{X_1} \rangle + V_{X_2} \times V_{X_1}) \\ &= V_{X_1} \times V_{X_2} - V_{X_2} \times V_{X_1} = 2(V_{X_1} \times V_{X_2}) \\ &= 2(V_{X_1} \times V_{X_2})_{\text{mod } \mathbb{R}} = 2X_3 \downarrow_{\text{mod } \mathbb{R}} \end{aligned}$$

$X_L J$ üzerindeki bu çarpım $LJ (= T_e J)$ uzayına taşınırsa LJ de reel kısım olmayacağından

$$X_1 \downarrow_{e_0} = e_1, X_2 \downarrow_{e_0} = e_2, X_3 \downarrow_{e_0} = e_3$$

olacağından; LJ deki $[,]$ çarpımı

$$[e_1, e_2] = 2e_3$$

$$[e_2, e_3] = 2e_1$$

$$[e_3, e_1] = 2e_2$$

bazı vektörleri cinsinden bulunur.

4.4. Bilineer Form

4.4.1. Tanım: V, F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun,

$$B: V \times V \rightarrow F$$

- 1) $B(v_1 + v_2, w) = B(v_1, w) + B(v_2, w)$, $\forall v_1, v_2, w \in V$ için
- 2) $B(v, w_1 + w_2) = B(v, w_1) + B(v, w_2)$, $\forall w_1, w_2, v \in V$ için
- 3) $B(av, w) = aB(v, w)$, $\forall v, w \in V, a \in F$ için
- 4) $B(v, aw) = aB(v, w)$, $\forall v, w \in V, a \in F$ için

koşullarını sağlıyorsa B dönüşümüne V vektör uzayı üzerinde bilineer form denir (Lipschutz, 1968; Hoffman, Kunze, 1971).

4.4.2. Tanım: B bilineer form eğer; $\forall v, w \in V$ için

$$B(v, w) = B(w, v)$$

oluyorsa B 'ye simetrik bilineer form denir (Lipschutz, 1968; Hoffman, Kunze, 1971).

V, F cismi üzerinden bir vektör uzayı, V 'nin regüler lineer dönüşümlerin bir alt grubu G olsun. V üzerinde verilen simetrik bilineer form B olmak üzere

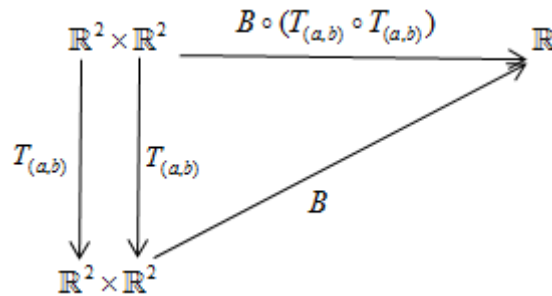
$$\forall g \in G, \forall u, v \in V$$

için

$$B(u, v) = B(g(u), g(v))$$

eşitliği doğru ise B ye G altında invarianttır denir

4.4.3. Örnek:



$T_{(a,b)}$ bir vektörü (a,b) kadar ötelenmesidir.

$$B = \|x\| + \|y\|$$

$$x, y \in \mathbb{R}^2 \text{ ve } x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$$

$$T_{(a,b)}(x) = T_{(a,b)}(x_1, x_2) = (x_1 + a, x_2 + b)$$

$$T_{(a,b)}(0) = T_{(a,b)}(0, 0) = (0 + a, 0 + b)$$

$$x' = T_{(a,b)}(x) - T_{(a,b)}(0) = [(x_1 + a, x_2 + b) - (a + 0, b + 0)] = (x_1, x_2)$$

$$T_{(a,b)}(y) = T_{(a,b)}(y_1, y_2) = (y_1 + a, y_2 + b)$$

$$T_{(a,b)}(0) = T_{(a,b)}(0, 0) = (0 + a, 0 + b)$$

$$y' = T_{(a,b)}(y) - T_{(a,b)}(0) = [(y_1 + a, y_2 + b) - (a + 0, b + 0)] = (y_1, y_2)$$

$$B(T_{(a,b)}(x), T_{(a,b)}(y)) = \|T_{(a,b)}(x)\| + \|T_{(a,b)}(y)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$$

$$B(x, y) = \|x\| + \|y\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$$

o halde

$$B(T_{(a,b)}(x), T_{(a,b)}(y)) = B(x, y)$$

oluğundan B , T (ötelemeler) altında invarianttır.

4.5. Killing Bilineer Form

G bir Lie grubu olsun. $\forall g \in G$ için $Intg$ dönüşümü

$$Intg : G \rightarrow G$$

$$x \rightarrow Intg(x) = gxg^{-1} \quad \forall g \in G$$

olarak tanımlasın. $\forall g \in G$ için $Intg$ dönüşümün sahip olduğu bazı özellikler şöyledir.

$Intg$ diferensiyellenebilirdir: G bir Lie grubu olduğundan grup işlemi diferensiyellenebilirdir. Dolayısıyla $Intg$ diferensiyellenebilirdir üstelik diffeomorfizmdir.

$Intg$ dönüşümü homomorfizmdir:

$$\forall g \in G, \forall x, y \in G \text{ için}$$

$$\begin{aligned} Intg(x.y) &= gxyg^{-1} = gxg^{-1}gyg^{-1} \quad , \quad g^{-1}g = e \\ &= Intg(x).Intg(y) \end{aligned}$$

Sonuç olarak, $Intg$ bir C^∞ Lie grubu izomorfizmidir. $e \in G$ birim eleman olmak üzere,

$$(Intg)(e) = geg^{-1} = gg^{-1} = e$$

böylece ;

$$(Intg)_* \downarrow_e : T_e G \rightarrow T_e G$$

dönüşümü tanımlıdır. $(Intg)_*$ bir lineer izomorfizmdir. $(Intg)_* \downarrow_e$ yerine adg notasyonu kullanılacaktır. Böylece

$$adg : T_e G \rightarrow T_e G$$

$$adg = (L_g \circ R_{g^{-1}})_{*e}$$

4.5.1. Tanım: $ad : G \rightarrow L(T_e G)$, $g \rightarrow adg$

$$adg : \Omega \rightarrow \Omega$$

şeklinde belirli olan ad dönüşümüne G Lie grubunun adjoint (ek) gösterimi denir ($L(T_e G)$ ile $T_e G$ den $T_e G$ ' ye olan bütün lineer dönüşümlerin cümlesi Ω , G ' nin Lie cebiridir) (O' Neil, 1983).

4.5.2. Teorem: ad dönüşümü için aşağıdaki önermeler doğrudur.

- 1) $ad(g.h) = adg.adh$, $\forall g, h \in G$
- 2) $adg[X_1, X_2] = [adgX_1, adgX_2]$ $\forall X_1, X_2 \in \Omega$

İspat: $adg = (Intg)_* \downarrow_e$ ve ayrıca $Intg = L_g \circ R_{g^{-1}}$ dir. Üstelik $\forall g_1, g_2 \in G$ için

$$L_{g_1} \circ R_{g_2} = R_{g_2} \circ L_{g_1}$$

yazılabilir. Böylece

$$\begin{aligned}
 1) \quad ad(gh) &= (Int(gh))_* \downarrow_e = (L_{gh} \circ R_{(gh)^{-1}})_* \downarrow_e \\
 &= (L_g \circ L_h \circ R_{h^{-1}} \circ R_{g^{-1}})_* \downarrow_e \\
 &= (L_g \circ R_{g^{-1}} \circ L_h \circ R_{h^{-1}})_* \downarrow_e \\
 &= (L_g \circ R_{g^{-1}})_* \downarrow_e \circ (L_h \circ R_{h^{-1}})_* \downarrow_e \\
 &= adg.adh
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad (adg[X_1, X_2]) &= (Intg)_* \downarrow_e ([X_1, X_2]) = (L_g \circ R_{g^{-1}})_* \downarrow_e ([X_1, X_2]) \\
 &= (g[X_1, X_2]g^{-1})_* \downarrow_e = ([gX_1g^{-1}, gX_2g^{-1}])_* \downarrow_e \\
 &= ((gX_1g^{-1})(gX_2g^{-1}))_* \downarrow_e - ((gX_2g^{-1})(gX_1g^{-1}))_* \downarrow_e \\
 &= (L_g \circ R_{g^{-1}})_* \downarrow_e (X_1).(L_g \circ R_{g^{-1}})_* \downarrow_e (X_2) \\
 &\quad - (L_g \circ R_{g^{-1}})_* \downarrow_e (X_2).(L_g \circ R_{g^{-1}})_* \downarrow_e (X_1) \\
 &= adg(X_1).adg(X_2) - adg(X_2).adg(X_1) \\
 &= [adgX_1, adgX_2]
 \end{aligned}$$

olur.

4.5.3. Örnek: $G = E^2 - \{(0, x_2) | x_2 \in \mathbb{R}\}$ şeklinde verilsin,

$$\begin{aligned}
 x \bullet y &= (x_1, x_2) \bullet (y_1, y_2) \\
 &= (x_1y_1, x_1y_2 + x_2y_1)
 \end{aligned}$$

G bir Lie grubudur, G Lie grubunun brim elemanı $(1, 0)$, herhangi bir $x \in G$ nin inversi

$$x^{-1} = \left(\frac{1}{x_1}, -\frac{x_2}{x_1^2} \right)$$

olarak hesaplanır. G Lie grubunun ad gösterimi

$$\begin{aligned} ad : G &\rightarrow L(T_e G) \\ g &\rightarrow adg \quad , \quad adg = (Intg)_{*e} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanmış idi ve

$$(Intg)_{*e}(X) = (L_{g*} \circ R_{g^{-1}}) \downarrow_e (X)$$

dir. Eğer $\frac{df}{dt} \downarrow_{t=0} = X \in T_e G$ olan bir eğri $f(t) \in G$ ise

$$(L_{g*} \circ R_{g^{-1}}) \downarrow_e (X) = (L_g \circ R_{g^{-1}} \circ f(t))' \downarrow_{t=0}$$

olacağından, önce $(L_g \circ R_{g^{-1}} \circ f)(t) = gf(t)g^{-1}$ hesaplanır, türevinin $t=0$ değeri

$(Intg)_{*e}(X)$ dir. Ayrıca

$$adg : T_e G \rightarrow T_e G$$

lineer dönüşümün matrisini bulmak çözüm için yeterlidir.

$T_e G = \mathbb{R}^2 \downarrow_0$ uzayının standart bazı $\{e_1, e_2\}$ ile gösterilsin.

$g = (x_1, x_2) \in G$ için,

$$gf(t)g^{-1} = (x_1, x_2)(t, f(t))\left(\frac{1}{x_1}, -\frac{x_2}{x_1^2}\right)$$

$$= (x_1 t, x_1 \cdot f(t) + x_2 t) \left(\frac{1}{x_1}, -\frac{x_2}{x_1^2} \right)$$

$$= \left(x_1 t \frac{1}{x_1}, -x_1 t \cdot \frac{x_2}{x_1^2} + \frac{x_1 \cdot f(t) + x_2 t}{x_1} \right)$$

$$= \left(t, -t \cdot \frac{x_2}{x_1} + f(t) + \frac{x_2 t}{x_1} \right)$$

$$\frac{d}{dt}(gf(t)g^{-1}) = \frac{d}{dt} \left(t, -t \cdot \frac{x_2}{x_1} + f(t) + \frac{x_2 t}{x_1} \right)$$

$$= (1, f'(t))$$

$$\frac{d}{dt}(gf(t)g^{-1}) \downarrow_{t=0} = (1, f(0))$$

şeklinde olur.

4.5.4. Tanım: G bir Lie grubu, LG G 'nin Lie cebiri olsun. LG üzerindeki bir B simetrik bilineer form adG altında invaryant ise B 'ye G altında invaryanttır denir (Kobayashi ve Nomizu, 1963).

4.5.5. Tanım: L bir Lie cebiri olsun. $X \in L$ belli bir eleman olmak üzere;

AdX dönüşümü

$$AdX : L \rightarrow L$$

$$Y \rightarrow AdX(Y) = [X, Y]$$

olmak üzere

$$K(X, Y) = Tr(AdX \cdot AdY)$$

olarak tanımlı forma L üzerinde tanımlı Killing bilineer form denir.

$$K(X, Y),$$

$$AdX \cdot AdY : L \rightarrow L$$

$$Z \rightarrow (AdX \cdot AdY)(Z) = [X, [Y, Z]]$$

lineer dönüşümün izi(trace) dir. $AdX \cdot AdY$ dönüşümün matrisi AdX ve AdY dönüşümlerin matrislerin çarpımıdır.

4.5.6. Teorem: $X_1, X_2 \in L$ için

$$Ad(X_1 + X_2)(Y) = [X_1 + X_2, Y] = [X_1, Y] + [X_2, Y]$$

$$= Ad(X_1)(Y) + Ad(X_2)(Y)$$

$$= (AdX_1 + AdX_2)(Y)$$

$$\Rightarrow Ad(X_1 + X_2) = Ad(X_1) + Ad(X_2)$$

böylece,

$$K(X_1 + X_2, Y) = Tr(Ad(X_1 + X_2)Ad(Y))$$

$$= Tr(Ad(X_1)Ad(Y) + Ad(X_2)Ad(Y))$$

$$= Tr(Ad(X_1)Ad(Y)) + Tr(Ad(X_2)Ad(Y))$$

$$= K(X_1, Y) + K(X_2, Y)$$

ve benzer işlemler ;

$$K(\lambda X_1, Y) = \lambda K(X_1, Y)$$

$$K(X_1, Y_1 + Y_2) = K(X_1, Y_1) + K(X_1, Y_2)$$

$$K(X, \lambda Y) = \lambda K(X, Y)$$

eşitlikleri gösterilebilir.

4.5.7. Örnek: (LJ nin Killing formu)

Bütün pür imajiner kuaterniyonların vektör uzayı $\mathbb{R}^3$ uzayı ile izomorfiktir. Ayrıca pür imajiner kuaterniyonları için;

$$X \otimes Y = -\langle X, Y \rangle + X \times Y$$

idi.

$$X, Y \in LJ, \quad X = \sum_{i=1}^3 a_i e_i, \quad Y = \sum_{i=1}^3 b_i e_i$$

verilsin.

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} (AdX \cdot AdY)(Z) &= X \times Y \times Z \\ &= \langle X, Z \rangle Y - \langle X, Y \rangle Z \end{aligned}$$

dönüşümünün $\{e_1, e_2, e_3\}$ bazındaki matrisleri hesaplayalım.

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} (AdX \cdot AdY)(e_i) &= \langle X, e_i \rangle Y - \langle X, Y \rangle e_i \\ &= a_i Y - \langle X, Y \rangle e_i \end{aligned}$$

$$K(X, Y) = Tr(AdX \cdot AdY)$$

$AdX \cdot AdY$ matrislerin bileşenleri $[a_{ij}]$ ise;

$$a_{11} = \langle AdX \cdot AdY, e_1 \rangle = \langle a_1 Y - \langle X, Y \rangle e_1, e_1 \rangle = a_1 b_1 - \langle X, Y \rangle$$

$$a_{22} = \langle AdX \cdot AdY, e_2 \rangle = \langle a_2 Y - \langle X, Y \rangle e_2, e_2 \rangle = a_2 b_2 - \langle X, Y \rangle$$

$$a_{33} = \langle AdX \cdot AdY, e_3 \rangle = \langle a_3 Y - \langle X, Y \rangle e_3, e_3 \rangle = a_3 b_3 - \langle X, Y \rangle$$

dolayısıyla,

$$\frac{1}{4} K(X, Y) = \sum_{i=1}^3 a_i b_i - 3 \langle X, Y \rangle$$

$$= \langle X, Y \rangle - 3 \langle X, Y \rangle = -2 \langle X, Y \rangle$$

bulunur ki, bu K Killing formunun LJ de

$$K(X, Y) = -8 \langle X, Y \rangle$$

ile belli iç çarpım fonksiyonunun bir katı olduğunu ifade eder.

$$K = -8 \langle, \rangle$$

yazılabilir.

Dikkat edilirse; K Killing formu adG altında invaryant idi. K nın $\langle, \rangle$ ile denk olduğu biliniyor. O halde J Lie grubunun adjoint temsili iç çarpımı korur.

$$ad : J \rightarrow L(J, J)$$

$$q \rightarrow adq$$

$$adq = L_{q_*} \circ R_{q^{-1}*}$$

dönüşümü $\mathbb{R}^3$ te iç-çarpımı koruyan dönüşümdür. Dolayısıyla $adJ \subset SO(3)$ dir. $\forall q \in J$ için adJ 'nin iç çarpımı koruması, adq 'nun bir dönme tanımlayacağına işaretler.

Şimdi adq 'nun tanımlayacağı dönmeyi, eksenini ve dönme açısını hesaplayalım.

4.5.8. Örnek: Her $q \in J$ normlu kuaterniyonu;

$$q = \cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha$$

olarak yazılabilir. $\varepsilon \in \mathbb{R}^3$ olup, $\varepsilon \in J$ alınabilir. Şimdi, $adq(\varepsilon)$ 'u hesaplayalım.

$$adq(\varepsilon) = (\cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha) \otimes \varepsilon \otimes (\cos \alpha - \varepsilon \sin \alpha)$$

$$= (\cos \alpha \cdot \varepsilon + \varepsilon \otimes \varepsilon \sin \alpha) \otimes (\cos \alpha - \varepsilon \sin \alpha)$$

$$= (\cos^2 \alpha \cdot \varepsilon - \varepsilon \otimes \varepsilon \cos \alpha \sin \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \varepsilon \sin^2 \alpha)$$

$$= \cos^2 \alpha \cdot \varepsilon + \sin^2 \alpha \cdot \varepsilon$$

$$= \varepsilon$$

O halde adq dönme eksenini q 'nın eksenini olan ε eksenini invaryant bırakır. $\mathbb{R}^3$ te pozitif yönlü bir $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ oto normal sistemi $\varepsilon = \varepsilon_1$ olacak şekilde inşa edilsin.

$$adq(\varepsilon_2) = (\cos \alpha + \varepsilon_1 \sin \alpha) \otimes \varepsilon_2 \otimes (\cos \alpha - \varepsilon_1 \sin \alpha)$$

$$= (\cos \alpha \cdot \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_2 \sin \alpha) \otimes (\cos \alpha - \varepsilon_1 \sin \alpha)$$

$$\begin{aligned}
&= (\cos \alpha \cdot \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \sin \alpha) \otimes (\cos \alpha - \varepsilon_1 \sin \alpha) \\
&= (\cos^2 \alpha \cdot \varepsilon + \varepsilon_3 \cos \alpha \sin \alpha - \varepsilon_2 \otimes \varepsilon_1 \sin \alpha \cos \alpha - \varepsilon_3 \otimes \varepsilon_1 \sin^2 \alpha) \\
&= \cos^2 \alpha \cdot \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \cos \alpha \sin \alpha + \varepsilon_3 \sin \alpha \cos \alpha - \varepsilon_2 \sin^2 \alpha \\
&= \varepsilon_2 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + \varepsilon_3 (\cos \alpha \sin \alpha) \\
&= \varepsilon_2 \cos 2\alpha + \varepsilon_3 \sin 2\alpha \\
&adq(\varepsilon_3) = -\varepsilon_2 \sin 2\alpha + \varepsilon_3 \cos 2\alpha \\
&adq(\varepsilon_1) = \varepsilon_1
\end{aligned}$$

olur. Böylece adq ε_1 dönme eksenli, 2α dönme açılı bir dönmedir.

$$\begin{aligned}
\det[\varepsilon_1, \varepsilon_2, adq(\varepsilon_2)] &= \det[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_2 \cos 2\alpha + \varepsilon_3 \sin 2\alpha] \\
&= \det[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_2 \cos 2\alpha] + \det[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \sin 2\alpha] \\
&= \sin 2\alpha
\end{aligned}$$

ve $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ için $\sin 2\alpha > 0$ olduğundan, adq yön koruyan bir dönüşümdür. Ayrıca açığı koruduğundan determinantı +1 dir (yön koruduğundan -1 olamaz). Sonuç olarak $adq \in SO(3)$ dür. Dolayısıyla adJ ile $SO(3)$ izomorfiktir. Ancak

$$ad : J \rightarrow adJ$$

dönüşümü, α ve $-\alpha$ anı dönmeyi verdiği için 1:1 değildir.

adq için elde edilen dönmeye ilgili kavramları şimdi herhangi eksen ve açılara taşıyıp dönmeye ait matris formunu hesaplayalım.

Bir L eksen etrafında α derecelik dönmeye ilgilendiğimizi varsayalım. L eksen üzerinde birim vektör ε ile gösterilirse, q kuaterniyonu

$$q = \cos \frac{\alpha}{2} + \varepsilon \sin \frac{\alpha}{2}$$

olarak ele alındığında adq aynı $R(L, \alpha)$ dönmesini verir. $R(L, \alpha)$ 'nın matrisini nasıl hesaplanacağını biliyoruz. Burada q kuaterniyonundan hareketle, ε ve α cinsinden $R(L, \alpha)$ 'nın matrisinin bir diğer başka yazılışının hesabını yapacağız. Dönme matrisi $[a_{ij}]_{3 \times 3}$ ve A_1, A_2, A_3 dönme matrisinin sütunları olsunlar, A_i sütunları, $adq(e_i)$, $1 \leq i \leq 3$ vektörünün sütun formudur. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
adq(e_1) &= (\cos \frac{\alpha}{2} + \varepsilon \sin \frac{\alpha}{2}) \otimes (e_1) \otimes (\cos \frac{\alpha}{2} - \varepsilon \sin \frac{\alpha}{2}) \\
&= (e_1 \cos \frac{\alpha}{2} + \varepsilon \otimes e_1 \sin \frac{\alpha}{2}) \otimes (\cos \frac{\alpha}{2} - \varepsilon \sin \frac{\alpha}{2}) \\
&= (e_1 \cos \frac{\alpha}{2} - \langle \varepsilon, e_1 \rangle \sin \frac{\alpha}{2} + \varepsilon \times e_1 \sin \frac{\alpha}{2}) \otimes (\cos \frac{\alpha}{2} - \varepsilon \sin \frac{\alpha}{2}) \\
&= (e_1 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - e_1 \otimes \varepsilon \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} - \langle \varepsilon, e_1 \rangle \sin \frac{\alpha}{2} (\varepsilon \times e_1) \sin \frac{\alpha}{2} \\
&\quad + \langle \varepsilon, e_1 \rangle \varepsilon \sin^2 \frac{\alpha}{2} + (\varepsilon \times e_1) \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - (\varepsilon \times e_1) \otimes \sin^2 \frac{\alpha}{2}) \\
&= (e_1 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \langle e_1, \varepsilon \rangle \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} - e_1 \times \varepsilon \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} - \langle \varepsilon, e_1 \rangle \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \\
&\quad + \langle \varepsilon, e_1 \rangle \varepsilon \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \varepsilon \times e_1 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - e_1 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \langle \varepsilon, e_1 \rangle \varepsilon \sin^2 \frac{\alpha}{2}) \\
&= e_1 (\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}) + 2\varepsilon \times e_1 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + \langle \varepsilon, e_1 \rangle \varepsilon \sin^2 \frac{\alpha}{2} \\
adq(e_1) &= e_1 \cos \alpha + \varepsilon \times e_1 \sin \alpha + (1 - \cos \alpha) \langle \varepsilon, e_1 \rangle \varepsilon \\
adq(e_2) &= e_2 \cos \alpha + \varepsilon \times e_2 \sin \alpha + (1 - \cos \alpha) \langle \varepsilon, e_2 \rangle \varepsilon \\
adq(e_3) &= e_3 \cos \alpha + \varepsilon \times e_3 \sin \alpha + (1 - \cos \alpha) \langle \varepsilon, e_3 \rangle \varepsilon
\end{aligned}$$

Böylece $[a_{ij}] = [A_j]$ matrisinin her bir a_{ij} bileşeni

$$a_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle \cos \alpha + (1 - \cos \alpha) \langle e_i, \varepsilon \rangle \langle \varepsilon, e_j \rangle + \langle \varepsilon \times e_i, e_j \rangle \sin \alpha$$

$$a_{ij} = \delta_{ij} \cos \alpha + (1 - \cos \alpha) \langle e_i, \varepsilon \rangle \langle \varepsilon, e_j \rangle + \langle \varepsilon_{ijk} e_i, e_j \rangle \sin \alpha$$

$$\varepsilon = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$

olmak üzere,

$$a_{ij} = \delta_{ij} \cos \alpha + (1 - \cos \alpha) x_i x_j + \varepsilon_{ijk} x_k \sin \alpha$$

elde edilir. a_{ij} bileşenleri açıkça hesaplanırsa aşağıdaki matris yazılabilir.

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} \cos \alpha + (1 - \cos \alpha) x_1^2 & (1 - \cos \alpha) x_1 x_2 - x_3 \sin \alpha & (1 - \cos \alpha) x_3 x_1 + x_2 \sin \alpha \\ (1 - \cos \alpha) x_1 x_2 + x_3 \sin \alpha & \cos \alpha + (1 - \cos \alpha) x_2^2 & (1 - \cos \alpha) x_3 x_2 - x_1 \sin \alpha \\ (1 - \cos \alpha) x_3 x_1 - x_2 \sin \alpha & (1 - \cos \alpha) x_2 x_3 + x_1 \sin \alpha & \cos \alpha + (1 - \cos \alpha) x_3^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix} = \cos \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (1 - \cos \alpha) \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 x_2 & x_3 x_1 \\ x_1 x_2 & x_2^2 & x_3 x_2 \\ x_3 x_1 & x_2 x_3 & x_3^2 \end{bmatrix} + \sin \alpha \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Böylece dönme matrisi olan $R = [a_{ij}]$ matrisi,

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^3 x_i e_i$$

nin bileşenleri ve α cinsinden verilmiş oldu.

$$M = [x_i, x_j] = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 x_2 & x_3 x_1 \\ x_1 x_2 & x_2^2 & x_3 x_2 \\ x_3 x_1 & x_2 x_3 & x_3^2 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[a_{ij}] = \cos \alpha I_{3 \times 3} + (1 - \cos \alpha) M + (\sin \alpha) N$$

matrisleri $R = [a_{ij}]$ nin yazılışına eşlik eden matrislerdir. M ve N tamamen

$$\varepsilon = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$

nun verilmesine bağlıdır.

$[a_{ij}]$ nin yazılışına ait bir örnek aşağıdaki gibi verilebilir.

4.5.9. Örnek: $Rot(L, \frac{\pi}{6}), L: x = y, z = 0$ dönmenin matrisini hesaplayalım. L 'deki birim

vektör,

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}} e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} e_2 + 0 e_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

dir. Buna göre

$$R = [a_{ij}] = \frac{\sqrt{2}}{2} I_3 + (1 - \sqrt{2}) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2+\sqrt{3} & 2-\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 2-\sqrt{3} & 2+\sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

dir. ε birim vektör değil ise,

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{\|\varepsilon\|}$$

ile aynı hesaplamalar yapılır. Bu durumda R nin ifadesi

$$R = [a_{ij}] = \cos \alpha I_{3 \times 3} + \frac{(1 - \cos \alpha)}{\|\varepsilon\|^2} M + \frac{\sin \alpha}{\|\varepsilon\|} N$$

şeklindedir.

$$J = \{q \mid q = a_0 e_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3, N(q) = 1, a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$$

Her $q \in J$ için adq lineer dönüşümüne karşılık gelen matris bir ortogonal matristir ve şu şekildedir.

$$adq \rightarrow \begin{bmatrix} a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 & 2(a_1 a_2 - a_0 a_3) & 2(a_0 a_2 + a_1 a_3) \\ 2(a_0 a_3 + a_1 a_2) & a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 & 2(a_2 a_3 - a_0 a_1) \\ 2(a_1 a_3 - a_0 a_2) & 2(a_0 a_1 + a_2 a_3) & a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 \end{bmatrix}$$

O halde $\forall q \in J$ için $adq \in SO(3)$ tür. Şimdi adq 'nun Lie grup etkisine bakalım.

M diferensiyellenebilir bir manifold ve adJ bir Lie grubu

$$\Phi : adJ \times M \rightarrow M$$

$$(adq, x) \rightarrow adq(x)$$

$$\Phi(adq_1, \Phi(adq_2, x)) = \Phi(adq_1 \cdot adq_2, x)$$

$$= adq_1(adq_2(x))$$

$$= (adq_1 \cdot adq_2)(x)$$

oluyorsa adq , M üstünde Lie transformasyon grubu olarak etki eder.

4.5.10. Örnek: Şimdi bir $q \in J$ sabit elemanı için adq nun $\mathbb{R}^3$ üzerinde bir Lie transformasyon grubu olarak etki edip etmediğini görelim.

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} e_2$$

adq_1 'e karşılık gelen matris

$$adq_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$q_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}e_0 + \frac{1}{\sqrt{3}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}e_3$$

adq_2 'ye karşılık gelen matris

$$adq_2 \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\Phi(adq_1, x) = adq_1(x)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ -x_3 \end{bmatrix}$$

$$\Phi(adq_2, adq_1(x)) = adq_2.adq_1(x)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ -x_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 \\ -\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 \\ \frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 \end{bmatrix}$$

şimdi

$$\Phi(adq_2.adq_1, x)$$

ifadesine bakalırsa, öncelikle

$$adq_2.adq_1$$

hesaplanırsa.

$$adq_2.adq_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\Phi(adq_2.adq_1, x) = adq_2.adq_1(x)$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 \\ -\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 \\ \frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 \end{bmatrix}$$

böylece

$$\Phi(adq_2, \Phi(adq_1, x)) = \Phi(adq_2.adq_1, x)$$

olduğundan adq , $\mathbb{R}^3$ üzerinde bir Lie transformasyon grubu olarak etki eder.

5. YÖRÜNGELER VE YÖRÜNGE OLUŞTURUCU LIE (ALT) GRUPLARIN BİRLİKTE İRDELENMESİ

Bir M manifoldu ve G Lie grubu verildiğinde

$$\phi: G \times M \rightarrow M$$

$$(g, m) \rightarrow \phi(g, m) = g.m$$

Lie transformasyon etkisinin tanımlı olduğunu varsayalım.

5.1. Tanım: Belirlenmiş bir $x \in M$ elemanı için

$$\{g.x | g \in G\} \subseteq M$$

alt cümlesine x in G altındaki yörüngesi denir ve $G(x)$ ile gösterilir (Brickell ve Clark, 1970).

Yörüngeler M nin geometrisindeki geometrik nesnelerdir. Her manifoldun geometrik ve diferensiyellenebilir yapı özellikleri birleştirildiğinde, geometrik her nesnenin diferensiyellenebilir formda olması gerekmez. Bu, üstünde diferensiyel analiz açısından bazı zorlukların var olduğu anlamındadır. Bu açıdan $G(x)$ diferensiyellenebilir özellikleri olan geometrik nesnelerdir.

Bazı Lie grupları da yapısal olarak geometrik bir formda düşünülebilir. Mesela

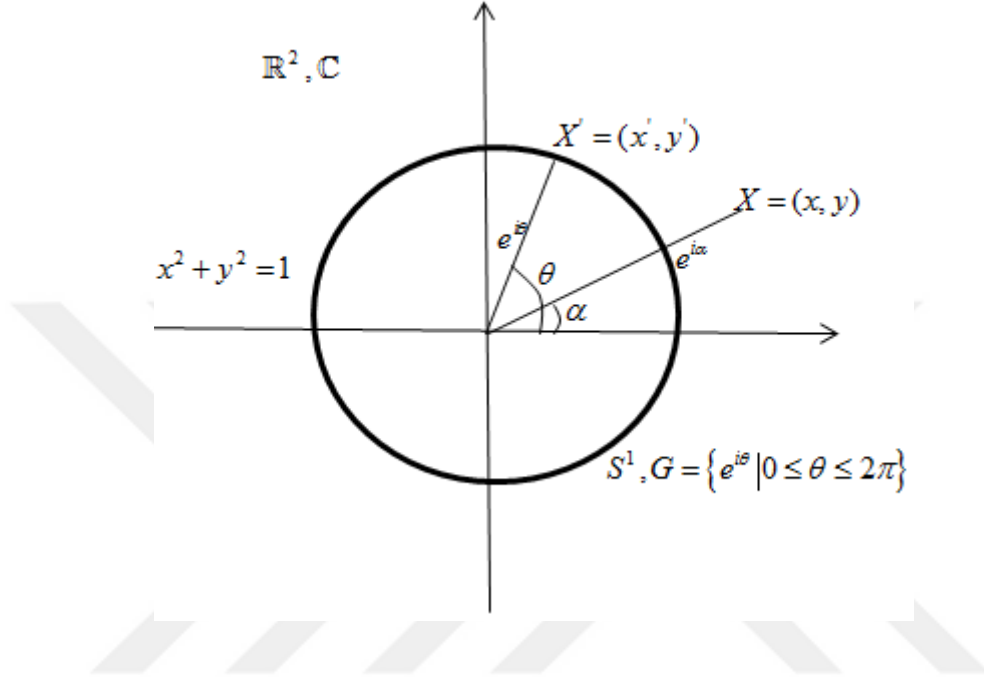
$$\{e^{i\theta} | 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

Lie grubu, geometrik olarak $\mathbb{R}^2$ de S^1 birim yarıçaplı çember olarak da ele alınabilir. Lie grubunun geometrik olarak çember temsili, Lie transformasyon grup etkisi altında yörüngelere taşınır ve yörüngeler geometrik yapı olarak çember formuna sahiptirler.

Tezin ve bu bölümün amacı bu türden ilgileri yani Lie grubunun geometrik formu ile yörüngelerin geometrik formları arasındaki ilgileri ve benzerlikleri irdelemektir. İlk irdeleme S^1 birim çemberi ile geometrik benzerliği olan Lie grubu için olacaktır.

5.2 Lemma: $\{e^{i\theta} | 0 \leq \theta \leq 2\pi\} = G$ Lie grubunun $\mathbb{R}^2$ üstündeki etkisi altında oluşan $S^1(x)$ yörüngeleri $S^1_{\|x\|}(0,0)$ çemberleridir.

İspat:



$X \in \mathbb{R}^2$ seçilen bir nokta ve polar koordinatları $(\alpha, \|X\|)$ ve üstel formu $\|X\|e^{i\alpha}$ olsun.

$$S^1 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

etkisi altında X in yörüngesi $S^1(X)$,

$$S^1(X) = \{\|X\|e^{i\theta}e^{i\alpha} | 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

dir ve yörünge,

$$S^1(X) = \{\|X\|e^{i\theta}e^{i\alpha} | 0 \leq \theta + \alpha \leq 2\pi + \alpha\}$$

ile belli olan $\|X\|$ yarıçaplı $(0,0)$ merkezli çemberdir.

Benzer yörüngeler $O(2) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ Lie transformasyon grubu etkisi ile de elde edilebilir. Böylece $O(2)$ ile S^1 Lie grupları, Lie transformasyon grup etkisi açısından eş tutulabilirler ve işlem yaparken biri diğerinin yerine kullanılabilir. Açık işlemler şu şekilde yazılabilir:

$$\forall A \in O(2) \text{ için } \exists \theta \in [0, 2\pi], \quad A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

yazılabilir. A için belli olan θ açısıyla, $e^{i\theta}$ mevcuttur ve $e^{i\theta}$, S^1 birim çemberi üstündedir.

Tersine $\forall (x, y) \in S^1$ için $\arctan \frac{y}{x} = \theta$ açısı tek türlü belirlidir ve böylece

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \in O(2)$$

ortogonal matrisi tek türlü olarak bellidir.

5.3. Örnek: S^1 in $\mathbb{R}^2$ deki $X=(1,3)$, $Y=(4,2)$ ve $Z=(-3,4)$ noktaları üzerindeki Lie transformasyon grubu olarak etkisinin m-file aşağıdaki şekilde verilmiştir. S^1 yerine $O(2)$ ortogonal matrisler cümlesi alınırsa,

a=15

axis([-a a -a a -a a])

for t=0:pi/80:2*pi

A=[cos(t) -sin(t); sin(t) cos(t)]

X=[1;3]

Y=[4;2]

Z=[-3;4]

B=A*X

C=A*Y

D=A*Z

plot(B(1),B(2),'r')

plot(C(1),C(2),'b')

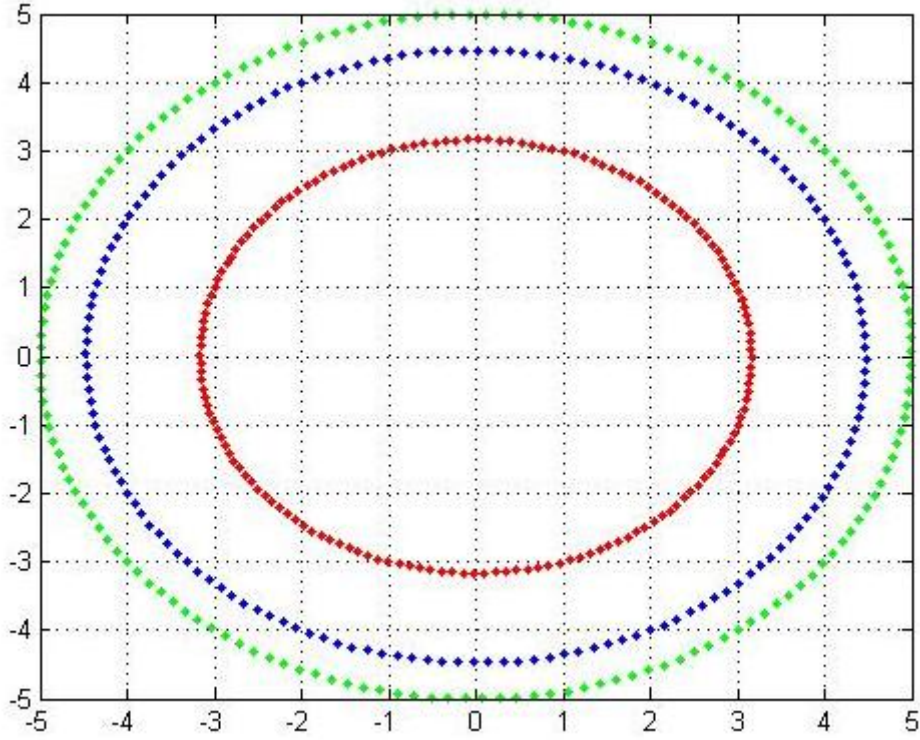
plot(D(1),D(2),'g')

hold on

grid on

pause(0.1)

end



Şekil 5. 1. $X=(1,3)$, $Y=(4,2)$, $Z=(-3,4)$ noktasının S^1 altında yörüngeleri.

$O(2)$ ile S^1 Lie grupları, Lie transformasyon grup etkisi açısından eş tutulabileceği yukarıda verilmişti ve verilen örnekte de S^1 birim çemberi yerine $O(2)$ ortogonal matrisler cümlesi alınmıştı. Şimdi verilecek olan örnekte de S^1 in $\mathbb{R}^2$ üstündeki Lie transformasyon grubu olarak doğrudan etkisi incelenilecektir.

5.4. Örnek: S^1 birim çemberi bir Lie grubudur ve S^1 in elemanları e^{it} , $t \in I \subset \mathbb{R}$ dir. Şimdi S^1 in $\mathbb{R}^2$ üzerindeki etkisi incelensin.

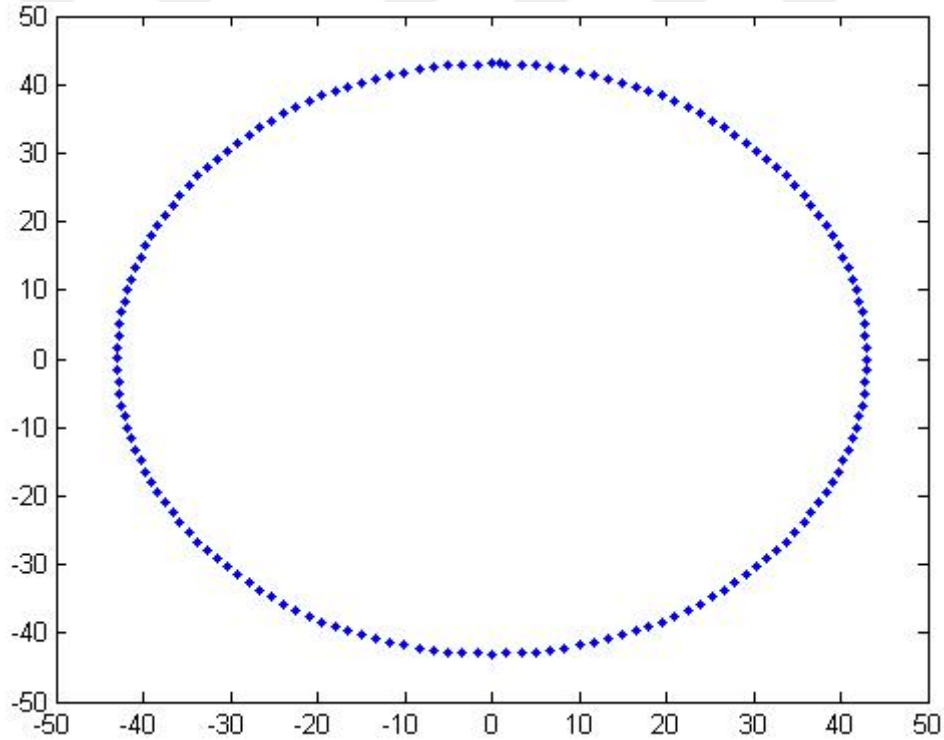
$$\varphi: S^1 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(e^{it}, x) \rightarrow x \cdot e^{it}, \quad x = (x_1, x_2)$$

şeklinde tanımlansın. S^1 in $x \in \mathbb{R}^2$ noktasındaki bu etkisi x 'in orijine olan uzaklığını yarıçap kabul eden çemberi verir. Eğer S^1 'i $\mathbb{R}^2$ nin tamamına etki ettirilir ise bu etki $\mathbb{R}^2$ deki çember ailesini verir. Bir başka gözlemle bu yörüngeler ailesi $\mathbb{R}^2$ 'nin merkezi $O = (0,0)$ yarıçapları $r \geq 0$ olan çemberlerle donanmış $\mathbb{R}^2$ dir.

Bu örnek için $\mathbb{R}^2$ deki $X = (8, 7)$ noktası Matlab da çizdirilsin.

```
for t=0:pi/80:2*pi
X=[8+7*i];
r=abs(X)
A=(r*cos(t)+r*sin(t)*j)
plot(A,'.b')
hold on
grid on
pause(0.1)
end
```



Şekil 5.2. $(8,7)$ noktasının S^1 altındaki görüntüsü.

$O(3)$ ortogonal matrisler Lie grubu ve $\mathbb{R}^3$ Lie grubunu ele alınsın. $\forall A \in O(3)$ ortogonal matrisi, Cayley formülü ile hesaplanabilecek olan bir eksen etrafında ve $\theta = \frac{1}{2} \arctan(\text{iz}(A))$ ile belli olan bir dönme tanımlıdır. $O(3)$ te üç dönme baz olma özelliğindedir. Bunlar x, y ve z eksenini etrafındaki dönmelerdir. Bunlar

$A(x, \alpha), A(y, \beta)$ ve $A(z, \theta)$ ile gösterilsin. Bu durumda $Sp\{A(x, \alpha), A(y, \beta), A(z, \theta)\} = O(3)$ yazılabilir.

$\mathbb{R}^3$ uzayı $Sp\{e_1, e_2, e_3\} = \mathbb{R}^3$ olarak ele alındığında $x \in \mathbb{R}^3$ için

$$x = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$$

tür. $\mathbb{R}^3$ te her doğru doğrultman vektörü ile bellidir. Temel üç eksen x – eksen, y – eksen ve z – eksenidir. Genelliği bozmayacağı için üç temel eksenden biri ve bu eksen etrafındaki dönme ele alınsın. Bu ikiliye silindirik yer değiştirme adı verilecektir.

5.5. Lemma: $A(z, \theta) \times z_{eksen} = D$ yer değiştirmesi altında her $X = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ noktasının yörüngesi, taban eğrisi $a^2 + b^2$ yarıçaplı çember olan dik dairesel silindirdir.

İspat:

$$D(X) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L(\theta) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a \cos \theta + b \sin \theta \\ -a \sin \theta + b \cos \theta \\ c + L(\theta) \\ 1 \end{bmatrix}, \quad L(\theta) = e \cdot \theta + f$$

$D(X)$ yörüngesi

$$D_{(x)}(\theta) = (a \cos \theta + b \sin \theta, -a \sin \theta + b \cos \theta, c + L(\theta))$$

dir. $z = 0$ için taban eğrisi $(a \cos \theta + b \sin \theta)^2 + (-a \sin \theta + b \cos \theta)^2 = a^2 + b^2$ yarıçaplı çemberdir.

$$\left\langle \frac{d}{d\theta} D_{(x)}(\theta), z \right\rangle$$

$$= \langle (-a \sin \theta + b \cos \theta, -a \cos \theta - b \sin \theta, L'(\theta)), (0, 0, 1) \rangle$$

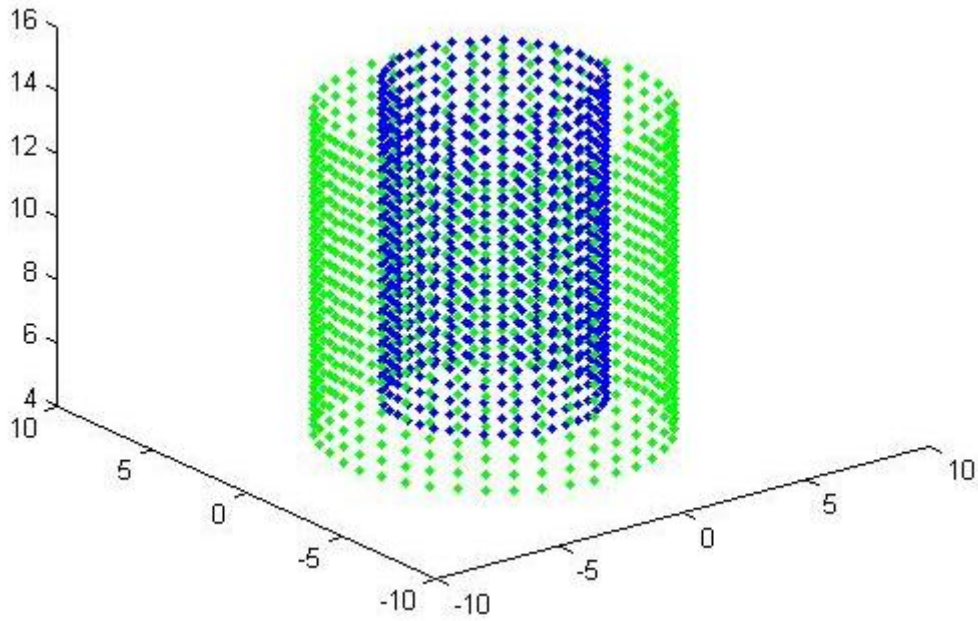
$$= L'(\theta)$$

ve $L'(\theta) = (e.\theta + f)' = e = sbt$

olduğundan $D(X)$ yörüngesi bir dik dairesel silindirdir.

Bu Lemma sayısal değerler verilerek Matlab da çizdirilen dik dairesel silindirin şekli ve bu şekli çizdiren m-file aşağıdaki şekilde verilebilir.

```
for t=0:pi/20:2*pi
for h=0:1/2:10
X=[3;5;4;1]
Y=[-2;-3;5;1]
A=[cos(t) -sin(t) 0 0;sin(t) cos(t) 0 0;0 0 1 h;0 0 0 1]
B=A*X
C=A*Y
plot3(C(1),C(2),C(3),'b')
plot3(B(1),B(2),B(3),'g')
hold on
pause(0.001)
end
end
```



Şekil 5. 3. $X=(3,4,5)$ ve $Y=(-2,-3,5)$ noktalarının yörüngeleri.

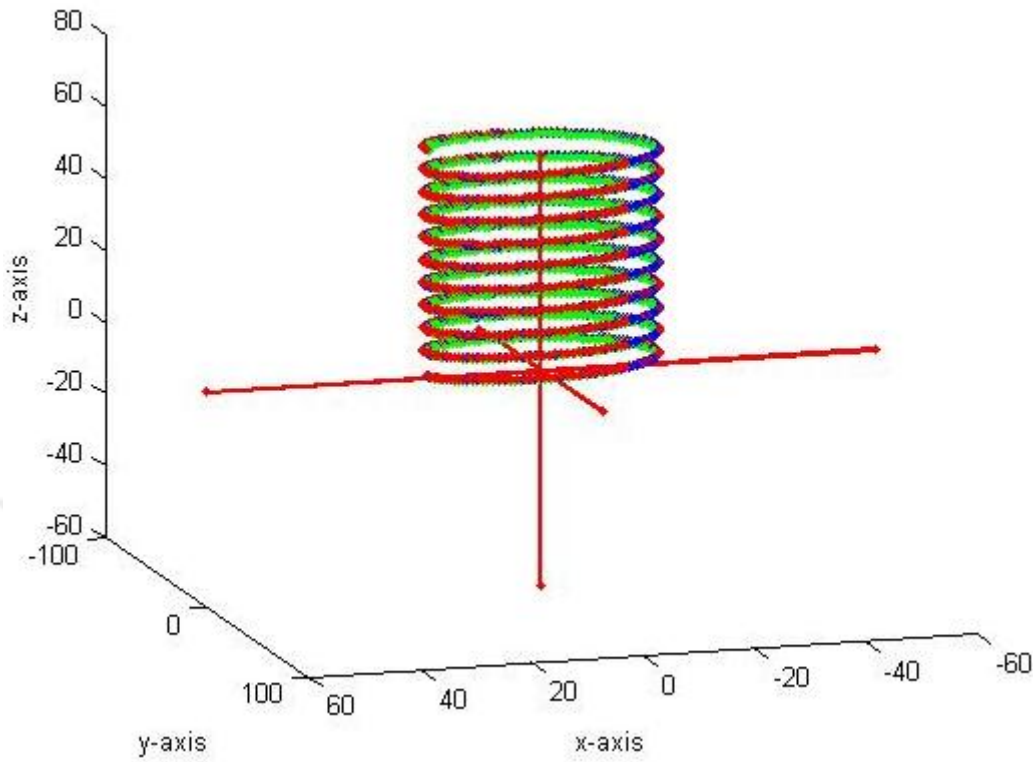
5.5. Örnek: $GL(3, \mathbb{R})$ Lie grubudur. $O(3, \mathbb{R})$, $GL(3, \mathbb{R})$ nin bir Lie alt grubudur.

$O(3, \mathbb{R})$ nin $\mathbb{R}^3$ üstündeki Lie grup etkisi şu şekilde tanımlansın.

$$\varphi: O(3) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Şeklinde tanımlansın. Burada $O(3) \times \mathbb{R}^3 = D$ ötelemeli dönme olarak alınsın. Bir $x \in \mathbb{R}^3$ noktasına bu ötelemeli dönme matrisi etki ettirilsin. Eğer alınan t öteleme vektörleri A ortogonal matrisinin eksenine paralel ise bu etkinin yörüngesi helis eğrisidir ve Matlab da bu eğriyi çizdiren komutlar aşağıda verilmiştir:

```
a=60
line([-a,a],[0,0],[0,0], 'Marker','.', 'LineStyle','-', 'color','r', 'linewidth',2)
line([0, 0],[-a,a],[0,0], 'Marker','.', 'LineStyle','-', 'color','r', 'linewidth',2)
line([0, 0],[0,0],[-a,a], 'Marker','.', 'LineStyle','-', 'color','r', 'linewidth',2)
xlabel('x-axis')
ylabel('y-axis')
zlabel('z-axis')
for t=0:pi/60:20*pi
a=0
b=0
c=1
X=[a;b;c;1]
x=20*cos(t)
y=20*sin(t)
z=t
Y=[0.75;0.75;0.75;1]
Z=[0.85;0.85;0.85;1]
tt= [0.35;0.35;0.35;1]
A=[(cos(t)+(1-cos(t))*(a^2)) ((1-cos(t))*(a*b)-(c)*(sin(t))) ((1-cos(t))*(c*a) +(
b*sin(t))) x;
(1-cos(t))*(a*b)+(c*sin(t)) cos(t)+(1-cos(t))*(b^2) (1-cos(t))*(c*b)-(a*sin(t)) y ;
(1-cos(t))*(c*a)-(b*sin(t)) (1-cos(t))*(b*c)+(a)*sin(t) cos(t)+(1-cos(t))*(c^2) z ;0 0 0
1]
C=A*Y
D=A*Z
E=A*tt
hold on
plot3(C(1),C(2),C(3),'.b')
plot3(D(1),D(2),D(3),'.r')
plot3(E(1),E(2),E(3),'.g')
hold on
pause(0.001)
end
```



Şekil 5. 4 dik dairesel helis.

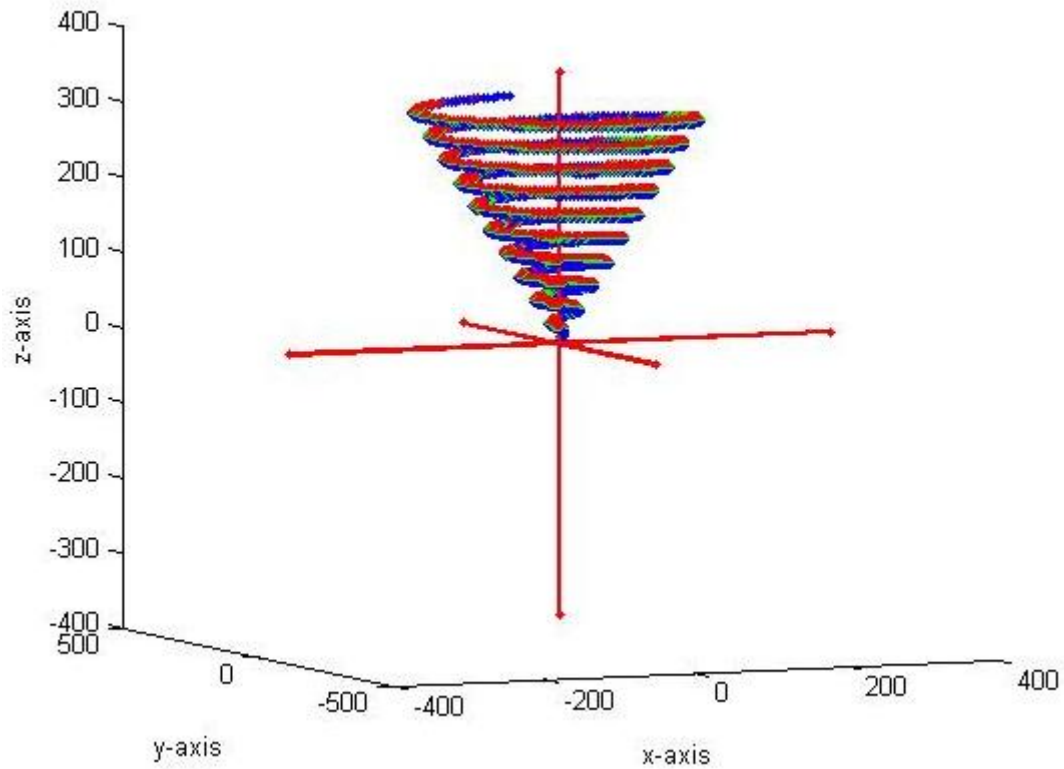
Eğer t öteleme vektörleri A ortogonal matrisin eksenini ile kesişiyor ise bu etkinin yörüngesi konisel helis eğrisidir ve Matlab da bu eğriyi çizdiren komutlar aşağıda verilmiştir:

```
a=360
line([-a,a],[0,0],[0,0], 'Marker','.', 'LineStyle','-', 'color','r', 'linewidth',2)
line([0, 0],[-a,a],[0,0], 'Marker','.', 'LineStyle','-', 'color','r', 'linewidth',2)
line([0, 0],[0,0],[-a,a], 'Marker','.', 'LineStyle','-', 'color','r', 'linewidth',2)
xlabel('x-axis')
ylabel('y-axis')
zlabel('z-axis')
for t=0:pi/80:20*pi
a=0
b=0
c=3
X=[a;b;c;1]
x=3*t*(sin(t))
y=3*t*(cos(t))
z=5*t
T=[0.1;0.1;0.1;1]
```

```

TT=[0.5;0.5;0.5;1]
tt=[0.3;0.3;0.3;1]
A=[(cosd(t)+(1-cos(t))*(a^2)) ((1-cos(t))*(a*b)-(c)*(sin(t))) ((1-cos(t))*(c*a) +(
b*sin(t))) x; (1-cos(t))*(a*b)+(c*sin(t)) cos(t)+(1-cos(t))*(b^2) (1-cos(t))*(c*b)-
(a*sin(t)) y ;(1-cos(t))*(c*a)-(b*sin(t)) (1-cos(t))*(b*c)+(a)*sin(t) cos(t)+(1-
cos(t))*(c^2) z ; 0 0 0 1]
C=A*T
D=A*TT
E=A*tt
hold on
plot3(C(1),C(2),C(3),'b')
plot3(D(1),D(2),D(3),'r')
plot3(E(1),E(2),E(3),'g')
hold on
pause(0.001)
end

```



Şekil 5. 5. Konisel helis.

5.6. Örnek: $\mathbb{R}^2$ deki bütün vektörler cümlesini $T(2, \mathbb{R}^2)$ ile gösterilsin. Bu cümleinin $\mathbb{R}^2$ üzerindeki etkisi incelenelecektir.

$$T(2, \mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$T(2, \mathbb{R}^2) \times \{x\} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

etkisi verilsin. Her t için $t: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ şeklinde tanımlanan dönüşüm $\mathbb{R}^2$ deki x noktasına t vektörünü bağlayacak şekilde tanımlıdır. Bu $x \rightarrow x+t$ dir. Vektörler cümlesi bir denklik sınıfı olduğundan her denklik sınıfının temsilcisini x noktasına bağlanacak şekilde bir yönelim içinde olacaktır ve x noktası ile birleşen bu vektörler, $T(2, \mathbb{R}^2)$ nin $\mathbb{R}^2$ üzerinde Lie transformasyon grubu etkisiyle $T(2, \mathbb{R}^2)$ deki vektör uzay yapısını $\mathbb{R}^2$ nin x noktasındaki $T_x \mathbb{R}^2$ ye taşıyacaktır. Bu da x noktasının tanjant uzayı olan $T_x \mathbb{R}^2$ dir. x noktasının yörüngesi ise

$$T(x) = \{x+t \mid t \in T(2, \mathbb{R}^2)\} = T_x(\mathbb{R}^2)$$

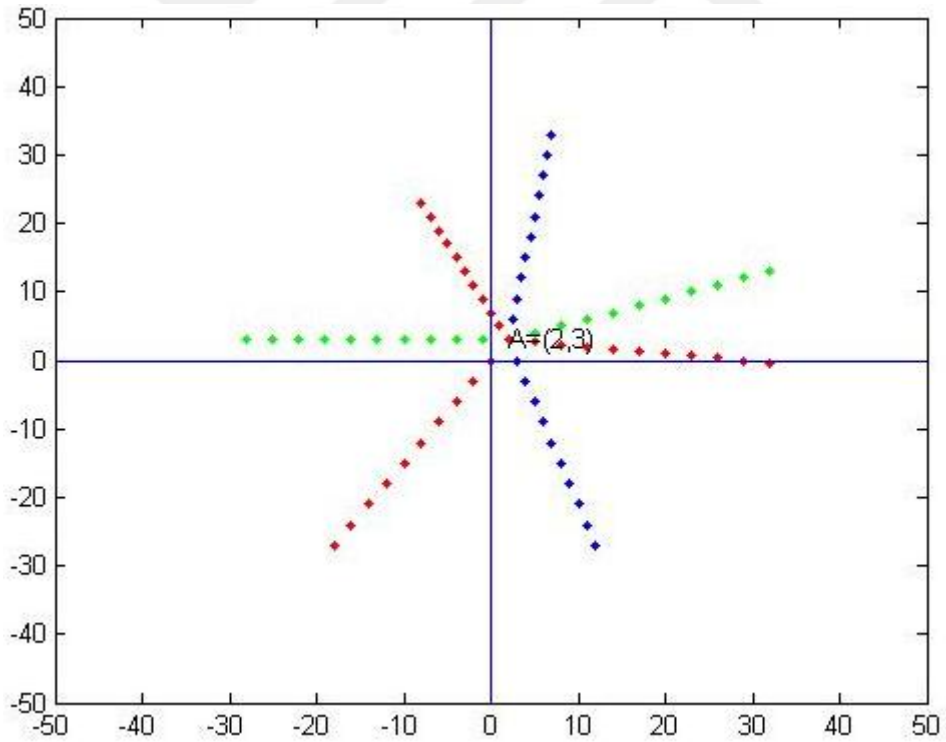
dir. Eğer $T(2, \mathbb{R}^2)$ yi $\mathbb{R}^2$ deki bir x yer vektörüne etki ettirirsek yani; $t: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $x \rightarrow x+t$ bu iki vektörün toplamı şeklinde tanımlanırsa bu da orijindeki tanjant uzayını verecek yani $T_0 \mathbb{R}^2$ 'yi verecektir. Bu örneğe sayısal değerler verilerek Matlab'da grafiğini çizdiren m-file ve grafiği aşağıda verilmiştir.

```
a=10
axis([-a a -a a ])
for k=0:1:10
X=[2 ;3]
T=[-1 ;2]
M=[1 ;-3]
R=[3;1]
L=[-2;-3]
N=[-3;0]
S=[1/2;3]
F=[3;-1/3]
K=X+S*k
G=X+F*k
H=X+N*k
D=X+L*k
C=X+R*k
```

```

B=X+M*k
A=X+T*k
plot(K(1),K(2),'.b')
plot(G(1),G(2),'.r')
plot(H(1),H(2),'.g')
plot(D(1),D(2),'.r')
plot(C(1),C(2),'.g')
plot(B(1),B(2),'.b')
plot(A(1),A(2),'.r')
line([-50,50],[0,0])
line([0,0],[-50,50])
text(2,3,'A=(2,3)')
hold on
pause(0.1)
end

```



Şekil 5. 6. $T_{(2,3)}\mathbb{R}^2$ 'nin görüntüsü.

5.7. Örnek: $\mathbb{R}^n$ bir Lie grubu aynı zamanda bir manifolddur. Lie grubu olan $\mathbb{R}^n$ in manifold olan $\mathbb{R}^n$ üstündeki etkisi

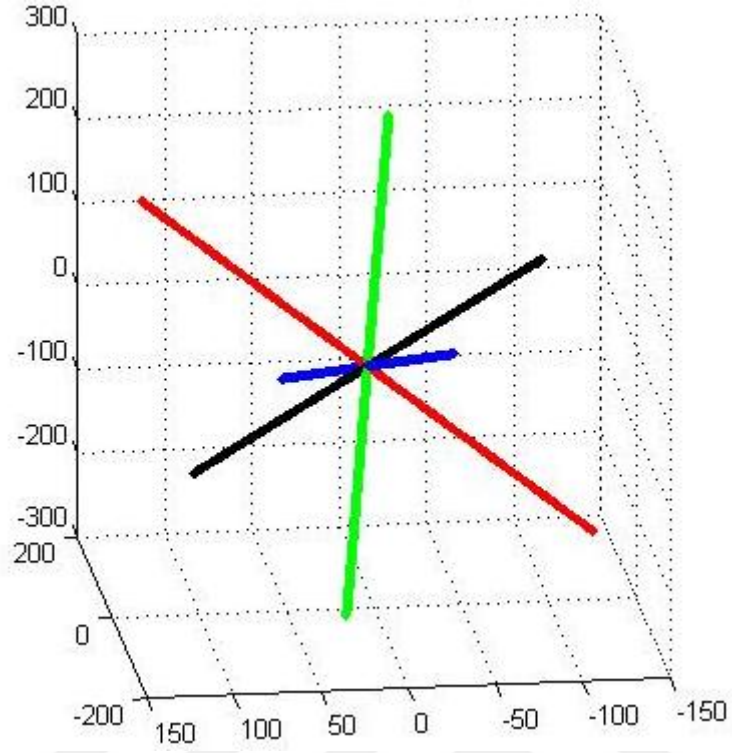
$$\varphi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x, t) \rightarrow x + \lambda.t$$

şeklinde tanımlansın. $\mathbb{R}^n$ öteleme vektörlerinin altında x noktasının yörüngesi $O = (0, \dots, 0)$ noktasından geçen doğrulardır.

Bu örnek $\mathbb{R}^3$ te sayısal değerler vererek Matlab da örneklendirilebilir. m-file şöyle yazılabilir.

```
axis([-10 10 -10 10 -10 10 ])
for k=-20:1/10:20
X=[-3 ;4;-10]
T=[5 ;6; 8]
K=[-5;-2;3]
L=[4;-1;13]
N=[-0;-5;6]
A=X+k*T
B=X+k*K
C=X+k*L
D=X+k*N
plot3(A(1),A(2),A(3),'.r')
plot3(B(1),B(2),B(3),'.b')
plot3(C(1),C(2),C(3),'.g')
plot3(D(1),D(2),D(3),'.k')
hold on;grid on
axis square
pause(0.01)
end
```



Şekil 5. 7. Orijinden geçen bazı doğrular.

KAYNAKLAR

- Arvanitoyeorgos, A., 2008 Lie transformation groups and geometry, ninth international conference on geometry, integrability and quantization. June 8–13, 2007, Varna, Bulgaria Ivailo M. Mladenov, **Editor SOFTEX**, Sofia , pp 11–35
- Avramidi, I., 2000. Notes on Lie Groups, department of mathematics New Mexico institute of mining and technology socorro. <http://infohost.nmt.edu/~iavramid/notes/liegress.pdf>. NM 87801, USA. Eriřim tarihi: 23:01:2015
- Bourbaki, N., 1971. **Elements De Mathematique Topologie Generale 1-4**, Addison wesley publishing company, Massachusetts.
- Brickell, F., ve Clark, R. S., 1970. **Diferentiable Manifolds**, Van nostrand reinhold company Ltd., London,
- Bredon, G., E., 1972. **Inroduction to Compact Transformation Groups**, New Jersey
- Bredon, G., E., 1993, **Topology and Geometry**, New York.
- Boothby, W. M., 1975. **An Introduction to Diferentiable Manifolds and Riemannian Geometry**, Academic Press, London,
- Bryant, R. L., 1991. An Introduction to Lie Groups and Symplectic Geometry, A series of nine lectures on Lie groups and symplectic geometry delivered at the regional geometry institute in park city. <https://www.math.duke.edu/~bryant/ParkCityLectures.pdf>. Utah, Eriřim tarihi: 20.12.2015
- Castillo, G. F., 2010. **Diferantiable Manifolds**, A theoreetical physics approach, London
- Fault, C., ve Shpakivskyi, V., 2015. An efcient method for solving equations in generalized quaternion and octonion algebras, **Adv. Appl. Clifford Algebars**, 337350
- Hacısalıhoğlu, H. H., 1998. **Diferansiyel Geometri**, Ertem Matbaa, Ankara
- Hacısalıoğlu, H. H., 1975. **Liner Cebir**, Gazi Üniversitesi Teknik Eğitim Fakültesi Matbaası, Ankara

- Hamilton, S. W. R., Elements of Quaternions, (1866)<https://books.google.com.tr/books?id=GFYTAAAYAAJpg=PA20hl=trource=gbstocrcad=4v=onepageqf=false>, 02.09.2015
- Hefny, M. S., Rudan, J.F., Ellis, E.R., 2014. A Matrix Lie group approach to statistical shape analysis of bones, *The authors and IOS Press*. All rights reserved. doi:10.3233/978-1-61499-375-9-163 Canada.
- Helgason, S., Sophus Lie, 2015. the Mathematician, [http://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-755-introduction-to-lie-groups fall 2004 / readings / helgasopmath32.pdf](http://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-755-introduction-to-lie-groups-fall-2004/readings/helgasopmath32.pdf); 02:09:2015
- Herman, R., 1975. Lie Groups: History, *Frontiers And applications Volume I*, Sophus Lie's 1880 transformation group paper, ABD
- Helgason, S., 1977. Invariant differential equations on homogeneous manifolds, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 83 (5),
- Helgason, S., Sophus Lie, the mathematician, <http://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-75-introduction-to-li-groups-fall-2004/readings/helgasopmath32.pdf>, 02.09.2015
- Hirsch, Morris, W. And Weinstein, A. 2008. Fixed point of analytic actions of supersoluble Lie groups on compact surface. <http://escholarship.org/uc/item/03n6s6j2>. Department of mathematics university of california at Berkeley Eriřim tarihi: 27.01.2015
- Hoffman, K., Kunze, R., 1971. *Linear Algebra*, Englewood cliffs, New Jersey
- Karakaş, H., İ., 2008. *Cebir Dersleri*, Yalçın Matbaacılık, Ankara.
- Kobayashi, S., Nomizu, K., 1963. *Foundations of Differential Geometry*, John Wiley Sons, Inc.
- Kuipers, J. B., 1998. *Quaternions and Rotation Sequences*, Princeton university press, Princeton and Oxford.
- Kunzinger, M., 2015. Lie transformasyon groups, An introduction to symmetry group analysis of differential equations. <http://arxiv.org/pdf/1506.07131.pdf>. Wien.Eriřim tarihi: 27.01.2016.
- Liao, M., 2009. Markov processes invariant under a Lie group action, *Stochastic Processes and Their Applications*, 119, 1357-1367

- Lipschutz, S., 1968. ***Theory and Problems of Linear Algebra***, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill Book Company, New York
- Lovett, E. O., 1897. Sophus Lie's transformation groups, ***The American Mathematical Monthly***, **4(10)**: 237-242.
- O'Neill, B., 1983. ***Semi-Riemannian geometry***, Pure and Application Mathematics, 103. Academic Press, Inc., New York.
- Pobegailo, A. P., 2015. Construction of spline curves on smooth manifolds by action of Lie groups. ***LMS J. Comput. Math.*** **18 (1)** , 217–230
- Plante, J.F., 1985. Fixed points of Lie group actions on surface. ***Ergod. Th. & Dynam. Sys.*** **6**; 149-161
- Varadarajan, V. S., 1974. ***Lie Groups Lie Algebras and Their Representations***, Prentice- Hall Series in Modern Analysis, New- York.

ARAşTIRMA OLANAKLARI

Konuyla ilgili olarak kaynaklara ulaşmak için Yüzüncü Yıl Üniversitesi, ULAKBİM gibi kurumlar ve çeşitli internet veri tabanlarından faydalanmıştır. Bu amaçla konu ile ilgili bazı yayınlara ulaşılmış ve mevcut tez kullanılmıştır



ÖZGEÇMİŞ

03.03.1984 yılında Diyarbakır ili Ergani ilçesi Hendek Köyü'nde doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Adana'da tamamladı. 2004 yılında Mersin Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'ne yerleşti ve 2009 da mezun oldu. 2013'te Yüzüncü Yıl Üniversitesi Matematik Bölümünde yüksek lisansa başladı.





