

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**LİNEER DİFERENSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN
ÇÖZÜM METODLARI VE KARARLILIK KAVRAMI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN : Dilek DİKEÇ
DANIŞMAN : Yrd. Doç. Dr. Aytekin GÜLLE

VAN – 2008

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**LİNEER DİFERENSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN
ÇÖZÜM METODLARI VE KARARLILIK KAVRAMI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN : Dilek DİKEÇ

VAN - 2008

KABUL VE ONAY SAYFASI

Yrd. Doç. Dr. Aytekin GÜLLE danışmanlığında, Dilek DİKEÇ tarafından hazırlanan “Lineer Diferensiyel Denklemlerinin Çözüm Metodları ve Kararlılık Kavramı” isimli bu çalışma 08/05/2008 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı’nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Cemil TUNÇ

İmza:

Üye : Yrd. Doç. Dr. Aytekin GÜLLE

İmza:

Üye : Doç. Dr. Zeynel YALÇIN

İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun 30/05/2008 gün ve 2008/11-IV sayılı kararı ile onaylanmıştır.

.....

Enstitü Müdürü

ÖZET

LINEER DİFERENSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜM METODLARI VE KARARLILIK KAVRAMI

DİKEÇ, Dilek

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Aytekin GÜLLE

Mayıs 2008, 36 sayfa

Bu çalışmada lineer diferensiyel denklem sistemleri için çözüm metotları ve kararlılık durumları ele alındı. Ayrıca iki ve daha yüksek boyutlu lineer sistemlerin kararlılık durumları incelendi. Son olarak Liapunov yöntemi tanıtıldı. Bu metot literatürde kararlılığın incelenmesinde bir araç olarak kullanılmaktadır.

Anahtar kelimeler : Lineer diferensiyel denklemler, Kararlılık, Liapunov yöntemi.

ABSTRACT

THE SOLUTION METHODS of LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS and STABILITY

DIKEÇ , Dilek

Msc Thesis, Mathematical Departments

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Aytekin GULLE

May 2008, 36 pages.

In this study, it is dealt with the solution methods of linear differential equations and the stability of solutions. Besides this, it is studied the stability of solutions of two and three dimensional linear systems. Finally, the Liapunov method is introduced. This method is used as a basic tool to investigate the stability in the literature.

Key words: Linear differential equations, Stability, Liapunov method.

ÖN SÖZ

Yüksek lisans eğitim süresince yetişmem ve kendimi geliştirmem açısındanengin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, tezimin hazırlanmasının her aşamasında büyük özveri ve çalışmamda sabırla yol gösteren, yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Aytekin GÜLLE’ye sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans eğitimime emeği geçen hocalarım; Sayın Prof. Dr. Cemil TUNÇ’a, Sayın Prof. Dr. Gabil AMİRALİ’ye, Sayın Yrd. Doç. Dr. Aytekin GÜLLE’ye, yüksek lisans eğitimim süresince beni yalnız bırakmayan eşim Metin DİKEÇ’e ayrıca çocuklarım İkbâl Ertuğrul DİKEÇ’e ve Yusuf Göksun DİKEÇ’e teşekkür ederim.

Dilek DİKEÇ
Mayıs 2008, VAN

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	iii
ÖN SÖZ	v
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	xi
1. GİRİŞ	1
2. LİTERATÜR BİLDİRİŞLERİ	2
3. MATERYAL ve YÖNTEM	3
3.1. Lineer Diferensiyel Denklemler Sistemleri	3
3.1.1. Temel matris	3
3.2. Kararlılık Kavramı	16
3.2.1. İki boyutlu lineer sistemler	16
3.2.2. Lineer olmayan problemler için faz düzleminin kullanılması	22
3.2.3. Daha yüksek boyutlu sistemlerde kararlılık	27
3.3. Liapunov Fonksiyonları	30
4. BULGULAR	32
5. TARTIŞMA ve SONUÇ	33
KAYNAKLAR	35
ÖZGEÇMİŞ	36

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 3.2.1.1. Stabil düğüm noktası	19
Şekil 3.2.1.2. Eyer nokta	19
Şekil 3.2.1.3. Stabil düzgün düğüm noktası	20
Şekil 3.2.1.4. Bir merkez	22
Şekil 3.2.2.1. Sarkacın faz şekli	24
Şekil 3.2.2.2. Potansiyel profilinden faz şeklinin belirlenmesi	25
Şekil 3.2.2.3. Örnek 9 için faz düzlemi şekli	27

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

α	Alfa
β	Beta
θ	Teta
λ	Lamda
ε	Epsilon
δ	Delta
π	Pi
ρ	Rou
cos	Cosinüs
sin	Sinüs
∞	Sonsuz
Φ	Fi
Ω	Omega
Σ	Toplam
Ψ	Pisi
sec	Sekant
tan	Tanjant

1. GİRİŞ

Mühendislikte, fiziki bilimlerde, sosyal bilimlerde ve daha birçok bilim dalında çok sayıda problemi çözümleyebilmek için önce problemleri matematiksel ifadelerle formüle etmek ve sonra da bunlarla ilgili bazı özel şartları kullanarak problemlerin çözümlerini oluşturan fonksiyonları bulup ortaya koymak gerekir. Bilinen bir problemi formüle eden bu matematiksel ifadeler bazen aranan fonksiyonu en azından birinci mertebeden türevlerini içermektedir. İşte bu çeşit matematiksel ifadeye “diferensiyel denklem” denir. Örneğin; birinci mertebeden ve n . mertebeden adi diferensiyel denklemler, sırasıyla

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \quad , \quad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

biçimlerinde ifade edilebilir.

Bilindiği üzere uygulamalı bilim dallarının pek çoğunda ele alınan problemlerin matematiksel modellemesine karşılık bir diferensiyel denklem olabilir. Diferensiyel denklem kuramı, vektör fonksiyonların üstün yanları nedeniyle en iyi biçimde birinci basamaktan eşdeğer bir sistem ile incelenir ve irdelenir. Yukarıda verilen n . mertebeden diferensiyel denklem

$$y^{(n)} = g\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

biçiminde yazılabilmesi durumunda bu denklem birinci mertebeden bir eşdeğer sistem olarak ifade edilebilir.

Bu çalışmada lineer diferensiyel denklem türlerinin çözüm metodları ve kararlılık durumları incelenecektir.

2. LİTERATÜR BİLDİRİŞLERİ

Ülkemizde yıllardan beri ders kitabı olarak okutulmakta olan Aydın ve ark. (1990), iki boyutlu lineer diferansiyel denklemin çözüm metodları üzerinde durmuşlardır.

Ayres (1978), konuyu teorik olarak ele aldığı gibi bol örneklerle açıklamıştır.

Caferoğlu ve Kaçar (1994), normal formulu lineer diferansiyel denklem sistemlerini incelemiştir.

Edwards ve Penney (2006), konuyu bilgisayar destekli, matematiksel modellemeli olarak ele almıştır.

O'Malley (1997), diferansiyel denklemlerin temel bilgileri ve kararlılık kavramlarını incelemiştir.

Somasundaram (2001), konuyu teorik olarak ele almış, sistemlerin çözümlerinin varlık ve tekliğini incelemiştir.

Spiegel (1958), konunun kuramsal yönünden çok, uygulama yönüne önem vermiş olup diferansiyel denklem sistemlerinin fiziksel problemlere uygulaması üzerinde durmuştur.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Lineer Diferensiyel Denklem Sistemleri

3.1.1. Temel matris

n tane skaler denklemden oluşan birinci mertebeden bir lineer diferensiyel denklemler sistemi

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t)\end{aligned}\tag{3.1}$$

olarak ifade edilebilir. Bu sistem vektör diferensiyel denklem sistemi olarak

$$\dot{x} = A(t)x + f(t)\tag{3.2}$$

şeklinde düzenlenebilir. Burada,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$$

biçiminde $n \times n$ boyutlu bir vektör,

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

$n \times n$ basamaktan bir matris ve

$$f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

ise $n \times 1$ boyutlu bir vektördür.

Belirtelim ki (3.2) denklemine ait bir başlangıç değer problemi

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + f(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (3.3)$$

olarak ifade edilebilir. Burada $x(t_0) = x_0$ verilen denklem için uygun bir biçimde belirlenen bir başlangıç koşuludur. Varlık ve teklik teoreminden de bilindiği üzere, eğer $A(t)$ ve $f(t)$ t_0 'ı içeren bir aralıkta sürekli iseler, bu takdirde (3.3) problemi söz konusu olan aralık üzerinde bir tek çözüme sahiptir. Eğer (3.2)'de $f(t) \equiv 0$ alınır ise bu takdirde

$$\dot{x} = A(t)x \quad (3.4)$$

sistemi n -tane $\phi_i(t)$, ($i = 1, 2, \dots, n$) lineer bağımsız vektör çözümüne sahip olur.

Başlangıç koşulunda $t_0 = 0$ alalım. Ayrıca $\dot{x} = A(t)x$ 'in genel çözümü $\sum_{i=1}^n \phi_i(t)c_i$ olarak ifade edilir. Burada $c_1, c_2, \dots, c_n$ 'ler keyfi sabitlerdir.

$$\Phi(t) \equiv (\phi_1(t)\phi_2(t)\dots\phi_n(t))$$

$$\text{ve } \phi_1(t) = \begin{pmatrix} \phi_{11}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \phi_{n1}(t) \end{pmatrix}, \dots, \phi_n(t) = \begin{pmatrix} \phi_{1n}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \phi_{nn}(t) \end{pmatrix} \text{ olur. O zaman}$$

$$\dot{\Phi} = A(t)\Phi$$

olur. Burada Φ verilen sistemin temel çözümler matrisidir. Kolaylıkla gösterilebilir ki $x(0)$ göz önüne alındığında homojen başlangıç değer probleminin çözümü

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)x(0)$$

dır. O halde $\dot{x} = A(t)x$ 'in bütün çözümleri Φc formundadır. Burada,

$$c = \phi^{-1}(0)x(0) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{pmatrix}$$

dir. Ayrıca;

$$W(t) \equiv |\Phi(t)|$$

Wronskian determinanı dikkate alındığında $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ 'lerin lineer bağımsız oldukları kolaylıkla gösterilebilir.

Örnek 1. Skaler denklemlerin

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = tx_2 \end{cases}$$

sistemini ele alalım. Bu sistem,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

olmak üzere $\dot{x} = A(t)x$ homojen vektör sistemi olarak yazılabilir. Bu sistem için kolaylıkla

$$x_1(t) = x_1(0) + \left(\int_0^t e^{s^2/2} ds \right) x_2(0)$$

$$x_2(t) = e^{t^2/2} x_2(0)$$

çözümleri elde edilir. Ayrıca bu çözümler

$$\phi_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad \phi_2(t) = \begin{pmatrix} \int_0^t e^{s^2/2} ds \\ e^{t^2/2} \end{pmatrix}$$

ifadeleri kullanılarak

$$x(t) = \phi_1(t)x_1(0) + \phi_2(t)x_2(0)$$

lineer kombinasyonu şeklinde yazılabilir. Burada

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & \int_0^t e^{s^2/2} ds \\ 0 & e^{t^2/2} \end{pmatrix}$$

bir temel çözümler matrisidir. $\dot{\Phi} = A(t)\Phi$ için $\Phi(0) = I$ dır. Bu sistemin vektör çözümü de $x(t) = \Phi(t)x(0)$ formuna sahiptir. Yukarıda verilen, $\dot{x} = A(t)x$ denklem sisteminin bir özel hali A sabit bir matris olmak üzere

$$\dot{x} = Ax \quad (3.5)$$

olur. $\dot{x} = Ax$ sisteminin λ bir skaler ve v sabit vektör olmak üzere

$$x(t) = e^{\lambda t} v \quad (3.6)$$

biçiminde çözüm arandığında;

$$\dot{x}(t) = \lambda e^{\lambda t} v$$

olur. Buna bağlı olarak da

$$\begin{aligned} \lambda e^{\lambda t} v &= A e^{\lambda t} v \\ (A - \lambda I)v &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu sistemin sıfırdan farklı çözümlere sahip olması için gerek ve yeter koşul

$$|A - \lambda I| = 0$$

olmalıdır. A , $n \times n$ basamakta bir matris olduğundan, son eşitlik λ 'ya göre n . dereceden bir polinom denklemini verir ve bu polinom denklem ise n -tane köke sahip olur. Kabul edelim ki bu kökler $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ve bu köklere karşılık gelen lineer bağımsız öz vektörler ise $v_1, v_2, \dots, v_n$ olsun. Bu durumda

$$\dot{x} = Ax$$

sisteminin

$$\phi_i(t) = e^{\lambda_i t} v_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

biçiminde n -tane lineer bağımsız çözüm elde edilir. Buna bağlı olarak da verilen sistemin $\Phi(t)$, temel çözümler matrisi kolaylıkla oluşturulabilir. Ayrıca λ_i köklerinin katlı olması durumunda karşılık gelen lineer bağımsız öz vektörlerinin nasıl bulunacağı ilgili literatürden bilinmektedir.

Örnek 2. $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ olmak üzere $\dot{x} = Ax$ sistemini inceleyeceğiz. Burada A

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 6 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-1-\lambda)(-2-\lambda) - 6 = \lambda^2 + 3\lambda - 4 = (\lambda - 1)(\lambda + 4) = 0$$

öz değ er polinomuna sahiptir. O halde $\lambda_1 = 1$ ve $\lambda_2 = -4$ öz değ erler olur. Bu öz değ erlere karş ılık gelen v_1 ve v_2 öz vektörleri ise, sırası ile

$$(A - I)v_1 = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} v_1 = 0 \quad \text{ve} \quad (A + 4I)v_2 = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} v_2 = 0$$

cebirsel denklemlerinin sıfırdan farklı çözümleri olmalıdır. Kolaylıkla,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

elde edilir. O halde $\dot{x} = Ax$ sisteminin çözümleri

$$\phi_1(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^t \quad \text{ve} \quad \phi_2(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-4t}$$

olarak elde edilir. Böylece,

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 3e^t & 2e^{-4t} \\ e^t & -e^{-4t} \end{pmatrix}$$

temel çözümler matrisine karş ılık gelir. Doğ rudan her t için $\Phi(t)$ nin singüler olmadığını

(çünkü onun determinanı $-5e^{-3t}$), $\dot{\Phi} = A(t)\Phi$ olduğunu ve ayrıca $c \equiv \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ keyfi sabit bir

vektör olmak üzere

$$\Phi(t)c$$

ifadesinin $\dot{x} = Ax$ denklem sisteminin genel çözümleri olduğunu kontrol edebiliriz.

$$\Phi^{-1}(0) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

olduğu için verilmiş herhangi $x(0)$ için, $\dot{x} = Ax$ 'in çözümleri

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)x(0) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3e^t & 2e^{-4t} \\ e^t & -e^{-4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} x(0)$$

olarak elde edilir.

Örnek 3. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -8 & 8 \end{pmatrix}$ için $\dot{x} = Ax$ otonom vektör sistemini inceleyelim. Burada

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 1 \\ -8 & 8 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 12\lambda + 40 = (\lambda - 6)^2 + 4 = 0$$

ifadesi A 'nın kompleks eşlenik $\lambda_{1,2} = 6 \pm 2i$ öz değerlerini verir. Bu öz değerlere karşılık

olarak kolaylıkla $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 + 2i \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 - 2i \end{pmatrix}$ öz vektörleri elde edilir. Bunlara bağlı olarak

$$\Psi(t) = e^{6t} \begin{pmatrix} \cos 2t & \sin 2t \\ 2(\cos 2t - \sin 2t) & 2(\cos 2t + \sin 2t) \end{pmatrix}$$

temel çözümler matrisi bulunur. Ayrıca,

$$\Psi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad \Psi^{-1}(0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

yazılabilir. $\dot{x} = Ax$ denklem sisteminin $x(t) = e^{At}x(0)$ genel çözümünü elde etmek için

$$e^{At} \equiv \Psi(t)\Psi^{-1}(0) = e^{6t} \begin{pmatrix} \cos 2t - \sin 2t & \frac{1}{2} \sin 2t \\ -4 \sin 2t & \cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix}$$

tanımlanabilir. Buna bağlı olarak da $x(t) = e^{At}x(0)$ çözümü yazılabilir.

Şimdi homojen olmayan

$$\dot{x} = A(t)x + f(t) \tag{3.2}$$

lineer sistemini çözmek için parametrelerin değişimi formülünü kullanacağız. Burada $A(t)$ ve $f(t)$, $t \in I$, $I \subset \mathbb{R}$ de sürekli fonksiyonlardır. $\Phi(t)$ yukarıdaki sistemin homojen kısmına, $\dot{x} = A(t)x$ denkleminde karşılık gelen temel çözümler matrisi ve c ise isteksel bir sabit vektör olur. Daha önceden kullanılan

$$x(t) = \Phi(t)c$$

ifadesinde c 'nin yerine $v(t)$, ($v(t)$, $n \times 1$ boyutlu sürekli bir vektördür.) olarak

$$x(t) = \Phi(t)v(t) \quad (3.7)$$

biçiminde bir çözüm arayalım.

$$\dot{x} = \Phi\dot{v} + \Phi v = \Phi\dot{v} + A(t)\Phi v = A(t)\Phi v + f(t)$$

olur. $\dot{\Phi} = A\Phi$ olduğundan,

$$\Phi\dot{v} = f(t)$$

yazılabilir. Buna bağlı olarak $\dot{v}(t) = \Phi^{-1}(t)f(t)$ elde edilir. Başlangıç koşuluna bağlı olarak integral alındığında

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)f(s)ds$$

elde edilir. Burada $v(t_0) = \Phi^{-1}(t_0)x(t_0)$ dır. O halde

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)f(s)ds \quad (3.8)$$

çözümü elde edilir. Belirtelim ki Green fonksiyonu yardımıyla da verilen denklem sisteminin özel çözümü bulunabilir. Ancak biz burada konunun fazla ayrıntılarına değinmek istemiyoruz.

Örnek 4.

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} e^t \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

homojen olmayan problemi inceleyelim.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \text{ sabit matrisi } \left(1, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right) \text{ ve } \left(6, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ öz çiftine sahip olduğundan } \dot{x} = Ax$$

homojen sistemi

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 2e^t & e^{6t} \\ -3e^{-6t} & e^{6t} \end{pmatrix}$$

temel çözümler matrisine sahiptir. Bu matrisin tersi

$$\Phi^{-1}(t) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{-t} \\ -3e^{-6t} & 2e^{-6t} \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir.

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)f(s)ds$$

çözüm bağıntısında bulunan ifadeler yerine bırakıldığında,

$$x(t) = \Phi(t) \left[\Phi^{-1}(0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \Phi^{-1}(s) \begin{pmatrix} e^s \\ e^{2s} \end{pmatrix} ds \right]$$

$$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2te^t + \frac{17}{5}e^t - \frac{5}{2}e^{2t} + \frac{41}{10}e^{6t} \\ -3te^t - \frac{33}{5}e^t + \frac{5}{2}e^{2t} + \frac{41}{10}e^{6t} \end{pmatrix}$$

çözümü elde edilir.

Örnek 5. $A = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$ matrisi $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -1 \\ 9 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 4)^2 = 0$ öz polinomuna

sahiptir. Ayrıca $\lambda = 4$ tekrarlı öz değere karşılık gelen yalnızca bir tane lineer bağımsız $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

vektörü vardır. Bu nedenle, $\dot{x} = Ax$ denklem sisteminin bir vektör çözümü

$$\phi_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{4t}$$

olduğu garantidir. Şimdi verilen sistemin ikinci lineer bağımsız çözümünü bulalım. Bunun için

$$\phi_2(t) = e^{4t} w(t)$$

biçiminde bir çözüm arayalım. Bu durumda $w(t)$ vektörü

$$\dot{w} = (A - 4I)w$$

denklem sistemini sağlamalıdır. Önceki bilgilerimize dayanarak $w(t)$ çözümlerini, b_j ' ler vektör katsayıları olmak üzere

$$w(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + \dots$$

biçiminde düşünülebilir.

$$\dot{w}(t) = b_1 + 2b_2 t + 3b_3 t^2 + \dots$$

olduğu için

$$b_1 + 2b_2 t + 3b_3 t^2 + \dots = (A - 4I)b_0 + (A - 4I)b_1 t + (A - 4I)b_2 t^2 + \dots$$

yazılabilir. t 'nin ardışık kuvvetlerinin katsayıları eşitlenerek

$$\begin{aligned}
b_1 &= (A - 4I)b_0 \\
b_2 &= \frac{1}{2}(A - \lambda I)b_1 = \frac{1}{2}(A - \lambda I)^2 b_0 \\
b_3 &= \frac{1}{3}(A - \lambda I)b_2 = \frac{1}{3!}(A - \lambda I)^3 b_0,
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Ayrıca $(A - 4I)^2 = 0$ dır. Buradan anlaşılır ki b_2 ve sonrasında gelen tüm katsayıların sıfır olduğu açıktır. Ayrıca

$$(A - 4I)b_1 = (A - 4I)^2 b_0 = 0$$

ifadesi b_1 'in A 'nın bir öz vektörü olmasını gerektirir.

$$(A - 4I)b_0 = b_1$$

olur. Eğer b_1 'i $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ olarak seçersek b_0 , $(A - 4I)b_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ singüler sistemini sağlamalıdır.

Bu çözümleri keyfi bir α_0 sabiti için $b_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \alpha_0$ dır. $\alpha_0 = 0$ seçersek kolayca $w(t)$

vektörünün t nin bir lineer fonksiyonu gibi istenen çözüm olarak

$$\phi_2(t) = e^{4t} w(t) = e^{4t} \begin{pmatrix} 1+t \\ 2+3t \end{pmatrix}$$

ve dolayısıyla

$$\phi(t) = (\phi_1 \phi_2) = e^{4t} \begin{pmatrix} 1 & 1+t \\ 3 & 2+3t \end{pmatrix}$$

temel çözümler matrisini sağlar. Belirtelim ki yukarıda verilen çözüm yöntemi daha yüksek basamaktan lineer diferensiyel denklem sistemlerine uygulanabilir. Bunun için O'Malley, R. E. (1997) kitabına bakılabilir.

Daha somut çözümlerin araştırmasını açıklamak için

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere $\dot{x} = Ax$ örneğini inceleyeceğiz. A matrisinin tüm öz değerlerinin sıfır olduğu açıktır. $\lambda_1 = 0$ için A matrisi,

$$\phi_1 = e_1, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

öz vektörüne sahiptir. İkinci lineer bağımsız çözüm

$$\phi_2 = c_0 + c_1 t, \quad c_1 \neq 0$$

biçiminde aranabilir. Gerekli işlemler yapıldığında ikinci lineer bağımsız çözüm

$$\phi_2 = e_2 + e_1 t = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

olabileceği açıktır. Benzer düşünce ile üçüncü lineer bağımsız çözüm

$$\phi_3 = c_0 + c_1 t + \frac{1}{2} c_2 t^2, \quad c_2 \neq 0$$

biçiminde arandığında

$$\phi_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Böylece $\dot{x} = Ax$ denkleminin singüler olmayan

$$\Phi \equiv \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

temel çözümler matrisini bulduk. $\Phi(0) = I$ olduğundan $\Phi(t) = e^{At}$ dir. Böylece

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Örnek 6. Varsayalım ki $A(t)$,

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_1(t) & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & a_2(t) & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & a_n(t) \end{pmatrix}$$

biçiminde bir köşegen matris olsun. O zaman $\dot{x} = A(t)x$ sistemi, $\dot{x}_i = a_i(t)x_i$ denklemlerine denktir ve genel çözümü ;

$$x_i(t) = e^{\int_0^t a_i(s) ds} x_i(0) \quad , \quad i=1,2,\dots,n$$

bileşenleri ile belirlenir. Köşegen matrisin özelliklerinden dolayı

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{\int_0^t a_1(s) ds} & & & \\ & e^{\int_0^t a_2(s) ds} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\int_0^t a_n(s) ds} \end{pmatrix}$$

temel çözümler matrisi elde edilir. Bunun yerine $\Phi(t) \equiv \exp \left[\int_0^t A(s) ds \right]$ anlamlı notasyonu kullanılabilir.

Örnek 7. Şimdi Örnek 6' yı genelleştirelim. Varsayalım ki B ve D karesel köşegen matrisler olmak üzere (aynı boyutta olmaları gerekmez)

$$A(t) = \begin{pmatrix} B(t) & 0 \\ C(t) & D(t) \end{pmatrix}$$

olsun. $\Phi_1(t)$ ve $\Phi_2(t)$ aşağıda verilen denklem sistemlerinin çözüm matrisleri olmak üzere

$$\dot{z}_1 = B(t)z_1 \quad \text{ve} \quad \dot{z}_2 = D(t)z_2$$

yazılabilir. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x$ olmak üzere $\dot{x} = A(t)x$ lineer sisteminden

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = B(t)x_1 \\ \dot{x}_2 = C(t)x_1 + D(t)x_2 \end{cases}$$

yazılabilir. İntegral alındığında $x_1(t) = \Phi_1(t)\Phi_1^{-1}(0)x_1(0)$ elde edilir. Bu ifade ikinci sistem içine yerine konduğunda parametrelerin değişimiyle

$$\begin{aligned}
x_2(t) &= \Phi_2(t) \left[\Phi_2^{-1}(0)x_2(0) + \left(\int_0^t \Phi_2^{-1}(s)C(s)\Phi_1(s)ds \right) \Phi_1(0)x_1(0) \right] \\
&\equiv \Phi_2(t)\Phi_2^{-1}(0)x_2(0) + \Phi_3(t)\Phi_1^{-1}(0)x_1(0)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece , $\dot{x} = A(t)x$ sistemi

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \Phi_1(t) & 0 \\ \Phi_3(t) & \Phi_2(t) \end{bmatrix}$$

biçiminde bir temel çözümler matrisine sahiptir.

Ayrıca, not edelim ki $\Phi(t)$ temel çözümler matrisinin tersinin

$$\Phi^{-1}(t) = \begin{bmatrix} \Phi_1^{-1}(t) & 0 \\ -\Phi_2^{-1}(t)\Phi_3(t)\Phi_1^{-1}(t) & \Phi_2^{-1}(t) \end{bmatrix}$$

olduğu kolaylıkla elde edilebilir. Buna ilave olarak,

$$\dot{x} = A(t)x + f$$

homojen olmayan sistemi $x_p(t) = \Phi(t) \int_0^t \Phi^{-1}(s)f(s)ds$ özel çözümüne sahip olduğundan

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ve $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$x_{1p}(t) = \Phi_1(t) \int_0^t \Phi_1^{-1}(s)f_1(s)ds$$

ve

$$x_{2p}(t) = \Phi_3(t) \int_0^t \Phi_1^{-1}(s)f_1(s)ds$$

$$+ \Phi_2(t) \int_0^t \Phi_2^{-1}(s) [-\Phi_3(s)\Phi_1^{-1}(s)f_1(s) + f_2(s)]ds$$

olacak şekilde bir özel çözüm elde ederiz. Örnek 7’de sunulan teknik şüphesiz

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = b_1(t)x_1 \\ \dot{x}_2 = c_1(t)x_1 + b_2(t)x_2 \\ \dot{x}_3 = c_2(t)x_1 + c_3(t)x_2 + b_3(t)x_3 \end{cases}$$

skaler denklemlerinin üçgensel sistemini çözmek için kullanılan genel metodun bir doğrudan genelleştirilmesidir. Burada x_1 ' i elde etmek için birinci denklemin integrali alınır, x_1 ikinci denklemde yerine konulur ve x_2 ' yi elde etmek için tekrar integral alınır ve son olarak x_1 ve x_2 , üçüncü denklemde yerine konur ve x_3 ' ü elde etmek için son bir integral daha alınır. Benzer yaklaşım üst üçgensel bir sistem için kullanılabilir. Ancak $A(t)$ genel bir karesel matris olmak üzere

$$\dot{x} = A(t)x \quad (3.9)$$

sisteminin bir çözümü için genel bir çözüm yöntemi bilinmektedir. (3.9) sistemini çözmek için literatürde geçen mertebenin (basamağın) indirgenmesi yöntemi kullanılmaktadır.

Kabul edelim ki $r < n$ olmak üzere (3.9) için r - lineer bağımsız vektör çözümleri $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_r$ olsun. Öyleyse, $n \times r$ tipindeki

$$\Psi(t) \equiv (\phi_1 \phi_2 \dots \phi_r)$$

matrisi r rankına sahip olacaktır. $\Psi(t) \equiv \begin{pmatrix} \Psi_1(t) \\ \Psi_2(t) \end{pmatrix}$ ve $\Psi_1(t)$ singüler olmayan bir matristir.

Sonra $r \times r$ - tipinden

$$T(t) \equiv \begin{pmatrix} \Psi_1(t) & 0 \\ \Psi_2(t) & I \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

matrisini alalım.

$$x(t) \equiv T(t)y(t) \quad (3.11)$$

dönüşümünü uygulayalım. Türev alındığında $\dot{x} = \dot{T}y + T \dot{y} = ATy$ elde edilir.

$$\dot{y} = T^{-1}(AT - \dot{T})y = T^{-1}A \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y$$

yazılabilir. Çünkü

$$\dot{T} = \begin{pmatrix} \dot{\Psi}_1 & 0 \\ \dot{\Psi}_2 & 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \Psi_1 & 0 \\ \Psi_2 & 0 \end{pmatrix}$$

dır. Ayrıca (3.9)'dan $\dot{\Psi} = A\Psi$ elde edilir.

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} \Psi_1^{-1} & 0 \\ -\Psi_2 \Psi_1^{-1} & 1 \end{pmatrix}$$

olur. Buna bağlı olarak

$$\dot{y}_1 = \Psi_1^{-1}(t)A_{12}(t)y_2$$

$$\dot{y}_2 = [A_{22}(t) - \Psi_2(t)\Psi_1^{-1}(t)A_{12}(t)]y_2$$

blok üçgensel sistemini elde ederiz.

Bu incelemeler ışığında, y_2 kolaylıkla çözülebilir. y_2 'nin bulunan değeri y_1 'e ait denklemde yerine bırakılarak y_1 de bulunabilir. Eğer, Ω 'u $(n-r)$. mertebeden

$$\dot{\Omega} = (A_{22} - \Psi_2 \Psi_1^{-1} A_{12})\Omega \quad (3.12)$$

sisteminin singüler olmayan bir matris çözümü olarak tanımlarsak; $y_2(t) = \Omega(t)\Omega^{-1}(0)y_2(0)$ olur ve dolayısıyla

$$y_1(t) = y_1(0) + \left[\int_0^t \Psi^{-1}(s)A_{12}(s)\Omega(s)ds \right] \Omega^{-1}(0)y_2(0)$$

çözümlerini elde ederiz.

Özetlenmek istenirse;

$$A(t) \equiv \begin{pmatrix} 1 & \int_0^t \Psi_1^{-1}(s)A_{12}(s)\Omega(s)ds \\ 0 & \Omega(t) \end{pmatrix}, \quad T(t) \equiv \begin{pmatrix} \Psi_1(t) & 0 \\ \Psi_2(t) & I \end{pmatrix}$$

olmak üzere, verilen orijinal sistem için $\Phi(t) = T(t)A(t)$ bir temel çözümler matrisi olur.

Burada

$$\Phi(t) \equiv \begin{pmatrix} \Psi_1(t) & \Psi_1(t) \int_0^t \Psi_1^{-1}(s)A_{12}(s)\Omega(s)ds \\ \Psi_2(t) & \Omega(t) + \Psi_2(t) \int_0^t \Psi_1^{-1}(s)A_{12}(s)\Omega(s)ds \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

olur.

3.2. Kararlılık Kavramı

3.2.1. İki boyutlu lineer sistemler

Bilindiği üzere iki boyutlu lineer skaler bir diferensiyel denklem sistemi aşağıdaki biçimde tanımlanır;

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases} \quad (3.14)$$

Burada a, b, c ve d 'ler reel sabitlerdir.

Eğer

$$z \equiv \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

alınır ise, bu sistem

$$\dot{z} = Az \quad (3.15)$$

vektör diferensiyel denklemi olarak ifade edilebilir. A matrisinin $|A - \lambda I| = 0$, $\lambda \in R$ denkleminden öz değerler bulunmak istendiğinde

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0$$

polinom denklemini verir. Kabul edelim ki; bu denklemin öz değerleri λ_1 , λ_2 ve bunlara karşılık gelen lineer bağımsız öz vektörler de p_1 ve p_2 olsun. Bu öz çiftleri (λ_1, p_1) ve (λ_2, p_2) biçimde ifade edelim.

$$Ap_i = \lambda_i p_i \quad , \quad i = 1, 2$$

olduğundan

$$P \equiv [p_1 p_2] \quad \text{ve} \quad \Lambda \equiv \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

için

$$AP = P\Lambda$$

yazılabilir.

P matrisi; sabit ve tersinir olduğundan,

$$z \equiv Pw \quad (3.16)$$

dönüşümü yapıldığında, (3.15) denklem sisteminden

$$\dot{w} = P^{-1}\dot{z} = P^{-1}Az = \Lambda w \quad (3.17)$$

diagonal (üçgensel) denklem sistemi elde edilir. Burada $\Lambda = P^{-1}AP$ dir. Bu sistem c_i , $(i = 1, 2)$ keyfi sabitler olmak üzere,

$$w_i(t) = e^{\lambda_i t} c_i \quad , \quad i = 1, 2 \quad (3.18)$$

kompleks çözümüne sahiptir. Bazen bu çözüm ,

$$z(t) = e^{\lambda_1 t} p_1 c_1 + e^{\lambda_2 t} p_2 c_2 \quad (3.19)$$

genel çözümünden daha kullanışlıdır. Not edelim ki; $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \alpha + i\beta$ kompleks olduğundan $(p_1 = \overline{p_2}$ olur), (3.15)' in lineer bağımsız reel çözümleri bu kompleks çözümlerin reel ve imajiner kısımları olarak elde edilebilir. $A = P\Lambda P^{-1}$ ifadesi $e^{At} = P e^{\Lambda t} P^{-1}$ ve $z(t) = e^{At} z(0)$

olmasını gerektirir. Bilindiği üzere A matrisinin farklı öz değerlerine karşılık gelen öz vektörler lineer bağımsızdır. Benzer biçimde A matrisi $\lambda = \frac{1}{2}(a+d)$ biçiminde katlı köklere sahip olduğunda, gerekli işlemler yapıldığında, $\dot{z} = Az$ sisteminin ; $P = (p_1 p_2)$

$$z(t) = e^{\lambda t} (p_1 t + p_2) k, \quad (k = p^{-1} z(0))$$

biçiminde çözümü elde edilir. Burada p_1 ve p_2 'ler A 'nın lineer bağımsız öz vektörleridir.

Son olarak kabul edelim ki A matrisi

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(a+d) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(a-d)^2 + bc}$$

biçiminde karmaşık çözümlere sahiptir. Bu durumda bu köklere (öz değerlere) karşılık gelen lineer bağımsız öz vektörler p_1, p_2 olmak üzere

$$\dot{x} = ax + by$$

$$\dot{y} = cx + dy$$

iki boyutlu lineer sistemi

$$\begin{cases} x(t) = e^{\lambda t} (p_{11}c_1 + (p_{11}t + p_{12})c_2) \\ y(t) = e^{\lambda t} (p_{21}c_1 + (p_{21}t + p_{22})c_2) \end{cases}$$

biçiminde bir genel çözüme sahip olur.

İncelenmesi gereken haller şunlardır :

1. Eğer A matrisinin her iki $\lambda_{1,2}$ öz değeri reel, farklı ve aynı işaretli ise, bu durumda (3.14)

sisteminin $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ denge noktası bir düğüm olur. Eğer, $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ ise bu düğüm noktası asimptotik kararlı olur. Ayrıca $t \rightarrow \infty$ için bu sistemin bütün çözümleri sıfıra yakınsar. Ayrıca $c_1 \neq 0$ olmak üzere $t \rightarrow \infty$ iken

$$\frac{y}{x} \rightarrow \frac{p_{21}}{p_{11}}$$

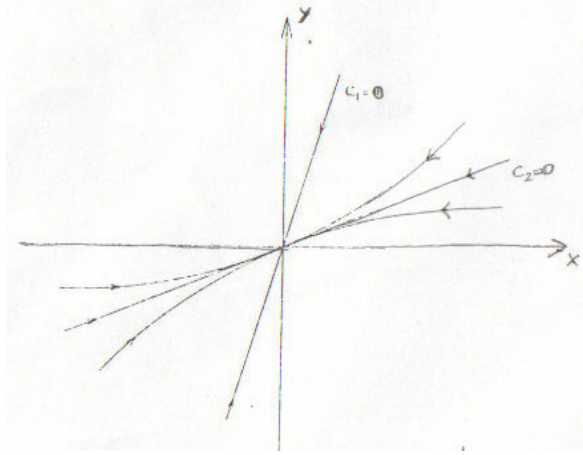
elde edilir.

Böylece λ_1 öz değerine karşılık gelen p_1 öz vektör için çözümün davranışı belirlenmiş olur. Diğer öz vektör için ise

$$\frac{y}{x} = \frac{p_{22}}{p_{12}}$$

olur.

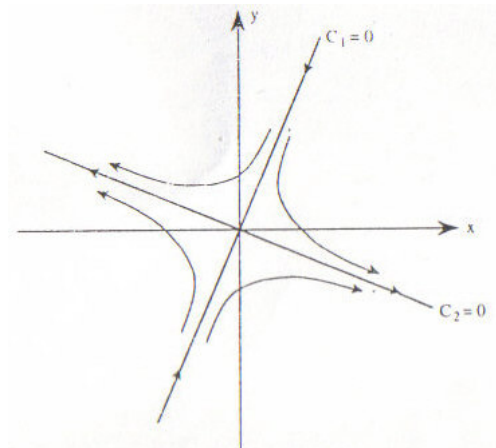
Bunun için tipik bir faz düzlem grafiği Şekil 3.2.1.1' de gösterilmiştir.



Şekil 3.2.1.1. Stabil düğüm noktası

Oklar t arttığında hareketin yönünü belirlemek için kullanılır. Belirtelim ki; herhangi bir noktadan geçen bir tek yörünge belirlenebilir. Bunun için başlangıç koşullarının verilmesi gerekir. Benzer bir yorum λ_2 için ve ilave olarak $t \rightarrow -\infty$ için de yapılabilir.

2. Yukarıda verilen karakteristik polinomun $\lambda_{1,2}$ kökleri, reel ve zıt işaretli yani $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ ise, o zaman orijin bir eyer (semer) nokta olarak adlandırılır. $c_1 = 0$ olmak üzere (3.18) ile verilen çözümler $t \rightarrow \infty$ iken orijine yaklaşır; benzer biçimde $c_2 = 0$ iken de t artarken bu çözümler orijinden uzaklaşırlar. Üstelik ; $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$ için çözümler $t \rightarrow \infty$ iken asimtotik olarak p_1 öz vektörünün yönüne doğru yönelir ve $t \rightarrow -\infty$ iken p_2 öz vektörünün hareket yönüne doğru yönelir. Bu durumun aşağıda verilen Şekil 3.2.1.2'de olduğu açıklanabilir.



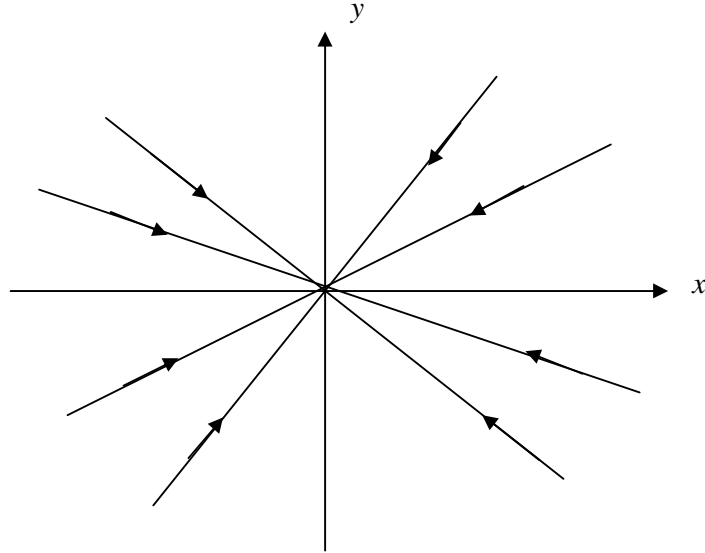
Şekil 3.2.1.2. Eyer Nokta

Şekilden de görüldüğü üzere orijin (denge) noktası kararlı değildir.

3. Eğer, yukarıda sözü geçen öz denklemin kökleri katlı ise, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \equiv \frac{1}{2}(a + d) \neq 0$ ise bu durumda orijin noktası tekrar bir düğüm noktası olarak adlandırılır. Eğer, $\lambda > 0$ ise orijin (denge) noktası kararsız ve benzer biçimde $\lambda < 0$ ise orijin kararlı olur. p_1 ve p_2 , A 'nın lineer bağımsız öz vektörleri olur. Bu durumda karşılık gelen çözümler,

$$\frac{y}{x} = \frac{p_{21}c_1 + p_{22}c_2}{p_{11}c_1 + p_{12}c_2}$$

bağıntısını sağlar. $\lambda < 0$ olması durumunda $t \rightarrow \infty$ için çözümler orijine yaklaşır. (Bakınız Şekil 3.2.1.3.)



Şekil 3.2.1.3. Stabil düzgün düğüm noktası

4. $(a - d)^2 < -4bc$ öz denklemin kökleri $\lambda_{1,2}$, $\alpha \pm i\beta \equiv \frac{1}{2}(a + d) \pm \frac{i}{2}\sqrt{-(a - d)^2 - 4bc}$ eşlenik kompleks ikilileridir. Eğer; α sıfırdan farklı ise, orijin bir spiral merkez noktasıdır denir. $\alpha < 0$ ise kararlı, $\alpha > 0$ ise kararsız olur. Eğer; $\alpha = 0$ ise çözüm sınırlı ve periyodiktir ayrıca orijin kararlı bir merkezdendir.

$$Q \equiv \begin{pmatrix} c & \alpha - a \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

için, eğer;

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \equiv Q \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

dönüşümünü yapılırsa ise;

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} \equiv Q A Q^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

denklemini elde ederiz. O zaman $u = r \cos \theta$ ve $v = r \sin \theta$ y1 kullanarak $r dr = u du + v dv$ ve $r^2 d\theta = u dv - v du$ yazılabilir.

Bu durumda yukarıda verilen denklem sisteminden,

$$\begin{aligned} r \frac{dr}{dt} &= u(\alpha u - \beta v) + v(\beta u + \alpha v) = \alpha r^2 \\ r^2 \frac{d\theta}{dt} &= u(\beta u - \alpha v) - v(\alpha u - \beta v) = \beta r \end{aligned}$$

elde edilir.

Bu denklemler çözüldüğünde,

$$r(t) = e^{\alpha t} r(0) \quad \text{ve} \quad \theta(t) = \beta t + \theta(0)$$

Bunlara bağlı olarak da

$$u(t) + iv(t) = r e^{i\theta} = e^{\alpha t} r(0) [\cos(\beta t + \theta(0)) + i \sin(\beta t + \theta(0))]$$

olur.

$\alpha < 0$ için, $t \rightarrow \infty$ iken kararlı yörünge $u - v$ faz düzleminin orijinine yönelir.

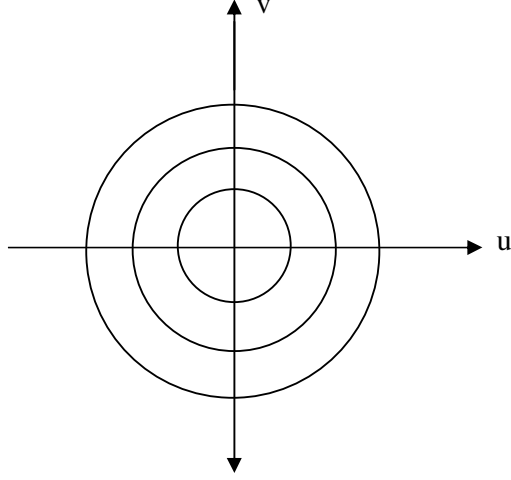
Ayrıca bu yörüngeler birer spirali temsil ederler.

5. $a = -d$ ve $a^2 + bc < 0$ olduğunda karakteristik polinomun kökleri $\lambda_{1,2} = \pm i\beta \equiv \pm \sqrt{a^2 + bc}$ tümü ile imajiner sayılar olur. Bu köklere karşılık olarak $\frac{2\pi}{\beta}$ periyotlu aşağıdaki periyodik çözümler elde edilir:

$$u(t) = r(0) \cos(\beta t + \theta(0)) \quad \text{ve} \quad v(t) = r(0) \sin(\beta t + \theta(0)) .$$

Bu durumda kökler tamamen karmaşık olmaları nedeni ile orijin kararlı bir merkez nokta olur.

Karşılık gelen yörüngeler ise $u - v$ faz düzleminde aşağıdaki şekilde gösterildiği üzeredir:



Şekil 3.2.1.4. Bir merkez

x - y düzlemine geçildiğinde ,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \cos(\beta t + \theta(0)) + (a - \alpha) \sin(\beta t + \theta(0)) \\ c \sin(\beta t + \theta(0)) \end{pmatrix} r(0)$$

elde edilir. Bu çözümlere karşılık gelen yörüngeler yine $2\pi/\beta$ periyodlu olacaktır. Bu durumda yörüngeler eliptik bir biçime sahip olurlar.

3.2.2. Lineer olmayan problemler için faz düzleminin kullanılışı

İkinci dereceden skaler otonom

$$\frac{d^2x}{dt^2} = F\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$$

denklemini yeniden ele alalım. $y = \frac{dx}{dt}$ olsun. Bu durumda $\frac{dy}{dt} = F(x, y)$ olur. Daha genel bir biçimde bu denklem sistemi;

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \end{cases} \quad (3.21)$$

biçiminde ifade edilebilir. Ayrıca bu sisteme lineer olmayan bir sistem olarak bakılabilir. Bu sistemden,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} \quad (3.22)$$

birinci dereceden skaler denklemini elde ederiz. $P(x, y)$ ve $Q(x, y)$ fonksiyonlarının Taylor seri açılımları (x_0, y_0) ' ın komşuluğunda aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} P(x, y) &= P_x(x_0, y_0)(x - x_0) + P_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &+ \frac{1}{2} P_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + P_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) \\ &+ \frac{1}{2} P_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q(x, y) &= Q_x(x_0, y_0)(x - x_0) + Q_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &+ \frac{1}{2} Q_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + Q_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) \\ &+ \frac{1}{2} Q_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2 + \dots \end{aligned}$$

(3.21) sisteminden $u \equiv x - x_0$ ve $v \equiv y - y_0$ alındığında,

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} \approx P_x(x_0, y_0)u + P_y(x_0, y_0)v \\ \frac{dv}{dt} \approx Q_x(x_0, y_0)u + Q_y(x_0, y_0)v \end{cases} \quad (3.23)$$

sistemi elde edilir. (3.23) sisteminin katsayılar matrisi Jacobian matrisine karşılık gelir. Ayrıca bu matris singüler değildir.

Örnek 8. Şimdi

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + k^2 \sin \theta = 0 \quad (3.24)$$

sarkaç denklemini inceleyelim. $w = \frac{d\theta}{dt}$ alalım. (3.24) denklemini eşdeğer bir sistem olarak aşağıdaki şekilde verilebilir:

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = w \\ \frac{dw}{dt} = -k^2 \sin \theta \end{cases}$$

Bu sistem için $(\theta_0, w_0) = (n\pi, 0) = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ kritik noktalar olur. Bu noktalar sarkacın durgun konumuna karşılık gelir. Böylece $w > 0$ için θ arttığında sarkacın hareketi $\theta - w$

düzleminin üst (alt) yarısında sağ (sol) tarafa doğru olacaktır. Bu faz düzlemindeki yörüngelerin diferensiyel denklemi,

$$\frac{dw}{d\theta} = -\frac{k^2 \sin \theta}{w}$$

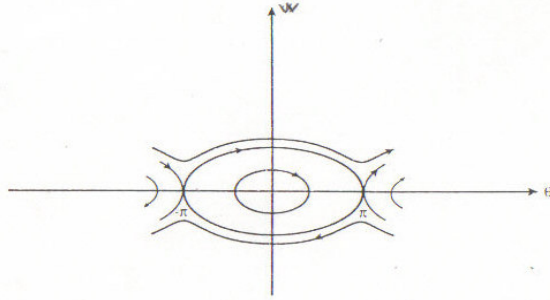
olur. Bu denklem çözülürse, c keyfi bir sabit olmak üzere;

$$\frac{w^2}{2} - k^2 \cos \theta = \frac{c}{2}$$

elde edilir. Bu bağıntı her bir yörünge boyunca enerjinin korunumu ifadesi olarak yorumlanır. Ayrıca bir $[\theta(0), w(0)]$ başlangıç noktasından geçen yörünge tek şekilde belirlenir. Yukarıda elde edilen çözümden

$$w(\theta) = \pm \sqrt{2k^2 \cos \theta + c}$$

bağıntısı yazılabilir. $c = 2k^2$ ye karşılık gelen yörünge $[(2n+1)\pi, 0]$ durgun noktaları boyunca geçer ve geri kalan yörüngeleri içine alır. Benzer biçimde $c > 2k^2$ için hiçbir yörüngenin hızı yani y sıfıra yaklaşmaz; w 'nin işaretine bağlı olarak da θ sınırsız bir biçimde artar ya da azalır. Son olarak $c < 2k^2$ için faz düzleminin yörüngeleri sınırsız bir biçimde $(2n\pi, 0)$ kritik (durgun, denge) noktalarını içine alır. Ayrıca yörüngeler başlangıç noktasından periyodik bir biçimde geçer. k 'nin değişik durumları için söz konusu yörüngelerin temsili bir şekli aşağıda görülmektedir. (Şekil 3.2.2.1.)



Şekil 3.2.2.1. Sarkacın faz şekli

Bu durumda $(2n\pi, 0)$ kritik noktalar kararlı birer merkezi $(m\pi, 0)$, $(m\text{-tek})$ kritik noktalar kararsız birer eyer nokta olur. Bilindiği üzere çözümlü sarkaç hareketi

$$\frac{d^2x}{dt^2} + F(x) = 0 \quad (3.25)$$

biçiminde ikinci mertebeden skaler bir diferensiyel denklem ile modellenmektedir. Bu denklem;

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -F(x) \end{cases} \quad \text{sistemine eşdeğerdir. Bu sisteme ait}$$

potansiyel enerji,

$$V(x) = \int_{x(0)}^x F(s) ds, \quad (3.26)$$

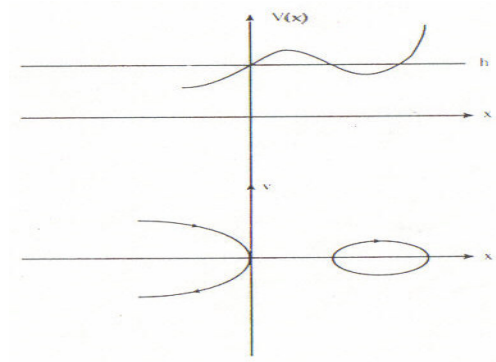
kinetik enerji

$$\frac{1}{2}v^2, \quad (v = \frac{dx}{dt})$$

ile belirlenir. Buna bağlı olarak, h bir sabit olmak üzere toplam enerji,

$$\frac{1}{2}v^2 + v(x) = h = \frac{1}{2}v^2(0) \quad (3.27)$$

olarak elde edilir. h 'nin alacağı değerlere bağlı olarak $x-v$ faz düzleminde yörüngelerin davranışları yorumlanabilir. Aşağıdaki şekillerden $x-v$ faz düzleminde potansiyel enerjiye göre bir yorum görülmektedir. (Şekil 3.2.2.2)



Şekil 3.2.2.2. Potansiyel profilinden faz şeklinin belirlenmesi

Kolaylıkla gösterilebilir ki , eğer potansiyel enerji bir $x = x_c$ kritik noktasında yerel bir minumuma sahip ise $(x_c,0)$ kritik noktası kararlı bir merkez; $x = x_c$ kritik noktasında potansiyel enerji bir yerel maksimuma sahip ise, bu takdirde $(x_c,0)$ kritik noktası bir eyer

noktası olup, kararsızdır; son olarak potansiyel enerji $x = x_c$ kritik noktasında bir büküm noktasına sahip ise, bu taktirde $(x_c, 0)$ kritik noktası köşe olup, kararsızdır.

Örnek 9. $y'' = e^{-2y}, \quad y(0) = y(T) = 0$ (3.28)

sınır değer problemini ele alalım. $v = y'$ alındığında, (3.28)

$$\begin{cases} y' = v \\ v' = e^{-2y} \end{cases}$$

sistemi olarak ifade edilebilir. (3.28) denklemini y' ile çarpalım:

$$y' y'' = e^{-2y} y'.$$

Sınır şartlarına bağlı olarak ,

$$(y')^2 + e^{-2y} = (y'(0))^2 + 1 = a^2$$

olacağı açıktır. Burada $a = \sqrt{(y'(0))^2 + 1}$ ve $|y'(0)|$ ise 1'den küçük değildir. Yukarıda verilen sistemden ;

$$\frac{dv}{dy} = \frac{e^{-2y}}{v}$$

elde edilir. Bu ise değişkenlerine ayrılabilir bir diferensiyel denklemdir. İntegral alındığında;

$$v dv = e^{-2y} dy$$

ifadesinden

$$v^2 + e^{-2y} = a^2$$

elde edilir. Öte yandan

$$e^{-2y} = y'' = v'$$

olduğu için

$$v' = a^2 - v^2$$

olur. Ayrıca , $v' = e^{-2y} > 0$ olması nedeni ile v monoton olarak artan bir fonksiyondur.

$$v^2 + e^{-2y} = a^2$$

ifadesinde sınır şartları kullanıldığında,

$$v^2(T) + e^{-2y(T)} = a^2$$

$$v^2(T) + 1 = a^2$$

$$v^2(T) = a^2 - 1$$

$$v(T) = \sqrt{a^2 - 1} = -v(0)$$

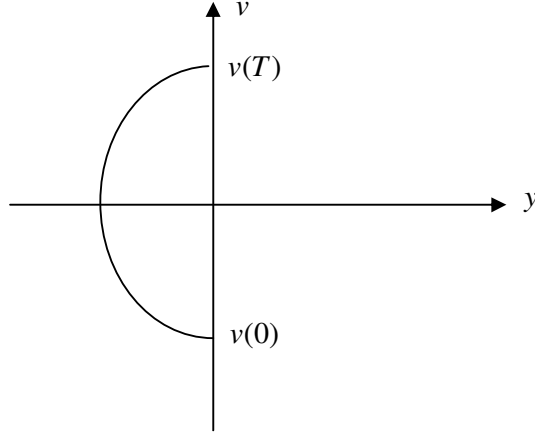
yazılabilir. Ayrıca ,

$$\frac{dv}{dt} = a^2 - v^2$$

denkleminden sınır şartları kullanıldığında;

$$\frac{v(t) + a}{v(t) - a} = \left(\frac{v(0) + a}{v(0) - a} \right) e^{2at}$$

bulunur. Aşağıdaki şekilde v 'ye ait grafik görülmektedir. (Şekil 3.2.2.3.)



Şekil 3.2.2.3. Örnek 9 için faz düzlemi şekli

İşlemler sürdürüldüğünde , kolaylıkla

$$y(t) = \ln \left[\frac{1}{a} \cosh \left(a - \left(t - \frac{T}{2} \right) \right) \right]$$

elde edilir. İlaveten bu örnekte elde edilen potansiyel enerji fonksiyonunun kritik noktalarda alacağı maksimum, minimum ve büküm noktalarına göre kritik noktalarının kararlılık durumları kolaylıkla yorumlanabilir.

3.2.3. Daha yüksek boyutlu sistemlerde kararlılık

Şimdi A , $n \times n$ basamakta singüler olmayan bir matris ; x , $n \times 1$ boyutlu bir vektör

olmak üzere birinci mertebeden

$$\dot{x} = Ax \quad (3.5)$$

lineer diferensiyel denklem sistemini göz önüne alalım. İlgili literatüre bakıldığında kolaylıkla görülebilir ki A matrisinin tüm öz değerleri negatif reel kısımlı ise, bu taktirde bu sistemin sıfır çözümü asimptotik kararlı; öz değerler pozitif reel kısımlı ise, çözümler kararsızdır. Belirtelim ki bu yorum daha da ayrıntılı olarak verilebilir. Ancak burada fazla ayrıntıya girmek istemiyoruz. Öte yandan bilindiği üzere n . mertebeden sabit katsayılı her lineer diferensiyel denklem (3.5) biçiminde bir denklem sistemi olarak ifade edilebilir.

Örnek 10.

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} x$$

sıfır çözümü asimptotik olarak kararlıdır. Çünkü $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ bir köşegen matristir.

Bunun öz değerleri $-1, -2, -3$ olur. $t \rightarrow \infty$ için bütün çözümlerin sıfıra gideceği açıktır. Yani sıfır çözümler asimptotik kararlıdır.

Örnek 11.

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} x$$

sistemini göz önüne alalım. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ olup, öz değerler sırası ile $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$,

$\lambda_3 = -2$ olur. $\lambda_1 = 0$ olduğundan karşılık gelen çözüm bir sabit olur. Yani çözümlerden biri

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} c_1$$

olur. $t \rightarrow \infty$ için bu çözümün sıfıra gitmeyeceği açıktır. O halde verilen denklem sisteminin sıfır çözümü kararlı ancak asimptotik kararlı değildir.

Örnek 12. Eğer $\delta = 0$ ise

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & \delta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x$$

in sıfır çözümü kararlıdır. Bu durum açıktır. Çünkü bu durum için denklem sistemi çözüldüğünde çözüm sabit bir vektör olur. Bu ise her zaman kararlıdır.

Şimdi her x ve her $t \geq t_0$ için f ve f_x sürekli olmak kaydıyla

$$\dot{x} = f(x, t) \quad , \quad x(t_0) = x_0 \quad (3.29)$$

biçiminde bir lineer olmayan vektör başlangıç değer problemini inceleyelim ve bunun tek çözümünü de

$$x(t) = x(t; x_0, t_0)$$

ile gösterelim.

Pek çok fiziksel durumlarda f vektör fonksiyonlarında, x_0 başlangıç vektöründe ya da t_0 başlangıç noktasındaki küçük değişiklikler altında çözümün ne kadar değişeceğini bilmek önemlidir. Ayrıca, (3.29)'un sıfırdan farklı her çözümü kolaylıkla sıfır çözümüne indirgenebilir. Bu nedenle herhangi bir çözümün kararlılığından söz etmek yerine, sıfır çözümün kararlılığından söz etmek daha uygundur.

Tanım 1. $f(0, t) = 0$ olmak üzere

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

başlangıç değer problemini ele alalım. Bu problemin $x(t) \equiv 0$ çözümüne, $\varepsilon > 0$ olmak üzere

$|x_0| < \delta$ olduğunda her $t \geq t_0$ için $|x(t)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta(t_0, \varepsilon)$ sayısı var ise,

kararlıdır denir. Eğer çözümün sıfır çözümü kararlı; $\delta = \delta(\varepsilon)$, yani δ sayısı t_0 'dan bağımsız olarak elde edilebiliyorsa, sıfır çözümüne düzgün kararlıdır denir.

Eğer çözüm kararlı, $\bar{\delta} > 0$ olmak üzere $|x(t_0)| < \bar{\delta}$ olduğunda $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ ise, sıfır çözümüne asimptotik kararlıdır denir.

Örnek 13.

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

başlangıç değer problemini ele alalım. Bu problemin $x(t) = x_0 e^{-(t-t_0)}$, $(t \geq t_0)$ çözümü kararlıdır.

$$\ddot{x} + x = 0$$

Örnek 14.

$$x(0) = c_1, \dot{x}(0) = c_2$$

başlangıç değer problemini inceleyelim. Bu problemin çözümü

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

biçiminde elde edilir. Bu çözüm düzgün kararlıdır.

Örnek 15. Örnek 13’de verilen çözüm aynı zamanda asimptotik kararlıdır. Çünkü çözüm kararlı ve $t \rightarrow \infty$ için $x(t) \rightarrow 0$ dır. Belirtelim ki benzer ifadeler sıfır çözümü için de kullanılabilir.

3.3. Liapunov Fonksiyonları

$$\dot{x} = f(x) \quad (3.30)$$

lineer olmayan vektör otonom sistemi için bir $v(x)$ Liapunov fonksiyonu bir $\bar{x}$ noktası bu sistemin bir denge(kritik) noktası olmak üzere aşağıdaki şartları sağlayan sürekli türevlenebilir skaler bir fonksiyondur:

(i) $v(\bar{x}) = 0$ ve $x \neq \bar{x}$ için $v(x) > 0$, yani v pozitif tanımlıdır;

(ii) $x \neq \bar{x}$ için, $\dot{v}(x(t)) = V_x(x)f(x) \leq 0$ olur.

Burada $\frac{dV}{dx}$ gradient vektörü için zincir kuralı uygulanırsa

$$\dot{V} \equiv \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = V_x f$$

bulunur.

Eğer

$$\dot{x} = f(x), \quad (f(0) = 0)$$

denklem sistemi için bir $V(x)$ Liapunov fonksiyonu var öyle ki $V(x)$ fonksiyonunun $\dot{x} = f(x)$ sistemi boyunca türevi

$$\dot{V}(x) \leq 0$$

şartını sağlıyor ise, bu taktirde $\dot{x} = f(x)$ ’in sıfır çözümü (denge noktası) kararlı olur.

Eğer ; $\dot{V}(x) < 0$ ise bu taktirde söz konusu çözüm asimptotik kararlıdır. Bu ifadeler Liapunov teoreminden alınmıştır.

Örnek 16. İki boyutlu

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \beta x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = -x + \beta y(x^2 + y^2) \end{cases}, \quad (\beta < 0 \text{ bir sabittir})$$

sistemini inceleyelim. Bu sistem (0,0) kritik noktasına sahiptir. Bu sistem için

$$V(x, y) = x^2 + y^2$$

fonksiyonunu bir Liapunov fonksiyonu olarak seçilebilir. $(x, y) = (x(t), y(t))$ bu sistemin bir çözümü olsun . Yukarıdaki Liapunov fonksiyonunun sistem boyunca türevi alındığında

$$\dot{V} = 2x(y + \beta x(x^2 + y^2)) + 2y(-x + \beta y(x^2 + y^2)) = 2\beta(x^2 + y^2)^2$$

elde edilir. Ayrıca, $\dot{V} < 0$ dır. Dolayısıyla verilen sistemin (0,0) kritik noktası asimptotik kararlı olur. Eğer $\beta = 0$ alınsaydı , bu durumda çözüm sadece kararlı olurdu, ancak asimptotik kararlı olmazdı. Ayrıca şunu belirtmekte fayda vardır ki $\beta > 0$ olması durumunda (0,0) kararsız olur.

Örnek 17.

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y \\ \dot{y} = -y - x^3 \end{cases}$$

lineer olmayan sistemi ve bu sisteme ait $V(x, y) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}y^2$ pozitif tanımlı fonksiyonu ele alalım. Yukarıdaki sistem boyunca V 'nin türevi alındığında

$$\dot{V} = x^3(-x + y) + y(-y - x^3) = x^4 - y^2$$

elde edilir. O halde verilen iki boyutlu ve lineer olmayan sistemin (0,0) kritik noktası asimptotik kararlıdır. Ayrıca (0,0) 'ın verilen sistemin bir kritik noktası olduğu açıktır.

4. BULGULAR

Lineer Diferensiyel denklem sistemleri için bazı çözüm yöntemleri verildi. Konu ile ilgili örnekler sunuldu. Kararlılık kavramı, kararlılık türleri, kritik noktaların kararlılık durumları ele alındı. Liapunov yöntemi tanıtıldı. Liapunov yönteminin incelenmek istenen sistemlerin çözümlerinin kararlılık durumlarını test etmede etkili bir yöntem olduğu görülmüştür.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Önceki bölümlerde incelenen konu üzerine bir çok örnekler verilmiş olup , bu bölüm de ise aşağıdaki örneği inceleyerek konuyu sonuca bağlayalım.

Örnek olarak;

$$\begin{cases} \dot{z} = \left(\frac{2t}{1+t^2} \right) z \\ z(0) = 1 \end{cases} \quad (1)$$

başlangıç değeri problemi ele alalım. Bu problem çözüldüğünde,

$$\begin{aligned} \frac{dz}{z} &= \frac{2t}{1+t^2} dt \\ \ln z &= \ln(1+t^2) \\ z(t) &= c(1+t^2) \end{aligned}$$

elde edilir. $z(0) = 1$ olması nedeni ile

$$\begin{aligned} 1 &= c(1+0) \\ c &= 1 \\ z(t) &= 1+t^2 \end{aligned}$$

çözümü elde edilir. Bu çözümün kararsız olduğu açıktır. Şimdi ise

$$\begin{cases} \dot{z} = \left(\frac{-2t}{1+t^2} \right) z \\ z(0) = 1 \end{cases} \quad (2)$$

başlangıç değeri problemi ele alalım.

$$z(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

olacağı açıktır. Bu çözüm kararlıdır. Ayrıca $t \rightarrow \infty$ için $z(t) \rightarrow 0$ olduğundan çözüm asimptotik kararlıdır. Şimdi Liapunov yardımı ile verilen çözümlerin kararlılık durumlarının inceleyelim.

$$V(z) = z^2$$

fonksiyonunu Liapunov fonksiyonu olarak seçelim. Bu fonksiyonun her iki problem denklem boyunca türevi alındığında sırası ile

$$\frac{dv}{dt} = 2z \frac{dz}{dt} = 2z \left(\frac{2t}{1+t^2} \right) z = \frac{4t}{1+t^2} z^2 \geq 0 \quad (t \geq 0)$$

ve

$$\frac{dv}{dt} = \frac{-4t}{1+t^2} z^2 \leq 0$$

elde edilir. Teori gereği, aşağıdakiler söylenebilir:

i) (1) denklemi için

$$V(z) = z^2 \geq 0 \quad , \quad \dot{V}(z) \geq 0$$

olduğundan, verilen problemin çözümleri kararsızdır.

ii) (2) denklemi için

$$V(z) = z^2 \geq 0 \quad , \quad \dot{V}(z) \leq 0$$

olduğundan Liapunov teoremi gereği, verilen problemin çözümünün kararlı olduğu açıktır.

Belirtelim ki bu durum yüksek mertebeden lineer olmayan diferensiyel denklemlerde uygulanabilir.

KAYNAKLAR

- Aydın, M., Gökmen, G., Kuryel, B., Gündüz, G., 1990. *Diferensiyel Denklemler ve Uygulamaları*. İzmir, Türkiye. 240-331.
- Ayres, F., 1978. *Theory and Problems of Differential Equations*. Great Britain.157-163.
- Caferoğlu, M. Y., Kaçar, A., 1994. *Adi Diferensiyel Denklemler*. Erzurum, Türkiye. 79-108.
- Edwards, C. H., Penney, D. E., 2006. *Differential Equations and Boundary Value Problems*. Georgia,U.S.A. 281-365.
- O'Malley, R. E., 1997. *Thinking About Ordinary Differential Equations*. Cambridge, United Kingdom. 133-198.
- Somasundaram, D., 2001. *Ordinary Differential Equations A First Course*. New Delhi, India. 214-282.
- Spiegel, M. R., 1958. *Applied Differential Equations*. Prentice – Hall. 255-290.

ÖZ GEÇMİŞ

Adı Soyadı : Dilek DİKEÇ

Doğum Yeri : Tarsus / Mersin

Doğum Yılı : 1971

Eğitim ve Akademik Durumu:

Lise	1984 – 1988	Tarsus Lisesi, Tarsus
Lisans	1989 – 1995	Gazi Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik Öğretmenliği, Ankara

İş Tecrübesi:

1995-2000	Özel Dersaneler, Ankara
2000-2003	Çaycuma 75.Yıl İlköğretim Okulu, Çaycuma/Zonguldak
2003-2005	Çiftlik Çok Programlı Lise, Çiftlik/Niğde
2005-2006	Hacı Bekir İlköğretim Okulu, Van
2006-....	Cumhuriyet Lisesi, Van