

T. C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ PERRİN
SAYI DİZİLERİ VE GENELLEŞTİRİLMİŞ
SAYI DİZİLERİNİN HERHANGİ BİR
TERİMİNİN HESAPLANMASI

Kenan KAYGISIZ
DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KONYA-2008

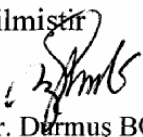
T. C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

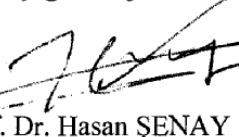
GENELLEŞTİRİLMİŞ PERRİN
SAYI DİZİLERİ VE GENELLEŞTİRİLMİŞ
SAYI DİZİLERİNİN HERHANGİ BİR
TERİMİNİN HESAPLANMASI

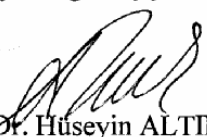
Kenan KAYGISIZ

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 01/08/2008 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.


Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
(DANIŞMAN)


Prof. Dr. Hasan ŞENAY
(JÜRİ)


Prof. Dr. Hüseyin ALTINDIŞ
(JÜRİ)

Doç. Dr. Galip OTURANÇ
(JÜRİ)



Yard.Doç.Dr. Ramazan TÜRKMEN
(JÜRİ)



ÖZET

Doktora Tezi

GENELLEŞTİRİLMİŞ PERRİN SAYI DİZİLERİ VE GENELLEŞTİRİLMİŞ SAYI DİZİLERİNİN HERHANGİ BİR TERİMİNİN HESAPLANMASI

Kenan KAYGISIZ

Selçuk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Durmuş BOZKURT

2008, 67 Sayfa

Jüri: Prof. Dr. Durmuş BOZKURT

Prof. Dr. Hasan ŞENAY

Prof. Dr. Hüseyin ALTINDIŞ

Doç. Dr. Galip OTURANÇ

Yard. Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN

Bu çalışmanın ilk adımı Fibonacci, Lucas ve Pell dizileri ile ilgili bazı çalışmalar Perrin dizisine uygulanmıştır.

Genelleştirilmiş Perrin dizileri tanımlanmış ve bu dizinin terimlerinin matris metodu ile elde edilişi gösterilmiştir. Bu süreçte tanımlanan A companion matrisinin karakteristik ve minimal polinomunun katsayıları incelenmiş ve bu polinomun katsayıları kullanılarak genelleştirilmiş Perrin dizisinin herhangi bir terimini veren formül elde edilmiştir.

Genelleştirilmiş k -mertebeli Perrin sayılarının k -dizileri tanımlanmıştır. Bu dizilerin matris gösterimi yapıp, bu matrisler arasındaki ilişkiler bulunmuştur. Tanımlanan matrislerin determinantı hesaplanmıştır.

Sonra, genelleştirilmiş k -mertebeli Perrin sayılarının k -dizileri için tanımlanan matrisin karakteristik polinomunun katsayıları kullanılarak bu polinomun kökleri $\{r_1, r_2, \dots, r_k\}$ olmak üzere, $V(r_1, r_2, \dots, r_k)$ Vandermonde matrisinin minörünün hesabını veren bir teorem ispatlanmıştır. Bu minör kullanılarak Cramer metodu ile genelleştirilmiş k -mertebeli Perrin sayılarının k -dizilerinin herhangi bir terimini veren formül elde edilmiştir. Bu formülün kullanılışını gösteren bir örnek eklenmiştir.

Perrin dizileri için yapılan bu çalışmalar Fibonacci ve Lucas dizileri için de uygulanmış ve bu dizilerin herhangi bir terimini veren formüller geliştirilmiştir.

Genelleştirilmiş Fibonacci dizisinin özel bir durumu olan Pell sayılarının elde edilişi bir uygulama olarak verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Fibonacci, Lucas, Pell ve Perrin sayıları, genelleştirilmiş Fibonacci ve Perrin dizileri, genelleştirilmiş k -mertebeli Fibonacci (Lucas, Pell, Perrin) sayılarının k -dizileri.

ABSTRACT

PhD. Thesis

GENERALIZED PERRIN SEQUENCES AND CALCULATING ANY TERM OF GENERALIZED SEQUENCES

Kenan KAYGISIZ

Selçuk University
Graduate School of Natural and
Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Durmuş BOZKURT

2008, 67 Pages

Juries: Prof. Dr. Durmuş BOZKURT

Prof. Dr. Hasan ŞENAY

Prof. Dr. Hüseyin ALTINDİŞ

Assoc. Prof. Dr. Galip OTURANÇ

Dr. Ramazan TÜRKMEN

In the first step of this study, some applications have been applied to Perrin sequences, used to be applied to Fibonacci, Lucas and Pell sequences.

Generalized Perrin sequences have been defined and terms of these sequences have obtained by matrix method. Relations between coefficients and roots of characteristic and minimal polynomial of the companion matrix A ,

defined in this process, have been investigated and derived a closed form formula to calculate any term of generalized Perrin sequences by using these coefficients.

k -generalized order- k Perrin sequences have defined. Matrix representations of these sequences have been applied and stated some relations of these matrices. The determinants of these matrices have been calculated.

Let roots of characteristic polynomial of matrices that defined for matrix representation of k -sequences of generalized order- k Perrin numbers are $\{r_1, r_2, \dots, r_k\}$. Then a theorem has been proved to calculate minor of $V(r_1, r_2, \dots, r_k)$ Vandermonde matrices. By using this minor and Cramer method, a formula has been derived to calculate any term of k -sequences of generalized order- k Perrin numbers. In addition, an example has given to show application of this formula.

All of these studies, derived for Perrin sequences, have been applied to Fibonacci and Lucas sequences and formulas have been derived to calculate any term of these sequences.

Getting terms of Pell numbers, a special case of generalized Fibonacci numbers, has been given as an application.

Key Words: Fibonacci, Lucas, Pell ve Perrin numbers, generalized Fibonacci and Perrin sequences, k - sequences of generalized order- k Fibonacci (Lucas, Pell and Perrin) numbers.

ÖNSÖZ

Bu çalışmada Fibonacci, Lucas ve Pell sayılarının tanımları verildikten sonra genelleştirilmiş Fibonacci, Lucas ve Pell dizileri verilmiştir. Ayrıca bu dizilerin k -mertebeli genelleştirilmiş k -dizilerinin tanımları gösterilmiştir. Bu diziler ile ilgili bir kısım sonuçlar anlatılmıştır.

Kalman(1982)'ın genelleştirilmiş Fibonacci dizisinin herhangi bir terimini veren formülü bulan yöntemi irdelenmiştir. Perrin dizileri genelleştirilmiş ve Kalman'ın metodu ile genelleştirilmiş Perrin dizisinin herhangi bir terimini veren formül elde edilmiştir.

Ayrıca, k -mertebeli Fibonacci, Lucas ve Pell sayılarının k -dizileri gibi Perrin dizisinin de k -mertebeli k -dizileri tanımlanmıştır. Bu tanımın ve buna bağlı sonuçların indeksli bir dergide yayınlanmak üzere kabul edilmesi üzerine çalışmalarımız bu alana yoğunlaştırılmıştır. Daha sonra Kalman(1982)'ın uyguladığı yöntem daha geniş olan yeni tanıma uygulanmış ve geliştirilen formül ile elde edilen sonuçlar Fibonacci, Lucas ve Pell sayılarına da uygulanarak bu diziler ile ilgili çalışmalar bir adım öteye götürülmüştür. Yapılan uygulamalarda çalışmaların sonuçlarının doğruluğu görülmüştür.

Yaptığım bu çalışmada bana desteklerini esirgemeyen danışman Hocam Prof. Dr. Durmuş BOZKURT Bey'e, Prof. Dr. Hasan ŞENAY Bey'e, Prof. Dr. Hüseyin ALTINDIŞ Bey'e, Mehmet AKBULAK Bey'e ve beni sabırla destekleyen aileme teşekkürlerimi sunarım.

Kenan KAYGISIZ

Ağustos 2008

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iii
ABSTRACT	v
ÖNSÖZ	vii
İÇİNDEKİLER	viii
1. GİRİŞ	1
1.1. Amaç ve Kapsam	2
1.2. Kaynak Araştırması	2
1.3. Perrin Dizisi	3
1.4. Bazı Sayı Dizileri	4
1.5. Temel Kavramlar	5
1.5.1. Vandermonde matrisi ve determinantı	6
1.5.2. Hessenberg matrisi ve determinantı	6
1.5.3. Karakteristik polinom, özdeğer ve özvektör	7
1.5.4. Companion matris	8
1.5.5. Vieta Teoremi	9
1.6. Dizilerin Genelleştirilmesi ve Matris Gösterimi	10
1.6.1. Fibonacci dizisinin genelleştirilmesi ve matris gösterimi	10
1.6.2. Genelleştirilmiş k -mertebeli Fibonacci sayılarının k -dizileri ve matris gösterimi	13
1.6.3. Genelleştirilmiş k -mertebeli Lucas sayılarının k -dizileri ve matris gösterimi	15
1.6.4. Genelleştirilmiş k -mertebeli Pell sayılarının k -dizileri ve matris gösterimi	17
2. PERRİN DİZİSİNİN GENELLEŞTİRİLMESİ	19
2.1. Perrin Dizisinin Genelleştirilmesi ve Matris Gösterimi	19
2.2. Genelleştirilmiş Perrin Dizisinin Herhangi Bir Teriminin Rekürans İlişkisi Kullanılmadan Bulunması	21
3. GENELLEŞTİRİLMİŞ k -MERTEBELİ PERRİN SAYILARININ k -DİZİSİ	28
3.1. Genelleştirilmiş k -Mertebeli Perrin Sayılarının k -Dizisinin Tanımı ve Matris Gösterimi	28

3.2. Genelleştirilmiş k -Mertebe Perrin Sayılarının k -Dizisinin Herhangi Bir Teriminin Bulunması	35
3.3. Genelleştirilmiş k -Mertebe k -Dizilerinin Herhangi Bir Teriminin bulunması	49
3.3.1. Genelleştirilmiş k -mertebe Fibonacci sayılarının k -dizilerinin herhangi bir teriminin bulunması	49
3.3.2. Genelleştirilmiş k -mertebe Lucas sayılarının k -dizilerinin herhangi bir teriminin bulunması	53
3.3.3. Bir uygulama(Pell dizisinin Binet formülünün elde edilişi)	55
KAYNAKLAR	57
Ek 1 (Tablo 1)	58

1. GİRİŞ

Ortaçağ Avrupası'nın en büyük matematikçilerinden kabul edilen, Fibonacci adıyla ünlenen Pisa'lı Leonardo (1170–1250)'nin kendi hazırladığı aşağıdaki soruya cevabı yine kendi adı ile ünlenen sayı dizisi ile olmuştur. Kuzey Afrika'da büyüyen Fibonacci, Arapların ileri matematik bilgisi ile yetişmiştir. 1202'de yazılan (1228'de yenilenen) *Liber Abaci* adlı kitabıyla bugün de kullandığımız Arap rakamlarını Avrupa'ya tanıtmıştır. Fibonacci'nin meşhur sorusu “*Bir adamın, bir çift yeni doğmuş yavru tavşanı olsun. Bu yavru tavşanlar 1 ay içerisinde büyüsün, ikinci ay olgunlaşsın ve üçüncü ayın başında kendileri gibi bir çift tavşan yavrulasınlar. Doğan yavrular da ebeveynleri gibi yavrulasınlar. Bu tavşanların hiç ölmediği kabul edilirse adamın n inci ayın sonunda kaç çift tavşanı olur?*” şeklindedir.

Yukarıdaki sorunun cevabına gelince; ilk ayın başında yeni doğan bir çift tavşan vardır, ikinci ayın başında aynı çift tavşan vardır, üçüncü ayın başında eski çift tavşan ile yeni bir çift tavşanı olur. n inci ayın başındaki tavşan çifti sayısı F_n ile gösterilirse, $(n+1)$ inci ayın başında F_{n+1} çift tavşanı olur. $(n+2)$ inci ayın başında son durumdaki F_{n+1} tavşan çifti vardır ve F_n tane de olgun tavşan birer çift tavşan doğurmuşlardır. Böylece

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

olur

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21

(Vajda 1989).

Leonardo Fibonacci, kendi adıyla anılan Fibonacci dizisini tanımladıktan sonra bu dizi üzerinde birçok çalışma yapılmıştır. Çalışmalar özellikle dizinin elemanları ile tabiattaki bağlantıları üzerinde yoğunlaşmıştır. *Altın Oran* olarak bilinen

irrasyonel sabitin ($\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1,618\dots$), Fibonacci dizinin ardışık elemanlarının oranının limitine eşit olması, bu sayı dizisine ilgiyi artırmıştır.

Fibonacci dizisinin elemanlarını daha kolay hesaplayabilmek için birçok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalardan rekürans ilişkisi içermeyenleri daha çok ilgi görmüştür. Bunlardan biri Binet Fibonacci dizisi formülü olarak bilinen

$$F_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}}$$

eşitliğidir (Wells 1986).

1.1. Amaç ve Kapsam

Bu çalışmanın amacı; sayılar teorisi ve birçok doğa olayında karşımıza çıkan Fibonacci, Lucas, Pell ve Perrin sayı dizilerinin ve bu dizilerin genelleştirmelerinin, rekürans ilişkisi kullanılmadan herhangi bir teriminin hesaplanabilmesini sağlayacak yöntemler geliştirmektir. Rekürans ilişkisi ile bir dizinin herhangi bir terimini hesaplamak için bulacağımız terime kadar olan bütün terimleri hesaplamak gerekir. Hâlbuki bizim metodumuzla istediğimiz terimi öncekileri hesaplamadan bulabiliriz.

1.2. Kaynak Araştırması

Son yıllardaki çalışmalarda Fibonacci sayılarının genelleştirmeleri göze çarpmaktadır. Bu çalışmaların genel çerçevesi Vajda'nın "Fibonacci and Lucas Numbers and The Golden Section" adlı kitabında bulunmaktadır.

Vajda (1989), negatif Fibonacci ve Lucas sayılarını tanımlamıştır. Ayrıca Vajda (1989)'ya göre Miles, Tribonacci sayı dizisini tanımlamıştır. Edouard Lucas (1876), Perrin sayılarını tanımlamış ancak bu dizi daha sonra üzerinde yaptığı çalışmalar nedeniyle R. Perrin (1899)'in adıyla tanınmıştır.

Fibonacci sayılarının matris gösterimi üzerinde çalışılmıştır. Kalman (1982) daha önceki çalışmalarda tanımlanan genelleştirilmiş Fibonacci dizisinin herhangi bir terimini veren bir formül geliştirmiştir. Er (1984) genelleştirilmiş k -mertebeli Fibonacci sayılarının k -dizilerini tanımlamış ve bunun matris gösteriminin özelliklerini ispatlamıştır. Karaduman (2004) genelleştirilmiş k -mertebeli Fibonacci sayılarının k -dizileri ve matris gösterimi ile ilgili bazı ilişkiler elde etmiştir. Taşçı ve Kılıç (2004) genelleştirilmiş k -mertebeli Lucas sayılarının k -dizilerini tanımlamış, bu dizilerin matris gösterimi üzerinde çalışmış ve elde ettiği matrislerin determinantlarını hesaplamıştır. Öcal ve Ark.(2005) genelleştirilmiş k -mertebeli Fibonacci ve Lucas sayılarının k -dizileri ile ilgili Binet formülleri üretmişlerdir. Kılıç ve Taşçı (2006) genelleştirilmiş k -mertebeli Pell sayılarının k -dizilerini tanımlamışlar, matris gösterimini yapmışlar ve elde ettikleri formüllerle bu dizinin elemanlarının doğrudan elde edilebileceğini göstermişlerdir. Kılıç ve Ark. (2006) genelleştirilmiş k -mertebeli Pell sayılarının k -dizileri üzerinde çalışmışlar ve bu dizilerin terimlerinin toplamını veren bir algoritma geliştirmişlerdir.

1.3. Perrin Dizisi

Perrin dizisi ile ilk olarak 1876'da Edouard LUCAS (American Journal of Mathematics, vol.1, s. 230) çalışmıştır. Ancak dizi daha sonraları 1899'da bu dizi ile çalışan R. PERRIN'in adı ile anılmaktadır[15].

Bu dizi ile ilgili iki temel alanda çalışma yapılmıştır. Bunlardan birincisi, n inci Perrin sayısı $R(n)$ olmak üzere,

$$“n \mid R(n) \Leftrightarrow n \text{ asal sayı}”$$

konjektörüdür. Mesela, $R(19)=209$ 'dur ve $19 \mid 209$ 'dur. Lucas bu önermenin bütün asallar için geçerli olduğunu öne sürmüştür. Ancak daha sonraları asal olmayan bazı n değerleri için de $n \mid R(n)$ olduğu gösterilmiştir. Mesela;

$$n = 521^2 = 271441 \text{ için } n \mid R(n)$$

dir. Bu şekildeki n bileşik sayıları Perrin yalancı asalları (pseudoprimes) olarak adlandırılmıştır.

Bu dizi ile ilgili ikinci çalışma da, Binet-benzeri formül üzerinedir. Perrin dizisi $x^3 - x - 1 = 0$ denkleminin köklerinin kuvvetleri ile ifade edilebilmektedir. Bu denklemin bir kökü reel ($p \sim 1,3324718$), diğerleri $\{q, r\}$ karmaşık sayıdır. Burada reel köke *plastik sayı* adı verilmektedir. Perrin sayıları

$$R(n) = p^n + q^n + r^n$$

Binet formülü ile elde edilebilir. Karmaşık köklerin modülleri 1 den küçük olduğu için büyük n değerleri için formül $R(n) \sim p^n$ ifadesine dönüşür. Bu yolla büyük Perrin sayıları yaklaşık olarak hesaplanabilir.

Ayrıca Fibonacci dizisindeki altın oran gibi, Perrin dizisinin ardışık terimlerinin oranı da p plastik sayısına yaklaşır[16].

1.4. Bazı Sayı Dizileri

$F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ olmak üzere $n \geq 2$ için,

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

şeklinde tanımlanan diziye *Fibonacci Dizisi* denir. Bu dizinin ilk 15 terimi şöyledir:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610

Ayrıca negatif Fibonacci dizisi de $F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$ formülü ile tanımlanır (Vajda 1989).

$L_0 = 2$ ve $L_1 = 1$ olmak üzere $n \geq 2$ için,

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$$

şeklinde tanımlanan diziye *Lucas Dizisi* denir. Bu dizinin ilk 15 terimi şöyledir:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	322	521	843	1364

Ayrıca negatif Lucas dizisi de $L_{-n} = (-1)^n L_n$ formülü ile hesaplanır (Vajda 1989).

$P_0 = 0$ ve $P_1 = 1$ olmak üzere $n \geq 2$ için,

$$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$$

şeklinde tanımlanan diziye *Pell Dizisi* denir. Bu dizinin ilk 13 terimi şöyledir:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
P_n	0	1	2	5	12	29	70	169	408	985	2378	5741	13860	33461

$R_0 = 3$, $R_1 = 0$ ve $R_2 = 2$ olmak üzere $n \geq 2$ için,

$$R_{n+1} = R_{n-1} + R_{n-2}$$

şeklinde tanımlanan diziye *Perrin Dizisi* denir[15]. Bu dizinin ilk 15 terimi de şöyledir:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
R_n	3	0	2	3	2	5	5	7	10	12	17	22	29	39	51	68

1.5.Temel Kavramlar

Bu bölümde, tezde kullanılacak olan bazı temel kavramları hatırlatacağız.

1.5.1. Vandermonde matrisi ve determinanı

$$V(x_1, x_2, \dots, x_k) = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{k-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{k-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_k & x_k^2 & \cdots & x_k^{k-1} \end{bmatrix}$$

veya

$$V(x_1, x_2, \dots, x_k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_k \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_k^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{k-1} & x_2^{k-1} & x_3^{k-1} & \cdots & x_k^{k-1} \end{bmatrix}$$

şeklindeki matrislere *Vandermonde matrisi* denir. Uygun satır (veya sütun) işlemleri ile determinantlarının

$$\det V(x_1, x_2, \dots, x_k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_k \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_k^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{k-1} & x_2^{k-1} & x_3^{k-1} & \cdots & x_k^{k-1} \end{bmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq k} (x_i - x_j)$$

olduğu gösterilebilir.

1.5.2. Hessenberg matrisi ve determinanı

$$A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

şeklindeki $j > i + 1$ için, $a_{ij} = 0$ formundaki matrislere *Alt Hessenberg Matris* denir (Horn 1985).

$a_{i,i+1} = 1$ olan Hessenberg matrisine de *Normalleştirilmiş Alt Hessenberg Matrisi* denir. Ulrich Tamm[11] normalleştirilmiş alt Hessenberg matrisi

$$A_n = \begin{bmatrix} a_0^{(1)} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_0^{(2)} & a_1^{(1)} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_0^{(3)} & a_1^{(2)} & a_2^{(1)} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_0^{(n-1)} & a_1^{(n-2)} & a_2^{(n-3)} & \cdots & a_{n-2}^{(1)} & 1 \\ a_0^{(n)} & a_1^{(n-1)} & a_2^{(n-2)} & \cdots & a_{n-2}^{(2)} & a_{n-1}^{(1)} \end{bmatrix}$$

in determinantını Franklin'in (1967) formülünü kullanarak

$$\det A_n = d_n = \sum_{t=1}^n (-1)^{t-1} a_{n-t}^{(t)} d_{t-1} \quad (1.1)$$

şeklinde sadeleştirmiştir[11].

1.5.3. Karakteristik polinom, özdeğer ve özvektör

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

matrisi ve I_n birim matrisi verilsin. $(\lambda I_n - A)x = 0$ şeklinde ifade edilebilen lineer homojen denklem sisteminin sıfır çözümünden farklı çözümünün olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\det(\lambda I_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

olmasıdır. Bu determinant açıldığı zaman n inci dereceden λ ya bağlı monik bir polinom elde ederiz. Bu polinoma A matrisinin *karakteristik polinomu* denir.

Bu polinomu açık şekilde yazarsak

$$\Delta_A(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$$

olur.

$\Delta_A(\lambda) = 0$ denkleminin A matrisinin *karakteristik denklemi* de denir.

$\Delta_A(\lambda) = 0$ denkleminin köklerine A matrisinin *özdeğerleri* veya *karakteristik değerleri* denir.

$1 \leq i \leq n$ için λ_i ,

$$(\lambda_i I_n - A)x_i = 0$$

denkleminin x_i çözüm vektörüne A matrisinin *özvektörü* veya *karakteristik vektörü* denir.

1.5.4. Companion matrix

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$$

monik polinomu verilsin.

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix}$$

veya

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}$$

şeklindeki matrise $P(\lambda)$ polinomuna karşılık gelen matris veya *Companion matrix* denir.

1.5.5. Vieta Teoremi

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

denkleminin kökleri $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ olsun. Eğer,

$$\begin{aligned} s_1 &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\ s_2 &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n \\ s_3 &= x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \cdots + x_{n-2} x_{n-1} x_n \\ &\vdots \\ s_n &= x_1 x_2 x_3 \cdots x_n \end{aligned}$$

ise

$$s_i = (-1)^i \frac{a_{n-i}}{a_n}$$

olur[17].

1.6. Dizilerin Genelleştirilmesi ve Matris Gösterimi

1.6.1. Fibonacci dizisinin genelleştirilmesi ve matris gösterimi

$F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ olmak üzere $n \geq 2$ için,

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

şeklinde tanımlanan Fibonacci Dizisi, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi kullanılarak

$$A^n \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

ifadesi ile de elde edilebilir (Silvester 1979).

Vajda'ya (1989) göre Miles, $F_{-2} = 0$, $F_{-1} = 0$ ve $F_0 = 1$ olmak üzere, $n \geq 1$ için,

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} + F_{n-3}$$

dizisine *Tribonacci dizisi* adını vermiştir.

Kalman (1982) $c_i (i = 0, 1, \dots, (k-1))$ sabit sayılar olmak üzere, genelleştirilmiş Fibonacci dizisini;

$$F_n = c_{k-1}F_{n-1} + c_{k-2}F_{n-2} + \dots + c_1F_{n-k+1} + c_0F_{n-k} \quad (1.3)$$

olarak tanımlamıştır. $k=2$ ve $c_0 = c_1 = 1$ için genelleştirilmiş Fibonacci dizisi bilinen Fibonacci dizisine dönüşür.

Kalman (1982),

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{k-2} & c_{k-1} \end{bmatrix}_{k \times k}$$

matrisini tanımlayarak tümevarımla (1.2) nin genelleştirilmesi olan

$$A^n \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ \vdots \\ F_{n+k-1} \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

eşitliğine ulaşmıştır. Başlangıç koşulları

$$\begin{bmatrix} F_0 & F_1 & \cdots & F_{k-1} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

olmak kaydıyla (1.3) e çözüm olarak, genelleştirilmiş Fibonacci dizisini tanımlamış ve (1.4) denklemini

$$\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \\ \vdots \\ F_{n+k-1} \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

olarak yeniden ifade etmiştir. Daha özel olarak F_n için,

$$F_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} A^n \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

formülünü vermiştir.

Eğer A matrisi köşegen hale getirilebilirse (1.5) için bir formül geliştirilebileceğini tespit etmiştir. Kalman (1982) bunun için aşağıdaki metodu kullanmıştır.

A matrisinin,

$$P(r) = r^k - c_{k-1}r^{k-1} - c_{k-2}r^{k-2} - \dots - c_1r - c_0$$

polinomunun companion matrisi olduğu aşikârdır. Bundan dolayı $P(r)$, A matrisinin hem karakteristik hem de minimal polinomudur. Bu nedenle k farklı kökü olan $P(r)$ polinomları için A matrisi köşegenleştirilebilir. Bu durumda $P(r)$ nin köklerinin her biri A matrisinin birer özdeğeri olur ve her bir r_i özdeğerine karşılık gelen özvektör

$$(A - r_i I_n)X_i = 0 \quad (1.6)$$

lineer denklem sisteminin çözümü ile elde edilir. k tane özdeğer olduğu için her birinin geometrik katlılığı 1 olmalıdır. Bundan dolayı $(A - r_i I_n)X_i$ matrisinin rankı $(k-1)$ olur. Böylece (1.6) lineer sisteminin çözümü olarak her bir r_i özdeğerine karşılık gelen özvektör

$$X_i = x_i \begin{bmatrix} 1 \\ r_i \\ \vdots \\ r_i^{k-2} \\ r_i^{k-1} \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Burada x_i herhangi bir sabit sayı olabilir. Kolaylık olsun diye $x_i = 1$ alınabilir.

Kalman (1982) A matrisini köşegenleştirmek için S matrisini,

$$S = V(r_1 \ r_2 \ \dots \ r_k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ r_1 & r_2 & \dots & r_{k-1} & r_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ r_1^{k-2} & r_2^{k-2} & \dots & r_{k-1}^{k-2} & r_k^{k-2} \\ r_1^{k-1} & r_2^{k-1} & \dots & r_{k-1}^{k-1} & r_k^{k-1} \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

şeklinde Vandermonde matrisi olarak seçmiştir. Böylece $A = SDS^{-1}$ eşitliğini kullanarak D köşegen matrisini elde etmiş ve (1.5) te yerine yazarak

$$F_n = \sum_{i=1}^k \frac{r_i^n}{P'(r_i)}$$

formülü elde edilmiştir ki, bu formül; genelleştirilmiş Fibonacci dizisinin herhangi bir terimini A matrisinin karakteristik polinomuna ve bu polinomun köklerine bağlı ifade eden formüldür.

1.6.2. Genelleştirilmiş k -mertebeli Fibonacci sayılarının k -dizileri ve matris gösterimi

$1 - k \leq n \leq 0$ olmak üzere başlangıç koşulları,

$$F_n^i = \begin{cases} 1, & i = 1 - n \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

olan, $n > 0$ ve $1 \leq i \leq k$ için

$$F_n^i = \sum_{j=1}^k c_j F_{n-j}^i \quad (1.8)$$

şeklinde tanımlanan diziye *genelleştirilmiş k -mertebeli Fibonacci sayılarının k -dizileri* denir (Er 1984). Burada F_n^i ; i inci dizinin n inci terimini ifade eder. $k = 2$ için genelleştirilmiş dizi bilinen Fibonacci dizisine dönüşür.

Matris gösterimi için

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{k-2} & c_{k-1} \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

k -kare matrisi tanımlanır. Buradan matris çarpım özelliği ile

$$\begin{bmatrix} F_{n-k+2}^i & F_{n-k+3}^i & \cdots & F_{n+1}^i \end{bmatrix}^T = A \begin{bmatrix} F_{n-k+1}^i & F_{n-k+2}^i & \cdots & F_n^i \end{bmatrix}^T$$

eşitliği elde edilir.

Genelleştirilmiş k -mertebeli Fibonacci sayılarının k -dizilerini aynı anda inceleyebilmek için

$$\tilde{F}_n = \begin{bmatrix} F_{n-k+1}^1 & F_{n-k+1}^2 & \cdots & F_{n-k+1}^k \\ F_{n-k+2}^1 & F_{n-k+2}^2 & \cdots & F_{n-k+2}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_n^1 & F_n^2 & \cdots & F_n^k \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

matrisi tanımlanır. Buradan;

$$\tilde{F}_{n+1} = A \tilde{F}_n$$

ve

$$\tilde{F}_{n+1} = A^n \tilde{F}_1$$

eşitlikleri yazılabilir (Er 1984).

Ayrıca;

$$\tilde{F}_1 = A \text{ ve } \tilde{F}_n = A^n$$

olduğu da gösterilmiştir (Karaduman 2004).

1.6.3. Genelleştirilmiş k -mertebeli Lucas sayılarının k -dizileri ve matris gösterimi

Taşçı ve Kılıç (2004), genelleştirilmiş k -mertebeli Lucas sayılarının k -dizilerini $1-k \leq n \leq 0$ olmak üzere, başlangıç koşulları,

$$L_n^i = \begin{cases} 2, & i = 2 - n \\ -1, & i = 1 - n \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

olan, $n > 0$ ve $1 \leq i \leq k$ için

$$L_n^i = \sum_{j=1}^k L_{n-j}^i$$

şeklinde tanımlamışlardır. Burada L_n^i ; i inci dizinin n inci terimini ifade eder. $i = 1$ ve $k = 2$ için genelleştirilmiş dizi bilinen negatif Fibonacci dizisine dönüşür. Eğer $i = 2$ ve $k = 2$ değeri alınırsa genelleştirilmiş Lucas dizisi bilinen Lucas dizisine dönüşür.

A , k -kare matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanırsa

$$\begin{bmatrix} L_{n-k+2}^i & L_{n-k+3}^i & \cdots & L_{n+1}^i \end{bmatrix}^T = A \begin{bmatrix} L_{n-k+1}^i & L_{n-k+2}^i & \cdots & L_n^i \end{bmatrix}^T$$

eşitliği yazılır.

Genelleştirilmiş k -mertebeli Lucas sayılarının k -dizilerini aynı anda inceleyebilmek için

$$\tilde{L}_n = \begin{bmatrix} L_{n-k+1}^1 & L_{n-k+1}^2 & \cdots & L_{n-k+1}^k \\ L_{n-k+2}^1 & L_{n-k+2}^2 & \cdots & L_{n-k+2}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_n^1 & L_n^2 & \cdots & L_n^k \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

matrisi tanımlanır. Buradan;

$$\tilde{L}_{n+1} = A\tilde{L}_n$$

ve

$$\tilde{L}_{n+1} = A^n \tilde{L}_1$$

eşitlikleri yazılabilir. Burada $\tilde{L}_1 = AK$ yazılırsa

$$K = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix} = \tilde{L}_0$$

elde edilir[12].

(1.11) deki $\tilde{L}_n$ ifadesi göz önüne alınırsa,

$$\det \tilde{L}_{n+1} = \begin{cases} -1, & k \text{ tek} \\ (-1)^{n+1}, & k \text{ çift} \end{cases}$$

olarak hesaplanabilir[12].

1.6.4. Genelleştirilmiş k -mertebeli Pell sayılarının k -dizileri ve matris gösterimi

Kılıç ve Taşçı (2006), genelleştirilmiş k -mertebeli Pell sayılarının k -dizilerini $1-k \leq n \leq 0$ olmak üzere, başlangıç koşulları,

$$P_n^i = \begin{cases} 1, & i = 1-n \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

olan, $n > 0$ ve $1 \leq i \leq k$ için

$$P_n^i = 2P_{n-1}^i + P_{n-2}^i + \dots + P_{n-k}^i$$

şeklinde tanımlamışlardır. Burada P_n^i ; i inci dizinin n inci terimini ifade eder. $k = 2$ için genelleştirilmiş dizi bilinen Pell dizisine dönüşür.

A , k -kare matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanırsa

$$\begin{bmatrix} P_{n-k+2}^i & P_{n-k+3}^i & \dots & P_{n+1}^i \end{bmatrix}^T = A \begin{bmatrix} P_{n-k+1}^i & P_{n-k+2}^i & \dots & P_n^i \end{bmatrix}^T$$

ifadesi gerçekleşir.

Genelleştirilmiş k -mertebeli Pell sayılarının k -dizilerini aynı anda inceleyebilmek için

$$\tilde{P}_n = \begin{bmatrix} p_{n-k+1}^1 & p_{n-k+1}^2 & \cdots & p_{n-k+1}^k \\ p_{n-k+2}^1 & p_{n-k+2}^2 & \cdots & p_{n-k+2}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_n^1 & p_n^2 & \cdots & p_n^k \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

matrisi tanımlanır. Buradan

$$\tilde{P}_n = A^n ,$$

$$\tilde{P}_{n+1} = \tilde{P}_1 \tilde{P}_n = \tilde{P}_n \tilde{P}_1$$

ve

$$\tilde{P}_{n+m} = \tilde{P}_m \tilde{P}_n = \tilde{P}_n \tilde{P}_m$$

eşitlikleri elde edilir (Kılıç ve Taşçı 2006).

2. PERRİN DİZİSİNİN GENELLEŞTİRİLMESİ

2.1. Perrin Dizisinin Genelleştirilmesi ve Matris Gösterimi

Tanım 2.1. $n \geq 2$ için, n inci terimi; kendinden bir önceki terimden önceki $(k-1)$ terimin lineer kombinasyonu ile elde edilen diziye *Genelleştirilmiş Perrin Dizisi* denir.

Yani, c_i sabit katsayılar olmak üzere Genelleştirilmiş Perrin Dizisi,

$$R_n = c_{k-2}R_{n-2} + c_{k-3}R_{n-3} + \cdots + c_1R_{n-k+1} + c_0R_{n-k} \quad (2.1)$$

veya

$$R_n = \sum_{i=2}^k c_{k-i}R_{n-i}$$

şeklinde ifade edilebilir. $k=3$ ve $c_0=c_1=1$ için genelleştirilmiş dizi, bilinen Perrin dizisine dönüşür. Ayrıca $n \leq 2$ için

$$R_n = \begin{cases} 2, & n=2 \\ 3, & n=0 \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (2.2)$$

veya daha açık olarak

$$\begin{bmatrix} R_{3-k} & R_{4-k} & \cdots & R_{-1} & R_0 & R_1 & R_2 \end{bmatrix}_{1 \times k} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{1 \times k}$$

başlangıç koşulları verilebilir.

Genelleştirilmiş Perrin sayı dizisini matris metodu ile gösterilebilmek için önce,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{k-2} & 0 \end{bmatrix}_{k \times k} = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ 0 & & & & & \\ 0 & & I_{k-1} & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \\ \hline c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{k-2} & 0 \end{bmatrix}_{k \times k} \quad (2.3)$$

şeklinde k -kare matrisini oluşturalım.

Teorem 2.2. A , (2.3) deki matris olmak üzere,

$$A^n \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_{k-1} \\ R_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{n+1} \\ R_{n+2} \\ \vdots \\ R_{n+k-1} \\ R_{n+k} \end{bmatrix}$$

olur.

İspat. İspatı n üzerinden tümevarımla yapalım. $n = 1$ için,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{k-2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_{k-1} \\ R_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & & R_2 & \\ & & & & R_3 & \\ & & & & \vdots & \\ & & & & R_k & \\ c_{k-2}R_{k-1} + \cdots + c_1R_2 + c_0R_1 & & & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_2 \\ R_3 \\ \vdots \\ R_k \\ R_{k+1} \end{bmatrix}$$

ifade doğru olur. $(n-1)$ için ifadenin doğru olduğunu kabul edelim. Yani,

$$A^{n-1} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_{k-1} \\ R_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_n \\ R_{n+1} \\ \vdots \\ R_{n+k-2} \\ R_{n+k-1} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

ifadesi geçerli olsun. (2.4) ün her iki tarafını soldan A ile çarparsak,

$$AA^{n-1} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_{k-1} \\ R_k \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} R_n \\ R_{n+1} \\ \vdots \\ R_{n+k-2} \\ R_{n+k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{n+1} \\ R_{n+2} \\ \vdots \\ R_{n+k-1} \\ c_{k-2}R_{n+k-2} + c_{k-3}R_{n+k-3} + \cdots + c_1R_{n+1} + c_0R_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{n+1} \\ R_{n+2} \\ \vdots \\ R_{n+k-1} \\ R_{n+k} \end{bmatrix}$$

şeklinde ispat tamamlanır. ■

Sonuç 2.3. Başlangıç koşullarına bağlı olarak

$$\begin{bmatrix} R_{n-k+3} \\ \vdots \\ R_{n-1} \\ R_n \\ R_{n+1} \\ R_{n+2} \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

ifadesi yazılabilir.

2.2. Genelleştirilmiş Perrin Dizisinin Herhangi Bir Teriminin Rekürans İlişkisi Kullanılmadan Bulunması

(2.5) ifadesi daha özel olarak şöyle verilebilir:

Teorem 2.4. A , (2.3) deki matris olmak üzere,

$$R_{n+2} = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]_{1 \times k} A^n [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 3 \quad 0 \quad 2]^T \quad (2.6)$$

olur.

İspat. (2.6) nın sağ tarafını alıp Sonuç 2.3 ü kullanırsak,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{1 \times k} A^n \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{1 \times k} A^n \begin{bmatrix} R_{3-k} \\ \vdots \\ R_{-1} \\ R_0 \\ R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{1 \times k} \begin{bmatrix} R_{n+3-k} \\ \vdots \\ R_{n+1} \\ R_{n+2} \end{bmatrix} = R_{n+2}
\end{aligned}$$

olur. ■

R_n in herhangi bir terimini hesaplayabilmek için Kısım 1.6.1 de özetlediğimiz Kalman'ın (1982) kullandığı metodu uygulayacağız.

Burada R_n 'in daha kolay hesaplanabilmesi için A matrisi köşegenleştirilmelidir. Bununla birlikte A matrisi;

$$P(r) = r^k - 0.r^{k-1} - c_{k-2}r^{k-2} - c_{k-3}r^{k-3} - \cdots - c_1r - c_0 \quad (2.7)$$

polinomuna karşılık gelen companion matristir. Bu nedenle $P(r)$ polinomu, A matrisinin hem karakteristik hem de minimal polinomudur. k farklı kökü olan $P(r)$ polinomları için A matrisi köşegenleştirilebilir. Bundan sonra alınacak $P(r)$ polinomunun k farklı kökü olduğu kabul edilecektir. Bu durumda $P(r)$ polinomunun köklerinin her biri A matrisinin birer özdeğeri olur ve her bir r_i özdeğerine karşılık gelen özvektör

$$(A - r_i I_n) X_i = 0 \quad (2.8)$$

lineer denklem sisteminin çözümü ile elde edilir. k tane özdeğer olduğu için her birinin geometrik katlılığı 1 olmalıdır. Bundan dolayı $(A - r_i I_n) X_i$ matrisinin rankı

$(k-1)$ olur. Böylece (2.8) lineer denklem sisteminin çözümü olarak her bir r_i özdeğerine karşılık gelen özvektör

$$X_i = x_i \begin{bmatrix} 1 \\ r_i \\ \vdots \\ r_i^{k-2} \\ r_i^{k-1} \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Burada x_i herhangi bir sabit sayı olabilir. Kolaylık olsun diye $x_i = 1$ alınabilir.

A matrisini köşegenleştirmek için bu özvektörleri sütun kabul eden S matrisini almamız gerekir. S matrisi (1.7) Vandermonde matrisi olarak seçilerek

$$A = SDS^{-1} \quad (2.9)$$

yazılırsa D köşegen matrisi elde edilir. $A = SDS^{-1}$ ifadesi (2.6) da yerine yazılırsa

$$R_{n+2} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{1 \times k} \left(SDS^{-1} \right)^n \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{1 \times k} SD^n S^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

elde edilir. Bu ifadenin ilk 3 matrisinin çarpımı

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{1 \times k} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_{k-1} & r_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ r_1^{k-2} & r_2^{k-2} & \cdots & r_{k-1}^{k-2} & r_k^{k-2} \\ r_1^{k-1} & r_2^{k-1} & \cdots & r_{k-1}^{k-1} & r_k^{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1^n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & r_2^n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_{k-1}^n & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & r_k^n \end{bmatrix} \quad (2.11) \\
& = \begin{bmatrix} r_1^{n+k-1} & r_2^{n+k-1} & \cdots & r_{k-1}^{n+k-1} & r_k^{n+k-1} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

olurken son iki matrisin çarpımını

$$V(r_1 \ r_2 \ \cdots \ r_k)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix}$$

olarak yazıp y_i leri çözmeye çalışalım. Bu ifadeyi

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_{k-1} & r_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ r_1^{k-2} & r_2^{k-2} & \cdots & r_{k-1}^{k-2} & r_k^{k-2} \\ r_1^{k-1} & r_2^{k-1} & \cdots & r_{k-1}^{k-1} & r_k^{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{k-1} \\ y_k \end{bmatrix}$$

şeklinde yazıp sistemi Cramer metodu ile çözelim. y_i değerini bulmak için soldaki sütunu alıp S matrisinde i inci sütuna yazdıktan sonra i inci sütuna göre determinant açılırsa,

$$y_i = \frac{(-1)^{k+i} 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_{k-1} & r_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ r_1^{k-3} & r_2^{k-3} & \cdots & r_{k-1}^{k-3} & r_k^{k-3} \\ r_1^{k-2} & r_2^{k-2} & \cdots & r_{k-1}^{k-2} & r_k^{k-2} \end{vmatrix} + (-1)^{k+i-2} 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ r_1^{k-4} & r_2^{k-4} & \cdots & r_{k-1}^{k-4} & r_k^{k-4} \\ r_1^{k-2} & r_2^{k-2} & \cdots & r_{k-1}^{k-2} & r_k^{k-2} \\ r_1^{k-1} & r_2^{k-1} & \cdots & r_{k-1}^{k-1} & r_k^{k-1} \end{vmatrix}}{|S|}$$

olur. Matrislerin determinantları alınır

$$y_i = \frac{(-1)^{k+i} 2 \prod_{\substack{i \neq m, i \neq j \\ 1 \leq m < j \leq k}} (r_j - r_m) + (-1)^{k+i-2} 3 \left[\prod_{\substack{i \neq m, i \neq j \\ 1 \leq m < j \leq k}} (r_j - r_m) \right] \sum_{\substack{i \neq m, i \neq j \\ 1 \leq m < j \leq k}} r_m r_j}{\prod_{1 \leq m < j \leq k} (r_j - r_m)}$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade sadeleştirilirse

$$y_i = \frac{(-1)^{k+i} 2 + (-1)^{k+i-2} 3 \sum_{\substack{i \neq m, i \neq j \\ 1 \leq m < j \leq k}} r_m r_j}{(-1)^{k-i} P'(r_i)}$$

olup, buradan

$$y_i = \frac{2 + 3 \sum_{\substack{i \neq m, i \neq j \\ 1 \leq m < j \leq k}} r_m r_j}{P'(r_i)} \quad (2,12)$$

çözümü elde edilir. Bu ifadede toplam sembolündeki ifadeyi, (2.7) deki $P(r)$ polinomunun katsayılarına bağlı olarak Vieta Teoremi yardımıyla inceleyelim. Eğer,

$$\sum_{1 \leq j \leq k} r_j = 0$$

ise

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq k \\ i \neq j}} r_j = -r_i$$

olur. Eğer

$$\sum_{1 \leq m < j \leq k} r_m r_j = -c_{k-2}$$

ise

$$\sum_{\substack{1 \leq m < j \leq k \\ i \neq m, i \neq j}} r_m r_j = -c_{k-2} - r_i(-r_i) = r_i^2 - c_{k-2}$$

olur. Bunu (2.12) de yerine yazarsak,

$$y_i = \frac{2 + 3(r_i^2 - c_{k-2})}{P'(r_i)} \quad (2.13)$$

elde edilir. Burada $P'(r_i)$, $P(r)$ polinomunun r_i noktasındaki türevi ve c_{k-2} , $P(r)$ polinomunun katsayısıdır. (2.11) ve (2.13), (2.10) da yerlerine yazılırsa bu dizinin $(n+2)$ inci terimi $P(r)$ polinomunun köklerine bağlı olarak

$$R_{n+2} = \sum_{i=1}^k r_i^{n+k-1} y_i = \sum_{i=1}^k r_i^{n+k-1} \frac{[2 + 3(r_i^2 - c_{k-2})]}{P'(r_i)} \quad (2.14)$$

şeklinde elde edilir.

Örnek 2.4. $k = 4$ için bir genelleştirilmiş Perrin dizisi tanımlayalım ve bu dizinin terimlerini veren formülü elde edelim.

$k = 4$ için genelleştirilmiş Perrin dizisi

$$R_n = 25R_{n-2} - 60R_{n-3} + 36R_{n-4} \quad (2.15)$$

olarak tanımlansın. Bu durumda (2.2) ye göre başlangıç koşulları

$$R_2 = 2, \quad R_1 = 0, \quad R_0 = 3, \quad R_{-1} = 0, \dots$$

olur. Bu dizinin ilk terimlerini rekürans ilişkisine göre yazalım:

$$3, 0, 2, -180, 158, -4620, 14822, -131460, 653438, \dots \quad (2.16)$$

(2.15) ten görülüyor ki, $c_2 = 25$, $c_1 = -60$ ve $c_0 = 36$ dır. Bu değerlere göre $P(r)$ polinomu

$$P(r) = r^4 - 25r^2 + 60r - 36 = (r+6)(r-1)(r-2)(r-3) \quad (2.17)$$

olur. Bu polinomun kökleri $r_1 = -6$, $r_2 = 1$, $r_3 = 2$ ve $r_4 = 3$ aynı zamanda (2.17) polinomunun companion matrisinin özdeğerleri olur. $P(r)$ polinomunun

$$P'(r) = 4r^3 - 50r + 60$$

türevi (2.14) de yerine yazılırsa

$$R_{n+2} = \sum_{i=1}^4 r_i^{n+3} \left[\frac{2 + 3(r_i^2 - 25)}{4r_i^3 - 50r_i + 60} \right]$$

formülü elde edilir.

Bu formül ile iki değeri hesaplarsak, $n=1$ için $R_3 = -180$ ve $n=4$ için $R_6 = 14822$ bulunur. Bunların (2.16) daki değerler ile aynı değerler olduğu açıkça görülmektedir.

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ k -MERTEBELİ PERRIN SAYILARININ k -DİZİSİ

3.1. Genelleştirilmiş k -Mertebeli Perrin Sayılarının k -Dizisinin Tanımı ve Matris Gösterimi

Tanım 3.1. $1-k \leq n \leq 0$ olmak üzere başlangıç koşulları,

$$R_n^i = \begin{cases} 1, & k+n+i=2 \\ -1, & k+n+i=3 \\ 3, & n+i=1 \\ 2, & n+i=3 \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (3.1)$$

olan, $n > 0$ ve $1 \leq i \leq k$ için

$$R_n^i = \sum_{j=0}^{k-2} c_{k-2-j} R_{n-2-j}^i = c_{k-2} R_{n-2}^i + c_{k-3} R_{n-3}^i + \cdots + c_1 R_{n-k+1}^i + c_0 R_{n-k}^i \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlanan diziye *genelleştirilmiş k -mertebeli Perrin sayılarının k -dizileri* denir. Burada R_n^i ; verilen bir k değeri için i inci dizinin n inci terimini ifade eder. Verilen tanımda $i=1$ ve $k=3$ için genelleştirilmiş k -mertebeli Perrin sayılarının k -dizisi bilinen Perrin dizisine dönüşür. (Farklı k değerleri için örnekler Ek 1 deki Tablo 1 de görülebilir)

Örneğin, $k=5$ için

$$R_n^i = \sum_{j=0}^3 c_{3-j} R_{n-2-j}^i = c_3 R_{n-2}^i + c_2 R_{n-3}^i + c_1 R_{n-4}^i + c_0 R_{n-5}^i$$

olur.

Bu dizi ile ilgili özellikleri daha kolay inceleyebilmek için daha önce (2.3) de tanımladığımız

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{k-2} & 0 \end{bmatrix}_{k \times k} = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ 0 & & & & & \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \\ \hline c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{k-2} & 0 \end{bmatrix}_{k \times k}$$

matrisini göz önüne alalım. A matrisi yardımıyla Perrin dizisinin terimlerini

$$\begin{bmatrix} R_{n-k+2}^i \\ R_{n-k+3}^i \\ \vdots \\ R_n^i \\ R_{n+1}^i \end{bmatrix}_{k \times 1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{k-2} & 0 \end{bmatrix}_{k \times k} \begin{bmatrix} R_{n-k+1}^i \\ R_{n-k+2}^i \\ \vdots \\ R_{n-1}^i \\ R_n^i \end{bmatrix}_{k \times 1} \quad (3.3)$$

eşitliği ile elde edebiliriz. Bu eşitlik ile herhangi ardışık k terimi verilen dizinin diğer terimleri de rekürans ilişkisi ile bulunabilir.

Ayrıca genelleştirilmiş k -mertebeli Perrin sayılarının k -dizilerini aynı matriste göstermek istersek; $\tilde{R}_n$ matrisi,

$$\tilde{R}_n = \begin{bmatrix} R_{n-k+1}^1 & R_{n-k+1}^2 & \cdots & R_{n-k+1}^k \\ R_{n-k+2}^1 & R_{n-k+2}^2 & \cdots & R_{n-k+2}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_n^1 & R_n^2 & \cdots & R_n^k \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

şeklinde olur. Bu durumda (3.3) ün genelleştirmesi aşağıdaki teoremle verilebilir.

Teorem 3.2. (3.4) teki $\tilde{R}_n$ matrisi kullanılırsa

$$\tilde{R}_{n+1} = A\tilde{R}_n \quad (3.5)$$

eşitliği sağlanır.

İspat.

$$\begin{aligned}
 A\tilde{R}_n &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{k-2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{n-k+1}^1 & R_{n-k+1}^2 & \cdots & R_{n-k+1}^k \\ R_{n-k+2}^1 & R_{n-k+2}^2 & \cdots & R_{n-k+2}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_n^1 & R_n^2 & \cdots & R_n^k \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} R_{n-k+2}^1 & R_{n-k+2}^2 & \cdots & R_{n-k+2}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_n^1 & R_n^2 & \ddots & R_n^k \\ \sum_{j=0}^{k-2} c_k R_{n-k+1+j}^1 & \sum_{j=0}^{k-2} c_k R_{n-k+1+j}^2 & \cdots & \sum_{j=0}^{k-2} c_k R_{n-k+1+j}^k \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} R_{n-k+2}^1 & R_{n-k+2}^2 & \cdots & R_{n-k+2}^k \\ R_{n-k+3}^1 & R_{n-k+3}^2 & \cdots & R_{n-k+3}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{n+1}^1 & R_{n+1}^2 & \cdots & R_{n+1}^k \end{bmatrix} = \tilde{R}_{n+1}
 \end{aligned}$$

■

Lemma 3.3. (3.4) ve (3.1) dikkate alınırsa $\tilde{R}_0$ matrisi,

$$\tilde{R}_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{k \times k}$$

formundadır.

Lemma 3.4. $\tilde{R}_0$, Lemma 3.3 deki gibi olmak üzere,

$$\tilde{R}_n = A^n \tilde{R}_0 \tag{3.6}$$

dır.

İspat. (3.5) den biliyoruz ki, $\tilde{R}_{n+1} = A\tilde{R}_n$ dir. İspatı matrislerin çarpımı ile n üzerinden tümevarımla yapalım.

$$\tilde{R}_1 = A\tilde{R}_0$$

ve

$$\tilde{R}_2 = A\tilde{R}_1 = AA\tilde{R}_0 = A^2\tilde{R}_0$$

olur. $(n-1)$ için ifadenin

$$\tilde{R}_{n-1} = A^{n-1}\tilde{R}_0$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda iki tarafı soldan A ile çarparsak

$$A.\tilde{R}_{n-1} = A.A^{n-1}\tilde{R}_0$$

ise

$$\tilde{R}_n = A^n\tilde{R}_0$$

elde edilir. ■

Lemma 3.5. $\llbracket . \rrbracket$, tamdeğer fonksiyonu olmak üzere, $p = \llbracket k/2 \rrbracket$ ve K ,

$$K = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & x \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & 0 & y & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde k -kare matris olsun. Bu durumda K matrisinin determinanı,

$$\det K = \begin{cases} (-1)^p [y^{k-2} + x^k] + 2x^p y^{p-1}, & k \text{ çift} \\ (-1)^p [y^{k-2} + x^k] + x^p y^p, & k \text{ tek} \end{cases} \quad (3.7)$$

olur.

İspat. $p = \llbracket k/2 \rrbracket$ olmak üzere, K matrisini yeniden düzenleyip birinci sütuna göre determinanı açarsak

$$\begin{aligned} \det K &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & x \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & 0 & y & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^p \begin{vmatrix} x & 0 & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & y \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} \\ &= (-1)^p [x \cdot (-1)^2 \cdot |B| + (-1) \cdot (-1)^k \cdot |C| + 1 \cdot (-1)^{k+1} \cdot |D|] \\ &= (-1)^p [x \cdot |B| + (-1)^{k+1} \cdot |C| + (-1)^{k+1} \cdot |D|] \end{aligned} \quad (3.8)$$

olur. $|B|$, $|C|$ ve $|D|$ determinantlarını k nın tek ve çift değerleri için ayrı ayrı hesaplayalım.

Birinci satır ve birinci sütuna göre ard arda determinant açarsak $|D|$ determinanı

$$|D| = \begin{vmatrix} 0 & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & 0 & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \end{vmatrix}_{(k-1) \times (k-1)} = \begin{cases} 0, & k \text{ çift} \\ (-1)^p x^p y^p, & k \text{ tek} \end{cases} \quad (3.9)$$

olur. $|B|$ determinantını birinci sütuna göre açıp (3.9) eşitliği de kullanılırsa

$$|B| = \begin{vmatrix} x & 0 & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}_{(k-1) \times (k-1)} = \begin{cases} x^{k-1} + (-1)^p x^{p-1} y^{p-1}, & k \text{ çift} \\ x^{k-1}, & k \text{ tek} \end{cases}$$

elde edilir. Son sütuna göre determinant açıp (3.9) ifadesi de kullanılıncı $|C|$ determinanı

$$|C| = \begin{vmatrix} 0 & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & 0 & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & y \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}_{(k-1) \times (k-1)} = \begin{cases} -y^{k-2} + (-1)^{p-1} x^p y^{p-1}, & k \text{ çift} \\ y^{k-2}, & k \text{ tek} \end{cases}$$

olur. Bulunan bu değerler (3.8) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \det K &= \begin{cases} (-1)^p \left\{ x \left[x^{k-1} + (-1)^p x^{p-1} y^{p-1} \right] + (-1)^{k+1} \left[-y^{k-2} + (-1)^{p-1} x^p y^{p-1} \right] + (-1)^{k+1} \cdot 0 \right\}, & k \text{ çift} \\ (-1)^p \left\{ x x^{k-1} + (-1)^{k+1} y^{k-2} + (-1)^{k+1} \left[(-1)^p x^p y^p \right] \right\}, & k \text{ tek} \end{cases} \\ &= \begin{cases} (-1)^p \left[y^{k-2} + x^k \right] + 2x^p y^{p-1}, & k \text{ çift} \\ (-1)^p \left[y^{k-2} + x^k \right] + x^p y^p, & k \text{ tek} \end{cases} \end{aligned}$$

istenilen elde edilmiş olur. ■

Şimdi özel durumda $\tilde{R}_n$ matrisinin determinantını hesaplayalım. (3.2) eşitliğindeki c katsayılarının hepsini 1 alırsak

$$R_n^i = \sum_{j=0}^{k-2} R_{n-2-j}^i = R_{n-2}^i + R_{n-3}^i + \cdots + R_{n-k+1}^i + R_{n-k}^i$$

olur. Bu durumda A matrisi de

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}_{k \times k} \quad (3.10)$$

şekline dönüşür.

Teorem 3.6. $p = \llbracket k/2 \rrbracket$ olmak üzere, $\tilde{R}_n$ matrisinin determinanı

$$\det \tilde{R}_n = \begin{cases} (-1)^n \{ (-1)^p [2^{k-2} + 3^k] + 6^p \}, & k \text{ çift} \\ (-1)^p [2^{k-2} + 3^k] + 6^p, & k \text{ tek} \end{cases}$$

dir.

İspat. Önce A matrisinin determinantını hesaplayalım. (3.10) matrisinin ilk sütununa göre determinanı açılırsa,

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}_{k \times k} = (-1)^{k+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}_{(k-1) \times (k-1)} = (-1)^{k+1}$$

elde edilir. Şimdi (3.6) dan

$$\begin{aligned} \det \tilde{R}_n &= \det(A^n \tilde{R}_0) \\ &= \det(A^n) \det(\tilde{R}_0) \\ &= (\det A)^n \det(\tilde{R}_0) \\ &= \left((-1)^{k+1} \right)^n \det(\tilde{R}_0) \end{aligned}$$

olur. $\det(\tilde{R}_0)$ ı hesaplayabilmek için (3.7) de $x=3$ ve $y=2$ yazılırsa,

$$\det \tilde{R}_n = \begin{cases} \left((-1)^{k+1} \right)^n \left\{ (-1)^p \left[y^{k-2} + x^k \right] + 2x^p y^{p-1} \right\}, & k \text{ çift} \\ \left((-1)^{k+1} \right)^n \left\{ (-1)^p \left[y^{k-2} + x^k \right] + x^p y^p \right\}, & k \text{ tek} \end{cases}$$

$$\det \tilde{R}_n = \begin{cases} (-1)^n \left\{ (-1)^p \left[2^{k-2} + 3^k \right] + 6^p \right\}, & k \text{ çift} \\ (-1)^p \left[2^{k-2} + 3^k \right] + 6^p, & k \text{ tek} \end{cases}$$

ispat tamamlanmış olur. ■

3.2. Genelleştirilmiş k -Mertebeli Perrin Sayılarının k -Dizisinin Herhangi Bir Teriminin bulunması

Bu bölümde genelleştirilmiş k -mertebeli Perrin sayılarının k -dizisinin herhangi bir teriminin bulunması için bir formül geliştireceğiz. Bunun için önce aşağıdaki teoremi vereceğiz.

Teorem 3.7. $r_i \in R$, $r_1 < r_2 < \dots < r_{k-1}$ şartını sağlayan $(k-1)$ farklı sayı olsun. Bu sayılardan oluşan $k \times (k-1)$ tipindeki

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ r_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ r_1^2 & r_1 + r_2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^{k-3} & \sum_{l_1+l_2=k-4} r_1^{l_1} r_2^{l_2} & \sum_{l_1+l_2+l_3=k-5} r_1^{l_1} r_2^{l_2} r_3^{l_3} & \dots & 0 \\ r_1^{k-2} & \sum_{l_1+l_2=k-3} r_1^{l_1} r_2^{l_2} & \sum_{l_1+l_2+l_3=k-4} r_1^{l_1} r_2^{l_2} r_3^{l_3} & \dots & 1 \\ r_1^{k-1} & \sum_{l_1+l_2=k-2} r_1^{l_1} r_2^{l_2} & \sum_{l_1+l_2+l_3=k-3} r_1^{l_1} r_2^{l_2} r_3^{l_3} & \dots & \sum_{l_1+\dots+l_{k-1}=1} r_1^{l_1} \dots r_{k-1}^{l_{k-1}} \end{bmatrix}$$

matrisini tanımlayalım. Bu matrisin u . satırı silinince elde edilen matrisin determinantını $|K_1|$ ile gösterirsek,

$$|K_1| = \sum_{1 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_{k-u} \leq k-1} r_{m_1} r_{m_2} \dots r_{m_{k-u}}$$

olur. Burada toplam sembolü, $(k-1)$ farklı reel sayının, $(k-u)$ tanesinin çarpımlarının toplamlarını ifade eder.

İspat. K matrisinin u uncu satırı silinip elde edilen matrisin determinantını her seferinde birinci satıra göre açarak bu işlemi $(u-1)$ defa tekrarlırsak K_2 alt Hessenberg determinantını

$$|K_2| = \begin{vmatrix} b_{u+1,u} & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ b_{u+2,u} & b_{u+2,u+1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ b_{u+3,u} & b_{u+3,u+1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{k-1,u} & b_{k-1,u+1} & \cdots & b_{k-1,k-3} & b_{k-1,k-2} & 1 \\ b_{k,u} & b_{k,u+1} & \cdots & b_{k,k-3} & b_{k,k-2} & b_{k,k-1} \end{vmatrix}_{(k-u) \times (k-u)}$$

elde ederiz. Bu determinanı $(k-1)$ tane r_i reel sayılarına bağlı olarak daha açık yazarsak

$$|K_2| = \begin{vmatrix} \sum_{l_1+\cdots+l_u=1} r_1^{l_1} r_2^{l_2} \cdots r_u^{l_u} & 1 & 0 & \cdots \\ \sum_{l_1+\cdots+l_u=2} r_1^{l_1} r_2^{l_2} \cdots r_u^{l_u} & \sum_{l_1+\cdots+l_{u+1}=1} r_1^{l_1} r_2^{l_2} \cdots r_{u+1}^{l_{u+1}} & 1 & \cdots \\ \sum_{l_1+\cdots+l_u=3} r_1^{l_1} r_2^{l_2} \cdots r_u^{l_u} & \sum_{l_1+\cdots+l_{u+1}=2} r_1^{l_1} r_2^{l_2} \cdots r_{u+1}^{l_{u+1}} & \sum_{l_1+\cdots+l_{u+2}=1} r_1^{l_1} r_2^{l_2} \cdots r_{u+2}^{l_{u+2}} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \sum_{l_1+\cdots+l_u=k-u-2} r_1^{l_1} r_2^{l_2} \cdots r_u^{l_u} & \sum_{l_1+\cdots+l_{u+1}=k-u-3} r_1^{l_1} r_2^{l_2} \cdots r_{u+1}^{l_{u+1}} & \sum_{l_1+\cdots+l_{u+2}=k-u-4} r_1^{l_1} r_2^{l_2} \cdots r_{u+2}^{l_{u+2}} & \cdots \\ \sum_{l_1+\cdots+l_u=k-u-1} r_1^{l_1} r_2^{l_2} \cdots r_u^{l_u} & \sum_{l_1+\cdots+l_{u+1}=k-u-2} r_1^{l_1} r_2^{l_2} \cdots r_{u+1}^{l_{u+1}} & \sum_{l_1+\cdots+l_{u+2}=k-u-3} r_1^{l_1} r_2^{l_2} \cdots r_{u+2}^{l_{u+2}} & \cdots \\ \sum_{l_1+\cdots+l_u=k-u} r_1^{l_1} r_2^{l_2} \cdots r_u^{l_u} & \sum_{l_1+\cdots+l_{u+1}=k-u-1} r_1^{l_1} r_2^{l_2} \cdots r_{u+1}^{l_{u+1}} & \sum_{l_1+\cdots+l_{u+2}=k-u-2} r_1^{l_1} r_2^{l_2} \cdots r_{u+2}^{l_{u+2}} & \cdots \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc}
\cdots & 0 & 0 & 0 \\
\cdots & 0 & 0 & 0 \\
\cdots & 0 & 0 & 0 \\
\ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\cdots & \sum_{l_1+\cdots+l_{k-3}=1} r_1^{l_1} r_2^{l_2} \cdots r_{k-3}^{l_{k-3}} & 1 & 0 \\
\cdots & \sum_{l_1+\cdots+l_{k-3}=2} r_1^{l_1} r_2^{l_2} \cdots r_{k-3}^{l_{k-3}} & \sum_{l_1+\cdots+l_{k-2}=1} r_1^{l_1} r_2^{l_2} \cdots r_{k-2}^{l_{k-2}} & 1 \\
\cdots & \sum_{l_1+\cdots+l_{k-3}=3} r_1^{l_1} r_2^{l_2} \cdots r_{k-3}^{l_{k-3}} & \sum_{l_1+\cdots+l_{k-2}=2} r_1^{l_1} r_2^{l_2} \cdots r_{k-2}^{l_{k-2}} & \sum_{l_1+\cdots+l_{k-1}=1} r_1^{l_1} r_2^{l_2} \cdots r_{k-1}^{l_{k-1}}
\end{array}$$

bulunur.

K_2 , $(k-u)$ kare matris olduğu için $k-u=p$ diyelim ve harf karmaşasını kaldırmak için genelliği bozmadan $H = K_2$ determinantını

$$H = \begin{vmatrix}
h_{11} & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
h_{21} & h_{22} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
h_{31} & h_{32} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
h_{p-1,1} & h_{p-1,2} & \cdots & h_{p-1,p-2} & h_{p-1,p-1} & 1 \\
h_{p1} & h_{p2} & \cdots & h_{p,p-2} & h_{p,p-1} & h_{pp}
\end{vmatrix}$$

şeklinde yazalım. H determinantının birinci sütunu ilk u reel sayıyı ve ikinci sütunu ilk $u+1$ reel sayıyı içerir. Bu şekilde ilerleyince son sütun tüm reel sayıları $(k-1)$ tane) içeren ifadelerden oluşur.

Franklin'in (1.1) formülünü kullanarak ispatı p üzerinden tümevarımla yapalım.

$$d_0 = 1$$

ve

$$d_1 = h_{11} = r_1 + r_2 + \cdots + r_u$$

olduğu açıktır.

$$\begin{aligned}
d_2 &= h_{22}d_1 - h_{21}d_0 \\
&= \left[\sum_{l_1+\dots+l_{u+1}=1} r_1^{l_1} r_2^{l_2} \dots r_{u+1}^{l_{u+1}} \right] [r_1 + r_2 + \dots + r_u] - \left[\sum_{l_1+\dots+l_u=2} r_1^{l_1} r_2^{l_2} \dots r_u^{l_u} \right] \cdot 1 \\
&= \sum_{1 \leq i < j \leq u+1} r_i r_j
\end{aligned}$$

değeri elde edilir ki, bu da doğrudur. $p-1$ için,

$$d_{p-1} = \sum_{1 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_{p-1} \leq m_{k-2}} r_{m_1} r_{m_2} \dots r_{m_{p-1}}$$

olduğunu kabul edelim. p değerinde formülü ispatlamak için

$$\begin{aligned}
d_p &= h_{pp}d_{p-1} - h_{p,p-1}d_{p-2} + h_{p,p-2}d_{p-3} - \dots + (-)^{p-1} h_{p1}d_0 \\
&= \sum_{1 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_{k-u} \leq k-1} r_{m_1} r_{m_2} \dots r_{m_{k-u}}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

eşitliğini göstermemiz gerekiyor. (3.11) ifadesinde her bir terimden kaçar tane elde edildiğini gösteren bir tablo oluşturup veri analizi yapacağız. Bunun için (3.11) ifadesindeki terimleri parçalayıp

$$h_{pp}d_{p-1} = H_1, h_{p,p-1}d_{p-2} = H_2, \dots, h_{p1}d_0 = H_p$$

olarak adlandıralım.

Şimdi Tablo 2'deki bazı ifadeleri açıklayalım.

Bu tabloda kısaltma olarak kullanılan (xxx, r_3) ifadesi; içinde r_3 ü mutlaka bulunduran r_1 ve r_2 yi de içerebilen, 3 farklı r içeren, p . kuvvetten ifadelerin kaçar tane olduğunu gösterir. Yani, $p=4$ için $(r_1^2 r_2 r_3, r_1 r_2^2 r_3, r_1 r_2 r_3^2)$ şeklindeki terimlerin katsayılarını anlatır (Bu 3 ifadenin katsayıları aynıdır).

Veya (xx, r_4) ifadesi $p=4$ için $(r_1^3 r_4, r_2^3 r_4, r_3^3 r_4, r_1 r_4^3, r_2 r_4^3, r_3 r_4^3, r_1^2 r_4^2, r_2^2 r_4^2, r_3^2 r_4^2)$ terimlerinin katsayılarını ifade eder. Burada tüm ifadelerin kuvvetleri toplamının p ve katsayıların aynı olduğu unutulmamalıdır.

Eksik sütun: H matrisinin birinci sütunu ve d_0, r_{u+1} i içermediği için H_p ifadesi de r_{u+1} i içermez. Bu nedenle $(u+1)$ inci blokta son sütun boştur.

H_{p-1} ifadesi r_{u+1} ile birlikte r_{u+2} yi de içermez. Böylece aşağı doğru her blokta en sağdan bir sütun daha azalarak devam eder $(u+1)$ inci ve daha sonraki sütunlarda).

H matrisinin son satırı belirli r_i değerlerinin, kuvvetleri toplamı p olan bütün terimlerini içerdiği için H_p deki eksiklik sayısı kadar da H_{p-1} de eksikliğe neden olur. Böylece yeni H_{p-1} ; $H_{p-1} - H_p$ olur. Bu şekilde devam edilerek Tablo 2 oluşturulur.

$(a-b)^p$ ifadesinin binom açılımı yapıp $a=b=1$ alınır,

$$(a-b)^p = \binom{p}{0} - \binom{p}{1} + \binom{p}{2} - \dots + (-1)^p \binom{p}{p} = 0$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik göz önüne alınıp, (3.11) ifadesindeki işaretler incelenir ve katsayılar toplanırsa, toplam sonunda bazı blokların son satırları dışında (p inci bloktan sonra) tüm terimlerin birbirini götürdüğü görülebilir. (3.11) ifadesinde $p+1$ terim varken tabloda p sütun vardır. Böylece binom açılımının ilk terimi olan $\binom{p}{0}=1$ sayısı toplam dışında kalır ve (3.11) deki işaretlere göre toplam yapılırsa diğer terimlerin toplamı 1 olur.

$$\binom{p}{0} = 1 = \binom{p}{1} - \binom{p}{2} + \dots + (-1)^{p-1} \binom{p}{p}$$

elde edilir (p inci ve daha sonraki blokların son satırlarının ilk terimi).

Boş sütunu izah edebilmek için örnek olarak $u = p-2$ alalım. Böylece $p-1$ inci blokta boş sütun olacaktır.

Tablo 2 den de görüleceği gibi p inci ve daha sonraki bloklarda son satırda p tane r nin çarpımından oluşan ayrık kümeler oluşur. Bu kümelerin birleşimi de formülden istenendir.

Tablo 2

1.Blok	H_1	H_2	H_3	$\dots$	H_{p-2}	H_{p-1}	H_p
(x, r_1)				$\dots$		$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2.Blok	H_1	H_2	H_3	$\dots$	H_{p-2}	H_{p-1}	H_p
(x, r_2)				$\dots$		$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
(xx, r_2)				$\dots$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

3.Blok	H_1	H_2	$\dots$	H_{p-3}	H_{p-2}	H_{p-1}	H_p
(x, r_3)			$\dots$			$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
(xx, r_3)			$\dots$		$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$
(xxx, r_3)			$\dots$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\vdots$

$p-1.Blok$	H_1	H_2	H_3	$\dots$	H_{p-2}	H_{p-1}	H_p
(x, r_{p-1})				$\dots$		$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	
(xx, r_{p-1})				$\dots$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(xx\dots x, r_{p-1})$ ($p-2$ tane x)		$\begin{pmatrix} p-2 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} p-2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\dots$	$\begin{pmatrix} p-2 \\ p-4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} p-2 \\ p-3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p-2 \\ p-2 \end{pmatrix}$	
$(xx\dots x, r_{p-1})$ ($p-1$ tane x)	$\begin{pmatrix} p-1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} p-1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} p-2 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\dots$	$\begin{pmatrix} p-1 \\ p-3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} p-1 \\ p-2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p-1 \\ p-1 \end{pmatrix}$	

$p.Blok$	H_1	H_2	H_3	$\dots$	H_{p-2}	H_{p-1}	H_p
(x, r_p)				$\dots$			
(xx, r_p)				$\dots$	$\binom{2}{0} - \binom{2}{1} + \binom{2}{2}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(xx\dots x, r_p)$ ($p-1$ tane x)	$\binom{p-1}{0}$	$\binom{p-1}{1}$	$\binom{p-2}{2}$	$\dots$	$\binom{p-1}{p-3} - \binom{p-1}{p-2} + \binom{p-1}{p-1}$		
$(xx\dots x, r_p)$ (p tane x)	$\binom{p}{1}$	$\binom{p}{2}$	$\binom{p}{3}$	$\dots$	$\binom{p}{p-2} - \binom{p}{p-1} + \binom{p}{p}$		
$\vdots$							

$k-2.Blok$	H_1	H_2	H_3	$\dots$	H_{p-2}	H_{p-1}	H_p
(x, r_{k-2})				$\dots$			
(xxx, r_{k-2})				$\dots$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(x^2x\dots x, r_{k-2})$ ($p-1$ tane x)	$\binom{p-1}{0}$	$\binom{p-1}{1} - \binom{p-1}{2} + \dots + (-1)^{p-1} \binom{p-1}{p-1}$		$\dots$			
$(xx\dots x, r_{k-2})$ (p tane x)	$\binom{p}{1}$	$\binom{p}{2} - \binom{p}{3} + \dots + (-1)^{p-1} \binom{p}{p}$		$\dots$			

$k-1.Blok$	H_1	H_2	H_3	$\dots$	H_{p-2}	H_{p-1}	H_p
(x, r_{k-1})				$\dots$			
(xxx, r_{k-1})				$\dots$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(x^2x\dots x, r_{k-1})$ ($p-1$ tane x)	$\binom{p-1}{0} - \binom{p-1}{1} + \binom{p-1}{2} - \dots + (-1)^{p-1} \binom{p-1}{p-1} = 0$			$\dots$			
$(xx\dots x, r_{k-1})$ (p tane x)	$\binom{p}{1} - \binom{p}{2} + \binom{p}{3} - \dots + (-1)^{p-1} \binom{p}{p} = 1$			$\dots$			

■

Teorem 3.8. k farklı $r_i, (i=1,2,\dots,k)$ köküne sahip

$$P(r) = r^k - 0.r^{k-1} - c_{k-2}r^{k-2} - c_{k-3}r^{k-3} - \dots - c_1r - c_0$$

polinomu verilsin ve S , (1.7) deki gibi olsun. Karışıklığa sebebiyet vermemek ve hesaplamaları daha kolay yapabilmek için genelliği bozmadan kökleri artan sırada yazacağız. Yani, $r_1 < r_2 < \dots < r_k$ olsun.

S matrisinin (u, v) indisli minörü $M_{uv}^{(k)}$ ile gösterilirse,

$$M_{uv}^{(k)} = (-1)^{v-u-1} \left\{ -r_v^{k-u} + \sum_{z=2}^{k-u} c_{k-z} r_v^{k-u-z} \right\} \frac{|S|}{P'(r_v)}$$

olur. Burada $|S|$; S matrisinin determinanı ve $P'(r_v)$; $P(r)$ polinomunun r_v noktasındaki türevidir.

İspat. S Vandermonde matrisinin determinanı uygun sütun işlemiyle hesaplanabilir. Bu yolla,

$$|S| = \left[\sum_{1 \leq i < j \leq k} (r_j - r_i) \right]$$

olur.

Bu determinanı hesaplama sürecinde sonlu sayıda elemanter sütun işlemiyle

$$|S| = \left[\sum_{1 \leq i < j \leq k} (r_j - r_i) \right] |S_1|$$

eşitliği elde edilir. Burada S_1 esas köşegen elemanlarının hepsi 1 olan k -kare alt üçgen matristir. Yani, $l_i \geq 0$; $(i=1,2,\dots,k)$ için

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ r_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ r_1^2 & r_1 + r_2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ r_1^{k-3} & \sum_{l_1+l_2=k-4} r_1^{l_1} r_2^{l_2} & \sum_{l_1+l_2+l_3=k-5} r_1^{l_1} r_2^{l_2} r_3^{l_3} & \dots & 0 & 0 \\ r_1^{k-2} & \sum_{l_1+l_2=k-3} r_1^{l_1} r_2^{l_2} & \sum_{l_1+l_2+l_3=k-4} r_1^{l_1} r_2^{l_2} r_3^{l_3} & \dots & 1 & 0 \\ r_1^{k-1} & \sum_{l_1+l_2=k-2} r_1^{l_1} r_2^{l_2} & \sum_{l_1+l_2+l_3=k-3} r_1^{l_1} r_2^{l_2} r_3^{l_3} & \dots & \sum_{l_1+\dots+l_{k-1}=1} r_1^{l_1} \dots r_{k-1}^{l_{k-1}} & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde bir matristir.

Şimdi S matrisinin minörünü basamak basamak hesaplayalım. S matrisinin v inci sütunu silip yukarıdaki gibi elemanter sütun işlemleri uygulayarak elde ettiğimiz matrise S_2 dersek, S_2 matrisi $k \times (k-1)$ boyutunda, r_v dışındaki $k-1$ farklı kökü içeren bir matris olur.

Ayrıca, elemanter satır işlemleri sırasında (S den S_2 ye geçerken) oluşan katsayı da

$$\prod_{\substack{v \neq m, v \neq j \\ 1 \leq m < j \leq k}} (r_j - r_m) = \frac{|S|}{(-1)^{k-v} P'(r_v)}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Burada S_2 matrisinin u uncu satırını silip Teorem 3.7 uygulanırsa $|S_2|$ determinantının değeri

$$|S_2| = \sum_{1 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_{k-u} \leq k-1} r_{m_1} r_{m_2} \dots r_{m_{k-u}}$$

olur. Burada toplam sembolü, $P(r)$ nin r_v dışındaki $(k-1)$ kökünün, $(k-u)$ tanesinin çarpımlarının toplamlarını ifade eder.

Diğer yandan

$$P(r) = r^k - 0.r^{k-1} - c_{k-2}r^{k-2} - c_{k-3}r^{k-3} - \dots - c_1r - c_0$$

polinomunun k farklı kökü olduğunu biliyoruz. Bu kökler ile $P(r)$ polinomunun katsayıları arasındaki ilişkileri Vieta Teoremi yardımıyla inceleyelim. Eğer,

$$\sum_{1 \leq i \leq k} r_i = 0$$

ise

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ i \neq v}} r_i = -r_v$$

olur. Eğer

$$\sum_{1 \leq i < j \leq k} r_i r_j = -c_{k-2}$$

ise

$$\sum_{\substack{1 \leq i < j < \leq k \\ i \neq v, j \neq v}} r_i r_j = -c_{k-2} - r_v(-r_v) = r_v^2 - c_{k-2}$$

olur. Eğer

$$\sum_{1 \leq i < j < t \leq k} r_i r_j r_t = c_{k-3}$$

ise

$$\sum_{\substack{1 \leq i < j < t \leq k \\ i \neq v, j \neq v, t \neq v}} r_i r_j r_t = c_{k-3} - r_v(r_v^2 - c_{k-2}) = -r_v^3 + r_v c_{k-2} + c_{k-3}$$

olur. Eğer

$$\sum_{1 \leq i < j < t < h \leq k} r_i r_j r_t r_h = -c_{k-4}$$

ise

$$\sum_{\substack{1 \leq i < j < t < h \leq k \\ i \neq v, j \neq v, t \neq v, h \neq v}} r_i r_j r_t r_h = -c_{k-4} - r_v \left(-r_v^3 + r_v c_{k-2} + c_{k-3} \right) = r_v^4 - r_v^2 c_{k-2} - r_v c_{k-3} - c_{k-4}$$

olur. Böyle devam edilirse S_2 Hessenberg matrisinin determinanı $P(r)$ polinomunun katsayılarına ve r_v köküne bağlı olarak

$$|S_2| = \sum r_{m_1} r_{m_2} \dots r_{m_{k-u}} = (-1)^{k-u-1} \left\{ -r_v^{k-u} + \sum_{z=2}^{k-u} c_{k-z} r_v^{k-u-z} \right\}$$

şeklinde genelleştirilebilir.

Sonuç olarak S matrisinin u uncu satır ve v inci sütunu silinince determinanı

$$\begin{aligned} M_{uv}^{(k)} &= (-1)^{k-u-1} \left\{ -r_v^{k-u} + \sum_{z=2}^{k-u} c_{k-z} r_v^{k-u-z} \right\} \frac{|S|}{(-1)^{k-v} P'(r_v)} \\ &= (-1)^{v-u-1} \left\{ -r_v^{k-u} + \sum_{z=2}^{k-u} c_{k-z} r_v^{k-u-z} \right\} \frac{|S|}{P'(r_v)} \end{aligned}$$

olur. Burada, $|S|$; S matrisinin determinanı ve $P'(r_v)$; $P(r)$ polinomunun r_v noktasındaki türevidir. ■

Bu bölümde Kalman'ın metodunu kullanarak genelleştirilmiş Perrin dizilerinin herhangi bir terimini veren formülü oluşturacağız.

(3.6) yı kullanarak

$$\begin{bmatrix} R_n^1 & R_n^2 & \dots & R_n^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} A^n \tilde{R}_0$$

eşitliğini yazabiliriz. Kısım 2.2 de Genelleştirilmiş Perrin Sayıları için kullanılan yöntem aynen kullanılınc (2.10)

$$\begin{aligned} R_n^i &= \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} (SDS^{-1})^n \tilde{R}_0 \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} SD^n S^{-1} \tilde{R}_0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

şeklinde ifade edilir. Bu ifadenin ilk 3 matrisinin çarpımı

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{1 \times k} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ r_1 & r_2 & \dots & r_{k-1} & r_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ r_1^{k-2} & r_2^{k-2} & \dots & r_{k-1}^{k-2} & r_k^{k-2} \\ r_1^{k-1} & r_2^{k-1} & \dots & r_{k-1}^{k-1} & r_k^{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1^n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & r_2^n & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r_{k-1}^n & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & r_k^n \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} r_1^{n+k-1} & r_2^{n+k-1} & \dots & r_{k-1}^{n+k-1} & r_k^{n+k-1} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

olurken son iki matrisin çarpımı

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ r_1 & r_2 & \dots & r_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^{k-2} & r_2^{k-2} & \dots & r_k^{k-2} \\ r_1^{k-1} & r_2^{k-1} & \dots & r_k^{k-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 3 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 3 & 0 & \dots & 0 \\ 3 & 0 & 2 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^1 & y_1^2 & \dots & y_1^k \\ y_2^1 & y_2^2 & \dots & y_2^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{k-1}^1 & y_{k-1}^2 & \dots & y_{k-1}^k \\ y_k^1 & y_k^2 & \dots & y_k^k \end{bmatrix} = Y$$

olarak yazılıp y_i ler çözülmelidir.

Cramer metodu ve Teorem 3.8 de ispatlanan $M_{uv}^{(k)}$ fonksiyonu kullanılarak $i \geq 3$ için,

$$y_n^i = \frac{(-1)^{k+n-i+1} [3M_{k-i+1,n}^{(k)} + 2M_{k-i+3,n}^{(k)}]}{|S|}, \tag{3.14}$$

$i=1$ için

$$y_n^1 = \frac{(-1)^{n+1} [M_{1n}^{(k)} + M_{2n}^{(k)} + (-1)^{k-1} 3M_{kn}^{(k)}]}{|S|}$$

ve $i=2$ için

$$y_n^2 = \frac{(-1)^n [M_{1n}^{(k)} + (-1)^{k+n-1} 3M_{k-1,n}^{(k)}]}{|S|}$$

elde edilir. (3.14) ve (3.13), (3.12) de yerlerine yazılırsa

$$R_n^i = \sum_{j=1}^k r_j^{n+k-1} y_j^i \quad (3.15)$$

formülüne ulaşılır. Daha açık olarak bu ifade

$$\begin{bmatrix} R_n^1 & R_n^2 & \cdots & R_n^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1^{n+k-1} & r_2^{n+k-1} & \cdots & r_{k-1}^{n+k-1} & r_k^{n+k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1^1 & y_1^2 & \cdots & y_1^k \\ y_2^1 & y_2^2 & \cdots & y_2^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_k^1 & y_k^2 & \cdots & y_k^k \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir.

Örnek 3.9. Genelleştirilmiş 4-mertebeli Perrin sayılarının 4-dizisi

$$R_{n+4}^i = 25R_{n+2}^i + 60R_{n+1}^i + 36R_n^i \quad (3.16)$$

şeklinde tanımlansın. 3. dizinin 5. terimini yani R_5^3 ü hesaplayalım.

Çözüm. Karşılaştırmak için (3.16) ile verilen rekürans ilişkisi ile dizinin ilk 5 terimini verelim

$n \backslash i$	1	2	3	4
-3	1	-1	0	3
-2	-1	0	3	0
-1	0	3	0	2
0	3	0	2	0
1	-24	39	180	158
2	39	180	158	120
3	-420	1083	4620	4022
4	-357	6840	14822	12480
5	-9024	39279	131460	113438

Formülü uygulayabilmek için önce

$$P(r) = r^4 - c_2 r^2 - c_1 r - c_0 = r^4 - 25r^2 - 60r - 36$$

polinomunu yazıp $r_1 = -3$, $r_2 = -2$, $r_3 = -1$ ve $r_4 = 6$ olarak köklerini tespit edelim.

Teorem 3.8 kullanılarak

$$S^{-1}R_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & 6 \\ 9 & 4 & 1 & 36 \\ -27 & -8 & -1 & 216 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^1 & y_1^2 & y_1^3 & y_1^4 \\ y_2^1 & y_2^2 & y_2^3 & y_2^4 \\ y_3^1 & y_3^2 & y_3^3 & y_3^4 \\ y_4^1 & y_4^2 & y_4^3 & y_4^4 \end{bmatrix} = Y$$

olup Y matrisi hesaplanabilir.

Örnek olarak y_3^3 ü hesaplayalım.

$$M_{23}^{(4)} = (-1)^{3-2-1} \left\{ -(-1)^2 + \sum_{z=2}^2 c_{4-z} (-1)^{2-z} \right\} \frac{|S|}{P'(-1)} = \frac{-12|S|}{7}$$

ve

$$M_{43}^{(4)} = (-1)^{3-4+1} \left\{ -(-1)^{4-4} + \sum_{z=2}^0 c_{4-z} (-1)^{4-4-z} \right\} \frac{|S|}{P'(-1)} = \frac{|S|}{14}$$

olur. Böylece (3.14) den

$$y_3^3 = \frac{(-1)^{4+3-3+1} [3M_{23}^{(4)} + 2M_{43}^{(4)}]}{|S|} = 5$$

elde edilir.

Klasik yolla Y matrisi hesaplanırsa

$$\begin{bmatrix} y_1^1 & y_1^2 & y_1^3 & y_1^4 \\ y_2^1 & y_2^2 & y_2^3 & y_2^4 \\ y_3^1 & y_3^2 & y_3^3 & y_3^4 \\ y_4^1 & y_4^2 & y_4^3 & y_4^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-7}{18} & \frac{-1}{6} & \frac{23}{9} & \frac{7}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{2} & \frac{-61}{8} & \frac{-29}{4} \\ \frac{9}{14} & \frac{-33}{14} & 5 & \frac{55}{7} \\ \frac{-1}{252} & \frac{1}{42} & \frac{5}{72} & \frac{5}{84} \end{bmatrix}$$

olur. Burada bulduğumuz değerin doğruluğu görülmektedir.

(3.15) den

$$\begin{aligned} R_5^3 &= \sum_{j=1}^4 r_j^8 y_j^3 = r_1^8 y_1^3 + r_2^8 y_2^3 + r_3^8 y_3^3 + r_4^8 y_4^3 \\ &= (-3)^8 \frac{23}{9} + (-2)^8 \frac{-61}{8} + (-1)^8 5 + 6^8 \frac{5}{72} \\ &= 131460 \end{aligned}$$

olur.

3.3. Genelleştirilmiş k -Mertebeli k -Dizilerinin Herhangi Bir Teriminin Bulunması

3.3.1. Genelleştirilmiş k -mertebeli Fibonacci sayılarının k -dizilerinin herhangi bir teriminin bulunması

(1.9) ve (1.10) ile verilen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{k-2} & c_{k-1} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

ve

$$\tilde{F}_n = \begin{bmatrix} F_{n-k+1}^1 & F_{n-k+1}^2 & \cdots & F_{n-k+1}^k \\ F_{n-k+2}^1 & F_{n-k+2}^2 & \cdots & F_{n-k+2}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_n^1 & F_n^2 & \cdots & F_n^k \end{bmatrix}$$

matrislerini tekrar hatırlayalım.

Bu matrislere göre ve başlangıç koşullarının tanımından

$$\tilde{F}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{k \times k}$$

olur. $r_1 < r_2 < \cdots < r_k$ olmak üzere $r_i, (i=1, 2, \dots, k)$

$$P(r) = r^k - c_{k-1}r^{k-1} - c_{k-2}r^{k-2} - c_{k-3}r^{k-3} - \cdots - c_1r - c_0 \quad (3.18)$$

polinomunun kökleri ve S matrisi (1.7) deki gibi Vandermonde matrisi olsun.

S matrisinin (u, v) indisli minörü

$$M_{uv}^{(k)} = \sum r_{m_1} r_{m_2} \cdots r_{m_{k-u}} \left[\frac{(-1)^{k-v} |S|}{P'(r_v)} \right] \quad (3.19)$$

olur. Burada, $|S|$; S matrisinin determinanı, $P'(r_v)$; $P(r)$ polinomunun r_v noktasındaki türevi ve toplam sembolü; $P(r)$ nin r_v dışındaki $(k-1)$ kökünün $(k-u)$ tanesinin çarpımlarının toplamlarını ifade eder.

Diğer yandan (3.18) polinomunun k tane kökü olduğunu biliyoruz. Bu kökler ile $P(r)$ polinomunun katsayıları arasındaki ilişkileri Vieta Teoremi yardımıyla inceleyelim.

$$\sum_{1 \leq i \leq k} r_i = c_{k-1}$$

ise

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ i \neq v}} r_i = -r_v + c_{k-1}$$

olur. Eğer

$$\sum_{1 \leq i < j \leq k} r_i r_j = -c_{k-2}$$

ise

$$\sum_{\substack{1 \leq i < j < \leq k \\ i \neq v, j \neq v}} r_i r_j = -c_{k-2} - r_v (-r_v + c_{k-1}) = r_v^2 - c_{k-1} r_v - c_{k-2}$$

olur. Eğer

$$\sum_{1 \leq i < j < t \leq k} r_i r_j r_t = c_{k-3}$$

ise

$$\sum_{\substack{1 \leq i < j < t \leq k \\ i \neq v, j \neq v, t \neq v}} r_i r_j r_t = c_{k-3} - r_v (r_v^2 - c_{k-1} r_v - c_{k-2}) = -r_v^3 + c_{k-1} r_v^2 + c_{k-2} r_v + c_{k-3}$$

olur. Böyle devam edilirse (3.19) daki toplam sembolünün $P(r)$ polinomunun katsayılarına ve r_v köküne bağlı olarak değeri

$$\sum r_{m_1} r_{m_2} \dots r_{m_{k-u}} = (-1)^{k-u-1} \left\{ -r_v^{k-u} + \sum_{z=1}^{k-u} c_{k-z} r_v^{k-u-z} \right\}$$

olarak elde edilir.

(1.7)'deki S matrisinin, u uncu satır ve v inci sütunu silinince determinanti

$$\begin{aligned}
M_{uv}^{(k)} &= (-1)^{k-u-1} \left\{ -r_v^{k-u} + \sum_{z=1}^{k-u} c_{k-z} r_v^{k-u-z} \right\} \frac{|S|}{(-1)^{k-v} P'(r_v)} \\
&= (-1)^{v-u-1} \left\{ -r_v^{k-u} + \sum_{z=1}^{k-u} c_{k-z} r_v^{k-u-z} \right\} \frac{|S|}{P'(r_v)}
\end{aligned}$$

olur.

Şimdi k -mertebeli Fibonacci sayılarının k -dizilerinin herhangi bir terimini veren formülü elde etmek için

$$[F_n^1 \ F_n^2 \ \dots \ F_n^k] = [0 \ \dots \ 0 \ 1] A^n \tilde{F}_0$$

eşitliğini yazdıktan sonra Kısım 2.2 de kullandığımız Kalman'ın metodu bir kez daha uygulanırsa,

$$F_n^i = [0 \ \dots \ 0 \ 1] (SDS^{-1})^n \tilde{F}_0 = [0 \ \dots \ 0 \ 1] SD^n S^{-1} \tilde{F}_0 \quad (3.20)$$

elde edilir. Bu ifadenin ilk 3 matrisinin çarpımı

$$\begin{aligned}
& [0 \ \dots \ 0 \ 1]_{1 \times k} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ r_1 & r_2 & \dots & r_{k-1} & r_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ r_1^{k-2} & r_2^{k-2} & \dots & r_{k-1}^{k-2} & r_k^{k-2} \\ r_1^{k-1} & r_2^{k-1} & \dots & r_{k-1}^{k-1} & r_k^{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1^n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & r_2^n & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r_{k-1}^n & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & r_k^n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} r_1^{n+k-1} & r_2^{n+k-1} & \dots & r_{k-1}^{n+k-1} & r_k^{n+k-1} \end{bmatrix} \quad (3.21)
\end{aligned}$$

olurken son iki matrisin çarpımı

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ r_1 & r_2 & \dots & r_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^{k-2} & r_2^{k-2} & \dots & r_k^{k-2} \\ r_1^{k-1} & r_2^{k-1} & \dots & r_k^{k-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^1 & y_1^2 & \dots & y_1^k \\ y_2^1 & y_2^2 & \dots & y_2^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{k-1}^1 & y_{k-1}^2 & \dots & y_{k-1}^k \\ y_k^1 & y_k^2 & \dots & y_k^k \end{bmatrix} = Y \quad (3.22)$$

olarak yazılıp Y çözülmelidir.

Cramer metodu ve Teorem 3.8 de ispatlanan $M_{uv}^{(k)}$ fonksiyonunu kullanarak (3.22) denklemini çözülürse;

$$y_n^i = \frac{(-1)^{k+n-i+1} M_{k-i+1,n}^{(k)}}{|S|}$$

elde edilir. Böylece (3.20) den

$$F_n^i = \sum_{j=1}^k r_j^{n+k-1} y_j^i$$

formülüne ulaşılır.

3.3.2. Genelleştirilmiş k -mertebeli Lucas sayılarının k -dizilerinin herhangi bir teriminin bulunması

(1.8) deki benzer şekilde genelleştirilmiş k -mertebeli Lucas sayılarının k -dizilerini yazabiliriz. Bu dizi, başlangıç koşulları $1-k \leq n \leq 0$ olan

$$L_n^i = \begin{cases} 2, & i = 2 - n \\ -1, & i = 1 - n \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

olmak üzere, $n > 0$ ve $1 \leq i \leq k$ için

$$L_n^i = \sum_{j=1}^k c_j L_{n-j}^i$$

olur. Burada, c_j sabit katsayılardır. Fibonacci sayılarındaki gibi

$$\tilde{L}_n = \begin{bmatrix} L_{n-k+1}^1 & L_{n-k+1}^2 & \cdots & L_{n-k+1}^k \\ L_{n-k+2}^1 & L_{n-k+2}^2 & \cdots & L_{n-k+2}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_n^1 & L_n^2 & \cdots & L_n^k \end{bmatrix}$$

ve

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{k-2} & c_{k-1} \end{bmatrix}$$

matrislerini tanımlayalım. Buradan ve başlangıç koşullarının tanımından

$$\tilde{L}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{k \times k}$$

şeklinde elde edilir.

Kısım 3.3.1 de Fibonacci dizisi için uygulanan işlemler aynen uygulanırsa;
 $i \geq 2$ için

$$y_n^i = \frac{(-1)^{k+n-i} [M_{k-i+1,n}^{(k)} + 2M_{k-i+2,n}^{(k)}]}{|S|}$$

ve $i = 1$ için

$$y_n^1 = \frac{(-1)^{k+n+1} M_{kn}^{(k)}}{|S|}$$

elde edilir. Böylece

$$L_n^i = \sum_{j=1}^k r_j^{n+k-1} y_j^i$$

olur.

3.3.3. Bir uygulama (Pell dizisinin Binet formülünün elde edilişi)

$c_{k-1} = 2$ ve diğer c_i sabit katsayılar 1 olursa genelleştirilmiş k -mertebeli Fibonacci sayılarının k -dizileri, genelleştirilmiş k -mertebeli Pell sayılarının k -dizilerine dönüşür. (3.17) de verilen A matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisine dönüşürken, (3.18) de verilen polinom da

$$P(r) = r^k - 2r^{k-1} - r^{k-2} - r^{k-3} - \cdots - r - 1 \quad (3.23)$$

şekline dönüşür.

$k = 2$ için (3.23) polinomu

$$P(r) = r^2 - 2r - 1$$

olur ve (3.20) ifadesi

$$P_n^i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1^n & 0 \\ 0 & r_2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak yazılabilir. Burada $r_1 = 1 - \sqrt{2}$ ve $r_2 = 1 + \sqrt{2}$ değerleri yerlerine yazılırsa

$$P_n^i = \begin{bmatrix} (1-\sqrt{2})^{n+1} & (1+\sqrt{2})^{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{2\sqrt{2}} & \frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{-(1-\sqrt{2})}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

formülü elde edilir.

$i = 1$ değeri ile bilinen Pell dizisi için Binet Formülü elde ederiz. Bu da

$$P_n = \frac{-(1-\sqrt{2})^{n+1}}{2\sqrt{2}} + \frac{(1+\sqrt{2})^{n+1}}{2\sqrt{2}}$$

şeklinde olur.

KAYNAKLAR

- [1] Er, M. C., *Sums of Fibonacci Numbers by Matrix Method*, Fibonacci Quarterly, 22(3)(1984) 204-207.
- [2] Franklin, J.N. 1968. Matrix Theory, Prentice Hall.
- [3] Horn, R.A. 1968. Matrix Analysis, Cambridge University Press.
- [4] Kalman, D., *Generalized Fibonacci Numbers by Matrix Method*, Fibonacci Quarterly, 20(1) (1982) 73-76.
- [5] Karaduman, E., *An Application of Fibonacci Numbers in Matrices*, Applied Mathematics and Computation, 147 (2004) 903--908.
- [6] Kaygısız, K. and Bozkurt, D., *k-Generalized Order- k Perrin Number Presentation by Matrix Method*, (accepted by ARS Combinatoria).
- [7] Kılıç, E., Altınkaynak, B. and Taşçı, D., *On the Computing of the Generalized Order- k Pell Numbers in log time*, Applied Mathematics and Computation, 181(2006) 511-515.
- [8] Kılıç, E. and Taşçı, D. *The Generalized Binet Formula, Representation and Sum of the Generalized Order-k Pell Numbers*, Taiwanese J. Math. 10 (6) (2006) 1661-1670.
- [9] Öcal, A. A., Tuğlu, N. and Altınışik E., *On the Representation of k -generalized Fibonacci and Lucas Numbers*, Applied Mathematics and Computation, 170(2005) 584-596.
- [10] Sylvester, J.R., *Fibonacci Properties by Matrix Method*, Mathematical Gazette, 63(1979) 188-191.
- [11] Tamm, U., tamm@mathematik.uni-bielefeld.de
- [12] Taşçı, D. and Kılıç, E., *On the k -generalized Lucas Numbers*, Applied Mathematics and Computation, 155(2004) 637-641.
- [13] Vajda, S. 1989. Fibonacci & Lucas Numbers and the Golden Section, Theory and Applications, John Wiley&Sons.
- [14] Wells, D. 1986. The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers, Middlesex England, Penguin Books. p.61-67.
- [15] http://www.daviddarling.info/encyclopedia/P/Perrin_sequence.html
- [16] http://en.wikipedia.org/wiki/Perrin_number
- [17] <http://mathworld.walfram.com/vietasformulas.html>

Ek 1

Tablo 1

GENELLEŞTİRİLMİŞ k -MERTEBELİ PERRIN SAYILARININ k -DİZİLERİ

c katsayılarının hepsi 1 alınınca																				
k=2				k=3				k=4				k=6								
												$n \setminus$	1	2	3	4	5	6		
												$n \setminus$	-5	1	-1	0	0	0	3	
												$n \setminus$	-4	-1	0	0	0	3	0	
												$n \setminus$	-3	0	0	0	3	0	2	
$n \setminus$	1	2	-2	1	-1	3	-2	-1	0	3	0	-2	0	0	3	0	2	0		
-1	-1	3	-1	-1	0	0	-1	0	3	0	2	-1	0	3	0	2	0	0		
0	3	0	0	3	0	2	0	3	0	2	0	0	3	0	2	0	0	0		
1	0	5	1	1	1	6	1	1	4	6	9	1	1	4	6	9	10	11		
2	2	3	2	4	1	8	2	2	3	8	9	2	2	3	8	9	10	11		
3	3	10	3	5	2	14	3	5	8	14	18	3	5	8	14	18	20	22		
4	5	13	4	9	3	22	4	7	11	22	27	4	7	11	22	27	30	33		
5	8	23	5	14	5	36	5	12	19	36	45	5	11	17	33	41	45	49		
6	13	36	6	23	8	58	6	19	30	58	72	6	18	29	55	68	75	82		
7	21	59	7	37	13	94	7	30	47	91	113	7	29	46	88	109	120	128		
8	33	95	8	59	19	149	8	49	78	149	185	8	47	75	143	177	192	210		
9	54	152	9	95	33	243	9	79	125	240	295	9	76	121	231	283	312	336		
10	88	244	10	155	52	389	10	128	203	386	480	10	123	196	371	460	502	546		
11	142	396	11	250	85	632	11	207	325	626	773	11	199	314	602	741	814	882		
12	227	640	12	402	137	1019	12	332	528	1010	1253	12	319	510	971	1201	1316	1428		
13	369	1031	13	651	221	1645	13	538	849	1630	2017	13	517	820	1567	1933	2120	2299		
14	594	1668	14	1049	357	2656	14	868	1374	2632	3261	14	834	1327	2530	3125	3426	3716		
15	960	2689	15	1695	576	4287	15	1401	2215	4248	5260	15	1346	2139	4083	5040	5526	5993		
16	1549	4344	16	2735	930	6921	16	2262	3578	6858	8494	16	2173	3455	6591	8138	8922	9676		
17	2501	7010	17	4416	1501	11172	17	3651	5774	11070	13709	17	3508	5577	10641	13137	14403	15620		
18	4037	11318	18	7128	2423	18035	18	5894	9322	17870	22131	18	5663	9003	17177	21207	23250	25214		
19	6517	18269	19	11507	3911	29113	19	9515	15049	28849	35727	19	9142	14534	27730	34235	37533	40706		
20	10521	29492	20	18576	6315	46999	20	15360	24293	46570	57673	20	14758	23462	44764	55265	60591	65710		
k=8										k=10										
										$n \setminus$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
										$n \setminus$	-9	1	-1	0	0	0	0	0	0	3
$n \setminus$	1	2	3	4	5	6	7	8	-8	-1	0	0	0	0	0	0	0	3	0	
-7	1	-1	0	0	0	0	0	3	-7	0	0	0	0	0	0	0	3	0	2	
-6	-1	0	0	0	0	0	3	0	-6	0	0	0	0	0	0	3	0	2	0	
-5	0	0	0	0	0	3	0	2	-5	0	0	0	0	0	3	0	2	0	0	
-4	0	0	0	0	3	0	2	0	-4	0	0	0	0	3	0	2	0	0	0	
-3	0	0	0	3	0	2	0	0	-3	0	0	0	3	0	2	0	0	0	0	
-2	0	0	3	0	2	0	0	0	-2	0	0	3	0	2	0	0	0	0	0	
-1	0	3	0	2	0	0	0	0	-1	0	3	0	2	0	0	0	0	0	0	
0	3	0	2	0	0	0	0	0	0	3	0	2	0	0	0	0	0	0	0	
1	0	2	6	9	10	11	12	13	1	0	2	3	5	5	5	5	5	5	5	
2	2	3	8	9	10	11	12	13	2	2	3	5	5	5	5	5	5	5	5	
3	3	4	11	14	15	16	17	18	3	3	5	8	10	10	10	10	10	7		
4	5	8	19	23	25	27	29	31	4	5	8	13	15	15	15	15	15	12	12	
5	8	12	30	37	40	43	46	46	5	8	13	21	25	25	25	25	22	22	17	
6	13	20	49	60	65	70	72	77	6	13	21	34	40	40	40	37	37	32	29	
7	21	32	79	97	105	110	118	121	7	21	34	55	65	65	62	62	57	54	46	
8	34	52	128	157	167	180	188	198	8	34	55	89	105	102	102	97	94	86	75	
9	55	84	207	251	272	288	306	319	9	55	89	144	167	167	162	159	151	140	121	
10	89	136	332	408	437	468	494	517	10	89	144	230	272	267	264	256	245	226	196	
11	144	217	539	657	709	756	800	836	11	144	230	374	437	434	426	415	396	366	317	
12	230	353	869	1065	1146	1224	1294	1353	12	230	374	602	709	701	690	671	641	592	513	
13	374	568	1402	1713	1845	1969	2082	2176	13	374	602	973	1141	1130	1111	1081	1032	953	825	
14	602	918	2263	2769	2981	3182	3364	3516	14	602	973	1570	1845	1826	1796	1747	1668	1540	1333	
15	973	1482	3654	4468	4811	5135	5429	5674	15	973	1570	2535	2976	2946	2897	2818	2690	2483	2151	
16	1570	2392	5898	7214	7767	8290	8764	9159	16	1570	2535	4092	4806	4757	4678	4550	4343	4011	3472	
17	2535	3862	9522	11645	12538	13382	14147	14787	17	2535	4092	6606	7757	7678	7560	7343	7011	6472	5606	
18	4092	6234	15371	18799	20240	21602	22839	23869	18	4092	6606	10664	12523	12395	12188	11856	11317	10451	9049	
19	6606	10064	24814	30347	32673	34674	36868	38535	19	6606	10664	17215	20215	20008	19676	19137	18271	16869	14609	
20	10664	16246	40057	48989	52746	56296	59519	62206	20	10664	17215	27790	32633	32301	31762	30896	29494	27234	23583	