

T.C
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ SİMETRİK GRUPLARIN SPECHT
MODÜLLERİ

Tezi Hazırlayan
Hatice İSKENDEROĞLU

Tezi Yöneten
Prof. Dr. Himmet CAN

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Eylül 2006
KAYSERİ

T.C
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ SİMETRİK GRUPLARIN SPECHT
MODÜLLERİ

Tezi Hazırlayan
Hatice İSKENDERÖĞLU

Tezi Yöneten
Prof. Dr. Himmet CAN

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Eylül 2006
KAYSERİ

Prof. Dr. Himmet CAN danışmanlığında **Hatice İSKENDEROĞLU** tarafından hazırlanan ” **Genelleştirilmiş Simetrik Grupların Specht Modülleri** ” adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimler Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans** tezi olarak kabul edilmiştir.

31. / 08 / 2006

JÜRİ

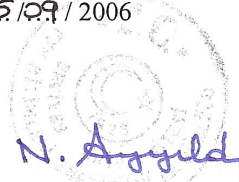
İmza

Başkan : Doç. Dr. Hikmet ÖZARSLAN
Üye : Prof. Dr. Himmet CAN
Üye : Yrd. Doç. Dr. Abdulkabbar SÖNMEZ

ONAY:

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun 05/09/2006 tarih ve 2006/25-06 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

05/09/2006


N. Ayyıldız
Prof. Dr. Nusret AYYILDIZ
Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın planlanması, yürütülmesi ve yazılmasında değerli katkılarıyla en büyük desteği gördüğüm saygıdeğer hocam Sayın Prof. Dr. Himmet CAN'a ve maddi, manevi tüm destekleri için aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Hatice İSKENDEROĞLU

GENELLEŞTİRİLMİŞ SİMETRİK GRUPLARIN SPECHT MODÜLLERİ

Hatice İSKENDEROĞLU

Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü

Yüksek Lisans Tezi, Eylül 2006

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Himmet CAN

ÖZET

Bu tezin esas amacı genelleştirilmiş Young tablolar gibi kombinatorial kavramlar ve n nin parçalanmalarının m -setlerine göre $G(m, l, n)$ genelleştirilmiş simetrik gruplarının indirgenemez temsillerini tanıtmaktır.

Bu tez altı bölümden meydana gelmektedir:

Birinci bölümde, tezi konu alan bir giriş verildi.

İkinci bölümde, genelleştirilmiş simetrik gruplar hakkında bazı temel bilgiler tanıtıldı.

Üçüncü bölümde, dominant kısmi sıralaması olarak adlandırılan bir kısmi sıralama tanımlandı.

Dördüncü bölümde, $G(m, l, n)$ nin indirgenemez modüllerinin bir tam cümlesi inşa edildi.

Beşinci bölümde, bir Specht modül için bir baz belirlendi.

Altıncı bölümde, verilen bir e_t politabloidini yok eden $G(m, l, n)$ nin Garnir elemanları bulundu. Ayrıca iki örnek vererek kompleks cisim üzerinde $G(m, l, n)$ grubunun indirgenemez temsillerinin nasıl inşa edildiğini gösterdik.

Anahtar kelimeler: Temsil, Modül, Genelleştirilmiş Simetrik Grup, Specht Modül, Garnir Elemanları

SPECHT MODULES OF THE GENERALISED SYMMETRIC GROUPS

Hatice İSKENDEROĞLU

Erciyes University, Graduate School of Natural and Aapllied Sciences

M. S. Thesis, September 2006

Thesis Supervisor: Prof. Dr. Himmet CAN

ABSTRACT

The main object of this thesis is to introduce the irreducible representations of the generalised symmetric groups $G(m, l, n)$ in terms of m -sets of partitions of n and combinatorial concepts connected with generalised Young tableaux, etc.

This thesis consists of six chapters:

In the first chapter, the introduction is given dealing with thesis.

In the second chapter, some basic information about the generalised symmetric groups has been introduced.

In the third chapter, a partial order, called dominance partial ordering, is defined.

In the fourth chapter, a complete set of irreducible modules of $G(m, l, n)$ is constructed.

In the fifth chapter, a basis for a Specht module has been determined.

In the last chapter, the Garnir elements of $G(m, l, n)$ which annihilate the given polytabloid e_t are found.

Furthermore, by giving two examples, we show how the irreducible representations of the group $G(m, l, n)$ can be constructed over the complex field.

Keywords: Representation, Module, Generalised symmetric group, Specht module, Garnir elements.

SEMBOLLER

$G(m, l, n)$	: Genelleştirilmiş simetrik grup
C_m	: m . mertebeden bir devir grubu
C_m^n	: C_m devir grubunun n defa kendisiyle direkt çarpımı
S_n	: Simetrik grup
ξ	: Birimin m . mertebeden bir ilkel kökü
$Ty(\sigma)$	: σ permütasyonunun tipi
$\text{sgn}(\sigma)$	: σ permütasyonunun işareti
$\lambda^{[m]} = (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(m)})$	: n nin parçalanmalarının bir m -seti
$[\lambda^{(i)}]$	: $\lambda^{(i)}$ nin Young diyagramı
$P_{(n)}^{(m)}$	: n nin parçalanmalarının bütün m -setlerinin cümlesi
R_t	: Bir t tablosunun satır sabitleyicisi
C_t	: Bir t tablosunun sütun sabitleyicisi
$\{t\}$	: t $\lambda^{[m]}$ -tablosunu kapsayan denklik sınıfı
$M^{\lambda^{[m]}}$	: $\lambda^{[m]}$ - tabloidleri tarafından üretilen modül
$\geq$	: Dominantlık kısmi sıralaması
$S^{\lambda^{[m]}}$	: Specht modülü
e_t	: Bir t tablosu ile ilişkili $\lambda^{[m]}$ - politabloidi
$G_{A,B}$	: Garnir elemanı

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	I
TEŞEKKÜR	II
ÖZET	III
ABSTRACT	IV
SEMBOLLER	V
1. BÖLÜM	
GİRİŞ	1
2. BÖLÜM	
GENELLEŞTİRİLMİŞ SİMETRİK GRUPLAR.....	3.
3. BÖLÜM	
DOMİNANT KISMİ SIRALAMA.....	14
4. BÖLÜM	
SPECHT MODÜLLER.....	17
5. BÖLÜM	
SPECHT MODÜLLER İÇİN BİR BAZ	29
6. BÖLÜM	
GARNİR BAĞINTISI.....	37
KAYNAKLAR	54
ÖZGEÇMİŞ	56

1. BÖLÜM

GİRİŞ

Sonlu bir grubun homomorfizmlerinin sınıflandırılması problemi grup temsilleri teorisi olarak adlandırılır. Burada simetrik gruplar esas model olarak göz önüne alınır. Simetrik grupların indirgenemez temsilleri çeşitli yöntemler kullanılarak uzun zaman çalışılmıştır. Fakat 1976 yılında, James [6] şimdi klasik bir makale olan çalışmasında keyfi cisimler üzerinde simetrik grupların indirgenemez temsillerinin nasıl elde edileceğini kombinatoryal bir yöntemle Specht modüllerini kullanarak göstermiştir. Burada en önemli sonuç, şimdi alt modül teoremi olarak adlandırılmaktadır. James'in yönteminde, keyfi cisimler üzerindeki indirgenemez modüller cismin karakteristiği sıfır alındığında Specht modüllere indirgenmektedir. Bu tarihten itibaren James'in yöntemi bütün Weyl gruplarına ve hatta kompleks yansıma gruplarına genişletilmek için kullanılmaktadır.

$G(m, 1, n)$ genelleştirilmiş simetrik grubu, C_m m . mertebeden bir devir grubu; C_m^n , C_m devir grubunun n defa kendisiyle direkt çarpımı olmak üzere, S_n simetrik grubu ile C_m^n nin yarı direkt çarpımıdır.

Eğer $G(m, 1, n)$ grubunda $m=1$ ve 2 alırsak bu takdirde sırasıyla S_n simetrik grubunu ve O_n hiperoktahedral grubunu elde ederiz. Görüldüğü gibi, S_n simetrik grubu $G(m, 1, n)$ genelleştirilmiş simetrik grubunun bir alt grubudur.

$G(m, 1, n)$ genelleştirilmiş simetrik grubunun indirgenemez temsilleri sırasıyla Osima [9], Puttaswamaiah [10], Read [13], Hughes [5] ve Can [2] tarafından çalışılmıştır.

Fakat zikredilen son çalışmada, Can [2], James'in yönteminin $G(m, 1, n)$ grubuna nasıl genişletilebileceğini göstermiştir.

Burada, $G(m, 1, n)$ grubunun indirgenemez temsilleri n nin parçalanmalarının m -setleri ile indekslenmiş ve genelleştirilmiş Young tablo gibi kavramlar ile bağlantılı kombinatoryal ifadeler kullanılarak indirgenemez temsiller elde edilmiştir.

Bizim bu çalışmada amacımız, Can [2] nin çalışmasını esas alarak, $G(m, l, n)$ grubunu bütün indirgenemez temsillerinin nasıl elde edildiğini incelemektir. Bu çalışma sadece bir inceleme olup, adı geçen konuya herhangi bir yenilik katmamaktadır.

2. BÖLÜM

GENELLEŞTİRİLMİŞ SİMETRİK GRUPLAR

Bu bölümde, daha sonra gerekecek bazı notasyonları ve tanımları takdim edeceğiz. İlk olarak genelleştirilmiş simetrik gruplar ve özellikleri üzerinde durmak istiyoruz.

Tanım 2.1. $G(m, l, n)$ genelleştirilmiş simetrik grubu, $i=1, \dots, n$; $k=1, \dots, m$ için

$\sigma(\xi^k i) = \xi^k \sigma(i)$ olacak şekilde $\{\xi^k i \mid i=1, \dots, n; k=1, \dots, m\}$ cümlesinin bütün σ permütasyonlarının grubudur. $G(m, l, n)$ nin mertebesi $m^n n!$ [2].

S_n , n tane sembol üzerinde bir simetrik grup, C_m de m . mertebeden bir devir grubu olsun. C_m^n , C_m in n defa kendisiyle direkt çarpımı olmak üzere, $G(m, l, n)$ S_n ile C_m^n in yarı direkt çarpımıdır ve bu çarpım $C_m^n \times S_n$ şeklinde yazılır. $G(m, l, n)$ grubu zaman zaman W_n^m şeklinde ifade edilecektir.

$G(m, l, n)$ grubu aşağıdaki gibi bir gösterime sahiptir [3]:

$$G(m, l, n) = \langle r_1, \dots, r_{n-1}, w_1, \dots, w_n \mid r_i^2 = (r_i r_{i+1})^3 = (r_i r_j)^2 = e, \quad |i-j| \geq 2,$$

$$w_i^m = e, w_i w_j = w_j w_i, \quad r_i w_i = w_{i+1} r_i, \quad r_i w_j = w_j r_i \quad j \neq i, i+1 \rangle$$

Ayrıca, r_i ($i=1, \dots, n-1$) leri $(i, i+1)$ transpozisyonu ile ifade edebiliriz. Bu yüzden $\{r_1, \dots, r_{n-1}\}$ tarafından üretilen grup S_n simetrik gruptur. Ayrıca w_i ($i=1, \dots, n$) ler; $i \rightarrow \xi i$

ve $j \rightarrow j$, $j=1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n$ olmak üzere $\begin{pmatrix} i \\ \xi i \end{pmatrix} : \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ dönüşümü

ile tanımlanabilirler. Böylece eğer $\tau \in S_n$ ise $i=1, \dots, n$ için $\tau w_i \tau^{-1} = w_{\tau(i)}$ olur. Eğer C_m^n , $\{w_1, \dots, w_n\}$ tarafından üretilen $G(m, l, n)$ grubunun alt grubu ise bu takdirde $C_m^n < G(m, l, n)$ dir. $G(m, l, n)$, $\{1, \dots, n\}$ cümlesinin elemanlarını permütasyona

uğrattırken aynı zamanda onların herhangi bir sayıdaki kısmını da ξ nin bazı kuvvetleri ile çarpar.

Bundan başka $G(m, l, n)$ grubu için eğer $m=1$ ve 2 alırsak sırasıyla S_n simetrik grubu ve O_n hiperoktahedral grubunu elde ederiz [13].

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \dots & \tau(n) \end{pmatrix} \in S_n$$

ise bu takdirde $1 \leq s_i \leq m$ olmak üzere

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \xi^{s_1} \tau(1) & \xi^{s_2} \tau(2) & \dots & \xi^{s_n} \tau(n) \end{pmatrix} = \tau \prod_{i=1}^n w_i^{s_i} \in G(m, l, n)$$

olsun.

$\varphi : G(m, l, n) \rightarrow S_n$ dönüşümü $\varphi(\sigma) = \tau$ şeklinde tanımlansın. O zaman φ bir epimorfizmdir ve $\ker \varphi = C_m^n$ dir. $\sigma \in G(m, l, n)$ elemanının işareti $\text{sgn}(\sigma) = \text{sgn}(\varphi(\sigma))$ olarak tanımlansın [1].

Tanım 2.2. $\varphi(\sigma)$, S_n nin bir çift elemanı ise $\sigma \in G(m, l, n)$ elemanına *çifttir*, aksine $\varphi(\sigma)$, S_n in bir tek elemanı ise $\sigma \in G(m, l, n)$ elemanına *tektir* denir. Yukarıda verilen $\{r_i, w_i\}$ üreteçlerine göre, σ nın çift olması için gerek ve yeter şart σ nın herhangi bir ifadesinde görülen r_i lerin sayısının çift olmasıdır [12].

Herhangi $\sigma \in G(m, l, n)$ elemanı;

$$\theta_i = \begin{pmatrix} b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{il_i} \\ \xi^{s_{i1}} b_{i2} & \xi^{s_{i2}} b_{i3} & \dots & \xi^{s_{il_i}} b_{i1} \end{pmatrix}$$

$b_{ij} \in \{1, \dots, n\}$, $s_{ij} \in \{1, \dots, m\}$ ve $i=1, \dots, t$ iken l_i , θ_i devirinin uzunluğu olmak üzere $\sigma = \theta_1 \dots \theta_t$ tek şekilde ayırık devirlerinin çarpımı şeklinde yazılabilir.

$f(\theta_i) = \sum_{j=1}^{l_i} s_{ij}$ olsun ve $f(\sigma) = \sum_{i=1}^t f(\theta_i)$ koyalım. $a_{pq}(\sigma)$, $1 \leq p \leq m$, $1 \leq q \leq n$ için

$f(\theta_i) \equiv p \pmod{m}$ olacak şekilde q uzunluğundaki σ nın θ_i devirlerinin sayısı olarak

tanımlansın. Bu taktirde $m \times n$ tipindeki $(a_{pq}(\sigma))$ matrisi, σ nın *tipi* olarak adlandırılır ve $Ty(\sigma)$ şeklinde gösterilir [13].

Şimdi $G(m, l, n)$ 'nin konjuge sınıflarını tanımlamak istiyoruz.

Lemma 2.3. $\sigma, \pi \in G(m, l, n)$ elemanları $G(m, l, n)$ de konjuge olması için gerek ve yeter şart $Ty(\sigma) = Ty(\pi)$ olmasıdır.

İspat: Kerber [7]

$1 \leq r_i \leq m$ için $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \gamma(1) & \gamma(2) & \dots & \gamma(n) \end{pmatrix} \in S_n$ elemanı olmak üzere

$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \zeta^{r_1} \gamma(1) & \zeta^{r_2} \gamma(2) & \dots & \zeta^{r_n} \gamma(n) \end{pmatrix} = \gamma \prod_{i=1}^n w_i^{r_i} \in G(m, l, n)$ elemanı olsun. Bu

taktirde

$$\begin{aligned} \sigma\pi &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \zeta^{s_1} \tau(1) & \zeta^{s_2} \tau(2) & \dots & \zeta^{s_n} \tau(n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \zeta^{r_1} \gamma(1) & \zeta^{r_2} \gamma(2) & \dots & \zeta^{r_n} \gamma(n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \zeta^{(r_1+s_{\gamma(1)})} \tau\gamma(1) & \zeta^{(r_2+s_{\gamma(2)})} \tau\gamma(2) & \dots & \zeta^{(r_n+s_{\gamma(n)})} \tau\gamma(n) \end{pmatrix} \\ &= \tau\gamma \prod_{i=1}^n w_i^{(r_i+s_{\gamma(i)})} \end{aligned}$$

elde ederiz.

Böylece $\sigma, m \in G(m, l, n)$ elemanları için

$f(\sigma\pi) = f(\sigma) + f(\pi) \pmod{m}$ dir.

Üstelik her $\tau \in S_n$ için $f(\tau) = 0$ olduğunu kabul ediyoruz.

Böylece $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\sigma, m \in G(m, l, n)$ elemanları için $f(\sigma^l) = mk - f(\sigma)$ dır.

Tanım 2.4. $(\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(m)})$ n in parçalanmalarının bir m -seti, $\sum_{j=1}^{s_i} \lambda_j^{(i)} = l_i$ ve $\sum_{i=1}^m l_i = n$ olmak üzere $\lambda^{(i)} = (\lambda_1^{(i)}, \dots, \lambda_{s_i}^{(i)})$ l_i nin bir parçalanması olacak şekilde m tane $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(m)}$ parçalanmadan meydana gelir.

Herhangi bir i için $l_i=0$ ise bu takdirde hala $\lambda^{(i)}=0$ yazmak gerekir. $(\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(m)})$ n nin parçalanmalarının bir m -seti olsun; o zaman $(\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(m)})$ ifadesi $\lambda^{[m]}$ şeklinde kısaltılacaktır. $\lambda^{[m]}$ de $\lambda^{(i)} (1 \leq i \leq m)$ ye karşılık gelen kısım $\lambda^{[m]}$ in i .bileşeni olarak isimlendirilecektir. $P_{(n)}^{(m)}$, n nin parçalanmalarının bütün m -setlerinin cümlesini gösterecektir.

Lemma 2.5. $G(m, l, n)$ de konjuge sınıflarının sayısı; $i=1, \dots, m$ iken $\sum_{i=1}^m l_i = n$ ve $p(l_i)$, l_i nin parçalanmalarının sayısını göstermek üzere

$$|P_{(n)}^{(m)}| = \sum p(\lambda_1) \dots p(\lambda_m)$$

ile ifade edilir. Bu toplam $\{l_1, \dots, l_m\}$ cümlesi üzerinden alınmaktadır.

İspat : Saeed-ul-Islam [15]

Lemma 2.6. $G(m, l, n)$ nin alışılmış indirgenemez temsillerinin sayısı $|P^{(m)}(n)|$ dır.

İspat : Osima [9]

$G(m, l, n)$ grubunu $k=1, \dots, m-1$ ve ξ birimin m . mertebeden bir ilkel kökü olmak üzere,

a) Her $g \in G(m, l, n)$ elemanı için $I(g)=l$ dir,

b) $\sigma_k(r_i) = l (i = 1, \dots, n-l)$, $\sigma_k(w_j) = \xi^k (j = 1, \dots, n)$,

c) $\eta(r_i) = -l (i = 1, \dots, n-l)$, $\eta(w_j) = l (j = 1, \dots, n)$,

d) $\varepsilon_k(r_i) = -l (i = 1, \dots, n-l)$, $\varepsilon_k(w_j) = \xi^k (j = 1, \dots, n)$,

şeklinde tanımlanan bir boyutlu $2m$ tane $l, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{m-1}, \eta, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m-1}$ temsillerine sahiptir.

Burada $1, \eta$ sırasıyla *trivial* ve *sign (işaret)* temsilleri olarak adlandırılan reel temsillerdir. Eğer m çift ise $\sigma_{\frac{m}{2}}, \varepsilon_{\frac{m}{2}}$ de reel temsillerdir.

Tanım 2.7. $\lambda^{[m]} \in P^{(m)}(n)$ olsun. $\lambda^{[m]}$ in *genelleştirilmiş Young diyagramı* $i=1, \dots, m$ için $[\lambda^{(i)}], \lambda^{(i)}$ nin bilinen Young diyagramı olmak üzere $[\lambda^{[m]}] = ([\lambda^{(1)}], \dots, [\lambda^{(m)}])$ dir. Herhangi bir i için $\lambda^{(i)}=0$ ise bu taktirde $[\lambda^{(i)}]=\emptyset$ yazılır.

Örnek 2.8. $\lambda^{[4]} = (3^2 1, 21, 0, 2^2 1) \in P^{(4)}(15)$ olsun. $\lambda^{[4]}$ ün *genelleştirilmiş Young diyagramı* aşağıdaki gibi çizilir:

$$[\lambda^{[4]}] = \left(\begin{array}{cccccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & & \bullet & \bullet \\ \bullet & & & & & & \bullet & \bullet \end{array} \right)$$

Tanım 2.9. $\lambda^{[m]} \in P^{(m)}(n)$ olsun. Bir t $\lambda^{[m]}$ – *tablo* $[\lambda^{[m]}]$ deki her bir düğümün, yer alan bütün sayıların modülü farklı olacak şekilde $\{\zeta^k i | i=1, \dots, n; k=1, \dots, m\}$ cümlesindeki semboller ile yer değiştirilmesiyle elde edilen $\{\zeta^k i | i=1, \dots, n; k=1, \dots, m\}$ cümlesinin sembollerinin bir düzenlemesidir. Bir t $\lambda^{[m]}$ – *tablo* bazen $(t_{\lambda^{(1)}}, \dots, t_{\lambda^{(m)}})$ olarak yazılacaktır. Açıkça herhangi bir *genelleştirilmiş Young diyagramı* $[\lambda^{[m]}]$ için $m^n n!$ tane $\lambda^{[m]}$ tablosu mevcuttur.

$k=1, \dots, m$ için bir matristeki gibi $t_{\lambda^{(k)}}(i, j)$, (i, j) pozisyonunda $t_{\lambda^{(k)}}$ nin terimini ifade etmek üzere $t(i, j, k) = t_{\lambda^{(k)}}(i, j)$ olsun. Böylece, $k=1, \dots, m$ olmak üzere $t(i, j, k)$, (i, j, k) . pozisyonunda t nin terimini gösterir. t tablosunda $t_{\lambda^{(k)}} (1 \leq k \leq m)$ ya karşılık gelen kısım t tablosunun k . *bileşeni* olarak isimlendirilir.

$G(m, 1, n)$ grubu, bir $t=(t(i, j, k))$ $\lambda^{[m]}$ – *tablosu* üzerinde aşağıdaki gibi etkir: Her $\sigma \in G(m, 1, n)$ elemanı için

$$\sigma t = (\sigma t(i, j, k)) = (\sigma t_{\lambda^{(1)}}(i, j), \dots, \sigma t_{\lambda^{(m)}}(i, j))$$

dir.

Örnek 2.10. $\lambda^{[3]} = (21, 0, 2^2) \in P^3(7)$ olsun. Bu takdirde

$$t = \begin{pmatrix} 2 & \xi 7 & \xi^2 5 & 6 \\ & , \emptyset, & & \\ \xi^2 1 & & 3 & \xi^2 4 \end{pmatrix}$$

bir $\lambda^{[3]}$ - tablo ve t nin terimleri $t(1,1,1)=2, t(2,1,1)=\xi^2 1, t(1,1,3)=\xi^2 5 \dots$ vs. dir.

Eğer

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \xi 1 & 3 & \xi^2 4 & 7 & 2 & 5 & \xi^2 6 \end{pmatrix} \in G(3,1,7)$$

elemanı ise o zaman

$$\sigma t = \sigma \begin{pmatrix} 2 & \xi 7 & \xi^2 5 & 6 \\ & , \emptyset, & & \\ \xi^2 1 & & 3 & \xi^2 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & \xi^2 2 & 5 \\ & , \emptyset, & & \\ 1 & & \xi^2 4 & \xi^2 7 \end{pmatrix}$$

dir.

Tanım 2.11. t , bir $\lambda^{(m)}$ - tablo olsun. t nin bir σ *satır permütasyonu*, σ t nin her bir satırındaki sembolleri yeniden düzenleyen ve ξ nin bir kuvveti ile $t_{\lambda^{(k)}}$ ($k = 2, \dots, m$) daki sembollerin herhangi bir sayısını çarpan W_n^m in bir elemanıdır. Benzer olarak t nin bir σ *sütun permütasyonu*, σ t nin her bir sütunundaki sembolleri yeniden düzenleyen ve ξ nin bir kuvveti ile $t_{\lambda^{(1)}}$ daki sembollerin herhangi bir sayısını çarpan W_n^m in bir elemanıdır.

Şimdi, aşağıdaki gibi t nin R_t *satır sabitleyicisini* ve C_t *sütun sabitleyicisini* tanımlayalım:

R_t , t nin satır permütasyonlarının bir grubu olsun. Yani,

$$R_t = \{ \sigma \in W_n^m \mid \sigma, t \text{ nin bir satır permütasyonudur} \}$$

cümlesidir.

Böylece R_t

$$m_i = \begin{cases} 1, & \text{eğer } i = 1 \text{ ise} \\ m, & \text{eğer } i = 2, \dots, m \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere

$$\prod_{i=1}^m \left(W_{\lambda_i^{(i)}}^{m_i} \times \dots \times W_{\lambda_{s_i}^{(i)}}^{m_i} \right)$$

ye izomorftir ve W_n^m in bir alt grubudur.

C_t , t nin sütun permütasyonlarının bir grubu olsun. Yani,

$$C_t = \{ \sigma \in W_n^m \mid \sigma, t \text{ nin bir sütun permütasyonudur} \}$$

cümlesidir.

Böylece C_t ,

$$m_i = \begin{cases} m, & \text{eğer } i = 1 \text{ ise} \\ 1, & \text{eğer } i = 2, \dots, m \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere

$$\prod_{i=1}^m \left(W_{\mu_i^{(i)}}^{m_i} \times \dots \times W_{\mu_{r_i}^{(i)}}^{m_i} \right)$$

ye izomorftir. Burada $(\mu_1^{(i)}, \dots, \mu_{r_i}^{(i)})$, $(\lambda_1^{(i)}, \dots, \lambda_{s_i}^{(i)})$ ye konjuge olan bir parçalanmadır.

Ayrıca C_t , W_n^m in bir alt grubudur. Eğer,

$$t = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 5 & 8 \\ & & & & \\ \xi 3 & & \xi^2 6 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

olarak alınırsa bu taktirde R_t ve C_t

$$R_t = W_{\{1,4\}}^1 \times W_{\{\xi 3\}}^1 \times W_{\{2,5\}}^3 \times W_{\{\xi^2 6,7\}}^3 \times W_{\{8\}}^3 \times W_{\{9\}}^3$$

$$\cong W_2^1 \times W_1^1 \times W_2^3 \times W_2^3 \times W_1^3 \times W_1^3$$

$$\begin{aligned}
C_t &= W_{\{1,\xi 3\}}^3 \times W_{\{4\}}^3 \times W_{\{2,\xi^2 6\}}^1 \times W_{\{5,7\}}^1 \times W_{\{8,9\}}^1 \\
&\cong W_2^3 \times W_1^3 \times W_2^1 \times W_2^1 \times W_2^1
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Şimdi aşağıdaki gibi $\lambda^{[m]}$ tablolarının cümlesi üzerinde $\sim$ denklik bağıntısı tanımlansın:

Tanım 2.12. $t_2 = \sigma t_1$ olacak şekilde bir $\sigma \in R_{t_1}$ elemanı bulunabiliyor ise bu taktirde t_1 ve t_2 $\lambda^{[m]}$ -tablosuna *satır denktir* denir ve $t_1 \sim t_2$ şeklinde yazılır. t $\lambda^{[m]}$ -tablosunu

kapsayan denklik sınıfı $\{t\}$ ile gösterilir ve $\lambda^{[m]}$ -*tabloid* olarak adlandırılır.

O_n hiperoktahedral grubunda olduğu gibi t nin satırları arasına çizgiler çizilerek $\{t\}$ ifade edilir.

Örnek 2.13. $\lambda^{[3]} = (1, 0, 2) \in P^{(3)}(3)$ olsun. $k=1, 2, 3$ iken bütün muhtemel $(1, 0, 2)$ tabloidlerin bir listesi

$$(\overline{\xi^k 1}, \overline{\emptyset}, \overline{23}), (\overline{\xi^k 2}, \overline{\emptyset}, \overline{13}), (\overline{\xi^k 3}, \overline{\emptyset}, \overline{12})$$

dir.

Tanım 2.14 teki gibi notasyonla birlikte eğer $\lambda^{[m]} \in P^{(m)}(n)$ ise $\lambda^{[m]}$ tabloidlerinin sayısı

$$m^{l_1} \frac{n!}{\prod_{i=1}^m \left(\prod_{j=1}^{s_i} \lambda_j^{(i)}! \right)}$$

dir.

$$\{t\} = \{t' \mid \text{bazı } \sigma \in R_t \text{ için } t' = \sigma t \}$$

olduğundan verilen herhangi bir denklik sınıfındaki $\lambda^{[m]}$ tablolarının sayısı

$$|R_t| = \left(\prod_{i=1}^{s_l} \lambda_i^{(l)}! \right) \left(\prod_{i=2}^m \prod_{j=1}^{s_i} m^{\lambda_j^{(i)}} \lambda_j^{(i)}! \right)$$

dir.

Ayrıca, eğer $\sigma \in W_n^m$ ise bu taktirde

$$R_{\sigma t} = \sigma R_t \sigma^{-1} \text{ ve } C_{\sigma t} = \sigma C_t \sigma^{-1}$$

olduğu gösterilebilir.

Tanım 2.14. Eğer $\lambda^{[m]} \in P^{(m)}(n)$ ise bu takdirde $M^{\lambda^{[m]}}$, baz elemanları $\lambda^{[m]}$ - tabloidleri olan C kompleks cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

Şimdi aşağıdaki gibi $M^{\lambda^{[m]}}$ vektör uzayı üzerinde W_n^m in etkimesi tanımlansın. $\tau \in S_n$

ve $1 \leq s_i \leq m$ olsun. Eğer $\sigma = \tau \prod_{i=1}^n w_i^{s_i} \in W_n^m$ ise bu takdirde i, t tablosunun eğer

k_i .bileşeninde ortaya çıkarsa $\phi(\sigma, t) = \sum_{i=1}^n k_i s_i$ olmak üzere W_n^m in etkimesi

$$\sigma\{t\} = \zeta^{\phi(\sigma, t)} \{\sigma t\}$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer $\sigma \in S_n$ ise bu takdirde $\phi(\sigma, t) \equiv 0 \pmod{m}$ olduğundan $\sigma\{t\} = \{\sigma t\}$ dir. Şimdi bunun $M^{\lambda^{[m]}}$ vektör uzayı üzerinde bir grup etkimesi olduğunu ispatlayalım:

$\gamma \in S_n$ ve $1 \leq r_i \leq m$ olmak üzere

$$\pi = \gamma \prod_{i=1}^n w_i^{r_i} \in W_n^m$$

olsun. Bu takdirde

$$\sigma\pi = \tau \gamma \prod_{i=1}^n w_i^{(r_i + s_{\gamma(i)})}$$

elde edilir ve böylece eğer i, t tablosunun k_i . bileşeninde ortaya çıkarsa

$$\phi(\sigma\pi, t) = \sum_{i=1}^n k_i (r_i + s_{\gamma(i)})$$

olmak üzere

$$(\sigma\pi)\{t\} = \zeta^{\phi(\sigma\pi, t)} \{\sigma\pi t\}$$

dir.

(Bu noktada, $\xi^m = 1$ bağıntısının kullanmıyoruz.) $\pi = \gamma \prod_{i=1}^n w_i^{r_i} \in W_n^m$ için, eğer i, t tablosunun k_i . bileşeninde ortaya çıkarsa bu taktirde $\gamma(i)$, π tablosunun aynı k_i . bileşeninde ortaya çıkar.

Şimdi $\gamma(i) = j (1 \leq i, j \leq n)$ diyelim. Bu taktirde $\sigma = \tau \prod_{j=1}^n w_j^{s_j} \in W_n^m$ için, $w_j^{s_j} = w_{\gamma(i)}^{s_{\gamma(i)}}$

olacaktır ve böylece $\phi(\sigma, \pi t) = \sum_{i=1}^n k_i s_{\gamma(i)}$ ve $\gamma(i)$ πt tablosunun k_i . bileşeninde yer almak üzere

$$\sigma(\pi\{t\}) = \sigma(\xi^{\phi(\pi, t)}\{\pi t\}) = \xi^{\phi(\pi, t)} \xi^{\phi(\sigma, \pi t)}\{\sigma \pi t\}$$

elde edilir.

Buradan,

$$\phi(\sigma \pi, t) = \phi(\pi, t) + \phi(\sigma, \pi t)$$

elde edilir, bu ise

$$(\sigma \pi)\{t\} = \sigma(\pi\{t\})$$

olmasını gerektirir.

Bu etkiye iyi tanımlıdır, çünkü eğer $\{t_1\} = \{t_2\}$ ise bu taktirde $t_2 = \sigma t_1$ olacak şekilde $\sigma \in R_{t_1}$ vardır. O zaman herhangi bir $\pi \in W_n^m$ için $\pi \sigma \pi^{-1} \in \pi R_{t_1} \pi^{-1} = R_{\pi t_1}$ dir, böylece

$$\xi^{\phi(\pi, t_1)}\{\pi t_1\} = \xi^{\phi(\pi, \sigma t_1)}\{\pi \sigma t_1\} = \xi^{\phi(\pi, t_2)}\{\pi t_2\}$$

dir.

$M^{\lambda^{[m]}}$ üzerinde lineer olacak şekilde bu etkiye genişletildiği zaman $M^{\lambda^{[m]}}$ bir CW_n^m - modülüne dönüşür ve böylece aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 2.15. *Bir CW_n^m - modülü olan $M^{\lambda^{[m]}}$, R_t alt grubu üzerinde W_n^m in permütasyon modülüne isomorfiktir. $M^{\lambda^{[m]}}$, herhangi bir $\lambda^{[m]}$ - tabloidi tarafından üretilen bir devirli CW_n^m - modülüdür ve*

$$boy_c M^{\lambda^{[m]}} = m^{l_l} \frac{n!}{\prod_{i=1}^m \left(\prod_{j=1}^{s_i} \lambda_j^{(i)}! \right)}$$

dir.

3. BÖLÜM

DOMİNANT KİSMİ SIRALAMA

Bu bölümde $P^{(m)}(n)$ üzerinde bir kısmi sıralama tanımlayacağız. Şimdi $P^{(m)}(n)$ üzerinde *genelleştirilmiş dominant kısmi sıralama* olarak adlandırılan aşağıdaki $\geq$ kısmi sıralamasını tanımlayalım.

Tanım 3.1. $\lambda^{[m]}, \mu^{[m]} \in P^{(m)}(n)$ olsun. Eğer aşağıdaki durumların biri mevcutsa bu taktirde $\lambda^{[m]}, \mu^{[m]}$ baskındır denir ve $\lambda^{[m]} \geq \mu^{[m]}$ şeklinde gösterilir.

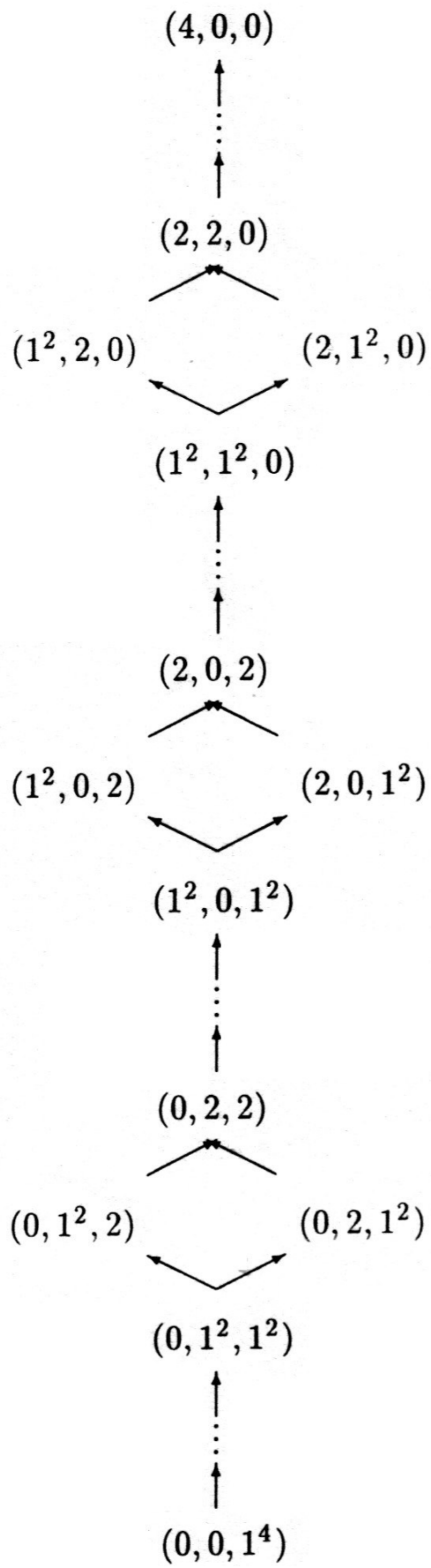
i) $|\lambda^{(l)}| > |\mu^{(l)}|$,

ii) Bazı $k \in A = \{1, 2, \dots, m-2\}$ için $|\lambda^{(j)}| = |\mu^{(j)}|$ ($1 \leq j \leq k$) ve $|\lambda^{(k+1)}| > |\mu^{(k+1)}|$

iii) Her $i = 1, \dots, m$ için $|\lambda^{(i)}| = |\mu^{(i)}|$ ve $\lambda^{(i)} \geq \mu^{(i)}$.

Eğer $m=2$ ise bu taktirde $A=\emptyset$ olduğuna dikkat edelim ve böylece (ii) durumu Tanım 3.1. de bulunmaz.

Örnek 3.2. $P^{(3)}(4)$ üzerinde dominant bağıntısı, aşağıdaki gibi Hasse diyagramı ile gösterilir.



Şimdi bu kısmi sıralama ile ilgili temel bir kavramı aşağıdaki lemmada verelim.

Lemma 3.3. *t, bir $\lambda^{[m]}$ -tablo ve $i \in \{1, \dots, m-1\}$ ve $s_i \in \{1, \dots, m\}$ olmak üzere her a için eğer a $t_{\lambda^{(i)}}$ de yer aldığı zaman $\zeta^{s_i} a$ da $t'_{\mu^{(i)}}$ de yer alacak şekilde t' bir $\mu^{[m]}$ - tablo olsun. $c = \zeta^{\rho_1} a$, $d = \zeta^{\rho_2} b$, $(1 \leq \rho_1, \rho_2 \leq m)$ ve $i \in \{1, \dots, m\}$ olmak üzere, a, b $t'_{\mu^{(i)}}$ nin aynı satırına ait olması c, d terimlerinin $t_{\lambda^{(i)}}$ nin farklı sütununa ait olmasını gerektirir. Bu taktirde $\lambda^{[m]} \geq \mu^{[m]}$ dir.*

İspat: Hipotezden $i \in \{1, \dots, m\}$ için $|\lambda^{(i)}| = |\mu^{(i)}|$ vardır. Böylece [1] deki karşılık gelen lemmadaki (Lemma 2.2.3) ispata benzer bir yol izlenerek sonuç elde edilir.

Sonuç 3.4. *Her $i=1, \dots, m-1$ için $|\lambda^{(i)}| = |\mu^{(i)}|$ ve $\lambda^{[m]} \not\leq \mu^{[m]}$ olsun. t, bir $\lambda^{[m]}$ -tablo ve $i \in \{1, \dots, m-1\}$ ve $s_i \in \{1, \dots, m\}$ olmak üzere her a için eğer a $t_{\lambda^{(i)}}$ de yer aldığı zaman $\zeta^{s_i} a$ da $t'_{\mu^{(i)}}$ de yer alacak şekilde t' bir $\mu^{[m]}$ - tablo olsun. O zaman $c = \zeta^{\rho_1} a$, $d = \zeta^{\rho_2} b$, $(1 \leq \rho_1, \rho_2 \leq m)$ ve $i \in \{1, \dots, m\}$ olmak üzere a, b $t'_{\mu^{(i)}}$ nin aynı satırında ve c, d $t_{\lambda^{(i)}}$ nin aynı sütunundadır.*

BÖLÜM 4

SPECHT MODÜLLERİ

Şimdi C kompleks cismi üzerinde $G(m, l, n)$ nin indirgenemez modüllerin bir tam cümlesi inşa edilecektir. Bunlar Specht modülü ile adlandırılır ve $S^{\lambda^{[m]}}$ şeklinde gösterilir.

Tanım 4.1. t , bir $\lambda^{[m]}$ - tablo olsun. $f(\sigma)$, 2. bölümdeki gibi tanımlanmış olmak üzere

$$\kappa_t = \sum_{\sigma \in C_t} \zeta^{f(\sigma)} (\text{sgn } \sigma) \sigma$$

ile $\kappa_t \in CW_n^m$ tanımlansın. t tablosuyla ilişkili e_t $\lambda^{[m]}$ - politabloidi, $e_t = \kappa_t \{t\}$ ile verilir.

Örnek 4.2. $\lambda^{[3]} = (1, 0, 1^2) \in P^{(3)}(3)$ ve $t = \left(1, \emptyset, \frac{2}{3}\right)$ olsun. Bu takdirde

$$\kappa_t = e + \zeta^{-1} w_1 + \zeta^{-2} w_1^2 - (23) - \zeta^{-1} w_1 (23) - \zeta^{-2} w_1^2 (23)$$

dir ve karşılık gelen politabloid

$$e_t = \left(\overline{1}, \overline{\emptyset}, \frac{\overline{2}}{3}\right) + \left(\overline{\zeta 1}, \overline{\emptyset}, \frac{\overline{2}}{3}\right) + \left(\overline{\zeta^2 1}, \overline{\emptyset}, \frac{\overline{2}}{3}\right) - \left(\overline{1}, \overline{\emptyset}, \frac{\overline{3}}{2}\right) - \left(\overline{\zeta 1}, \overline{\emptyset}, \frac{\overline{3}}{2}\right) - \left(\overline{\zeta^2 1}, \overline{\emptyset}, \frac{\overline{3}}{2}\right)$$

dir.

Lemma 4.3. t , bir $\lambda^{[m]}$ - tablo ve $\pi \in W_n^m$ olsun. Bu takdirde

$$i) \kappa_{\pi t} = \pi \kappa_t \pi^{-1}$$

$$ii) \pi e_t = \zeta^{\phi(\pi, t)} e_{\pi t}$$

dir.

iii) Eğer $\pi \in C_t$ ise bu taktirde $\pi e_t = \zeta^{f(\pi)}(\operatorname{sgn} \pi) e_t$

dir.

İspat: i) Eğer $\pi \in W_n^m$ ise bu taktirde

$$\begin{aligned} \kappa_{\pi t} &= \sum_{\sigma \in C_{\pi t}} \zeta^{f(\sigma)}(\operatorname{sgn} \sigma) \sigma = \sum_{\sigma \in \pi C_t \pi^{-1}} \zeta^{f(\sigma)}(\operatorname{sgn} \sigma) \sigma \\ &= \sum_{\tau \in C_t} \zeta^{f(\pi \tau \pi^{-1})} \operatorname{sgn}(\pi \tau \pi^{-1}) \pi \tau \pi^{-1} \\ &= \pi \kappa_t \pi^{-1} \end{aligned}$$

dir.

$$\text{ii) } \pi e_t = \pi \kappa_t \{t\} = \kappa_{\pi t} \pi \{t\} = \zeta^{\phi(\pi, t)} \kappa_{\pi t} \{\pi t\} = \zeta^{\phi(\pi, t)} e_{\pi t}$$

elde edilir.

iii) Eğer $\pi \in C_t$ ise bu taktirde

$$\begin{aligned} \pi e_t &= \sum_{\sigma \in C_t} \zeta^{f(\sigma)}(\operatorname{sgn} \sigma) \pi \sigma \{t\} = \sum_{\tau \in C_t} \zeta^{f(\pi^{-1} \tau)} \operatorname{sgn}(\pi^{-1} \tau) \tau \{t\} \\ &= \zeta^{f(\pi)}(\operatorname{sgn} \pi) e_t \end{aligned}$$

dir.

Şimdi Specht modülünü aşağıdaki gibi tanımlayalım.

Tanım 4.4. $\lambda^{[m]} \in P^{(m)}(n)$ olsun. $\lambda^{[m]}$ parçalanmalarının m- seti için $S^{\lambda^{[m]}}$ Specht modülü, $\lambda^{[m]}$ politableoidleri tarafından üretilen $M^{\lambda^{[m]}}$ in bir alt modülüdür.

Lemma 4.3. (ii) den dolayı aşağıdaki teoreme sahibiz:

Teorem 4.5. $S^{\lambda^{[m]}}$, herhangi bir politableoid tarafından üretilen bir devirli CW_n^m - modülüdür.

$\alpha_i \in C$ olmak üzere eğer $v = \sum_i \alpha_i \{t_i\} \in M^{\lambda^{[m]}}$ ise bu taktirde eğer $\alpha_i \neq 0$ ise o zaman $\{t_i\}$ nin v de ortaya çıkacağını söyleriz.

Bölüm 2 de $M^{\lambda^{[m]}}$ üzerinde $G(m, l, n)$ grubunun etkimesi tamamlanmıştı. Şimdi aşağıdaki nedenden dolayı bunun bir doğal etkiye olduğunu açıklayalım. $G(m, l, n)$ grubu için eğer $n=l$ alırsak bu taktirde

$$G(m, l, l) = C_m^l = \langle w_l \mid w_l^m = e \rangle$$

olur ve $P^{(m)}(l)$, l in parçalanmalarının m tane farklı m -setlerinden oluşur. Yani

$$P^{(m)}(l) = \left\{ \lambda_i^{[m]} (i = 1, \dots, m) \mid l, \lambda_i^{[m]} \text{ in } i. \text{bileşeninde ortaya çıkar} \right\}$$

dir.

$\lambda_l^{[m]} = (l, 0, \dots, 0)$ için

$$M^{\lambda_l^{[m]}} = \langle \{ \zeta^k l, \emptyset, \dots, \emptyset \} \mid k = 1, \dots, m \rangle$$

ve

$$S^{\lambda_l^{[m]}} = \left\langle e_l \mid e_l = \sum_{k=1}^m \{ \zeta^k l, \emptyset, \dots, \emptyset \} \right\rangle$$

elde ederiz.

$i = 2, 3, \dots, m$ için

$$M^{\lambda_i^{[m]}} = S^{\lambda_i^{[m]}} = \langle \{t\} \mid l, t \text{ nin } i. \text{bileşeninde ortaya çıkar} \rangle$$

olur.

Şimdi $i, j = 1, \dots, m$ için $X_i(w_l^j) = \zeta^{ij}$ ile $X_i : G(m, l, l) \rightarrow GL(l, C)$ tanımlansın.

Bu taktirde $X_1, X_2, \dots, X_m = l$ 1.mertebeden $G(m, l, l)$ grubunun m tane farklı indirgenemez matris temsilleridir. Y_i , $i = 1, \dots, m$ için $S^{\lambda_i^{[m]}}$ tarafından doğrulan

$G(m, l, l)$ grubunun matris temsili olsun. Bu taktirde X_i ve $Y_i, i = 1, \dots, m$ için $G(m, l, l)$ in denk indirgenemez temsilleridir.

Lemma 4.6. t ve t' bir $\lambda^{[m]}$ - tabloları olsun. Bu taktirde aşağıdaki şartlar denktir:

(i) $\{t'\}, e_t$ de içerilir.

(ii) $\rho t' = \pi t$ olacak şekilde $\rho \in R_t, \pi \in C_t$ elemanları vardır.

(iii) $i \in \{1, \dots, m\}$ ve $c = \xi^{\rho_1} a, d = \xi^{\rho_2} b, (1 \leq \rho_1, \rho_2 \leq m)$ olmak üzere a, b nin $t'_{\lambda^{(i)}}$ nin aynı satırına ait olmaları c, d nin $t_{\lambda^{(i)}}$ nin farklı sütunlarına ait olmalarını gerektirir.

İspat: Politaibloidlerin tanımından $\{t'\}, e_t$ de bulunması için gerek ve yeter şart bazı $\pi \in C_t$ için $\{t'\} = \{\pi t\}$ olmasıdır; böylece bu bazı $\rho \in R_t, \pi \in C_t$ için $\pi t = \rho t'$ olmasına denktir, bu ise (i) ve (ii) nin denk olmasıdır. (ii) ve (iii) ün denkliği [1] deki lemmadaki (Lemma 2.3.6) ispata benzer bir yol izlenerek elde edilir.

Lemma 4.7. t , bir $\lambda^{[m]}$ - tablo ve t' , bir $\mu^{[m]}$ - tablo olsun. $c = \xi^{\rho_1} a, d = \xi^{\rho_2} b, (1 \leq \rho_1, \rho_2 \leq m)$ ve $i \in \{1, \dots, m\}$ olmak üzere c, d terimleri $t_{\lambda^{(i)}}$ nin aynı sütununda bulunmasıyla birlikte a, b nin de $t'_{\mu^{(i)}}$ nin aynı satırında bulunduğunu kabul edelim. Bu taktirde $C_t \cap R_{t'} \neq \emptyset$ dir.

İspat: $1 \leq s_1, s_2 \leq m, 1 \leq k, l \leq n$ ve $k \neq 1$ olmak üzere $a = \xi^{s_1} k$ ve $b = \xi^{s_2} k$ olsun. O zaman $1 \leq \rho_1, \rho_2 \leq m$ olmak üzere genelliği bozmaksızın $c = \xi^{\rho_1 + s_1} k$ ve $d = \xi^{\rho_2 + s_2} l$ olduğunu kabul edelim.

İlk olarak $i=1$ olsun. Bu taktirde

$$(a, b) = (k, l) w_k^{m+s_2-s_1} w_l^{m+s_1-s_2} \in C_t \cap R_{t'}$$

dir.

Şimdi de $i \in \{2, 3, \dots, m\}$ olsun. Bu taktirde

$$(c, d) = (k, l) w_k^{m+(p_2+s_2)-(p_1+s_1)} w_l^{m+(p_1+s_1)-(p_2+s_2)} \in C_t \cap R_{t'}$$

dir.

Lemma 4.8. t , bir $\lambda^{[m]}$ -tablo ve t' , bir $\mu^{[m]}$ -tablo olsun. $c = \xi^{\rho_1} a$, $d = \xi^{\rho_2} b$, $(1 \leq \rho_1, \rho_2 \leq m)$ ve $i \in \{1, \dots, m\}$ olmak üzere eğer c , d $t_{\lambda^{(i)}}$ nin aynı sütununda olacak şekilde a , b $t'_{\mu^{(i)}}$ nin aynı satırında bulunuyorsa bu takdirde $\kappa_t \{t'\} = 0$ dır.

İspat: İlk önce $i = 1$ olsun. O zaman Lemma 4.7. den $(a, b) \in C_t \cap R_{t'}$ dir. Bu takdirde

$$(e - (a, b))\{t'\} = 0$$

dır ve ayrıca $(a, b) \in C_t$ nin 2. mertebeden bir altgrubunu üretir. C_t nin bu altgrubu için koset temsilcileri olarak $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ seçelim, bu takdirde

$$\kappa_t \{t'\} = \left(\sum_{i=1}^r \xi^{f(\sigma_i)} (\text{sgn } \sigma_i) \sigma_i \right) (e - (a, b))\{t'\} = 0$$

dır.

İkinci olarak $i \in \{2, 3, \dots, m\}$ olsun. Bu takdirde Lemma 4.7. den $(c, d) \in C_t \cap R_{t'}$ olur.

O zaman

$$(e - (c, d))\{t'\} = 0$$

elde ederiz ve $(c, d) \in C_t$ nin 2. mertebeden bir alt grubunu üretir. C_t nin bu alt grubu için koset temsilcileri olarak $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ seçelim. Bu takdirde

$$\kappa_t \{t'\} = \left(\sum_{i=1}^s \xi^{f(\sigma_i)} (\text{sgn } \sigma_i) \sigma_i \right) (e - (c, d))\{t'\} = 0$$

dır.

Lemma 4.9. Her $i = 1, \dots, m-1$ için $|\lambda^{(i)}| = |\mu^{(i)}|$ ve $\lambda^{[m]} \not\geq \mu^{[m]}$ olduğunu kabul edelim.

t , bir $\lambda^{[m]}$ -tablo ve $i \in \{1, \dots, m-1\}$ ve $s_i \in \{1, \dots, m\}$ olmak üzere her a için eğer a $t_{\lambda^{(i)}}$

de yer aldığı zaman $\zeta^{s_i} a$ da $t'_{\mu^{(i)}}$ de yer alacak şekilde t' bir $\mu^{[m]}$ -tablo olsun. Bu takdirde $\kappa_t\{t'\} = 0$ dır.

İspat: Sonuç 3.4. ve Lemma 4.8. den ispat görülür.

Lemma 4.10. t , bir $\lambda^{[m]}$ -tablo ve $i \in \{1, \dots, m-1\}$ ve $s_i \in \{1, \dots, m\}$ olmak üzere her a için eğer a $t_{\lambda^{(i)}}$ de yer aldığı zaman $\zeta^{s_i} a$ da $t'_{\mu^{(i)}}$ de yer alacak şekilde t' bir $\mu^{[m]}$ -tablo olsun. $\kappa_t\{t'\} \neq 0$ olduğunu farzedelim. Bu takdirde $\lambda^{[m]} \geq \mu^{[m]}$ dir.

İspat: $i \in \{1, \dots, m\}$ olmak üzere a ve b nin $t'_{\mu^{(i)}}$ nin aynı satırında iki elemanı olduğunu farzedelim. Bu takdirde $c = \zeta^{\rho_1} a$, $d = \zeta^{\rho_2} b$, $(1 \leq \rho_1, \rho_2 \leq m)$ ve $i \in \{1, \dots, m\}$ olmak üzere c ve d $t_{\lambda^{(i)}}$ nin aynı sütununda olamaz, eğer olur ise bu takdirde Lemma 4.8. den $\kappa_t\{t'\} = 0$ dır, bu da hipotez ile çelişir. Böylece, Lemma 3.3. $\lambda^{[m]} \geq \mu^{[m]}$ olmasını gerektirir.

Tanım 4.11. t ve $t', \lambda^{[m]}$ -tabloları olsun. Her a ve $i \in \{1, \dots, m\}$ için her ne zaman a $t_{\lambda^{(i)}}$ de yer alır ise bu takdirde bazı $s_i \in \{1, \dots, m\}$ için $\zeta^{s_i} a$ $t'_{\lambda^{(i)}}$ de yer aldığında t nin t' ile bağdaştığını söyleriz.

Lemma 4.12. t, t' ile bağdaşmak üzere t ve $t' \lambda^{[m]}$ -tabloları olsun.

i) Eğer t', e_i de içerilmezse bu takdirde $\kappa_t\{t'\} = 0$ dir.

ii) Eğer $\{t'\}, e_i$ de içerilirse bu takdirde $\kappa_t\{t'\} = \pm e_i$ dir.

İspat: (i), Lemma 4.6. ve 4.8. den görülür.

(ii) yi kanıtlayalım: Eğer $\{t'\}, e_i$ de içerilirse bu takdirde Lemma 4.6. dan $\rho t' = \pi t$ olacak şekilde $\rho \in R_{t'}$ ve $\pi \in C_t$ bulunur ve böylece

$$\kappa_t\{t'\} = \kappa_t\{\rho t'\} = \kappa_t\{\pi t\} = \pm \kappa_t\{t\} = \pm e_i$$

dir.

Sonuç 4.13. t , bir $\lambda^{[m]}$ -tablo ve $u \in M^{\lambda^{[m]}}$ olsun. t , her bir t' ile bağdaşır olacak şekilde u , bütün $\{t'\}$ tabloidlerinin bir lineer kombinasyonu olsun. Bu taktirde $\kappa_t u$, e_t nin bir katıdır.

İspat: t , her bir t' ile bağdaşıyor ve $\alpha_i \in \mathbb{C}$ olacak üzere $u = \sum_i \alpha_i \{t'_i\}$ olsun. Bu taktirde

$$\kappa_t u = \sum_i \alpha_i \kappa_t \{t'_i\}$$

dir. Lemma 4.13. den $\beta \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$\kappa_t u = \beta e_t$$

dir.

Uyarı 4.14. t , t' ile bağdaşmak üzere t ve t' , iki $\lambda^{[m]}$ -tablo olsun. t , onların hepsiyle bağdaşıyor olacak şekilde $e_{t'}$, bütün tabloidlerin bir lineer kombinasyonu olduğundan, Sonuç 4.13. ten $\beta \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$\kappa_t e_{t'} = \beta e_t$$

elde ederiz.

Lemma 4.15. t , bir $\lambda^{[m]}$ -tablo olsun. Bu taktirde

$$i) \kappa_t \kappa_t = |C_t| \kappa_t,$$

$$ii) \kappa_t e_t = |C_t| e_t$$

dir.

İspat:

$$\kappa_t = \sum_{\sigma \in C_t} \zeta^{f(\sigma)} (\text{sgn } \sigma) \sigma$$

olduğunu biliyoruz. Bu taktirde

$$\begin{aligned} \kappa_t \kappa_t &= \left(\sum_{\sigma \in C_t} \zeta^{f(\sigma)} (\text{sgn } \sigma) \sigma \right) \left(\sum_{\pi \in C_t} \zeta^{f(\pi)} (\text{sgn } \pi) \pi \right) \\ &= \sum_{\sigma, \pi \in C_t} \zeta^{f(\sigma)} (\text{sgn } \sigma) \zeta^{f(\pi)} (\text{sgn } \pi) \sigma \pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\sigma, \gamma \in C_t} \zeta^{f(\sigma)} (\operatorname{sgn} \sigma) \zeta^{f(\sigma^{-1}\gamma)} \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}\gamma) \gamma, (\sigma\pi = \gamma \text{ olmak üzere}) \\
&= \sum_{\sigma, \gamma \in C_t} \zeta^{f(\gamma)} (\operatorname{sgn} \gamma) \gamma \\
&= \sum_{\sigma \in C_t} \sum_{\gamma \in C_t} \zeta^{f(\gamma)} (\operatorname{sgn} \gamma) \gamma \\
&= |C_t| \kappa_t
\end{aligned}$$

elde edilir, bu (i) şikkını ispatlar.

(ii) de (i) den elde edilir.

Lemma 4.16 t , bir $\lambda^{[m]}$ -tablo ve $1 \leq i \leq n$ olmak üzere $w_i \in W_n^m$ olsun. Aşağıdaki durumlar denktir:

i) i , t nin k . bileşeninde yer alır.

ii) i , e_t de ortaya çıkan her tabloidin k . bileşeninde yer alır.

iii) $w_i e_t = \xi^k e_t$

dir.

İspat: t nin C_t sütun sabitleyicisi tanımından (i) ve (ii) nin denkliği

$$e_t = \sum_{\sigma \in C_t} \zeta^{f(\sigma)} (\operatorname{sgn} \sigma) \sigma \{t\}$$

eşitliğinden görülür.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : (ii) nin doğruluğunu kabul edelim. Bu nedenle i , e_t de ortaya çıkan her tabloidin k . bileşeninde yer alır. Bu taktirde $M^{\lambda^{[m]}}$ üzerinde W_n^m nin etkimesi tanımından $w_i e_t = \xi^k e_t$ elde ederiz.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) : $w_i e_t = \xi^k e_t$ olsun. $k \neq 1$ olacak şekilde i, e_t de ortaya çıkan her tablonun 1.bileşeninde yer aldığını farzedelim. Bu taktirde $w_i e_t = \xi^1 e_t$ elde ederiz, bu ise bir çelişkidir.

Teorem 4.17. C , kompleks sayılar cismi ve $\lambda^{[m]} \in P^{(m)}(n)$ olsun. Bu taktirde

$$\text{Hom}_{CW_n^m} \left(S^{\lambda^{[m]}}, S^{\lambda^{[m]}} \right) \cong C$$

dir.

İspat: $I, S^{\lambda^{[m]}}$ in birim fonksiyonu olsun. $S^{\lambda^{[m]}}$ in her CW_n^m endomorfizminin I nın bir skalerle çarpımı olduğunu göstermek istiyoruz.

$\theta, S^{\lambda^{[m]}}$ in bir endomorfizmi ve t , bir $\lambda^{[m]}$ - tablo olsun. Her $k = 1, \dots, m$ için $j = 1, 2, \dots, s_k$ için $\rho_j^{(k)} \in \{1, \dots, m\}$ ve $i_j^{(k)} \in \{1, \dots, n\}$ olmak üzere $\zeta^{\rho_l^{(k)}} i_l^{(k)}, \dots, \zeta^{\rho_{s_k}^{(k)}} i_{s_k}^{(k)}$ ların t tablosunun k . bileşeninde yer aldığını farz edelim. $\alpha \in C$ ve t^* bir $\lambda^{[m]}$ - tablo olmak üzere bazı $e_{t^*} \neq \alpha e_t$ için $e_{t^*}, \theta(e_t)$ de içersilsin. Lemma 4.16. dan $j = 1, 2, \dots, s_k$ ve her $k = 1, \dots, m$ için

$$w_{i_j^{(k)}} \theta(e_t) = \theta(w_{i_j^{(k)}} e_t) = \zeta^k \theta(e_t)$$

elde ederiz.

Eğer $j = 1, 2, \dots, s_k, k = 1, \dots, m$ ve $k \neq l$ olmak üzere $\zeta^{\rho_j^{(k)}} i_j^{(k)} t^*$ in 1 . bileşeninde yer alacak şekilde en az bir terim, diyelim ki $\zeta^{\rho_j^{(k)}} i_j^{(k)}$ terimi t nin k . bileşeninde bulunuyor ise bu taktirde Lemma 4.16. kullanılarak

$$w_{i_j^{(k)}} e_{t^*} = \zeta^l e_{t^*}$$

olduğunu elde ederiz. Bu, $w_{i_j^{(k)}} \in W_n^m$ için

$$\theta(w_{i_j^{(k)}}(k) e_t) \neq w_{i_j^{(k)}} \theta(e_t)$$

olması demektir.

Bu ise θ , W_n^m nin etkimesini korumadığını ifade eder. Böylece $\theta(e_t)$ en fazla t her bir t' ile bağdaşıyor olacak şekilde bütün $e_t, \lambda^{[m]}$ - politabloidlerinin bir lineer kombinasyonundadır. Yani

$$\theta(e_t) = \sum \alpha_{t'} e_{t'}$$

olup, bu toplam t , her bir t' ile bağdaşıyor olacak şekilde $t' \lambda^{[m]}$ - tablalarının üzerinden alınmaktadır. Bu taktirde Lemma 4.15.(ii) ve Uyarı 4.14. ten $\beta \in C$ olmak üzere

$$|C_t| \theta(e_t) = \theta(\kappa_t e_t) = \kappa_t \theta(e_t) = \sum \alpha_{t'} \kappa_t e_{t'} = \sum \alpha_{t'} \beta e_{t'}$$

elde ederiz. Böylece $\alpha = \frac{1}{|C_t|} \sum \alpha_{t'} \beta$ olmak üzere $\theta(e_t) = \alpha e_t$ dir. Öyleyse bazı α skaleri için $\theta = \alpha I$ dir. Bu ise ispatı tamamlar.

Sonuç 4.18. C , kompleks sayılar cismi ve $\lambda^{[m]} \in P^{(m)}(n)$ olsun. Bu taktirde $S^{\lambda^{[m]}}$ indirgenemezdir.

Her bir $\lambda^{[m]} \in P^{(m)}(n)$ için bir $S^{\lambda^{[m]}}$ indirgenemez Spect modülü inşa ettik. Şimdi de onların ikişer ikişer izomorfik olmadıklarını göstermek istiyoruz.

O_n grubunda olduğu gibi,

$$\langle \{t\}, \{t'\} \rangle = \begin{cases} 1, & \text{eğer } \{t\} = \{t'\} \text{ ise} \\ 0, & \text{eğer } \{t\} \neq \{t'\} \text{ ise} \end{cases}$$

koyarak $M^{\lambda^{[m]}}$ üzerinde bir $\langle \cdot, \cdot \rangle$ iç çarpım tanımlayalım ve bu iç çarpımı $M^{\lambda^{[m]}}$ üzerinde bilineer olarak genişletelim.

Önerme 4.19. Bazı $k \in \{1, \dots, m-2\}$ için $|\lambda^{(l)}| > |\mu^{(l)}|$ veya $|\lambda^{(j)}| = |\mu^{(j)}|$ ($1 \leq j \leq k$) ve $|\lambda^{(k+l)}| > |\mu^{(k+l)}|$ olacak şekilde $\lambda^{[m]}, \mu^{[m]} \in P^{(m)}(n)$ olsun. Skalerlerin cismi $\mathcal{C}$ ve $\theta \in \text{Hom}(S^{\lambda^{[m]}}, S^{\mu^{[m]}})$ olduğunu farzedelim. Bu taktirde $\theta=0$ dır.

İspat: $\theta \in \text{Hom}(S^{\lambda^{[m]}}, S^{\mu^{[m]}})$ olsun. t bir $\lambda^{[m]}$ - tablo, t' bir $\mu^{[m]}$ -tablo olsun. Bu taktirde hipotezden $i \in \{1, \dots, n\}, \rho_1, \rho_2 \in \{1, \dots, m\}$ ve $p \neq q$ olmak üzere $\zeta^{\rho_2} i$ t' nin q . bileşininde yer alacak şekilde t nin p . bileşininde en az bir terim, diyelim ki $\zeta^{\rho_1} i$ terimi bulunur. Lemma 4.16. dan

$$w_i e_t = \zeta^{\rho} e_t \text{ ve } w_i e_{t'} = \zeta^q e_{t'}$$

elde ederiz. Bu ise $\theta(w_i e_t) \neq w_i \theta(e_t)$ demektir ki bu θ , W_n^m in etkimesini korumuyor demektir. Böylece, her t $\lambda^{[m]}$ - tablosu için, $\theta(e_t) = 0$ olmak zorundadır. Bu yüzden $\theta = 0$ dır ki bu, bazı $k \in \{1, \dots, m-2\}$ için $|\lambda^{(l)}| > |\mu^{(l)}|$ ya da $|\lambda^{(j)}| = |\mu^{(j)}|$ ($1 \leq j \leq k$) ve $|\lambda^{(k+l)}| > |\mu^{(k+l)}|$ olduğu zaman $S^{\lambda^{[m]}}$ ve $S^{\mu^{[m]}}$ nin izomorfik olmamasını gerektirir.

Önerme 4.20. Her $i = 1, \dots, m-1$ için $|\lambda^{(i)}| = |\mu^{(i)}|$ olacak şekilde $\lambda^{[m]}, \mu^{[m]} \in P^{(m)}(n)$ olsun. Kabul edelim ki skalerlerin cismi $\mathcal{C}$ ve $\theta \in \text{Hom}(S^{\lambda^{[m]}}, M^{\mu^{[m]}})$ sıfır olmasın. Bu taktirde $\lambda^{[m]} \geq \mu^{[m]}$ dir ve eğer $\lambda^{[m]} = \mu^{[m]}$ ise bu taktirde θ bir skalerle çarpımdır.

İspat: $\theta \neq 0$ olduğundan $\theta(e_t) \neq 0$ olacak şekilde bazı e_t bazları vardır. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bir kompleks iç çarpım olduğundan

$$M^{\lambda^{[m]}} = S^{\lambda^{[m]}} \oplus (S^{\lambda^{[m]}})^{\perp}$$

dır. Böylece, $\theta\left((S^{\lambda^{[m]}})^{\perp}\right) = 0$ yazarak θ yı $\text{Hom}(M^{\lambda^{[m]}}, M^{\mu^{[m]}})$ in bir elemanına

genişletebiliriz. O halde

$$0 \neq \theta(e_t) = \theta(\kappa_t \{t\}) = \kappa_t \theta(\{t\}) = \kappa_t \left(\sum \alpha_{t'} \{t'\} \right)$$

dir, ki bu toplam bütün $t' \mu^{[m]}$ - tablolarının üzerinden alınmaktadır öyleki her a için, $i \in \{1, \dots, m-1\}$ ve $s_i \in \{1, \dots, m\}$ olmak üzere eğer a , $t_{\lambda^{(i)}}$ de yer alır ise bu taktirde $\zeta^{s_i} a$, $t'_{\mu^{(i)}}$ de yer alır. (Burada bu kısıtlamaya ihtiyacımız var, aksi taktirde θ , W_n^m in etkimesini korumaz.) Lemma 4.10. dan $\lambda^{[m]} \geq \mu^{[m]}$ elde ederiz.

$\lambda^{[m]} = \mu^{[m]}$ durumda, yukarıdaki toplam t her bir t' ile bağdaşacak şekilde bütün $t' \mu^{[m]}$ - tabloları üzerinden alınır. Bundan dolayı Sonuç 4.13. bazı $\beta \in C$ için $\theta(e_t) = \beta e_t$ olduğunu verir. Bu yüzden herhangi bir $\sigma \in W_n^m$ için

$$\begin{aligned} \theta(e_{\sigma t}) &= \theta(\zeta^{m-\phi(\sigma,t)} \sigma e_t) = \zeta^{m-\phi(\sigma,t)} \sigma \theta(e_t) \\ &= \zeta^{m-\phi(\sigma,t)} \sigma(\beta e_t) = \beta e_{\sigma t} \end{aligned}$$

dir. Böylece θ , bir skalerle çarpımdır.

Teorem 4.21. $S^{\lambda^{[m]}}(\lambda^{[m]} \in P^{(m)}(n))$ indirgenemez CW_n^m -modüllerinin bir tam cümlesini verir.

İspat: Sonuç 4.18. den $S^{\lambda^{[m]}}$ indirgenemezdir. Tam bir cümle için doğru sayıda modüle sahip olduğumuzdan onların ikişer ikişer eşitsizliği olduğunu göstermek kafidir. Şimdi, $\lambda^{[m]}, \mu^{[m]} \in P^{(m)}(n)$ olsun. Eğer $|\lambda^{(i)}| > |\mu^{(i)}|$ ya da $|\lambda^{(j)}| = |\mu^{(j)}|$ ($1 \leq j \leq k$) ve bazı $k \in \{1, \dots, m-2\}$ için $|\lambda^{(k+1)}| > |\mu^{(k+1)}|$ ise bu taktirde Önerme 4.19. dan $S^{\lambda^{[m]}}$ ve $S^{\mu^{[m]}}$ izomorfik değildir. Eğer her $i = 1, 2, \dots, m-1$ için $|\lambda^{(i)}| = |\mu^{(i)}|$ ve $S^{\lambda^{[m]}} \cong S^{\mu^{[m]}}$ ise bu taktirde $S^{\mu^{[m]}} \subseteq M^{\mu^{[m]}}$ olmasından bir $\theta \in \text{Hom}(S^{\lambda^{[m]}}, M^{\mu^{[m]}})$ sıfırdan farklı homomorfizmi bulunur. Böylece Önerme 4.19. dan $\lambda^{[m]} \geq \mu^{[m]}$ dir. Benzer şekilde $\mu^{[m]} \geq \lambda^{[m]}$ dir. O halde $\lambda^{[m]} = \mu^{[m]}$ elde edilir.

BÖLÜM 5

SPECHT MODÜLLER İÇİN BİR BAZ

Hiperoktahedral grupta olduğu gibi genellikle $S^{\lambda^{[m]}}$ i üreten politabloidler lineer bağımsız değildir. Şimdi $S^{\lambda^{[m]}}$ için bir baz oluşturan bir alt cümle belirleyeceğiz.

Tanım 5.1. Eğer t nin terimlerinin hepsi pozitif tamsayı ise bir t $\lambda^{[m]}$ - tabloya *standart* denir ve her $i = 1, \dots, m$ için $t_{\lambda^{(i)}}$ bir standart tablodur. Eğer $\{t\}$ denklik sınıfında bir standart tablo varsa $\{t\}$ bir *standart tabloiddir*. Eğer t bir standart tablo ise e_t bir *standart politabloiddir*.

Örneğin, eğer $\lambda^{[3]} = (2^2, 0, 21) \in P^{(3)}(7)$ ise bu taktirde

$$t_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}, \emptyset,$$

bir standart $\lambda^{[3]}$ - tablodur, fakat

$$t_2 = \begin{pmatrix} \xi 3 & 2 & \xi^2 5 & 7 \\ 1 & \xi 6 & 4 \end{pmatrix}, \emptyset,$$

değildir.

Teorem 5.2. $\{e_t \mid t, \text{ bir standart } \lambda^{[m]} \text{ - tablodur}\}$ cümlesi $S^{\lambda^{[m]}}$ için bir $\mathbb{C}$ - bazıdır. $S^{\lambda^{[m]}}$ in boyutu, standart $\lambda^{[m]}$ -tablolarının sayısıdır.

Gelecek iki bölümü bu teoremin ispatı için ayırdık. İlk olarak e_t nin linear bağımsızlığını kanıtlayacağız. Bu durum için bizim n nin parçalanmalarının aynı m -setleriyle ilişkili tabloidler üzerinde bir kısmî sıralamaya ihtiyacımız var.

$t = (t_{\lambda^{(1)}}, \dots, t_{\lambda^{(m)}})$ bir $\lambda^{[m]}$ -tablo olsun. $|t_{\lambda^{(k)}}|$, her $k = 1, \dots, m$ için $t_{\lambda^{(k)}}$ nin modüllerini gösterebilir. Yani $t_{\lambda^{(k)}}(i, j)$, (i, j) pozisyonunda $t_{\lambda^{(k)}}$ nin terimini ifade etmek üzere eğer $t_{\lambda^{(k)}} = (t_{\lambda^{(k)}}(i, j))$ ise bu taktirde her $k = 1, \dots, m$ için $|t_{\lambda^{(k)}}| = (|t_{\lambda^{(k)}}(i, j)|)$ dır.

Her i için, $s_i(t_{\lambda^{(l)}}) = i$ nin kompleks katının kuvveti, eğer i $t_{\lambda^{(l)}}$ de yer alır ise, $s_i(t_{\lambda^{(l)}}) = 0$, eğer i $t_{\lambda^{(l)}}$ de içerilmiyor veya kompleks katsayısız $t_{\lambda^{(l)}}$ da yer alıyor ise; şeklinde tanımlanan $t_{\lambda^{(l)}}$ ile ilişkili bir dizi $(s_i(t_{\lambda^{(l)}}))_{1 \leq i \leq n}$ olsun. (Bu noktada eğer m çift ise $\xi^{m/2} = -1$ bağıntısını kullanmadık.)

Örneğin, eğer $\lambda^{[3]} = (31, 2^2, 21) \in P^{(3)}(11)$ ve

$$t = \begin{pmatrix} \xi^2 1 & \xi 7 & 3 & \xi^2 6 & 4 & 8 & \xi 2 \\ & & & & & & \\ \xi 9 & & & 11 & \xi 5 & 10 & \end{pmatrix}$$

ise bu taktirde

$$|t_{\lambda^{(1)}}| = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 9 & & \end{pmatrix}, \quad |t_{\lambda^{(2)}}| = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 11 & 5 \end{pmatrix}, \quad |t_{\lambda^{(3)}}| = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 10 & \end{pmatrix}$$

ve

$$(s_i(t_{\lambda^{(l)}}))_{1 \leq i \leq 11} = (2, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0)$$

elde ederiz.

Herhangi bir $t = (t_{\lambda^{(1)}}, \dots, t_{\lambda^{(m)}})$ tablo verilsin ve $m_{ir}(t_{\lambda^{(k)}})$, $k = 1, \dots, m$ iken $|t_{\lambda^{(k)}}|$ nin ilk r satırında i ($i = 1, \dots, n$) den daha küçük ya da eşit terimlerin sayısını ifade etsin.

Tanım 5.3. $\lambda^{[m]} \in P^{(m)}(n)$ olsun. $\{t\}$ ve $\{s\}$ $\lambda^{[m]}$ -tabloidleri olsun. Bu taktirde

(a) aşağıdaki durumlardan biri mevcut ise $\{t_{\lambda^{(l)}}\} \leq \{s_{\lambda^{(l)}}\}$ dir:

1. $t_{\lambda^{(l)}}$ in bazı terimleri kompleks (ya da negatif) ve $s_{\lambda^{(l)}}$ de terimlerin hepsi pozitif tamsayıdır (bu durumda $\{t_{\lambda^{(l)}}\} < \{s_{\lambda^{(l)}}\}$ dır),

2. $|t_{\lambda^{(l)}}| = |s_{\lambda^{(l)}}|$ ve her $i = 1, \dots, n$ için $s_i(t_{\lambda^{(l)}}) \leq s_i(s_{\lambda^{(l)}})$ dir,

3. $|t_{\lambda^{(l)}}| \neq |s_{\lambda^{(l)}}|$ ve her i ($1 \leq i \leq n$) ve r için $m_{ir}(t_{\lambda^{(l)}}) \leq m_{ir}(s_{\lambda^{(l)}})$ dir,

(b) $k = 2, 3, \dots, m$ olmak üzere eğer i ($1 \leq i \leq n$) ve r için $m_{ir}(t_{\lambda^{(k)}}) \leq m_{ir}(s_{\lambda^{(k)}})$ ise $\{t_{\lambda^{(k)}}\} \leq \{s_{\lambda^{(k)}}\}$ dır.

Böylece, eğer her $k = 1, \dots, m$ için $\{t_{\lambda^{(k)}}\} \leq \{s_{\lambda^{(k)}}\}$ ise $\{s\}, \{t\}$ ye *dominanttır* denir ve $\{t\} \leq \{s\}$ şeklinde gösterilir.

Örnek 5.4.(i)

$$t = \begin{pmatrix} \zeta^2 & 3 & 6 & 5 & 11 & 8 & \zeta^9 \\ \zeta^2 & 1 & & \zeta^2 & 4 & 10 & \zeta^2 & 7 \end{pmatrix}$$

ve

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \zeta^2 & 6 & \zeta^4 & \zeta^5 & 7 & \zeta^9 \\ \zeta^3 & & & 10 & 11 & & 8 \end{pmatrix}$$

$\lambda^{[3]}$ - tabloları olsun.

$t_{\lambda^{(l)}}$ ve $s_{\lambda^{(l)}}$ in bazı terimlerinin kompleks ve

$$|t_{\lambda^{(l)}}| = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 \end{pmatrix} \neq |s_{\lambda^{(l)}}| = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

olduğundan $(m_{ir}(t_{\lambda^{(l)}}))$ ve $(m_{ir}(s_{\lambda^{(l)}}))$ matrislerine bakmak zorundayız. Böylece

$(m_{ir}(t_{\lambda^{(l)}}))$ ve $(m_{ir}(s_{\lambda^{(l)}}))$ matrislerinin ilk 11 satır ve 2 sütünü:

0	1	1	1
1	2	2	2
2	3	2	3
2	3	2	3
2	3	2	3
$\left(m_{ir}\left(t_{\lambda^{(l)}}\right)\right)=3$	4	$\left(m_{ir}\left(s_{\lambda^{(l)}}\right)\right)=3$	4
3	4	3	4
3	4	3	4
3	4	3	4
3	4	3	4
3	4	3	4

şeklindedir.

Bu yüzden, Tanım 5.3. ün (a) (3) şikkından $\{t_{\lambda^{(l)}}\} < \{s_{\lambda^{(l)}}\}$ olduğunu elde ederiz.

İkinci olarak $\left(m_{ir}\left(t_{\lambda^{(2)}}\right)\right)$ ve $\left(m_{ir}\left(s_{\lambda^{(2)}}\right)\right)$ matrislerinin ilk 11 satır ve 2 sütunu:

0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	1	1	1
1	2	2	2
$\left(m_{ir}\left(t_{\lambda^{(2)}}\right)\right)=1$	2	$\left(m_{ir}\left(s_{\lambda^{(2)}}\right)\right)=2$	2
1	2	2	2
1	2	2	2
1	2	2	2
1	3	2	3
2	4	2	4

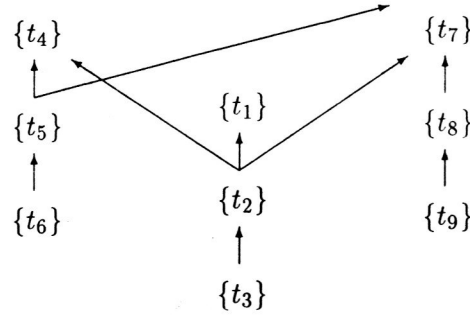
dür.

Bu yüzden $\{t_{\lambda^{(2)}}\} < \{s_{\lambda^{(2)}}\}$ dir. Benzer biçimde $\{t_{\lambda^{(3)}}\} < \{s_{\lambda^{(3)}}\}$ elde ederiz. Böylece $\{t\} < \{s\}$ tır.

ii) $\lambda^{(3)} = (1, 0, 2) \in P^{(3)}(3)$ olsun. Bu taktirde $\lambda^{[3]}$ - tabloidleri üzerinde dominantlık bağıntısı

$$\begin{aligned}\{t_1\} &= (\overline{1}, \overline{\emptyset}, \overline{23}), \quad \{t_2\} = (\overline{\zeta^2 1}, \overline{\emptyset}, \overline{23}), \quad \{t_3\} = (\overline{\zeta 1}, \overline{\emptyset}, \overline{23}), \\ \{t_4\} &= (\overline{2}, \overline{\emptyset}, \overline{13}), \quad \{t_5\} = (\overline{\zeta^2 2}, \overline{\emptyset}, \overline{13}), \quad \{t_6\} = (\overline{\zeta 2}, \overline{\emptyset}, \overline{13}), \\ \{t_7\} &= (\overline{3}, \overline{\emptyset}, \overline{12}), \quad \{t_8\} = (\overline{\zeta^2 3}, \overline{\emptyset}, \overline{12}), \quad \{t_9\} = (\overline{\zeta 3}, \overline{\emptyset}, \overline{12})\end{aligned}$$

olmak üzere aşağıdaki gibi Hasse diyagramı ile gösterilir:



$\{t\}$ bir $\lambda^{[m]}$ - tabloid olsun. $1 \leq s_1, s_2 \leq m, k, l \in \{1, \dots, n\}$ ve $j \in \{1, \dots, m\}$ olmak üzere $a = \zeta^{s_1} k$, $b = \zeta^{s_2} l$, $k < l$ ve $a, t_{\lambda^{(j)}}$ nin p . satırında ve $b, t_{\lambda^{(j)}}$ nin q . satırında olacak şekilde a ve b nin $t_{\lambda^{(j)}}$ de yer aldığını farz edelim. Bu taktirde $m_{ir}(t_{\lambda^{(j)}})$ nin tanımını $j \in \{1, \dots, m\}$ olmak üzere

$$(1) \quad m_{ir}((a,b)t_{\lambda^{(j)}}) - m_{ir}(t_{\lambda^{(j)}}) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } q \leq r < p \text{ ve } k \leq i < l \text{ ise} \\ -1, & \text{eğer } p \leq r < q \text{ ve } k \leq i < l \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olduğunu verir.

Parçalanmalarda olduğu gibi tabloidler için de bir dominantlık lemması vardır.

Lemma 5.5. (Tabloidler İçin Dominantlık Lemması) $\{t\}$ bir $\lambda^{[m]}$ - tabloid olsun.

Eğer $1 \leq s_1, s_2 \leq m, k, l \in \{1, \dots, n\}$ ve $j \in \{1, \dots, m\}$ olmak üzere

$a = \zeta^{s_1} k$, $b = \zeta^{s_2} l$, $k < l$ ve a, b den bir aşağı satırda ortaya çıkacak şekilde a ve b terimleri $t_{\lambda^{(j)}}$ de bulunuyorsa bu taktirde $\{t\} < (a,b)\{t\}$ dir.

İspat: $1 \leq k < l \leq n$, $1 \leq s_1, s_2 \leq m$ ve $j \in \{1, \dots, m\}$ olmak üzere $a = \zeta^{s_1} k$, $b = \zeta^{s_2} l$ olacak şekilde a ve b $t_{\lambda^{(j)}}$ de iki eleman olsun. Bu taktirde

$$(a, b) = (k, l) w_k^{m+s_2-s_1} w_l^{m+s_1-s_2} \text{ ve } (a, b)\{t\} = \{(a, b)t\}$$

dir.

Bu yüzden, sonuç (1) den elde edilir.

Dominantlık lemması, bir standart politabloidde ortaya çıkabilen tabloidler üzerinde bir kısıtlama koyar.

Sonuç 5.6. Eğer t standartsa ve $\{s\}$ e_t de ortaya çıkarsa bu taktirde $\{s\} \leq \{t\}$ dir.

İspat: $\pi \in C_t$ olmak üzere $s = \pi t$ olsun; böylece $\{s\}$, e_t de ortaya çıkar. s teki sütun inversiyonlarının sayısı üzerinde tümevarım uygulayalım. Her bir i $t_{\lambda^{(i)}}$ de ortaya çıkmak ve $1 \leq s_i \leq m$ olmak üzere $\tau \in S_n$ ve $\gamma = \prod_i w_i^{s_i} \in C_m^n$ olacak şekilde $\pi = \gamma \tau \in C_t$ olsun. Şimdi $\pi \in C_t$ ye göre bütün durumları göz önüne alalım:

i) İlk olarak eğer $\tau = e$ ise bu taktirde $\pi = \gamma$ dir. Böylece $s = \pi$ olduğundan γ , ζ nun bir kuvveti ile $t_{\lambda^{(i)}}$ deki sembollerin herhangi bir sayısını çarpar. Bundan dolayı $s_{\lambda^{(i)}}$ in bazı terimleri kompleks (ya da negatif) dir ve her $j = 2, 3, \dots, m$ için $s_{\lambda^{(j)}}$ de terimler değişmez. Bu taktirde Tanım 5.3. ün (a)(1) şikkından $\{s_{\lambda^{(i)}}\} < \{t_{\lambda^{(i)}}\}$ elde ederiz ve $j = 2, 3, \dots, m$ için $\{s_{\lambda^{(j)}}\} = \{t_{\lambda^{(j)}}\}$ dir. Bu nedenle $\{s\} < \{t\}$ dir.

ii) İkinci olarak eğer $\gamma \neq e$ ise bu taktirde $\pi \neq \tau$ dir. $s = \pi$ olduğundan o zaman $s_{\lambda^{(i)}}$ nin aynı satırında $j \in \{1, \dots, m\}$ olmak üzere k, l den daha aşağı bir satırda olacak şekilde $k < l$ pozitif tamsayıları vardır. Böylece Lemma 5.5. den $\{s\} < (k, l)\{s\}$ dir. $(k, l)\{s\}$, e_t de bulunduğundan ve $(k, l)\{s\} \leq \{s\}$ den daha az sayıda inversiyona sahip olduğundan dolayı tümevarım $(k, l)\{s\} \leq \{t\}$ olmasını gerektirir. Bu nedenle $\{s\} < \{t\}$ dir.

iii) Son olarak, eğer $\tau, \gamma \neq e$ ise bu taktirde $\pi = \gamma\tau$ ve $s = \gamma\tau t$ dir. (i) den $s_{\lambda^{(l)}}$ in bazı terimleri kompleks (ya da negatif) tir ve böylece $\{s_{\lambda^{(l)}}\} < \{t_{\lambda^{(l)}}\}$ olduğunu elde ederiz. Ayrıca $s_{\lambda^{(l)}}$ nin aynı sütununda, $1 \leq s_1, s_2 \leq m, k, l \in \{1, \dots, n\}$ ve $j \in \{1, \dots, m\}$ olmak üzere $k < l$ ve a, b den daha aşağıda bir satırda ortaya çıkacak şekilde $a = \zeta^{s_1} k$ ve $b = \zeta^{s_2} l$ terimleri vardır. Böylece Lemma 5.5. den $\{s\} < (a, b)\{s\}$ elde edilir. $(a, b)\{s\}$, e_t de bulunduğundan ve $(a, b)\{s\}$, $\{s\}$ den daha az sayıda inversiyona sahip olduğundan tümevarım $(a, b)\{s\} \leq \{t\}$ olduğunu gösterir. Bu yüzden $\{s\} < \{t\}$ dir. Böylece istenen sonucu elde ederiz.

Önceki sonuç, $\{t\}$ nin e_t de maximum tabloid olduğunu söyler.

Lemma 5.7. $v_1, v_2, \dots, v_k$ $M^{\lambda^{[m]}}$ in elemanları olsun. Her bir v_i için,

1. $\{t_i\}$ v_i de maximumdur,
2. $\{t_i\}$ lerin hepsi farklıdır,

olacak şekilde v_i de ortaya çıkan bir $\{t_i\}$ tabloidi seçebileceğimizi farzedelim.

Bu taktirde $v_1, \dots, v_k$ lar $\mathcal{C}$ üzerinde lineer bağımsızdır.

İspat: $\{t_j\}$, $\{t_i\}$ ler arasında maximal eleman olsun. Böylece hipotezimizin 1 ve 2 şartları $\{t_j\}$ in yalnızca v_i de olmasını gerektirir. (Eğer $i > 1$ için v_i de yer alıyor ise, bu taktirde $\{t_j\} < \{t_i\}$ dir, bu da $\{t_j\}$ in seçimiyle çelişir.)

Her hangi bir

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_k v_k = 0$$

lineer kombinasyonunda $c_i = 0$ olmak zorundadır, çünkü $\{t_j\}$ i iptal etmek için başka bir yol yoktur. k üzerindeki tümevarımdan katsayıların geri kalanları da 0 olmak zorundadır.

Artık, standart bazın lineer bağımsızlığını ispatlayacak bütün malzemelere sahibiz:

Önerme 5.8. $\{e_t | t, \text{ bir standart } \lambda^{[m]} \text{- tablodur} \}$ cümlesi C üzerinde lineer bağımsızdır.

İspat: Sonuç 5.6. dan $\{t\}, e_t$ de maximumdur ve hipotezden hepsi farklıdır. Böylece Lemma 5.7. den ispat görülür.

BÖLÜM 6

GARNİR BAĞINTISI

Bu bölümde standart $\lambda^{[m]}$ - politabloidlerin $S^{\lambda^{[m]}}$ i gerdiğini göstereceğiz; yani, eğer t bir keyfi $\lambda^{[m]}$ - tablo ise bu taktirde e_t standart $\lambda^{[m]}$ - politabloidlerinin bir lineer kombinasyonudur.

e_t ile ilişkili t nin Garnir elemanını belirlemek için aşağıdaki bağıntıları kullanırız:

Lemma 6.1. t bir $\lambda^{[m]}$ - tablo olsun.

(i) $1 \leq s_1, s_2 \leq m$; $k, l \in \{1, \dots, n\}$ ve $j \in \{1, \dots, m\}$ olmak üzere $a = \zeta^{s_1} k$, $b = \zeta^{s_2} l$ olacak şekilde a ve b $t_{\lambda^{(j)}}$ nin aynı sütununda iki eleman olsun. Bu taktirde

$$(a, b) = (k, l) w_k^{m+s_2-s_1} w_l^{m+s_1-s_2}$$

C_t nin 2.mertebeden bir alt grubunu üretir ve

$$(e + (a, b))e_t = 0 \quad (\text{alterne bağıntısı})$$

dır.

ii) $1 \leq s \leq m$, $1 \leq i \leq n$ olmak üzere $a = \zeta^s i$ olacak şekilde t tablosunda her hangi bir a terimi için

$$(e + \alpha w_i^{m-s})e_t = 0 \quad (\text{ilkel kök değişim bağıntısı})$$

olur, ki burada $j \in \{1, \dots, m\}$ için eğer a $t_{\lambda^{(j)}}$ de ortaya çıkarsa bu taktirde $\alpha = -\zeta^{-j(m-s)}$ dir.

İspat: (i) $(a, b)e_i = -e_i$ den elde edilir. (ii) ispatlamak için; $j \in \{1, \dots, m\}$ için eğer a $t_{\lambda^{(j)}}$ de yer alırsa bu taktirde $\phi\left(w_i^{m-s}, t\right) = j(m-s)$ olmak üzere

$$w_i^{m-s} e_t = \xi^{\phi(w_i^{m-s}, t)} e_t$$

bağıntısını kullanıyoruz.

Uyarı 6.2. Bir önceki lemma; e_i ile ilişkili t nin herhangi bir kompleks (ya da negatif) terimini yok eden (ilkel kök değişim bağıntısı) ve t yi sütun standart yapan (alterne bağıntısı) W_n^m nin elemanlarını bulabileceğimizi söyler. Yani e_i ile ilişkili t tablosu kompleks (ya da negatif) olmayan terimler kalmayacak ve bütün sütunlar standart olacak şekilde yeniden düzenlenebilir.

Örnek 6.3. Eğer

$$t = \left(\begin{array}{cccccc} 1 & \zeta^2 5 & \zeta 3 & 4 & 7 & 10 \\ & & & & & \\ 6 & 2 & 9 & & 8 & \end{array} \right)$$

olarak alırsak bu taktirde

$$\begin{aligned} e_t &= \zeta^{-1} \zeta^{-4} w_5 w_3^2 e_t \\ &= e_{\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 5 & 3 & 4 & 7 & 10 \\ 6 & 2 & 9 & & 8 & \end{array} \right)} \quad (\text{ilkel kök değişim bağıntısı}) \\ &= -(2, 5) e_{\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 5 & 3 & 4 & 7 & 10 \\ 6 & 2 & 9 & & 8 & \end{array} \right)} \quad (\text{alterne bağıntısı}) \\ &= -e_{\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 & 10 \\ 6 & 5 & 9 & & 8 & \end{array} \right)} \end{aligned}$$

elde ederiz.

Şimdi, verilen e_i politabloidini yok eden $G(m, l, n)$ nin grup cebirinin elemanlarını bulacağız. t nin terimleri ilkel kök değişim bağıntısı ve alterne bağıntısı tarafından yeniden düzenlenmiş olmak üzere t , e_i ile ilişkili bir $\lambda^{[m]}$ - tablo olsun. $k \in \{1, \dots, m\}$ olmak üzere t nin $t(i, j, k)$ ve $t(i, j+l, k)$ terimlerine sahip olduğunu farzedelim.

A , t nin j . sütununda, $t(i, j, k)$ ve onun altındaki terimlerin cümlesi olsun. B , t nin $(j+1)$. sütununda $t(i, j+1, k)$ ve onun üstündeki terimlerin cümlesi olsun. I ve J , indeks cümleleri olmak üzere,

$$A = \{a_i : i \in I\} \text{ ve } B = \{b_j : j \in J\}$$

olduğunu kabul edelim. $S_A, S_B, S_{A \cup B}$ $G(m, I, n)$ grubunun alt cümleleri olsun. $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ $S_{A \cup B}$ de $S_A \times S_B$ için koset temsilleri olsun. Ayrıca

$$S_{A \cup B} = \bigcup_{j=1}^r \sigma_j(S_A \times S_B) \text{ ve } G_{A,B} = \sum_{j=1}^r (\text{sgn } \sigma_j) \sigma_j$$

diyelim.

Uyarı 6.4. i) Eğer A ve B nin elemanları $t_{\lambda^{(i)}}$ e ait ise bu taktirde S_A, S_B ve $S_{A \cup B}$ sırasıyla A, B ve $A \cup B$ nin elemanları tarafından üretilen $G(m, I, n)$ nin alt gruplarıdır. $C_{A \cup B} (\subset C_m^n)$, $\{w_{a_i}, w_{b_j} \mid i \in I, j \in J\}$ tarafından üretilen $S_{A \cup B}$ nin alt grubu olsun. $C_{A \cup B}$, aynı zamanda $S_A \times S_B$ nin de bir alt grubu olduğundan, bütün $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ koset temsilleri S_n simetrik grubuna ait olacaktır.

ii) Eğer A ve B nin elemanları $j \in \{2, 3, \dots, m\}$ olmak üzere $t_{\lambda^{(j)}}$ ye ait ise bu taktirde $S_A, S_B, S_{A \cup B}$ nin sırasıyla $A, B, A \cup B$ üzerinde permütasyonlar tarafından üretilen $G(m, I, n)$ nin alt grupları olduğunu kabul ediyoruz.

iii) $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ koset temsilleri elbetteki tek değildir, fakat pratik amaçlar için $A \cup B$ de yer alan terimler haricinde $\sigma_r t, \dots, \sigma_1 t$, t ile bağdaşan tablolar ve bu tabloların $A \cup B$ de yer alan terimleri yukarıdan aşağıya doğru artacak şekilde $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ elemanlarını seçebiliriz.

Tanım 6.5. $G_{A,B}$ elemanına e_t ile ilişkili t nin bir *Garnir elemanı* denir.

Örnek 6.6. t , Örnek 6.3. teki gibi olsun. e_t üzerinde ilkel kök değişim bağıntısı ve alterne bağıntısını uyguladıktan sonra

$$e \begin{pmatrix} 1 & \zeta^2 5 & \zeta 3 & 4 & 7 & 10 \\ 6 & 2 & ' & 9 & ' & 8 \end{pmatrix} = -e \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 & 10 \\ 6 & 5 & ' & 9 & ' & 8 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

$A = \{6\}$ ve $B = \{2, 5\}$ olduğunu kabul edelim ve $e, (56), (256)$; $S_{A \cup B}$ de $S_A \times S_B$ için koset temsilleri olsun. Bu takdirde

$$G_{A,B} = e - (56) + (256)$$

dır.

H, W_m^n nin herhangi bir alt cümlesi olsun.

$$\bar{H} = \sum_{\sigma \in H} \zeta^{f(\sigma)} (sgn \sigma) \sigma$$

olarak tanımlansın ve eğer $H = \{\sigma\}$ ise bu takdirde $\bar{H}$ yerine

$$\bar{\sigma} = \zeta^{f(\sigma)} (sgn \sigma) \sigma$$

yazıyoruz.

Lemma 6.7. $H \leq W_n^m$ bir alt grup olsun. $1 \leq s_1, s_2 \leq m$ ve $k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$, $k \neq l$ olmak üzere $a = \zeta^{s_1} k$ ve $b = \zeta^{s_2} l$ olsun.

i) Eğer

$$(a, b) = (k, l) w_k^{m+s_2-s_1} w_l^{m+s_1-s_2} \in H$$

ise bu takdirde $c \in CW_n^m$ olmak üzere

$$\bar{H} = c(e - (a, b))$$

dir.

ii) Eğer $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ olmak üzere t ; a, b $t_{\lambda^{(j)}}$ nin aynı satırında yer alacak şekilde bir

$\lambda^{[m]}$ - tablo ve $(a, b) \in H$ ise bu takdirde

$$\bar{H} \{t\} = 0$$

dir.

İspat: (i) H in $K = \{e, (a, b)\}$ alt grubunu göz önüne alalım. H ta K için $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ koset temsilcilerini seçelim ve

$$H = \bigcup_{i=1}^s \sigma_i K$$

yazalım. Bu taktirde

$$\bar{H} = \left(\sum_{i=1}^s \overline{\sigma_i} \right) (e - (a, b))$$

dir; ki bu istenilen sonuçtur.

ii) Hipotezden,

$$(a, b)\{t\} = \{(a, b)t\} = \{t\}$$

dır. Böylece,

$$\bar{H}\{t\} = c(e - (a, b))\{t\} = c(\{t\} - \{t\}) = 0$$

dır.

Önerme 6.8. t, A, B bir Garnir elemanının tanımındaki gibi olsun. Eğer $|A \cup B|, t$ nin j . sütunundaki elemanların sayısından büyük ise bu taktirde

$$G_{A,B} e_t = 0$$

dir.

İspat : $\overline{S_A \times S_B} = \sum_{\sigma \in S_A \times S_B} \zeta^{f(\sigma)}(\text{sgn } \sigma) \sigma$ ve $\overline{S_{A \cup B}} = \sum_{\sigma \in S_{A \cup B}} \zeta^{f(\sigma)}(\text{sgn } \sigma) \sigma$

olsun.

Herhangi bir $\sigma \in C_t$ yi göz önüne alalım. Eğer A ve B nin elemanları $t_{\lambda^{(t)}}$ de ise bu taktirde hipotezden $c = \zeta^{s_1} a, d = \zeta^{s_2} b, 1 \leq s_1, s_2 \leq m$ olmak üzere $c, d; \sigma t_{\lambda^{(t)}}$ in aynı satırına ait olacak şekilde $a, b \in A \cup B$ pozitif tamsayıları mevcut olmalıdır. Böylece Uyarı 6.4. ten

$$(c, d) = (a, b) w_a^{m+s_2-s_1} w_b^{m+s_1-s_2} \in S_{A \cup B}$$

dir.

$j \in \{2, 3, \dots, m\}$ olmak üzere eğer A ve B nin elemanları $t_{\lambda^{(j)}}$ de ise hipotezden $j \in \{2, 3, \dots, m\}$ olmak üzere $a, b \in \sigma_{t_{\lambda^{(j)}}}$ nin aynı satırına ait olacak şekilde $a, b \in A \cup B$ pozitif tamsayıları olmalıdır. Bu yüzden Uyarı 6.4. (ii) den $(a, b) \in S_{A \cup B}$ dir.

$j \in \{1, 2, \dots, m\}$ olmak üzere $t_{\lambda^{(j)}}$ de ortaya çıkan A ve B nin elemanlarına göre (c, d) veya (a, b) aynı $S_{A \cup B}$ grubuna aittir. Fakat bu taktirde Lemma 6.7. den

$$\overline{S_{A \cup B}} \{ \sigma t \} = 0$$

dır. Bu, κ_t de ortaya çıkan her σ için doğru olduğundan

$$\overline{S_{A \cup B}} e_t = 0$$

elde ederiz.

Şimdi

$$S_{A \cup B} = \bigcup_{j=1}^r \sigma_j (S_A \times S_B)$$

dir. Böylece Uyarı 6.4. den

$$\overline{S_{A \cup B}} = G_{A,B} \overline{S_A \times S_B}$$

elde edilir. $S_A \times S_B \subset C_t$ olduğundan bu taktirde $\overline{S_A \times S_B}$ κ_t nin bir çarpanıdır ve

$$\overline{S_A \times S_B} e_t = |S_A \times S_B| e_t$$

dir. Bu yüzden

$$0 = \overline{S_{A \cup B}} e_t = |S_A \times S_B| G_{A,B} e_t$$

dir.

Böylece $G_{A,B} e_t = 0$ olur.

Örnek 6.9. Örnek 6.3. ve Örnek 6.6. yı göz önüne alarak,

$$t' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 & 10 \\ & & , & & , & \\ 6 & 5 & 9 & & 8 & \end{pmatrix}$$

olmak üzere,

$$0 = G_{A,B}e_{t'} = e_{t'} - e_{(5,6)t'} + e_{(256)t'}$$

elde ederiz. Böylece

$$e_t = -e_{t'} = e_{(256)t'} - e_{(56)t'}$$

olur.

Şimdi herhangi bir politabloidın standart politabloidlerin bir lineer kombinasyonu olarak yazılabileceğini kanıtlamak için Garnir bağıntısını, ilkel kök değişim bağıntısını ve alterne bağıntısını kullanacağız. Örnek 6.9. da bunun nasıl yapıldığını gösterdik.

Teorem 6.10. $\{e_t | t, \text{ bir standart } \lambda^{[m]} - \text{tablodur}\}$ cümlesi $S^{\lambda^{[m]}}$ i gerer.

İspat: İlk olarak t nin sütun denklik sınıfını $[t]$ ile gösterelim; yani

$$[t] = \{t' | \text{bazı } \sigma \in C_t \text{ için } t' = \sigma t \text{ dir}\}$$

dir.

Sütun denklik sınıfları, Tanım 5.3. teki satır denklik sınıfları üzerindeki kısmi sıralamaya benzer bir yolla kısmi sıralıdırlar.

t, e_t ile ilişkili herhangi bir $\lambda^{[m]}$ -tablo olsun. Bu taktirde Lemma 6.1. nin e_t den sütun standart politabloidlerin bir lineer kombinasyonu olarak yazılabileceğini farz edebiliriz. Bu yüzden, Uyarı 6.2. den dolayı t deki terimlerin hepsini pozitif tamsayı ve t yi standart kabul edebiliriz. Kabul edelim ki t standart olmasın. Bu t nin bazı bileşenlerinin standart olmadığı anlamına gelir ve $r \leq m$ olmak üzere t nin r tane bileşenin standart olmadığını kabul edelim. Kabul edelim ki t nin k .bileşeni standart olmasın. Tümevarım ile $[s] > [t]$ olduğu zaman e_s , her bir t' nün k .bileşeni standart olacak şekilde $e_{t'}$ politabloidlerin bir lineer kombinasyonu olarak yazılabileceğini kabul edebiliriz ve t nin k .bileşeni göz önüne alınarak e_t için aynı sonuç ispatlanır.

t nin k . bileşeninin standart olmadığını kabul ettiğimizden, t nin k . bileşeninde diyelim ki j . ve $(j+1)$. sütunlarında aşağıdaki durumu elde ederiz:

$$\begin{array}{cc}
 a_1 & b_1 \\
 & \wedge \\
 a_2 & b_2 \\
 & \wedge \\
 M & M \\
 & \wedge \\
 a_i & > b_i \\
 & \wedge \\
 a_{i+1} & M \\
 & \wedge b_q \\
 M & \\
 & \wedge \\
 a_p &
 \end{array}$$

$A = \{a_i, a_{i+1}, \dots, a_p\}$ ve $B = \{b_1, b_2, \dots, b_i\}$ alalım ve karşılık gelen

$$G_{A,B} = \sum_{\sigma} (\text{sgn } \sigma) \sigma$$

Garnir elemanını göz önüne alalım. Önerme 6.8. den

$$G_{A,B} e_t = 0$$

elde ederiz. Böylece

$$e_t = - \sum_{\sigma \neq e} (\text{sgn } \sigma) e_{\sigma t}$$

dir.

Fakat tabloidler için (Lemma 5.5.) dominantlık lemmasının sütun benzerinden dolayı $b_1 < b_2 < \dots < b_i < a_i < \dots < a_p$ olması $\sigma \neq e$ için $[\sigma t] \geq [t]$ olmasını gerektirir.

$$e_t = - \sum_{\sigma \neq e} (\text{sgn } \sigma) e_{\sigma t}$$

olduğundan, e_t ile ilişkili t nin k . bileşeni için tümevarım hipotezimizden sonuç elde edilir.

Böylece eğer yukarıdaki işlemi $(r-1)$ defa tekrarlırsak bu taktirde sonuç elde edilir.

Aşağıdaki iki örnekte W_n^m genelleştirilmiş simetrik grubunun indirgenemez temsillerinin C cismi üzerinde nasıl inşa edildiğini göstereceğiz:

Örnek 6.11. W_2^4 genelleştirilmiş simetrik grubunu göz önüne alalım:

$e, w_1 w_2, w_1^2 w_2^2, w_1^3 w_2^3, w_1, w_1^3, w_1^2, w_1 w_2^3, w_1^2 w_2^3, w_1 w_2^2, r_1, w_1 r_1, w_1^2 r_1, w_1^3 r_1$ sırasıyla W_2^4 ün $C_1, \dots, C_{14}$ konjüge sınıflarının temsilci elemanları olsun. 2 nin parçanmalarının 4-setleri aşağıdaki gibi olsun.

$$\begin{aligned} \lambda_1^{[4]} &= (0, 0, 0, 2) & \lambda_2^{[4]} &= (0, 0, 0, 1^2) & \lambda_3^{[4]} &= (0, 1^2, 0, 0) & \lambda_4^{[4]} &= (0, 2, 0, 0) \\ \lambda_5^{[4]} &= (1^2, 0, 0, 0) & \lambda_6^{[4]} &= (0, 0, 1^2, 0) & \lambda_7^{[4]} &= (2, 0, 0, 0) & \lambda_8^{[4]} &= (0, 0, 2, 0) \\ \lambda_9^{[4]} &= (1, 0, 1, 0) & \lambda_{10}^{[4]} &= (0, 1, 0, 1) & \lambda_{11}^{[4]} &= (1, 0, 0, 1) & \lambda_{12}^{[4]} &= (0, 0, 1, 1) \\ \lambda_{13}^{[4]} &= (0, 1, 1, 0) & \lambda_{14}^{[4]} &= (1, 1, 0, 0) \end{aligned}$$

Bu taktirde W_2^4 ün karakter tablosu tablo 1 ile verilir.

$M^{\lambda_i^{[4]}}$, bir CW_2^4 -modül olduğundan $1 \leq i \leq 14$ için ϕ_i karakterleriyle $M^{\lambda_i^{[4]}}$ için X_i matris temsilleri mevcuttur. $1 \leq i \leq 14$ için ψ_i karakteriyle birlikte $S^{\lambda_i^{[4]}}$ tarafından doğrulsun W_2^4 nin matris temsilleri T_i ler olsun.

i) Eğer $\lambda_8^{[4]} = (0, 0, 2, 0)$ alırsak bu taktirde $t = (\emptyset, \emptyset, 12, \emptyset)$ olmak üzere

$$\text{boy } M^{\lambda_8^{[4]}} = 1 \text{ ve } M^{\lambda_8^{[4]}} = S_p \{ \{t\} \}$$

dir. Fakat Specht modülün tanımından $S^{\lambda_8^{[4]}} \cong M^{\lambda_8^{[4]}}$ elde ederiz.

w_1^3 ve r_1 ; sırasıyla C_6, C_{11} konjüge sınıflarının temsilci elemanları olsun. Bu taktirde

$$w_1^3 e_t = w_1^3 \{t\} = \xi \{t\} = i e_t \text{ ve}$$

$$r_1 e_t = r_1 \{t\} = e_t$$

dir.

Böylece

$$T_8(w_1^3) = (i) \text{ ve } T_8(r_1) = 1$$

olduğunu elde ederiz, bu nedenle

$$\psi_8(w_1^3) = i \text{ ve } \psi_8(r_1) = 1$$

dir. Yukarıdakine benzer hesaplama ile $\psi_8 = \chi_8$ olduğu gösterilebilir.

W_2^4 ÜN KARAKTER TABLOSU

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}
	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	4	4	4	4
	1	4	2	4	4	4	2	4	4	4	2	8	4	8
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
χ_3	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1
χ_4	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1
χ_5	1	-1	1	-1	i	$-i$	-1	1	$-i$	i	-1	$-i$	1	$-i$
χ_6	1	-1	1	-1	$-i$	i	-1	1	i	$-i$	-1	$-i$	1	i
χ_7	1	-1	1	-1	i	$-i$	-1	1	$-i$	i	1	$-i$	-1	i
χ_8	1	-1	1	-1	$-i$	i	-1	1	i	$-i$	1	i	-1	$-i$
χ_9	2	2	2	2	0	0	-2	-2	0	0	0	0	0	0
χ_{10}	2	-2	2	-2	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0
χ_{11}	2	$2i$	-2	$-2i$	$1+i$	$1-i$	0	0	$-1+i$	$-1-i$	0	0	0	0
χ_{12}	2	$-2i$	-2	$2i$	$1-i$	$1+i$	0	0	$-1-i$	$-1+i$	0	0	0	0
χ_{13}	2	$2i$	-2	$-2i$	$-1-i$	$-1+i$	0	0	$1+i$	$1-i$	0	0	0	0
χ_{14}	2	$-2i$	-2	$2i$	$-1+i$	$-1-i$	0	0	$1-i$	$1+i$	0	0	0	0

Tablo 1.

ii) Eğer $\lambda_{II}^{[4]} = (1, 0, 0, 1)$ alırsak bu taktirde $k = 1, 2, 3, 4$ olmak üzere

$$\text{boy } M^{\lambda_{II}^{[4]}} = 8,$$

$$M^{\lambda_{II}^{[4]}} = S_p \left\{ \{t_k\}, \{t_l\} \mid t_k = (\zeta^k 1, \emptyset, \emptyset, 2), t_l = (\zeta^l 2, \emptyset, \emptyset, 1) \right\}$$

ve

$$e_{t_1} = \sum_{k=1}^4 \{ \zeta^k 1, \emptyset, \emptyset, 2 \} \quad \text{ve} \quad e_{t_2} = \sum_{k=1}^4 \{ \zeta^k 2, \emptyset, \emptyset, 1 \}$$

olmak üzere

$$S^{\lambda_{II}^{[4]}} = S_p \{ e_{t_1}, e_{t_2} \}$$

elde ederiz.

w_1 ve $w_1^2 r_1$ sırasıyla C_5, C_{12} konjüge sınıflarının temsilci elemanları olsun. Bu taktirde

$$w_1 e_{t_1} = i e_{t_1} \quad w_1^2 r_1 e_{t_1} = e_{t_2}$$

$$w_1 e_{t_2} = e_{t_2} \quad w_1^2 r_1 e_{t_2} = -e_{t_1}$$

dir. Böylece

$$T_{II}(w_1) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad T_{II}(w_1^2 r_1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

dır, bu nedenle

$$\psi_{II}(w_1) = 1 + i \quad \text{ve} \quad \psi_{II}(w_1^2 r_1) = 0$$

elde ederiz.

Yukarıdakine benzer bir hesaplama ile ; $\psi_{II} = \chi_{II}$ olduğu gösterilebilir.

Yukarıdaki gibi aynı metot ile W_2^4 ün karakter tablosu (Tablo 1.) elde edilebilir.

Örnek 6.12. Şimdi de, W_3^3 grubunu ele alalım:

$$e, w_1 w_2 w_3, w_1^2 w_2^2 w_3^2, w_1^2 w_2, w_1, w_1^2 w_2 w_3, w_2^2 w_3^2, w_1^2, w_2 w_3, w_1 w_2^2 w_3^2, (13),$$

$w_1(13), w_1^2(13), w_1w_2w_3(13), w_1^2w_2w_3(13), w_2w_3(13), w_1^2w_2^2w_3^2(13), w_2^2w_3^2(13),$
 $w_1w_2^2w_3^2(13), (123), w_1(123), w_1^2(123)$ sırasıyla W_3^3 ün $C_1, \dots, C_{22}$ konjuge
sınıflarının temsilci elemanları olsun. 3 ün parçalanmalarının 3- setleri aşağıdaki gibidir:

$$\lambda_1^{[3]} = (0, 0, 3) \quad \lambda_2^{[3]} = (0, 0, I^3) \quad \lambda_3^{[3]} = (3, 0, 0) \quad \lambda_4^{[3]} = (0, 3, 0) \quad \lambda_5^{[3]} = (I^3, 0, 0)$$

$$\lambda_6^{[3]} = (0, I^3, 0) \quad \lambda_7^{[3]} = (0, 0, 2I) \quad \lambda_8^{[3]} = (2I, 0, 0) \quad \lambda_9^{[3]} = (0, 2I, 0) \quad \lambda_{10}^{[3]} = (I, 0, 2)$$

$$\lambda_{11}^{[3]} = (2, I, 0) \quad \lambda_{12}^{[3]} = (0, 2, I) \quad \lambda_{13}^{[3]} = (0, I, 2) \quad \lambda_{14}^{[3]} = (I, 2, 0) \quad \lambda_{15}^{[3]} = (2, 0, I)$$

$$\lambda_{16}^{[3]} = (I, 0, I^2) \quad \lambda_{17}^{[3]} = (I^2, I, 0) \quad \lambda_{18}^{[3]} = (0, I^2, I) \quad \lambda_{19}^{[3]} = (0, I, I^2) \quad \lambda_{20}^{[3]} = (I, I^2, 0)$$

$$\lambda_{21}^{[3]} = (I^2, 0, I) \quad \lambda_{22}^{[3]} = (I, I, I)$$

W_3^3 ün karakter tablosunu tablo 2. de verdik.

$M^{\lambda_i^{[3]}}$ bir CW_3^3 - modül olduğundan, $M^{\lambda_i^{[3]}}$ için $1 \leq i \leq 22$ olmak üzere g_i karakterleriyle birlikte Y_i matris temsilleri mevcuttur. $1 \leq i \leq 22$ için R_i, f_i karakterleriyle birlikte $S^{\lambda_i^{[3]}}$ tarafından doğrulan W_3^3 ün matris temsilleri olsun.

Şimdi eğer $\lambda_{16}^{[3]} = (I, 0, I^2)$ alırsak, bu taktirde $k=1,2,3$ olmak üzere

$$\text{boy } M^{\lambda_{16}^{[3]}} = 18,$$

$$M^{\lambda_{16}^{[3]}} = Sp \left\{ \left\{ \zeta^k 1, \emptyset, \frac{2}{3} \right\}, \left\{ \zeta^k 2, \emptyset, \frac{1}{3} \right\}, \left\{ \zeta^k 3, \emptyset, \frac{1}{2} \right\} \right\}$$

$$\left\{ \left\{ \zeta^k 1, \emptyset, \frac{3}{2} \right\}, \left\{ \zeta^k 2, \emptyset, \frac{3}{1} \right\}, \left\{ \zeta^k 3, \emptyset, \frac{2}{1} \right\} \right\}$$

ve

$$e_{t_1} = \sum_{k=1}^3 \left\{ \zeta^k 1, \emptyset, \frac{2}{3} \right\} - \sum_{k=1}^3 \left\{ \zeta^k 1, \emptyset, \frac{3}{2} \right\}$$

$$e_{t_2} = \sum_{k=1}^3 \left\{ \zeta^k 2, \emptyset, \frac{1}{3} \right\} - \sum_{k=1}^3 \left\{ \zeta^k 2, \emptyset, \frac{3}{1} \right\}$$

$$e_{t_3} = \sum_{k=1}^3 \left\{ \xi^k 3, \emptyset, \frac{1}{2} \right\} - \sum_{k=1}^3 \left\{ \xi^k 3, \emptyset, \frac{2}{1} \right\}$$

olmak üzere

$$S^{\lambda_i^{[3]}} = Sp\{e_{t_1}, e_{t_2}, e_{t_3}\}$$

elde ederiz.

w_1 ve (13) sırasıyla C_5, C_{11} konjuge sınıflarının temsilci elemanları olsun. Bu takdirde

$$w_1 e_{t_1} = \zeta e_{t_1} \quad (13) e_{t_1} = -e_{t_3}$$

$$w_1 e_{t_2} = e_{t_2} \quad (13) e_{t_2} = -e_{t_2}$$

$$w_1 e_{t_3} = e_{t_3} \quad (13) e_{t_3} = -e_{t_1}$$

dir.

W_3^3 ÜN KARAKTER TABLOSU

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}
	1	1	1	6	3	3	3	3	3	3	9
	1	3	3	3	3	3	3	3	3	3	2
θ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
θ_2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1
θ_3	1	1	1	1	ξ	ξ	ξ	ξ^2	ξ^2	ξ^2	1
θ_4	1	1	1	1	ξ^2	ξ^2	ξ^2	ξ	ξ	ξ	1
θ_5	1	1	1	1	ξ	ξ	ξ	ξ^2	ξ^2	ξ^2	-1
θ_6	1	1	1	1	ξ^2	ξ^2	ξ^2	ξ	ξ	ξ	-1
θ_7	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	0
θ_8	2	2	2	2	2ξ	2ξ	2ξ	$2\xi^2$	$2\xi^2$	$2\xi^2$	0
θ_9	2	2	2	2	$2\xi^2$	$2\xi^2$	$2\xi^2$	2ξ	2ξ	2ξ	0
θ_{10}	3	3ξ	$3\xi^2$	0	$1 - \xi^2$	$\xi - 1$	$\xi^2 - \xi$	$1 - \xi$	$\xi - \xi^2$	$\xi^2 - 1$	1
θ_{11}	3	3ξ	$3\xi^2$	0	$\xi - 1$	$\xi^2 - \xi$	$1 - \xi^2$	$\xi^2 - 1$	$1 - \xi$	$\xi - \xi^2$	1
θ_{12}	3	3ξ	$3\xi^2$	0	$\xi^2 - \xi$	$1 - \xi^2$	$\xi - 1$	$\xi - \xi^2$	$\xi^2 - 1$	$1 - \xi$	1
θ_{13}	3	$3\xi^2$	3ξ	0	$1 - \xi$	$\xi^2 - 1$	$\xi - \xi^2$	$1 - \xi^2$	$\xi^2 - \xi$	$\xi - 1$	1
θ_{14}	3	$3\xi^2$	3ξ	0	$\xi^2 - 1$	$\xi - \xi^2$	$1 - \xi$	$\xi - 1$	$1 - \xi^2$	$\xi^2 - \xi$	1
θ_{15}	3	$3\xi^2$	3ξ	0	$\xi - \xi^2$	$1 - \xi$	$\xi^2 - 1$	$\xi^2 - \xi$	$\xi - 1$	$1 - \xi^2$	1
θ_{16}	3	3ξ	$3\xi^2$	0	$1 - \xi^2$	$\xi - 1$	$\xi^2 - \xi$	$1 - \xi$	$\xi - \xi^2$	$\xi^2 - 1$	-1
θ_{17}	3	3ξ	$3\xi^2$	0	$\xi - 1$	$\xi^2 - \xi$	$1 - \xi^2$	$\xi^2 - 1$	$1 - \xi$	$\xi - \xi^2$	-1
θ_{18}	3	3ξ	$3\xi^2$	0	$\xi^2 - \xi$	$1 - \xi^2$	$\xi - 1$	$\xi - \xi^2$	$\xi^2 - 1$	$1 - \xi$	-1
θ_{19}	3	$3\xi^2$	3ξ	0	$1 - \xi$	$\xi^2 - 1$	$\xi - \xi^2$	$1 - \xi^2$	$\xi^2 - \xi$	$\xi - 1$	-1
θ_{20}	3	$3\xi^2$	3ξ	0	$\xi^2 - 1$	$\xi - \xi^2$	$1 - \xi$	$\xi - 1$	$1 - \xi^2$	$\xi^2 - \xi$	-1
θ_{21}	3	$3\xi^2$	3ξ	0	$\xi - \xi^2$	$1 - \xi$	$\xi^2 - 1$	$\xi^2 - \xi$	$\xi - 1$	$1 - \xi^2$	-1
θ_{22}	6	6	6	-3	0	0	0	0	0	0	0

Tablo 2.

Böylece

$$R_{16}(w_1) = \begin{pmatrix} \xi & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_{16}((13)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olduğunu elde ederiz ve

$$f_{16}(w_1) = 2 + \xi = 1 - \xi^2 \text{ ve } f_{16}((13)) = -1$$

dir.

Yukarıdaki işleme benzer bir hesaplama ile $f_{16} = g_{16}$ olduğunu gösterebiliriz. Bu yüzden, yukarıdakine benzer aynı metot ile W_3^3 ün karakter tablosunu (Tablo 2.) elde edebiliriz.

KAYNAKLAR

1. Can, H., Representations of Complex Reflection Groups, Ph.D. Thesis, Wales Univ., Aberystwyth, 1995.
2. Can, H., Representations of The Generalised Symmetric Groups, Cont. to Algebra and Geometry. 1996.
3. J. W. Davies and A. O. Morris. The Generalised Symmetric Group. Journal of The London Mathematical Society, 8:615-620, 1974 .
4. M. C. Hughes. The Representations of Complex Reflection Groups. PhD. Thesis, University of Wales, 1981.
5. M. C. Hughes. Representations of Complex Imprimitve Reflection Groups. Math. Proceedings of The Cambridge Philosophical Society, 94:425-436, 1983.
6. G. D. James. The Representations Theory of The Symmetric Groups. Springer-Verlag Lecture Notes in Mathematics (Volume 682), New York, 1978.
7. A. Kerber. Representations of Permutation Groups. Springer-Verlag Lecture Notes in Mathematics (Volume 240), New York, 1971.
8. A. O. Morris. Representations of Weyl Groups over an arbitrary field. Asterisque, 87:267-287, 1981.
9. M. Osima. On The Representations of The Generalised Symmetric Group. Mathematical Journal of Okayama University, 4(1):39-56, 1954.
10. B. M. Puttaswamaiah. Unitary Representations of Generalised Symmetric Groups. Canadian Journal of Mathematics, 21:28-38,1969.
11. E. W. Read. On projective Representations of The Finite Reflection Groups of Type B_l and D_l . Journal of London Mathematical Society, 10:129-142, 1975.
12. E. W. Read. The α - regular Classes of The Generalised Symmetric Group. Glasgow Mathematical Journal, 17(2):144-150, 1976.

13. E. W. Read. On The Finite Imprimitive Unitary Reflection Group. *Journal of Algebra*, 45(2):439-452, 1977.
14. B. E. Sagan. The Symmetric Group- Representations, Combinatorial Algorithms and Symmetric Functions. Wadsworth & Brooks / Cole, Pasific Grove, California, 1991.
15. M. Saeed ul Islam. The Projective Representations of The Finite Imprimitive Unitary Reflection Groups. PhD. Thesis, University of Wales, 1980.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Hatice İSKENDEROĞLU
Baba Adı : Mehmet
Ana Adı : Zekiye
Doğum Yeri : Isparta
Doğum Tarihi : 20.04.1981

Eğitim hayatı sırasıyla Kayseri Sümer İlkokulu, Sümer Ortaokulu ve Sümer Lisesi'nde devam etti. Erciyes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden lisans diploması alarak 2003 yılında mezun oldu. Aynı yıl Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü'nde Yüksek Lisans eğitimine başladı. Halen aynı bölümde öğrenim görmektedir.

Adres: Barbaros Mh. Bağdat Cad. No:64/8 Kocasinan, KAYSERİ.

Gsm : 0 535 847 18 17