

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
ÇÖZÜMLERİNİN KARARLILIK, SINIRLILIK
DURUMLARI ve PERİYODİK ÇÖZÜMLERİNİN
VARLIĞI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: İlhami DOĞAN
DANIŞMAN: Prof. Dr. Cemil TUNÇ

VAN - 2008

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
ÇÖZÜMLERİNİN KARARLILIK, SINIRLILIK
DURUMLARI ve PERİYODİK ÇÖZÜMLERİNİN
VARLIĞI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: İlhami DOĞAN

VAN - 2008

KABUL ve ONAY SAYFASI

Prof. Dr. Cemil TUNÇ danışmanlığında, İlhami DOĞAN tarafından hazırlanan “*Gecikmeli Diferansiyel Denklemlerin Çözümlerinin Kararlılık, Sınırlılık Durumları Ve Periyodik Çözümlerinin Varlığı*” isimli bu çalışma .../.../2008 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı’nda *Yüksek Lisans Tezi* olarak kabul edilmiştir.

Başkan:... .. İmza:

Üye :... .. İmza:

Üye :... .. İmza:

Üye :... .. İmza:

Üye :... .. İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun .../.../2008. gün ve sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

ÖZET

GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN KARARLILIK , SINIRLILIK DURUMLARI ve PERİYODİK ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI

DOĞAN, İlhami

Yüksek Lisans Tezi , Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Cemil TUNÇ

Şubat 2008, 61 sayfa

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde bazı temel kavramlar, teoremler ve lemmalar verilmiştir. İkinci bölümde literatürde geçen üçüncü basamaktan gecikmeli diferansiyel denklemlerin çözümlerine ait kararlılık, sınırlılık durumları ve periyodik çözümlerinin varlığına ilişkin sonuçlar verilmiştir. Son bölümde ise dördüncü basamaktan gecikmeli diferansiyel denklemlerinin çözümlerine ait benzer sonuçlar ele alınmıştır.

Anahtar kelimeler : Gecikmeli Diferansiyel Denklemler, Kararlılık, Lyapunov fonksiyoneli, Periyodik çözüm, Sınırlılık.

ABSTRACT

ON THE STABILITY, BOUNDEDNESS and EXISTENCE OF PERIODIC SOLUTIONS TO NONLINEAR DELAY DIFFERENTIAL EQUATIONS

DOĞAN, İlhami

Msc, Mathematics Science

Supervisor: Prof. Dr. Cemil TUNÇ

February 2008, 61 pages

This thesis consists of three chapters. In first chapter, some basic concepts, theorems and lemmas have been introduced. In the second chapter, some results, in the related literature, concerning to the stability, boundedness and existence of periodic solutions to certain third order nonlinear delay differential equations have been given. In the last chapter some similar results for certain fourth order nonlinear delay differential equations have also been studied.

Key words : Boundedness, Delay differential equations, Lyapunov functional, Periodic solution, Stability.

ÖN SÖZ

Yüksek lisans eğitimim süresince benden hiçbir yardımını esirgemeyen, mesleki açıdan gelişmemde büyük katkısı olan ve bu süreçte büyük sabır gösteren çok değerli hocam Prof. Dr. Cemil TUNÇ'a sonsuz saygılar sunarım ve teşekkür ederim.

İlhami DOĞAN

İÇİNDEKİLER

	sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	iii
ÖN SÖZ	v
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ	2
3. TEMEL TANIMLAR	3
3.1 Temel Kavramlar	3
3.2 Bazı Temel Kavramlar, Teoremler ve Lemmalar	4
4. ÜÇÜNCÜ BASAMAKTAN GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE ÇÖZÜMLERİN KARARLILIK, SINIRLILIK DURUMLARI VE PERİYODİK ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI	13
4.1. Giriş	13
4.2. Üçüncü Basamaktan Gecikmeli Diferansiyel Denklemler İçin Bazı Kararlılık Sonuçları	15
4.3. Üçüncü Basamaktan Gecikmeli Diferansiyel Denklemler İçin Bazı Sınırlılık Sonuçları	27
4.4 Üçüncü Basamaktan Gecikmeli Diferansiyel Denklemler İçin Periyodiklik İle İlgili Bazı Sonuçlar	32
5. DÖRDÜNCÜ BASAMAKTAN GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE ÇÖZÜMLERİN KARARLILIK ve SINIRLILIK DURUMLARI	34
5.1. Giriş	34
5.2. Dördüncü Basamaktan Gecikmeli Diferansiyel Denklemler İçin Bazı Kararlılık Sonuçları	35
5.3. Dördüncü Basamaktan Gecikmeli Diferansiyel Denklemler İçin Bazı Sınırlılık Sonuçları	50
KAYNAKLAR	51
ÖZ GEÇMİŞ	53

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

α	: Alfa
β	: Beta
δ	: Delta
ε	: Epsilon
Φ	: Fi
cos	: Kosinüs
cot	: Kotanjant
λ	: Lambda
Ω	: Ohm
π	: Pi
ψ	: Psi
ρ	: Ro
sec	: Sekant
sin	: Sinüs
∞	: Sonsuz
tan	: Tanjant
θ	: Teta

1. GİRİŞ

İlgili matematik literatürüne bakıldığında 1960'lardan bu yana gecikmeli diferansiyel denklemlerin çözümlerinin kararlılık ve sınırlılık durumları için kayda değer çalışmalar yapılmıştır. Bu konuları birçok kitapta da içerilmektedir. Ayrıca üçüncü ve dördüncü basamaktan gecikmeli diferansiyel denklemler için az sayıda çalışma yapıldığı görülmektedir. Belki de gerek üçüncü gerekse dördüncü basamaktan lineer olmayan gecikmeli diferansiyel denklemlerin çözümlerinin kararlılık ve sınırlılık durumlarına ilişkin çalışmaların az sayıda olması, problemleri incelerken incelemede kullanılan Lyapunov fonksiyonellerinin inşa edilmesinin çok zor olmasından kaynaklanabilir. Ayrıca Lyapunov fonksiyonellerinin nasıl inşa edileceği hakkında genel bir yöntemin varlığı henüz bilinmemektedir. Gecikmeli olmayan diferansiyel denklemler için de aynı problemin var olduğu da bilinmektedir.

Bilindiği üzere uygulamalı bilim dallarını pek çoğunda, örneğin, mühendislik, fizik v.b. pek çok dalda ele alınan problemlerin matematiksel modellenmesine bir diferansiyel denklem karşılık gelir. Söz konusu sistemin hareketi hakkında yorum yapabilmek için onu temsil eden diferansiyel denklemin ve bu denklemlerin çözümleri hakkında bilgi sahibi olmak gerekir. Bu nedenle bu tezde ele alınacak denklem türlerinin çözümlerinin kararlılık ve sınırlılık durumları hakkında bilgi sahibi olmak son derece önemlidir. Bu ise söz konusu tezin önemini ortaya koymaktadır.

2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ

Matematik literatürüne bakıldığında 1960'lardan bu yana gecikmeli diferansiyel denklemlerin niteliksel davranışları üzerinde çok sayıda çalışma yapılmıştır. Gecikmeli diferansiyel denklemleri inceleyen çok sayıda kitap yayımlanmıştır. Bunun için Krasovskii(1963), Èl'sgol'ts (1966), Yoshizawa (1966), Lyapunov(1966), Èl'sgol'ts ve Norkin (1973), Hale (1977), Burton (1985), Kolmanovskii ve Nosov (1986), Gopalsamy (1992), Hale ve Lunel (1993), Kolmanovskii ve Myshkis (1999) isimli yazarların kitaplarına başvurulabilir. Ayrıca üçüncü basamaktan gecikmeli diferansiyel denklemlerin çözümlerinin kararlılık, sınırlılık durumları ve periyodik çözümlerinin varlığı ile ilgili bazı çalışmalar Sinha (1973), Okoronkwo (1988), Yunfeng (1992), Tejumola ve Tchegnani (2000), Sadek (2003), Sadek (2005), Bereketoglu ve Karakoç (2006) ve Tunç (2006) tarafından gerçekleştirilmiştir. Benzer biçimde dördüncü basamaktan gecikmeli diferansiyel denklemlerin çözümlerinin kararlılık ve sınırlılık durumları ile ilgili olarak Sinha (1973), Okoronkwo (1988), Bereketoglu (1998), Tejumola ve Tchegnani (2000), Sadek (2004) gibi araştırmacılar çalışmalarda bulunmuştur.

3. TEMEL TANIMLAR

Bu bölümde konuyla ilgili daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler alt kısımlarda sırasıyla verilecektir.

3.1. Giriş

Bilindiği üzere uygulamalı bilim dallarının pek çoğunda, örneğin, mühendislik, fizik v.b. pek çok dalda ele alınan problemlerin matematiksel modellenmesine bir diferansiyel denklem karşılık gelir. Ayrıca, pek çok fiziksel olayda bir sistemin mevcut andaki durumu geçmiş durumuna bağlı alınarak da ifade edilebilir. Söz konusu sistemin hareketi hakkında yorum yapabilmek için onu temsil eden diferansiyel denklem ve denklemin çözümleri hakkında bilgi sahibi olmak gerekir.

Aşağıdaki denklemler gecikmeli diferansiyel denklemler için birer örnektir:

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau(t)), \quad \tau(t) > 0$$

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau_1), x(t - \tau_2), \quad \tau_1, \tau_2 > 0$$

$$x''(t) = f(t, x(t), x'(t), x(t - \tau(t)), x'(t - \tau(t))), \quad \tau(t) \geq 0$$

$$x''(t) = f\left(t, x\left(\frac{t}{2}\right), x'\left(\frac{t}{2}\right), x(t), x'(t)\right); \quad t \geq 0$$

Yukarıdaki örnekler bakıldığında gecikmeli diferansiyel denklemler, bilinmeyen fonksiyon ve onun türevleri (en yüksek türev hariç) t ve t anından önceki anlara bağlı olarak ortaya çıkan diferansiyel denklemlerdir (Èl'sgol'ts, 1966).

İlgili matematik literatürüne bakıldığında 1960'lardan bu yana gecikmeli diferansiyel denklemlerin çözümlerinin kararlılık ve sınırlılık durumlarını ele alan kayda değer çalışmalar yapılmıştır. Ayrıca bu konuları içeren kitapların bazıları aşağıdaki gibi sıralanabilir: Krasovskii (1963), Èl'sgol'ts (1966), Yoshizawa (1966), Lyapunov (1966), Èl'sgol'ts ve Norkin (1973), Hale(1977), Burton (1985),

Kolmanovskii ve Nosov (1986), Gopalsamy (1992), Hale ve Lunel (1993), Kolmanovskii ve Myshkis (1999). Ancak üçüncü ve dördüncü basamaktan gecikmeli diferansiyel denklemler için yukarıda belirtilen konularda az sayıda çalışmanın yapıldığı görülmektedir. Bunun için Sinha (1973), Okoronkwo (1988), Yunfeng (1992), Bereketoglu (1998), Tejumola ve Tchegnani (2000), Sadek (2003), Sadek (2003), Sadek (2004) Sadek (2005), Bereketoglu ve Karakoç (2006) ,Tunç (2006) gibi araştırmacıların makalelerine başvurulabilir. Belki de gerek üçüncü gerekse dördüncü basamaktan lineer olmayan gecikmeli diferansiyel denklemlerin çözümlerinin kararlılık ve sınırlılık durumlarına ilişkin çalışmaların az sayıda olması, problemleri incelerken incelemede kullanılan Lyapunov fonksiyonellerinin inşa edilmesinin çok zor olmasından kaynaklanabilir. Ayrıca Lyapunov fonksiyonellerinin nasıl inşa edileceği hakkında literatürde genel bir yöntemin varlığı henüz bilinmemektedir. Gecikmeli olmayan diferansiyel denklemler için de aynı problemin var olduğu bilinmektedir.

3.2. Bazı Temel Tanım, Teorem ve Lemmalar

Şimdi, aşağıdaki otonom olmayan gecikmeli diferansiyel denklem sistemini gözönüne alalım

$$x' = f(t, x_t), \quad x_t = x(t + \theta), \quad -r \leq \theta \leq 0, \quad t \geq 0, \quad (3.1)$$

Burada $f : [0, \infty) \times C_H \rightarrow R^n$ sürekli dönüşüm, $f(t, 0) = 0$; $(C, \|\cdot\|)$, sürekli fonksiyonların Banach uzayı; $r > 0$ olmak üzere $\phi : [-r, 0] \rightarrow R^n$;

$$C_H = \{\phi \in (C[-r, 0], R^n) : \|\phi\| < H\}$$

dır. Varlık teorisine göre, eğer $\phi \in C_H$ ve $t \geq 0$ ise, bu takdirde (3.1) denklem sisteminin $[t_0, t_0 + \alpha)$ aralığında $t > t_0$ için en az bir $x(t, t_0, \phi)$ çözümü vardır öyle ki $x_t(t, \phi) = \phi$ olur. Burada α pozitif bir sabittir ve $\|\cdot\|$ sembolü ise R^n de bir normu temsile etmekte,

$$\|\phi_t\| = \max_{t-\alpha \leq s \leq t} |\phi(s)|$$

şeklinde tanımlanmaktadır (Burton,1985).

Tanım 3.2.1.

A ve h pozitif sabitler olmak üzere, $x(t_0, \phi)$ fonksiyonu $[t_0 - h, t_0 + A]$ dan R^n ye tanımlansın. Bu fonksiyon $t = t_0$ ($t_0 \geq 0$) da $\phi \in C_H$ başlangıç şartına sahip ve aşağıdaki özellikleri sağlasın:

(i) Her $t_0 \leq t < t_0 + A$ için $x(t_0, \phi) \in C_H$

(ii) $x(t_0, \phi) = \phi$,

(iii) Her $t_0 \leq t < t_0 + A$ için $x(t_0, \phi)$, (3.1) denklemini sağlar.

Bu takdirde $x(t_0, \phi)$ fonksiyonuna (3.1) denkleminin bir çözümüdür denir (Yoshizawa,1966).

Teorem 3.2.1.

Eğer her t ve $\phi \in C_{H_1}$ için $f(t, \phi)$ sürekli bir fonksiyon; $H_1 < H$, t_0 , $0 \leq t_0 < c$ (burada c pozitif sabit) ise, bu takdirde (3.1) denkleminin $t = t_0$ da ϕ başlangıç değerine sahip bir çözümü var ve $t > t_0$ için bu çözüm sürekli türevlenebilirdir (Yoshizawa,1966).

Tanım 3.2.2.

Kabul edelim ki $f(t, 0) = 0$ dır. Eğer (3.1) denkleminin sıfır çözümü:

(i) Her $\varepsilon > 0$ ve $t_1 \geq t_0$ için bir $\delta > 0$ vardır öyle ki $[\|\phi\| \leq \delta, t \geq t_1]$ için $|x(t, t_1, \phi)| < \varepsilon$ ise bu takdirde kararlıdır.

(ii) Kararlı ve her $t_1 \geq t_0$ için bir $\eta > 0$ vardır öyle ki $\|\phi\| \leq \eta$ olduğunda $t \rightarrow \infty$ için $x(t, t_0, \phi) \rightarrow 0$ ise bu takdirde asimptotik kararlıdır (Burton,1985).

Tanım 3.2.3.

Kabul edelim ki $V(t, \phi)$, $t \geq 0$ için sürekli bir fonksiyon ve $\phi \in C_H$ olsun. $V(t, \phi)$ nin (3.1) denklemi boyunca türevi

$$V'_{(3.1)}(t, \phi) = \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{V(t+h, x_{t+h}(t_0, \phi)) - V(t, x_t(t_0, \phi))}{h}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada $x(t_0, \phi)$, (3.1) denklemin çözümü ve $x_{t_0}(t_0, \phi) = \phi$ (Burton, 1985).

Tanım 3.2.4

Sürekli ve pozitif tanımlı bir $W : \mathfrak{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonuna bir wedge denir (Burton, 1985).

Tanım 3.2.5.

$W : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ sürekli bir fonksiyon ve $W(0) = 0$ olsun. Eğer her $s > 0$ için $W(s) > 0$ ve W artan ise W fonksiyonuna bir wedge olur (Burton, 1985).

Tanım 3.2.6.

Sürekli ve ϕ ye göre Lipschitz koşulunu sağlayan bir $V : [0, \infty) \times C_H \rightarrow [0, \infty)$, fonksiyoneline, W bir wedge olmak üzere aşağıdaki şartları sağlaması halinde (3.1) denklemi için bir Lyapunov fonksiyoneli denir:

$$(i) \quad W(|\phi(0)|) \leq V(t, \phi), \quad V(t, 0) = 0.$$

$$(ii) \quad V'_{(3.1)}(t, x_t) = \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [V(t+h, x_{t+h}(t_0, \phi)) - V(t, x_t(t_0, \phi))] \leq 0$$

(Burton, 1985).

Teorem 3.2.2.

V , (3.1) denklemi için aşağıdaki koşulları sağlayan bir Lyapunov fonksiyoneli olmak üzere

$$(i) \quad W_1(|\phi(0)|) \leq V(t, \phi) \leq W_2(\|\phi\|),$$

burada $W_1(r)$ ve $W_2(r)$ wedge fonksiyonlardır.

$$(ii) \quad V'_{(3.1)}(t, x_t) \leq 0,$$

ise bu takdirde (3.1) denkleminin sıfır çözümü düzgün kararlıdır (Yunfeng, 1992).

Teorem 3.2.3.

$V(t, \phi)$ (3.1) denklemi için bir Lyapunov fonksiyoneli olsun. Eğer

$$(i) \quad W_1(|\phi(0)|) \leq V(t, \phi) \leq W_2(\|\phi\|),$$

(Burada $W_1(r)$ ve $W_2(r)$ wedge fonksiyonlardır)

$$(ii) \quad V'_{(3.1)}(t, x_t) \leq -W_3(|x(t)|),$$

ise, bu takdirde (3.1) denkleminin sıfır çözümü düzgün asimptotik kararlıdır (Sinha, 1973).

Şimdi (3.1) gecikmeli diferansiyel denkleminin özel hali olan $x' = f(x_t)$ denklemi için aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 3.2.1

Kabul edelim ki $f(0) = 0$, V , $C_H = C$ de tanımlı sürekli bir fonksiyonel ve $V(0) = 0$ olsun. Ayrıca $u(s)$, $0 \leq s < \infty$ için negatif olmayan sürekli bir fonksiyon $u \rightarrow \infty$ için $u(s) \rightarrow \infty$, $u(0) = 0$ olsun. Eğer her $\phi \in C$, $u(|\phi(0)|) \leq V(\phi)$, $V(\phi) \geq 0$, $\dot{V}(\phi) \leq 0$, ise bu takdirde $x' = f(x_t)$ denkleminin $x_t = 0$ çözümü kararlıdır.

Eğer $Z = \{\phi \in C_H : V'(\phi) = 0\}$ ise o zaman $x' = f(x_t)$ fonksiyonelinin $x_t = 0$ çözümü asimptotik kararlıdır (Sinha, 1973).

Teorem 3.2.4.

Her $K \leq C$ için bir $L(K)$ vardır öyle ki

$$|f(t, \phi) - f(t, \psi)| \leq \|\phi - \psi\|$$

ve

$$f(t + \omega, \phi) = f(t, \phi)$$

olacak şekilde bir $\omega > 0$ varsa $f(t, \phi)$ fonksiyonu ω periyotlu periyodik bir çözüme sahiptir (Chukwu, 1978).

Örnek 3.2.1.

İkinci basamaktan gecikmeli lineer olmayan

$$x''(t) + \varphi(x(t-r), x'(t)) + f(x(t-r)) = 0 \quad (3.2)$$

diferansiyel denklemini göz önüne alalım. (3.2) denklemi aşağıdaki sisteme eşdeğerdir.

$$x'(t) = y(t),$$

$$y'(t) = -\varphi(x(t-r), y(t)) - f(x) + \int_{t-r}^t f'(x(s))y(s)ds. \quad (3.3)$$

Burada r pozitif bir sabittir, ayrıca $R^+ = [0, \infty)$ olmak üzere φ fonksiyonu sürekli ve her $t \in R^+$, $x(t-r)$ ve $y(t)$ için

$$\frac{\varphi(x(t-r), y(t))}{y(t)} \geq \alpha_1 \quad (y(t) \neq 0)$$

koşulunu sağlamaktadır; f türevlenebilen bir fonksiyon ve her x için

$$\frac{f(x)}{x} \geq \alpha_2, \quad (x \neq 0)$$

ve $|f'(x)| \leq L$ olsun. Burada α_1 , α_2 ve L pozitif sabitlerdir.

$$2V_0(x_t, y_t) = 2 \int_0^x f(s)ds + y^2 + 2\lambda \int_{-r}^0 \int_{t+s}^t y^2(\theta) d\theta ds$$

Lyapunov fonksiyoneli tanımlayalım. Burada λ pozitif sabit olup ilerde amaca yönelik olarak seçilecektir. $V_0(x_t, y_t)$ pozitif tanımlıdır. Gerçekten $V_0(0,0) = 0$ ve yukarıda verilen şartlara bağlı olarak

$$\begin{aligned}
V_0(x_t, y_t) &= \int_0^x \frac{f(s)}{s} s ds + \frac{1}{2} y^2 + \lambda \int_{-r}^0 \int_{t+s}^t y^2(\theta) d\theta ds \\
&\geq \int_0^x \alpha_2 s ds + \frac{1}{2} y^2 + \lambda \int_{-r}^0 \int_{t+s}^t y^2(\theta) d\theta ds \\
&\geq \frac{\alpha_2}{2} x^2 + \frac{1}{2} y^2 \geq k_1 (x^2 + y^2)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada $k_1 = \min\left\{\frac{\alpha_2}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ dır. Şimdi (3.3) sistemi boyunca $V_0(x_t, y_t)$ fonksiyonelinin türevi alındığında

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} V_0(x_t, y_t) &= -\varphi(x(t-r), y(t))y(t) + y(t) \int_{t-r}^t f'(x(s))y(s)ds \\
&\quad + \lambda y^2(t)r - \lambda \int_{t-r}^t y^2(s)ds.
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\frac{\varphi(x(t-r), y(t))}{y(t)} \geq \alpha_1, \quad |f'(x)| \leq L \quad \text{ve} \quad 2|uv| \leq u^2 + v^2$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} V_0(x_t, y_t) &\leq -\alpha_1 y^2 + \frac{L}{2} r y^2(t) + \frac{L}{2} \int_{t-r}^t y^2(s)ds + \lambda y^2(t)r - \lambda \int_{t-r}^t y^2(s)ds \\
&= -\left[\alpha_1 - \left(\frac{L}{2} + \lambda\right)r\right] y^2 + \left(\frac{L}{2} - \lambda\right) \int_{t-r}^t y^2(s)ds
\end{aligned}$$

yazılabilir. $\lambda = \frac{L}{2}$ olarak seçilirse

$$\frac{d}{dt} V_0(x_t, y_t) \leq -(\alpha_1 - Lr) y^2$$

olur. $r < \frac{\alpha_1}{L}$ olmak kaydıyla bir $\alpha > 0$ sabiti için

$$\frac{d}{dt} V_0(x_t, y_t) \leq -\alpha y^2 \leq 0$$

olur. O halde (3.2) denkleminin sıfır çözümü kararlıdır.

Örnek 3.2.2.

Aşağıdaki otonom olmayan gecikmeli

$$\begin{aligned} & x''(t) + \varphi(t, x(t-r(t)), x'(t-r(t))) + f(x(t-r(t))) \\ &= \frac{1}{1+t^2 + x^2(t) + x^2(t-r(t)) + (x'(t))^2 + (x'(t-r(t)))^2} \end{aligned} \quad (3.3)$$

diferansiyel denklemini göz önüne alalım. (3.3) denklemi aşağıdaki sisteme eşdeğerdir.

$$\begin{aligned} & x'(t) = y(t), \\ & y'(t) = -\varphi(t, x(t-r(t)), y(t-r(t))) - f(x) + \int_{t-r(t)}^t f'(x(s))y(s)ds \\ & + \frac{1}{1+t^2 + x^2(t) + x^2(t-r(t)) + y^2(t) + y^2(t-r(t))}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

Burada $0 \leq r(t) \leq \gamma$, γ pozitif sabit olup ilerde amaca yönelik olarak seçilecektir. φ sürekli, her $t \in R^+$, $x(t-r(t))$ ve $y(t-r(t))$ için

$$\frac{\varphi(x(t-r(t)), y(t-r(t)))}{y(t)} \geq \alpha_1, \quad (y(t) \neq 0),$$

koşulunu sağlamaktadır;

f türevlenebilen bir fonksiyon olsun, her x için $\frac{f(x)}{x} \geq \alpha_2$, $(x \neq 0)$ ve

$|f'(x)| \leq L$ dır. Burada α_1 , α_2 ve L pozitif sabitlerdir. Ayrıca

$$\frac{1}{1+t^2 + x^2(t) + x^2(t-r(t)) + y^2(t) + y^2(t-r(t))} \leq \frac{1}{1+t^2}$$

yazılabilir. $q(t) = \frac{1}{1+t^2}$ olarak seçelim.

$$\int_0^\infty q(s)ds = \int_0^\infty \frac{1}{1+s^2} ds = \frac{\pi}{2} < \infty$$

elde edilir. O hallede $q \in L^1(0, \infty)$ olur.

Çözümlerin sınırlı olduğunu göstermek için Lyapunov fonksiyoneli

$$2V(t, x_t, y_t) = 2 \int_0^x f(s)ds + y^2 + 2\lambda \int_{-r(t)}^0 \int_{t+s}^t y^2(\theta) d\theta ds,$$

şeklinde tanımlayalım Burada λ pozitif sabit olup ilerde amaca yönelik olarak seçilecektir.

$V(t, x_t, y_t)$ fonksiyonelinin pozitif tanımlı olduğu açıkça görülmektedir.

Gerçekten,

$$V(t, 0, 0) = 0, \quad V(t, x_t, y_t) \geq \frac{\alpha_2}{2} x^2 + \frac{1}{2} y^2 \geq k_2 (x^2 + y^2), \quad (3.5)$$

Burada $k_2 = \min\{2^{-1}\alpha_2, 2^{-1}\}$ dır.

Şimdi de $V = V(t, x_t, y_t)$ fonksiyonelinin (3.4) sistemi boyunca türevi alındığında

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(t, x_t, y_t) = & -\varphi(t, x(t-r(t)), y(t-r(t)))y(t) \\ & + y(t) \int_{t-r(t)}^t f'(x(s))y(s)ds \\ & + \frac{y(t)}{1+t^2 + x^2(t) + x^2(t-r(t)) + y^2(t) + y^2(t-r(t))} \\ & + \lambda y^2(t)r(t) - \lambda(1-r'(t)) \int_{t-r(t)}^t y^2(s)ds \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\frac{y(t)}{1+t^2 + x^2(t) + x^2(t-r(t)) + y^2(t) + y^2(t-r(t))} \leq \frac{|y|}{1+t^2} \leq \frac{1+y^2}{1+t^2}$$

yazılabilir. Yukarıda verilen şartlara bağlı olarak kolaylıkla

$$\frac{d}{dt} V(t, x_t, y_t) \leq -\left[\alpha_1 - \left(\frac{L}{2} + \lambda\right)r(t)\right] y^2 + \frac{1+y^2}{1+t^2} + \left(\frac{L}{2} - \lambda(1-r'(t))\right) \int_{t-r(t)}^t y^2(s)ds$$

olduğu görülebilir. $r'(t) \leq \beta$, $0 < \beta < 1$ alındığı takdirde

$$\frac{d}{dt} V(t, x_t, y_t) \leq -\left[\alpha_1 - \left(\frac{L}{2} + \lambda\right)\gamma\right] y^2 + \frac{1+y^2}{1+t^2} + \left(\frac{L}{2} - \lambda(1-\beta)\right) \int_{t-r(t)}^t y^2(s)ds$$

eşitsizliği elde edilir. Eğer $\lambda = \frac{L}{2(1-\beta)}$ alınır ise , buna bağlı olarak

$$\frac{d}{dt} V(t, x_t, y_t) \leq -\left[\alpha_1 - \frac{L(2-\beta)}{2(1-\beta)}\gamma\right] y^2 + \frac{1+y^2}{1+t^2}$$

yazılabilir. Bu yüzden $\alpha > 0$ için

$$\gamma < \frac{2\alpha_1(1-\beta)}{L(2-\beta)}$$

olmak kaydıyla, (3.5) eşitsizliği kullanıldığında

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(t, x_t, y_t) &\leq -\alpha y^2 + \frac{1+y^2}{1+t^2} \\ &\leq \frac{1+y^2}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2} + \frac{1}{k_2(1+t^2)} V(t, x_t, y_t) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Son eşitsizliğin 0 dan t ye integrali alınır, Gronwall-Reid-Bellman eşitsizliği kullanılır ise

$$\frac{1}{1+t^2} \in L^1(0, \infty)$$

olması nedeni ile kolaylıkla (3.4) sisteminin tüm çözümleri sınırlı olduğu görülebilir.

4. ÜÇÜNCÜ BASAMAKTAN GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE ÇÖZÜMLERİN KARARLILIK, SINIRLILIK DURUMLARI VE PERİYODİK ÇÖZÜMLERİN VARLIĞI

Bu bölümde üçüncü basamaktan gecikmeli diferansiyel denklemlerde çözümlerin kararlılık, sınırlılık durumları ve periyodik çözümlerin varlığı ile ilgili bazı sonuçlar verilecektir.

4.1. Giriş

Bu kısımda üçüncü basamaktan lineer olmayan belli biçimindeki gecikmeli diferansiyel denklemlerin niteliksel davranışları; kararlılık, sınırlılık ve periyodik çözümlerinin varlığı ile ilgili literatürde geçen bazı sonuçlar incelenecektir. Matematik literatüründe yapılan çalışmalar dikkate alındığında üçüncü basamakta lineer olmayan gecikmeli diferansiyel denklemlerin yukarıda belirtilen türden davranışlarının incelenmesine ilk olarak 1973 yılında başlandığı görülmektedir. Şöyle ki ilk olarak Sinha (1973) tarafından

$$x'''(t) + f(x(t), x'(t))x''(t) + g(x'(t-r)) + h(x(t-r)) = 0 \quad (4.1)$$

gecikmeli diferansiyel denklemi ele alınarak bu denklemin sıfır çözümünün asimptotik kararlılığına ilişkin yeter koşullar verildi. Burada f , g ve h fonksiyonları bağlı bulundukları değişkenlere göre sürekli fonksiyonlar; g ve h birinci mertebeden sürekli türevlenebilir olup $g(0) = h(0) = 0$ ve $r > 0$ ise bir sabit gecikmedir.

Daha sonra yukarıdaki denklemin daha değişik bir biçimi olan

$$x'''(t) + f(x(t), x'(t), x''(t))x''(t) + g(x(t-h), x'(t-h)) + i(x(t-h)) = p(t, x(t), x'(t), x(t-h), x'(t-h), x''(t)) \quad (4.2)$$

gecikmeli diferansiyel denklemi Chuwku (1978) tarafından ele alınarak, bu denklemin en az bir periyodik çözüme sahip olduğunu garanti eden ve çözümlerinin sınırlı olmasını sağlayan yeter koşullar elde edildi. Burada f, g, i ve p sadece mevcut bileşenlere bağlı fonksiyonlar ve $h > 0$ bir sabittir. Ayrıca $i(x)$, $g(x, y)$ ve

$$p(t, x(t), y(t), x(t-h), y(t-h))$$

sürekli ve

$$\frac{di}{dx}(x), \frac{\partial g}{\partial x}(x, y), \frac{\partial g}{\partial y}(x, y), \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \text{ ve } \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)$$

türevlerinin mevcut olduğu varsayılmaktadır.

Benzer biçimde, daha sonradan, Yunfeng (1992)

$$x''' + ax'' + bx' + f(x(t-r)) = p(t) \quad (4.3)$$

$$x''' + ax'' + \varphi(x(t-r)) + f(x) = p(t) \quad (4.4)$$

biçimindeki gecikmeli diferansiyel denklemleri göz önüne alarak, bu denklemlerin $p(t) = 0$ olması durumunda çözümlerinin kararlılık ve $p(t) \neq 0$ olması durumunda ise söz konusu denklemlerin çözümlerinin sınırlılık ve periyodik çözümlerinin varlığına ilişkin yeter şartlar içeren bazı teoremleri ispatladı. Burada r, a ve b pozitif sabitler, $f(x), \varphi(x), p(t)$ sürekli fonksiyonlar ve $f(0) = \varphi(0) = 0$ dir.

Benzer biçimde Sadek (2003) tarafından gerçekleştirilen bir çalışmada ise

$$x''' + ax'' + g(x'(t-r(t))) + f(x(t-r(t))) = p(t) \quad (4.5)$$

şeklindeki gecikmeli diferansiyel denklemlerinin çözümlerinin kararlı ve sınırlı olmalarını sağlayan ve yeter şartlar içeren sonuçlar oluşturuldu. Burada a ve γ pozitif sabit olmak üzere

$$0 \leq r(t) \leq \gamma ; g(x), f(x) \text{ ve } p(t)$$

sürekli fonksiyonlar; $g(0) = f(0) = 0$ dır.

Yine aynı yazar, Sadek (2005), bu konu üzerindeki çalışmalarını sürdürerek (4.5) denkleminin farklı bir biçimi olan

$$x''' + a(t)x'' + b(t)x' + c(t)f(x(t-r)) = 0 \quad (4.6)$$

gecikmeli diferansiyel denklemi için sıfır çözümünün kararlılığına ait bir teorem ispatladı.

Burada $a(t), b(t)$ ve $c(t)$, $[0, \infty)$ aralığında pozitif ve sürekli, birinci basamaktan türevlenebilen fonksiyonlar; r pozitif bir sabit; $f(x)$ sürekli bir fonksiyon ve $f(0) = 0$ dır.

Benzer bir çalışmada ise Tejumola ve Tchegnani (2000) tarafından

$$x''' + f(t, x, x', x'')x'' + g(t, x(t-r), x'(t-r)) + h(x(t-r)) =$$

$$P_1(t, x, x, 'x'', x(t-r), x'(t-r)) \quad (4.7)$$

gecikmeli diferansiyel denklemi ele alınarak, bu denklemin çözümlerinin sınırlılığı, kararlılığı ve periyodik çözümlerinin varlığına ilişkin yeter koşullar içeren sonuçlar elde edildi. Burada $r > 0$ f, g, h ve P_1 bağlı bulundukları bileşenlere göre reel değerli birinci basamaktan sürekli türevlenebilen fonksiyonlardır.

Ayrıca şunu da belirtelim ki yukarıda belirtilen çalışmalara benzer bazı incelemeler Bereketoğlu (1998) ve Tunç (2006) tarafından da gerçekleştirilmiştir. Ancak yukarıdaki çalışmalar bu bölümde konu edinen problemlerin ana hatlarını belirlemeye yeterli görüldüğünden konunun daha fazla ayrıntılarına girilmek istenilmedi.

Şimdi yukarıda ifade edilen denklemlere ait sonuçları sırası ile ifade edelim.

4.2. Üçüncü Basamaktan Gecikmeli Diferansiyel Denklemler İçin Bazı Kararlılık Sonuçları

Bu kesimde ilk olarak Sinha (1973) tarafından (4.1) diferansiyel denklemi için verilen kararlılık sonucu üzerinde durulacaktır. Kolaylıkla görülebilir ki (4.1) gecikmeli denklemi aşağıdaki sisteme eşdeğerdir:

$$\begin{aligned} x'(t) &= y(t) \\ y'(t) &= z(t) \\ z'(t) &= -f(x(t), y(t))z(t) - g(y(t)) - h(x(t)) + \int_{-r}^0 g_y(y(t+\theta))z(t+\theta)d\theta \\ &\quad + \int_{-r}^0 h_x(x(t+\theta))y(t+\theta)d\theta. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Teorem 4.2.1.

(4.1) denklemindeki fonksiyonlar için a, b, c, L_1 ve L_2 sabitler olmak üzere aşağıdaki şartların sağlandığını varsayalım:

$$(i) \ x \neq 0 \text{ için } c \geq \frac{h(x)}{x} > 0; \ |h'(x)| \leq L_1.$$

$$(ii) \ y \neq 0 \text{ için } \frac{g(y)}{y} \geq b + 2\lambda > 0, \ (\lambda > 0); \ |g'(y)| \leq L_2, \ .$$

$$(iii) \ f(x, y) \geq a + \frac{2\lambda}{\alpha} > a > 0, \ (\lambda > 0, \alpha > 0).$$

$$(iv) \ |x| \rightarrow \infty \text{ iken } H(x) = \int_0^x h(s)ds \rightarrow \infty.$$

$$(v) \ \text{Her } x \text{ ve } y \text{ için } y \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \leq 0.$$

Bu takdirde r yeterince küçük seçilmek ve α sabiti

$$\frac{b}{c} > \alpha > \frac{1}{a}$$

eşitsizliğini sağlamak kaydıyla (4.1) denkleminin sıfır çözümü asimptotik kararlıdır.

İspat. Bu teoremin ispatı bir Lyapunov fonksiyoneli yardımı ile yapılmaktadır. $v \geq 0$ sabiti yeterince küçük seçilmek üzere Lyapunov fonksiyoneli

$$\begin{aligned} V(x_t, y_t, z_t) &= V_1(x(t), y(t)) + \frac{1}{2} V_2(x(t), y(t), z(t)) \\ &+ \frac{2v}{r} \int_{-r}^0 \left(\int_{\theta_1}^0 [y^2(t+\theta) + z^2(t+\theta)] d\theta \right) d\theta_1, \end{aligned} \quad (4.9)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada

$$V_1(x(t), y(t)) = [H(x) + \alpha h(x)y + \alpha G(y)]; \ G(y) = \int_0^y g(s)ds,$$

$$V_2(x(t), y(t), z(t)) = ay^2 + 2yz + \alpha z^2 + 2 \int_0^y [f(x, s) - a]s ds,$$

dır. Ayrıca v sabiti amaca yönelik olarak ilerde seçilecektir.

Yukarıda verilen fonksiyonel göz önüne alındığında, teoremin şartlarına bağlı olarak

$$V_1 \geq \frac{1}{2} [2H(x) + \alpha by^2 + 2\alpha h(x)y]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\alpha}{b} \right) (by + h(x))^2 + 2H(x) - \left(\frac{\alpha}{b} \right) h^2(x) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{\alpha}{b} (by + h(x))^2 + 2 \int_0^x \left[1 - \frac{\alpha h'(s)}{b} \right] h(s) ds \right] \\
&\geq \int_0^x \left[1 - \frac{\alpha c}{b} \right] h(s) ds = \delta_1 H(x)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada

$$\delta_1 \equiv 1 - \frac{\alpha c}{b} > 0$$

dir. V_2 fonksiyonu kuadratik formda

$$V_2 = (y, z) \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + 2 \int_0^y [f(x, s) - a] s ds$$

şeklinde yazılabilir. Burada $a\alpha > 1$ dır.

$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$ simetrik bir matris olup ve pozitif tanımlıdır. Buna bağlı olarak öyle bir

$\delta_2 > 0$ sabit vardır ki

$$V_2 \geq \frac{1}{2} \delta_2 (y^2 + z^2)$$

yazılabilir.

Bu nedenle (4.9) da tanımlanan fonksiyonel $v \geq 0$ için pozitif tanımlıdır.

Şimdi (4.9) da verilen fonksiyonelin t bağımsız değişkenine göre (4.8) sistemi boyunca türevi alındığında,

$$\begin{aligned}
V'(x_t, y_t, z_t) &= - \left\{ \frac{g(y(t))}{y(t)} - \alpha h'(x(t)) \right\} y^2(t) - \{ \alpha f[x(t), y(t)] - 1 \} z^2(t) \\
&\quad + y(t) \int_0^{y(t)} s \frac{\partial f}{\partial x(t)}(x(t), s) ds \\
&\quad + [y(t) + \alpha z(t)] \left[\int_{-r}^0 g_y(y(t+\theta)) z(t+\theta) d\theta + \int_{-r}^0 h_x(x(t+\theta)) z(t+\theta) d\theta \right] \\
&\quad + \frac{2v}{r} \int_{-r}^0 [y^2(t) - y^2(t+\theta) + z^2(t) - z^2(t+\theta)] d\theta
\end{aligned} \tag{4.10}$$

elde edilir.

$$K = \max(L_1, L_2, \alpha L_1, \alpha L_2) \text{ ve } v = \frac{\lambda}{2} - \left(\frac{\lambda^2 - r^2 K^2}{4} \right)^{1/2} \geq 0 \quad (4.11)$$

$rK \leq \lambda$ seçilmek kaydıyla $v \geq 0$ olur.

Bu durumda (4.10) daki ifade aşağıdaki biçimde ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} V'(x_t, y_t, z_t) &\leq -\frac{1}{r} \int_{-r}^0 \{ \mu y^2(t) + v y^2(t + \theta) - rK |y(t)y(t + \theta)| \} d\theta \\ &\quad - \frac{1}{r} \int_{-r}^0 \{ \mu z^2(t) + v z^2(t + \theta) - rK |z(t)z(t + \theta)| \} d\theta \\ &\quad - \frac{1}{r} \int_{-r}^0 \{ \mu y^2(t) + v z^2(t + \theta) - rK |y(t)z(t + \theta)| \} d\theta \\ &\quad - \frac{1}{r} \int_{-r}^0 \{ \mu z^2(t) + v y^2(t + \theta) - rK |z(t)y(t + \theta)| \} d\theta, \end{aligned} \quad (4.12)$$

Burada

$$\mu = \frac{\lambda}{2} + \left(\frac{\lambda^2 - r^2 K^2}{4} \right)^{1/2} \geq 0$$

olup böylece $V'(x_t, y_t, z_t) \leq 0$ olduğu kolaylıkla görülebilir. Böylece teoremin ispatı tanımlanmış olur (Sinha, 1973).

Şimdi, ikinci olarak Yunfeng'in (1992) , (4.3) ve (4.4) denklemleri için $p(t) = 0$ olması durumunda denklemlerin sıfır çözümlerinin kararlı olması için verilen sonuçları ifade edilecektir.

(4.3) ve (4.4) diferansiyel denklemleri sırasıyla eşdeğer sistem olarak aşağıdaki biçimlerde yazılabilir:

$$x' = y$$

$$y' = z$$

$$z = -az - by - f(x) - \int_{t-r}^t f'_x(x(s))y(s)ds \quad (4.13)$$

$$x' = y$$

$$y' = z$$

$$z' = -az - f(x) - \varphi(y) + \int_{t-r}^t \varphi'_y(y(s))z(s)ds \quad (4.14)$$

Teorem 4.2.2.

a, b, c birer sabit olmak üzere $ab - c > 0$ olsun Eğer $x \neq 0$ için

$$\sup\{f'(x)\} = c, f(x)\text{sgn}(x) > 0$$

iken $L > 0$ için $|f'(x)| \leq L$ oluyorsa bu takdirde (4.13) sistemine ait sıfır çözümü

$$r < \min\left\{\frac{ab-c}{bL}, \frac{ab-c}{(1+2\mu)L}\right\}$$

olmak kaydıyla asimptotik kararlıdır.

Bu teoremin ispatı aşağıda verilecek olan teoremin ispatına benzer olduğundan ispat burada verilmeyecektir.

Teorem 4.2.3.

a, b, c birer sabit olmak üzere $ab - c > 0$ olsun. Eğer $y \neq 0$ için $\frac{\varphi(y)}{y} \geq b > 0$,

$x \neq 0$ için $f(x)\text{sgn}(x) > 0$, $\sup\{f'(x)\} = c > 0$ iken $L > 0$ için $|\varphi'(y)| \leq L$ oluyorsa (4.14) sistemine ait sıfır çözümü

$$r < \min\left\{\frac{ab-c}{bL}, \frac{ab-c}{(1+2\mu)L}\right\}$$

olmak kaydıyla asimptotik kararlıdır.

İspat: Bu teoremin ispatı için temel araç olan Lyapunov fonksiyoneli

$$\begin{aligned} V(x_t, y_t, z_t) = & \mu F(x) + f(x)y + \frac{1}{2}\mu ay^2 + \Phi(y) + \mu yz \\ & + \frac{1}{2}z^2 + \gamma \int_{-r}^0 \int_{t+s}^t z^2(\theta) d\theta ds \end{aligned}$$

olarak tanımlanmaktadır.

Burada

$$F(x) = \int_0^x f(\xi) d\xi \text{ ve } \Phi(y) = \int_0^y \varphi(\eta) d\eta$$

biçiminde tanımlanmaktadır. Teoremin şartlarına bağlı olarak V nin pozitif tanımlı olduğu gösterilebilir. Ayrıca V nin türevi

$$V' = -(a - \mu)z^2 - [\mu\varphi(y)y - f'(x)y^2] + \gamma rz^2 - (\mu y + z) \int_{t-r}^t \varphi'_y(y(s))z(s)ds - \gamma \int_{t-r}^t z^2(s)ds.$$

olarak elde edilebilir.

$$|\varphi'(y)| \leq L.$$

$$\sup\{f'(x)\} = c > 0 \text{ ve } ab - c > 0$$

olduğundan

$$V'(x_t, y_t, z_t) \leq -\left(a - \mu - \gamma - \frac{1}{2}r\right)z^2 + \left(\mu b - c - \frac{L\mu}{2}r\right)y^2 + \left(\frac{L}{2} + \frac{L\mu}{2} - \gamma\right) \int_{t-r}^t z^2(s)ds.$$

yazılabilir.

$$\mu = \frac{ab + c}{2b} > 0, \gamma = \frac{L}{2} + \frac{L\mu}{2} > 0$$

olarak ele alındığı zaman

$$V'(x_t, y_t, z_t) \leq -\left[\frac{ab - c}{2b} - \frac{L}{2}(\mu + 2)r\right]z^2 - \left(\frac{ab - c}{2} - \frac{L\mu}{2}r\right)y^2 \leq 0$$

bulunur. İspatın geri kalan kısmı kolaylıkla tamamlanabilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Üçüncü olarak Sadek (2003) tarafından (4.5) diferansiyel denklemi için verilen kararlılık sonucu üzerinde durulacaktır. Kolaylıkla görülebilir ki, (4.5) gecikmeli denklemi $p = 0$ olması durumunda aşağıdaki sisteme eşdeğerdir:

$$x' = y$$

$$y' = z$$

$$z = -ax - g(y) - f(x) + \int_{t-r(t)}^t f'(x(s))y(s)ds + \int_{t-r(t)}^t g'(y(s))z(s)ds \quad (4.15)$$

Teorem 4.2.4.

Aşağıdaki şartlar sağlansın:

Eğer $0 \leq r(t) \leq \gamma$, $r'(t) \leq \beta$, $0 < \beta < 1$; $x \neq 0$ için $f(x) \operatorname{sgn} x > 0$, $y \neq 0$ için $\frac{g(y)}{y} \geq b > 0$, $\sup\{f'(x)\} = c > 0$, $ab - c > 0$ ve $L > 0, M > 0$ iken

$$|f'(x)| \leq L, |g'(y)| \leq M$$

ise (4.5) denkleminin sıfır çözümü

$$\gamma < \min \left[\frac{(ab - c)(1 - \beta)}{b\{L(1 - \beta) + M(2 + \mu - \beta)\}}, \frac{(ab - c)(1 - \beta)}{\mu(L + M)(1 - \beta) + L(1 + \mu)} \right]$$

ve $\mu = \frac{ab + c}{2b}$ olmak kaydıyla asimptotik kararlıdır Burada $a, b, c, \gamma, \beta, L$ ve M pozitif sabitlerdir.

Bu teoremin ispatı yukarıda verilen Teorem 4.2.3 ün ispatına benzerdir.

Şimdi yine Sadek (2005) tarafından (4.6) diferansiyel denklemi için verilen kararlılık sonucu üzerinde durulacaktır.

Teorem 4.2.5.

Kabul edelim ki $a(t), b(t)$ ve $c(t)$ fonksiyonları $[0, \infty)$ aralığında sürekli türevlenebilen fonksiyonlar olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlasın:

(i) Her $t \in [0, \infty)$ için $A \geq a(t) \geq a_0 > 0$, $B \geq b(t) \geq b_0 > 0$, $C \geq c(t) \geq c_0 > 0$,

(ii) Her x için $f'(x) \leq f_1 \leq 1$ ve $f(0) = 0, x \neq 0$ için $\frac{f(x)}{x} \geq f_0 > 0$,

(iii) $ab - C > 0$

(iv) $\mu = \frac{a_0 b_0 - C}{2b_0}$, $\mu a'(t) + b'(t) - \frac{1}{\mu} c'(t) < \frac{a_0 b_0 - C}{2}$,

(v) $t \rightarrow \infty$ iken $c'(t) \rightarrow 0$ ve $\int_0^\infty |c'(t)| dt < \infty$.

Bu takdirde (4.6) denklemine ait sıfır çözümü

$$\gamma < \min \left[\frac{2c_0 f_0}{f_1 C}, \frac{a_0 b_0 - C}{(1 + a_0) b_0 f_1 C}, \frac{a_0 b_0 - C + 4a_0 C(1 - f_1)}{2f_1 C \{1 + 2\mu + 2a_0^2 + a_0 + (a_0 b_0 - C)C\}} \right]$$

olmak kaydıyla düzgün asimptotik kararlıdır.

İspat: (4.6) gecikmeli denklemi aşağıdaki sisteme eşdeğerdir:

$$x' = y$$

$$y' = z$$

$$z = -a(t)z - b(t)y - c(t)f(x) + c(t) \int_{t-r}^t f'(x(s))y(s)ds. \quad (4.16)$$

Ayrıca

$$\gamma(t) = \int_0^t |c'(s)|ds \text{ ve } \int_0^\infty |c'(t)|dt \leq N < \infty$$

olsun.

Bu teoremin ispatında temel araç olarak

$$V(t, x_t, y_t, z_t) = e^{-\gamma(t)/c_0} \{V_1(t, x_t, y_t, z_t) + V_2(t, x_t, y_t, z_t)\} \quad (4.17)$$

Lyapunov fonksiyoneli kullanılacaktır. Burada

$$\begin{aligned} V_1(t, x_t, y_t, z_t) = & \mu c(t) \int_0^x f(\xi) d\xi + c(t)f(x)y + \frac{1}{2}\{b(t) + \mu a(t)\}y^2 \\ & + \mu yz + \frac{1}{2}z^2 + \lambda \int_{-r}^0 \int_{t+s}^t y^2(\theta) d\theta ds \end{aligned} \quad (4.18)$$

ve

$$\begin{aligned} V_2(t, x_t, y_t, z_t) = & a_0^2 c(t) \int_0^x f(\xi) d\xi + \frac{b_0}{2}(a_0 b_0 - C)x^2 + a_0 c(t)f(x)y \\ & + \frac{c(t)}{2}y^2 + (a_0 b_0 - C)x(z + a_0 y) + \frac{a_0}{2}(z + a_0 y)^2 \end{aligned} \quad (4.19)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada λ pozitif bir sabittir. V_1 in (4.16) sistemi boyunca türevi alındığında

$$\begin{aligned} V_1'(t, x_t, y_t, z_t) = & c(t)f'(x)y^2 + \mu z^2 - \mu b(t)y^2 - a(t)z^2 \\ & + c(t)(\mu y + z) \int_{t-r}^t f(x(s))y(s)ds \\ & + \lambda ry^2 - \lambda \int_{t-r}^t y^2(\theta) d\theta + \mu c'(t) \int_0^x \{1 - f'(\xi)\}f(\xi) d\xi \\ & + \frac{1}{2}\mu c'(t) \left\{ f(x) + \frac{y}{\mu} \right\}^2 + \frac{1}{2} \left\{ b'(t) + \mu a'(t) - \frac{1}{2}c'(t) \right\} y^2 \end{aligned}$$

elde edilir.

Teoremin şartları ve $2|uv| \leq u^2 + v^2$ eşitsizliği dikkate alındığında

$$c(t)\mu y \int_{t-r}^t f'(x(s))y(s)ds \leq \frac{\mu C f_1 r}{2} y^2 + \frac{\mu C f_1}{2} \int_{t-r}^t y^2(s)ds$$

ve

$$c(t)z \int_{t-r}^t f'(x(s))y(s)ds \leq \frac{C f_1 r}{2} z^2 + \frac{C f_1}{2} \int_{t-r}^t y^2(s)ds$$

yazılabilir.

Buna bağlı olarak

$$\begin{aligned} V_1'(t, x_t, y_t, z_t) \leq & -\left(a_0 - \mu - \frac{C f_1 r}{2}\right) z^2 - \left(\mu b - C f_1 - \frac{\mu C f_1 r}{2} - \lambda r\right) y^2 \\ & + \left(\frac{C f_1}{2} + \frac{\mu C f_1}{2} - \lambda\right) \int_{t-r}^t y^2(s)ds + \mu c'(t) \int_0^x \{1 - f'(\xi)\} f(\xi) d\xi \\ & + \frac{1}{2} \mu c'(t) \left\{f(x) + \frac{y}{\mu}\right\}^2 + \frac{1}{2} \left\{b'(t) + \mu a'(t) - \frac{1}{\mu} c'(t)\right\} y^2 \end{aligned} \quad (4.20)$$

elde edilir. Ayrıca V_2 nin (4.16) sistemi boyunca türevi alındığında ise

$$\begin{aligned} V_2'(t, x_t, y_t, z_t) \leq & -(a_0 b_0 - C) c_0 x f(x) - a_0 C (1 - f'(x)) y^2 \\ & + (a_0 b_0 - C) C x \int_{t-r}^t f'(x(s)) y(s) ds + a_0 (z + a_0 y) C \int_{t-r}^t f'(x(s)) y(s) ds \\ & + a_0 c'(t) \int_0^x (1 - f'(\xi)) f(\xi) d\xi + \frac{1}{2} a_0^2 c'(t) \left\{f(x) + \frac{y}{a_0}\right\}^2 \end{aligned}$$

bulunur. Teoremin şartları ve $2|uv| \leq u^2 + v^2$ eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} V_2'(t, x_t, y_t, z_t) \leq & -(a_0 b_0 - C) \left(c_0 f_0 - \frac{C f_1 r}{2}\right) x^2 - a_0 C \left\{(1 - f_1) - \frac{a_0 f_1 r}{2}\right\} y^2 \\ & + \frac{a_0 C f_1 r}{2} z^2 + \left(\frac{(a_0 b_0 - C) C f_1}{2} + \frac{a_0 C f_1}{2} + \frac{a_0^2 C f_1}{2}\right) \int_{t-r}^t y^2(s) ds \\ & + a_0 c'(t) \int_0^x \{1 - f'(\xi)\} f(\xi) d\xi + \frac{1}{2} a_0^2 c'(t) \left\{f(x) + \frac{y}{a_0}\right\}^2 \end{aligned} \quad (4.21)$$

bulunur.

(4.20) ve (4.21) den dolayı

$$\begin{aligned}
V'(t, x_t, y_t, z_t) &= V_1'(t, x_t, y_t, z_t) + V_2'(t, x_t, y_t, z_t) \\
&\leq -(a_0 b_0 - C) \left(c_0 f_0 - \frac{C f_1 r}{2} \right) x^2 - \left(a_0 - \mu - \frac{C f_1 r}{2} - \frac{a_0 C f_1 r}{2} \right) z^2 \\
&\quad - \left(\frac{a_0 b_0 - C}{2} + a_0 C (1 - f_1) - \frac{a_0^2 C f_1 r}{2} - \frac{\mu C f_1 r}{2} - \lambda r \right) y^2 \\
&\quad + \left(\frac{C f_1}{2} + \frac{\mu C f_1}{2} + \frac{(a_0 b_0 - C) C f_1}{2} + \frac{a_0 C f_1}{2} + \frac{a_0^2 C f_1}{2} - \lambda \right) \int_{t-r}^t y^2(s) ds \\
&\quad + (\mu + a_0^2) c'(t) \int_0^x (1 - f'(\xi)) f(\xi) d\xi + \frac{1}{2} \mu c'(t) \left\{ f(x) + \frac{y}{\mu} \right\}^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} a_0^2 c'(t) \left\{ f(x) + \frac{y}{a_0} \right\}^2 + \frac{1}{2} \left\{ b'(t) + \mu a'(t) - \frac{1}{\mu} c'(t) \right\} y^2
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada

$$\lambda = \frac{1}{2} \{ C f_1 + \mu C f_1 + (a_0 b_0 - C) C f_1 + a_0 C f_1 + a_0^2 C f_1 \}$$

alınırsa

$$\mu = \frac{(a_0 b_0 + C)}{2 b_0} \quad \text{ve} \quad a_0 b_0 - C > 0$$

olması nedeniyle

$$\begin{aligned}
V'(t, x_t, y_t, z_t) &= V_1'(t, x_t, y_t, z_t) + V_2'(t, x_t, y_t, z_t) \\
&\leq -(a_0 b_0 - C) \left(c_0 f_0 - \frac{C f_1 r}{2} \right) x^2 - \left(\frac{a_0 b_0 - C}{2 b_0} - \frac{(1 + a_0) C f_1 r}{2} \right) z^2 \\
&\quad - \left(\frac{a_0 b_0 - C + 4 a_0 C (1 - f_1)}{4} - \frac{C f_1}{2} \{ 1 + 2 \mu + 2 a_0^2 + a_0 + (a_0 b_0 - C) C \} r \right) y^2 \\
&\quad + (\mu + a_0^2) c'(t) \int_0^x (1 - f'(\xi)) f(\xi) d\xi + \frac{1}{2} \mu c'(t) \left\{ f(x) + \frac{y}{\mu} \right\}^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} a_0^2 c'(t) \left\{ f(x) + \frac{y}{a_0} \right\}^2
\end{aligned} \tag{4.22}$$

biçimini alır. Öte yandan

$$\mu c(t) \int_0^x f(\xi) d\xi + c(t) f(x) y + \frac{1}{2} \{ b(t) + \mu a(t) \} y^2 + \mu y z + \frac{1}{2} z^2$$

$$\begin{aligned}
&= \mu c(t) \int_0^x \{1 - f'(\xi)\} f(\xi) d\xi + \frac{1}{2} \mu c(t) \left\{ f(x) + \frac{y}{a_0} \right\}^2 + \frac{1}{2} (\mu y + z)^2 \\
&+ \frac{1}{2} [\mu b(t) - c(t) + \mu^2 \{a(t) - \mu\}] y^2 \\
&\geq \mu c_0 \int_0^x \{1 - f'(\xi)\} f(\xi) d\xi + \frac{1}{2} \mu c_0 \left\{ f(x) + \frac{y}{a_0} \right\}^2 + \frac{1}{2} (\mu y + z)^2 \\
&+ \frac{1}{2} [\mu b(t) - c(t) + \mu^2 \{a(t) - \mu\}] y^2
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
V_2(t, x_t, y_t, z_t) &= a_0^2 c(t) \int_0^x \{1 - f'(\xi)\} f(\xi) d\xi + \frac{1}{2} a_0^2 c(t) \left\{ f(x) + \frac{y}{a_0} \right\}^2 \\
&+ \frac{a_0}{2} \left\{ (z + a_0 y) + \frac{(a_0 b_0 - C)x}{a_0} \right\}^2 + \frac{(a_0 b_0 - C)C}{2a_0} x^2
\end{aligned}$$

olması nedeni ile

$$\begin{aligned}
V_1 + V_2 &\geq (\mu + a_0^2) c_0 \int_0^x \{1 - f'(\xi)\} f(\xi) d\xi + \frac{1}{2} \mu c_0 \left\{ f(x) + \frac{y}{a_0} \right\}^2 \\
&+ \frac{1}{2} (\mu y + z)^2 + \frac{1}{2} a_0^2 c_0 \left\{ f(x) + \frac{y}{a_0} \right\}^2 \\
&+ \frac{1}{2\mu} [\mu b(t) - c(t) + \mu^2 \{a(t) - \mu\}] y^2 \\
&+ \frac{a_0}{2} \left\{ (z + a_0 y) + \frac{(a_0 b_0 - C)x}{a_0} \right\}^2 + \frac{(a_0 b_0 - C)C}{2a_0} x^2 \tag{4.23}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Ayrıca teoremin (i) ve (ii) şartları

$$\mu b(t) - c(t) + \mu^2 \{a(t) - \mu\} \geq \mu b_0 - C + \mu^2 (a_0 - \mu) = \frac{a_0 b_0 - C}{2} + \mu^2 \left(\frac{a_0 b_0 - C}{2b_0} \right) > 0$$

olmasını gerektirir.

Bu yüzden bir $W_1(|\phi(0)|)$ fonksiyonu bulunabilir ve bu fonksiyon

$$W_1(|\phi(0)|) \geq 0 \quad \text{ve} \quad W_1(|\phi(0)|) \leq V(t, \phi)$$

eşitsizliğini sağlar. Aynı şekilde yukarıda elde edilen ifadeler göz önüne alındığında $W_2(\|\phi\|) \geq V(t, \phi)$ olacak şekilde bir $W_2(\|\phi\|)$ sürekli fonksiyonu kolaylıkla bulunabilir.

(4.17) fonksiyonun t bağımsız değişkenine göre türevi alındığında

$$\frac{d}{dt}V(t, x_t, y_t, z_t) = e^{-\gamma(t)/c_0} \left(\frac{d}{dt}(V_1 + V_2) - \frac{|c'(t)|}{c_0}(V_1 + V_2) \right)$$

elde edilir. $V_1 + V_2$ ye ait eşitsizlik ve $c'(t) - |c'(t)| \leq 0$ eşitsizliği kullanıldığında

$$\begin{aligned} & V_1' + V_2' - \frac{|c'(t)|}{c_0}(V_1 + V_2) \leq \\ & - (a_0 b_0 - C) \left(c_0 f_0 - \frac{C f_1 r}{2} \right) x^2 - \left(\frac{a_0 b_0 - C}{2b_0} - \frac{(1 + a_0) C f_1 r}{2} \right) z^2 \\ & - \left(\frac{a_0 b_0 + C + 4a_0 C(1 - f_1)}{4} - \frac{C f_1}{2} \{1 + 2\mu + 2a_0^2 + a_0 + (a_0 b_0 - C)C\} r \right) y^2, \end{aligned}$$

elde edilir. Bu yüzden

$$\gamma < \min \left[\frac{2c_0 f_0}{f_1 C}, \frac{a_0 b_0 - C}{(1 + a_0) b_0 f_1 C}, \frac{a_0 b_0 - C + 4a_0 C(1 - f_1)}{2f_1 C \{1 + 2\mu + 2a_0^2 + a_0 + (a_0 b_0 - C)C\}} \right]$$

seçildiğinde, bir $\alpha > 0$ sabiti için

$$V'(t, x_t, y_t, z_t) \leq -\alpha e^{-\gamma(t)/c_0} (x^2 + y^2 + z^2) \leq -W_3(|x(t)|)$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış oldu.

Tejumola ve Tchegnani (2000) taraflarından (4.7) de ele alınan gecikmeli diferansiyel denklemi için $P = 0$ olması durumunda aşağıdaki teorem verildi.

Teorem 4.2.6.

Kabul edelim ki her x için $h(0) = 0 = g(x, 0)$ olsun. Ayrıca a, b, a', b', δ ve c pozitif sayılar vardır öyle ki $ab - c > 0$ ve aşağıdaki şartlar sağlansın:

- (i) Her x, y, z ve t için $a' \geq f(t, x, y, z) \geq a$,
- (ii) Her x, t için ve her $y \neq 0$ için $b' \geq \frac{g(t, x, y)}{y} \geq b$
- (iii) Her $x \neq 0$ için $\frac{h(x)}{x} \geq \delta$ ve her x için $h'(x) \leq c$

o zaman r yeterince küçük seçilmek şartıyla (4.7) denkleminin sıfır çözümü düzgün asimptotik kararlıdır.

Bu teoremin ispatı yukarıda verilen teoremin ispatına benzerdir.

4.3. Üçüncü Basamaktan Gecikmeli Diferansiyel Denklemler İçin Bazı Sınırlılık Sonuçları

Bu kesimde ilk olarak Chukwu (1978) tarafından (4.2) diferansiyel denklemi için verilen sınırlılık sonucu ifade ve ispat edilecektir.

Teorem 4.3.1.

(4.2) gecikmeli diferansiyel denklemi için $a, a', b, b', c, \delta, L$ ve M pozitif sabitler olmak üzere aşağıdaki şartların sağlandığını varsayalım:

(i) $g(x, 0) = 0$ her x, y, z için $a' \geq f(x, y, z) \geq a \geq 0$ ve her $x, y \neq 0$ için

$$b' \geq \frac{g(x, y)}{y} \geq b \geq 0,$$

(ii) $i(0) = 0$, her x için $\frac{i(x)}{x} \geq \delta (x \neq 0)$, $i'(x) \leq c$, $ab - c > 0$,

(iii) Her x, y, z için

$$y \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, 0) \right) \leq 0, \quad y \left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \right) \geq 0, \quad -L \leq \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \leq 0,$$

(iv) Her $t, x(t), y(t), z(t), x(t-h), y(t-h)$ için

$$|p(t, x(t), y(t), x(t-h), y(t-h), z(t))| \leq M$$

dır. Böylece $h > 0$ yeterince küçük olmak kaydıyla bu takdirde (4.2) denklemine ait tüm çözümler düzgün sınırlıdır ve düzgün mutlak sınırlıdır.

Şimdi, ikinci olarak Yunfeng (1992) tarafından (4.3) denklemi için $p(t) = 0$ olması durumunda denkleminin tüm çözümlerinin sınırlı olması için verilen sonuçlar ifade edilecektir.

Teorem 4.3.2.

a, b, c birer sabit olmak üzere $a, b > 0$, $ab - c > 0$ olsun. Her $x \neq 0$ için $\frac{f(x)}{x} \geq c_0 > 0$, her x için $\sup\{f'(x)\} = c > 0$, $f(x)\text{sgn}(x) > 0$; $L > 0$ sabiti için $|f'(x)| \leq L$ ve $|p(t)| \leq m$, (m sabit) olduğunu varsayalım. Bu takdirde

$$r < \min\left\{\frac{ab-c}{bL}, \frac{ab-c}{(1+2\mu)L}\right\} \text{ ve } \mu = \frac{ab+c}{2b}$$

olmak kaydıyla (4.3) denkleminin tüm çözümleri düzgün sınırlıdır.

Şimdi, üçüncü olarak Sadek (2003) tarafından (4.6) denklemine ait çözümlerin sınırlı olması için verilen sonuçlar ifade edilecektir.

$p(t) \neq 0$ olsun.

Teorem 4.3.3.

Teorem 4.2.4 dün şartlarına ilaveten $x \neq 0$ için $\left(\frac{f(x)}{x}\right) \geq c_0 \geq 0$ ve m pozitif bir sabit olmak üzere $|p(t)| \leq m$ şartlarının sağlandığını varsayalım. Bu takdirde

$\mu = \frac{ab+c}{2b}$ olmak üzere

$$\gamma < \min\left[\frac{2c_0}{L+M}, \frac{(ab-c)(1-\beta)}{bM(1+\mu+ab-c+a+a^2)+b(L+M)(1+a)(1-\beta)}, \frac{(ab-c)(1-\beta)}{L(1+\mu+ab-c+a+a^2)+(L+M)(\mu+a^2)(1-\beta)}\right]$$

olmak kaydıyla (4.5) denkleminin tüm çözümleri düzgün sınırlı ve düzgün mutlak sınırlıdır.

Lemma 4.3.1.

$V(t, \varphi) : R \times C \rightarrow R$ Lipschitz şartını sağlayan sürekli bir fonksiyon olsun.

$$(i) \quad W(|\bar{x}(t)|) \leq V(t, \bar{x}_t) \leq W_1(|\bar{x}(t)|) + W_2 \left(\int_{t-r}^t W_3(|\bar{x}(s)|) ds \right),$$

$$(ii) \quad V'(t, x_t) \leq -W(|\bar{x}(t)|) + M$$

ise bu takdirde (4.6) denkleminin tüm çözümleri düzgün sınırlı ve düzgün mutlak Burada W, W_1, W_2, W_3 negatif olmayan sürekli fonksiyonlardı (wedges) (Sadek, 2003).

Şimdi yukarıda verilen Teorem 4.3.3 ün ispatını verelim.

İspat: Kolaylıkla görülebilir ki (4.6) gecikmeli denklemi aşağıdaki sisteme eşdeğerdir:

$$x' = y$$

$$y' = z$$

$$z = -ax - g(y) - f(x) + \int_{t-r(t)}^t f'(x(s))y(s)ds + \int_{t-r(t)}^t g'(y(s))z(s)ds + p(t) \quad (4.24)$$

Bu teoremin ispatında temel araç olarak

$$V = V_1(x_t, y_t, z_t) + V_2(x_t, y_t, z_t)$$

Lyapunov fonksiyoneli kullanılacaktır. Burada

$$\begin{aligned} V_1(x_t, y_t, z_t) = & \mu \int_0^x f(\xi) d\xi + f(x)y + \frac{1}{2} \mu a y^2 + \int_0^y g(\zeta) d\zeta \\ & + \frac{1}{2} z^2 + \lambda \int_{-r(t)}^0 \int_{t+s}^t y^2(\theta) d\theta ds + \delta \int_{-r(t)}^0 \int_{t+s}^t z^2(\theta) d\theta ds, \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} V_2 = & a^2 \int_0^x f(\xi) d\xi + \frac{b}{2} (ab - c)x^2 + af(x)y + \frac{c}{2} y^2 \\ & + (ab - c)x(z + ay) + \frac{a}{2} (z + ay)^2 \end{aligned} \quad (4.26)$$

olarak tanımlanmaktadır. V_1 ve V_2 fonksiyonların türevleri alındığında, teoremin şartlarına bağlı olarak aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir:

$$\frac{d}{dt} V_1(x_t, y_t, z_t) \leq - \left(\frac{ab - c}{2b} - \frac{L}{2} \gamma - \frac{M}{2} \gamma - \delta \gamma \right) z^2$$

$$\begin{aligned}
& -\left(\frac{ab-c}{2}-\frac{\mu L}{2}\gamma-\frac{\mu M}{2}\gamma-\delta\gamma\right)y^2 \\
& +\left\{\frac{L}{2}+\frac{\mu L}{2}-(1-\beta)\lambda\right\}\int_{t-r(t)}^t y^2(s)ds \\
& +\left\{\frac{M}{2}+\frac{\mu M}{2}-(1-\beta)\delta\right\}\int_{t-r(t)}^t z^2(s)ds+(\mu|y|+|z|)m, \\
& \frac{d}{dt}V_2(x_t, y_t, z_t) \leq -(ab-c)xf(x)-a(c-f'(x))y^2+(ab-c)m|x|+a|z+ay|m \\
& +(ab-c)x\int_{t-r(t)}^t f'(x(s))y(s)ds+(ab-c)x\int_{t-r(t)}^t g(y(s))z(s)ds \\
& +a(z+ay)\int_{t-r(t)}^t f'(x(s))y(s)ds+a(z+ay)\int_{t-r(t)}^t g(y(s))z(s)ds.
\end{aligned}$$

Tekrar teoremin şartları ve $2|uv| \leq u^2 + v^2$ eşitsizliği kullanıldığında

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt}V_2(x_t, y_t, z_t) \leq -(ab-c)xf(x)+(ab-c)m|x| \\
& +a|z+ay|m+\frac{ab-c}{2}(L+M)\varkappa^2 \\
& +\frac{a}{2}(L+M)\gamma z^2+\frac{a^2}{2}(L+M)\gamma y^2 \\
& +\left\{\frac{ab-c}{2}L+\frac{aL}{2}+\frac{a^2}{2}L\right\}\int_{t-r(t)}^t y^2(s)ds \\
& \left\{\frac{ab-c}{2}M+\frac{aM}{2}+\frac{a^2}{2}M\right\}\int_{t-r(t)}^t z^2(s)ds
\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Yukarıda elde edilen ifadeler kullanıldığında

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt}V(x_t, y_t, z_t) \leq -\left(\frac{ab-c}{2b}-\frac{L}{2}\gamma-\frac{M}{2}\gamma-\delta\gamma-\frac{a}{2}L\gamma-\frac{a}{2}M\gamma\right)z^2 \\
& -\left(\frac{ab-c}{2b}-\frac{\mu L}{2}\gamma-\frac{\mu M}{2}\gamma-\lambda\gamma-\frac{a^2}{2}L\gamma-\frac{a^2}{2}M\gamma\right)y^2 \\
& -(ab-c)xf(x)+\frac{ab-c}{2}(L+M)\varkappa^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\left((1-\beta)\lambda - \frac{L}{2} - \frac{L\mu}{2} - \frac{ab-c}{2}L - \frac{a}{2}L - \frac{a^2}{2}L\right) \int_{t-r(t)}^t y^2(s)ds \\
& -\left((1-\beta)\delta - \frac{M}{2} - \frac{\mu M}{2} - \frac{ab-c}{2}M - \frac{a}{2}M - \frac{a^2}{2}M\right) \int_{t-r(t)}^t z^2(s)ds \\
& + (\mu m + a^2 m)|y| + (ab-c)m|x| + (m+am)|z|
\end{aligned}$$

olur. Teorem $x \neq 0$ için $\left(\frac{f(x)}{x}\right) \geq c_0 \geq 0$ şartını içerdiği için

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V(x_t, y_t, z_t) & \leq -\left[\frac{ab-c}{2b} - \left\{\delta + \frac{1}{2}(L+M)(1+a)\right\}\gamma\right]z^2 \\
& -\left[\frac{ab-c}{2b} - \left\{\lambda + \frac{1}{2}(L+M)(\mu+a^2)\right\}\gamma\right]y^2 \\
& -\left[(ab-c)\left\{c_0 - \frac{1}{2}(L+M)\gamma\right\}\right]x^2 \\
& -\left((1-\beta)\lambda - \frac{L}{2}(1+\mu+ab-c+a+a^2)\right) \int_{t-r(t)}^t y^2(s)ds \\
& -\left((1-\beta)\delta - \frac{M}{2}(1+\mu+ab-c+a+a^2)\right) \int_{t-r(t)}^t z^2(s)ds \\
& + (\mu m + a^2 m)|y| + (ab-c)m|x| + (m+am)|z|.
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\lambda = \left((1-\beta)\frac{L}{2}(1+\mu+ab-c+a+a^2)\right) > 0,$$

$$\delta = \left((1-\beta)\frac{M}{2}(1+\mu+ab-c+a+a^2)\right) > 0$$

olsun. Böylece $k, \alpha > 0$ sabitleri için

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V(x_t, y_t, z_t) & \leq -\alpha(x^2 + y^2 + z^2) + k\alpha(|x| + |y| + |z|) \\
& = -\frac{\alpha}{2}(x^2 + y^2 + z^2) - \frac{\alpha}{2}\{(|x|-k)^2 + (|y|-k)^2 + (|z|-k)^2\} + \frac{3\alpha}{2}k^2 \\
& \leq -\frac{\alpha}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{3\alpha}{2}k^2
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da $W_3(r) = \frac{\alpha r^2}{2}$ ve $M = \frac{3\alpha k^2}{2}$ alındığı takdirde Lemma 4.3.1 den dolayı teoremin ispatı tamamlanır.

Teorem 4.3.4.

Kabul edelim ki her x için $h(0) = 0 = g(x, 0)$ olsun. Ayrıca kabul edelim ki a, b, a', b', δ, c pozitif sabitleri var öyle ki $ab - c > 0$,

$$(i) \ a \geq f(t, x, y, z) \geq a$$

$$(ii) \text{ Her } x, z \text{ için ve her } y \neq 0 \text{ için } b' \geq \frac{g(t, x, y)}{y} \geq b,$$

$$(iii) \text{ Her } x \neq 0 \text{ için } \frac{h(x)}{x} \geq \delta \text{ ve her } x \text{ için } h(x) \leq c,$$

Δ_0, Δ_0' birer pozitif sabit olmak üzere

$$|P_1| \leq \Delta_0 + \Delta_0'(|x| + |y| + |z|)$$

ise r yeterince küçük seçilmek şartıyla (4.7) denkleminde ait her çözüm düzgün sınırlı ve düzgün mutlak sınırlıdır.

4.4. Üçüncü Basamaktan Gecikmeli Diferansiyel Denklemler İçin Periyodiklik İle İlgili Bazı Sonuçları

Yunfeng'in (1992) tarafından (4.3) ve (4.4) denklemlerin periyodik çözüme sahip olması için verilen sonuçlar ifade edilecektir.

Teorem 4.4.1.

Teorem 4.3.2 teoreminin şartlarına ilaveten $p(t+T) = p(t)$, $|p(t)| \leq m$, $|x| \rightarrow \infty$ iken $f(x)/x \geq c_0 > 0$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde r sabiti yeterince küçük

olmak kaydıyla (4.3) denklemi $T \neq 0$ ($T \neq 0$) periyotlu periyodik bir çözüme sahiptir.

İspat: (Bkz: Yunfeng (1992)).

Teorem 4.4.2.

Teorem 4.2.3 şartlarına ilaveten $p(t+T) = p(t)$, $|p(t)| \leq m$, $|x| \rightarrow \infty$ iken $f(x) \operatorname{sgn} x \rightarrow \infty$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde r sabiti yeterince küçük olmak kaydıyla (4.4) denklemi $T \neq 0$ ($T \neq 0$) periyotlu periyodik bir çözüme sahiptir.

İspat: (Bkz: Yunfeng (1992)).

5. DÖRDÜNCÜ BASAMAKTAN GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE ÇÖZÜMLERİN KARARLILIK VE SINIRLILIK DURUMLARI

Bu bölümde dördüncü basamaktan gecikmeli diferansiyel denklemlerde çözümlerin kararlılık ve sınırlılık durumları ile ilgili bazı sonuçları vereceğiz.

5.1. Giriş

Bu bölümde dördüncü basamaktan lineer olmayan belli biçimindeki gecikmeli diferansiyel denklemlerin çözümlerinin niteliksel davranışları; kararlılık ve sınırlılık durumları ile ilgili literatürde geçen bazı sonuçlar incelenecektir. Matematik literatüründe yapılan incelemelere göre dördüncü basamakta lineer olmayan gecikmeli diferansiyel denklemlerin yukarıda belirtilen türden davranışlarının incelenmesine ilk olarak 1973 yılında başlandığı görülmektedir.

Şöyle ki ilk olarak Sinha (1973) tarafından

$$x^{(4)}(t) + f_1(x''(t))x'''(t) + f_2(x(t), x'(t))x''(t) + g(x'(t-r)) + h(x(t-r)) = 0 \quad (5.1)$$

denklemi ele alınarak bu denkleme ait sıfır çözümünün asimptotik kararlılığı için yeter koşullar elde edildi; burada f_1, f_2, g ve h sürekli, $g(0) = h(0) = 0$, r sabit, $r \geq 0$ dir. Ayrıca f_2, g ve h nin bağlı bulundukları değişkenlere göre birinci basamaktan sürekli türevlenebilir oldukları varsayılmaktadır.

Daha sonra Okoronkwo (1989) tarafından

$$x^{(4)}(t) + f(x''(t))x'''(t) + \alpha_2 x''(t) + \beta_2 x''(t-h) + g(x'(t-h)) \\ + \alpha_4 x(t) + \beta_4 x(t-h) = p(t) \quad (5.2)$$

denklemi ele alınarak bu denkleme ait çözümlerinin sırası ile $p \neq 0$ sınırlılığı ve $p = 0$ için ise kararlılığı inceledi. Burada $\alpha_2, \alpha_4, \beta_2, \beta_4$ ve h pozitif sabitler olup f, g ve p sürekli, g birinci basamaktan türevlenebilirdir.

Benzer biçimde, yine, Tejumola ve Tchegnani (2000) tarafından benzer bir yapıda olan dördüncü basamaktan

$$x^{(4)} + \varphi(t, x, x', x'', x''')x''' + \psi(t, x'(t-r), x''(t-r)) \\ + \chi(t, x(t-r), x'(t-r)) + h(x(t-r)) = P \quad (5.3)$$

gecikmeli diferansiyel denklemi ele alınarak bu yapıdaki denklemlerin çözümlerinin kararlılığına ve sınırlılığine ilişkin yeter koşullar elde etmiştir. Burada $r > 0$, φ, ψ, χ, h ve P bağlı bulundukları bileşenlere göre reel değerli sürekli fonksiyonlar olup

$$P = P(t, x, x', x'', x''', x(t-r), x'(t-r), x''(t-r))$$

dir.

Yine, Sadek (2004) tarafından

$$x^{(4)} + \alpha_1 x''' + \alpha_2 x'' + \alpha_3 x' + f(x(t-r)) = 0 \quad (5.4)$$

ve

$$x^{(4)} + \alpha_1 x''' + \alpha_2 x'' + \phi(x'(t-r)) + f(x) = 0 \quad (5.5)$$

denklemlerinin sıfır çözümlerinin kararlılık durumları araştırıldı. Burada $r, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ pozitif sabitlerdir, $\phi(x'), f(x)$ sürekli fonksiyonlar ve $\phi(0) = f(0) = 0$ dır.

Ayrıca f ve ϕ birinci basamaktan sürekli türevlenebilirdir.

5.2. Dördüncü Basamaktan Gecikmeli Diferansiyel Denklemler İçin Bazı Kararlılık Sonuçları

Bu kesimde ilk olarak Sinha (1973) tarafından (5.1) diferansiyel denklemi için verilen kararlılık sonucu üzerinde durulacaktır.

Teorem 5.2.1.

Kabul edelim ki (5.1) denklemi için aşağıdaki şartlar sağlansın:

$$b \geq f_1(z) \geq f_1^0 \geq a + 2\lambda > 0, \quad (\lambda > 0) \quad (5.6)$$

$$f_2(y, z) \geq f_2^0 > 0, \quad (5.7)$$

$$g(y)/y \geq g^0 > 0, \quad (5.8)$$

$$(h^0 \delta)^{1/2} \geq h(x)/x \geq h^0 > 0, \quad (5.9)$$

$$g^0 \leq g'(y) \leq \delta_1, \quad h^0 \leq h'(x) \leq h'(0) \leq \delta, \quad (5.10)$$

$|x| \rightarrow \infty$ iken

$$H(x) = \int_0^x h(s) ds \rightarrow \infty \quad (5.11)$$

$$af_2^0 g^0 h^0 - \delta abh^0 - \delta_1^2 \delta = \beta > 0 \quad (5.12)$$

$$\frac{\beta}{(g^0)^2 (2ag^0 h^0)^{1/2}} > \left[\frac{\delta_1}{g^0} - \frac{h^0}{\delta} \right] \quad (5.13)$$

$z \neq 0$ için

$$\frac{1}{z} \int_0^z f_1(s) ds - f_1(z) < \frac{\beta}{a^2 g^0 h^0} \quad (5.14)$$

ve

$$z \frac{\partial f_2(y, z)}{\partial y} \leq 0; \quad y \int_0^1 \frac{\partial f_2}{\partial z}(y, zt) dt \geq 0 \quad (5.15)$$

Eğer r yeterince küçük seçilirse bu takdirde (5.1) denkleminin sıfır asimptotik kararlıdır.

İspat: (5.1) denklemini aşağıdaki sisteme eşdeğerdir.

$$x'(t) = y(t)$$

$$y'(t) = z(t)$$

$$z'(t) = w(t)$$

$$\begin{aligned} w'(t) = & f_1(z(t))w(t) - f_2(y(t), z(t))z(t) - g(y(t)) - h(x(t)) \\ & + \int_{-r}^0 g_y(y(t+\theta))z(t+\theta)d\theta + \int_{-r}^0 h(x(t+\theta))y(t+\theta)d\theta. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Bu ispatta kullanılacak Lyapunov fonksiyoneli

$$\begin{aligned} V(x_t, y_t, z_t, w_t) = & \frac{1}{2} v(x(t), y(t), z(t), w(t)) \\ & + \frac{3v}{r} \int_{-r}^0 \left(\int_{\theta_1}^0 [y^2(t+\theta) + z^2(t+\theta)] d\theta \right) d\theta_1 \end{aligned}$$

$$+ \frac{2\nu}{r} \int_{-r}^0 \left(\int_{\theta_1}^0 w^2(t+\theta) d\theta \right) d\theta_1$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada $\nu \geq 0$,(4.11) de tanımlanmaktadır.

$$K = \max \left(\delta, \frac{\delta}{a}, \frac{\delta^2}{g^0}, \delta_1, \frac{\delta_1}{g^0}, \frac{\delta \delta_1}{g^0} \right)$$

olarak alınmakta ve

$$\begin{aligned} \nu[x(t), y(t), z(t), w(t)] = & \frac{2\delta}{g^0} \int_0^x h(s) ds + \left[\frac{f_2^0 \delta}{g^0} - \frac{h'(0)}{a} \right] y^2 \\ & + \left(\frac{f_2^0}{a} - \frac{\delta}{g^0} \right) z^2 + \frac{1}{a} w^2 + 2wz + \frac{2\delta}{g^0} yw \\ & + \frac{2\delta}{g^0} y \int_0^z f_1(s) ds + 2h(x)y \\ & + \frac{2}{a} h(x)z + \frac{2}{a} g(y)z + 2 \int_0^y g(s) ds \\ & + \frac{2}{a} \int_0^z s \{f(y, s) - f_2^0\} ds \\ & + \frac{2\delta}{g^0} \int_0^y s \{f_2(s, 0) - f_2^0\} ds \\ & + 2 \int_0^z s f_1(s) ds \end{aligned}$$

dir.

Yukarıda tanımlanan Lyapunov fonksiyonelinin türevi teoremin şartlarına bağlı olarak aşağıdaki eşitsizliği sağlar;

$$V'(x_t, y_t, z_t, w_t) \leq -2\lambda w^2(t) - \delta_2 y^2(t) - \gamma z^2(t)$$

$$\begin{aligned} & + \left[\frac{\delta}{g^0} y(t) + z(t) + \frac{1}{a} w(t) \right] \\ & \times \left[\int_{-r}^0 \{g_y(y(t+\theta))z(t+\theta) + h_x(x(t+\theta))y(t+\theta)\} d\theta \right] \\ & + \frac{3\nu}{r} \left[\int_{-r}^0 \{y^2(t) + z^2(t) - y^2(t+\theta) - z^2(t+\theta)\} d\theta \right] \end{aligned}$$

$$+ \frac{2v}{r} \int_{-r}^0 [w^2(t) - w^2(t + \theta)] d\theta ,$$

burada $\delta_2 > 0$ ve $\gamma > 0$ dir. Ayrıca $3\lambda = \min(\delta_1, \gamma)$ olarak seçilsin. Bu durumda yukarıda elde edilen ifade aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} V'(x_t, y_t, z_t, w_t) &\leq -\frac{1}{r} \int_{-r}^0 \{\mu y^2(t) + v y^2(t + \theta) - rK|y(t)y(t + \theta)|\} d\theta \\ &\quad - \frac{1}{r} \int_{-r}^0 \{\mu z^2(t) + v z^2(t + \theta) - rK|z(t)z(t + \theta)|\} d\theta \\ &\quad - \frac{1}{r} \int_{-r}^0 \{\mu y^2(t) + v z^2(t + \theta) - rK|y(t)z(t + \theta)|\} d\theta \\ &\quad - \frac{1}{r} \int_{-r}^0 \{\mu z^2(t) + v y^2(t + \theta) - rK|z(t)y(t + \theta)|\} d\theta \\ &\quad - \frac{1}{r} \int_{-r}^0 \{\mu w^2(t) + v y^2(t + \theta) - rK|w(t)y(t + \theta)|\} d\theta \\ &\quad - \frac{1}{r} \int_{-r}^0 \{\mu w^2(t) + v z^2(t + \theta) - rK|w(t)z(t + \theta)|\} d\theta \end{aligned}$$

burada

$$\mu = \frac{\lambda}{2} + \left(\frac{\lambda^2 - (rK)^2}{4} \right)^{1/2} > 0$$

dir.

Buna bağlı olarak $V' \leq 0$ olduğu kolaylıkla görülebilir. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

Şimdi, ikinci olarak Okoronkwo (1989) tarafından (5.2) denklemi için verilen sonuçlar ifade edilecektir.

Teorem 5.2.2.

(5.2) de $P(t) = 0$ ve (5.2) denklemi için aşağıdaki koşulların sağlandığını kabul edelim.

(i) $a_2 > 0, a_4 > 0$ ve $0 < a_1, a_3, c_0, M < \infty$,

(ii) Her ξ için $f(\xi) > a_1 > 0$, her $\xi \neq 0$ için $\frac{g(\xi)}{\xi} > a_3 > 0$, her $\xi, z(t)$ için

$$[a_1 a_2 - g'(\xi)] a_3 - a_1 a_4 f(z(t)) > c_0 > 0,$$

(iii) $g(0) = 0$, her η için $|g(\eta)| \leq M$ ve her $\xi \neq 0$ için $g(\xi) - \frac{g(\xi)}{\xi} < \lambda_1$,

(iv) Her $z(t) \neq 0$ için $\left[\frac{1}{z(t)} \int_0^{z(t)} f(\xi) d\xi \right] - f(z(t)) < \lambda_2$,

burada

$$\lambda_2 < \frac{2c_0}{a_1^2 a_3}$$

dir,

(v) Eğer $q > 1$, $\beta = \max[\beta_1, \beta_2, M]$, $d = \max[1, d_1, d_2]$, c_0, d_0 pozitif sabitler

ve λ_1, λ_2 negatif olmayan sabitler

$$d_1 = \varepsilon + \frac{1}{a_1}; d_2 = \varepsilon + \frac{a_4}{a_3}$$

$$\varepsilon = \min \left[\frac{a_3}{4a_4 d_0} \left(\frac{2a_4 c_0}{a_1 a_3^2} - \lambda_1 \right), \frac{a_1}{4d_0} \left(\frac{2c_0}{a_1^2 a_3} - \lambda_2 \right), \frac{c_0}{2a_1 a_3 d_0} \right],$$

$$\rho = \min \left[\frac{1}{3} a_3 \varepsilon, \frac{1}{3} a_1 \varepsilon, \frac{c_0}{6a_1 a_3} \right]$$

seçilirse, bu durumda $\beta d q h < \rho$ koşulu sağlanır ve (5.2) denkleminin sıfır çözümü düzgün asimptotik kararlıdır.

Bu teoremin ispatı burada verilmeyecektir.

Üçüncü olarak Tejumola ve Tchegnani (2000) tarafından (5.3) diferansiyel denklemi için verilen kararlılık sonucu üzerinde durulacaktır. (5.3) diferansiyel denklemi aşağıdaki sisteme eşdeğerdir.

$$x' = y$$

$$y' = z$$

$$z' = w$$

$$w' = -aw - bz - cy - h(x(t)) + M(t),$$

$$\begin{aligned}
M(t) = & aw - \varphi(t, x, y, z, w) + b \int_{-r}^0 w(t + \theta) d\theta \\
& + \psi(t, y(t-r), z(t-r)) + bz(t-r) + c \int_{-r}^0 z(t + \theta) d\theta \\
& - \chi(t, x(t-r), y(t-r)) + cy(t-r) \\
& + \int_{-r}^0 h'(x(t + \theta)) y(t + \theta) d\theta + P .
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Teorem 5.2.3.

Kabul edelim ki her t, x, y için $\chi(t, x, 0) = 0 = \psi(t, y, 0)$ ve yukarıdaki sistemde a, b, c pozitif sabitler olmak üzere d, δ_1, δ_2 pozitif sabit sayılar vardır ki öyle ki aşağıdaki koşullar sağlanır:

$$(i) \quad ab - c > 0, s \equiv abc - c^2 - a^2d > 0, s^* = s + 2ad(ab - c)b^{-1};$$

$$(ii) \quad \text{Her } t, x, y, z, w \quad 0 < \varphi(t, x, y, z, w) \leq a ;$$

$$(iii) \quad \text{Her } t, y \text{ ve her } z \neq 0 \text{ için } 0 < \frac{\psi(t, y, z)}{z} \leq b$$

$$(iv) \quad \text{Her } t, x \text{ ve her } y \neq 0 \text{ için } 0 < \frac{\chi(t, x, y)}{y} \leq c$$

$$(v) \quad \text{Her } x \text{ için } d - \frac{2as}{c} < \delta_2 < h'(x) \leq d$$

$$(vi) \quad \text{Her } x \neq 0 \text{ için } d \left(1 - \frac{sc}{s^*ab} \right) < \delta_2 < \frac{h(x)}{x} .$$

Bu takdirde r yeterince küçük seçilmek şartıyla (5.3) denkleminin sıfır çözümü düzgün asimptotik kararlıdır.

Bu teoremin ispatı yukarıda ifade edilen teoremlerin ispatına benzerdir.

Şimdi de Sadek (2004) tarafından (5.4) diferansiyel denklemini için verilen kararlılık sonucu üzerinde durulacaktır.

Teorem 5.2.4.

Kabul edelim ki aşağıdaki şartlar sağlansın:

- (i) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \Delta$ pozitif sabit olmak üzere $(\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3)\alpha_3 - \alpha_1^2\alpha_4 \geq \Delta$.
- (ii) $f(0) = 0$, her x için $f(x) \operatorname{sgn} x > 0, (x \neq 0)$, $|x| \rightarrow \infty$ iken

$$F(x) \equiv \int_0^x f(\xi) d\xi \rightarrow \infty$$

ve

$$0 \leq \alpha_4 - f'(x) \leq \varepsilon d_0 \alpha_1^2,$$

burada

$$\varepsilon = \min \left\{ \frac{1}{\alpha_1}, \frac{\Delta}{4\alpha_1\alpha_2d_0} \right\}$$

ve

$$d_0 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4^{-1}$$

dır.

$$\lambda = \left(\frac{\alpha_4}{2}\right)(d_1 + d_2 + 1) > 0 \text{ olmak üzere}$$

$$r < \min \left(\frac{\alpha_3\varepsilon}{d_2\alpha_4 + 2\lambda}, \frac{\Delta}{2\alpha_1\alpha_3\alpha_4}, \frac{\alpha_1\varepsilon}{d_1\alpha_4} \right)$$

olmak kaydıyla (5.4) denkleminin sıfır çözümü asimptotik kararlıdır.

İspat: (5.4) diferansiyel denklemi aşağıdaki sisteme eşdeğerdir.

$$x' = y$$

$$y' = z$$

$$z' = u$$

$$u' = -\alpha_1 u - \alpha_2 z - \alpha_3 y - f(x) + \int_{t-r}^t f'(x(s))y(s)ds \quad (5.18)$$

İspat için Lyapunov fonksiyoneli

$$\begin{aligned}
2V_1(x_t, y_t, z_t) = & 2d_2 \int_0^x f(\xi) d\xi + (\alpha_3 + \alpha_2 d_2 - \alpha_4 d_1) y^2 \\
& + (\alpha_1 + \alpha_2 d_1 - d_2) z^2 + d_1 u^2 + 2yf(x) + 2d_1 zf(x) \\
& + 2\alpha_1 d_2 yz + 2\alpha_3 d_1 yz + 2d_2 yu + 2zu + 2\lambda \int_{-r}^0 \int_t^s y^2(\theta) d\theta ds
\end{aligned} \quad (5.19)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada

$$d_1 = \varepsilon + \frac{1}{\alpha_2}, \quad d_2 = \varepsilon + \frac{\alpha_4}{\alpha_3} \quad (5.20)$$

olarak alınmaktadır.

$$\varepsilon = \min \left\{ \frac{1}{\alpha_1}, \frac{\Delta}{4\alpha_1 \alpha_2 d_0} \right\}$$

olduğundan pozitif tanımlıdır. λ pozitif sabittir.

$2V_1$ fonksiyoneli aşağıdaki gibi düzenlenebilir.

$$\begin{aligned}
2V_1 = & (2d_2 \int_0^x f(\xi) d\xi - \frac{f^2(x)}{\alpha_3}) + \frac{1}{\alpha_1} (u + \alpha_1 z + \alpha_1 d_2 y)^2 \\
& + \frac{1}{\alpha_3} (f(x) + \alpha_3 y + \alpha_3 d_1 z)^2 + (\alpha_2 d_2 - \alpha_4 d_1 - \alpha_1 d_2^2) y^2 + (d_1 - \frac{1}{\alpha_1}) u^2 \\
& + (\alpha_2 d_1 - d_2 - \alpha_3 d_1^2) z^2 + 2\lambda \int_{-r}^0 \int_t^s y^2(\theta) d\theta ds.
\end{aligned} \quad (5.21)$$

Teoremin şartları dikkate alındığında

$$\begin{aligned}
2d_2 \int_0^x f(\xi) d\xi - \frac{f^2(x)}{\alpha_3} &= 2\varepsilon \int_0^x f(\xi) d\xi + \frac{2\alpha_4}{\alpha_3} \int_0^x f(\xi) d\xi - \frac{f^2(x)}{\alpha_3} \\
&= 2\varepsilon \int_0^x f(\xi) d\xi + \frac{1}{\alpha_3} \{ 2\alpha_4 \int_0^x f(\xi) d\xi - f^2(x) \}
\end{aligned}$$

yazılabilir.

Ayrıca

$$2\alpha_4 \int_0^x f(\xi) d\xi - f^2(x) = 2 \int_0^x \{ \alpha_4 - f'(\xi) \} f(\xi) d\xi - f^2(0)$$

olduğundan

$$2\alpha_4 \int_0^x f(\xi) d\xi - f^2(x) \geq 0$$

ve

$$2d_2 \int_0^x f(\xi) d\xi - \frac{f^2(x)}{\alpha_3} \geq 2\varepsilon \int_0^x f(\xi) d\xi . \quad (5.22)$$

yazılabilir.

$$d_1 = \varepsilon + \frac{1}{\alpha_2} , \quad d_2 = \varepsilon + \frac{\alpha_4}{\alpha_3}$$

olduğundan , (i) den dolayı

$$\begin{aligned} \alpha_2 - \alpha_3 d_1 - \alpha_1 d_2 &= \alpha_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} - \frac{\alpha_1 \alpha_4}{\alpha_3} - (\alpha_3 + \alpha_1) \varepsilon \\ &= \frac{1}{\alpha_1 \alpha_3} \{ (\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3) \alpha_3 - \alpha_1^2 \alpha_4 \} - (\alpha_1 + \alpha_3) \varepsilon \\ &\geq \frac{\Delta}{\alpha_1 \alpha_3} - (\alpha_3 + \alpha_1) \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir.

(i) den $\alpha_1 \alpha_2 > \alpha_3$ ve $\alpha_1 \alpha_4 < \alpha_2 \alpha_3$ olması nedeni ile

$$\alpha_2 - \alpha_3 d_1 - \alpha_1 d_2 \geq \frac{\Delta}{\alpha_1 \alpha_3} - d_0 \varepsilon \quad (5.23)$$

bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned} (\alpha_2 d_2 - \alpha_4 d_1 - \alpha_1 d_2^2) &= d_2 (\alpha_2 - \alpha_3 d_1 - \alpha_1 d_2) + d_1 (\alpha_3 d_2 - \alpha_4) \\ &> d_2 (\alpha_2 - \alpha_3 d_1 - \alpha_1 d_2) > \frac{\alpha_4}{\alpha_3} \left(\frac{\Delta}{\alpha_1 \alpha_3} - d_0 \varepsilon \right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (\alpha_2 d_1 - d_2 - \alpha_3 d_1^2) &= d_1 (\alpha_2 - \alpha_3 d_1 - \alpha_1 d_2) + d_2 (\alpha_1 d_1 - 1) \\ &> d_1 (\alpha_2 - \alpha_3 d_1 - \alpha_1 d_2) > \frac{1}{\alpha_1} \left(\frac{\Delta}{\alpha_1 \alpha_3} - d_0 \varepsilon \right) \end{aligned}$$

olduğu kolaylıkla elde edilebilir.

Böylece Lyapunov fonksiyoneli için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir;

$$2V_1 \geq 2\varepsilon \int_0^x f(\xi) d\xi + \frac{1}{\alpha_1} (u + \alpha_1 z + \alpha_1 d_2 y)^2 + \frac{1}{\alpha_3} (f(x) + \alpha_3 y + \alpha_3 d_1 z)^2$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \frac{\alpha_4}{\alpha_3} \left(\frac{\Delta}{\alpha_1 \alpha_3} - d_0 \varepsilon \right) \right\} y^2 + \varepsilon u^2 + \left\{ \frac{1}{\alpha_1} \left(\frac{\Delta}{\alpha_1 \alpha_3} - d_0 \varepsilon \right) \right\} z^2 \\
& + 2\lambda \int_{-r}^0 \int_{t+s}^t y^2(\theta) d\theta ds \\
& \geq 2\varepsilon \int_0^x f(\xi) d\xi \\
& + \frac{1}{\alpha_1} (u + \alpha_1 z + \alpha_1 d_2 y)^2 + \frac{1}{\alpha_3} (f(x) + \alpha_3 y + \alpha_3 d_1 z)^2 \\
& + \frac{3\alpha_4 \Delta}{4\alpha_1 \alpha_3^2} y^2 + \varepsilon u^2 + \frac{3\Delta}{4\alpha_1^2 \alpha_3} z^2 + 2\lambda \int_{-r}^0 \int_{t+s}^t y^2(\theta) d\theta ds, \tag{5.24}
\end{aligned}$$

çünkü

$$\varepsilon < \frac{\Delta}{4\alpha_1 \alpha_3 d_0}$$

dır.

Şimdi Lyapunov fonksiyonelinin türevini bulalım:

$$\begin{aligned}
V_1' & = -\varepsilon \alpha_3 y^2 - \{ \alpha_4 y^2 - f'(x) y^2 - d_1 y z f'(x) + \alpha_4 d_1 y z \} \\
& \quad - \{ \alpha_2 - \alpha_3 d_1 - \alpha_1 d_2 \} z^2 - (\alpha_1 d_1 - 1) u^2 \\
& \quad + (d_1 u + d_2 y + z) \int_{t-r(t)}^t f(x(s)) y(s) ds + \lambda y^2 r \\
& \quad - \lambda \int_{t-r}^t y^2(s) ds. \tag{5.25}
\end{aligned}$$

(ii) den

$$\begin{aligned}
\alpha_4 y^2 - f'(x) y^2 - d_1 y z f'(x) + \alpha_4 d_1 y z & = \{ \alpha_4 - f'(x) \} \left\{ \left(y + \frac{d_1}{2} z \right) - \frac{d_1^2}{4} z^2 \right\} \\
& \geq \{ \alpha_4 - f'(x) \} \frac{d_1^2}{4} z^2
\end{aligned}$$

yazılabilir. Ayrıca teoremin şartlarına bağlı olarak

$$\{ \alpha_4 - f'(x) \} \frac{d_1^2}{4} \leq \frac{1}{4} \left(\varepsilon + \frac{1}{\alpha_1} \right)^2 \varepsilon d_0 \alpha_1^2 \leq \varepsilon d_0,$$

$$\alpha_4 y^2 - f'(x) y^2 - d_1 y z f'(x) + \alpha_4 d_1 y z \geq -\varepsilon d_0 z^2,$$

$$\alpha_1 d_1 - 1 \geq \alpha_1 \varepsilon$$

olacağı açıktır. Böylece

$$\begin{aligned} V_1' &\leq -\varepsilon \alpha_3 y^2 - \left(\frac{\Delta}{\alpha_1 \alpha_3} - 2d_0 \varepsilon \right) z^2 - \alpha_1 \varepsilon u^2. \\ &+ (d_1 u + d_2 y + z) \int_{t-r(t)}^t f(x(s)) y(s) ds + \lambda y^2 r - \lambda \int_{t-r}^t y^2(s) ds \end{aligned} \quad (5.26)$$

yazılabilir.

Eğer

$$\varepsilon \leq \frac{\Delta}{4\alpha_1 \alpha_2 d_0}, \quad f'(x) \leq \alpha_4$$

ve

$$2|uv| \leq u^2 + v^2$$

eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} V_1' &\leq -\left\{ \alpha_3 \varepsilon - \frac{1}{2} (d_2 \alpha_4 + 2\lambda) r \right\} y^2 - \left(\frac{\Delta}{2\alpha_1 \alpha_3} - \frac{1}{2} \alpha_4 r \right) z^2 \\ &- \left\{ \alpha_1 \varepsilon - \frac{1}{2} d_1 \alpha_4 r \right\} u^2 + \left\{ \frac{\alpha_4}{2} (d_1 + d_2 + 1) - \lambda \right\} \int_{t-r}^t y^2(s) ds \end{aligned} \quad (5.27)$$

elde edilir.

$$\frac{\alpha_4}{2} (d_1 + d_2 + 1) = \lambda > 0$$

olduğundan

$$\begin{aligned} V_1' &\leq -\left\{ \alpha_3 \varepsilon - \frac{1}{2} (d_2 \alpha_4 + 2\lambda) r \right\} y^2 - \left(\frac{\Delta}{2\alpha_1 \alpha_3} - \frac{1}{2} \alpha_4 r \right) z^2 \\ &- \left\{ \alpha_1 \varepsilon - \frac{1}{2} d_1 \alpha_4 r \right\} u^2 \end{aligned} \quad (5.28)$$

olur.

Öte yandan

$$r < \min \left(\frac{\alpha_3 \varepsilon}{d_2 \alpha_4 + 2\lambda}, \frac{\Delta}{2\alpha_1 \alpha_3 \alpha_4}, \frac{\alpha_1 \varepsilon}{d_1 \alpha_4} \right)$$

olması nedeni ile bir $\rho > 0$ için

$$V_1' \leq -\rho(x^2 + y^2 + u^2)$$

olur.

İspatın geri kalan kısmı açıktır. Bu ise inceleme altındaki denklemin sıfır çözümünün asimptotik kararlı olduğunu gösterir. Böylece teorem ispatlanmış oldu.

Son olarak yine Sadek (2004) tarafından (5.5) diferansiyel denklemi için verilen bir başka kararlılık sonucu üzerinde durulacaktır.

Teorem 5.2.5.

Kabul edelim ki (5.5) denklemi için aşağıdaki şartlar sağlansın.

(i) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \Delta$ pozitif sabit olmak üzere $(\alpha_1 \alpha_2 - \phi'(y)) \alpha_3 - \alpha_1^2 \alpha_4 \geq \Delta$.

(ii) $f(0) = 0$, her x için

$$f(x) \operatorname{sgn} x > 0, (x \neq 0), |x| \rightarrow \infty$$

iken

$$F(x) \equiv \int_0^x f(\xi) d\xi \rightarrow \infty$$

ve

$$0 \leq \alpha_4 - f'(x) \leq \varepsilon d_0 \alpha_1^2, \quad d_0 = \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4^{-1}$$

burada

$$\varepsilon = \min \left\{ \frac{1}{\alpha_1}, \frac{\Delta}{4\alpha_1 \alpha_2 d_0}, \frac{\alpha_3}{4\alpha_4 d_0} \left(\frac{2\Delta \alpha_4}{\alpha_1 \alpha_3^2} - \delta_1 \right) \right\}$$

olarak tanımlanmaktadır.

(iii) $\phi(0) = 0$ ve her y için $\phi'(y) \geq \alpha_3 > 0$ ve her $y \neq 0$ için

$$0 \leq \phi'(y) - \frac{\phi(y)}{y} \leq \delta_1 < \frac{2\Delta \alpha_4}{\alpha_1 \alpha_3^2}$$

dır. Bu takdirde

$$\mu = \left(\frac{\alpha_2 \alpha_3}{2} \right) (d_1 + d_2 + 1) > 0$$

olmak üzere

ve

$$r < \min\left(\frac{\varepsilon}{d_2\alpha_2}, \frac{\Delta}{2\alpha_1\alpha_3(\alpha_2\alpha_3 + 2\mu)}, \frac{\alpha_1\varepsilon}{d_1\alpha_2\alpha_3}\right)$$

olmak kaydıyla (5.5) denkleminin sıfır çözümü asimptotik kararlıdır.

İspat: (5.4) diferansiyel denklemi aşağıdaki sisteme eşdeğerdir:

$$x' = y$$

$$y' = z$$

$$z' = u$$

$$u' = -\alpha_1 u - \alpha_2 z - \phi(y) - f(x) + \int_{t-r}^t \phi'(y(s))z(s)ds . \quad (5.29)$$

İspat için Lyapunov fonksiyoneli

$$\begin{aligned} 2V_2(x_t, y_t, z_t) = & 2d_2 \int_0^x f(\xi)d\xi + (\alpha_2 d_2 - \alpha_4 d_1)y^2 + 2 \int_0^y \phi(\eta)d\eta \\ & + (\alpha_1 + \alpha_2 d_1 - d_2)z^2 + d_1 u^2 + 2yf(x) + 2d_1 zf(x) \\ & + 2\alpha_1 d_2 yz + 2d_1 \phi(y)z + 2d_2 yu + 2zu + 2\mu \int_{-r}^0 \int_{t+s}^t z^2(\theta)d\theta ds \end{aligned} \quad (5.30)$$

olarak tanımlanmaktadır. Lyapunov fonksiyoneli aşağıdaki gibi düzenlenebilir:

$$\begin{aligned} 2V_2 = & (2d_2 \int_0^x f(\xi)d\xi - \frac{f^2(x)}{\gamma(y)}) + \frac{1}{\alpha_1} (u + \alpha_1 z + \alpha_1 d_2 y)^2 \\ & + \frac{1}{\gamma(y)} (f(x) + \gamma(y)y + \gamma(y)d_1 z)^2 + (\alpha_2 d_2 - \alpha_4 d_1 - \alpha_1 d_2^2)y^2 \\ & + 2 \int_0^y \phi(\eta)d\eta - y^2 \gamma(y) + (d_1 - \frac{1}{\alpha_1})u^2 + (\alpha_2 d_1 - d_2 - \gamma(y)d_1^2)z^2 \\ & + 2\mu \int_{-r}^0 \int_{t+s}^t z^2(\theta)d\theta ds ; \end{aligned} \quad (5.31)$$

burada γ fonksiyonu

$$\gamma(y) = \begin{cases} \frac{\phi(y)}{y} & y \neq 0 \\ \phi'(0) & y = 0 \end{cases} \quad (5.32)$$

olarak tanımlanmaktadır.

(iii) den her y için $\gamma(y) \geq \alpha_3$ ve $0 \leq \phi'(y) - \gamma(y) \leq \delta_1$ dir. Bir önceki teoremden

$$2d_2 \int_0^x f(\xi) d\xi - \frac{f^2(x)}{\alpha_3} \geq 2\varepsilon \int_0^x f(\xi) d\xi .$$

olduğu bilinmektedir. Bu nedenle

$$\begin{aligned} 2d_2 \int_0^x f(\xi) d\xi - \frac{f^2(x)}{\gamma(y)} &\geq 2d_2 \int_0^x f(\xi) d\xi - \frac{f^2(x)}{\alpha_3} \geq \\ &\geq 2\varepsilon \int_0^x f(\xi) d\xi \end{aligned}$$

elde edilir.

Bir önceki teoremin ispatında ortaya çıkan işlemlere bezer biçimde

$$\begin{aligned} \alpha_2 - \phi'(y)d_1 - \alpha_1 d_2 &= \alpha_2 - \frac{\phi'(y)}{\alpha_1} - \frac{\alpha_1 \alpha_4}{\alpha_3} - (\phi'(y) + \alpha_1)\varepsilon \\ &= \frac{1}{\alpha_1 \alpha_3} \{(\alpha_1 \alpha_2 - \phi'(y))\alpha_3 - \alpha_1^2 \alpha_4\} - (\alpha_1 + \phi'(y))\varepsilon \\ &\geq \frac{\Delta}{\alpha_1 \alpha_3} - (\phi'(y) + \alpha_1)\varepsilon \end{aligned}$$

yazılabilir. $\alpha_1 \alpha_2 > \phi'(y)$ ve $\alpha_1 \alpha_4 < \alpha_2 \alpha_3$ olduğundan

$$\alpha_2 - \phi'(y)d_1 - \alpha_1 d_2 \geq \frac{\Delta}{\alpha_1 \alpha_3} - d_0 \varepsilon \quad (5.33)$$

elde edilir.

Benzer biçimde teoremin şartlarına bağlı olarak aşağıdaki ifadeler yazılabilir:

$$\begin{aligned} &(\alpha_2 d_2 - \alpha_4 d_1 - \alpha_1 d_2^2) y^2 + 2 \int_0^y \phi(\eta) d\eta - y^2 \gamma(y) \\ &= d_1 (\alpha_2 - \phi'(y) d_1 - \alpha_1 d_2) y^2 + d_1 (d_2 \phi'(y) - \alpha_4) y^2 + 2 \int_0^y \phi(\eta) d\eta - y^2 \gamma(y) \\ &> \frac{\alpha_4}{\alpha_3} \left(\frac{\Delta}{\alpha_1 \alpha_3} - d_0 \varepsilon \right) y^2 + 2 \int_0^y \phi(\eta) d\eta - y^2 \gamma(y) ., \end{aligned}$$

Ayrıca

$$\int_0^y \phi(\eta) d\eta = y\phi(y) - \int_0^y \eta\phi'(\eta) d\eta = y^2\gamma(y) - \int_0^y \eta\phi'(\eta) d\eta.$$

ve

$$\begin{aligned} 2\int_0^y \phi(\eta) d\eta - y^2\gamma(y) &= \int_0^y \phi(\eta) d\eta - \int_0^y \eta\phi'(\eta) d\eta \\ &= \int_0^y \{\gamma(\eta) - \phi'(\eta)\} \eta d\eta \geq -\frac{1}{2} \delta_1 y^2 \end{aligned}$$

olur. Bu nedenle

$$\begin{aligned} &(\alpha_2 d_2 - \alpha_4 d_1 - \alpha_1 d_2^2) y^2 + 2\int_0^y \phi(\eta) d\eta - y^2\gamma(y) \\ &> \frac{\alpha_4}{\alpha_3} \left(\frac{\Delta}{\alpha_1 \alpha_3} - d_0 \varepsilon \right) - \frac{1}{2} \delta_1 y^2 > \left\{ \frac{\alpha_4}{\alpha_3} \left(\frac{\Delta}{\alpha_1 \alpha_3} - d_0 \varepsilon \right) - \frac{1}{2} \delta_1 \right\} y^2 \end{aligned}$$

yazılabilir.

Ayrıca

$$0 < \frac{2\Delta\alpha_4}{\alpha_1\alpha_3^2} - \delta_1$$

ve

$$\varepsilon \leq \frac{\alpha_3}{4\alpha_4 d_0} \left(\frac{2\Delta\alpha_4}{\alpha_1\alpha_3^2} - \delta_1 \right)$$

olması nedeni ile

$$(\alpha_2 d_2 - \alpha_4 d_1 - \alpha_1 d_2^2) y^2 + 2\int_0^y \phi(\eta) d\eta - y^2\gamma(y) \geq \frac{1}{4} \left(\frac{2\Delta\alpha_4}{\alpha_1\alpha_3^2} - \delta_1 \right)$$

olur.

Benzer biçimde

$$\begin{aligned} \alpha_2 d_1 - d_2 - d_1^2 \gamma(y) &= d_1(\alpha_2 - d_1 \gamma(y) - d_2 \alpha_1) + d_2(d_1 \alpha_1 - 1) \\ &> d_1(\alpha_2 - d_1 \phi'(y) - d_2 \alpha_1) \geq \frac{1}{\alpha_1} \left(\frac{\Delta}{\alpha_1 \alpha_3} - d_0 \varepsilon \right) \geq \frac{\Delta}{2\alpha_1^2 \alpha_3} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu yüzden

$$2V_2 \geq 2\varepsilon \int_0^x f(\xi) d\xi + \frac{1}{\alpha_1} (u + \alpha_1 z + \alpha_1 d_2 y)^2 + \frac{1}{\gamma(y)} (f(x) + \gamma(y)y + \gamma(y)d_1 z)^2$$

$$+ \frac{1}{4} \left(\frac{2\Delta\alpha_4}{\alpha_1\alpha_3^2} - \delta_1 \right) y^2 + \varepsilon u^2 + \frac{3\Delta}{4\alpha_1^3\alpha_3} z^2 + 2\mu \int_{-r}^0 \int_{t+s}^t z^2(\theta) d\theta ds \quad (5.34)$$

yazılabilir.

Lyapunov fonksiyoneli türevini alırsak

$$\begin{aligned} V_2' = & -\{\alpha_4 y^2 - f'(x)y^2 - d_1 y z f'(x) + \alpha_4 d_1 y z\} - (\alpha_2 - \phi'(y)d_1 - \alpha_1 d_2) z^2 \\ & - \{d_2 y \phi(y) - \alpha_4 y^2\} - (\alpha_1 d_1 - 1)u^2 + (d_1 u + d_2 y + z) \int_{t-r(t)}^t \phi'(y(s)) z(s) ds \\ & + \mu z^2 r - \mu \int_{t-r}^t z^2(s) ds \end{aligned} \quad (5.35)$$

elde edilir.

Daha önceden

$$d_2 y \phi(y) - \alpha_4 y^2 = \{d_2 \gamma(y) - \alpha_4\} y^2 \geq \varepsilon \alpha_3 y^2$$

olduğunu biliyoruz.

Yukarıda verilen bilgiler ışığında , teoremin şartlarına bağlı olarak kolaylıkla

$$\begin{aligned} V_2' \leq & -\varepsilon \alpha_3 y^2 - \left(\frac{\Delta}{\alpha_1 \alpha_3} - d_0 \varepsilon \right) z^2 - \alpha_1 \varepsilon u^2 + (d_1 u + d_2 y + z) \int_{t-r(t)}^t \phi'(y(s)) z(s) ds \\ & + \mu z^2 r - \mu \int_{t-r}^t z^2(s) ds \end{aligned}$$

olduğu görülür. İspatın geri kalan kısmı bir önceki teoremin ispatına benzerdir.

5.3. Dördüncü Basamaktan Gecikmeli Diferansiyel Denklemler İçin Bazı Sınırlılık Sonuçları

Bu kesimde Okronkowo (1973) tarafından (5.2) diferansiyel denklemi için verilen sınırlılık sonucu ifade edilecektir. Verilecek olan teoremin ispatı ikinci bölümde verilen Teorem 4.2.5 ispatına benzer olduğundan, burada ispat verilmeyecektir.

Teorem 5.3.1.

Kabul edelim ki Teorem 5.2.2 nin tüm şartları sağlansın. Buna ilaveten $M > 0$ bir sabit ve her $t \geq \sigma$ için $|p(t)| \leq M$ ise bu takdirde (5.2) denkleminin tüm çözümleri düzgün sınırlıdır.

KAYNAKLAR

- Bereketoglu, H., 1998. Asymptotic stability in a fourth order delay differential equation. *Dynam. Systems Appl.*, **7**(1): 105-115.
- Bereketoglu, H., Karakoç, F., 2006. Some results on boundedness and stability of a third order differential equation with delay. *An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi. Mat.*, (N.S.) **51**(2): 245-258.
- Burton, T. A., 1985. *Stability and Periodic Solutions of Ordinary and Functional-Differential Equations*. Mathematics in Science and Engineering, 178. Academic Press, Inc., Orlando, FL, 1985.
- Chukwu, E. N., 1978. On the boundedness and the existence of a periodic solution of some nonlinear third order delay differential equation. *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl., Sci. Fis. Mat. Natur.* (8), **64**(5): 440-447.
- Èl'sgol'ts, L. È., 1966. *Introduction to the Theory of Differential Equations with Deviating Arguments*. Translated from the Russian by Robert J. McLaughlin Holden-Day, Inc., San Francisco, Calif.-London-Amsterdam.
- Èl'sgol'ts, L. È., Norkin, S. B., 1973. *Introduction to the Theory and Application of Differential Equations with Deviating Arguments*. Translated from the Russian by John L. Casti. Mathematics in Science and Engineering, Vol. 105. Academic Press [A Subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London.
- Gopalsamy, K., 1992. *Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics*. Mathematics and its Applications, 74. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht.
- Hale, J., 1977. *Theory of Functional Differential Equations*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg.
- Hale, J., Verduyn Lunel, S. M., 1993. *Introduction to Functional-differential Equations*. Applied Mathematical Sciences, 99. Springer-Verlag, New York.
- Kolmanovskii, V., Nosov, B., 1986. *Stability of Functional-differential Equations*. Mathematics in Science and Engineering, 180. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], London.
- Kolmanovskii, V., Myshkis, A., 1999. *Introduction to the Theory and Applications of*

- Functional Differential Equations***. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Krasovskii, N. N., 1963. ***Stability of Motion. Applications of Lyapunov's second method to differential systems and equations with delay***. Translated by J. L. Brenner Stanford University Press, Stanford, Calif.
- Lyapunov, A. M., 1966. ***Stability of Motion. Mathematics in Science and Engineering***, Vol. 30 Academic Press, New York-London.
- Okoronkwo, O. E., 1988. On stability and boundedness of solutions of a certain fourth-order delay differential equation. ***Internat. J. Math. Math. Sci.***, **12**(3): 589-602.
- Sadek, A. I., 2003. Stability and boundedness of a kind of third-order delay differential system. ***Applied Mathematics Letters***, **16**(5): 657-662.
- Sadek, A. I., 2004. On the stability of solutions of certain fourth order delay differential equations. ***Appl. Math. Comput.***, **148**(2): 587-597.
- Sadek, A. I., 2005. On the stability of solutions of some non-autonomous delay differential equations of the third order. ***Asymptotic Analysis***. **43**: 1-7.
- Sinha, A. S. C., 1973. On stability of solutions of some third and fourth order delay-differential equations, ***Information and Control***, **23**: 165-172.
- Tejumola, H. O., Tchegnani, B., 2000. Stability, boundedness and existence of periodic solutions of some third and fourth order nonlinear delay differential equations. ***J. Nigerian Math. Soc.*** **19**: 9-19.
- Tunç, C., 2006. New results about stability and boundedness of solutions of certain non-linear third order delay differential equations. ***The Arabian Journal for Science and Engineering***, **31**(2A): 185-196.
- Yoshizawa, T., 1966. ***Stability Theory by Liapunov's Second Method***. The Mathematical Society of Japan, Tokyo.
- Yunfeng, Z., 1992. On stability, boundedness and existence of periodic solution of a kind of third order nonlinear delay differential system. ***Ann. Differential Equations***, **8**(2): 249-259.

ÖZ GEÇMİŞ

1982 yılında Ağrı ili Diyadin İlçesinde doğdu. İlk öğrenimini Diyadin’de, orta ve lise öğrenimini Ağrı ili Diyadin İlçesine bağlı Diyadin Lisesi’nde 1996 yılında tamamladı. Aynı yıl Ankara üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı ve 2001 yılında mezun oldu. 2005 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü’nde Yüksek Lisans eğitime başladı. Halen Iğdır Fen lisesinde Matematik Öğretmeni olarak çalışmaktadır.