

T.C.

GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**MEROMORF FONKSİYONLAR İÇİN
CONTOUR-SOLID TEOREMİ**

Ahmet Faruk ÇAKMAK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

GEBZE

2007

T.C.

GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**MEROMORF FONKSİYONLAR İÇİN
CONTOUR-SOLID TEOREMİ**

Ahmet Faruk ÇAKMAK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI

Prof. Dr. Tahir AZEROĞLU

GEBZE

2007

 GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ	YÜKSEK LİSANS JÜRİ ONAY FORMU
--	---

G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 18/06/2007 tarih ve 2007/21 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 01/10/2007 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Ahmet Faruk ÇAKMAK'ın tez çalışması Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE
(TEZ DANIŞMANI) : Prof. Dr. Tahir AZEROĞLU

ÜYE : Prof. Dr. Muammer KALYON

ÜYE : Doç Dr. Mansur İSMAİLOV

ÜYE : Yrd. Doç. Coşkun YAKAR

ÜYE : Yrd. Doç. Yücel ENGİNER

ONAY

G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
..... tarih ve/..... sayılı kararı.

İMZA/MÜHÜR

ÖZET

TEZİN BAŞLIĞI: Meromorf Fonksiyonlar için Contour-Solid Teoremi

YAZAR ADI: Ahmet Faruk ÇAKMAK

Bu tezin birinci bölümünde bazı temel kavramlar, ikinci ve üçüncü bölüm için temel teşkil edecek tanımlar ve teoremlerin ifadeleri verilmiştir.

İkinci bölümde ise, kompleks düzlemde kapasite incelenmiştir. Kapasiteye önce bir küme fonksiyonu gibi bakılmış olup, daha sonra bu kapasitenin hesaplanması ve tahmini ile ilgili teoremler ispatlanmıştır. Bunlar, aynı zamanda, üçüncü bölümde ifade edilen "Contour-Solid" Teoremleri için birer temel teşkil ettiği için, ayrıntılı biçimde incelenmesi uygun görülmüştür.

Üçüncü bölümde ise, nihayet, meromorf fonksiyonun tanımı verildikten sonra, fonksiyonların sonlu fark, düzgünlük ve aproksimatif özelliklerine göre sınıflandırılması amacıyla majorantlar ele alınmıştır. Daha sonra, meromorf fonksiyonlar için Contour-solid teoremleri verilmiştir.

SUMMARY

THESIS TITLE: Contour-Solid Theorem For Meromorphic Functions

AUTHOR NAME: Ahmet Faruk ÇAKMAK

In the first chapter of this thesis, some fundamental concepts are defined; afterwards, theorems and declarations which will serve the basis for chapters two and three are presented.

The second chapter surveys the capacity on complex plane and proves the theorems on computation and estimation. They are thoroughly investigated because they will serve as the basis for Contour-Solid theorems reviewed in chapter three.

Finally, chapter three first provides a definition for meromorphic function and further deals with majorants for a proper classification of the functions on the basis of properties including finite odd, regularity and approximation. Lastly, the Contour-Solid theorems for meromorphic functions are given.

TEŞEKKÜR

Bu tezin ortaya çıkmasında, bana vermiş olduğu namütenahi katkılarından dolayı çok değerli hocam Sayın. Prof. Dr. Tahir AZEROĞLU 'na, sıkılmadan benimle çalışan ve her konuda yardımcı olmaya çalışan ders arkadaşım Arş.Grv. Tuğba AKYEL 'e,

Tez komitemde yer almayı kabul edip, değerli vakitlerini bana harcayan çok değerli hocalarım; Prof. Dr. Muammer KALYON 'a, Doç. Dr. Mansur İSMAYİLOV 'a, Yard. Doç. Dr. Coşkun YAKAR 'a, Yard. Doç. Dr. Yücel ENGİNER 'e çok teşekkür ederim.

Ve tabii ki benden maddi ve manevi desteğini hiçbir zaman esirgemeyen ve esirgemeyecek olan aileme sonsuz şükranlarımı borç bilirim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	<u>sayfa</u>
ÖZET	IV
SUMMARY	V
TEŞEKKÜR	VI
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	VII
NOTASYONLAR	VIII
GİRİŞ	1
1. BAZI TEMEL TANIMLAR	3
1.1. Harmonik ve Subharmonik Fonksiyonlar	3
1.2. Potansiyeller	4
1.3. Green Fonksiyonları	7
2. KAPASİTE	8
2.1. Küme Fonksiyonu Gibi Kapasite	8
2.2. Kapasite Hesaplama	13
2.3. Kapasite Tahmini	17
3.MEROMORF FONKSİYONLAR	24
3.1. Majorantlar	24
3.2. Meromorf Fonksiyonlar	26
SONUÇ	30
KAYNAKLAR	31
ÖZGEÇMİŞ	33

NOTASYONLAR

$\mathbb{C}$	Kompleks Düzlem
$\mathbb{C}_\infty$	Riemann Sferası
$\bar{S}$	S nin $\mathbb{C}_\infty$ daki kapanışı
∂S	S nin $\mathbb{C}_\infty$ daki sınırı
$\Delta(w, r)$	r yarı çaplı w merkezli açık disk
$\bar{\Delta}(w, r)$	r yarıçaplı w merkezli kapalı disk
Δf	f in Laplsyanı
τ_D	D bölgesinde Harnack uzaklığı
1_S	S in karakteristik fonksiyonu
dA	iki boyutlu Lebesgue ölçüsü
$u * \Phi$	u ve Φ nin konvolusyonu
$supp \mu$	μ nün kompakt supportu
p_μ	μ nün potansiyeli
$I(\mu)$	μ nün enerjisi
n.e.	yaklaşık olarak her yerde
$P(K)$	K daki Borel olasılık ölçüleri
u^*	u nun üstten yarısürekli regülarizasyonu
$\ \Phi\ _\infty$	Φ nin sup normu
$\partial_\varepsilon K$	K nın sınırının dışı

GİRİŞ

Bu tezde, öncelikle kapasite konusu ele alınmıştır. Özel olarak Logaritmik Kapasite üzerinde durulmuştur ve bununla ilgili çeşitli teoremler verilmiştir. Kapasitenin tanımından sonra görülmüştür ki; basit kümelerin, (mesela kare gibi) kapasitelerini hesaplamak bazı zorluklar gerektirir. Daha karışık kümelerin ise, genelde kapasitelerini hesaplamak imkansızdır. Bu taktirde tahminlere yer vermeliyiz.

Tezin üçüncü bölümünde mereomorf fonksiyonlar için yalınkat olmama durumu da hesaba katılarak, Hardy-Littlewood tipi teoremler ele alınmıştır.

Bu tip teoremler, öncelikle holomorf fonksiyonlar için incelenmiştir. Holomorf fonksiyonlar için bu tip teoremlerin uygulandığı alanların bazılarını Cauchy tipi ve singüler integrallerin incelenmesi, Riemann sınır değer problemi; yaklaşım teorisinin düz ve ters teoremleri, Konform homeomorfizmaların düzgünlüğünün incelenmesi, v.s. gibi sıralayabiliriz. İlgili problemin holomorf fonksiyonlar için ifadesi aşağıdaki gibidir.

$\bar{G}$ kompleks düzlemin bir noktalı kompaktlaştırılması, $G \subset \mathbb{C}$ açık küme, φ fonksiyonu $\bar{G}$ 'de sürekli ve G 'de analitik olsun. $G \subset \mathbb{C}$ kümesi ve $\mu(\delta)$ majorantı (yani bazı koşulları sağlayan $\mu: (-\infty, 0) \rightarrow [0, +\infty)$ fonksiyonu) hangi koşulları sağlamalı ki aşağıdaki gerektirmeler doğru olsunlar:

1- Eğer

$$|\varphi(\xi) - \varphi(z)| \leq \mu(|\xi - z|) , \quad \forall \xi, z \in \partial G, \xi \neq z$$

ise, bu taktirde

$$|\varphi(\xi) - \varphi(z)| \leq C\mu(|\xi - z|) , \quad \forall \xi, z \in \partial G, \xi \neq z \quad (1)$$

burada $C \geq 1$, ξ ve z 'den bağımsız sabittir.

2- Eğer $z_0 \in \partial G$ sabit noktası için

$$|\varphi(\xi) - \varphi(z_0)| \leq \mu(|\xi - z_0|) , \quad \forall \xi \in \partial G, \xi \neq z_0$$

ise bu taktirde

$$|\varphi(\xi) - \varphi(z_0)| \leq C\mu(|\xi - z_0|) , \quad \forall \xi \in \bar{G}, \xi \neq z_0 \quad (2)$$

burada $C \geq 1$, ξ 'den bağımsız sabittir.

Hardy G.H. ve Littlewood J.E. [12], 1- gerektirmesini, G daire ve $\mu(\delta) = \delta^\alpha$, , $(\delta = \text{sabit} \in (0,1])$ durumunda ispatlamışlardır. G Jordan bölgesi olması durumunda Warschawski S.E. [13], 2- gerektirmesini, Walsh J.L. ve Sewell W.E. [14], 1- gerektirmesini ispatlamışlardır, öyle ki her iki sonuçta da $C = 1$ 'dir.

Sewell 1942 yılında yayınlanan [15] monografında şimdi Warschawski-Wlash-Sewell problemleri olarak adlandırılan bir dizi açık problem ortaya koymuştur. Bunlardan birisi Warschawski-Wlash-Sewell'in yukarıdaki sonuçlarını Jordan bölgelerinden daha genel bölgelere ve $\delta^\alpha, |\ln \delta|$ gibi majorantlardan daha genel süreklilik tipi majorantlara genelleştirilmesi problemidir.

1971 yılında Tamrazov P.M., Warschawski-Wlash-Sewell problemini çözmüştür [16]. Problemin çözümü için yeni metodlar ortaya koymuştur. Bu metodlar problemi daha genel olarak formüle etmeye imkan vermiştir. Tamrazov P.M. çok genel olan, çok bağlantılı (hatta sonsuz bağlantılı), bölge sınıfları ve sınırının aşağı kapasite yoğunluğu pozitif olan açık kümeler ve normal majorantlar sınıfı (bu sınıf süreklilik modülü tipli majorantlar sınıfından çok daha geniştir) için yukarıdaki sonuçlar elde etmiştir [16-17].

1984 yılında Aliyev T.H. ve Tamrazov P.M. tarafından Aşağıdaki problemler ortaya konulmuştur:

1. (1) ve (2) eşitsizliklerinde fonksiyonun yalınkat olmamasının etkisinin incelenmesi,
2. Yukarıdaki sonuçların meromorf fonksiyonlara genelleştirilmesi.

T.H. Aliyev ve P.M. Tamrazov tarafından çok katlı meromorf fonksiyonlar için yukarıdaki problem incelenmiş ve etkin koşullar altında teoremler ispatlanmıştır. [11] de meromorf fonksiyonlar için fonksiyonun yalınkat olmaması ve sıfırlarının etkisi de düşünülerek daha kesin sonuçlar elde edilmiştir. [18,19] çalışmalarında meromorf fonksiyonlar ve normal majorantlar sınıfı için sonuçlar elde edilmiştir. Yine [20,21,22] çalışmalarında yukarıdaki sonuçlar meromorf fonksiyonlara genelleştirilmiş ve kesin sonuçlar elde edilmiştir.

BÖLÜM I

1. Temel Bilgiler

1.1 Harmonik ve Subharmonik Fonksiyonlar

Tanım 1.1.1 U kümesi $\mathbb{C}$ 'de açık bir küme olsun. $h: U \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu $h \in C^2(U)$ ve $\Delta h = 0$ özelliklerini sağlıyor ise, h, U 'da harmoniktir denir.

Tanım 1.1.2 (Harnack Uzaklığı) D kümesi $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 'da bir bölge olsun. $z, w \in D$ noktaları için z ile w arasındaki en küçük $\tau_D(z, w)$ sayısına "Harnack Uzaklığı" denir, öyleki; D 'de bulunan her pozitif h harmonik fonksiyonu için;

$$\tau_D(z, w)^{-1} h(w) \leq h(z) \leq \tau_D(z, w) h(w) \quad (1.1)$$

özelligi sağlanır.

Tanım 1.1.3 X herhangi bir topolojik uzay olsun, $u: X \rightarrow [-\infty, +\infty)$ fonksiyonu için eğer

$$\{x \in X: u(x) < \alpha, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

kümesi X 'te açıksa, u üstten yarısürekli denir.

Bu taktirde v alttan yarısürekli olması için gerek ve yeter koşul $-v$ üstten yarısürekli.

Buradan çıkarılacak sonuç u üstten yarısürekli olması için gerek ve yeterli koşul $\forall x \in X$ için

$$\lim_{y \rightarrow x} \sup u(y) \leq u(x) \quad (1.2)$$

Buradan alırız ki; u süreklidir $\Leftrightarrow u$ hem üstten hem de alttan yarısürekli.

Tanım 1.1.4 $U, \mathbb{C}$ 'de açık bir küme olsun. $u: U \rightarrow [-\infty, +\infty]$ fonksiyonu eğer üstten yarısürekli ve lokal ortalama değer eşitsizliğini sağlıyor ise, u ya subharmonik fonksiyon denir. Yani $w \in U$ noktası için öyle $\rho > 0$ vardır ki;

$$u(w) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(w + re^{it}) dt \quad 0 < r < \rho. \quad (1.3)$$

(1.3) eşitsizliğinde, eşitlik ancak u nun harmonik olması durumunda sağlanır.

Teorem 1.1.5 $U \subset \mathbb{C}$ açık kümesinde $(u_n)_{n \geq 1}$ subharmonik fonksiyonların bir dizisi olsun. Varsayalım ki, U 'da $u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \dots$. Bu taktirde, $u := \lim_{n \rightarrow \infty} u_n, U$ da subharmoniktir.

1.2 Potansiyeller

Tanım 1.2.1 (Regüler Ölçü) μ, X topolojik uzayında bir Borel ölçüsü olsun. Eğer her B Borel kümesi için aşağıdaki özellik sağlanırsa μ 'ye Regüler Ölçü denir:

" $\varepsilon > 0$ sayısı için öyle U açık ve F kapalı kümeleri vardır ki; $F \subset B \subset U$ ve $\mu(U \setminus F) < \varepsilon$ ".

Teorem 1.2.2 μ, X metrik uzayında sonlu Borel ölçüsü ise, μ aynı zamanda regülerdir.

Tanım 1.2.3 (Potansiyel) $\mu, \mathbb{C}$ de kompakt supportu ile verilmiş bir sonlu Borel ölçüsü olsun. μ 'nün potansiyel fonksiyonu $p_\mu: \mathbb{C} \rightarrow [-\infty, +\infty)$, $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$p_\mu = \int \log|z - w| d\mu(w) . \quad (1.4)$$

Teorem 1.2.4 (1.4) notasyonu ile verilmiş olan $p_\mu(z)$ fonksiyonu, $\mathbb{C}$ 'de subharmoniktir ve $\mathbb{C} \setminus \text{supp}\mu$ 'de harmoniktir. Ayrıca $z \rightarrow \infty$ için aşağıdaki doğrudur:

$$p_\mu(z) = \mu(\mathbb{C}) \log|z| + O(|z|^{-1}) . \quad (1.5)$$

Tanım 1.2.5 (Enerji) $\mu, \mathbb{C}$ 'de kompakt supportu ile verilmiş sonlu bir Borel ölçüsü olsun. μ nün enerjisi $I(\mu)$ aşağıdaki gibi verilir:

$$I(\mu) := \iint \log|z - w| d\mu(z)d\mu(w) . \quad (1.6)$$

Tanım 1.2.6 (Polar Küme) $\mathbb{C}$ 'nin bir E altkümelerini alalım. Keyfi, sıfırdan farklı, sonlu μ Borel ölçüsünün ($\mu \neq 0$) kompakt supportu $\text{supp}\mu \subset E$ olsun. Eğer $I(\mu) = -\infty$ ise, E 'ye Polar Küme denir.

Not $E \subset \mathbb{C}$ polar küme ve $S \subset \mathbb{C}$ olsun. Herhangi bir özellik, $S \setminus E$ de sağlanıyorsa, bu özellik S 'de neredeyse her yerde (nearly everywhere) sağlanıyor denir. Kısaca n.e. şeklinde gösterilir.

Tanım 1.2.7 $K \subset \mathbb{C}$ kompakt alt kümesi olsun. $P(K)$, K kümesindeki Borel olasılık ölçüleri olsun. Eğer öyle $\nu \in P(K)$ fonksiyonu için;

$$I(\nu) = \sup_{\mu \in P(K)} I(\mu) \quad (1.7)$$

ise ν ye K için bir denge ölçüsü denir.

Frostman Teoremi $K \subset \mathbb{C}$ kompakt altküme ve ν, K için bir denge ölçüsü olsun. Bu takdirde

a) $\mathbb{C}$ 'de $p_\nu \geq I(\nu)$ eşitsizliği sağlanır;

b) $K \setminus E$ 'de $p_v = I(v)$ eşitliği sağlanır. Burada E , ∂K nın bir F_σ – polar alt kümesidir.

Tanım1.2.8 $\mu \in P(K)$, $(\mu_n)_{n \geq 1}$ ise, $P(X)$ 'den alınmış bir dizisi olsun. Eğer

$$\int_X \phi d\mu_n \rightarrow \int_X \phi d\mu \quad \forall \phi \in C(X)$$

sağlanırsa, $(\mu_n)_{n \geq 1}$ dizisi, μ ölçüsüne zayıf yakınsar denir ve $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$ şeklinde gösterilir.

Lemma1.2.9 $K \subset \mathbb{C}$ kompakt altküme olsun. Eğer $P(K)$ da $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$ ise,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup I(\mu_n) \leq I(\mu) .$$

Tanım1.2.10 X bir topolojik uzay ve $u: X \rightarrow [-\infty, +\infty)$ fonksiyonu X 'de üstten lokal sınırlı bir fonksiyon olsun. u nun üstten yarısürekli regülarizasyonunu u^* ile göstereceğiz; öyleki, $x \in X$ için

$$u^*(x) := \lim_{y \rightarrow x} \sup u(y) = \inf_N (\sup_{y \in N} u(y)) . \quad (1.9)$$

Burada infimum , x 'in tüm N komşulukları üzerinden alınır.

Teorem 1.2.11 $(u_n)_{n \geq 1}$, U açık kümesinde subharmonik fonksiyonlar dizisi olsun ve varsayalım ki, $\sup_n u_n$, U 'da yukarıdan lokal sınırlıdır. Eğer $u = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup u_n$ ise;

a) u^* , U 'da subharmoniktir.

b) U 'da, $u^* = u$ eşitliği polar kümeler dışında (n.e.) sağlanır.

c) Eğer $\Phi: U \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve U da $\Phi \geq u$ eşitsizliği sağlanıyor ise, $n \rightarrow \infty$ için $\max_n \{u_n, \Phi\}$, u fonksiyonuna lokal düzgün yakınsar.

Lemma 1.2.12 E kompakt bir polar küme olsun ve F , E 'den ayrık bir küme olsun. Bu taktirde $\mathbb{C}$ 'de kompakt supportlu öyle μ ölçüsü vardır ki; $E = \{z \in \mathbb{C} : p_\mu(z) = -\infty\}$ ve $\text{supp} \mu \cap F = \emptyset$.

Teorem 1.2.13 $K \subset \mathbb{C}$ kompakt, non-polar bir altküme olsun. Bu taktirde K 'nın denge ölçüsü tektir ve $\text{supp} v \subset \partial_e K$ dır. ($\partial_e K$ burda K nın dışıdır).

Teorem 1.2.14 f, D bölgesinde bir holomorfik fonksiyon olsun, öyleki; $f \not\equiv 0$. Bu taktirde $\Delta(\log|f|)$, f in sıfırlarında sayılan katlılığa göre 2π yoğunluktan oluşur.

Tanım 1.2.15 $S \subset \mathbb{C}$ bir küme ve $\xi \in \mathbb{C}$ olsun. Bu taktirde, eğer ξ 'nin bir komşuluğunda tanımlanmış, her subharmonik u fonksiyonu için

$$\lim_{z \rightarrow \xi} \sup_{z \in S \setminus \{\xi\}} u(z) = u(\xi) \quad (1.10)$$

özelliği sağlanır ise, S ye, ξ 'de dağınık değildir denir. Aksi taktirde S 'ye ξ 'de dağınıktır denir.

Teorem 1.2.16 Bir F_σ polar kümesi $\mathbb{C}$ 'nin tüm noktalarında dağınıktır.

Teorem 1.2.17 X , kompakt bir metrik uzay olsun. Bu taktirde $P(X)$ 'in her bir $(\mu_n)_{n \geq 1}$ dizisi bir $\mu \in P(X)$ ölçüsüne zayıf yakınsar.

Teorem 1.2.18 X ve Y kompakt metrik uzaylar ve $T: X \rightarrow Y$ örten, sürekli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde verilen $\nu \in P(Y)$ için öyle $\mu \in P(X)$ vardır ki; $\mu T^{-1} = \nu$ için aşağıdaki doğrudur:

$$\int_X \phi(T(x)) d\mu(x) = \int_Y \phi(y) d\nu(y) \quad \phi \in C(Y) . \quad (1.11)$$

1.3 Green Fonksiyonları

Tanım 1.3.1 $D, \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 'da bir bölge, $\xi_0 \in \partial D$ olsun. N, ξ_0 'ın açık bir komşuluğu olmak üzere $D \cap N$ 'de tanımlanan, $D \cap N$ de, $b < 0$ ve $\lim_{z \rightarrow \xi_0} b(z) = 0$ koşullarını sağlayan ve ξ_0 noktasında subharmonik b fonksiyona bariyer denir.

Bariyerin mevcut olduğu bir sınır noktasına regüler nokta denir. Aksi taktirde bu nokta irregülerdir. Eğer $\forall \xi \in \partial D$ regüler ise, D 'ye regüler bölge denir.

Teorem 1.3.2 $D, \mathbb{C}_\infty$ 'da bir alt bölge, $\xi_0 \in \partial D$ olsun. $K = \mathbb{C}_\infty \setminus D$ alalım. Bu taktirde aşağıdakiler denktir.

a) ξ_0, D 'nin bir regüler sınır noktasıdır.

b) $K = \mathbb{C}_\infty \setminus D$ kümesi, ξ_0 'da dağınık değildir.

Eğer $\infty \in D$ ise, aşağıdaki özellik de denk olur.

c) K , polar olmayan küme, ν ölçüsü, K için bir denge ölçüsü olmak üzere, $p_\nu(\xi_0) = I(\nu)$.

Tanım 1.3.3 $D, \mathbb{C}_\infty$ 'dan seçilmiş bir küme olsun. Keyfi $w \in D$ için aşağıdaki özellikleri sağlayan $g_D: D \times D \rightarrow (-\infty, +\infty]$ fonksiyonuna D için bir Green fonksiyonu denir:

a) $g_D(\cdot, w), D \setminus \{w\}$ 'da harmoniktir ve w 'nın her bir komşuluğunun dışında sınırlıdır;

b) $g_D(w, w) = \infty$ dur ve $z \rightarrow w$ için

$$g_D(z, w) = \begin{cases} \log|z| & w = \infty \\ \log|z - w| & w \neq \infty \end{cases} ;$$

c) $\xi \in \partial D$ n.e. için $z \rightarrow \xi$ iken $g_D(z, w) \rightarrow 0$.

Teorem 1.3.4 Eğer $D, \mathbb{C}_\infty$ 'da bir bölge ve ∂D polar değil ise, D için tek bir g_D Green fonksiyonu vardır.

Teorem 1.3.5 (Subordination) D_1 ve $D_2, \mathbb{C}_\infty$ 'da sınırları polar olmayan bölgeler, $f: D_1 \rightarrow D_2$ meromorfik bir fonksiyon olsun. Bu taktirde

$$g_{D_1}(f(z), f(w)) \geq g_{D_1}(z, w), \quad z, w \in D_1$$

Eşitlik durumu $f: D_1 \rightarrow D_2$ bir konform tasvir olduğunda mümkündür.

Teorem 1.3.6 $D, \mathbb{C}_\infty$ 'da sınırı polar olmayan bir bölge, $w \in D, \xi \in \partial D$ olsun. Bu taktirde $\lim_{z \rightarrow \xi} g_D(z, w) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul ξ 'nin D 'nin regüler bir sınır noktası olmasıdır.

BÖLÜM II

2. Kapasite

2.1 Küme Fonksiyonu Gibi Kapasite

Tanım 2.1.1 $E \subset \mathbb{C}$ kümesinin logaritmik kapasitesi;

$$c(E) = \sup_{\mu} e^{I(\mu)}$$

olarak verilir. Burada, supremum $\mathbb{C}$ 'deki tüm μ Borel olasılık ölçüleri üzerinden alınır, öyleki; μ 'nün kompakt supportu, $\text{supp } \mu \subset E$. ν denge ölçüsü ile verilen K kompakt kümesi için

$$c(K) = e^{I(\nu)}$$

eşitliği doğrudur.

$e^{-\infty} = 0$ olduğundan dolayı, eğer E kümesi polar ise, $c(E) = 0$ elde edilir. Logaritmik kapasite, kompleks analizde birçok avantaj sağlamaktadır.

Kapasitenin bazı temel özelliklerini verelim:

Teorem 2.1.2 a) Eğer $E_1 \subset E_2$ ise, $c(E_1) \leq c(E_2)$;

b) Eğer $E \subset \mathbb{C}$ ise, $c(E) = \sup \{c(K) : \text{kompakt } K \subset E\}$;

c) Eğer $E \subset \mathbb{C}$ ise, $c(\alpha E + \beta) = |\alpha|c(E)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$;

d) Eğer $K \subset \mathbb{C}$ kompakt ise, $c(K) = c(\partial_e K)$.

İspat a ve b kapasitenin tanımından direkt olarak alınır.

c) $T: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $T(z) = \alpha z + \beta$ olacak şekilde bir dönüşüm olsun. Bu taktirde $\text{supp } \mu \subset E$ olması için gerek ve yeter koşul

$$\text{supp } \mu T^{-1} \subset \alpha E + \beta \quad \text{ve} \quad I(\mu T^{-1}) = I(\mu) + \log|\alpha|$$

özelliklerinin sağlanmasıdır.

d) Teorem 1.2.13 gereği, polar olmayan $K \subset \mathbb{C}$ kompakt kümesinin denge ölçüsü tektir ve $\text{supp } \nu \subset \partial_e K$ dır. a) gereği

$$c(K) \leq c(\partial_e K)$$

olduğu açıktır. ν, K 'nın denge ölçüsü olduğunu düşünürsek, yine Tanım 2.1.1 gereği;

$$c(K) = c(\partial_e K)$$

elde edilir. $\square$

Bu teoremden de görürüz ki; kapasite fonksiyonu, monoton bir küme fonksiyonudur. Doğal olarak şu soru akla gelir: Monoton artan veya azalan bir küme dizisi için bu fonksiyon sürekli midir?

Teorem 2.1.3 a) Eğer $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \dots$, $\mathbb{C}$ 'nin kompakt altkümeleri ve $K = \bigcap_n K_n$ ise,

$$c(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} c(K_n).$$

b) Eğer $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \dots$, $\mathbb{C}$ 'nin Borel altkümeleri ve $B = \bigcup_n B_n$ ise,

$$c(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} c(B_n).$$

İspat a) Teorem 2.1.2 a) dan alınır ki;

$$c(K_1) \geq c(K_2) \geq c(K_3) \geq \dots \geq c(K_n). \quad (2.1)$$

Öte yandan, $\forall n \geq 1$ için, v_n , K_n in denge ölçüsü olsun. Bu taktirde $\forall n$ için $v_n \in P(K_n)$. Böylece Teorem 1.2.17 gereği öyle bir (v_{n_k}) altdizisi varki; $v \in P(K_1)$ 'e zayıf yakınsar. Lemma 1.2.9 'u uygulanırsa,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup I(v_{n_k}) \leq I(v).$$

Bundan başka, $\forall n$ için $\text{supp} v_n \subset K_n$ olduğundan, $\text{supp} v_n \subset K$ ve buradan, $e^{I(v)} \leq c(K)$ elde edilir. Dolayısıyla

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup c(K_{n_k}) \leq c(K)$$

eşitsizliği sağlanır ve bu eşitsizlik (2.1) ile birleştirilirse istenilen alınır.

b) Yine Teorem 2.1.2 a) 'dan alınır ki;

$$c(B_1) \leq c(B_2) \leq c(B_3) \leq \dots \leq c(B_n) \quad (2.2)$$

Öte yandan, $K \subset B$, kompakt altkümeleri olsun ve v , K için bir denge ölçüsü olsun. $n \rightarrow \infty$ için $v(B_n \cap K) \rightarrow v(K) = 1$ olduğundan, $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \dots$ ve $v(K_n) \rightarrow 1$ olacak şekilde $K_n \subset B_n \cap K$ kompakt kümelerini oluşturmak için Teorem 1.2.2 kullanılabilir. Yeterince büyük n ler için alınır ki; $v(K_n) > 0$ ve bu n ler için,

$$\mu_n = \frac{v|_{K_n}}{v(K_n)}$$

tanımlanır. Bu taktirde μ_n , K_n 'de Borel olasılık ölçüsü ve

$$I(\mu_n) = \frac{1}{v(K_n)^2} \int_K \int_K \log|z - w| 1_{K_n(z)} 1_{K_n(w)} dv(z) dv(w).$$

$n \rightarrow \infty$ için alınır ki; $v(K_n) \rightarrow 1$ ve hemen hemen her yerde $1_{K_n} \nearrow 1_K$. Bu takdirde,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(\mu_n) = \int_K \int_K \log|z - w| dv(z) dv(w) = I(v)$$

her bir μ_n için B_n 'lerin bir alt kümesi, μ_n 'in kompakt supportu ise, $c(B_n) \geq e^{I(\mu_n)}$ eşitsizliği sağlanır ve buradan,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf c(B_n) \geq c(K).$$

Nihayet, K, B 'nin keyfi bir altkümesi olduğundan 1.1.2. Teorem b)-den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf c(B_n) \geq c(B)$$

eşitsizliği alınır ve bunu da (2.2) ile birleştirirsek istilen alınır. $\square$

Teorem 2.1.3 a), genel Borel kümeleri için yanlıştır. Hatta bu kümeler sınırlı, açık ise de yanlıştır. Mesela

$$U_n := \{ z \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Re}(z) < 1, 0 < \operatorname{Im}(z) < \frac{1}{n} \quad n \geq 1 \}$$

dizisini göz önüne alalım. Açıktır ki; $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \dots$ ve $\bigcap_n U_n = \emptyset$. Ancak yine her bir U_n kümesi için $c(U_n) \geq c([0,1])$ olur. Bununla birlikte gösterilebilir ki; verilmiş sınırlı bir B Borel kümesi için,

$$c(B) = \inf \{ c(U) : \text{open } U \supset B \}. \quad (2.3)$$

Bu sonuç Choquet 'ten dolayı, Teorem 2.1.2 b)-nin benzeri olarak görülmektedir. Ancak gerçekte daha derindir.

Kapasite ölçü gibi toplamsal bir küme fonksiyonu değildir. Mesela birim disk $\overline{\Delta}(0,1)$, sonlu kapasitelidir, $[0,1]$ birim aralığının sonsuz tane, ayrık çevrimlerini içerir ve polar olmadığından, mutlak pozitif bir kapasiteye sahiptir. Bu da böylece kümenin kapasitesi ile bileşenlerinin kapasitesi arasındaki bir ilişki olarak karşımıza çıkar.

Teorem 2.1.4 (B_n) , sonlu veya sonsuz $\mathbb{C}$ 'nin Borel altkümelerinin bir dizisi, $B = \bigcup_n B_n$ ve $d > 0$ olsun.

a) Eğer $\operatorname{diam}(B) \leq d$ ise, $c(B) \leq d$ ve

$$\frac{1}{\log(d/c(B))} \leq \sum_n \frac{1}{\log(d/c(B_n))} \quad (2.4)$$

dir.

b) Eğer $\text{dist}(B_j, B_k) \geq d$, $j \neq k$ ise,

$$\frac{1}{\log^+(d/c(B))} \geq \sum_n \frac{1}{\log^+(d/c(B_n))} \quad (2.5)$$

dir.

Burada ∞ olarak; $\frac{1}{0}$, 0 olarak da; $\frac{1}{\infty}$ düşünülecektir.

İspat a) Eğer $\text{diam}(B) \leq d$ ise, kompakt supportu B 'de olan keyfi μ , olasılık ölçüsü için,

$$I(\mu) = \iint_{B \times B} \log|z - w| d\mu(z) d\mu(w) \leq \iint_{B \times B} (\log d) d\mu(z) d\mu(w) = \log d.$$

ve dolayısıyla $c(B) \leq d$ olur.

(2.4) eşitsizliği sadece iki B_1, B_2 kümeleri için gösterilmesi yeterlidir. n tane küme için indiksiyon kullanılabilir ve sonsuz sayıda küme için sonuca Teorem 2.1.3b)-yi kullanarak gidilebilir. Varsayabiliriz ki; $d = 1$ dir. $K \subset B$ kompakt bir küme olsun, $\varepsilon > 0$ olsun. Amacımız,

$$\frac{1-\varepsilon}{\log(1/c(K))} \leq \frac{1}{\log(1/c(B_1))} + \frac{1}{\log(1/c(B_2))} \quad (2.6)$$

olduğunu göstermektir. Bu eşitsizlik $c(K) = 0$ durumunda açıktır. Bu yüzden varsayalım ki; $c(K) > 0$ dır. Bu durumda $I(v) > -\infty$ öyle ki, v , K için bir denge ölçüsüdür.

$$v(B_1 \cap K) + v(B_2 \cap K) \geq v(K) = 1$$

olduğundan Teorem 1.2.2-den, K_j ($j = 1, 2$) kompakt kümeleri için $K_j \subset B_j \cap K$ öyleki,

$$v(K_1) + v(K_2) > 1 - \varepsilon$$

sağlanır. Burada $j=1, 2$ için v_j, K_j için bir denge ölçüsü olsun. Bu taktirde

$$I(v) \leq \int_{K_j} p_v dv_j = \int_K p_{v_j} dv \leq \int_{K_j} p_{v_j} dv = I(v) v(K_j)$$

elde edilir. Burada ilk bağlantı $\mathbb{C}$ 'de $p(v) \geq I(v)$ sağlanmasından, ikincisi Fubini Teoremi'nden, üçüncüsü K 'da $p_{v_j} \leq 0$ ($\text{diam} K \leq d = 1$ olduğu gözönüne alınır) olmasından ve nihayet dördüncüsü K_j 'de $p_{v_j} \stackrel{n.e.}{=} I(v_j)$ olmasından alınır.

Şimdi $I(v_j) = \log c(K) \leq 0$, $\text{diam} K \leq d = 1$ olduğundan ve benzer şekilde $I(v_j)$ için alırız ki;

$$\frac{v(K_j)}{\log(1/c(K))} \leq \frac{1}{\log(1/c(K_j))} \leq \frac{1}{\log(1/c(B_j))} \quad j = 1, 2$$

j , üzere toplam alırsak, (2.6) eşitsizliği sağlanır. Nihayet $\varepsilon \rightarrow 0$ olursa, (2.6) 'da, her bir kompakt $K \subset B$ kümesi üzere supremum alırsak, (2.4) eşitsizliği elde edilir.

b) a)-daki gibi, B_1, B_2 gibi iki küme ve $d = 1$ düşünülebilir. K_1, K_2 sırasıyla B_1, B_2 'nin kompakt altkümeleri olsun. O zaman amacımız aşağıdaki eşitsizliği göstermektir:

$$\frac{1}{\log^+(1/c(B))} \geq \frac{1}{\log^+(1/c(K_1))} + \frac{1}{\log^+(1/c(K_2))}. \quad (2.7)$$

$0 < c(K_j) \leq c(B) < 1$ varsayabiliriz. Aksi durumda her durumda (2.7) eşitsizliği sağlanır. $j = 1, 2$, v_j , her bir K_j için denge ölçüsü olsun ve $\mu = (1 - t)v_1 + tv_2$ yazalım, öyle ki

$$t = \frac{I(v_1)}{I(v_1) + I(v_2)}.$$

$-\infty < I(v_j) < 0$ olduğundan $0 < t < 1$ olur ve dolayısıyla μ olasılık ölçüsüdür, öyle ki,

$$I(\mu) \geq (1 - t)^2 I(v_1) + t^2 I(v_2) = \frac{I(v_1)I(v_2)}{I(v_1) + I(v_2)}.$$

olur. Şimdi μ , $K_1 \cup K_2 \subset B$ kümesinde support edilsin. Bu taktirde $I(\mu) \leq \log c(B)$ ve dolayısıyla

$$\log c(B) \geq \frac{\log c(K_1) \log c(K_2)}{\log c(K_1) + \log c(K_2)}.$$

$\log c(K_j)$ ve $\log c(B)$ negatif olduğundan eşitsizlik (2.7) eşitsizliğine döner. Nihayet (2.7)'de, her bir kompakt $K_1 \subset B_1$ ve $K_2 \subset B_2$ kümeleri üzerinden supremum alınır (2.5) elde edilir.

2.2 Kapasite Hesaplama

Tanım 2.1.1 kapasitenin teorik özelliklerini ortaya çıkarmak için iyi bir tanım olmasına rağmen bazı özel kümelerin kapasitesini hesaplamada fazla uygun değildir. Basit kümeler için (mesela bir disk) bazı çalışmalar gereklidir ve çoğu kümeler için, bu tanımı uygulamak neredeyse imkansızdır. En azından kompakt kümeler için, daha kolay alternatifler vardır. Bu alternatifler, kapasite ile Green fonksiyonları arasındaki aşağıdaki ilişkiye dayanmaktadır.

Teorem 2.2.1 K polar olmayan kompakt bir küme olsun. D , $\mathbb{C}_\infty \setminus K$ 'nin, ∞ 'u içeren bileşeni olsun. Bu taktirde $z \rightarrow \infty$ için aşağıdaki eşitlik doğrudur:

$$g_D(z, \infty) = \log|z| - \log c(K) + o(1) \quad (2.8)$$

İspat Varsayalım ki, v , K için bir denge ölçüsüdür. g_D fonksiyonunu, Teorem 1.3.4'deki gibi oluşturursak, $z \in D \setminus \{\infty\}$ için

$$g_D(z, \infty) = p_v(z) - I(v) = p_v(z) - \log c(K)$$

Eşitliğini alırız. Teorem 1.2.4-den biliyoruz ki; $z \rightarrow \infty$ için,

$$p_v(z) = \log|z| + o(1)$$

dir. Bu iki sonuç birleştirilirse, istenilen alınır. $\square$

Bu teoremden aşağıdaki sonucu alırız:

Sonuç 2.2.2 Eğer $w \in \mathbb{C}$ ve $r > 0$ ise, $c(\bar{\Delta}(w, r)) = r$.

İspat $D = \mathbb{C}_\infty \setminus \bar{\Delta}(w, r)$ alalım ve buradan elde ederiz ki; $z \rightarrow \infty$ için

$$g_D(z, \infty) = \log \left| \frac{z-w}{r} \right| = \log|z| - \log r + o(1).$$

Bu eşitsizliği (2.8) ile karşılaştıırırsak, $c(\bar{\Delta}(w, r)) = r$ eşitliği alınır. $\square$

Green fonksiyonları için olan "subordination kuralı", kapasite için çok kullanışlı bir eşitsizlik doğurur.

Teorem 2.2.3 K_1 ve K_2 $\mathbb{C}$ 'nin kompakt altkümeleri, D_1 ve D_2 de sırasıyla $\mathbb{C}_\infty \setminus K_1$ ve $\mathbb{C}_\infty \setminus K_2$ kümelerinin ∞ 'u içeren bileşenleri olsun. Öyle bir $f: D_1 \rightarrow D_2$ fonksiyonu vardır ki; $z \rightarrow \infty$ için,

$$f(z) = z + O(1) \quad (2.9)$$

ise, $c(K_2) \leq c(K_1)$. Burada eşitlik hali, $f: D_1 \rightarrow D_2$ fonksiyonunun konform olması durumunda sağlanır.

İspat Eğer K_2 polar ise, $c(K_2) = 0$. Eşitsizlik açıktır. Böylece K_2 yi polar olmayan küme olarak varsayabiliriz.

Şimdi varsayalım ki; K_1 de polar olmayan kümedir. Bu taktirde, g_{D_1} ve g_{D_2} Green fonksiyonları mevcuttur ve Teorem 1.3.5-den alıriz ki; $z \in D_1$ için,

$$g_{D_2}(f(z), \infty) \geq g_{D_1}(z, \infty) .$$

Teorem 2.2.1-den, $z \rightarrow \infty$ için

$$g_{D_1}(z, \infty) = \log|z| - \log c(K_1) + o(1)$$

ve (2.9) eşitliğinden

$$\begin{aligned} g_{D_2}(f(z), \infty) &= \log|f(z)| - \log c(K_2) + o(1) \\ &= \log|z| - \log c(K_2) + o(1) \end{aligned}$$

alınır. Bunları birleştirilirse, bu durumda elde ederiz ki; $c(K_2) \leq c(K_1)$. Genel bir K_1 için $\varepsilon > 0$ alalım ve

$$K_1^\varepsilon = \{z: \text{dist}(z, K_1) \leq \varepsilon\}$$

kümesini kuralım. Bu küme polar değildir. Böylece $c(K_2) \leq c(K_1^\varepsilon)$ sağlanmış olur. $\varepsilon \rightarrow 0$ olması ve Teorem 2.1.3 a) uygulanmasıyla, yine $c(K_2) \leq c(K_1)$ elde edilir.

Son olarak, eğer $f: D_1 \rightarrow D_2$ bir konform tasvir ise, benzer aşamaları f^{-1} fonksiyonuna uygularsak, $c(K_1) \leq c(K_2)$ eşitsizliğini elde ederiz. Böylece eşitlik elde edilmiş olur. $\square$

Bunu kullanarak aralığın kapasitesi hesaplanabiliriz.

Sonuç 2.2.4 Eğer $a \leq b$ ise, $c([a, b]) = \frac{b-a}{4}$.

İspat $f(z) = z + \frac{1}{z}$ fonksiyonu, $\mathbb{C}_\infty \setminus \bar{\Delta}(0,1)$ 'i konform olarak $\mathbb{C} \setminus [-2,2]$ 'ye tasvir eder ve (2.9) 'u sağlar. Teorem 1.2.3 gereği ;

$$c([-2,2]) = c(\bar{\Delta}(0,1)) = 1 .$$

Genel, a, b için sonuç, bu dönüşüm ve ölçümden çıkar. $\square$

Prensip olarak aynı teknik, keyfi tek noktadan daha fazla nokta içeren kompakt, bağlantılı K kümesi için de geçerlidir. Riemann tasvir teoremi ile, $\mathbb{C}_\infty \setminus K$ kümesi, birim diske konform olarak tasvir edilebilir ve uygun bir Möbius transformasyonu, $r > 0$ ve (2.9) 'u sağlayan bir $f: \mathbb{C}_\infty \setminus K \rightarrow \mathbb{C}_\infty \setminus \bar{\Delta}(0,r)$ konform tasviri bulabiliriz. K 'nın kapasitesi aşağıdaki şekilde verilir:

$$c(K) = c(\bar{\Delta}(0, r)) = r.$$

Kapasite, polinomların ters görüntüsü altında yine benzer şekilde davranır.

Teorem 2.2.5 K , kompakt bir küme ve $q(z) = \sum_{j=0}^d a_j z^j$ olsun, öyle ki, $a_d \neq 0$. Bu taktirde,

$$c(q^{-1}(K)) = \left(\frac{c(K)}{|a_d|}\right)^{1/d}$$

eşitliği sağlanır.

İspat D ve D' sırasıyla $\mathbb{C}_\infty \setminus K$ ve $\mathbb{C}_\infty \setminus q^{-1}(K)$ kümelerinin ∞ 'u içeren bileşenleri olsun. Bu taktirde $q^{-1}(D') = D$ ve $q(\partial D') = \partial D$ eşitlikleri sağlanır. Varsayalım ki; D regüler bir bölgedir. Bu taktirde Teorem 1.3.6 gereği,

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \xi \\ z \in D'}} g_D(q(z), \infty) = 0, \quad \xi \in \partial D'.$$

$g_D(q(z), \infty)$ fonksiyonu $D' \setminus \{\infty\}$ 'da harmoniktir ve $z \rightarrow \infty$ iken,

$$g_D(q(z), \infty) = \log|q(z)| + O(1) = d \log|z| + O(1).$$

Green fonksiyonlarının tekliğinden alırız ki;

$$g_D(q(z), \infty) = d g_{D'}(z, \infty), \quad z \in D'.$$

Teorem 2.2.1-den biliyoruz ki, $z \rightarrow \infty$ iken,

$$\begin{aligned} g_D(q(z), \infty) &= \log|q(z)| - \log|c(K)| + o(1) \\ &= d \log|z| + \log|a_d| - \log c(K) + o(1) \end{aligned}$$

ve

$$g_{D'}(z, \infty) = \log|z| - \log c(q^{-1}(K)) + o(1).$$

Bunları toparlarsak,

$$d \log c(q^{-1}(K)) = \log c(K) - \log|a_d|$$

eşitliğini elde ederiz. Bu da, belirtilen durumdaki sonucu verir.

Genel bir K için $\varepsilon > 0$ alalım

$$K^\varepsilon = \{z: \text{dist}(z, K) \leq \varepsilon\}$$

kümesini kuralım. K^ε 'nun tek noktalı bileşeni olmadığından buna karşılık gelen D_ε bölgesi regülerdir ve bu yüzden daha önceden ispatlandığı gibi

$$c(q^{-1}(K^\varepsilon)) = \left(\frac{c(K^\varepsilon)}{|a_d|}\right)^{1/d} .$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ iken ve Teorem 2.1.3 a) gereği sonuç aşıktır. $\square$

Sonuç 2.2.6 Eğer $0 \leq a \leq b$ ise, $c([-b, -a] \cup [a, b]) = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{2}$.

Ispat $q(z) = z^2$ olsun. Bu taktirde,

$$\begin{aligned} c([-b, -a] \cup [a, b]) &= c(q^{-1}([a^2, b^2])) \\ &= c([a^2, b^2])^{1/2} = \left(\frac{b^2 - a^2}{4}\right)^{1/2} = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{2} . \square \end{aligned}$$

2.3 Kapasitenin Tahmini

Basit kümelerin, (mesela kare gibi) kapasitelerini hesaplamak bazı zorluklar gerektirir. Daha karışık kümelerin ise, genelde kapasitelerini hesaplamak imkansızdır. Bu taktirde tahminlere yer vermeliyiz.

Birçok tahmin aşağıdaki temel sonuca dayanır.

Teorem 2.3.1 $K \subset \mathbb{C}$ kompakt bir küme, $T: K \rightarrow \mathbb{C}$, bir dönüşüm olsun ve

$$|T(z) - T(w)| < A|z - w|^\alpha \quad z, w \in K \quad (2.10)$$

olsun. Burada A ve α pozitif sabittirler. Bu taktirde aşağıdaki doğrudur:

$$c(T(K)) \leq A[c(K)]^\alpha .$$

İspat $v, T(K)$ kompakt kümesi için bir denge ölçüsü olsun. Teorem 1.2.18 gereği K 'da öyle bir μ Borel olasılık ölçüsü vardır ki; $\mu T^{-1} = v$. Bu taktirde

$$\begin{aligned} I(v) &= \iint_{K \times K} \log|T(z) - T(w)| d\mu(z)d\mu(w) \\ &\leq \iint_{K \times K} \log(A|z - w|^\alpha) d\mu(z)d\mu(w) \\ &= \log A + \alpha I(\mu) . \end{aligned}$$

Böylece kapasitenin tanımından alınır ki;

$$c(T(K)) = e^{I(v)} \leq A e^{\alpha I(\mu)} \leq A[c(K)]^\alpha .$$

Bu da istenen sonuçtur. $\square$

Bu teoremi Sonuç 2.2.4 ile birleştirirsek kapasite için $\frac{1}{4}$ -tahmin sayısı elde edilir.

Teorem 2.3.2 Kompakt $K \subset \mathbb{C}$ olsun.

a) Eğer K , bağlantılı ve d çapına sahip ise,

$$c(K) \geq \frac{d}{4} ;$$

b) Eğer K , düzeltilebilir bir eğri ve l uzunluğuna sahip ise,

$$c(K) \leq \frac{l}{4} ;$$

c) Eğer K , reel eksenin bir altkümesi ve Lebesgue ölçüsü m ise,

$$c(K) \geq \frac{m}{4} ;$$

d) Eğer K , birim dairenin bir altkümesi ve yay uzunluğu ölçüsü a ise;

$$c(K) \geq \sin \frac{a}{4}.$$

Doğru parçası örneği (d)-deki gibi veya dairesel eğri parçası) bu eşitsizliklerin ne denli kesin olduğunu gösterir.

İspat a) Rotasyon ve dönüşüm yaparak, varsayabiliriz ki; $0, d \in K$ dır. $T: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ reel eksen üzerine ortogonal bir projeksiyon olsun. Bu taktirde, $T(K)$ bir bağlantılı küme, 0 ve d noktalarını içerir dolayısıyla $[0, d]$ 'yi de içerir ve böylece

$$c(K) \geq c([0, d]) = \frac{d}{4}.$$

Öte yandan, T , (2.10)-u sağlar, $A = \alpha = 1$ ile birlikte Teorem 2.3.1 gereği,

$$c(T(K)) \leq c(K).$$

Bu da istenilendir.

b) $T: [0, l] \rightarrow K$, K 'nın yay uzunluğu parametrizasyonu olsun. Bu taktirde, $A = \alpha = 1$ iken T , (1.10)-u sağlar. Böylece Teorem 2.3.1 gereği,

$$c(K) \leq c([0, l]) = \frac{l}{4}.$$

c) $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $T(x) = \mu(K \cap (-\infty, x])$ şeklinde tanımlansın. $T(K) = [0, m]$ ve bundan dolayı,

$$c(T(K)) \leq c([0, m]) = \frac{m}{4}.$$

Yine T , (2.10)'u $A = \alpha = 1$ olması durumunda sağlar ve sonuç a)-daki gibi açıktır.

d) Eğer K , bir yarım dairenin içinde ise, c)-dekine benzer bir argümanı kullanabiliriz.

$f_1: \mathbb{C}_\infty \setminus K \rightarrow \mathbb{C}$ tanımlayalım, öyle ki;

$$f = \frac{1}{4} \int_K \frac{z+\xi}{z-\xi} |d\xi|.$$

Buradan $f_1, f_1(\infty) = \frac{a}{4}$ ve $f_1(0) = -\frac{a}{4}$ olmak üzere $\mathbb{C}_\infty \setminus K$ 'da holomorfik olur. Yine

$$\operatorname{Re} f_1(z) = \frac{1}{4} \int_K \frac{|z|^2-1}{|z-\xi|^2} |d\xi| = -\frac{\pi}{2} \int_K p(z, \xi) |d\xi|.$$

Buradan alırız ki, $z \in \mathbb{C}_\infty \setminus K$ için

$$-\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Re} f_1(z) \leq \frac{\pi}{2}. \quad (2.11)$$

$f_2: \mathbb{C}_\infty \setminus K \rightarrow \mathbb{C}$ tanımlayalım, öyle ki;

$$f_2(z) = \frac{e^{if_1(z)} - e^{-i\frac{a}{4}}}{e^{if_1(z)} + e^{i\frac{a}{4}}}.$$

Burada, $f_2, f_2(\infty) = e^{-i\frac{a}{4}} \sin \frac{a}{4}, f_2(0) = 0$ olmak üzere $\mathbb{C}_\infty \setminus K$ 'da holomorfik olur. Yine $z \in \mathbb{C}_\infty \setminus K$ için $|f(z)| \leq 1$ 'den (2.11) sağlanır ve Schwartz Lemma'sını kullanarak alırsız ki;

$$\left| \frac{f(z)}{z} \right| < 1, \quad z \in \mathbb{C}_\infty \setminus K.$$

Nihayet $f_3: \mathbb{C}_\infty \setminus K \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ tanımlayalım öyleki;

$$f_3(z) = f_2(\infty) \frac{z}{f_2(z)},$$

buradan, $f_3, \mathbb{C}_\infty \setminus K$ 'da meromorfik olur, öyle ki; $z \rightarrow \infty$ iken $f_3 = z + O(1)$. Bu taktirde,

$$|f_3(z)| > |f_2(z)| = \sin \frac{a}{4}, \quad z \in \mathbb{C}_\infty \setminus K.$$

Teorem 1.2.3-den alırsız ki; $c(K) \geq \sin \frac{a}{4}$. Bu da istenendir. $\square$

Teorem 2.3.3 (Kobe Bir-Çeyrek) Eğer f fonksiyonu, $f(0) = 0$ ve $f'(0) = 1$ olmak üzere, $\Delta(0,1)$ 'de bire bir, holomorf bir fonksiyon ise,

$$f(\Delta(0,1)) \supset \Delta(0, \frac{1}{4})$$

dir.

Burada $f(\Delta(0,1))$, merkezi orijinde olan bazı diskleri içerir. Bu da açık tasvir teoreminin bir sonucudur. Kobe Teoremi, bu diskin, yarıçapının en az $\frac{1}{4}$ olduğunu göstermektedir. $f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ fonksiyonundan da görüldüğü gibi, $\frac{1}{4}$ -sabit kesindir.

İspat K , kompakt kümesi şöyle verilsin;

$$K = \{z \in \mathbb{C}: \frac{1}{z} \notin f(\Delta(0,1))\}.$$

$f_1: \mathbb{C}_\infty \setminus \bar{\Delta}(0,1) \rightarrow \mathbb{C}_\infty \setminus K$ şöyle tanımlayalım:

$$f_1(z) = \frac{1}{f(1/z)}.$$

Bu takdirde f_1 , konform homeomorfizmdir ve $z \rightarrow \infty$ iken $f_1(z) = z + O(1)$ dir. Böylece Teorem 2.2.3 gereği;

$$c(K) = c(\bar{\Delta}(0,1)) = 1 .$$

Yine f_1 , $\mathbb{C}_\infty \setminus K$ 'dan $\mathbb{C}_\infty \setminus \bar{\Delta}(0,1)$ 'ya homeomorfiktir. Burada $\mathbb{C}_\infty \setminus K$ basit bağlantılıdır ve böylece K basit bağlantılıdır. Böylece Teorem 2.3.2 a) gereği;

$$diam(K) \leq 4c(K) = 4 .$$

$0 \in K$ iken, elde edilir ki; $K \subset \bar{\Delta}(0,4)$ dir. Buda sonucu verir. $\square$

Teorem 2.1.4 de görüldüğü gibi, kapasite tanımının kolay bir sonucu olarak, herhangi bir kompakt K kümesi için, $c(K) \leq diam(K)$ dir. Ama gerçekte bu geliştirilebilir.

Teorem 2.3.4 Eğer $K \subset \mathbb{C}$ kümesinin çapı d ise ,

$$c(K) \leq d/2 .$$

Disk için verilen örnekte, kesin eşitsizlik olduğu alınır.

İspat K yerine, onun konveks kabuğunu alalım. Bu kapasiteyi yükseltir ama diametreyi (çapı) değiştirmez. K 'yı konveks varsayabiliriz. Ve yine K 'yı tek noktalıdan daha çok elemanlı varsayabiliriz. Böylece, Riemann Dönüşüm Teoremi gereği, öyle $f(\infty) = \infty$ ile birlikte, konform $f: \mathbb{C}_\infty \setminus K \rightarrow \mathbb{C}_\infty \setminus \bar{\Delta}(0,1)$ fonksiyonu bulunur. $u: \mathbb{C}_\infty \setminus K \rightarrow [-\infty, \infty]$ şöyle tanımlayalım:

$$u(z) = \log \left| \frac{z - f^{-1}(-f(z))}{d} \right| - g_{\mathbb{C}_\infty \setminus K}(z, \infty)$$

Buradan, u , $\mathbb{C} \setminus K$ da subharmoniktir. Bu taktirde, Teorem 2.2.1 gereği $z \rightarrow \infty$ iken alırız ki;

$$u(z) = \log \left| \frac{2z}{d} \right| - \log|z| + \log c(K) + o(1) .$$

Yine aşağıdakini kurarak, ∞ 'daki singüleriteyi kaldırabiliriz.

$$u(\infty) = \log \left(\frac{2}{d} \right) + \log c(K) .$$

Şimdi $dist(z, \partial K) \rightarrow 0$ iken $dist(f^{-1}(-f(z)), \partial K) \rightarrow 0$ 'dır. Bu yüzden

$$\lim_z \sup u(z) \leq \log \left| \frac{d}{d} \right| - 0 = 0, \quad \xi \in \partial K .$$

Böylece maksimum prensibi gereği, $\mathbb{C}_\infty \setminus K$ 'da $u \leq 0$ ve özellikle $u(\infty) \leq 0$ dir. $\square$

Bu kümeler doğru parçası gibi kümelerdir, pozitif kapasiteleri vardır ancak alanları sıfırdır. Bölgeleri açısından, kapasite için onlardan üstten sınırlılık

beklenemez. Ancak alttan sınırları vardır. Bu da, kapasite için bir çeşit izoperimetrik (çevre uzunluğu aynı olan) eşitsizlik olabilir.

Teorem 2.3.5 Eğer kompakt $K \subset \mathbb{C}$, kompakt alt kümesinin alanı A ise,

$$c(K) \geq \sqrt{A/\pi}$$

dir.

Bu eşitsizlik, disk örneğinde kesindir. Bu teoremi önce aşağıdaki Lemma verildikten sonra ispatlanacaktır.

Lemma 2.3.6 (Ahlfors-Beurling Eşitsizliği) Eğer $K \subset \mathbb{C}$, kompakt altkümesinin alanı A ise,

$$\left| \int_K \frac{1}{w-z} dA(w) \right| \leq \sqrt{\pi A}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

İspat İlk olarak eğer K 'nın alanı 0 ise, eşitsizlik açıktır, bu yüzden varsayabiliriz ki; $A > 0$. $z = 0$ özel durumu için eşitsizliği göstermek yeterlidir. Genel duruma $K - z$ dönüşümü yaparak sonuca ulaşabiliriz. Nihayet, varsayabiliriz ki;

$$\int_K \frac{1}{w} dA(w) \geq 0.$$

Aksi taktirde bu doğru olana kadar K 'ya rotasyon uygularız.

Δ bir disk olsun. $\{w: \operatorname{Re}(\frac{1}{w}) > \frac{1}{2a}\}$ (burada a çap olarak seçilmiştir). Bu yüzden Δ ve K , eşit alanlıdır. Başka sözle $\pi a^2 = A$ dır. Bu taktirde

$$\begin{aligned} \int_K \frac{1}{w} dA(w) &= \int_K \operatorname{Re}\left(\frac{1}{w}\right) dA(w) \\ &= \int_{K \cap \Delta} \operatorname{Re}\left(\frac{1}{w}\right) dA(w) + \int_{K \setminus \Delta} \frac{1}{2a} dA(w) \\ &= \int_{K \cap \Delta} \operatorname{Re}\left(\frac{1}{w}\right) dA(w) + \int_{\Delta \setminus K} \frac{1}{2a} dA(w) \\ &\leq \int_{\Delta} \operatorname{Re}\left(\frac{1}{w}\right) dA(w) \end{aligned}$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2a \cos \theta} \frac{\cos \theta}{r} r dr d\theta = \pi a = \sqrt{\pi A}.$$

Buda istenendir. $\square$

Teorem 2.3.5 İspatı $D, \mathbb{C}_\infty \setminus K$ 'ın ∞ 'u dahil etmekle alınan komponenti ve $f: D \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ olsun, öyleki;

$$f(z) = \left(\frac{1}{A} \int_K \frac{1}{z-w} dA(w) \right)^{-1}.$$

Bu taktirde, f meromorfiktir, $f(z) = z + O(1)$, $(z \rightarrow \infty)$ ve Lemma 2.3.6 gereği; $f: D \rightarrow \mathbb{C}_\infty \setminus \bar{\Delta} \left(0, \sqrt{A/\pi} \right)$ içine bir tasvirdir. Böylece, Teorem 2.2.3 a) gereği,

$$c(K) \geq c \left(\bar{\Delta} \left(0, \sqrt{A/\pi} \right) \right) = \sqrt{A/\pi}.$$

Bu da iddia edildiği gibidir. $\square$

Son olarak bu bölümde, Kantor kümelerinin polar olup olmadığı problemine değineceğiz. Burada, aşağıdaki gibi inşa edilmiş Kantor Kümeleri üzerinde çalışacağız.

$s = (s_n)_{n \geq 1}$ bir sayı dizisi olsun öyleki; $\forall n$ için $0 < s_n < 1$. $C(s_1)$ bir küme dir öyleki; $[0,1]$ aralığının merkezinden, s_1 uzunluğundaki açık aralık kaldırıldığında kalan küme olsun. n - inci adımda, $C(s_1, \dots, s_n)$ kümesi $C(s_1, \dots, s_{n-1})$ intervallerinin atılması ile kalan küme olsun. Böylece, azalan bir $(C(s_1, \dots, s_n))_{n \geq 1}$ dizisi elde edilir ve buna karşılık genel Kantor kümesi,

$$C(s) = \bigcap_{n \geq 1} C(s_1, \dots, s_n)$$

biçiminde tanımlanır. Açıkça görüldüğü gibi $C(s)$ kompakttır, tamdır, tamamen bağlantısızdır ve Lebesgue ölçüsü $\prod_{n \geq 1} (1 - s_n)$ dir. Şimdi kapasitesini araştıralım.

Teorem 2.3.7 Üstteki notasyonla birlikte ;

$$\frac{pq}{2} \leq c(C(s)) \leq \frac{p}{2}.$$

Burada, $p = \prod_{n \geq 1} (1 - s_n)^{1/2^n}$ ve $q = \prod_{n \geq 1} s_n^{1/2^n}$.

Böylece, standart Kantor Kümesinde, her n için $s_n = 1/3$ elde edilir, kapasitesi en az $1/9$ -dur ve özellikle de polar değildir. Öte yandan, eğer

$s_n = 1 - (1/2)^{2^n}$ alınır, $C(s)$ polar olur, böylece bu alınan sonuç sayılamayıpta, polar olan küme örneği olmuş olur.

İspat Üst sınır ile ıspatlamaya başlayalım. $K = C(s_1, \dots, s_n)$ işaretleyelim ve K_1, K_2 sırasıyla K nın sağ ve sol parçalanışını göstereyin. $diam(K) = 1$ iken,

$$\frac{1}{\log\left(\frac{1}{c(K)}\right)} \geq \sum_{j=1}^2 \frac{1}{\log\left(\frac{1}{c(K_j)}\right)}$$

eşitliğini elde etmek için Teorem 2.1.4 a) 'dan $d = 1$ ile yararlanabiliriz. Simetriden dolayı $c(K_1) = c(K_2)$, buradan yola çıkarak, yukarıdaki eşitsizlik basitleştirilirse;

$$\log c(K) \leq \frac{1}{2} \log c(K_1).$$

$K = C(s_1, \dots, s_n)$, ve K_1 sadece $\frac{1-s_1}{2}$ çarpanı ile $C(s_2, \dots, s_n)$ kümesinin küçültülmesidir. Böylece, son eşitsizlik aşağıdaki gibi olur:

$$\log(c(C(s_1, \dots, s_n))) \leq \frac{1}{2} \log\left(\frac{1-s_1}{2}\right) + \frac{1}{2} \log c(C(s_2, \dots, s_n)).$$

Bu verilenleri yenilersek,

$$\log(c(C(s_1, \dots, s_n))) \leq \sum_{j=1}^n \frac{1}{2^j} \log\left(\frac{1-s_j}{2}\right) + \frac{1}{2^n} \log c([0,1]).$$

$n \rightarrow \infty$ için alırsak ki;

$$\log c(C(s)) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \log\left(\frac{1-s_j}{2}\right).$$

Bu da bize üst sınırı verir.

Alt sınır ise, benzer tarzda ıspatlanır. K, K_1, K_2 önceki gibi, $dist(K_1, K_2) = s_1$ olduğundan, Teorem 2.1.4 b)-den $d = s_1$ ile birlikte aşağıdaki eşitsizliği verir:

$$\frac{1}{\log^+\left(\frac{s_1}{c(K)}\right)} \geq \sum_{j=1}^2 \frac{1}{\log^+\left(\frac{s_1}{c(K_j)}\right)}.$$

Eğer $c(K) < s_1$ için basitleştirilirse,

$$\log c(K) \geq \frac{1}{2} \log s_1 + \frac{1}{2} \log c(K_1)$$

ve eğer $c(K) \geq s_1$ ise, bu eşitsizlik $c(K) \geq c(K_1)$ olsa bile, her durumda doğrudur. Üst sınırda kullandığımız tartışmayı yeniden tekrarlırsak alırsak ki;

$$\log c(C(s)) \geq \log c(C(s)) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \log s_j + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \log\left(\frac{1-s_j}{2}\right).$$

Bu da bize alt sınırı verir. $\square$

BÖLÜM III

3.1 Majorantlar

Majorantlar, fonksiyonların sonlu fark, düzgünlük ve yaklaşık özelliklerine göre sınıflandırılması amacıyla kullanılırlar.

$\vartheta(t)$ fonksiyonu (a,b) aralığında tanımlı olsun. Eğer

$$2\vartheta\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right) \geq \vartheta(t_1) + \vartheta(t_2), \quad \forall t_1, t_2 \in (a, b)$$

özelligi sağlanıyorsa $\vartheta(t)$ 'ye konkav fonksiyon denir.

Tanım 3.1.1 M ile aşağıdaki koşulları sağlayan fonksiyonlar sınıfını işaretleyeceğiz:

1. $\mu: (0, +\infty] \rightarrow [0, +\infty)$;
2. $I_\mu = \{x: \mu(x) > 0\}$ bağlantılı kümedir;
3. $\log \mu(x)$ fonksiyonu I_μ kümesinde $\log x$ 'e göre konkavdır.

I_μ 'in boş küme olmadığı bütün $\mu \in M$ 'lerin sınıfını M^* ile işaretleyelim.

$\mu \in M^+$ için I_μ aralığının sol ve sağ uçlarını sırası ile x_μ^- ve x_μ^+ ile işaretleyelim.

Açıktır ki, $0 \leq x_\mu^- \leq x_\mu^+ \leq +\infty$ ve

$$\mu_0 := \lim_{x \rightarrow a} \frac{\log \mu(x)}{\log x}, \quad \mu_\infty := \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log \mu(x)}{\log x}$$

limitleri mevcut olup,

$$\mu_0 \geq \mu_\infty, \quad \mu_0 \geq -\infty, \quad \mu_\infty < +\infty \quad (3.1)$$

eşitsizliklerini sağlarlar.

$x_\mu^- > 0$ ($x_\mu^+ < +\infty$) ise $\mu_0 = +\infty$ (uygun olarak $\mu_\infty = +\infty$) kabul edeceğiz. Eğer $\mu \equiv 0$ ise μ_0 ve μ_∞ olarak (3.1) eşitsizliğini sağlayan keyfi sonlu sayılar kabul etmek olur. $\mu_0 < +\infty$ ise m_0 ile $m_0 - 1 < \mu_0 \leq m_0$ koşulunu sağlayan

tam sayısını, $\mu_\infty > -\infty$ ise, m_∞ ile $m_\infty \leq \mu_\infty < m_\infty + 1$ koşulunu sağlayan tam sayısını işaretleyeceğiz. M ve M^* sınıfları [10] 'da incelenmiştir.

Açıktır ki $\mu(\delta) = \delta^\alpha$ kuvvet majorantları M sınıfındadırlar.

3.2 Meromorf Fonksiyonlar

Tanım 3.2.1 (Meromorf Fonksiyon) $f(z)$ fonksiyonu, iki tam fonksiyonun oranı şeklinde yazılırsa, ona meromorf fonksiyon denir.

$G \subset \bar{\mathbb{C}}$ keyfi açık kümesi ve burada tanımlanan bir f fonksiyonu için

$$f = \begin{cases} \lim_{\xi \rightarrow \infty, \xi \in G \setminus \{\infty\}} \frac{\log|f(\xi)|}{\log|\xi|} & , \quad z = \infty \in \bar{G} \\ 0 & , \quad z \notin \bar{G} \end{cases}$$

ve $z \in \mathbb{C}$ için

$$f = \begin{cases} \lim_{\xi \rightarrow z, \xi \in G \setminus \{z\}} \frac{\log|f(\xi)|}{\log|\xi - z|} & z \in \bar{G} \text{ için} \\ 0 & z \notin \bar{G} \text{ için} \end{cases}$$

İşaretleyelim. Eğer f , G 'de meromorf ise, $k(f, w)$ ile f 'in, $w \in G$ noktasındaki $f(w)$ değerinin çok katlılığını göstereceğiz.

$z \in \bar{\mathbb{C}}$, G , $\mu \in M^*$ ve f fonksiyonu için aşağıdaki formüllerle belirlenen $s(z, f(.)) = s(z, f(.), G, \mu)$ sayılarını işaretleyelim.

$$s(z, f(.)) = \begin{cases} \left(\frac{f(z)}{\mu(|\cdot - z|)} \right)_{z \in G} & , \quad x_\mu^- = 0, z \in \mathbb{C} \\ 0, & x_\mu^- > 0, z \in \mathbb{C} \end{cases} ,$$

$$s(\infty, f(.)) = \begin{cases} \left(\frac{f(z)}{\mu(|\cdot|)} \right)_{\infty \in G} & , \quad x_\mu^+ = +\infty \\ 0, & x_\mu^+ < +\infty \end{cases} .$$

Eğer $\mu \equiv 0$ ise, her bir $z \in \bar{\mathbb{C}}$ için $s(z, f(.)) = 0$.

$\mu \in M^*$ için alırsak ki; eğer $\mu_0 \neq \infty$ ve $z \in \mathbb{C}$ ise, $s(z, f(.)) = f_{z,G} + \mu_\infty$; eğer $\mu_\infty \neq -\infty$ ve $z \in \mathbb{C}$ ise, $s(z, f(.)) = f_{\infty,G} - \mu_\infty$.

$r > 0$ olsun. $w \in \mathbb{C}$ için $G \cup \{\xi: |\xi - w| < r\}$ kümesinin genelleştirilmiş Green fonksiyonunun $g_r(w, \xi)$ ile; $G \cup \{\xi: |\xi - w| \leq +\infty\}$ kümesinin genelleşmiş Green fonksiyonunu da $g_r(\infty, \xi)$ ile göstereceğiz.

$w \in \bar{\mathbb{C}}$ için w kutuplu Green fonksiyonu rolü oynayan, negatif olmayan ve $\xi \in G$ 'ye göre harmonik olan $\lim_{r \rightarrow 0} g_r(w, \xi) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{g}_r(w, \xi)$, $\xi \in G$ limiti mevcuttur.

[23] de ispatlanmış olan Hardy-Littlewood tipi teoremleri verelim:

Teorem 3.2.2. $a \in \mathbb{C}$ sabit bir nokta, $G \subset \mathbb{C} \setminus \{a\}$, sınırı sıfır olmayan logaritmik kapasiteye sahip açık küme, $\mu \in R$ olsun. $f: G \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ sonlu tane kutba sahip meromorf bir fonksiyon ve, $p_1, \dots, p_n$ -ler f fonksiyonunun tüm farklı kutup noktaları olsun.

Varsayalım ki; f, G 'nin $a, z = \infty, p_1, \dots, p_n$ 'dan ayırık her kısmında sınırlı olup, aşağıdaki koşulları sağlasın:

$$f_{a,G} < +\infty \quad (3.2)$$

$$f_{\infty,G} < +\infty \quad (3.3)$$

$$\overline{\lim_{\xi} |f(\xi)|} \leq \mu(|z - a|) \quad \forall z \in (\partial G) \setminus \{a\} \quad (3.4)$$

Eğer a (benzer şekilde $z = \infty$), G için izole edilmiş bir sınır noktası ise, o halde buna ek olarak varsayabiliriz ki;

$$\mu < +\infty, \quad f(\xi) = o(|\xi - a|^{m_0-1}), \quad \xi \rightarrow a, \quad (3.5)$$

$$(veya \quad \mu > -\infty, \quad f(\xi) = o(|\xi|^{m_0+1}), \quad \xi \rightarrow \infty). \quad (3.6)$$

Bu taktirde

$$|f(\xi)| \leq \mu(|z - a|) \exp [\sum_{\gamma=1}^N g_G(p_\gamma, \xi) k(f, p_\gamma) - \sum_{w, f(w)=0} g_G(w, \xi) k(f, w) + \overline{g}_G(a, \xi) s(a, f(.)) + \overline{g}_G(\infty, \xi) s(\infty, f(.))] \quad \forall \xi \in G \setminus \{p_1, \dots, p_n\}. \quad (3.7)$$

Not 3.2.3 $\overline{g}_G(a, \xi) s(a, f(.))$, $\overline{g}_G(\infty, \xi) s(\infty, f(.))$ ifadeleri pozitif değildir ve bundan dolayı, (3.7) eşitsizliği genellikle halde, [7]-deki (7) eşitsizliğinden daha kesindir.

Teorem 3.2.4 $G \subset \mathbb{C}$ kümesi, sınırı sıfır olmayan logaritmik kapasiteye sahip açık bir küme, $\mu \in M$ ve $\mu_0 \leq 1$ olsun. $f: \bar{G} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu ise, G 'de sürekli, holomorf bir fonksiyon olsun ve (3.3) şartlarını sağlasın. Ayrıca aşağıdaki eşitsizlik doğru olsun:

$$|f(\xi) - f(z)| \leq \mu(|z - a|) \quad \forall \xi, z \in \partial G, \quad z \neq \xi. \quad (3.8)$$

Eğer $z = \infty$ noktası $G \subset \bar{\mathbb{C}}$ 'nin bir izole edilmiş sınır noktası ise, ek olarak (3.6) ve $\mu_\infty \geq 0$ sağlansın. Bu taktirde

$$|f(\xi) - f(z)| \leq \mu(|z - \xi|) \exp \left[- \sum_{\substack{w \in G \\ f(w)=f(z)}} g_G(w, \xi) k(f, w) + \overline{g}_G(z, \xi) \times \right]$$

$$\times \left((f(\cdot) - f(z))_{z,G} + \mu_0 \right) + \overline{g}_G(\infty, \xi) s(\infty, f(\cdot) - f(z)) \quad \forall \xi \in G, z \in \partial G. \quad (3.9)$$

$$|f(\xi) - f(z)| \leq \mu(|z - \xi|) \exp \left[- \sum_{\substack{w \in G \\ f(w)=f(z)}} g_G(w, \xi) k(f, w) + \right. \\ \left. + g_G(z, \xi) \mu_0 + \overline{g}_G(\infty, \xi) s(\infty, f(\cdot) - f(z)) \right] \quad \forall \xi, z \in G, z \neq \xi. \quad (3.10)$$

Teorem 3.2.5 $G \subset \mathbb{C}$ kümesi, sınırı sıfır olmayan logaritmik kapasiteye sahip açık bir küme, $\mu \in M$ ve $\mu_0 \leq 1$ olsun. $f: \overline{G} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, tüm farklı kutup noktaları P 'de olan meromorf ve sürekli bir tasvir olsun. Ayrıca varsayalım ki; (3.3), (3.8) şartlarını sağlar ve

$$f(z) \neq \infty, \quad \forall z \in \partial G. \quad (3.11)$$

Eğer $z = \infty$ noktası $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ kümesinin izole edilmiş bir sınır noktası ise, (3.6) ve $\mu_0 \geq 0$ sağlansın. Bu taktirde,

$$|f(\xi) - f(z)| \exp \left[- \sum_{p \in P} (g_G(p, \xi) + g_G(p, \xi)) k(f, p) \right] \leq \mu(|\xi - z|) \times \\ \times \exp \left[- \sum_{\substack{w \in G \\ f(w)=f(z)}} \overline{g}_G(w, \xi) k(f, w) + \overline{g}_G(z, \xi) ((f(\cdot) - f(z))_{z,G} - \mu_0) \right. \\ \left. + \overline{g}_G(\infty, \xi) s(\infty, f(\cdot) - f(z)) \right] \quad \forall \xi \in G \setminus P, \forall z \in \partial G \quad (3.12)$$

$$|f(\xi) - f(z)| \exp \left[- \sum_{p \in P} (g_G(p, \xi) + g_G(p, \xi)) k(f, p) \right] \leq \mu(|\xi - z|) \times \\ \times \exp \left[- \sum_{\substack{w \in G \\ f(w)=f(z)}} g_G(\infty, \xi) k(f, w) + g_G(z, \xi) \mu_0 + s(\infty, f(\cdot) - f(z)) g_G(\infty, \xi) \right] \\ \forall \xi \in G \setminus P, z \neq \xi \quad (3.13)$$

R^* ile iç logaritmik kapasitesi sıfır olan $E \subset \overline{\mathbb{C}}$ kümelerinin sınıfı işaretlenmiştir.

Aşağıdaki lokal sonuç teoremden Teorem 3.2.5 in genelleşmiş halidir.

Teorem 3.2.6 $a \in \mathbb{C}$ sabit bir nokta, $\mu \in M$, $G \subset \mathbb{C} \setminus \{a\}$, sınırı sıfır olmayan logaritmik kapasiteye sahip açık küme, U kümesi a ve $z = \infty$ noktalarının komşuluğu, $Q \subset \mathbb{C} \setminus G$ kümesi a ve $z = \infty$ noktalarını içersin ve $Q \in R^*$ olsun., $f: G \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ tüm farklı kutup noktaları P 'de olan meromorf bir fonksiyon, f 'nin tüm kutupları ayırık ve P kümesinin içinde olsun ve varsayalım ki (3.2), (3.3) şartları sağlanır ve

$$\lim_{\xi \rightarrow z, \xi \in G} |f(\xi)| \exp \left[- \sum_{p \in P} g_G(p, \xi) k(f, p) \right] < +\infty \quad \forall z \in \partial G \setminus \{a\} \quad (3.14)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow z, \xi \in G} |f(\xi)| \exp \left[- \sum_{p \in P} g_G(p, \xi) k(f, p) \right] \leq \mu(|z - a|) \quad \forall z \in (\partial G) \setminus Q \quad (3.15)$$

$$\overline{\lim}_{\xi \rightarrow z, \xi \in G} |f(\xi)| \leq \mu(|z - a|) \quad z \in U \cap [(\partial G) \setminus Q]. \quad (3.16)$$

Burada toplam P 'nin P_s altkümeleri (özel halde boş olan) üzerinden alınır. Eğer a (benzer şekilde $z = \infty$) noktası $G \cup Q$ 'nun bir iç noktası ise, ek olarak (3.5) in sağlandığını da varsayalım. Bu taktirde,

$$\begin{aligned} & |f(\xi)| \exp\left[-\sum_{p \in P} g_G(p, \xi)k(f, p)\right] < \mu(|\xi - a|) \times \\ & \times \exp\left[-\sum_{w: f(w)=0} g_G(w, \xi)k(f, w) + \bar{g}_G(\infty, \xi)\tau(a) - \bar{g}_G(\infty, \xi)\tau(\infty)\right] \\ & \quad \forall \xi \in \partial G \setminus Q \end{aligned} \quad (3.17)$$

Burada $b \in \bar{\mathbb{C}}$ için $\tau(b) = s(b, f(.)) \exp\left[-\sum_{p \in P} g_G(p, \xi)k(f, p)\right], G, \mu$ ile işaretlenmiştir.

SONUÇ

Bu tezde, kompleks düzlemdeki kapasitenin durumu incelenmiştir, onunla ilgili teoremler ispatlanmıştır. Ayrıca meromorf fonksiyonlar için sıfırların ve yalınkat olmamanın etkisi de göz önünde bulundurularak Hardy-Littlewood tipi teoremler verilmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] L.V. Ahlfors ve A. Beurling, '*Conformal Invariants and Function-Theoretic Null Sets*', Acta Maths (1950).
- [2] H. Alexander, '*Projections of Polynomial Hulls*', J. Functional Analysis (1973).
- [3] T.F. Banchoff ve W.F. Pohl, '*A Generalization of the Isoperimetric Inequality*', J. Differential Geometry (1971).
- [4] W.K. Hayman, '*Some Applications of the Transinfinite Diameter to the Theory of Functions*', J. Analyse Math. (1951).
- [5] W.K. Hayman ve P.B. Kenedy, '*Subharmonic Functions*', Volume1 London Mathematical Society Monographs, Academic Press, London, (1976).
- [6] W.K. Hayman, '*Subharmonic Functions*', Volume2 London Mathematical Society Monographs, Academic Press, London, (1989).
- [7] N.S. Landkof, '*Foundations of Modern Potential Theory*' Grundlehren der Mathematischen Wienschaften, Springer-Verlag, Berlin (1972).
- [8] G. Pólya ve G. Szegő, '*Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics*', Princeton University Press, Princeton, (1951).
- [9] Ch. Pommerenke, '*Boundary Behaviour of Conformal Maps*', Grundlehren der Mathematischen Wienschaften, Springer-Verlag, Berlin (1992).
- [10] P.M. Tamrazov, '*Contour--solid results for holomorphic functions*'. Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat. 50(1986) no.4, 193-205; English transl. in Math. USSR Izvestiya Vol. 29(1987), N1.
- [11] T.G. Aliyev and P.M. Tamrazov '*A contour--solid problem for meromorphic functions, taking into account nonunivalence*' Ukrainian Math. Zh. 39 (1987), 683-690 (Russian).
- [12] Hardy G.H. and Littlewood J.E. '*Some properties of fractional integrals, II*'. Math. Zs. 34, 1923, 3.
- [13] Warschawski S. '*Über ein satz von O.D. Kellog*'.- Nachr. Ges. Wiss. Gottingen, 1932, 1.

- [14] Walsh J.L. and Sewell W.E. '*Sufficient conditions for various degrees of approximation by polynomials*'- Duke Math. J., 6, 1940, 3.
- [15] Sewell W.E. '*Degree of approximation by polynomials in the complex domain*', Princeton, 1942.
- [16] P.M. Tamrazov, '*Solid inverse theorems of polynomial approximation for regular compact in the complex plane*', Sov. Math. Dokl. 12 (1971), 855-858.
- [17] P.M. Tamrazov, '*Smoothness and polynomial approximation*', Naukova Dumka, Kiev, 1975 (Russian).
- [18] '*Meromorphic functions in contour and solid problems with normal majorants*'. Reports of extended seminar of applied Mathem. Inst. I.N. Vekua, Tbilisi University, 1988, t.3, nl, p.21-24.
- [19] Tamrazov P.M., Aliyev T., '*Contour and solid theorem for meromorphic functions taking multivalence into account*.' 3-th ISAAC, Agust 20-25, 20015 Frierie Universitat Berlin, Germany.
- [20] '*Tamrazov P.M., Aliyev T., Contour solid problem for meromorphic functions with regard to zeros and multivalence*.' -Kiev, Akad. Nauk Ukrain. SSR Inst. Mat. Preprint 1984, no. 78, 16 pp. MR 87a:30052.
- [21] '*Aliyev T., Tamrazov P.M., Meromorphic functions in a contour-solid problem taking into account zeros and nonunivalence*.' -Kiev, Akad. Nauk Ukrain. SSR Inst. Mat. Preprint 1985, no.46, 16pp. MR 86k:30036.
- [22] '*Aliyev T., Tamrazov P.M., Contour-solid Theorem for Meromorphic Functions, taking into account multivalence*' // Progress in Analysis, vol.1, p.469-476, World Sci.Publishing River Edge, NJ, 2003. MR2032715.
- [23] T. Aliyev and P.M. Tamrazov, '*Contour-and-solid theorems for meromorphic functions taking into account zeros and nonunivalence*', Institute of Mathematics, Academy of Sciences of the Ukrainian SSR, Kiev. Translated from Ukrainskii Matematicheskii Zhurnal, Vol.39, No.6, pp.683-690, November-December, 1987. Original article submitted march 20. 1986.

ÖZGEÇMİŞ

Ahmet Faruk ÇAKMAK, 07.01.1983 yılında Trabzon-Çaykara 'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini burada tamamladıktan sonra Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü bitirdi.