

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

**ORTOGONAL MATRİS VE EULER AÇILARI İLE KİNEMATİK
DENKLEMLERİN GÖSTERİMİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN : Sevinç TURGUT
DANIŞMAN : Yrd. Doç. Dr. Şakir İŞLEYEN

VAN – 2008

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

**ORTOGONAL MATRİS VE EULER AÇILARI İLE KİNEMATİK
DENKLEMLERİN GÖSTERİMİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN : Sevinç TURGUT

VAN – 2008

KABUL VE ONAY SAYFASI

Matematik Anabilim Dalı'nda Yrd. Doç. Dr. Şakir İŞLEYEN danışmanlığında, Sevinç TURGUT tarafından sunulan “*Ortogonal Matris ve Euler Açılımları ile Kinematik Denklemlerin Gösterimi*” isimli bu çalışma “Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği” ve “Fen Bilimleri Enstitüsü Yönergesi”nin ilgili hükümleri gereğince/...../2008 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile başarılı bulunmuş ve *Yüksek Lisans Tezi* olarak kabul edilmiştir.

Başkan:
.....

İmza:

Üye:
.....

İmza:

Üye:
.....

İmza:

Üye:
.....

İmza:

Üye:
.....

İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun/...../..... tarih ve sayılı kararı ile onaylanmıştır.

.....
Enstitü Müdürü

ÖZET

ORTOGONAL MATRİS VE EULER AÇILARI İLE KİNEMATİK DENKLEMLERİN GÖSTERİMİ

TURGUT, Sevinç

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Şakir İŞLEYEN

Ağustos 2008, 49 sayfa

Bu çalışmada kuaterniyonlar tanıtılacak ve sonra da reel ve dual kuaterniyonlara genişletileceklerdir. Ayrıca Euler açılarını kullanarak reel ve dual kuaterniyonların hareketler teorisinde birer hareket operatörü olarak rolleri açıklanacaktır.

Anahtar kelimeler: Dönme operatörü, Euler açıları, Kuarterniyon, Ortogonal matris.

ABSTRACT

REPRESENTATION OF KINEMATIC EQUATIONS VIA ORTHOGONAL MATRIX AND EULER ANGLES

TURGUT, Sevinç

Msc, Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Şakir İŞLEYEN

August 2008, 49 pages

In this study quaternions will be introduced and then they will be expanded to real and dual quaternions. Moreover, using Euler angles, the roles of real and dual quaternions in movements theory will be discussed as a movement operator.

Key words: Euler angles, Orthogonal matrix, Quaternion, Rotation operator.

ÖN SÖZ

Yüksek lisans tez konumu öneren, çalışmalarım boyunca yakın ilgi ve desteklerini esirgemeyen hocam Yrd. Doç. Dr. Şakir İŞLEYEN'e en içten dileklerle saygılar sunar, teşekkür ederim.

VAN-2008

Sevinç TURGUT

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	iii
ÖN SÖZ	v
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	xiii
SİMGELER DİZİNİ	xv
1. GİRİŞ ve KAYNAK BİLDİRİŞLERİ	1
2. TEMEL TANIMLAR ve ÖNBİLGİLER	2
2.1. Koordinat Transformasyonları	2
2.2. Bir Ortogonal Matrisin Karakteristik Vektörleri	3
2.3. Cayley Formülü	5
2.4. 3x3 Anti-simetrik Matrisler	7
3. KUATERNİYONLAR TEORİSİ	9
3.1. Reel Kuaterniyonlar	9
3.1.1. Kuaterniyonlarda Toplama	9
3.1.2. Skaler ile Çarpma	9
3.1.3. Çarpma (Kuaterniyon Çarpımı)	10
3.2. Reel Kuaterniyonlar Üzerine Temel İşlemler	11
3.2.1. Eşitlik	11
3.2.2. Fark	11

3.2.3. Eşlenik	11
3.2.4. Norm	12
3.2.5. Bir Kuaterniyonun Tersi	13
3.2.6. Bölme	13
3.2.7. Birim Kuaterniyon ve Normlama	14
3.2.8. İki Vektörün Kuaterniyon Çarpımı	15
3.2.9. Reel Kuaterniyonların Matris Gösterimi	17
4. DUAL KUATERNİYONLAR	20
4.1. Tanımlar	20
4.2. Dual Kuaterniyonlar Üzerinde Temel İşlemler	21
4.2.1. Dual Sıfır Kuaterniyonu	21
4.2.2. Dual Kuaterniyonlarda Eşitlik	21
4.2.3. Dual Kuaterniyonlarda Toplama	21
4.2.4. Dual Kuaterniyonlarda Çarpma	21
4.2.5. Dual Kuaterniyonlarda Eşlenik	22
4.2.6. Dual Kuaterniyonlarda Norm	23
4.2.7. Dual Kuaterniyonlarda İnvers	24
4.2.8. Dual Kuaterniyonların Bölümü	25
4.2.9. Birim Dual Kuaterniyon	25
4.2.10. Dual Sayılar, Dual Vektörler ve Dual Kuaterniyonlar	27
4.3. Kuaterniyon Operatörü ve Diğer İlgili Operatörler	27
4.3.1. Kompleks Sayı Operatörü	27
4.3.2. Kuaterniyon Operatörü	28
4.3.3. Dönme Operatörü	30
5. EULER AÇILARININ KULLANIMI	31

5.1. Rodrigues Denklemi	31
5.2. Euler Parametreleri	32
6. TARTIŞMA ve SONUÇ	35
KAYNAKLAR	38
ÖZ GEÇMİŞ	39

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 2.1. R^3 'te dönme hareketi	3
Şekil 6.1. Euler Açıları	34

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler

A	Ortogonal matris
λ	Ortogonal matrisin karakteristik değeri
q_0	Birim kuarterniyon
B	Anti-simetrik matris
\vec{b}	Anti-simetrik matrisi veren birim vektör

1. GİRİŞ ve KAYNAK BİLDİRİŞLERİ

Bir reel kuaterniyon, sıralı dört sayının $+1, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ gibi dört birime eşlik etmesiyle tanımlanabilir. Burada, birinci birim $+1$ bir reel sayıdır, diğer üç birim ise

$$\bar{e}_1^2 = \bar{e}_2^2 = \bar{e}_3^2 = -1 \quad (1.1)$$

$$\bar{e}_1 \wedge \bar{e}_2 = \bar{e}_3, \bar{e}_2 \wedge \bar{e}_3 = \bar{e}_1, \bar{e}_3 \wedge \bar{e}_1 = \bar{e}_2 \quad (1.2)$$

$$\bar{e}_2 \wedge \bar{e}_1 = -\bar{e}_3, \bar{e}_3 \wedge \bar{e}_2 = -\bar{e}_1, \bar{e}_1 \wedge \bar{e}_3 = -\bar{e}_2 \quad (1.3)$$

özelliklerine sahiptir. Böylece bir kuaterniyon,

$$q = d + a\bar{e}_1 + b\bar{e}_2 + c\bar{e}_3 \quad (1.4)$$

biçiminde ifade edilebilecektir (Siminovitch, 1995). Burada $d, a, b, c \in R$ reel sayılarına q kuaterniyonunun bileşenleri denir. $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ birimleri, 3-boyutlu reel vektör uzayının bir dik koordinat sisteminin baz vektörleri olarak alınabilirler ve dolayısıyla q kuaterniyonu, S_q ile gösterilen skaler kısım ve \vec{V}_q ile gösterilen vektörel kısım olmak üzere iki kısma ayrılabilir.

$$S_q = d, \quad \vec{V}_q = a\bar{e}_1 + b\bar{e}_2 + c\bar{e}_3. \quad (1.5)$$

O halde,

$$q = S_q + \vec{V}_q \quad (1.6)$$

yazılabilir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Reel kuaterniyonlar kümesini \mathcal{K} ile gösterelim. Bir reel kuaterniyonun dört biriminin özelliklerini inceleyerek görebiliriz ki \mathcal{K} cümlesinden, birer özel hal olarak, R reel sayılar kümesi, \mathbb{C} kompleks sayılar kümesi ve R^3 üç-boyutlu vektörler kümesi elde edilebilir.

2.TEMEL TANIMLAR ve ÖN BİLGİLER

2.1. Koordinat Transformasyonları

Bir M üç boyutlu cisminin sabit bir F cismine bağlı dönmesi,

$$\vec{X}=[A]\vec{x} \quad (2.1)$$

denklemleriyle verilir; burada, $\vec{x} \in M$ ve $X \in F$ 'dir. Dönüşümün katı transformasyon olması için [A] matrisi,

$$\vec{X}^T\vec{X} = \vec{x}^T [A^T][A]\vec{x} = \vec{x}^T\vec{x}$$

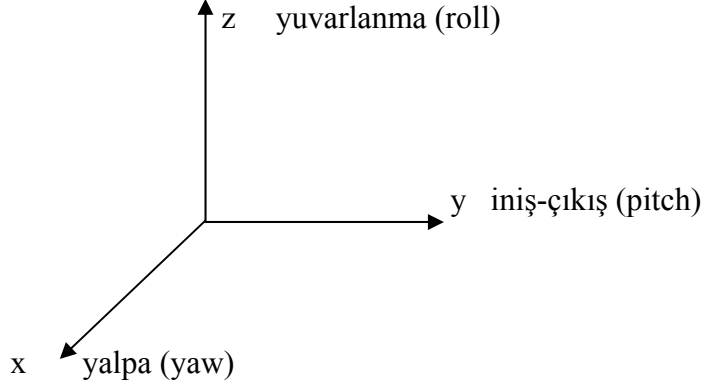
eşitliğini sağlamalı yani,

$$[A^T][A] = [I] \quad (2.2)$$

olmalıdır. Bu şart, bir matrisin “ortogonal matris” olması şartıdır. Döndürmeler, determinantı +1 olan ortogonal matrisler ile verilir. Bu matris cümlesi $SO(3)$ ile gösterilir ve matrislerin çarpım işlemine göre bir matris grubu yapısına sahiptirler (Mc.Carthy, 1990).

(2.1) transformasyonu, başlangıçta F ile çakışan M çatısının bir yer değiştirmesi olarak ele alınabilir. Böyle ele alındığında, cisimdeki bir P noktasının başlangıç anındaki vektör konumu \vec{x} ve sonuçtaki konum vektörü \vec{X} 'dir. (2.1) ile belli olan dönüşüm küresel yer değiştirme olarak adlandırılır (Mc.Carthy, 1990).

Dönme matrisinin alışagelmış formu, z- eksenini yuvarlanma (roll) eksenini, y- eksenini iniş-çıkış (pitch) eksenini ve x- eksenini yalpa (yaw) eksenini olarak kabul eder.



Şekil 2.1. R^3 'te dönme hareketi

x, y ve z eksenleri etrafındaki dönmeler, sırasıyla R_x , R_y ve R_z ile gösterilirse

$$A: F \rightarrow M$$

dönme transformasyonu,

$$[A] = R_y R_z R_x = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

olarak bellidir (Bottema, 1979).

$$[\vec{X}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

gibi determinanı -1 olan ortogonal matrisler yansıma olarak adlandırılırlar. Yansımalar için genel bir ifade, $[A]$ bir ortogonal matris olmak üzere,

$$[A] [X] [A^T]$$

ile verilebilir (McCarthy, 1990).

2.2. Bir Ortogonal Matrisin Karakteristik Vektörleri

$[A]$ 'nın etkisi altındaki hareketli cismin sabit uzaya göre pozisyon değiştirmeyen noktalarının cümlesi, $[A] \vec{x} = \vec{x}$ matris denkleminin çözümü olan cümledir. Bu denklem;

$$[A] \bar{x} = \lambda \bar{x} \quad (2.4)$$

Karakteristik denklem problemine genişletilebilir. (2.4) sözle ifade edilirse; F'deki \bar{X} koordinatları, M deki \bar{x} orijinal koordinatlarının bir λ sabit çarpanına eşittir. $\lambda = 1$ için mevcut olan çözümle ilgilenilecektir. (2.4) ün homojen formunun katsayılar matrisinin determinantı sıfır olmalıdır. Buna göre,

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

'dır.

$$-\lambda^3 + \lambda^2(a_{11} + a_{22} + a_{33}) - \lambda(M_{11} + M_{22} + M_{33}) + \det A = 0$$

ve bir ortogonal matris için $M_{ii} = a_{ii}$ olduğundan,

$$-\lambda^3 + \lambda^2(a_{11} + a_{12}a_{33}) - \lambda(a_{11} + a_{12}a_{33}) + 1 = 0 \quad (2.5)$$

elde edilir. $\lambda = 1$ 'in bir kök olduğu açıktır. Böylece sol tarafın çarpanlarından biri $\lambda - 1$ olup, buna göre (2.5) eşitliği;

$$(\lambda - 1) [\lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22} + a_{33} + 1) + 1] = 0 \quad (2.6)$$

olarak yazılır. $a_{11} + a_{22} + a_{33} + 1 = a$ ile gösterilsin

$$\lambda^2 - a\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \quad a = 2\cos\phi \quad (2.7)$$

$$= \frac{2\cos\phi \pm \sqrt{4\cos^2\phi - 4}}{2}$$

$$\lambda_{2,3} = \cos\phi \pm i\sin\phi$$

elde edilir. O halde (2.5) eşitliğinin diğer iki kökü,

$$\lambda = \cos\phi + i\sin\phi = \exp(i\phi)$$

$$\lambda^* = \cos\phi - i\sin\phi = \exp(-i\phi)$$

dir. $\lambda = 1$ ile birleşen karakteristik vektör \vec{b} olsun; $\vec{v} = t\vec{b}$ üzerindeki bütün noktalar

cümlesi dönme esnasında sabittir. \vec{v} ile belirli olan eksen hareketin dönme eksenidir. λ ve λ^* ile birleşen kompleks karakteristik vektörler \vec{x} ve \vec{x}^* olsunlar. Bu vektörler yardımıyla reel ortogonal \vec{c}_1 ve \vec{c}_2 vektörleri,

$$\vec{c}_1 = \frac{\vec{x} + \vec{x}^*}{2}, \vec{c}_2 = \frac{i(\vec{x} - \vec{x}^*)}{2} \quad (2.8)$$

olarak tanımlansın. Bu noktaların C_1 ve C_2 sabit sayı koordinatları, aşağıdaki hesaplamalarla bulunur.

$$\begin{aligned} C_1 &= [A] \vec{c}_1 = (\exp(i\phi) \vec{x} + \exp(-i\phi) \vec{x}^*) / 2 \\ C_2 &= [A] \vec{c}_2 = i (\exp(i\phi) \vec{x} - \exp(-i\phi) \vec{x}^*) / 2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

veya

$$\begin{aligned} C_1 &= \cos\phi \vec{c}_1 + \sin\phi \vec{c}_2 \\ C_2 &= -\sin\phi \vec{c}_1 + \cos\phi \vec{c}_2 \end{aligned} \quad (2.10)$$

(2.10)'den görüldüğü gibi, \vec{b} 'ye dik olan \vec{x} ve \vec{x}^* karakteristik vektörleriyle tanımlı olan düzlemdeki ϕ açılı dönmedir. Bunu görmek için \vec{c}_1 ve \vec{c}_2 'nin koordinatları, $\vec{e}_1=(1,0,0)$ ve $\vec{e}_2=(0,1,0)$ vektörleriyle çakışacak şekilde değiştirilir. Bu durumda $\vec{b} = (0,0,1)$ olur. O zaman (2.10) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} C_1 &= (\cos\phi, \sin\phi, 0) \\ C_2 &= (-\sin\phi, \cos\phi, 0) \end{aligned}$$

elde edilir ki; görüldüğü gibi, yer değiştirme, \vec{b} ile belirli eksen etrafında, ϕ açılı bir dönmedir.

2.3. Cayley Formülü

Bir dönme, cismin noktaları arasındaki uzaklığı korur. Şöyle ki,

$$\begin{aligned} \langle \vec{X}, \vec{X} \rangle &= \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \\ \langle \vec{X}, \vec{X} \rangle - \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{X}, \vec{X} \rangle - \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle &= 0 \end{aligned}$$

ve buradan,

$$(\vec{X} - \vec{x})^T (\vec{X} + \vec{x}) = 0 \quad (2.11)$$

yazılabilir.

$$\vec{X} + \vec{x} = [A+I] \vec{x}$$

$$\vec{X} - \vec{x} = [A-I] \vec{x}$$

değerleri (2.11)'de yerine yazılırsa,

$$\vec{X} - \vec{x} = [A-I][A+I]^{-1}(\vec{X} + \vec{x}) \quad (2.12)$$

olur.

$[A-I][A+I]$ matrisi B ile gösterilsin. Dikkat edilirse, B matrisi $\vec{X} + \vec{x}$ vektörünü kendisine dik olan $\vec{X} - \vec{x}$ vektörüne dönüştürmektedir. (2.12) eşitliği \vec{x} ve \vec{X} 'in seçiminden bağımsız olduğuna göre, temsilci bir \vec{y} vektörü için,

$$\langle \vec{y}, [B] \vec{y} \rangle = 0$$

ve $B = [b_{ij}]$ açık bileşenleriyle yazılırsa;

$$\sum_{i \neq j} (b_{ij} + b_{ji}) \vec{y}_i \vec{y}_j + \sum_{i=j} b_{ii} \vec{y}_i^2 = 0 \quad (2.13)$$

elde edilir. Bu eşitlik keyfi bir \vec{y} vektörü için sağlandığından dolayı her i, j için,

$$b_{ii} = 0$$

$$b_{ij} = -b_{ji}$$

olmalıdır. Yani $[B] = -[B]^T$ 'dir. Bir başka ifadeyle B bir anti-simetrik matristir.

$$[B] = [A-I][A+I]^{-1}$$

eşitliğinden A matrisi çözümlerse,

$$[A] = [I-B]^{-1}[I+B] \quad (2.14)$$

elde edilir. Bu eşitlik ortogonal matrisler için Cayley formülü olarak adlandırılır $[I-B]$ matrisi singüler değildir. Çünkü singüler olsaydı; $\lambda=1$, B'nin bir karakteristik değeri olurdu. Ayrıca, anti-simetrik olması $[B]$ 'nin pür imajiner karakteristik değerlere sahip olmasını gerektirir. Sonuç olarak $[I-B]^{-1}$ daima tanımlıdır. Ayrıca;

$$[I+B][I-B] = [I-B][I+B] = [I-B^2]$$

olduğundan $[I+B]$ ve $[I-B]$ matrisleri değişimlidir. Böylece Cayley formülü, eşdeğer olan;

$$[A] = [I+B] [I-B]^{-1} \quad (2.15)$$

formunda da verilebilir. Bu şekilde elde edilen $[A]$ matrisi ortogonaldır. Gerçekten (2.14) den;

$$\begin{aligned} [A^T] &= [I+B] [I-B]^{-1} \\ &= [I+B^T] [I-B^T]^{-1} \end{aligned}$$

$$[A^T] = [I-B] [I+B]^{-1}$$

$$[A^T A] = [I-B] [I+B]^{-1} [I+B] [I-B]^{-1} = I$$

$$[A][A^T] = [I+B] [I-B]^{-1} [I-B] [I+B]^{-1} = I$$

olduğu görülür.

2.4. 3x3 Anti-simetrik Matrisler

Bir 3x3 $[B]$ anti-simetrik matris,

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ -b_{12} & 0 & b_{23} \\ b_{13} & -b_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. $[B]$ matrisi 3 bağımsız bileşene sahiptir. 3x3 tipindeki anti-simetrik matrisler cümlesi ile \mathbb{R}^3 uzayı arasında bir 1:1 eşleme kurulabilir. Eğer $b_{12} = -b_3$, $b_{13} = b_2$, $b_{23} = -b_1$ değişimi kullanılırsa;

$$A_3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{bmatrix} = (b_1, b_2, b_3)$$

dönüşümü,

$$[B][\vec{y}] = \vec{b} \times \vec{y}, \forall \vec{y} \in \mathbf{R}^3 \quad (2.16)$$

özelliğine sahip bir 1:1 eşleme olur.

Önceki kısımdan hatırlanacağı gibi, Cayley formülü yardımıyla [A] dönme matrisinden bir [B] anti-simetrik matrisi elde edilir. [B]'den de yukarıda anlatılan $(b_1, b_2, b_3) = \vec{\mathbf{b}}$ vektörü elde edilir. $\vec{\mathbf{y}}$ Vektörü [A] dönme matrisinin $\lambda=1$ karakteristik değerine karşı gelen karakteristik bir vektördür.

3x3 mertebeden anti-simetrik [w] matrisinin karakteristik değerleri,

$$\det = \begin{vmatrix} -\lambda & -w_3 & w_2 \\ w_3 & -\lambda & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (2.17)$$

denklemini sağlar. Determinantın değeri hesaplanırsa;

$$\begin{aligned} \lambda^3 + (w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) \lambda &= 0 \\ \lambda (\lambda^2 + (w_1 + w_2 + w_3)) &= 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

elde edilir. Yani 3x3 anti-simetrik matrisin karakteristik değerleri sıfır veya pür imajinerdir (McCarthy, 1990).

3. KUATERNİYONLAR TEORİSİ

3.1. Reel Kuaterniyonlar

3.1.1. Kuaterniyonlarda Toplama:

$$\oplus : \mathbf{K} \times \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}$$

$$(q_1, q_2) \rightarrow q_1 \oplus q_2 = S_{q_1+q_2} + \vec{V}_{q_1 \oplus q_2}$$

işlemi

$$S_{q_1+q_2} = S_{q_1} + S_{q_2} \text{ ve } \vec{V}_{q_1 \oplus q_2} = \vec{V}_{q_1} \oplus \vec{V}_{q_2}$$

olarak tanımlanır. Burada $S_{q_1}, S_{q_2} \in \mathbb{R}$ ve $+$ işlemi \mathbb{R} 'deki toplama işlemidir; \vec{V}_{q_1} ve \vec{V}_{q_2} de birer reel vektör olup \oplus işlemi reel vektör uzayındaki Abel grubu (vektörlerde toplama) işleminin aynısıdır. O halde $(\mathbf{K}, +)$ ikilisi bir Abel grubudur. Buradaki etkisiz eleman sıfır kuaterniyon adını alır ve $(0, 0, 0, 0)$ dördlüsünden başka bir şey değildir.

3.1.2. Skaler ile Çarpma:

$$\odot : \mathbb{R} \times \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}$$

$$(\lambda, q) \rightarrow \lambda \odot q = \lambda q = \lambda S_q + \lambda \vec{V}_q$$

şeklinde tanımlanan dış işlem için

$$(i) \lambda \odot (q_1 \oplus q_2) = \lambda \odot q_1 \oplus \lambda \odot q_2, \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ ve } \forall q_1, q_2 \in \mathbf{K};$$

$$(ii) (\lambda_1 + \lambda_2) \odot q = (\lambda_1 \odot q) \oplus (\lambda_2 \odot q), \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \text{ ve } \forall q \in \mathbf{K};$$

$$(iii) (\lambda_1 \cdot \lambda_2) \odot q = \lambda_1 \odot (\lambda_2 \odot q);$$

$$(iv) 1 \odot q = q.$$

O halde $\{ \mathbf{K}, \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot \}$ sistemi bir reel vektör uzayıdır. Kısaca bu uzayı \mathbf{K} ile, \mathbf{K} 'daki toplama \oplus işlemini de $+$ ile gösterilecektir (Hacısalıhoğlu, 1983).

3.1.3. Çarpma (Kuaterniyon Çarpımı):

$$X: \mathbf{K} \times \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}$$

$$(q_1, q_2) \rightarrow q_1 \times q_2$$

işlemi aşağıdaki çarpım tablosu ile tanımlanır:

\times	+1	\bar{e}_1	\bar{e}_2	\bar{e}_3
+1	+1	\bar{e}_1	\bar{e}_2	\bar{e}_3
\bar{e}_1	\bar{e}_1	-1	\bar{e}_3	$-\bar{e}_2$
\bar{e}_2	\bar{e}_2	$-\bar{e}_3$	-1	\bar{e}_1
\bar{e}_3	\bar{e}_3	\bar{e}_2	$-\bar{e}_1$	-1

buna göre

$$q_1 \times q_2 = (d_1 + a_1 \bar{e}_1 + b_1 \bar{e}_2 + c_1 \bar{e}_3) \times (d_2 + a_2 \bar{e}_1 + b_2 \bar{e}_2 + c_2 \bar{e}_3)$$

$$q_1 \times q_2 = d_1 d_2 - (a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2) + (d_1 a_2 + a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2) \bar{e}_1$$

$$+ (d_1 b_2 + b_1 d_2 + c_1 d_2 - a_1 c_2) \bar{e}_2 + (d_1 c_2 + d_2 c_1 + a_1 b_2 - b_1 a_2) \bar{e}_3. \quad (3.1)$$

Böylece kuaterniyon çarpımın şu özelliklere sahip olduğu görülür.

- (i) İki kuaterniyonun çarpımı bir kuaterniyondur.
- (ii) Kuaterniyon çarpımı birleşimlidir.
- (iii) Kuaterniyon çarpımı dağılımlıdır.

Fakat kuaterniyon çarpımı değişimli değildir. Bu özellikleriyle

$$\{ \mathbf{K}, \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot \}$$

sistemi asosyatif (birleşimli) cebirdir. Bu cebre kuaterniyon cebiri denir ve kısaca \mathbf{K} ile gösterilir. Bu cebirin bir bazı $\{+1, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ ve boyutu 4'tür.

Özel olarak q_1 ve q_2 birer skaler iseler ve vektör kısımları orantılı ($\vec{V}_{q_2} = \lambda \vec{V}_{q_1}$) ise

$$q_1 \times q_2 = q_2 \times q_1$$

olur (Hacısalihoglu, 1983).

3.2. Reel Kuaterniyonlar Üzerinde Temel İşlemler

3.2.1. Eşitlik

Kuaterniyonlar için eşitlik bağıntısı

$$\forall q_1, q_2 \in \mathbf{K} \text{ için } q_1 = q_2 \Leftrightarrow S_{q_1} = S_{q_2} \text{ ve } \vec{V}_{q_1} = \vec{V}_{q_2}$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalihoglu, 1983).

3.2.2. Fark

Toplama ve skaler ile çarpma işlemlerinden iki kuaterniyonun farkı

$$q_1 - q_2 = (S_{q_1} - S_{q_2}) + (\vec{V}_{q_1} - \vec{V}_{q_2})$$

yani

$$S_{q_1 - q_2} = S_{q_1} - S_{q_2} \text{ ve } \vec{V}_{q_1 - q_2} = \vec{V}_{q_1} - \vec{V}_{q_2}$$

olarak tanımlanır (Hacısalihoglu, 1983).

3.2.3. Eşlenik

$$K: \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}$$

$$q \rightarrow K(q) = K_q$$

işlemi

$$q = S_q + \vec{V}_q \rightarrow K_q = S_q - \vec{V}_q \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlanır ve K_q kuaterniyonuna q kuaterniyonunun eşleniği denir.

$\vec{V}_{K_q} = -\vec{V}_q$ olduğundan

$$q \times K_q = K_q \times q = d^2 + a^2 + b^2 + c^2 \in \mathbb{R}$$

dır. O halde

$$q \times K_q = K_q \times q \geq 0$$

dır ve

$$q \times K_q = K_q \times q = 0 \Leftrightarrow q = 0$$

dır. Eşlenik işleminin aşağıdaki özelliklere sahip olduğu açıktır.

- (i) $K(aq_1 + bq_2) = aK_{q_1} + bK_{q_2}$;
- (ii) $K(q_1 \times q_2) = K_{q_1} \times K_{q_2}$;
- (iii) $K(K_q) = q$.

O halde eşlenik işlemi \mathbf{K} cebirinde bir involusyonlu bağıntıdır (Hacısalıhoğlu, 1983).

3.2.4. Norm

$$N: \mathbf{K} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$q \rightarrow N(q) = N_q = q \times K_q = K_q \times q$$

veya

$$q = d + a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$$

ise

$$N_q = q \times K_q = K_q \times q = d^2 + a^2 + b^2 + c^2 \quad (3.3)$$

Pozitif reel sayısına q 'nın normu denir.

Norm işleminin aşağıdaki özelliklere sahip olduğu kolayca görülebilir:

$$N(q_1 \times q_2) = N(q_1) N(q_2)$$

dir. Gerçekten

$$\begin{aligned} N(q_1 \times q_2) &= N(q_1 \times q_2) 1 = (q_1 \times q_2) K(q_1 \times q_2) \\ &= q_1 \times (N(q_2) 1) K_q = N(q_2) 1 N(q_1) 1 \\ &= N(q_1) N(q_2) \text{ (Hacısalıhoğlu, 1983).} \end{aligned}$$

3.2.5. Bir Kuaterniyonun Tersisi

$$(\)^{-1}: \mathbf{K} - \{0\} \rightarrow \mathbf{K} - \{0\}$$

işlemi

$$q \rightarrow q^{-1} = \frac{K_q}{N_q} \quad (3.4)$$

şeklinde tanımlanır. Böylece

$$q \times q^{-1} = q^{-1} \times q = 1 \quad (3.5)$$

elde edilir. $q \neq 0$ olmak üzere $\forall q \in \mathbf{K}$ elemanının bir q^{-1} inversine sahip olması \mathbf{K} cebirini bir bölüm cebri yapar.

Böylece \mathbf{K} 'da bölme işlemini tanımlamak mümkün olur (Hacısalıhoğlu, 1983).

3.2.6. Bölme

$q \neq 0$ olmak üzere bir p kuaterniyonunu bir q kuaterniyonu ile bölmek için p 'yi q^{-1} ile çarpmak gerekir. Fakat kuaterniyon çarpımı değişimli olmadığından bu çarpma işlemi iki türdür ve dolayısıyla p 'yi q ile iki türlü bölmek gerekir.

$$r_1 = p q^{-1}, \quad (3.6)$$

$$r_2 = q^{-1} p. \quad (3.7)$$

Burada r_1 kuaterniyonuna p 'nin q ile sağdan ve r_2 kuaterniyonuna da p 'nin q ile soldan bölümü denir. Genel olarak r_1 ile r_2 farklıdır, dolayısıyla $\frac{p}{q}$ notasyonu kullanılamaz.

Genelleştirme ile $\forall q_1, q_2, \dots, q_n \in \mathbf{K}$ için

$$K(q_1 + q_2 + \dots + q_n) = K_{q_1} + K_{q_2} + \dots + K_{q_n} \quad (3.8)$$

$$K(q_1 \times q_2 \times \dots \times q_n) = K_{q_n} \times K_{q_{n-1}} \times \dots \times K_{q_1} \quad (3.9)$$

$$N(q_1 \times q_2 \times \dots \times q_n) = N_{q_1} N_{q_2} \dots N_{q_n} \quad (3.10)$$

$$(q_1 \times q_2 \times \dots \times q_n)^{-1} = q_n^{-1} \times q_{n-1}^{-1} \times \dots \times q_1^{-1} \quad (3.11)$$

bağıntıları elde edilebilir (Hacısalıhoğlu, 1983).

3.2.7. Birim Kuaterniyon ve Normlama

Normu birim olan bir kuaterniyona birim kuaterniyon denir ve q_0 ile gösterilir.

Buna göre vektörlerde olduğu gibi herhangi bir q kuaterniyonunun normlanmış

$$q_0 = \frac{q}{\sqrt{N_q}} = \frac{d + a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3}{\sqrt{d^2 + a^2 + b^2 + c^2}} \quad (3.12)$$

olarak ifade edilebilir. Bu q_0 birim kuaterniyonu

$$q_0 = \cos \theta + \vec{S}_0 \sin \theta \quad (3.13)$$

formunda yazılabilir, burada

$$\cos \theta = \frac{d}{\sqrt{d^2 + a^2 + b^2 + c^2}} \quad (3.14)$$

$$\sin \theta = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\sqrt{d^2 + a^2 + b^2 + c^2}} \quad (3.15)$$

dır ve $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ olduğu zaman

$$\vec{S}_0 = \frac{a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad (3.16)$$

birim vektörüne q_0 birim kuaterniyonunun ekseni denir.

Yukarıdaki açıklamalardan bir kuaterniyondaki $+1, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ birimlerinin kümesi aşağıdaki özelliklere sahiptir.

- (i) Kümedeki herhangi iki elemanın çarpımı yine kümededir.
- (ii) Kümede çarpma işlemine göre birim eleman $\vec{e}_0 = +1$ 'dir, yani $\vec{e}_0 \times \vec{e}_i = \vec{e}_i \times \vec{e}_0 = \vec{e}_i$, $1 \leq i \leq 3$, $\vec{e}_0 = +1$ 'dir.
- (iii) $\vec{e}_i \times (\vec{e}_j \times \vec{e}_k) = (\vec{e}_i \times \vec{e}_j) \times \vec{e}_k$, $0 \leq i, j, k \leq 3$ 'dir, yani kümede çarpma işlemi birleşimlidir.
- (iv) Her elemanın bir tersi vardır. Hatta, bir birimin tersiyle çarpımı, soldan yahut sağdan, daima $\vec{e}_0 = +1$ birim elemanına eşittir.

Böylece bu dört elemandan oluşan küme dördüncü mertebeden sonlu bir grup oluşturur (Hacısalıhoğlu, 1983).

3.2.8. İki Vektörün Kuaterniyon Çarpımı

(3.1) ifadesinde $d_1 = d_2 = 0$ alınır

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + b_1\vec{e}_2 + c_1\vec{e}_3 \quad \text{ve} \quad \vec{b} = a_2\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + c_2\vec{e}_3 \quad (3.17)$$

şeklinde iki vektör elde edilir. Bu iki vektörün kuaterniyon çarpımı, yine (3.1)'den,

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2) + \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \quad (3.18)$$

olarak bulunur, bu ise bir kuaterniyondur. Vektör cebirinde \vec{a}, \vec{b} vektörlerinin iç çarpımını $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ ve vektörel çarpımını da $\vec{a} \wedge \vec{b}$ ile gösterdiğimizize göre

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 \quad (3.19)$$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \quad (3.20)$$

'dır. Buna göre (3.18) ile verilen kuaterniyon çarpımı

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \vec{a} \wedge \vec{b} \quad (3.21)$$

formunda yazılabilir. (3.21)'den de görüldüğü gibi iki vektörün kuaterniyon çarpımı öyle bir kuaterniyondur ki bu kuaterniyonun skaler kısmı ve vektörel kısmı sırasıyla

$$S(\vec{a} \times \vec{b}) = -\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \quad (3.22)$$

$$V(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \wedge \vec{b} \quad (3.23)$$

'dır. Hatta (3.21)'den görülmektedir ki iki vektör dik iseler kuaterniyon çarpımları vektörel çarpımlarına eşit olur; iki vektör paralel iseler kuaterniyon çarpımları bu iki vektörün skaler (iç) çarpımının ters işaretlisine eşittir.

Kuaterniyon çarpımında iki vektörün yerleri değiştirilirse skalar kısmın aynı kalmasına karşılık vektörel kısım işaret değiştirir. O halde

$$\vec{b} \times \vec{a} = K(\vec{a} \times \vec{b}) \quad (3.24)$$

'dır.

Eğer (3.21)'de \vec{a} ve \vec{b} vektörleri \vec{a}_0 ve \vec{b}_0 ile gösterilen birer birim vektör iseler kuaterniyon çarpımları

$$\vec{a}_0 \times \vec{b}_0 = -\cos\theta + \vec{S}_0 \sin\theta \quad (3.25)$$

Burada θ bu iki vektör arasındaki açı, \vec{S}_0 da

$$\vec{S}_0 = \frac{\vec{a}_0 \wedge \vec{b}_0}{\|\vec{a}_0 \wedge \vec{b}_0\|}$$

'dır.

$$K(\vec{a}_0 \times \vec{b}_0) = -(\cos\theta + \vec{S}_0 \sin\theta) \quad (3.26)$$

(3.9)'de verilen özdeşliği uygulayarak

$$K(\vec{a}_0 \times \vec{b}_0) = K(\vec{b}_0) \times K(\vec{a}_0) \quad (3.27)$$

elde edilir.

$$K(\vec{a}_0) = (\vec{a}_0)^{-1} = -\vec{a}_0$$

$$K(\vec{b}_0) = (\vec{b}_0)^{-1} = -\vec{b}_0 \quad (3.28)$$

'dır ve dolayısıyla (2.30) denklemi

$$q_0 = \vec{b}_0 \times \vec{a}_0^{-1} = \vec{b}_0^{-1} \times \vec{a}_0 \quad (3.29)$$

şeklinde yazılabilir, burada $q_0 = \cos\theta + \vec{S}_0 \sin\theta$ bir birim kuaterniyon olup (3.13) formunda verildiği gibidir.

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$$

Kompleks sayı operatörüne benzetmek gerekirse q_0 birim kuaterniyonunda \vec{S}_0 birim operatörünün i 'nin yerini aldığı görülür. Gerçekten q_0 birim kuaterniyonuna bir kuaterniyon operatörü olarak bakılacak ve bu operatör tıpkı kompleks sayı operatöründe olduğu gibi bir vektörü \vec{S}_0 eksenini etrafında θ açısı kadar döndürecektir. Kuaterniyon operatörünün geometrik anlamı ilerde irdelenecektir (Hacısalıhoğlu, 1983).

3.2.9. Reel Kuaterniyonların Matris Gösterimi

$$K_1 = \{a_0 1 + a_1 \vec{e}_1 \mid a_0, a_1 \in \mathbb{R}, \vec{e}_1^2 = -1\}$$

kümesini alalım.

$$\{K_1, \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot, \times\}$$

sisteminin de bir cebir olduğu kolayca gösterilebilir. Böylece K_1 cebri K cebri bir altcebrine izomorf olur. $\forall (a_0 1 + a_1 \vec{e}_1) \in K_1$ kuaterniyonunu $(a_0 + a_1 \sqrt{-1}) \in \mathbb{C}$ kompleks sayısına eşlenirse, bu eşlemeye göre K_1 'in \mathbb{C} 'ye izomorf olduğunu söylenebilir.

K cebri \mathbb{C} 'ye izomorf olan bir cisim kapsadığından K 'yi \mathbb{C} üzerindeki bir vektör uzayı olarak düşünebiliriz. Bunun için şu tanımı yapmak gerekir:

$$q \in \mathbf{K} \text{ ve } x = (a_0 + a_1\sqrt{-1}) \in \mathbb{C} \Rightarrow q x$$

çarpımı $q (a_0 + a_1\bar{e}_1) \in \mathbf{K}$ kuaterniyonuna karşılık gelsin.

O zaman

$$(i) \quad (q_1 + q_2) x = q_1 x + q_2 x$$

$$(ii) \quad q (x_1 + x_2) = q x_1 + q x_2$$

$$(iii) \quad q (x_1 x_2) = (q x_1) x_2 = (q x_2) x_1$$

$$(iv) \quad q (1 + 0\bar{e}_1) = q$$

olur. Böylece \mathbf{K} kümesi \mathbb{C} kompleks sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı olmuş olur (burada q 'nun x ile soldan çarpımı esas alınmıştır). Kompleks sayılar cismi üzerinde herhangi bir q kuaterniyonunun ifadesi, $e_0 = +1$ olmak üzere,

$$q = a_0 e_0 + a_1 \bar{e}_1 + a_2 \bar{e}_2 + a_3 \bar{e}_3$$

veya

$$q = e_0(a_0 + a_1\sqrt{-1}) + \bar{e}_2(a_2 - a_3\sqrt{-1})$$

şeklinde yazılabilir. Buradan \mathbf{K} 'nın \mathbb{C} üzerinde 2-boyutlu olduğu sonucuna varılır. Bu durumda

$$\mathbf{K} = S_p \{e_0, \bar{e}_2\}$$

olur, yani \mathbf{K} 'nın bir bazı $\{e_0, \bar{e}_2\}$ olur.

\mathbf{K} 'nın matris gösterimini elde etmek için bir

$$T: \mathbf{K} \rightarrow \text{Hom}(\mathbf{K}, \mathbf{K})$$

$$q \rightarrow T_q$$

dönüşümünü, $\forall q \in \mathbf{K}$ için,

$$T_q: \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}$$

$$q' \rightarrow T_q(q') = qq'$$

şeklinde tanımlayalım. Buradan

$$T_q(q'_1 + q'_2) = T_q(q'_1) + T_q(q'_2)$$

$$T_q(q' x) = T_q(q')x, \quad \forall x \in \mathbb{C}$$

olur ($(qq')x = q(q')x$ 'dır). Böylece

$$\text{Hom}(\mathbf{K}, \mathbf{K}) = \{T_q \mid q \in \mathbf{K}\}$$

kümesi \mathbb{C} üzerinde bir vektör uzayı olur. Böylece T_q dönüşümüne \mathbb{C} üzerinde

$$T_q(e_0) = e_0 x_{11} + \bar{e}_2 x_{21}$$

$$T_q(\bar{e}_2) = e_0 x_{12} + \bar{e}_2 x_{22}$$

formülleriyle tanımlanan bir 2×2 matrisi karşılık gelir. $q = e_0$ için

$$x_{11}=1, \quad x_{21}=x_{12}=0 \quad \text{ve} \quad x_{22}=1$$

olacağından T_{e_0} dönüşümüne karşılık gelen matris

$$T_{e_0} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olur. Benzer şekilde

$$T_{e_1} \leftrightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{bmatrix}, \quad T_{e_2} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad T_{e_3} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

olur. Böylece

$$T_{e_0 x + \bar{e}_2 y} \leftrightarrow \begin{bmatrix} x & -\bar{y} \\ y & \bar{x} \end{bmatrix}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$T_{q_1 q_2} = T_{q_1} \circ T_{q_2}$$

'dır. Böylece $q \rightarrow T_q$ dönüşümü \mathbf{K} cebirinin \mathbb{C} kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlanan bir 2×2 matris gösterimidir (Hacısalıhoğlu, 1983).

4. DUAL KUATERNİYONLAR

4.1. Tanımlar

Dual vektörlere benzer şekilde iki reel kuaterniyon

$$\left. \begin{aligned} q &= d + a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 \\ q^* &= d^* + a^*\vec{e}_1 + b^*\vec{e}_2 + c^*\vec{e}_3 \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

olmak üzere bir dual kuaterniyon

$$Q = q + \varepsilon q^*, \quad \varepsilon^2 = 0 \quad (4.2)$$

şeklinde tanımlanır. Bu dual kuaterniyonu

$$Q = D + A\vec{e}_1 + B\vec{e}_2 + C\vec{e}_3 \quad (4.3)$$

olarak da yazmak mümkündür, burada

$$D = d + \varepsilon d^*, \quad A = a + \varepsilon a^*, \quad B = b + \varepsilon b^*, \quad C = c + \varepsilon c^*$$

'dır ve Q 'nun dual bileşenleri olarak adlandırılırlar. (4.3) ifadesi (1.1) ile verilen kuaterniyon ifadesine benzediğinden bileşenleri dual sayılar olan bir dual kuaterniyon olarak ele alınabilir. Bu dual kuaterniyonun skaler ve vektör kısımları, sırası ile S_Q ve \vec{V}_Q ile gösterilirse

$$\left. \begin{aligned} S_Q &= S_q + \varepsilon S_{q^*} = D \\ \vec{V}_Q &= \vec{V}_q + \varepsilon \vec{V}_{q^*} = A\vec{e}_1 + B\vec{e}_2 + C\vec{e}_3 \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

elde edilir. Bir dual kuaterniyonun skaler kısmı bir dual sayıdır ve vektör kısmı da bir dual vektördür.

(4.3) denklemi aşağıdaki şekilde açılabilir:

$$Q = d + a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 + d^*(\varepsilon) + a^*(\varepsilon\vec{e}_1) + b^*(\varepsilon\vec{e}_2) + c^*(\varepsilon\vec{e}_3)$$

$d, a, b, c, d^*, a^*, b^*$ ve c^* reel sayılarına Q dual kuaterniyonunun sekiz temel elemanları denir. Böylece formel olarak bir dual kuaterniyon sekiz temel eleman cinsinden tanımlanabilir: öyle ki bu sekiz temel elemanın her biri reel sayıdır ve belli bir sırada

yer almışlardır. Ayrıca $+1, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \varepsilon, \varepsilon\bar{e}_1, \varepsilon\bar{e}_2, \varepsilon\bar{e}_3$ gibi sekiz birimle birleşmişlerdir. Dolayısıyla bir Q dual kuaterniyonu en genel formda birbirinden bağımsız sekiz reel sayı gerektirir (Hacısalıhoğlu, 1983).

4.2. Dual Kuaterniyonlar Üzerinde Temel İşlemeler

4.2.1. Dual Sıfır Kuaterniyonu

Bir dual kuaterniyonun hem reel hem de dual kısmı ayrı ayrı sıfır kuaterniyonlar iseler dual kuaterniyona sıfır'dır denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

4.2.2. Dual Kuaterniyonlarda Eşitlik

İki dual kuaterniyonun reel ve dual kısımları, karşılıklı olarak, eşit iseler bu iki kuaterniyona eşittirler denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

4.2.3. Dual Kuaterniyonlarda Toplama

İki dual kuaterniyonun toplamı karşılıklı olarak bu iki kuaterniyonun reel ve dual kısımlarının toplamıyla elde edilir. Aynı kural fark için de vardır (Hacısalıhoğlu, 1983).

4.2.4. Dual Kuaterniyonlarda Çarpma

İki dual kuaterniyon

$$\left. \begin{aligned} Q &= q + \varepsilon q^* \\ P &= p + \varepsilon p^* \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

olsun. İki dual kuaterniyonun çarpımı şunlardır:

$$Q \times P = q \times p + \varepsilon (q \times p^* + q^* \times p) \quad (4.6)$$

$$P \times Q = p \times q + \varepsilon (p \times q^* + p^* \times q) \quad (4.7)$$

q , q^* , p ve p^* formel kuaterniyonlar olduklarından $q \times p$, $q \times p^*$, ... çarpımları daha önce verilen kurallara göre hesaplanır. Böylece $Q \times P$ ve $P \times Q$ çarpımları tamamen belirtilmiş olurlar.

(4.6) ve (4.7) denklemlerinden aşağıdaki gözlemler elde edilebilir.

- (i) Genel olarak, dual kuaterniyon çarpımı dual kuaterniyonlar verir. Bununla beraber $q \times p^* + q^* \times p = 0$ ise $Q \times P$ çarpımı bir kuaterniyona indirgenir. Benzer şekilde $p \times q^* + p^* \times q = 0$ ise $P \times Q$ çarpımı da bir kuaterniyona indirgenir.
- (ii) Dual kuaterniyon çarpımları, genel olarak değişmeli değildir. $Q \times P$ çarpımına Q 'nun P ile soldan çarpımı ve $P \times Q$ çarpımına da P 'nin Q ile sağdan çarpımı denir. Gerçekten, sadece Q ile P orantılı ise (yani λ bir skaler olmak üzere $Q = \lambda P$ ise) $Q \times P = P \times Q$ olur.
- (iii) Dual kuaterniyon çarpımları dağılımlıdır.
- (iv) Dual kuaterniyon çarpımları birleşimlidir:
 $((Q \times P) \times R = Q \times (P \times R))$ 'dir (Hacısalihoglu, 1983).

4.2.5. Dual Kuaterniyonlarda Eşlenik

Bir $Q = q + \varepsilon q^*$ dual kuaterniyonunun eşleniği K_Q ile gösterilir ve

$$K_Q = K_q + \varepsilon K_{q^*} = D - A\bar{e}_1 - B\bar{e}_2 - C\bar{e}_3 \quad (4.8)$$

olarak tanımlanır. $Q_1 = q_1 + \varepsilon q_1^*$ ve $Q_2 = q_2 + \varepsilon q_2^*$ dual kuaterniyonlarının toplamı olan $Q_1 + Q_2 = q_1 + q_2 + \varepsilon (q_1^* + q_2^*)$ dual kuaterniyonunun eşleniği

$$K_{(Q_1+Q_2)} = K_{(q_1+q_2)} + \varepsilon K_{(q_1^*+q_2^*)} = K_{q_1} + K_{q_2} + \varepsilon (K_{q_1^*} + K_{q_2^*})$$

'dir. Böylece

$$K_{(Q_1+Q_2)} = K_{Q_1} + K_{Q_2} \quad (4.9)$$

olduğu görülür. Sözlerle ifade etmek gerekirse denebilir ki iki dual kuaterniyonun toplamının eşleniği eşleniklerinin toplamına eşittir.

İki dual kuaterniyonun çarpımının eşleniği

$$\begin{aligned} K_{(Q_1 \times Q_2)} &= K_{[q_1 \times q_2 + \varepsilon(q_1 \times q_2^* + q_1^* \times q_2)]} = K_{q_2} \times K_{q_1} + \varepsilon (K_{q_2^*} \times K_{q_1^*} + K_{q_2} \times K_{q_1^*}) \\ &= (K_{q_2} + \varepsilon K_{q_2^*}) \times (K_{q_1} + \varepsilon K_{q_1^*}). \end{aligned}$$

Böylece

$$K_{(Q_1 \times Q_2)} = K_{Q_2} \times K_{Q_1} \quad (4.10)$$

elde edilir. O halde, iki dual kuaterniyonun çarpımının eşleniği eşleniklerinin ters sıradaki çarpımına eşittir (Kempe, 1878).

4.2.6. Dual Kuaterniyonlarda Norm

(4.8) denkleminde tekrar görüldü ki Q ve K_Q 'nin vektör kısımları sadece işaret bakımından fark ederler, dolayısıyla $Q \times (K_Q) = (K_Q) \times Q$ 'dir. $Q \times (K_Q)$ çarpımına Q dual kuaterniyonunun normu denir ve N_Q ile gösterilir. Böylece

$$N_Q = Q \times K_Q = K_Q \times Q = D^2 + A^2 + B^2 + C^2 \quad (4.11)$$

'dir. (4.11)'den görüldüğü gibi N_Q bir dual sayıdır. Bu dual sayının reel kısmı $\text{Re}(N_Q)$ ve dual kısmı da $\text{Du}(N_Q)$ ile gösterilir. (2.45)'den

$$\left. \begin{aligned} \text{Re}(N_Q) &= d^2 + a^2 + b^2 + c^2 \\ \text{Du}(N_Q) &= 2 (d \times d^* + a \times a^* + b \times b^* + c \times c^*) \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

olduğu görülür. (4.11) gereğince eğer $Q \neq 0$ ise normu olan N_Q de sıfır olamaz.

Q_1 ve Q_2 gibi iki dual kuaterniyonun çarpımının normu

$$N_{(Q_1 \times Q_2)} = (Q_1 \times Q_2) \times K_{(Q_1 \times Q_2)} = Q_1 \times (Q_2 \times K_{Q_2}) \times K_{Q_1}$$

'dır. (4.11)'den $Q_2 \times K_{Q_2} = N_{Q_2}$ olduğundan ve bir dual sayının bir kuaterniyon ile çarpımı değişmeli olduğundan

$$\begin{aligned} N_{(Q_1 \times Q_2)} &= Q_1 \times N_{Q_2} \times K_{Q_1} = Q_1 \times K_{Q_1} \times N_{Q_2} \\ N_{(Q_1 \times Q_2)} &= N_{Q_1} \cdot N_{Q_2} \end{aligned} \quad (4.13)$$

elde edilir. Demek oluyor ki iki dual kuaterniyonun çarpımının normu, normlarının çarpımına eşittir (Hacısalıhoğlu, 1983).

4.2.7. Dual Kuaterniyonlarda İvers

Bir Q dual kuaterniyonunun inversi Q^{-1} ile gösterilir ve

$$Q^{-1} = \frac{K_Q}{N_Q} = \frac{D - A\vec{e}_1 - B\vec{e}_2 - C\vec{e}_3}{D^2 + A^2 + B^2 + C^2} \quad (4.14)$$

olarak tanımlanır. Q^{-1} 'in reel kısmı olan $\text{Re}(Q^{-1})$ ve dual kısmı olan $\text{Du}(Q^{-1})$ 'in ifadesi (4.14)'den

$$\begin{aligned} \text{Re}(Q^{-1}) &= \frac{d - a\vec{e}_1 - b\vec{e}_2 - c\vec{e}_3}{d^2 + a^2 + b^2 + c^2} \\ \text{Du}(Q^{-1}) &= \frac{d - a\vec{e}_1 - b\vec{e}_2 - c\vec{e}_3}{d^2 + a^2 + b^2 + c^2} \\ &\quad - \frac{2(dd^* + aa^* + bb^* + cc^*)}{(d^2 + a^2 + b^2 + c^2)^{3/2}} (d - a\vec{e}_1 - b\vec{e}_2 - c\vec{e}_3) \end{aligned} \quad (4.15)$$

olarak elde edilir. Böylece (4.11) ve (4.14)'den

$$Q \times Q^{-1} = Q^{-1} \times Q = 1 \quad (4.16)$$

elde edilir. (4.12)'de $Q_1 = Q$ ve $Q_2 = Q^{-1}$ konumu yapılarak

$$N_Q N_{(Q^{-1})} = 1 \quad \text{veya} \quad N_{(Q^{-1})} = \frac{1}{N_Q} \quad (4.17)$$

bulunur. O halde bir dual kuaterniyonun inversinin normu ile (4.9), (4.10) ve (4.13)'deki bağıllık n dual kuaterniyon için şu şekildedir:

$$K_{(Q_1+Q_2+\dots+Q_{n-1}+Q_n)} = K_{Q_1} + K_{Q_2} + \dots + K_{Q_{n-1}} + K_{Q_n} \quad (4.18)$$

$$K_{(Q_1 \times Q_2 \times \dots \times Q_{n-1} \times Q_n)} = K_{Q_n} \times K_{Q_{n-1}} \times \dots \times K_{Q_2} \times K_{Q_1} \quad (4.19)$$

$$N_{(Q_1 \times Q_2 \times \dots \times Q_{n-1} \times Q_n)} = N_{Q_1} \cdot N_{Q_2} \cdot \dots \cdot N_{Q_{n-1}} \cdot N_{Q_n} \quad (4.20)$$

(4.18) ve (4.19)'den

$$(Q_1 \times Q_2 \times \dots \times Q_{n-1} \times Q_n)^{-1} = Q_n^{-1} \times Q_{n-1}^{-1} \times \dots \times Q_2^{-1} \times Q_1^{-1} \quad (4.21)$$

elde edilir (Hacısalihoglu, 1983).

4.2.8. Dual Kuaterniyonların Bölümü

Bir P dual kuaterniyonunu bir diğer Q dual kuaterniyonu ile bölmek için

$$R_1 Q = P \quad (4.22)$$

$$Q R_2 = P \quad (4.23)$$

denklemlerinden R_1, R_2 bölenlerini çözmek gerekir. (4.22) ve (4.23)'ü, sırasıyla, sağdan ve soldan Q^{-1} ile çarparak

$$R_1 = P \times Q^{-1} \quad (4.24)$$

$$R_2 = Q^{-1} \times P \quad (4.25)$$

elde edilir. Genel olarak R_1 ve R_2 farklı iki dual kuaterniyondur; R_1 'e, P'nin Q ile sağdan bölümü ve R_2 'ye de P'nin Q ile soldan bölümü denir (Hacısalihoglu, 1983).

4.2.9. Birim Dual Kuaterniyon

Normu birim olan (yani reel kısmı birim ve dual kısmı sıfır olan) bir dual kuaterniyona birim dual kuaterniyon denir ve Q_0 ile gösterilir. Böyle bir kuaterniyon

$$Q_0 = D + A\vec{e}_1 + B\vec{e}_2 + C\vec{e}_3 \quad (4.26)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada

$$D = d + \varepsilon d^*, \quad A = a + \varepsilon a^*, \quad B = b + \varepsilon b^*, \quad C = c + \varepsilon c^*$$

dual bileşenlerini oluşturan sekiz temel eleman aşağıdaki kısıtlamalara uymak zorundadırlar:

$$\left. \begin{aligned} d^2 + a^2 + b^2 + c^2 &= 1 \\ dd^* + aa^* + bb^* + cc^* &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.27)$$

(4.26)'da ifade edilen Q_0 birim dual kuarterniyonu

$$Q_0 = \cos\theta_0 + \vec{S}_0 \sin\theta_0 \quad (4.28)$$

formunda ifade edilebilir. Burada

$$\cos\theta_0 = D; \quad \sin\theta_0 = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}; \quad (4.29)$$

$$\vec{S}_0 = \frac{A\vec{e}_1 + B\vec{e}_2 + C\vec{e}_3}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (4.30)$$

ve θ_0 dual açısı da Q_0 'ın açısıdır ve \vec{S}_0 ise Q_0 'ın eksenini belirten birim dual vektördür. (4.29) ve (4.30) dual denklemlerini skaler formda yazarak θ_0 ve \vec{S}_0 , sekiz temel eleman cinsinden çözümlerse (4.27) şartlarını sağlayan

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \arccos(d) \\ \theta^* &= -\frac{d^*}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \end{aligned} \right\} \quad (4.31)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{S}_0 &= \frac{a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ \vec{S}_0^* &= \frac{a^* \vec{e}_1 + b^* \vec{e}_2 + c^* \vec{e}_3}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} + \frac{dd^*(a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \end{aligned} \right\} \quad (4.32)$$

ve böylece

$$\theta_0 = \theta + \varepsilon \theta^*, \quad \vec{S}_0 = \vec{S}_0 + \varepsilon \vec{S}_0^*$$

elde edilir (Hacısalıhoğlu, 1983).

4.2.10. Dual Sayılar, Dual Vektörler ve Dual Kuaterniyonlar

Buraya kadar dual sayılar, dual vektörler ve dual kuaterniyonlar dediğimiz büyüklükleri birer skaler olan reel sayılar ile tanımladık.

- (I) $\varepsilon^2 = 0$ olacak şekilde tanımlanan ε birimi ile yeni iki operasyon sayesinde dual sayılar halkasını elde ederiz.
- (II) $\varepsilon^2 = 0$ olacak şekilde ε birimi ve 3-boyutlu uzayın reel vektörleri kümesinde tanımlanan işlemler bizi dual vektörler denen yeni bir kavrama getirir.
- (III) Kuaterniyonlar cebirinin kurallarını (I) ve (II)'de belirtilen iki kavramla birleştirerek dual kuaterniyon kavramı elde edilir. Böylece dual sayılar ve dual vektörler dual kuaterniyonlardan birer özel hal olarak elde edilebilirler.

Dual sayılar vektör kısımları sıfır olan dual kuaterniyonlardır. Sırf dual olan vektörler skaler kısımları sıfır olan dual kuaterniyonlardır. O halde buraya kadar irdelenen bütün kantiteler $+1, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \varepsilon, \varepsilon\bar{e}_1, \varepsilon\bar{e}_2, \varepsilon\bar{e}_3$ gibi sekiz temel birimin reel sayılarla birleşmesinden ortaya çıkmıştır (Hacısalıhoğlu, 1983).

4.3. Kuaterniyon Operatörü ve Diğer İlgili Operatörler

4.3.1. Kompleks Sayı Operatörü

$$S_{a_0} = S_{b_0} = |a_0| = |b_0| = 1$$

olacak şekilde a_0 ve b_0 kompleks sayılarını alalım.

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \cos\theta_a + i \sin\theta_a = e^{i\theta_a} \\ b_0 &= \cos\theta_b + i \sin\theta_b = e^{i\theta_b} \end{aligned} \right\} \quad (4.33)$$

yazabiliriz. a_0 ve b_0 arasındaki açı θ ise $\theta_b - \theta_a = \theta$ olduğu açıktır. (4.33)'ün taraf tarafa bölümünden

$$\frac{b_0}{a_0} = e^{i(\theta_b - \theta_a)} = e^{i\theta} \quad (4.34)$$

elde edilir. Buradan

$$\mathbf{b}_0 = [e^{i\theta}] \mathbf{a}_0 \quad (4.35)$$

$$\mathbf{a}_0 = [e^{-i\theta}] \mathbf{b}_0 \quad (4.36)$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$$

ile gösterilen

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\theta \rightarrow e^{i\theta}$$

operatörüne kompleks sayı operatörü denir. Kompleks düzlemde, yani XOY düzleminde, bir kompleks sayıyı $e^{i\theta}$ ile çarpmak demek, bu kompleks sayının argümentini θ kadar artırmak demektir. Diğer bir ifade ile kompleks sayıya karşılık gelen vektörü 0 başlangıç noktası etrafında θ kadar döndürmek demektir. $\theta > 0$ ise dönme pozitif yönde ve $\theta < 0$ ise dönme negatif yönde ve $\theta = 0$ ise dönme yoktur (Hacısalihoglu, 1983).

4.3.2. Kuaterniyon Operatörü

$\vec{\mathbf{a}}_0$ ve $\vec{\mathbf{b}}_0$ vektörleri yerine XOY düzleminde iki yönlü doğru alalım ve aralarındaki açı θ olsun. Bu iki doğrunun gerdiği düzlem XOY 'dir. Bu düzlemi P ile gösterelim. P 'nin XOY 'den farklı olması $\vec{\mathbf{a}}_0$ ve $\vec{\mathbf{b}}_0$ vektörlerini kapsayan doğruların seçilişi ile mümkündür. Bu demektir ki P düzlemi, kesişen iki doğrusu ile genel olarak seçilebilir.

$$\|\vec{\mathbf{S}}^*\| = \|\vec{\mathbf{a}}_0\| = \|\vec{\mathbf{b}}_0\| = 1$$

olacak şekilde

$$\vec{\mathbf{S}}^* = \frac{\vec{\mathbf{a}}_0 \wedge \vec{\mathbf{b}}_0}{\|\vec{\mathbf{a}}_0 \wedge \vec{\mathbf{b}}_0\|}$$

vektörünü alalım. Böylece $\{\vec{\mathbf{a}}_0, \vec{\mathbf{b}}_0, \vec{\mathbf{S}}^*\}$ sistemi bir sağ sistem olur. Kuaterniyon çarpım (\times) ile gösterilmek suretiyle

$$\vec{b}_0 \times (\vec{a}_0)^{-1} = q^* \quad (4.37)$$

$$(\vec{b}_0)^{-1} \times \vec{a}_0 = q^* \quad (4.38)$$

$$q^* = \cos\theta + \vec{S}^* \sin\theta, \theta \in \mathbb{R}$$

olsun. İşte bu

$$q^* = \cos\theta + \vec{S}^* \sin\theta$$

olarak tanımlanan q^* reel kuaterniyonu ile ortaya çıkan

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbf{K}$$

$$\theta \rightarrow q^*$$

operatörüne kuaterniyon operatörü denir. (4.37)'in her iki yanını sağdan \vec{a}_0 ile kuaterniyon çarpımında çarparsak

$$\vec{b}_0 = q^* \times \vec{a}_0 \quad (4.39)$$

bulunur. Benzer şekilde (4.38)'i de soldan \vec{b}_0 ile kuaterniyon çarparsak

$$\vec{a}_0 = \vec{b}_0 \times q^* \quad (4.40)$$

elde edilir. (4.39)'den görülüyor ki \vec{a}_0 kuaterniyonunu q^* ile soldan çarpmak demek \vec{b}_0 'ı elde etmek demektir. Diğer bir ifadeyle, \vec{a}_0 'ı \vec{b}_0 üzerine taşımak, bu iş \vec{a}_0 vektörünü \vec{S}^* etrafında θ kadar döndürmek demektir.

Benzer irdeleme (4.40) için yapılırsa bir vektörü q^* ile sağdan çarpmak demek \vec{S}^* etrafında negatif yönde θ kadar döndürmek demektir.

Sonuç olarak;

$q^* = \cos\theta + \vec{S}^* \sin\theta$ olmak üzere \vec{S}^* 'a dik bir P düzlemi içinde yatan bir α vektörünü q^* ile soldan çarpmak demek (sağdan çarpmak demek), α vektörünü \vec{S}^* etrafında pozitif yönde (negatif yönde) θ kadar döndürmek demektir.

Eğer P'yi geren vektörler olarak \vec{e}_1, \vec{e}_2 alınırsa $\vec{S}^* = \vec{e}_3$ alınarak P'deki dönmeler için $q^* = \cos\theta + \vec{e}_3 \sin\theta$ operatörü uygulanabilir. Bu da

$$q^* = \cos\theta + \vec{e}_3 \sin\theta$$

ve $e^{i\theta}$ operatörlerinin aynı işi yaptığını gösterir (Hacısalıhoğlu, 1983).

4.3.3. Dönme Operatörü

\vec{A} ve \vec{B} iki birim dual vektör olsun. \vec{A} ve \vec{B} 'ye karşılık gelen doğrular, sırasıyla, d_1 ve d_2 olsun. $d_1 \cap d_2 = \{0\}$ ve $\sphericalangle (d_1, d_2) = \theta$ ise $\Theta = \theta$ 'dır, zira $\Theta = \theta + \varepsilon\theta^*$ ve $\theta^* = 0$ 'dır.

$$\vec{S}^{-*} // \vec{A} \wedge \vec{B}$$

olarak seçilirse

$$\vec{B} \times (\vec{A})^{-1} = Q^* \quad (4.41)$$

$$(\vec{B})^{-1} \times \vec{A} = Q^* \quad (4.42)$$

olduğunu biliyoruz. Burada

$$Q^* = \cos\theta + \vec{S}^{-*} \sin\theta$$

'dır. (4.41) ve (4.42)'den sırasıyla,

$$\vec{B} = Q^* \times \vec{A} \quad (4.43)$$

$$\vec{A} = \vec{B} \times Q^* \quad (4.44)$$

yazılabilir. O halde şu sonucu verebiliriz: \vec{S}^{-*} 'a dik bir birim dual vektörü $Q^* = \cos\theta + \vec{S}^{-*} \sin\theta$ ile soldan çarpmak (sağdan çarpmak) demek gelen doğruyu, \vec{S}^{-*} 'a normal olan düzlem içinde \vec{S}^{-*} doğrusu etrafında pozitif yönde (negatif yönde) θ kadar döndürmek demektir (Hamilton, 1844).

5. EULER AÇILARININ KULLANIMI

5.1. Rodrigues Denklemi

Bir $[A]$ ortogonal matrisi verildiğinde,

$$\vec{X} - \vec{x} = [A-I] [A+I]^{-1} (\vec{X} + \vec{x})$$

ve $B = [A-I][A+I]^{-1}$ ile belli olan bir $[B]$ anti-simetrik matris vardır. Böylece;

$$\vec{X} - \vec{x} = [B](\vec{X} + \vec{x}) \quad (5.1)$$

yazılabilir. (5.1) eşitliği, dönen cismin noktalarının hareketli ve sabit çatıdaki koordinatları arasındaki ilişkiyi verir. (5.1) eşitliği yerine, $[B]$ ile belli olan vektör \vec{b} olmak üzere;

$$\vec{X} - \vec{x} = \vec{b} \times (\vec{X} + \vec{x}) \quad (5.2)$$

yazılabilir. (5.2) eşitliği dönmeler için Rodrigues denklemi olarak adlandırılır. Bu eşitlikteki \vec{b} vektörüne de Rodrigues vektörü denir.

(5.2) eşitliğindeki \vec{X} ve \vec{x} yerine, bu vektörlerin \vec{b} 'ye dik olan düzleme izdüşümleri olan \vec{X}^* ve \vec{x}^* için de geçerlidir. Gerçekten,

$$\vec{X} = \vec{X}^* + \lambda \vec{b} \quad \vec{x} = \vec{x}^* + \lambda \vec{b},$$

$$\vec{X}^* = \vec{X} - \lambda \vec{b} \quad \vec{x}^* = \vec{x} - \lambda \vec{b}$$

$$[A] \vec{x}^* = [A](\vec{x} - \lambda \vec{b}) = [A] \vec{x} - \lambda [A] \vec{b} = [A] \vec{x} - \lambda \vec{b} = \vec{X} - \lambda \vec{b} = \vec{x}^*$$

Yani \vec{x} ve \vec{X} arasındaki $\vec{X} = [A] \vec{x}$ eşitliği, \vec{x}^* ve \vec{X}^* için de geçerlidir. Dolayısıyla,

$$\vec{X}^* - \vec{x}^* = \vec{b} (\vec{X}^* + \vec{x}^*)$$

olup norm alınır;

$$\|\vec{X}^* - \vec{x}^*\| = \|\vec{b}\| \cdot \|\vec{X}^* + \vec{x}^*\| \sin(b, \vec{X}^* + \vec{x}^*) \quad (5.3)$$

$$\|\vec{X}^* - \vec{x}^*\| = \|\vec{b}\| \cdot \|\vec{X}^* + \vec{x}^*\|$$

$$\begin{aligned}
\|\vec{\mathbf{X}}^* - \vec{\mathbf{x}}^*\| &= \langle \vec{\mathbf{X}}^* - \vec{\mathbf{x}}^*, \vec{\mathbf{X}}^* - \vec{\mathbf{x}}^* \rangle^{1/2} \\
&= (\langle \vec{\mathbf{X}}^*, \vec{\mathbf{x}}^* \rangle - 2\langle \vec{\mathbf{X}}^*, \vec{\mathbf{x}}^* \rangle + \langle \vec{\mathbf{X}}^*, \vec{\mathbf{X}}^* \rangle)^{1/2} \\
&= (\|\vec{\mathbf{X}}^*\|^2 - 2\|\vec{\mathbf{X}}^*\|\|\vec{\mathbf{x}}^*\|\cos\phi + \|\vec{\mathbf{x}}^*\|^2)^{1/2}, \|\vec{\mathbf{X}}^*\| = \|\vec{\mathbf{x}}^*\| = a, a > 0 \\
&= [2a^2(1 - \cos\phi)]^{1/2}
\end{aligned}$$

Benzer işlemlerle;

$$\|\vec{\mathbf{X}}^* + \vec{\mathbf{x}}^*\| = (2a^2(1 + \cos\phi))^{1/2}$$

elde edilir. Ayrıca;

$$\tan \frac{\phi}{2} = \frac{\|\vec{\mathbf{X}}^* - \vec{\mathbf{x}}^*\|}{\|\vec{\mathbf{X}}^* + \vec{\mathbf{x}}^*\|} \quad (5.4)$$

‘den $\vec{\mathbf{b}}$ nin normu olarak;

$$\|\vec{\mathbf{b}}\| = \tan \frac{\phi}{2}$$

bulunur. $\vec{\mathbf{b}}$ nin bileşenleri;

$$\vec{\mathbf{b}} = \left(\tan \frac{\phi}{2} S_x, \tan \frac{\phi}{2} S_y, \tan \frac{\phi}{2} S_z \right)$$

dir. (S_x, S_y, S_z) , $\vec{\mathbf{b}}$ boyunca belirli olan birim vektörlerdir ve ‘Rodrigues Parametreleri’ olarak bilinirler (İşleyen, 2008).

5.2. Euler Parametreleri

$[A]$ ortogonal matrisi için Cayley formülü, ϕ dönme açısı ve $[B] = \tan \phi/2[S]$ den belli olan $\vec{\mathbf{s}}$ birim vektörünün bileşenleri cinsinden

$$[A] = [\cos\phi/2I - \sin\phi/2S]^{-1} [\cos\phi/2I + \sin\phi/2S] \quad (5.5)$$

olarak yazılabilir.

$$C = [\cos\phi/2I + \sin\phi/2S]$$

matrisindeki sabitlere A'nın "Euler Parametreleri" denir. Bu parametreler dört tane olup şunlardır:

$$c_0 = \cos\phi/2, \quad c_1 = \sin\phi/2 S_x, \quad c_2 = \sin\phi/2 S_y, \quad c_3 = \sin\phi/2 S_z \quad (5.6)$$

(5.5) eşitliğindeki $[\cos\phi/2I - \sin\phi/2S]$ invers matrisi hesaplanır ve $x=\phi/2$ alınırsa,

$$S = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}, \quad a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

$$[\cos[\phi/2I - \sin\phi/2S] = D, \quad \det D = \frac{1}{\cos x}$$

$$\begin{aligned} D^{-1} &= \left[\cos \frac{\phi}{2} I - \sin \frac{\phi}{2} S \right]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos x & -a \sin x & -b \sin x \\ a \sin x & \cos x & -c \sin x \\ b \sin x & c \sin x & \cos x \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{\cos x} \begin{bmatrix} \cos^2 x + c^2 \sin^2 x & -a \sin x \cos x - b c \sin^2 x & a c \sin x - b \sin^2 x \cos x \\ a \sin x \cos x - b c \sin^2 x & \cos^2 x + b^2 \sin^2 x & -c \cos x \sin x - a b \sin^2 x \\ a c \sin^2 x + b \sin x \cos x & c \cos x \sin x - a b \sin^2 x & \cos^2 x + a^2 \sin^2 x \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos x + c^2 \frac{\sin^2 x}{\cos x} & -a \sin x - b c \frac{\sin^2 x}{\cos x} & a c \frac{\sin^2 x}{\cos x} - b \sin x \\ a \sin x - b c \frac{\sin^2 x}{\cos x} & \cos x + b^2 \frac{\sin^2 x}{\cos x} & -c \sin x - a b \frac{\sin^2 x}{\cos x} \\ b \sin x + a c \frac{\sin^2 x}{\cos x} & c \sin x - a b \frac{\sin^2 x}{\cos x} & \cos x + a^2 \frac{\sin^2 x}{\cos x} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos x & 0 & 0 \\ 0 & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & \cos x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -a \sin x & -b \sin x \\ a \sin x & 0 & -c \sin x \\ b \sin x & c \sin x & 0 \end{bmatrix} + \frac{\sin^2 x}{x} \begin{bmatrix} c^2 & -b c & a c \\ -b c & b^2 & -a b \\ a c & -a b & a^2 \end{bmatrix} \\ &= \cos x I + \sin x \begin{bmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{bmatrix} + \frac{\sin^2 x}{x} \begin{bmatrix} 1 - a^2 - b^2 & -b c & a c \\ -b c & 1 - a^2 - b^2 & -a b \\ a c & -a b & 1 - b^2 - c^2 \end{bmatrix} \\ &= \cos x I + \sin x \begin{bmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{bmatrix} + \frac{\sin^2 x}{x} \left[I_3 + \begin{bmatrix} -a^2 - b^2 & -b c & a c \\ -b c & -a^2 - b^2 & -a b \\ a c & -a b & -b^2 - c^2 \end{bmatrix} \right] \end{aligned}$$

$$D = \cos\phi/2I + \sin\phi/2S + \frac{\sin^2\phi/2}{\cos\phi/2}(I+S^2)$$

bulunur. Bu eşitlik, C ile çarpılırsa,

$$A = I + 2S \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2} + 2S^2 \sin \frac{\phi}{2} \quad (5.7)$$

olur. Ve buradan da ;

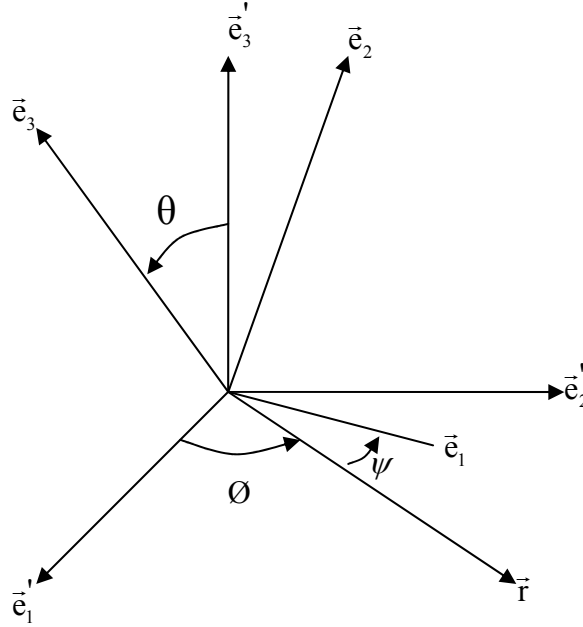
$$A = I + S \sin\phi + S^2(1 - \cos\phi) \quad (5.8)$$

elde edilir (Siminovitch, 1995).

6. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bir cismin sabit bir O noktası etrafında döndürüldüğünü kabul edelim. Uzayın bir O başlangıç noktasındaki bazlarından biri $\{\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3\}$ ve cisme bağlı bir diğer baz $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ olsun. Birinci sistem sabit sistem ve ikincisi de hareketli sistem olarak bilinmektedir.

Bu iki sistem arasındaki fonksiyonel bağıntı aşağıdaki üç ardışık dönmenin bileşkesi olarak elde edilebilir.



Şekil 6.1. Euler açıları

- I. \bar{e}'_1 'nin \bar{e}'_3 etrafında \emptyset derecelik bir dönmesi ile \bar{e}'_1 'den \bar{r} eksenine gelinir.
- II. \bar{e}'_3 'nün \bar{r} eksen etrafında θ derecelik bir dönmesi ile \bar{e}'_3 'den \bar{e}_3 'e gelinir.
- III. \bar{r} ekseninin \bar{e}_3 etrafında ψ derecelik bir dönmesi ile \bar{r} 'den \bar{e}_1 'e gelinir.

Bu üç dönmenin denklemleri sırasıyla,

$$\bar{r} = [Q(\bar{e}'_3, \emptyset)] \bar{e}'_1 \quad (6.1)$$

$$\vec{e}_3 = [Q(\vec{r}, \theta)] \vec{e}_3' \quad (6.2)$$

$$\vec{e}_1 = [Q(\vec{e}_3, \psi)] \vec{e}_3 \quad (6.3)$$

Bu üç denklemden, hareketli sistemin sabit sisteme göre konumu \emptyset , θ ve ψ parametreleriyle tamamen belirlenebilir: bu açılara Euler açıları denir. Baz sistemlerimizin ortonormal olduklarını düşünerek (6.1), (6.2) ve (6.3)'ün açıklamaları ile

$$\vec{r} = (\cos\emptyset + \vec{e}_3' \sin\emptyset) \vec{e}_1' = \vec{e}_1' \cos\emptyset + \vec{e}_2' \sin\emptyset \quad (6.4)$$

$$\vec{e}_3 = (\cos\theta + \vec{r} \sin\theta) \vec{e}_3' = \vec{e}_3' \cos\theta + (\vec{r} \wedge \vec{e}_3') \sin\theta \quad (6.5)$$

$$\vec{e}_1 = (\cos\psi + \vec{e}_3 \sin\psi) \vec{r} = \vec{r} \cos\psi + (\vec{e}_3 \wedge \vec{r}) \sin\psi \quad (6.6)$$

(6.4)'ün her iki tarafı \vec{e}_3' ile sağdan dış çarpılırsa,

$$\begin{aligned} \vec{r} \wedge \vec{e}_3' &= (\vec{e}_1' \cos\emptyset + \vec{e}_2' \sin\emptyset) \vec{e}_3' = \vec{e}_1' \wedge \vec{e}_3' \cos\emptyset + \vec{e}_2' \wedge \vec{e}_3' \sin\emptyset \\ &= -\vec{e}_2' \cos\emptyset + \vec{e}_1' \sin\emptyset \end{aligned}$$

$$\vec{r} \wedge \vec{e}_3' = \vec{e}_1' \sin\emptyset - \vec{e}_2' \cos\emptyset \quad (6.7)$$

elde edilir. (6.5)'ün her iki tarafı sağdan \vec{r} ile çarpılır ve (6.7) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \vec{e}_3 \wedge \vec{r} &= (\vec{e}_3' \cos\theta + (\vec{r} \wedge \vec{e}_3') \sin\theta) \wedge \vec{r} = \vec{e}_3' \wedge \vec{r} \cos\theta + (\vec{r} \wedge \vec{e}_3') \wedge \vec{r} \sin\theta \\ &= \vec{e}_3' \wedge \vec{r} \cos\theta + \vec{e}_3' \sin\theta \end{aligned} \quad (6.8)$$

elde edilir. (6.7)'in (6.5)'te yerine konulmasıyla,

$$\begin{aligned} \vec{e}_3 &= \vec{e}_3' \cos\theta + (\vec{e}_1' \sin\emptyset - \vec{e}_2' \cos\emptyset) \sin\theta \\ \vec{e}_3 &= \vec{e}_1' \sin\emptyset \sin\theta - \vec{e}_2' \cos\emptyset \sin\theta + \vec{e}_3' \cos\theta \end{aligned} \quad (6.9)$$

Ve aynı şekilde (6.4) ile (6.8)'nin (6.6)'da kullanılması ile

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \vec{r} \cos\psi + (\vec{e}_3 \wedge \vec{r}) \sin\psi = (\vec{e}_1' \cos\emptyset + \vec{e}_2' \sin\emptyset) \cos\psi + \\ \vec{e}_1 &= \vec{e}_1' (\cos\emptyset \cos\psi - \sin\emptyset \sin\psi \cos\theta) \end{aligned}$$

$$+\vec{e}'_2(\sin \varnothing \cos \psi - \cos \varnothing \sin \psi \cos \theta) + \vec{e}'_3(\sin \psi \sin \theta) \quad (6.10)$$

elde edilir. (6.9) ve (6.10)'dan

$$\begin{aligned} \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 = \vec{e}'_1(-\cos \varnothing \sin \psi - \sin \varnothing \cos \psi \cos \theta) \\ + \vec{e}'_2(-\sin \varnothing \sin \psi + \cos \varnothing \cos \psi \cos \theta) + \vec{e}'_3(\cos \psi \sin \theta) \end{aligned} \quad (6.11)$$

(6.9), (6.10) ve (6.11) denklemleri hareketli sistemden sabit sisteme olan bir dönüşüm denklemleridirler. Ters dönüşüm denklemlerini de (6.1) ve (6.2)'den aynı metot fakat ters sıra ile elde edebiliriz (Hacısalıhoğlu, 1983).

KAYNAKLAR

- Bottema, O.; Roth, 1979. *Theoretical Kinematics*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam. 545.
- Hacısalıhoğlu, H.H., 1983. *Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi*, Gazi Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fak. Yay., Mat.No:2, Ankara. 338.
- Hamilton, W.R., 1844. On a New Species of Imaginary Quantities Connected with the Theory of Quaternions. *Proc R. Irish Acad.*, 2: 424-434.
- İşleyen, Ş., 2008. A Linear Model for MRG and Quaternion Operator. *International Mathematical Forum.*, No.15 (3) : 713-719.
- Kempe, A.B., 1878. Note on Mr. Luedesdorf's Theorem in Kinematics, *The Messenger of Mathematics*, 7: 165-167
- McCarthy, J. M., 1990. *An Introduction to Theoretical Kinematics*. The MIT Pres, Massachusetts. 130.
- Siminovitch, D.J., 1995. A Classical View of the Euler Angles and the Euler Kinematic Equations. *Journal of Magnetic Resonance*, Series A 117: 235-245.

ÖZ GEÇMİŞ

1978 yılında Muş'ta doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Muş'ta tamamladı. 1996 yılında Atatürk Üniversitesi Erzincan Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümü'nü kazandı. 2000 yılında bölümünü başarıyla bitirdikten sonra 2001 yılında Muş Anadolu Lisesi'ne Matematik Öğretmeni olarak atandı. 2005 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı.