

T.C.  
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ  
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SCHRÖDİNGER DENKLEMİ İÇİN LOKAL  
OLMAYAN SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

Ali SIRMA  
DOKTORA TEZİ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GEBZE

2007

T.C.  
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ  
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SCHRÖDİNGER DENKLEMİ İÇİN LOKAL  
OLMAYAN SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

Ali SIRMA  
DOKTORA TEZİ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI  
Prof. Dr. Allaberen ASHYRALYEV  
Yrd. Doç. Dr. Coşkun YAKAR

GEBZE

2007

## ÖZET

**BAŞLIK:** Schrödinger Denklemi için Local Olmayan Sınır Değer Problemleri.

**YAZAR:** Ali SIRMA

Bu doktora tezinde  $H$  Hilbert uzayında  $A$  özeşlenik (self-adjoint) operatör olmak üzere Schrödinger denklemi için lokal olmayan sınır değer problemleri araştırılmıştır. Bu problemlerin çözümlerinin kararlılığı incelenmiştir. İki tane lokal olmayan sınır değer problemi incelenmiştir. Lokal olmayan sınır değer probleminin yaklaşık çözümleri için birinci ve ikinci basamaktan doğruluklu fark şemaları kurulmuştur. Bu fark şemalarının kararlılığı gösterilmiştir. Uygulamada Schrödinger denkleminin fark denklemlerinin çözümlerinin kararlılığı elde edilmiştir. Lokal olmayan sınır şartlı tek-boyutlu Schrödinger denkleminin çözümü sayısal olarak elde edilmiştir. Bu fark denklemlerinin çözümünde iyileştirilmiş Gauss eleme metodunu içeren bir teknik kullanılmıştır. Metot sayısal değerlerle desteklenmiştir.

## SUMMARY

**TITLE:** Nonlocal Boundary Value Problems for Schrödinger Equation.

**AUTHOR:** Ali SIRMA

In this thesis we have studied nonlocal boundary value problems for Schrödinger equation in a Hilbert space  $H$  with the self-adjoint operator  $A$ . Stability estimates for the solution of this problem are established. Two nonlocal boundary value problems are investigated. The first and second order of accuracy difference schemes for the approximate solutions of this nonlocal boundary value problem are presented. Stability of these difference schemes is established. In practice, stability inequalities for the solutions of difference schemes for Schrödinger equation are obtained. A numerical method is proposed for solving a one-dimensional Schrödinger equation with nonlocal boundary condition. A procedure involving modified Gauss elimination method is used for solving these difference schemes. The method is illustrated by numerical examples.

## TEŞEKKÜR

Bu tez çalıőmasının ortaya çıkmasındaki katkılarından dolayı danıőmanlarım sayın Prof. Dr. Allaberen ASHYRALYEV'e ve Yrd. Doç. Dr. Coşkun YAKAR'a ve jüri üyeleri Prof. Dr. őennur SOMALİ, Prof. Dr. Tahir ALİYEV AZEROĐLU ve Doç. Dr. Mansur İSMAİLOV'a ve her zaman çalıőmalarımda beni destekleyen fedakar eőime teşekkür ederim.

## İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	Sayfa
ÖZET	IV
SUMMARY	V
TEŞEKKÜR	VI
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	VII
ŞEKİLLER DİZİNİ	IX
TABLolar DİZİNİ	X
BÖLÜM 1. GİRİŞ	1
BÖLÜM 2. SCHRÖDINGER DENKLEMİ İÇİN ÇOK NOKTALI LOKAL OLMAYAN SINIR DEĞER PROBLEMİ	12
2.1 Çok Noktalı Lokal Olmayan Sınır Değer Problemi	13
2.2 Uygulamalar	15
2.3 Fark Şemaları. Kararlılık	18
2.4 Fark Şemaları İçin Uygulamalar	30
2.5 Sayısal Sonuçlar	35
BÖLÜM 3. SCHRÖDINGER DENKLEMİ İÇİN İNTEGRALLİ, ÇOK NOKTALI LOKAL OLMAYAN SINIR DEĞER PROBLEMİ	43
3.1 İntegralli, Çok Noktalı Lokal Olmayan Sınır Değer Problemi	44
3.2 Uygulamalar	47
3.3 Fark Şemaları. Kararlılık	49
3.4 Fark Şemaları İçin Uygulamalar	61
3.5 Sayısal Sonuçlar	65
BÖLÜM 4. SCHRÖDINGER DENKLEMİ İÇİN ÇOK NOKTALI LOKAL OLMAYAN SINIR DEĞER PROBLEMİNE İYİLEŞTİRİLMİŞ CRANK- NICHOLSON FARK ŞEMALARI	73
4.1 Kararlılık Teoremi	74
4.2 Uygulamalar	85
4.3 Sayısal Sonuçlar	88

BÖLÜM 5. SCHRÖDİNGER DENKLEMİ İÇİN İNTEGRALLİ, ÇOK NOKTALI LOKAL OLMAYAN SINIR DEĞER PROBLEMİNE İYİLEŞTİRİLMİŞ CRANK- NICHOLSON FARK ŞEMALARI	94
5.1 Kararlılık Teoremi	95
5.2 Uygulamalar	105
5.3 Sayısal Sonuçlar	108
SONUÇLAR	114
KAYNAKLAR	115
ÖZGEÇMİŞ	118
EKLER	119

## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil	Sayfa
2.1. Tam Çözüm	40
2.2. Birinci Basamaktan Doğruluklu Fark Şeması	41
2.3. Crank-Nicholson Fark Şeması	41
3.1. Tam Çözüm	70
3.2. Birinci Basamaktan Doğruluklu Fark Şeması	70
3.3. Crank-Nicholson Fark Şeması	71
4.1. Tam Çözüm	91
4.2. Birinci Basamaktan Doğruluklu Fark Şeması	91
4.3. İyileştirilmiş Crank-Nicholson Fark Şeması	92
5.1. Tam Çözüm	111
5.2. Birinci Basamaktan Doğruluklu Fark Şeması	111
5.3. İyileştirilmiş Crank-Nicholson Fark Şeması	112

## TABLolar DİZİNİ

<b>Tablo</b>	<b>Sayfa</b>
2.1. N=M=18, 30, 60 değerleri için hata tablosu	42
2.2. N=M=18, 30, 60 değerleri için kısmi hata tablosu	42
3.1. N=M=18, 30, 60 değerleri için hata tablosu	71
3.2. N=M=18, 30, 60 değerleri için kısmi hata tablosu	71
4.1. N=M=18, 30, 60 değerleri için hata tablosu	92
4.2. N=M=18, 30, 60 değerleri için kısmi hata tablosu	93
5.1. N=M=18, 30, 60 değerleri için hata tablosu	112
5.2. N=M=18, 30, 60 değerleri için kısmi hata tablosu	113

# BÖLÜM 1

## GİRİŞ

Bilindiği üzere, kuantum fiziğindeki ve fiziğin diğer alanlarındaki pek çok problemler ve sesin su altındaki yayılımı ile ilgili matematiksel modeller Schrödinger denklem tipli kısmi türevli denklemleri netice vermektedir.

Schrödinger denklemi sesin su altındaki yayılımı ile ilgili matematiksel modellerde de kullanılmaktadır. Sesin su altında yayılımı ile ilgili ilk olarak 1973 de Tappert ve Hardin çalışmıştır. Daha sonra Papadakis, J.S. ([9]-[10]) tarafından ve Marie Elizabeth Mayfield de doktora tezinde [1] çalışmıştır. Aşağıdaki kısım bu çıkartımın nasıl olduğuna dair bir içgörü vermesi için bu doktora tezinden özetlenmiştir (Mayfield, 1989, sayfa 1-2 ve sayfa 17-19):

(Okyanusta sesin yayılımı sıcaklığa, tuzluluk oranına, sınırlanmış basınca, yoğunluğa hatta su organizmalarının varlığına bağlıdır. Okyanus eşisılı bir ortamdan ziyade adiabatik bir ortamdır: su içerisinde su transferi yoktur fakat genellikle bir derinlikten başka derinliğe sıcaklık farkı vardır. Okyanus yüzeyi, suyun derinliği ve tabanın ve tabanın altındaki bölgelerin okyanus içinde sesin hareketine katkıları vardır. Suyun hızı sıcaklık, tuzluluk ve derinlik ile artmaktadır; suyun hızı saniyede 1450 metreden 1550 metreye değişmektedir. İnsan kulağı ise 30 Hz. ile 20 kHz. frekans arasındaki sesi duyabilmektedir. Buna karşılık 1 Hz. den 300 kHz. frekans aralığı su altındaki sesin yayılımında kullanılmaktadır.

Ses basıncı  $P$  okyanusta

$$\Delta P - \frac{1}{c^2} P_{tt} = \nabla f \quad (1.1)$$

dalga denklemini sağlamaktadır.

Burada  $c = c(x, y, z)$  ses hızını ve  $f$  de ses kaynağını ifade etmektedir. Aşağıdaki sınır şartlarına göre okyanus yüzeyinin sürekliliğini ve tabanının sertliğini varsayıyoruz.

$$P = 0, \quad z = 0 \text{ ise} \quad (\text{okyanus yüzeyi})$$

$$P_z + P_x h_x + P_y h_y = 0, \quad z = h(x, y) \text{ ise.} \quad (\text{okyanus tabanı})$$

Eğer gerçekte, akustik kaynak zamanın harmonik noktasal bir kaynağı ise bu durumda  $P(x, y, z, t)$ ,  $e^{-i\omega t} p(x, y, z)$  formunda, kaynak dağılımı  $\nabla f$ ,  $e^{-i\omega t} q(x, y, z)$  formunda olur ve yukarıdaki denklem de

$$p = 0, \quad z = 0 \text{ ise} \quad (1.2)$$

$$p_z + p_x h_x + p_y h_y = 0, \quad z = h(x, y) \text{ ise} \quad (1.3)$$

sınır şartlı

$$\Delta p + k_0^2 n^2 p = q(x, y, z) \quad (1.4)$$

denkleminde dönüşür.  $k_0 = \frac{\omega}{c_0}$ ,  $\omega$  kaynağın açısal frekansı, ve

$n = n(x, y, z) = \frac{c_0}{c(x, y, z)}$  ise  $c_0$  referans ses hızının  $c$  ses hızına oranı olarak

kırılma indisidir.

$x_0 = (x_0, y_0, z_0)$ , noktasında bulunan bir nokta kaynak için  $q(x, y, z) = q(x)$  fonksiyonu  $q(x) = -\delta(x - x_0)$  delta fonksiyonu şeklinde alınabilir. (1.4) elliptik kısmi türevli denkleminin (1.2) Helmholtz veya indirgenmiş dalga denklemi denir. Bu denklem, (1.2)-(1.3) sınır şartlarıyla birlikte sualtı ses yayılımını ifade eden bir matematiksel model olarak çalışır.

Akustik dalgalar su içinde minimum hız bölgesine doğru hareket eğilimindedirler. Su sütununda sıcaklık ve basınç farklılıklarıyla biçimlenen bu bölge 1945 yılında keşfedildi. SOFAR (Ses Sabitleme ve Mesafelendirme) olarak isimlendirilen bu kanallarda sesin uzun mesafede yayılımı mümkündür. Bu SOFAR ses kanalları dalgaların okyanus yüzeyiyle ve okyanus tabanı ile etkileşmesini önler ve böylece 1000 mil uzağa kadar yayılımını mümkün kılar.

Yüksek frekanslı ses kanalları su içinde çok çabuk soğrulduğundan uzun mesafe yayılımları için düşük frekanslılar kullanılmaktadır. Yataya göre küçük ( $<16^\circ$ ) yayılım açıları da uzun mesafeli yayılımlar için kullanılmaktadır. İstenen maksimum yayılım açısı Snell kanunu ile tanımlandığı üzere

$$\text{Arc cos}(\text{ses kanalındaki minimum hız/okyanusun tabanındaki hız})$$

bağıntısı ile verilir.

Küçük açı, düşük frekans yayılım yaklaşımında dalgalar esas olarak kaynaktan yatay doğrultuda yayılırlar. Bütün bu varsayımlar dalga denkleminin bir parabolik yaklaşımı mümkün kılar.

Eksenel simetrik bir okyanusta  $p$  ses basıncı

$$p_{rr} + \frac{1}{r} p_r + p_{zz} + k_0^2 n^2(r, z) p = \frac{-\delta(z - z_0) \delta(r)}{2\pi r} \quad (1.5)$$

formunda indirgenmiş bir dalga denklemini sağlar.

Eğer yayılımın esas olarak radyal olduğunu varsaysak  $p(r, z)$  i  $H_0^1(k_0 r)$  Hankel fonksiyonunun asimtotik formu ile temsil edilen dışarı doğru yayılan silindirik dalga ile yavaşça değişen  $u(r, z)$  zarf fonksiyonunun çarpımı olarak

$$p(r, z) = u(r, z) \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}} \exp(ik_0 r)$$

şeklinde yazılabilir.

Eğer bu  $p$  fonksiyonunu (1.5) denkleminde yerine koyar ve kaynaktan uzaktaki  $p$  ile ilgilendiğimiz için sağ tarafı sıfırlarsak

$$u_{rr} + 2ik_0 u_r + u_{zz} + \left[ \frac{1}{4r^2} - k_0^2 + k_0^2 n^2(r, z) \right] u = 0 \quad (1.6)$$

elde edilir.

Burada ilgilendiğimiz  $r$  mesafesi kaynaktan pek çok dalga boyu uzakta olduğu için (1.6) da  $\frac{1}{r^2}$  içeren terim göz ardı edilebilir (uzak bölge yaklaşımı) ve böylece

$$u_{rr} + 2ik_0 u_r + u_{zz} + k_0^2 [n^2(r, z) - 1] u = 0 \quad (1.7)$$

bulunur.

Son olarak, yayılımın etkin olarak radyal olduğu kabul edildiği için (1.7) içinde  $u_{rr}$  terimi  $2ik_0 u_r$  ye göre ihmal edilebilir (paraksiyal yaklaşımı), böylelikle Schrödinger tipli (formal olarak) parabolik yaklaşım denklemi

$$2ik_0 u_r + u_{zz} + k_0^2 [n^2(r, z) - 1] u = 0 \quad (1.8)$$

elde edilir.

Bu yaklaşım denklemi sualtı ses yayılımı ile ilgili olarak ilk defa Tappert ve Hardin tarafından 1973 de kullanılmıştır. Not etmek gerektir ki bu denklemdeki  $r$ , parabolik kısmi differansiyel denklemdeki zamanın görevini üstlenmektedir.

Bu parabolik yaklaşım, düşük frekans, küçük açı ve uzun mesafeli yayılım varsayımları altında kabul edilmektedir. Bu denklem kırılma indisi  $n$  (kırınım ve bütün dalga etkilerini içinde bulundurur) derinliğe ve mesafeye bağlı olduğunda bile kullanılabilir.)

Açıktır ki eğer  $n(r, z) = n(z)$  alırsak (1.8) i  $H$  Hilbert uzayında  $A$  sınırlı olmayan lineer bir operatör olmak üzere

$$iu_t + Au = f(t) \quad (1.9)$$

soyut denkleme indirgeyebiliriz. Pek çok lineer Schrödinger denklemi bu forma indirgenebilir.

(1.9) differansiyel denklemi  $t$  ye göre birinci mertebeden türev içermektedir. Böylece, tam çözümü elde etmek için  $t$  ye göre bir koşula ihtiyacımız vardır. D.G. Gordeziani ve G.A. Avalishvili nin makelelerinde ([2]-[3]) çok noktalı lokal olmayan

$$u(0) = \sum_{m=1}^p \alpha_m u(\lambda_m) + \int_0^T \psi(s)u(s)ds + \varphi$$

şartı çalışılmıştır.

Bu çalışmada  $H$  Hilbert uzayında  $A$  özeşlenik lineer operatör olmak üzere

$$\begin{cases} i \frac{du}{dt} + Au = f(t), & 0 < t < T, \\ u(0) = \sum_{m=1}^p \alpha_m u(\lambda_m) + \int_0^T \psi(s)u(s)ds + \varphi, \\ 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_p \leq T \end{cases}$$

Schrödinger denklemi için lokal olmayan sınır değer problemi çalışılmıştır. Operatör teori kullanılarak bu lokal olmayan sınır değer probleminin çözümü için kararlılık kestirimleri incelenmiştir. Bu lokal olmayan sınır değer probleminin yaklaşık çözümleri için birinci basamaktan doğruluklu Rothe fark şeması, ikinci basamaktan doğruluklu Crank-Nicholson fark şeması ve ikinci basamaktan doğruluklu  $r$  -iyileştirilmiş Crank- Nicholson fark şemaları kurulmuştur. Bu fark şemalarının kararlılığı ispatlanmıştır. Uygulamada,

Schrödinger denklemi için kurulan fark şemalarının çözümleri için kararlılık eşitsizlikleri elde edilmiştir. Lokal olmayan sınır şartlı tek boyutlu Schrödinger denklemi için sayısal metod verilmiştir. Bu fark şemalarının çözümünde iyileştirilmiş Gauss eleme metodunu içeren bir teknik kullanılmıştır. Bu fark şemalarının çözümleri ile ilgili teorik ifadeler sayısal değerlerle desteklenmiştir.

Bilindiği üzere lineer Schrödinger denklemi Fourier serileri, Laplace transform metodu ve Fourier transform metoduyla çözülebilmektedir.

Bu metotların her biri için birer örnek verelim:

Öncelikle birinci mertebeden lineer Schrödinger denklemini

$$\begin{cases} i \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = e^{it} \sin x, & 0 < t < 1, \quad 0 < x < 2\pi, \\ u(0, x) = \sin x, & 0 \leq x \leq 2\pi, \\ u(t, 0) = u(t, 2\pi), \quad u_x(t, 0) = u_x(t, 2\pi), & 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (1.10)$$

ele alalım. Bu problemin çözümü için değişkenlerin ayırımı veya diğer ismiyle Fourier serileri metodu kullanılacaktır. Bu problemi çözmek için  $u(t, x)$  i

$$u(t, x) = v(t, x) + w(t, x),$$

şeklinde iki kısma ayırmamız gerekir şöyle ki,

$$\begin{cases} i \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + v = 0, & 0 < t < 1, \quad 0 < x < 2\pi, \\ v(0, x) = \sin x, & 0 \leq x \leq 2\pi, \\ v(t, 0) = v(t, 2\pi), \quad v_x(t, 0) = v_x(t, 2\pi), & 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (1.11)$$

ve

$$\begin{cases} i \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + w = e^{it} \sin x, & 0 < t < 1, \quad 0 < x < 2\pi, \\ w(0, x) = 0, & 0 \leq x \leq 2\pi, \\ w(t, 0) = w(t, 2\pi), \quad w_x(t, 0) = w_x(t, 2\pi), & 0 \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (1.12)$$

Öncelikle (1.11) problemini çözelim. Değişkenlerine ayırma metoduyla;

$$v(t, x) = T(t)X(x) \neq 0$$

tanımlarsak,

$$iT'(t)X(x) - T(t)X''(x) + T(t)X(x) = 0$$

veya

$$\frac{iT'(t) + T(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

elde edilir. Bu da,

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = X(2\pi), \quad X'(0) = X'(2\pi) \end{cases} \quad (1.13)$$

denklemini verir.

Üç durum söz konusudur. Şöyle ki;

$\lambda = \mu^2 > 0$  için sadece aşikar çözüm vardır.

$\lambda = 0$  için  $c$  herhangi bir sabit sayı olmak üzere  $X(x) = c$  çözümü elde edilir.

$\lambda = -\mu^2 < 0$  için  $\mu$  nun  $\mu = k$ ,  $k \in \mathbb{Z}^+$  ve çözümün

$$X_k(x) = c_k \sin kx + d_k \cos kx, \quad k = 1, 2, \dots$$

şeklinde olduğu görülür.  $T(t)$  yi elde etmek için

$$T'(t) - i(1+k^2)T(t) = 0$$

denklemini yazalım. Böylelikle  $T(t)$  için çözüm

$$T_k(t) = C_k e^{-(1+k^2)t}$$

şeklindedir. Böylelikle,

$$v(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \sin kx + b_k \cos kx) e^{i(1+k^2)t}$$

elde edilir.

$$v(0, x) = \sin x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

başlangıç koşulu kullanılırsa

$$a_1 = 1, \quad a_k = 0 \text{ for } k \neq 1,$$

$$b_k = 0 \text{ for } k \geq 0$$

elde edilir. Böylelikle,

$$v(t, x) \equiv e^{2it} \sin x$$

şeklinde olur.

İkinci olarak (1.12) probleminin çözümü elde edilir. Bunun için

$$w(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) \sin kx \quad (1.14)$$

alalım.

$$w(0, x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 2\pi, \quad (1.15)$$

başlangıç şartı kullanılarak

$$A_k(0) = 0, \quad \text{tüm } k \geq 1 \text{ için}$$

elde edilir. Şimdi, (1.14) ü (1.12) de yerine koyarsak

$$i \left[ \sum_{k=1}^{\infty} A_k'(t) \sin kx \right] + \sum_{k=1}^{\infty} k^2 A_k(t) \sin kx + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) \sin kx = e^{it} \sin x$$

yani

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[ iA_k'(t) + (k^2 + 1) A_k(t) \right] \sin kx = e^{it} \sin x$$

bulunur.  $\{\sin kx\}_{k=1}^{\infty}$  kümesi ortogonal bir küme olduğundan ve (1.15)

kullanılarak

$$iA_1'(t) + 2A_1(t) = e^{it}, \quad A_1(0) = 0,$$

$$iA_k'(t) + (k^2 + 1)A_k(t) = 0, \quad A_k(0) = 0, \quad k \geq 2$$

Cauchy problemleri elde edilir. Böylelikle

$$A_1(t) = e^{it} - e^{2it},$$

$$A_k(t) = 0, \quad k \geq 2,$$

sonra da

$$w(t, x) = (e^{it} - e^{2it}) \sin x$$

bulunur. Sonuç olarak (1.10) problemin çözümü

$$\begin{aligned} u(t, x) &= v(t, x) + w(t, x), \\ &= e^{2it} \sin x + (e^{it} - e^{2it}) \sin x, \\ &= e^{it} \sin x \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Not edelim ki, aynı metod kullanılarak çok boyutlu Schrödinger denklemi için lokal olmayan sınır değer probleminin de

$$\left\{ \begin{array}{l} i \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \sum_{r=1}^n \alpha_r \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x_r^2} = g(t, x), \\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega, \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(0, x) = \sum_{m=1}^p \alpha_m u(\lambda_m) + \varphi(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \\ u(t, x) = 0, \quad x \in S, \end{array} \right.$$

çözümü elde edilebilir. Burada  $g(t, x)$  ( $t \in [0, T]$ ,  $x \in \bar{\Omega}$ ),  $\varphi(x)$ , ( $x \in \bar{\Omega}$ ) verilmiş yeterince pürüzsüz (smooth) fonksiyonlardır.  $\Omega = (0 < x_k < 1, 1 \leq k \leq n)$  ise  $n$ -boyutlu  $\mathcal{R}^n$  Öklit uzayında birim açık küp ve  $S$  onun sınırı olmak üzere  $\bar{\Omega} = \Omega \cup S$  dir.

Ancak değişkenlerine ayırma metodu sadece kısmi türevli denklem sabit katsayıya sahip olduğunda geçerlidir. Çok iyi bilinmektedir ki,  $t$  ye veya konuma bağlı katsayılı kısmi türevli denklemleri çözümenin en faydalı yolu sonlu fark metodudur.

Şimdi Schrödinger denklemi için başka bir örnek verilecek. Bu örnek Laplace transform metoduyla çözülebilir ( $x$  e göre).

$$\left\{ \begin{array}{l} i \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = -e^{it-x}, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad 0 < x < \infty, \\ u(0, x) = e^{-x}, \quad 0 < x < \infty, \\ u(t, 0) = e^{it}, \quad u(t, \infty) = -e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 1. \end{array} \right. \quad (1.16)$$

şeklindedir.

$$U(t, s) = \mathbf{L}\{u(t, x)\} = \int_0^{\infty} u(t, x) e^{-xs} dx$$

olmak üzere

$$i u_t - u_{xx} + u = -e^{it-x}$$

kısmi türevli denklemin iki tarafına Laplace transformu uygulanırsa

$$i \mathbf{L}\{u_t\} - \mathbf{L}\{u_{xx}\} + \mathbf{L}\{u\} = \mathbf{L}\{-e^{it-x}\}$$

veya

$$iU(t,s)_t - s^2U(t,s) + su(t,0) + u_x(t,0) + U(t,s) = -\frac{e^{it}}{s+1}$$

elde edilir. Böylelikle problem

$$iU_t(t,s) - s^2U(t,s) + U(t,s) = \frac{-s^2}{s+1}e^{it}$$

sonra da

$$\begin{cases} U_t(t,s) - i(1-s^2)U(t,s) = \frac{is^2}{(s+1)}e^{it} \\ U(0,s) = \frac{1}{s+1} \end{cases}$$

şekline dönüşür. Böylece

$$U(t,s) = U(0,s)e^{i(1-s^2)t} + \int_0^t e^{i(1-s^2)(t-p)} \frac{is^2}{(s+1)} e^{ip} dp$$

Cauchy formülünü kullanarak

$$U(t,s) = \frac{e^{it}}{s+1}$$

elde edilir. Daha sonra ters Laplace transformu kullanılarak

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \mathbf{L}^{-1}\{U(t,s)\} = e^{it}\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} \\ &= e^{it}e^{-x} = e^{it-x} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylelikle,

$$u(t,x) = e^{it-x}$$

(1.16) lokal olmayan sınır değer probleminin çözümüdür.

Not edelim ki, aynı metod kullanılarak çok boyutlu Schrödinger denklemi için lokal olmayan sınır değer probleminin de

$$\begin{cases} i \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - \sum_{r=1}^n \alpha_r \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x_r^2} = g(t,x), \\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega^+, \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(0,x) = \sum_{m=1}^p \alpha_m u(\lambda_m) + \varphi(x), \quad x \in \overline{\Omega}^+, \\ u(t,x) = 0, \quad x \in S^+, \end{cases}$$

çözümü elde edilebilir. Burada  $g(t, x)(t \in [0, T], x \in \overline{\Omega}^+)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $(x \in \overline{\Omega}^+)$  verilmiş yeterince pürüzsüz fonksiyonlardır.  $\Omega^+ = (0 < x_k < \infty, 1 \leq k \leq n)$  ise  $n$ -boyutlu  $\mathfrak{R}^n$  Öklit uzayında açık küme ve  $S^+$  onun sınırı olmak üzere  $\overline{\Omega}^+ = \Omega^+ \cup S^+$  dir.

Ancak Laplace transform metodu sadece kısmi türevli denklem sabit katsayıya sahip olduğunda geçerlidir. Çok iyi bilinmektedir ki,  $t$  ye veya konuma bağlı katsayılı kısmi türevli denklemleri çözmek için en faydalı yolu sonlu fark metodudur.

Schrödinger denklemi için verilecek son örnek

$$\begin{cases} i \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = 0, & 0 \leq t \leq 1, \quad -\infty < x < \infty, \\ u(0, x) = 1, & -\infty < x < \infty \end{cases} \quad (1.17)$$

de Fourier transform metoduyla çözülecek. Yukarıdaki kısmi differansiyel denklemin iki tarafının Fourier transformunu alırsak

$$\mathbf{F}\{u_t\} - \mathbf{F}\{u_{xx}\} + \mathbf{F}\{u\} = \mathbf{F}\{0\}$$

veya

$$(\mathbf{F}\{u(t, x)\})_t - (is)^2 \mathbf{F}\{u(t, x)\} + \mathbf{F}\{u(t, x)\} = \mathbf{F}\{1\}$$

elde ederiz. Şimdi

$$\mathbf{F}\{u(t, x)\} = U(t, s)$$

alalım. Böylelikle problemimiz

$$\begin{cases} U_t(t, s) - i(s^2 + 1)U(t, s) = 0, \\ U(0, s) = \mathbf{F}\{1\} \end{cases}$$

şeklini alır. Böylece Cauchy formülü kullanılarak

$$U(t, s) = e^{i(s^2+1)t} \mathbf{F}\{1\}$$

elde edilir. Son olarak, iki tarafın ters Fourier dönüşümünü alırsak verilen lokal olmayan sınır değer probleminin çözümü

$$u(t, x) = e^{-it}$$

şeklinde bulunur.

Not edelim ki, aynı metod kullanılarak çok boyutlu Schrödinger denklemi için lokal olmayan sınır değer probleminin de

$$\left\{ \begin{array}{l} i \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \sum_{r=1}^n \alpha_r \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x_r^2} = g(t, x), \\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega, \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(0, x) = \sum_{m=1}^p \alpha_m u(\lambda_m) + \varphi(x), \quad x \in \Omega, \end{array} \right.$$

çözümü elde edilebilir. Burada  $g(t, x)$  ( $t \in [0, T]$ ,  $x \in \Omega$ ),  $\varphi(x)$  ( $x \in \Omega$ ) verilmiş yeterince pürüzsüz fonksiyonlardır.  $\Omega = (-\infty < x_k < \infty, 1 \leq k \leq n)$  ise  $n$ -boyutlu  $\mathfrak{R}^n$  Öklit uzayında bir kümedir.

Ancak Fourier transform metodu sadece kısmi türevli denklem sabit katsayıya sahip olduğunda geçerlidir. Çok iyi bilinmektedir ki,  $t$  ye veya konuma bağlı katsayılı kısmi türevli denklemleri çözümlerin en uygun yolu sonlu fark metodudur.

Şimdi, tezin içerdiği konu başlıklarından kısaca bahsedelim. Bu çalışma beş bölümden ibarettir.

Birinci bölüm giriş kısmıdır.

İkinci bölüm, beş kısımdan oluşmaktadır. Bu bölümde Schrödinger denklemi için çok noktalı lokal olmayan sınır değer problemi çalışılmıştır. Birinci kısımda bu problemin kararlılığı ispatlanmıştır. İkinci kısımda ise; birinci kısımda elde edilen soyut sonuç kullanılarak, Schrödinger denklemi için çok noktalı lokal olmayan sınır değer probleminin uygulamaları verilmiştir. Üçüncü kısımda bu problemin yaklaşık çözümlerini bulmak için birinci basamaktan doğruluklu fark şeması ve ikinci basamaktan doğruluklu Crank-Nicholson fark şeması çalışılmıştır. Dördüncü kısımda, bu fark şemaları için uygulamalar verilmiştir. Bu kısımda yapılan çalışmalarını desteklemek için yapılan sayısal sonuçlar ise son kısımda verilmiştir. İkinci basamaktan doğruluklu Crank-Nicholson fark şemasının birinci basamaktan doğruluklu fark şemasından daha doğru olduğunu göstermek için tablolar ve şekiller eklenmiştir.

Üçüncü bölüm, beş kısımdan oluşmaktadır. Bu bölümde Schrödinger denklemi için integralli, çok noktalı lokal olmayan sınır değer problemi çalışılmıştır. Birinci kısımda bu problemin kararlılığı ispatlanmıştır. İkinci kısımda ise; birinci kısımda elde edilen soyut sonuç kullanılarak, Schrödinger

denklemini için integralli, çok noktalı lokal olmayan sınır değer probleminin uygulamaları verilmiştir. Üçüncü kısımda, bu problemin yaklaşık çözümlerini bulmak için birinci basamaktan doğruluklu fark şeması ve ikinci basamaktan doğruluklu Crank-Nicholson fark şeması çalışılmıştır. Dördüncü kısımda, bu fark şemaları için uygulamalar verilmiştir. Bu kısımda yapılan çalışmaları desteklemek için yapılan sayısal sonuçlar ise son kısımda verilmiştir. İkinci basamaktan doğruluklu Crank-Nicholson fark şemasının birinci basamaktan doğruluklu fark şemasından daha doğru olduğunu göstermek için tablolar ve şekiller eklenmiştir.

Dördüncü bölüm, üç kısımdan oluşmaktadır. Bu bölümde Schrödinger denklemini için çok noktalı lokal olmayan sınır değer problemine iyileştirilmiş Crank-Nicholson fark şemaları çalışılmıştır. Birinci kısımda, bu problemin yaklaşık çözümlerini bulmak için iyileştirilmiş Crank-Nicholson fark şemaları kurulmuştur. Ayrıca, bu fark şemalarının çözümleri için kararlılık kestirimleri ispat edilmiştir. İkinci kısımda uygulamalar verilmiştir. Birinci kısımda yapılan çalışmaları desteklemek için yapılan sayısal sonuçlar ise son kısımda verilmiştir. İkinci basamaktan doğruluklu Crank-Nicholson fark şemalarının birinci basamaktan doğruluklu fark şemasına oranla daha doğru olduğunu göstermek için tablolar ve şekiller eklenmiştir.

Beşinci bölüm, üç kısımdan oluşmaktadır. Bu bölümde Schrödinger denklemini için integralli, çok noktalı lokal olmayan sınır değer problemine iyileştirilmiş Crank-Nicholson fark şemaları çalışılmıştır. Birinci kısımda, bu problemin yaklaşık çözümlerini bulmak için iyileştirilmiş Crank-Nicholson fark şemaları kurulmuştur. Ayrıca, bu fark şemalarının çözümleri için kararlılık kestirimleri ispat edilmiştir. İkinci kısımda uygulamalar verilmiştir. Birinci kısımda yapılan çalışmaları desteklemek için yapılan sayısal sonuçlar ise son kısımda verilmiştir. İkinci basamaktan doğruluklu Crank-Nicholson fark şemalarının birinci basamaktan doğruluklu fark şemasına oranla daha doğru olduğunu göstermek için tablolar ve şekiller eklenmiştir.

## BÖLÜM 2

# SCHRÖDİNGER DENKLEMİ ÇOK NOKTALI LOKAL OLMAYAN SINIR DEĞER PROBLEMİ

Bu bölümde,  $H$  Hilbert uzayında  $A$  özeşlenik operatör olmak üzere Schrödinger denklemi için çok noktali lokal olmayan sınır değer problemi

$$\begin{cases} i \frac{du}{dt} + Au = f(t), & 0 < t < T, \\ u(0) = \sum_{m=1}^p \alpha_m u(\lambda_m) + \varphi, \\ 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_p \leq T \end{cases} \quad (2.1)$$

araştırılmıştır. Bu problemin çözümünün kararlılığı incelenmiştir. İki tane çok noktali lokal olmayan sınır değer problemi incelenmiştir. Çok noktali lokal olmayan sınır değer probleminin yaklaşık çözümleri için birinci basamaktan doğruluklu fark şeması ve ikinci basamaktan doğruluklu Crank-Nicholson fark şeması kurulmuştur. Bu fark şemalarının kararlılığı gösterilmiştir. Uygulamada Schrödinger denkleminin fark denklemlerinin çözümlerinin kararlılığı elde edilmiştir. Çok noktali lokal olmayan sınır şartlı tek-boyutlu Schrödinger denkleminin çözümü sayısal olarak elde edilmiştir. Bu fark denklemlerinin çözümünde iyileştirilmiş Gauss eleme metodunu içeren bir teknik kullanılmıştır. Metot sayısal değerlerle desteklenmiştir.

**Tanım 2.1.** *Aşağıdaki koşulları sağlayan  $u(t)$  fonksiyonuna (2.1) denkleminin çözümü denir:*

- i)  $u(t)$  nin  $[0, T]$  kapalı aralığında sürekli türevi olmalıdır. Burada, sınır noktalarındaki türevler uygun tek taraflı türevler olarak anlaşılır.*
- ii)  $u(t)$ , tüm  $t \in [0, T]$  için  $D(A)$  nin bir elemanıdır ve  $Au(t)$  fonksiyonu  $[0, T]$  kapalı aralığında süreklidir.*
- iii)  $u(t)$ , (2.1) deki denklemi ve çok noktali lokal olmayan sınır koşulunu sağlamaktadır.*

## 2.1 Çok Noktalı Lokal Olmayan Sınır Değer Problemi

**Teorem 2.2.** Eğer  $f(t) \in C^1([0, T], H)$ ,  $\varphi \in D(A)$  ve

$$\sum_{m=1}^p |\alpha_m| < 1$$

ise, (2.1) probleminin tek  $u(t)$  çözümü vardır ve bu çözüm için aşağıdaki

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_H \leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \left[ \|\varphi\|_H + T \max_{0 \leq t \leq T} \|f(t)\|_H \right], \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} & \max_{0 \leq t \leq T} \|u'(t)\|_H + \max_{0 \leq t \leq T} \|Au(t)\|_H \\ & \leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \left[ \|A\varphi\|_H + T \max_{0 \leq t \leq T} \|f'(t)\|_H + \|f(0)\| \right] \end{aligned} \quad (2.3)$$

kestirimler sağlanır.

Burada,  $C(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$  katsayısı  $\varphi$  ve  $f(t)$ 'den bağımsızdır.

**İspat.** Öncelikle (2.1) probleminin çözümü için formül bulalım. Bilindiği gibi

$$i \frac{du}{dt} + Au = f(t), \quad 0 < t < T, \quad u(0) = \xi \quad (2.4)$$

probleminin pürüzsüz verileri için tek bir çözümü vardır ve

$$u(t) = e^{iAt} \xi - \int_0^t e^{iA(t-s)} i f(s) ds \quad (2.5)$$

formülü doğrudur. O zaman,  $u(0) = \sum_{m=1}^p \alpha_m u(\lambda_m) + \varphi$  şartını kullanarak

$$\xi = \sum_{m=1}^p \alpha_m e^{iA\lambda_m} \xi - \sum_{m=1}^p \alpha_m \int_0^{\lambda_m} e^{iA(\lambda_m-s)} i f(s) ds + \varphi \quad (2.6)$$

elde edilir. Sonra,  $\sum_{m=1}^p |\alpha_m| < 1$  olduğu için  $I - \sum_{m=1}^p \alpha_m e^{iA\lambda_m}$  operatörünün

$$R = \left( I - \sum_{m=1}^p \alpha_m e^{iA\lambda_m} \right)^{-1}$$

şeklinde tersi vardır ve

$$\|R\|_{H \rightarrow H} \leq \sup_{-\infty \leq \mu \leq \infty} \frac{1}{\left| 1 - \sum_{m=1}^p \alpha_m e^{i\mu\lambda_m} \right|}$$

$$\leq \sup_{-\infty \leq \mu \leq \infty} \frac{1}{1 - \sum_{m=1}^p |\alpha_m| |e^{i\mu\lambda_m}|} \leq \frac{1}{1 - \sum_{m=1}^p |\alpha_m|} \leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \quad (2.7)$$

sağlanır. Bundan dolayı,

$$\xi = R \left[ -\sum_{m=1}^p \alpha_m \int_0^{\lambda_m} e^{iA(\lambda_m-s)} i f(s) ds + \varphi \right] \quad (2.8)$$

formülü elde edilir. Böylece çok noktalı lokal olmayan sınır değer problemi (2.1) in çözümü için (2.5) ve (2.8) formülleri belirlenmiş olur.

İkinci olarak (2.2) kestirimi elde edilecektir.

$$\|e^{iAt}\|_{H \rightarrow H} \leq 1 \quad (2.9)$$

kestirimi kullanılarak, tüm  $t$  ler için

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_H &\leq \|e^{iAt}\|_{H \rightarrow H} \|\xi\|_H + \int_0^t \|e^{iA(t-s)}\|_{H \rightarrow H} \|f(s)\|_H ds \\ &\leq \|\xi\|_H + T \max_{0 \leq t \leq T} \|f(t)\|_H \end{aligned} \quad (2.10)$$

elde edilir. (2.8) i, (2.7) ve (2.9) kestirimlerini kullanarak

$$\begin{aligned} \|\xi\|_H &\leq \|R\|_{H \rightarrow H} \left\{ \sum_{m=1}^p |\alpha_m| \int_0^{\lambda_m} \|e^{iA(\lambda_m-s)}\|_{H \rightarrow H} \|f(s)\|_H ds + \|\varphi\|_H \right\} \\ &\leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \left[ \sum_{m=1}^p |\alpha_m| \lambda_m \max_{0 \leq t \leq T} \|f(t)\|_H + \|\varphi\|_H \right] \\ &\leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \left[ T \max_{0 \leq t \leq T} \|f(t)\|_H + \|\varphi\|_H \right] \end{aligned} \quad (2.11)$$

eşitsizliği sağlanır.

Böylelikle, (2.10) ve (2.11) kullanılarak (2.2) kestirimi elde edilmiş olur.

Şimdi (2.3) kestirimi gösterilecektir. (2.5) formülünü kullanarak

$$\begin{aligned} Au(t) &= Ae^{iAt} \xi - \int_0^t Ae^{iA(t-s)} i f(s) ds \\ &= e^{iAt} A\xi + f(t) - f(0)e^{iAt} - \int_0^t e^{iA(t-s)} f'(s) ds \\ &= e^{iAt} A\xi + f(0) + \int_0^t f'(s) ds - f(0)e^{iAt} - \int_0^t e^{iA(t-s)} f'(s) ds \end{aligned} \quad (2.12)$$

bulunur. Böylelikle,

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|Au\|_H \leq \|A\xi\|_H + 2\|f(0)\|_H + 2T \max_{0 \leq t \leq T} \|f'(t)\|_H \quad (2.13)$$

kestirimi elde edilmiş olur.  $u(0) = \sum_{m=1}^p \alpha_m u(\lambda_m) + \varphi$  koşulu ve (2.12) formülünü

kullanarak

$$A\xi = R \left\{ \sum_{m=1}^p \alpha_m f(0) + \sum_{m=1}^p \alpha_m \int_0^{\lambda_m} f'(s) ds - f(0) \sum_{m=1}^p \alpha_m e^{iA\lambda_m} - \sum_{m=1}^p \alpha_m \int_0^{\lambda_m} e^{iA(\lambda_m-s)} f'(s) ds + A\varphi \right\}$$

formülü bulunur. Burada,

$$R = (I - \sum_{m=1}^p \alpha_m e^{iA\lambda_m})^{-1}$$

şeklindedir. Böylece, (2.7) ve (2.9) kestirimlerini kullanarak

$$\|A\xi\|_H \leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \left\{ 2\|f(0)\|_H + 2T \max_{0 \leq t \leq T} \|f'(t)\|_H + \|A\varphi\|_H \right\} \quad (2.14)$$

elde edilir. Sonra (2.13) ve (2.14) kestirimleri kullanılarak  $Au$  için kestirim belirlenir. Daha sonra  $Au$  için elde edilen kestirim,

$$iu_t = f(t) - Au = f(0) + \int_0^t f'(s) ds - Au \text{ bağıntısı ve üçgen eşitsizliği kullanılarak}$$

(2.3) kestirimi elde edilir. Böylelikle Teorem 2.2 nin ispatı tamamlanmış olur.

## 2.2 Uygulamalar

Şimdi, bu soyut sonucun aşağıdaki iki tane çok noktalı lokal olmayan sınır değer problemlerine uygulaması araştırılacaktır.

İlk olarak, bir boyutlu Schrödinger denklemi için

$$\left\{ \begin{array}{l} iu_t - (a(x)u_x)_x = f(t, x), \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < 1, \\ u(0, x) = \sum_{m=1}^p \alpha_m u(\lambda_m, x) + \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_p \leq T, \\ u(t, 0) = u(t, 1), \quad u_x(t, 0) = u_x(t, 1), \quad 0 \leq t \leq T \end{array} \right. \quad (2.15)$$

çok noktalı lokal olmayan sınır değer problemini ele alalım. Problem (2.15) in pürüzsüz  $a(x)$  ( $x \in (0, 1)$ ),  $\varphi(x)$  ( $x \in [0, 1]$ ) ve  $f(t, x)$  ( $t \in [0, T]$ ,  $x \in (0, 1)$ ) verileri için pürüzsüz tek  $u(t, x)$  çözümü vardır. Bu bize (2.15) karma problemini

$H = L_2[0,1]$  Hilbert uzayında (2.1) çok noktalı sınır değer problemine indirgeme imkanı sağlar, öyle ki  $A$  özeşlenik operatörü (2.15) ile tanımlanmıştır.

**Teorem 2.3.** *Eğer*

$$\sum_{m=1}^p |\alpha_m| < 1$$

*ise, (2.15) çok noktalı lokal olmayan sınır değer probleminin çözümü için*

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t, \cdot)\|_{L_2[0,1]} &\leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \left[ \|\varphi\|_{L_2[0,1]} + T \max_{0 \leq t \leq T} \|f(t, \cdot)\|_{L_2[0,1]} \right], \\ \max_{0 \leq t \leq T} \|u_t(t, \cdot)\|_{L_2[0,1]} + \max_{0 \leq t \leq T} \|u_{xx}(t, \cdot)\|_{L_2[0,1]} \\ &\leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \left[ \|\varphi_{xx}\|_{L_2[0,1]} + T \max_{0 \leq t \leq T} \|f_t(t, \cdot)\|_{L_2[0,1]} + \|f(0, \cdot)\|_{L_2[0,1]} \right] \end{aligned}$$

*kararlılık kestirimleri sağlanır.*

Bu teoremin ispatı, soyut Teorem 2.2 ve (2.15) problemi tarafından oluşturulan uzay operatörünün simetri özelliklerine dayanmaktadır.

İkinci olarak,  $n$  – boyutlu  $R^n$  Öklit uzayında  $\Omega = (0 < x_k < 1, 1 \leq k \leq n)$  bir açık küme ve  $S$  bu kümenin sınırı olsun öyle ki  $\bar{\Omega} = \Omega \cup S$  'dir.  $[0, T] \times \bar{\Omega}$  de çok boyutlu Schrödinger denklemi için çok noktalı lokal olmayan sınır değer problemi

$$\left\{ \begin{array}{l} iu_t - \sum_{r=1}^n (a_r(x) u_{x_r})_{x_r} = f(t, x), \quad 0 < t < T, \quad x \in \Omega, \\ u(0, x) = \sum_{m=1}^p \alpha_m u(\lambda_m, x) + \varphi(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \\ 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_p \leq T, \\ u(t, x) = 0, \quad x \in S, \quad 0 \leq t \leq T \end{array} \right. \quad (2.16)$$

ele alınsın. (2.16) probleminin pürüzsüz  $a_r(x)$  ( $x \in \Omega$ ),  $\varphi(x)$  ( $x \in \bar{\Omega}$ ) ve  $f(t, x)$  ( $t \in [0, T]$ ,  $x \in \bar{\Omega}$ ) veriler için  $u(t, x)$  tek düzgün çözümü vardır. Bu bize (2.16) karma problemini  $H = L_2(\bar{\Omega})$  Hilbert uzayında (2.1) çok noktalı sınır değer problemine indirgeme imkanı sağlar, öyle ki  $A$  özeşlenik operatörü (2.16) ile tanımlanmıştır. Burada  $H = L_2(\bar{\Omega})$  Hilbert uzayı

$$\|f\|_{L_2(\bar{\Omega})} = \left\{ \int_{x \in \bar{\Omega}} \dots \int |f(x)|^2 dx_1 \dots dx_n \right\}^{\frac{1}{2}}$$

normu ile donanımlı  $\bar{\Omega}$  üzerinde tanımlı tüm karesiyle integrallenebilir fonksiyonlar uzayıdır.

**Teorem 2.4.** *Eğer*

$$\sum_{m=1}^p |\alpha_m| < 1$$

*ise, (2.16) çok noktalı lokal olmayan sınır değer probleminin çözümü için*

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t, \cdot)\|_{L_2(\bar{\Omega})} &\leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \left[ \|\varphi\|_{L_2(\bar{\Omega})} + T \max_{0 \leq t \leq T} \|f(t, \cdot)\|_{L_2(\bar{\Omega})} \right], \\ \max_{0 \leq t \leq T} \|u_t(t, \cdot)\|_{L_2(\bar{\Omega})} &+ \max_{0 \leq t \leq T} \sum_{r=1}^n \|u_{x_r x_r}(t, \cdot)\|_{L_2(\bar{\Omega})} \\ &\leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \left[ \sum_{r=1}^n \|\varphi_{x_r x_r}\|_{L_2(\bar{\Omega})} + T \max_{0 \leq t \leq T} \|f_t(t, \cdot)\|_{L_2(\bar{\Omega})} + \|f(0, \cdot)\|_{L_2(\bar{\Omega})} \right] \end{aligned}$$

*kararlılık kestirimleri sağlanır.*

Teorem 2.4 ün ispatı, soyut Teorem 2.2 ve (2.16) problemi tarafından oluşturulan uzay operatörünün simetri özelliklerine ve aşağıdaki  $L_2(\bar{\Omega})$  uzayında eliptik differansiyel probleminin çözümü için koersiv kestirimi elde edilen teoreme dayanmaktadır.

**Teorem 2.5.** Elliptik differansiyel

$$A^x u(x) = w(x), \quad x \in \Omega,$$

$$u(x) = 0, \quad x \in S,$$

probleminin çözümü için

$$\sum_{r=1}^n \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_r^2} \right\|_{L_2(\bar{\Omega})} \leq M \|w\|_{L_2(\bar{\Omega})} \quad (2.17)$$

koersiv kestirimi sağlanır [Sobolevskii, P.E., 1975].

## 2.3 Fark Şemaları. Kararlılık

Öncelikle, çok noktalı lokal olmayan sınır değer problemi (2.1) e karşılık gelen

$$\begin{cases} i \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} + Au_k = \varphi_k, & \varphi_k = f(t_k), \quad t_k = k\tau, \quad 1 \leq k \leq N, \\ N\tau = T, \quad u_0 = \sum_{m=1}^p \alpha_m u_{l_m} + \varphi \end{cases} \quad (2.18)$$

birinci basamaktan doğruluklu fark şemasını ele alalım. Burada,  $m = 1, \dots, p$  için  $l_m = \lceil \frac{\lambda_m}{\tau} \rceil$  ve  $\tau \leq \lambda_m$  şeklinde alınacaktır.

Bilindiği gibi,  $H$  Hilbert uzayında özeşlenik  $A$  differensiyel operatörlü lokal olmayan sınır değer probleminin bir değişkenli diskritizasyon fark şemalarını araştırmak demek,  $H_h$  Hilbert uzaylarında  $h$  ye ( $0 < h < h_0$ ) göre düzgün özeşlenik  $A_h$  fark operatörlü çok değişkenli diskritizasyon fark şemalarını araştırmak demektir. Dolayısıyla bu çalışmada sadece bir değişkenli diskritizasyon fark şemaları incelenmektedir.

İlk olarak, (2.18) nin çözümü için formül bulalım. (2.4) Cauchy probleminin yaklaşık çözümü için

$$i \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} + Au_k = \varphi_k, \quad 1 \leq k \leq N, \quad u_0 = \xi$$

birinci basamaktan fark şemasının çözümü tümevarım yöntemiyle

$$u_k = R^k \xi - i\tau \sum_{j=1}^k R^{k-j+1} \varphi_j, \quad 1 \leq k \leq N \quad (2.19)$$

şeklinde bulunur. Burada,

$$R = (I - i\tau A)^{-1}$$

şeklindedir. Yani,

$$i \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} + Au_k = \varphi_k, \quad \varphi_k = f(t_k), \quad t_k = k\tau, \quad 1 \leq k \leq N,$$

denklemden

$$u_k - i\tau Au_k = u_{k-1} - i\tau \varphi_k$$

veya

$$(I - i\tau A)u_k = u_{k-1} - i\tau \varphi_k.$$

elde edilir. Sonra

$$u_k = Ru_{k-1} - i\tau R\varphi_k$$

ve tümevarım kullanılarak (2.19) elde edilir.

(2.19) formülü ve

$$u_0 = \sum_{m=1}^p \alpha_m u_{l_m} + \varphi$$

şartını kullanarak

$$\xi = \sum_{m=1}^p \alpha_m R^{l_m} \xi - i\tau \sum_{m=1}^p \alpha_m \sum_{j=1}^{l_m} R^{l_m-j+1} \varphi_j + \varphi$$

elde edilir.  $I - \sum_{m=1}^p \alpha_m R^{l_m}$  operatörünün tersi olduğu için

$$\xi = T_\tau \left\{ -i\tau \sum_{m=1}^p \alpha_m \sum_{j=1}^{l_m} R^{l_m-j+1} \varphi_j + \varphi \right\}, \quad (2.20)$$

formülü bulunur. Burada,

$$T_\tau = \left( I - \sum_{m=1}^p \alpha_m R^{l_m} \right)^{-1}$$

şeklinde dir. Böylelikle (2.18) probleminin çözümü için

$$u_k = \begin{cases} R^k \xi - i\tau \sum_{j=1}^k R^{k-j+1} \varphi_j, & 1 \leq k \leq N, \\ T_\tau \left\{ -i\tau \sum_{m=1}^p \alpha_m \sum_{j=1}^{l_m} R^{l_m-j+1} \varphi_j + \varphi \right\}, & k = 0, \end{cases} \quad (2.21)$$

formülü elde edilmiş olur.

**Teorem 2.6.** *Eğer  $\varphi \in D(A)$  ve*

$$\sum_{m=1}^p |\alpha_m| < 1$$

*ise, (2.18) fark şemasının çözümü için*

$$\max_{0 \leq k \leq N} \|u_k\|_H \leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \left[ \|\varphi\|_H + T \max_{1 \leq k \leq N} \|\varphi_k\|_H \right], \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq k \leq N} \left\| \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} \right\|_H + \max_{1 \leq k \leq N} \|Au_k\|_H \\ & \leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \left[ \|A\varphi\|_H + \|\varphi_1\|_H + T \max_{2 \leq k \leq N} \left\| \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\tau} \right\|_H \right] \end{aligned} \quad (2.23)$$

*kararlılık kestirimleri sağlanır.*

**İspat.**

$$\|R\|_{H \rightarrow H} \leq 1 \quad (2.24)$$

kestirimi ve (2.19) formülü kullanılarak

$$\max_{1 \leq k \leq N} \|u_k\|_H \leq \left[ \|u_0\|_H + T \max_{1 \leq k \leq N} \|\varphi_k\|_H \right] \quad (2.25)$$

elde edilir. Özeşlenik operatörlerin spektral gösterimi kullanılarak

$$\|T_\tau\|_{H \rightarrow H} \leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \quad (2.26)$$

elde edilir. Daha açık olarak,

$$\begin{aligned} \|T_\tau\|_{H \rightarrow H} &\leq \sup_{-\infty \leq \mu < \infty} \left\| \left( I - \sum_{m=1}^p \alpha_m \left( \frac{1}{(1-i\tau\mu)} \right)^{l_m} \right)^{-1} \right\| \\ &\leq \sup_{-\infty \leq \mu < \infty} \frac{1}{1 - \left| \sum_{m=1}^p \alpha_m \left( \frac{1}{(1-i\tau\mu)} \right)^{l_m} \right|}. \end{aligned}$$

Burada,

$$\left| \sum_{m=1}^p \alpha_m \left( \frac{1}{(1-i\tau\mu)} \right)^{l_m} \right| \leq \sum_{m=1}^p |\alpha_m| \left| \frac{1}{(1-i\tau\mu)} \right|^{l_m} \leq \sum_{m=1}^p |\alpha_m| < 1$$

olduğu için

$$\|T_\tau\|_{H \rightarrow H} \leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$$

kestirimi sağlanır. Böylelikle (2.20) formülünü, üçgen eşitsizliğini ve (2.24) ve (2.26) kestirimlerini kullanarak aşağıdaki kestirim elde edilir:

$$\begin{aligned} \|u_0\|_H &\leq \|T_\tau\|_{H \rightarrow H} \left\{ \sum_{m=1}^p |\alpha_m| \sum_{j=1}^{l_m} \tau \|R\|_{H \rightarrow H}^{l_m-j+1} \|\varphi_j\|_H + \|\varphi\|_H \right\} \\ &\leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \left\{ \sum_{m=1}^p |\alpha_m| \sum_{j=1}^{l_m} \tau \|\varphi_j\|_H + \|\varphi\|_H \right\} \\ &\leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \left\{ T \max_{1 \leq k \leq N} \|\varphi_k\|_H \sum_{m=1}^p |\alpha_m| + \|\varphi\|_H \right\} \\ &\leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \left\{ T \cdot \max_{1 \leq k \leq N} \|\varphi_k\|_H + \|\varphi\|_H \right\}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

(2.22) kestirimi, (2.25) ve (2.27) kestirimlerinin direk sonucudur.

Şimdi (2.23) kestirimi elde edilecektir. (2.19) i kullanarak

$$Au_k = R^k A\xi - i\tau \sum_{j=1}^k AR^{k-j+1} \varphi_j, \quad 1 \leq k \leq N \quad (2.28)$$

elde edilir. Böylelikle  $1 \leq k \leq N$  için

$$\begin{aligned}
Au_k &= R^k A\xi + \sum_{j=1}^k (I-R)R^{k-j}\varphi_j \\
&= R^k A\xi + \sum_{j=1}^k R^{k-j}\varphi_j - \sum_{j=1}^k R^{k-j+1}\varphi_j \\
&= R^k A\xi + \sum_{j=2}^{k+1} R^{k-j+1}\varphi_{j-1} - \sum_{j=1}^k R^{k-j+1}\varphi_j \\
&= R^k A\xi + \sum_{j=2}^k R^{k-j+1}(\varphi_{j-1} - \varphi_j) + \varphi_k - R^k\varphi_1 \\
&= R^k A\xi + \sum_{j=2}^k R^{k-j+1}(\varphi_{j-1} - \varphi_j) + \varphi_1 - \sum_{j=2}^k (\varphi_{j-1} - \varphi_j) - R^k\varphi_1 \quad (2.29)
\end{aligned}$$

bulunur. Bunun sonucu olarak  $1 \leq k \leq N$  için

$$\begin{aligned}
\|Au_k\|_H &\leq \|R\|_{H \rightarrow H}^k \|A\xi\|_H + \sum_{j=2}^k \|R\|_{H \rightarrow H}^{k-j+1} \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H \\
&\quad + \|\varphi_1\|_H + \sum_{j=2}^k \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H + \|R\|_{H \rightarrow H}^k \|\varphi_1\|_H
\end{aligned}$$

kestirimi elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
\max_{1 \leq k \leq N} \|Au_k\|_H &\leq \|A\xi\|_H + \max_{1 \leq k \leq N} \sum_{j=2}^k \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H + \|\varphi_1\|_H + \max_{1 \leq k \leq N} \sum_{j=2}^k \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H + \|\varphi_1\|_H \\
&\leq \|A\xi\|_H + 2N \max_{2 \leq k \leq N} \|\varphi_k - \varphi_{k-1}\|_H + 2\|\varphi_1\|_H
\end{aligned}$$

sağlanır. Bu da

$$\max_{1 \leq k \leq N} \|Au_k\|_H \leq \|A\xi\|_H + 2T \max_{2 \leq k \leq N} \left\| \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\tau} \right\|_H + 2\|\varphi_1\|_H \quad (2.30)$$

sonucunu verir.  $\|A\xi\|_H$  için de kestirim elde edilmelidir.  $u_0 = \sum_{m=1}^p \alpha_m u_{l_m} + \varphi$

koşulunu ve (2.29) formülü kullanılarak

$$A\xi = \sum_{m=1}^p \alpha_m R^{l_m} A\xi + \sum_{m=1}^p \alpha_m \left( \sum_{j=2}^{l_m} R^{l_m-j+1} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) + \varphi_1 - \sum_{j=2}^{l_m} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) - R^{l_m} \varphi_1 \right) + A\varphi$$

elde edilir. Böylelikle

$$A\xi = T_\tau \left( \sum_{m=1}^p \alpha_m \left( \sum_{j=2}^{l_m} R^{l_m-j+1} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) + \varphi_1 - \sum_{j=2}^{l_m} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) - R^{l_m} \varphi_1 \right) + A\varphi \right)$$

olur. Burada

$$T_\tau = \left( I - \sum_{m=1}^p \alpha_m R^{l_m} \right)^{-1}$$

şeklinde. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \|A\xi\|_H &\leq \|T_\tau\|_H \left( \sum_{m=1}^p |\alpha_m| \left( \sum_{j=2}^{l_m} \|R\|_{H \rightarrow H}^{l_m - j + 1} \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H + \|\varphi_1\|_H \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{j=2}^{l_m} \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H + \|R\|_{H \rightarrow H}^{l_m} \|\varphi_1\|_H \right) + \|A\varphi\|_H \right) \\ &\leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \left( \sum_{m=1}^p |\alpha_m| \left( 2 \sum_{j=2}^{l_m} \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H + 2 \|\varphi_1\|_H \right) + \|A\varphi\|_H \right) \\ &\leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \left( 2T \max_{2 \leq k \leq N} \left\| \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\tau} \right\|_H + 2 \|\varphi_1\|_H + \|A\varphi\|_H \right) \end{aligned} \quad (2.31)$$

eşitsizliği sağlanır. Sonra, (2.30) ve (2.31) kestirimlerini kullanarak  $Au_k$  için kestirim elde edilir. Daha sonra  $Au_k$  için elde edilen kestirim,

$$i \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} = \varphi_k - Au_k = \varphi_1 - \sum_{j=2}^k (\varphi_{j-1} - \varphi_j) - Au_k \text{ bağıntısı ve üçgen eşitsizliği}$$

kullanılarak (2.23) kestirimi elde edilir. Bu da Teorem 2.6'nın ispatını tamamlar.

İkinci olarak, ikinci basamaktan doğruluklu Crank-Nicholson fark şeması

$$\begin{cases} i \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} + \frac{A}{2} (u_k + u_{k-1}) = \varphi_k, & \varphi_k = f(t_k - \frac{\tau}{2}), \quad t_k = k\tau, \quad 1 \leq k \leq N, \\ u_0 = \sum_{\frac{\lambda_m}{\tau} \in \mathbb{Z}^+} \alpha_m u_{l_m} + \sum_{\frac{\lambda_m}{\tau} \notin \mathbb{Z}^+} \alpha_m (I + id_m A)^{\frac{1}{2}} (u_{l_m} + u_{l_m+1}) \\ -i \sum_{\frac{\lambda_m}{\tau} \notin \mathbb{Z}^+} \alpha_m d_m \varphi_{l_m} + \varphi \end{cases} \quad (2.32)$$

ele alınmaktadır. Burada  $m = 1, \dots, p$  ve  $\tau \leq \lambda_m$  için  $l_m = \lfloor \frac{\lambda_m}{\tau} \rfloor$ ,  $d_m = \lambda_m - \lfloor \frac{\lambda_m}{\tau} \rfloor \tau - \frac{\tau}{2}$

şeklinde. Önce, (2.32) in çözümü için formül elde edelim.

(2.4) Cauchy probleminin yaklaşık çözümleri için ikinci basamaktan doğruluklu Crank-Nicholson fark şemasının

$$\begin{cases} i \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} + \frac{A}{2} (u_k + u_{k-1}) = \varphi_k, & \varphi_k = f(t_k - \frac{\tau}{2}), \\ t_k = k\tau, \quad 1 \leq k \leq N, \quad u_0 = \xi \end{cases} \quad (2.33)$$

çözümü, tümevarım yöntemiyle

$$u_k = B^k \xi - i \sum_{j=1}^k B^{k-j} C \varphi_j \tau, \quad k=1, \dots, N \quad (2.34)$$

şeklinde bulunur. Burada,

$$C = \left( I - i \frac{A}{2} \tau \right)^{-1}, \quad B = \left( I + i \frac{A}{2} \tau \right) C$$

şeklinde dir.  $u_0$  ı bulmak için (2.34) formülü ve

$$u_0 = \sum_{\frac{\lambda_m \in Z^+}{\tau}} \alpha_m u_{l_m} + \sum_{\frac{\lambda_m \notin Z^+}{\tau}} \alpha_m (I + id_m A) \frac{1}{2} (u_{l_m} + u_{l_m+1}) \\ - i \sum_{\frac{\lambda_m \notin Z^+}{\tau}} \alpha_m d_m \varphi_{l_m} + \varphi$$

şartı kullanılırsa

$$\xi = \sum_{\frac{\lambda_m \in Z^+}{\tau}} \alpha_m B^{l_m} \xi - i \tau \sum_{\frac{\lambda_m \in Z^+}{\tau}} \sum_{j=1}^{l_m} \alpha_m B^{l_m-j} C \varphi_j \\ + \sum_{\frac{\lambda_m \notin Z^+}{\tau}} \alpha_m (I + id_m A) \frac{1}{2} \left( B^{l_m} \xi - i \tau \sum_{j=1}^{l_m} B^{l_m-j} C \varphi_j \right) \\ + \sum_{\frac{\lambda_m \notin Z^+}{\tau}} \alpha_m (I + id_m A) \frac{1}{2} \left( B^{l_m+1} \xi - i \tau \sum_{j=1}^{l_m+1} B^{l_m+1-j} C \varphi_j \right) \\ - i \sum_{\frac{\lambda_m \notin Z^+}{\tau}} \alpha_m d_m \varphi_{l_m} + \varphi \quad (2.35)$$

elde edilir.

$$I - \sum_{\frac{\lambda_m \in Z^+}{\tau}} \alpha_m B^{l_m} - \sum_{\frac{\lambda_m \notin Z^+}{\tau}} \alpha_m (I + id_m A) \frac{1}{2} (I + B) B^{l_m}$$

operatörünün tersi olduğu için

$$\xi = T_\tau \left\{ -i \tau \sum_{\frac{\lambda_m \in Z^+}{\tau}} \sum_{j=1}^{l_m} \alpha_m B^{l_m-j} C \varphi_j - i \tau \sum_{\frac{\lambda_m \notin Z^+}{\tau}} \alpha_m (I + id_m A) \right. \\ \left. \times \frac{1}{2} \left[ (I + B) \sum_{j=1}^{l_m} B^{l_m-j} C \varphi_j + C \varphi_{l_m+1} \right] - i \sum_{\frac{\lambda_m \notin Z^+}{\tau}} \alpha_m d_m \varphi_{l_m} + \varphi \right\} \quad (2.36)$$

eşitliği sağlanır. Burada,

$$T_\tau = \left( I - \sum_{\frac{\lambda_m \in Z^+}{\tau}} \alpha_m B^{l_m} - \sum_{\frac{\lambda_m \notin Z^+}{\tau}} \alpha_m (I + id_m A) \frac{1}{2} (I + B) B^{l_m} \right)^{-1} \quad (2.37)$$

şeklindedir. Sonuçta (2.32) probleminin çözümü için

$$u_k = \begin{cases} B^k \xi - i \sum_{j=1}^k B^{k-j} C \varphi_j \tau, & k=1, \dots, N, \\ T_\tau \left\{ -i\tau \sum_{\frac{\lambda_m \in Z^+}{\tau}} \sum_{j=1}^{l_m} \alpha_m B^{l_m-j} C \varphi_j - i\tau \sum_{\frac{\lambda_m \notin Z^+}{\tau}} \alpha_m (I + id_m A) \right. \\ \left. \times \frac{1}{2} \left[ (I + B) \sum_{j=1}^{l_m} B^{l_m-j} C \varphi_j + C \varphi_{l_m} \right] - i \sum_{\frac{\lambda_m \notin Z^+}{\tau}} \alpha_m d_m \varphi_{l_m} + \varphi \right\}, & k=0, \end{cases} \quad (2.38)$$

formülü elde edilmiş olur.

**Teorem 2.7.** Eğer  $\varphi \in D(A)$  ve

$$\sum_{m=1}^p |\alpha_m| < 1$$

ise, (2.32) fark şemasının çözümü için

$$\max_{0 \leq k \leq N} \|u_k\|_H \leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \left[ \|\varphi\|_H + T \max_{1 \leq k \leq N} \|\varphi_k\|_H \right], \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq k \leq N} \left\| \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} \right\|_H + \max_{1 \leq k \leq N} \left\| A \frac{u_k + u_{k-1}}{2} \right\|_H \\ & \leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \left[ \|A\varphi\|_H + \|\varphi_1\|_H + T \max_{2 \leq k \leq N} \left\| \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\tau} \right\|_H \right] \end{aligned} \quad (2.40)$$

kararlılık kestirimleri sağlanır.

**İspat.**

$$\|B\|_{H \rightarrow H} \leq 1 \quad \text{ve} \quad \|C\|_{H \rightarrow H} \leq 1 \quad (2.41)$$

kestirimlerini ve (2.34) formülünü kullanarak

$$\max_{1 \leq k \leq N} \|u_k\|_H \leq \left[ \|u_0\|_H + T \max_{1 \leq k \leq N} \|\varphi_k\|_H \right] \quad (2.42)$$

elde edilir. Özeşlenik operatörlerin spektral gösterimi kullanılarak

$$\|T_\tau\|_{H \rightarrow H} \leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \quad (2.43)$$

eşitsizliği bulunur. Daha açık olarak,

$$\begin{aligned}
\|T_\tau\|_{H \rightarrow H} &\leq \sup_{-\infty \leq \mu < \infty} \left| \left( I - \sum_{\frac{\lambda_m \in Z^+}{\tau}} \alpha_m \left( \frac{1+i\frac{\mu}{2}\tau}{1-i\frac{\mu}{2}\tau} \right)^{l_m} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sum_{\frac{\lambda_m \notin Z^+}{\tau}} \alpha_m (1+id_m\mu) \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1+i\frac{\mu}{2}\tau}{1-i\frac{\mu}{2}\tau} \right) \left( \frac{1+i\frac{\mu}{2}\tau}{1-i\frac{\mu}{2}\tau} \right)^{l_m} \right)^{-1} \right| \\
&\leq \sup_{-\infty \leq \mu < \infty} \left( 1 - \left| \sum_{\frac{\lambda_m \in Z^+}{\tau}} \alpha_m \left( \frac{1+i\frac{\mu}{2}\tau}{1-i\frac{\mu}{2}\tau} \right)^{l_m} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{\frac{\lambda_m \notin Z^+}{\tau}} \alpha_m (1+id_m\mu) \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1+i\frac{\mu}{2}\tau}{1-i\frac{\mu}{2}\tau} \right) \left( \frac{1+i\frac{\mu}{2}\tau}{1-i\frac{\mu}{2}\tau} \right)^{l_m} \right)^{-1} \right|.
\end{aligned}$$

Burada,

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{\frac{\lambda_m \in Z^+}{\tau}} \alpha_m \left( \frac{1+i\frac{\mu}{2}\tau}{1-i\frac{\mu}{2}\tau} \right)^{l_m} + \sum_{\frac{\lambda_m \notin Z^+}{\tau}} \alpha_m (1+id_m\mu) \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1+i\frac{\mu}{2}\tau}{1-i\frac{\mu}{2}\tau} \right) \left( \frac{1+i\frac{\mu}{2}\tau}{1-i\frac{\mu}{2}\tau} \right)^{l_m-1} \right| \\
&\leq \sum_{\frac{\lambda_m \in Z^+}{\tau}} |\alpha_m| \left| \frac{1+i\frac{\mu}{2}\tau}{1-i\frac{\mu}{2}\tau} \right|^{l_m} + \sum_{\frac{\lambda_m \notin Z^+}{\tau}} |\alpha_m| \left| (1+id_m\mu) \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1+i\frac{\mu}{2}\tau}{1-i\frac{\mu}{2}\tau} \right) \right| \left| \frac{1+i\frac{\mu}{2}\tau}{1-i\frac{\mu}{2}\tau} \right|^{l_m} \\
&\leq \sum_{\frac{\lambda_m \in Z^+}{\tau}} |\alpha_m| + \sum_{\frac{\lambda_m \notin Z^+}{\tau}} |\alpha_m| = \sum_{m=1}^p |\alpha_m| < 1,
\end{aligned}$$

olduğu için

$$\|T_\tau\|_{H \rightarrow H} \leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$$

sağlanır. Şimdi,  $\|u_0\|_H$  için bir kestirim elde edilmelidir. (2.36) formülü, üçgen eşitsizliği ve (2.41) ve (2.43) kestirimleri kullanılarak aşağıdaki kestirim elde edilir:

$$\begin{aligned}
\|u_0\|_H &\leq \|T_\tau\|_{H \rightarrow H} \left\{ \sum_{\frac{\lambda_m \in Z^+}{\tau}} |\alpha_m| \sum_{j=1}^{l_m} \tau \|B\|_{H \rightarrow H}^{l_m-j} \|C\|_{H \rightarrow H} \|\varphi_j\|_H \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\frac{\lambda_m \notin Z^+}{\tau}} |\alpha_m| \left[ \left\| (I+id_m A) \frac{1}{2} (I+B) \right\|_{H \rightarrow H} \sum_{j=1}^{l_m} \tau \|B\|_{H \rightarrow H}^{l_m-j} \|C\|_{H \rightarrow H} \|\varphi_j\|_H \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \tau \left\| \left( (I + id_m A) \frac{1}{2} (I + B) C \right) \right\|_{H \rightarrow H} \left\| \varphi_{l_m+1} \right\|_H \left. + \sum_{\frac{\lambda_m}{\tau} \notin Z^+} |\alpha_m| |d_m| \left\| \varphi_{l_m} \right\|_H + \left\| \varphi \right\|_H \right\} \\
& \leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \left\{ \sum_{\frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+} |\alpha_m| \sum_{j=1}^{l_m} \tau \left\| \varphi_j \right\|_H \right. \\
& \quad \left. + \sum_{\frac{\lambda_m}{\tau} \notin Z^+} |\alpha_m| \sum_{j=1}^{l_m+1} \tau \left\| \varphi_j \right\|_H + \sum_{\frac{\lambda_m}{\tau} \notin Z^+} |\alpha_m| |d_m| \left\| \varphi_{l_m} \right\|_H + \left\| \varphi \right\|_H \right\} \\
& \leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \left\{ T \max_{1 \leq j \leq N} \left\| \varphi_j \right\|_H \sum_{m=1}^p |\alpha_m| + \max_{1 \leq j \leq N} \left\| \varphi_j \right\|_H \sum_{m=1}^p |\alpha_m| |d_m| + \left\| \varphi \right\|_H \right\} \\
& \leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \left\{ T \max_{1 \leq j \leq N} \left\| \varphi_j \right\|_H \sum_{m=1}^p |\alpha_m| + T \max_{1 \leq j \leq N} \left\| \varphi_j \right\|_H \sum_{m=1}^p |\alpha_m| + \left\| \varphi \right\|_H \right\} \\
& \leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \left\{ 2T \max_{1 \leq j \leq N} \left\| \varphi_j \right\|_H + \left\| \varphi \right\|_H \right\}. \tag{2.44}
\end{aligned}$$

$\frac{\lambda_m}{\tau} \notin Z^+$  için  $l_m + 1 \leq N$  olduğundan yukarıdaki kestirim geçerlidir. Sonuç olarak (2.32) fark şeması için (2.39) kestiriminin ispatı son kestirime ve (2.42) kestirimine dayanmaktadır.

Şimdi, (2.40) kestirimi elde edilecektir. (2.34) ü kullanarak

$$Au_k = B^k A\xi - i\tau \sum_{j=1}^k B^{k-j} AC\varphi_j, \quad k = 1, \dots, N$$

elde edilir. Böylelikle,  $1 \leq k \leq N$  için

$$\begin{aligned}
Au_k &= B^k A\xi + \sum_{j=1}^k (I - B) B^{k-j} \varphi_j \\
&= B^k A\xi + \sum_{j=1}^k B^{k-j} \varphi_j - \sum_{j=1}^k B^{k-j+1} \varphi_j \\
&= B^k A\xi + \sum_{j=2}^{k+1} B^{k-j+1} \varphi_{j-1} - \sum_{j=1}^k B^{k-j+1} \varphi_j \\
&= B^k A\xi + \sum_{j=2}^k B^{k-j+1} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) + \varphi_k - B^k \varphi_1 \\
&= B^k A\xi + \sum_{j=2}^k B^{k-j+1} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) + \varphi_1 - \sum_{j=2}^k (\varphi_{j-1} - \varphi_j) - B^k \varphi \tag{2.45}
\end{aligned}$$

elde edilir. (2.45) ü kullanarak  $1 \leq k \leq N$  için

$$\begin{aligned}
A \frac{u_k + u_{k-1}}{2} &= \frac{(I+B)}{2} B^{k-1} A\xi + \frac{(I+B)}{2} \sum_{j=2}^{k-1} B^{k-j} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) \\
&+ \frac{1}{2} B (\varphi_{k-1} - \varphi_k) + \varphi_1 - \sum_{j=2}^{k-1} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) - \frac{1}{2} (\varphi_{k-1} - \varphi_k) - \frac{(I+B)}{2} B^{k-1} \varphi_1 \\
&= B^{k-1} CA\xi + C \sum_{j=2}^{k-1} B^{k-j} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) \\
&+ \frac{(B-I)}{2} (\varphi_{k-1} - \varphi_k) + \varphi_1 - \sum_{j=2}^{k-1} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) - CB^{k-1} \varphi_1
\end{aligned} \tag{2.46}$$

sağlanır. Sonra  $1 \leq k \leq N$  için

$$\begin{aligned}
\left\| A \frac{u_k + u_{k-1}}{2} \right\|_H &\leq \|B\|_{H \rightarrow H}^k \|CA\xi\|_H + \|C\|_{H \rightarrow H} \sum_{j=2}^{k-1} \|B\|_{H \rightarrow H}^{k-j} \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H \\
&+ \frac{1}{2} \|B-I\|_{H \rightarrow H} \|\varphi_{k-1} - \varphi_k\|_H + \|\varphi_1\|_H + \sum_{j=2}^{k-1} \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H + \|C\|_{H \rightarrow H} \|B\|_{H \rightarrow H}^k \|\varphi_1\|_H \\
&\leq \|CA\xi\|_H + 2 \sum_{j=1}^k \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H + 2\|\varphi_1\|_H
\end{aligned}$$

bulunur. Yani,

$$\begin{aligned}
\max_{1 \leq k \leq N} \|Au_k\|_H &\leq \|A\xi\|_H + \max_{1 \leq k \leq N} \sum_{j=2}^k \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H + \|\varphi_1\|_H + \max_{1 \leq k \leq N} \sum_{j=2}^k \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H + \|\varphi_1\|_H \\
&\leq \|A\xi\|_H + 2N \max_{2 \leq k \leq N} \|\varphi_k - \varphi_{k-1}\|_H + 2\|\varphi_1\|_H
\end{aligned}$$

sağlanır. Sonuç olarak

$$\max_{1 \leq k \leq N} \|Au_k\|_H \leq \|A\xi\|_H + 2T \max_{2 \leq k \leq N} \left\| \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\tau} \right\|_H + 2\|\varphi_1\|_H \tag{2.47}$$

elde edilmiş olur.  $\|CA\xi\|_H$  için de kestirim elde edilmelidir.

$$\begin{aligned}
u_0 &= \sum_{\frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+} \alpha_m u_{l_m} + \sum_{\frac{\lambda_m}{\tau} \notin Z^+} \alpha_m (I + id_m A) \frac{1}{2} (u_{l_m} + u_{l_m+1}) \\
&\quad - i \sum_{\frac{\lambda_m}{\tau} \notin Z^+} \alpha_m d_m \varphi_{l_m} + \varphi
\end{aligned}$$

şartını ve (2.45) formülünü kullanarak

$$CA\xi = \sum_{\frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+} \alpha_m C \left( B^{l_m} A\xi + \sum_{j=2}^{l_m} B^{l_m-j+1} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) + \varphi_1 - \sum_{j=2}^{l_m} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) - B^{l_m} \varphi_1 \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\frac{\lambda_m \notin Z^+}{\tau}} \alpha_m (I + id_m A) \frac{1}{2} C \left( B^{l_m} A \xi + \sum_{j=2}^{l_m} B^{l_m-j+1} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) + \varphi_1 - \sum_{j=2}^{l_m} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) - B^{l_m} \varphi_1 \right) \\
& + \sum_{\frac{\lambda_m \notin Z^+}{\tau}} \alpha_m (I + id_m A) \frac{1}{2} C \left( B^{l_m+1} A \xi + \sum_{j=2}^{l_m+1} B^{l_m-j+2} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) + \varphi_1 - \sum_{j=2}^{l_m+1} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) - B^{l_m+1} \varphi_1 \right) \\
& \quad - i \sum_{\frac{\lambda_m \notin Z^+}{\tau}} \alpha_m d_m C A \varphi_{l_m} + C A \varphi
\end{aligned}$$

bulunur. Böylelikle,

$$\begin{aligned}
CA\xi = T_\tau & \left\{ \sum_{\frac{\lambda_m \notin Z^+}{\tau}} \alpha_m C \left( \sum_{j=2}^{l_m} B^{l_m-j+1} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) + \varphi_1 - \sum_{j=2}^{l_m} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) - B^{l_m} \varphi_1 \right) \right. \\
& + \sum_{\frac{\lambda_m \notin Z^+}{\tau}} \alpha_m (I + id_m A) \frac{1}{2} (I + B) C \left( \sum_{j=2}^{l_m} B^{l_m-j+1} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) + (\varphi_{l_m} - \varphi_{l_m+1}) \right) \\
& - \sum_{\frac{\lambda_m \notin Z^+}{\tau}} \alpha_m (I + id_m A) \frac{1}{2} (I + B) C B^{l_m} \varphi + \sum_{\frac{\lambda_m \notin Z^+}{\tau}} \alpha_m (I + id_m A) C \varphi \\
& - \sum_{\frac{\lambda_m \notin Z^+}{\tau}} \alpha_m (I + id_m A) C \left( \sum_{j=2}^{l_m} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) \right) - \sum_{\frac{\lambda_m \notin Z^+}{\tau}} \alpha_m (I + id_m A) \frac{1}{2} C (\varphi_{l_m} - \varphi_{l_m+1}) \\
& \quad \left. - i \sum_{\frac{\lambda_m \notin Z^+}{\tau}} \alpha_m d_m C A \varphi_{l_m} + C A \varphi \right\},
\end{aligned}$$

bu da

$$\begin{aligned}
CA\xi = T_\tau & \left\{ \sum_{\frac{\lambda_m \notin Z^+}{\tau}} \alpha_m C \left( \sum_{j=2}^{l_m} B^{l_m-j+1} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) + \varphi_1 - \sum_{j=2}^{l_m} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) - B^{l_m} \varphi_1 \right) \right. \\
& + \sum_{\frac{\lambda_m \notin Z^+}{\tau}} \alpha_m (I + id_m A) \frac{1}{2} (I + B) C \left( \sum_{j=2}^{l_m} B^{l_m-j+1} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) + (\varphi_{l_m} - \varphi_{l_m+1}) \right) \\
& - \sum_{\frac{\lambda_m \notin Z^+}{\tau}} \alpha_m (I + id_m A) \frac{1}{2} (I + B) C B^{l_m} \varphi_1 + \sum_{\frac{\lambda_m \notin Z^+}{\tau}} \alpha_m \frac{1}{2} C \varphi_{l_m} \\
& \quad \left. + i \sum_{\frac{\lambda_m \notin Z^+}{\tau}} \alpha_m d_m C A \varphi_{l_m+1} + C A \varphi \right\}
\end{aligned}$$

ifadesiyle aynıdır. Burada,

$$T_\tau = \left( I - \sum_{\frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+} \alpha_m B^{l_m} - \sum_{\frac{\lambda_m}{\tau} \notin Z^+} \alpha_m (I + id_m A) \frac{1}{2} (I + B) B^{l_m} \right)^{-1}$$

şekindedir. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \|CA\xi\|_H &\leq \|T_\tau\|_{H \rightarrow H} \left\{ \sum_{\frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+} |\alpha_m| \|C\|_{H \rightarrow H} \left( \sum_{j=2}^{l_m} \|B\|_{H \rightarrow H}^{l_m-j+1} \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \|\varphi_1\|_H + \sum_{j=1}^{l_m} \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H + \|B\|_{H \rightarrow H}^{l_m} \|\varphi_1\|_H \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\frac{\lambda_m}{\tau} \notin Z^+} |\alpha_m| \left\| (I + id_m A) \frac{1}{2} (I + B) C \right\|_{H \rightarrow H} \left( \sum_{j=2}^{l_m} \|B\|_{H \rightarrow H}^{l_m-j+1} \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H + \|\varphi_{l_m} - \varphi_{l_m+1}\|_H \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\frac{\lambda_m}{\tau} \notin Z^+} |\alpha_m| \left\| (I + id_m A) \frac{1}{2} (I + B) C \right\|_{H \rightarrow H} \|B\|_{H \rightarrow H}^{l_m} \|\varphi_1\|_H \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{\frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+} |\alpha_m| \|C\|_{H \rightarrow H} \|\varphi_{l_m}\|_H + \sum_{\frac{\lambda_m}{\tau} \notin Z^+} |\alpha_m| \|d_m AC\|_{H \rightarrow H} \|\varphi_{l_m+1}\|_H + \|C\|_{H \rightarrow H} \|A\varphi\|_H \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuçta,

$$\begin{aligned} \|A\xi\|_H &\leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \left\{ \sum_{\frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+} |\alpha_m| \left( 2 \sum_{j=2}^{l_m} \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H + 2\|\varphi_1\|_H \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\frac{\lambda_m}{\tau} \notin Z^+} |\alpha_m| \left( \sum_{j=2}^{l_m+1} \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H \right) + \sum_{\frac{\lambda_m}{\tau} \notin Z^+} |\alpha_m| \|\varphi_1\|_H \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{\frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+} |\alpha_m| \|\varphi_{l_m}\|_H + \sum_{\frac{\lambda_m}{\tau} \notin Z^+} |\alpha_m| \|\varphi_{l_m+1}\|_H + \|A\varphi\|_H \right\} \\ &\leq \tilde{C}(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \left( T \max_{2 \leq k \leq N} \left\| \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\tau} \right\|_H + \|\varphi_1\|_H + \|A\varphi\|_H \right) \end{aligned} \quad (2.48)$$

kestirimi sağlar.  $\frac{\lambda_m}{\tau} \notin Z^+$  için,  $l_m + 1 \leq N$  olduğundan yukarıdaki kestirim

geçerlidir. Sonra, (2.47) ve (2.48) kestirimlerini kullanarak  $A \frac{u_k + u_{k-1}}{2}$  için

kestirim elde edilir. Daha sonra da  $A \frac{u_k + u_{k-1}}{2}$  için elde ettiğimiz kestirimi,

$$i \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} = \varphi_k - A \frac{u_k + u_{k-1}}{2} = \varphi_1 - \sum_{j=2}^k (\varphi_{j-1} - \varphi_j) - A \frac{u_k + u_{k-1}}{2}$$

bağıntısını ve üçgen eşitsizliği kullanarak (2.40) kestirimi bulunur. Bu da Teorem 2.7 nin ispatını tamamlar.

Not etmek gerekir ki, Teorem 2.6 ve 2.7 de  $\tau \rightarrow 0$  için limit alınırsa, çok noktalı lokal olmayan sınır değer problemi (2.1) in kararlılığını ifade eden Teorem 2.2 elde edilir.

## 2.4 Fark Şemaları İçin Uygulamalar

Bu kısımda soyut teoremler, Teorem 2.6 ve Teorem 2.7 iki tane çok noktalı lokal olmayan sınır değer problemine uygulanacaktır.

İlk olarak (2.15) problemi ele alınacak. (2.15) problemini kesikli (diskrit) hale dönüştürmek iki adımda olur. Birinci adımda ilk önce

$$[0,1]_h = \{x = x_m = hm, \quad 0 \leq m \leq M, \quad Mh = 1\}$$

ağ kümesi tanımlanır. Sonra,  $[0,1]_h$  ağ kümesinde tanımlı tüm  $\varphi^h(x)$  ağ fonksiyonları  $L_{2h} = L_2([0,1]_h)$  Hilbert uzayını oluşturur. Bu uzayda norm

$$\|\varphi^h\|_{L_{2h}} = \left( \sum_{x \in [0,1]_h} |\varphi^h(x)|^2 h \right)^{1/2}$$

formülü ile ifade edilir. Daha sonra da, (2.15) problemi tarafından oluşturulan  $A$  differansiyel operatörü yerine

$$A_h^x u^h = \left\{ - \left( a(x) u_x^h \right)_{x,m} \right\}_1^{M-1} \quad (2.49)$$

formülüyle verilen  $A_h^x$  fark operatörü alınır. Burada,  $A_h^x$  fark operatörü

$u_0 = u_M$ ,  $u_1 - u_0 = u_M - u_{M-1}$  koşullarını sağlayan  $u^h(x) = \{u_m\}_0^M$  ağ fonksiyonlar uzayında tanımlanmıştır. Bu fark operatörü  $A_h^x$  sayesinde (2.15) çok noktalı lokal olmayan sınır değer problemi

$$\begin{cases} i \frac{du^h(t,x)}{dt} + A_h^x u^h(t,x) = f^h(t,x), & 0 < t < T, \quad x \in [0,1]_h, \\ u^h(0,x) = \sum_{m=1}^p \alpha_m u^h(\lambda_m, x) + \varphi^h(x), \\ 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_p \leq T, \quad x \in [0,1]_h \end{cases} \quad (2.50)$$

adi differansiyel denklem sistemine dönüştürülür.

İkinci adımda (2.50) problemi için birinci basamaktan doğruluklu fark şeması (2.18) kullanılarak

$$\begin{cases} i \frac{u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x)}{\tau} + A_h^x u_k^h(x) = \varphi_k^h(x), \\ \varphi_k^h(x) = f^h(t_k, x), \quad t_k = k\tau, \quad 1 \leq k \leq N, \quad x \in [0,1]_h, \\ u_0^h(x) = \sum_{m=1}^p \alpha_m u_{l_m}^h(x) + \varphi^h(x), \quad x \in [0,1]_h, \\ 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_p \leq T, \quad x \in [0,1]_h \end{cases} \quad (2.51)$$

fark şeması ve Crank-Nicholson fark şeması (2.32) kullanılarak

$$\begin{cases} i \frac{u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x)}{\tau} + \frac{A_h^x}{2} (u_k^h(x) + u_{k-1}^h(x)) = \varphi_k^h(x), \\ \varphi_k^h(x) = f^h(t_k - \frac{\tau}{2}, x), \quad t_k = k\tau, \quad 1 \leq k \leq N, \quad x \in [0,1]_h, \\ u_0^h(x) = \sum_{\frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+} \alpha_m u_{l_m}^h(x) + \varphi^h(x) \\ + \sum_{\frac{\lambda_m}{\tau} \notin Z^+} \alpha_m (I_h + id_m A_h^x) \frac{1}{2} (u_{l_m}^h(x) + u_{l_m+1}^h(x)) - i \sum_{\frac{\lambda_m}{\tau} \notin Z^+} \alpha_m d_m \varphi_{l_m}^h(x), \\ x \in [0,1]_h. \\ 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_p \leq T, \quad x \in [0,1]_h, \end{cases} \quad (2.52)$$

fark şeması yazılır.

**Teorem 2.8.**  $\tau$  ve  $|h|$  yeterince küçük sayılar olsun. Eğer

$$\sum_{m=1}^p |\alpha_m| < 1$$

ise, (2.51) ve (2.52) fark şemalarının çözümü için

$$\max_{0 \leq k \leq N} \|u_k^h\|_{L_{2h}} \leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \left[ \|\varphi^h\|_{L_{2h}} + T \max_{1 \leq k \leq N} \|\varphi_k^h\|_{L_{2h}} \right]$$

kararlılık kestirimi, bunun yanında (2.51) fark şemasının çözümü için

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq k \leq N} \left\| \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\|_{L_{2h}} + \max_{1 \leq k \leq N} \left\| (u_k^h)_{xx} \right\|_{L_{2h}} \\ & \leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \left[ \left\| (\varphi_x^h)_x \right\|_{L_{2h}} + \left\| \varphi_1^h \right\|_{L_{2h}} + T \max_{2 \leq k \leq N} \left\| \frac{\varphi_k^h - \varphi_{k-1}^h}{\tau} \right\|_{L_{2h}} \right] \end{aligned}$$

kararlılık kestirimi ve (2.52) fark şemasının çözümü için de

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq k \leq N} \left\| \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\|_{L_{2h}} + \max_{1 \leq k \leq N} \left\| \frac{(u_k^h)_{xx} + (u_{k-1}^h)_{xx}}{2} \right\|_{L_{2h}} \\ & \leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \left[ \left\| (\varphi_x^h)_x \right\|_{L_{2h}} + \left\| \varphi_1^h \right\|_{L_{2h}} + T \max_{2 \leq k \leq N} \left\| \frac{\varphi_k^h - \varphi_{k-1}^h}{\tau} \right\|_{L_{2h}} \right] \end{aligned}$$

kararlılık kestirimi sağlanır.

Burada  $C(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$  sabiti  $\tau$ ,  $h$ ,  $\varphi^h(x)$  ve  $\varphi_k^h(x)$ ,  $1 \leq k \leq N$  den bağımsızdır.

Teorem 2.8 in ispatı soyut Teorem 2.6 ve 2.7 ye ve (2.49) formülüyle  $L_{2h}$  de tanımlı  $A_h^x$  operatörünün simetri özelliklerine dayanmaktadır.

İkinci uygulama olarak (2.16) problemini ele alalım. (2.16) probleminin de kesikli hale dönüştürülmesi iki adımda olur. Birinci adımda önce

$$\tilde{\Omega}_h = \{x = x_m = (h_1 m_1, \dots, h_n m_n), \quad m = (m_1, \dots, m_n),$$

$$0 \leq m_r \leq N_r, \quad h_r N_r = L, \quad r = 1, \dots, n\},$$

$$\Omega_h = \tilde{\Omega}_h \cap \Omega, \quad S_h = \tilde{\Omega}_h \cap S$$

ağ kümesi tanımlanır. Sonra  $\tilde{\Omega}_h$  ağ kümesinde tanımlı tüm

$\varphi^h(x) = \{\varphi(h_1 m_1, \dots, h_n m_n)\}$  ağ fonksiyonları  $L_{2h} = L_2(\tilde{\Omega}_h)$  Hilbert uzayını

oluşturur. Bu uzayda norm

$$\left\| \varphi^h \right\|_{L_2(\tilde{\Omega}_h)} = \left( \sum_{x \in \tilde{\Omega}_h} |\varphi^h(x)|^2 h_1 \cdots h_n \right)^{1/2}$$

formülü ile ifade edilir. Daha sonra da, (2.16) problemi tarafından oluşturulan  $A$  differansiyel operatörü yerine

$$A_h^x u^h(x) = - \sum_{r=1}^n \left( a_r(x) u_{x_r}^h \right)_{x_r, j_r} \quad (2.53)$$

formülüyle verilen  $A_h^x$  fark operatörü alınır. Burada,  $A_h^x$  fark operatörü, tüm

$x \in S_h$  için  $u^h(x) = 0$  şartlarını sağlayan  $u^h(x)$  ağ fonksiyonlar uzayında tanımlıdır. Bilindiği gibi  $L_2(\tilde{\Omega}_h)$  uzayında  $A_h^x$  özeşlenik bir operatördür. O halde,  $A_h^x$  fark operatörü sayesinde (2.16) çok noktalı lokal olmayan sınır değer problemi

$$\begin{cases} i \frac{du^h(t,x)}{dt} + A_h^x u^h(t,x) = f^h(t,x), & 0 < t < T, \quad x \in \tilde{\Omega}_h, \\ u^h(0,x) = \sum_{m=1}^p \alpha_m u^h(\lambda_m, x) + \varphi^h(x), \\ 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_p \leq T, \quad x \in \tilde{\Omega}_h \end{cases} \quad (2.54)$$

adi differansiyel denklemine dönüştürülür.

İkinci adımda, (2.54) fark denklemi için birinci basamaktan doğruluklu fark şeması (2.18) kullanılarak

$$\begin{cases} i \frac{u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x)}{\tau} + A_h^x u_k^h(x) = \varphi_k^h(x), \\ \varphi_k^h(x) = f^h(t_k, x), \quad t_k = k\tau, \quad 1 \leq k \leq N, \quad x \in \tilde{\Omega}_h, \\ u_0^h(x) = \sum_{m=1}^p \alpha_m u_m^h(x) + \varphi^h(x), \quad x \in \tilde{\Omega}_h, \\ 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_p \leq T, \quad x \in \tilde{\Omega}_h \end{cases} \quad (2.55)$$

fark şeması ve Crank-Nicholson fark şeması (2.32) kullanılarak

$$\begin{cases} i \frac{u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x)}{\tau} + \frac{A_h^x}{2} (u_k^h(x) + u_{k-1}^h(x)) = \varphi_k^h(x), \\ \varphi_k^h(x) = f^h(t_k - \frac{\tau}{2}, x), \quad t_k = k\tau, \quad 1 \leq k \leq N, \quad x \in \tilde{\Omega}_h, \\ u_0^h(x) = \sum_{\frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+} \alpha_m u_m^h(x) + \varphi^h(x) \\ + \sum_{\frac{\lambda_m}{\tau} \notin Z^+} \alpha_m (I_h + id_m A_h^x) \frac{1}{2} (u_{i_m}^h(x) + u_{i_m+1}^h(x)) - i \sum_{\frac{\lambda_m}{\tau} \notin Z^+} \alpha_m d_m \varphi_{i_m}^h(x), \\ x \in \tilde{\Omega}_h, \\ 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_p \leq T, \quad x \in \tilde{\Omega}_h. \end{cases} \quad (2.56)$$

fark şeması yazılır.

**Teorem 2.9.**  $\tau$  ve  $|h| = \sqrt{h_1^2 + \dots + h_n^2}$  yeterince küçük sayılar olsun. Eğer

$$\sum_{m=1}^p |\alpha_m| < 1$$

ise, (2.55) ve (2.56) fark denklemlerinin çözümleri için

$$\max_{0 \leq k \leq N} \|u_k^h\|_{L_2(\tilde{\Omega}_h)} \leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \left[ \|\varphi^h\|_{L_2(\tilde{\Omega}_h)} + T \max_{1 \leq k \leq N} \|\varphi_k^h\|_{L_2(\tilde{\Omega}_h)} \right]$$

kararlılık kestirimi, bunun yanında (2.55) fark şemasının çözümü için

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq k \leq N} \left\| \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\|_{L_2(\tilde{\Omega}_h)} + \max_{1 \leq k \leq N} \sum_{r=1}^n \left\| (u_k^h)_{x_r, x_r, j_r}^- \right\|_{L_2(\tilde{\Omega}_h)} \\ & \leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \left[ \sum_{r=1}^n \left\| (\varphi^h)_{x_r, x_r, j_r}^- \right\|_{L_2(\tilde{\Omega}_h)} + \|\varphi_1^h\|_{L_2(\tilde{\Omega}_h)} + T \max_{2 \leq k \leq N} \left\| \frac{\varphi_k^h - \varphi_{k-1}^h}{\tau} \right\|_{L_2(\tilde{\Omega}_h)} \right] \end{aligned}$$

kararlılık kestirimi ve (2.56) fark şemasının çözümü için de

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq k \leq N} \left\| \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\|_{L_2(\tilde{\Omega}_h)} + \max_{1 \leq k \leq N} \sum_{r=1}^n \left\| \frac{(u_k^h)_{x_r, x_r, j_r}^- + (u_{k-1}^h)_{x_r, x_r, j_r}^-}{2} \right\|_{L_2(\tilde{\Omega}_h)} \\ & \leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \left[ \sum_{r=1}^n \left\| (\varphi^h)_{x_r, x_r, j_r}^- \right\|_{L_2(\tilde{\Omega}_h)} + \|\varphi_1^h\|_{L_2(\tilde{\Omega}_h)} + T \max_{2 \leq k \leq N} \left\| \frac{\varphi_k^h - \varphi_{k-1}^h}{\tau} \right\|_{L_2(\tilde{\Omega}_h)} \right]. \end{aligned}$$

kestirimi sağlanır. Burada  $C(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$  sabiti  $\tau$ ,  $h$ ,  $\varphi^h(x)$  ve  $\varphi_k^h(x)$ ,  $1 \leq k \leq N$ , den bağımsızdır.

Teorem 2.9 un ispatı soyut Teorem 2.6 ve 2.7 ye ve aynı zamanda (2.53) formülüyle tanımlanan  $A_h^x$  operatörünün simetri özelliklerine ve aşağıdaki  $L_{2h}$  uzayındaki elliptik fark probleminin çözümü için koersiv kestirimi elde edilen teoreme dayanmaktadır.

**Teorem 2.10.** Elliptik fark

$$A_h^x u^h(x) = w^h(x), \quad x \in \Omega_h,$$

$$u^h(x) = 0, \quad x \in S_h,$$

probleminin çözümü için

$$\sum_{r=1}^n \left\| (u_k^h)_{x_r, x_r, j_r}^- \right\|_{L_{2h}} \leq M \|w^h\|_{L_{2h}} \quad (2.57)$$

koersiv kestirimi sağlanır [Sobolevskii, P.E., 1975].

## 2.5 Sayısal Sonuçlar

Burada, Schrödinger denklemi için çok noktalı lokal olmayan sınır değer probleminin

$$\begin{cases} i \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + u(t, x) = \exp\left(\frac{it\pi^2}{4}\right) \left[ (x^2 - 2) \cos \frac{\pi}{2} x + 2\pi x \sin \frac{\pi}{2} x \right], \\ 0 < t, x < 1, \\ u(0, x) = \frac{1}{2} u\left(\frac{1}{2}, x\right) + \frac{1}{3} u\left(\frac{1}{3}, x\right) + \varphi(x), \\ \varphi(x) = \left(1 - \frac{1}{2} \exp\left(\frac{i\pi^2}{8}\right) - \frac{1}{3} \exp\left(\frac{i\pi^2}{12}\right)\right) x^2 \cos \frac{\pi}{2} x, \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (2.58)$$

(2.18) birinci basamaktan fark şemasını ve (2.32) Crank-Nicholson fark şemasını kullanarak sayısal çözümleri araştırılacak. Bu problemin tam çözümü

$$u(t, x) = \left( \exp\left(\frac{it\pi^2}{4}\right) \right) \left( x^2 \cos \frac{\pi}{2} x \right)$$

şeklindedir. (2.58) probleminin yaklaşık çözümünü bulmak için  $\tau$  ve  $h$  küçük parametrelerine bağlı ağ noktalar ailesinin kümesi  $[0, 1]_\tau \times [0, 1]_h$

$$\begin{aligned} [0, 1]_\tau \times [0, 1]_h &= \{(t_k, x_n) : t_k = k\tau, \quad 1 \leq k \leq N-1, \quad N\tau = 1, \\ & \quad x_n = nh, \quad 1 \leq n \leq M-1, \quad Mh = 1\} \end{aligned}$$

tanımlanır.

Öncelikle, birinci basamaktan fark şemasını kullanalım. (2.58) probleminin yaklaşık çözümlerini bulmak için (2.18) uygulanırsa aşağıdaki birinci basamaktan fark şeması elde edilir:

$$\begin{cases}
i \frac{u_n^k - u_n^{k-1}}{\tau} - \frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} + u_n^k = f(t_k, x_n), \\
1 \leq k \leq N, \quad 1 \leq n \leq M-1, \\
u_n^0 = \frac{1}{3} u_n^{\left[\frac{1}{3\tau}\right]} + \frac{1}{2} u_n^{\left[\frac{1}{2\tau}\right]} + \varphi(x_n), \quad 1 \leq n \leq M-1; \quad u_0^k = u_M^k = 0, \quad 0 \leq k \leq N, \\
f(t, x) = \exp\left(\frac{i\pi^2}{4}\right) \left[ (x^2 - 2) \cos \frac{\pi}{2} x + 2\pi x \sin \frac{\pi}{2} x \right], \\
\varphi(x) = \left( 1 - \frac{1}{2} \exp\left(\frac{i\pi^2}{8}\right) - \frac{1}{3} \exp\left(\frac{i\pi^2}{12}\right) \right) x^2 \cos \frac{\pi}{2} x.
\end{cases} \quad (2.59)$$

Böylelikle,  $(N+1) \times (M+1)$  lineer denklem sistemi elde edilmiş olur. Bu sistem aşağıdaki denk formda yazılabilir:

$$\begin{cases}
AU_{n+1} + BU_n + CU_{n-1} = D\varphi_n, \quad 1 \leq n \leq M-1, \\
U_0 = \tilde{0}, \quad U_M = \tilde{0},
\end{cases}$$

matris formunda yazılabilir. Burada,

$$\varphi_n = \begin{bmatrix} \varphi_n^0 \\ \varphi_n^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi_n^N \end{bmatrix}, \quad \varphi_n^k = \begin{cases} \left( 1 - \frac{1}{2} \exp\left(\frac{i\pi^2}{8}\right) - \frac{1}{3} \exp\left(\frac{i\pi^2}{12}\right) \right) x_n^2 \cos \frac{\pi}{2} x_n, & k=0, \\ f(t_k, x_n), & 1 \leq k \leq N, \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} b & c & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b & c & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & c & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & b & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & b & c \\ 1 & 0 & 0 & \dots & \frac{-1}{3} & \dots & 0 & \dots & \frac{-1}{2} & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$C = A, \quad D = I_{(N+1) \times (N+1)} \quad (I \text{ birim matris}), \quad U_s = \begin{bmatrix} U_s^0 \\ U_s^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ U_s^{N-1} \\ U_s^N \end{bmatrix}, \quad s = n-1, n, n+1.$$

şeklindedir. Ayrıca

$$a = -\frac{1}{h^2}, \quad b = -\frac{i}{\tau}, \quad c = \frac{i}{\tau} + \frac{2}{h^2} + 1$$

şeklindedir.

Şimdi, (2.58) probleminin yaklaşık çözümlerini elde etmek için Crank-Nicholson fark şeması kullanılacak. (2.58) probleminin yaklaşık çözümleri için (2.32) yi uygularsak, aşağıdaki Crank-Nicholson fark şeması elde edilir:

$$\left\{ \begin{array}{l}
i \frac{u_n^k - u_n^{k-1}}{\tau} - \frac{1}{2} \left( \frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} + \frac{u_{n+1}^{k-1} - 2u_n^{k-1} + u_{n-1}^{k-1}}{h^2} \right) + \frac{1}{2} u_n^k + \frac{1}{2} u_n^{k-1} = f\left(t_k - \frac{\tau}{2}, x_n\right), \\
1 \leq k \leq N, \quad 1 \leq n \leq M-1, \\
u_n^0 = \frac{1}{3} u_n^{\lceil \frac{1}{3\tau} \rceil} + \frac{1}{2} u_n^{\lceil \frac{1}{2\tau} \rceil} + \varphi(x_n), \quad 1 \leq n \leq M-1; \\
u_0^k = u_M^k = 0, \quad 0 \leq k \leq N, \\
f(t, x) = \exp\left(\frac{i\pi^2}{4}\right) \left[ (x^2 - 2) \cos \frac{\pi}{2} x + 2\pi x \sin \frac{\pi}{2} x \right], \\
\varphi(x) = \left(1 - \frac{1}{2} \exp\left(\frac{i\pi^2}{8}\right) - \frac{1}{3} \exp\left(\frac{i\pi^2}{12}\right)\right) x^2 \cos \frac{\pi}{2} x.
\end{array} \right. \quad (2.60)$$

Böylelikle,  $(N+1) \times (M+1)$  lineer denklem sistemi elde edilmiş olur. Bu lineer denklem sistemi düzenlenerek

$$\left\{ \begin{array}{l}
AU_{n+1} + BU_n + CU_{n-1} = D\varphi_n, \quad 1 \leq n \leq M-1, \\
U_0 = \tilde{0}, \quad U_M = \tilde{0},
\end{array} \right.$$

matris formunda yazılır. Burada

$$\varphi_n = \begin{bmatrix} \varphi_n^0 \\ \varphi_n^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi_n^N \end{bmatrix}, \quad \varphi_n^k = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{2} \exp\left(\frac{i\pi^2}{8}\right) - \frac{1}{3} \exp\left(\frac{i\pi^2}{12}\right)\right) x_n^2 \cos \frac{\pi}{2} x_n, & k=0, \\ f\left(t_k - \frac{\tau}{2}, x_n\right), & 1 \leq k \leq N, \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & a & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} b & c & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b & c & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & c & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & b & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & b & c \\ 1 & 0 & 0 & \dots & \frac{-1}{3} & \dots & 0 & \dots & \frac{-1}{2} & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$C = A, \quad D = I_{(N+1) \times (N+1)}$$

şeklindedir. Ayrıca,  $a = -\frac{1}{2h^2}$ ,  $b = \left(-\frac{i}{\tau} + \frac{1}{h^2} + \frac{1}{2}\right)$ ,  $c = \frac{i}{\tau} + \frac{1}{h^2} + \frac{1}{2}$

formundadır. Dolayısıyla ikinci mertebeden katsayıları matris olan,  $n$  ye göre fark denklemleri elde edilmiş oldu. Bu iki fark denklemlerini de, yani birinci basamaktan doğruluklu fark şeması ve ikinci basamaktan doğruluklu fark şeması, çözmek için Bölüm 2 deki gibi iyileştirilmiş Gauss eliminasyon yöntemi kullanılacaktır. Bu yöntemde matris denkleminin

$$U_n = \alpha_{n+1}U_{n+1} + \beta_{n+1}, \quad n = M-1, \dots, 2, 1, 0,$$

formunda bir çözümü araştırılır. Bu son denklemde  $\alpha_j$  ( $j=1, \dots, M-1$ )'ler  $(N+1) \times (N+1)$  boyutlu kare matrisler ve  $\beta_j$  ( $j=1, \dots, M-1$ )'ler de  $(N+1) \times 1$  boyutlu sütun matrisleridir.

$$U_0 = 0 = \alpha_1 U_1 + \beta_1,$$

olduğu için  $\alpha_1 = \bar{0}$  ve  $\beta_1 = \bar{0}$  şeklinde olur.

$$U_s = \alpha_{s+1}U_{s+1} + \beta_{s+1}, \quad (s = n, n-1 \text{ için})$$

eşitlikleri ve

$$AU_{n+1} + BU_n + CU_{n-1} = D\varphi_n$$

matris denklemini kullanılarak

$$[A + B\alpha_{n+1} + C\alpha_n\alpha_{n+1}]U_{n+1} + [B\beta_{n+1} + C\alpha_n\beta_{n+1} + C\beta_n] = D\varphi_n$$

elde edilir. Eğer,

$$A + B\alpha_{n+1} + C\alpha_n\alpha_{n+1} = 0,$$

$$[B\beta_{n+1} + C\alpha_n\beta_{n+1} + C\beta_n] = D\varphi_n, \quad 1 \leq n \leq M-1$$

alırsak, son denklem sağlanır. Buradan da

$$\alpha_{n+1} = -(B + C\alpha_n)^{-1} A,$$

$$\beta_{n+1} = (B + C\alpha_n)^{-1} (D\varphi_n - C\beta_n), \quad n = 1, 2, 3, \dots, M-1 \quad (2.61)$$

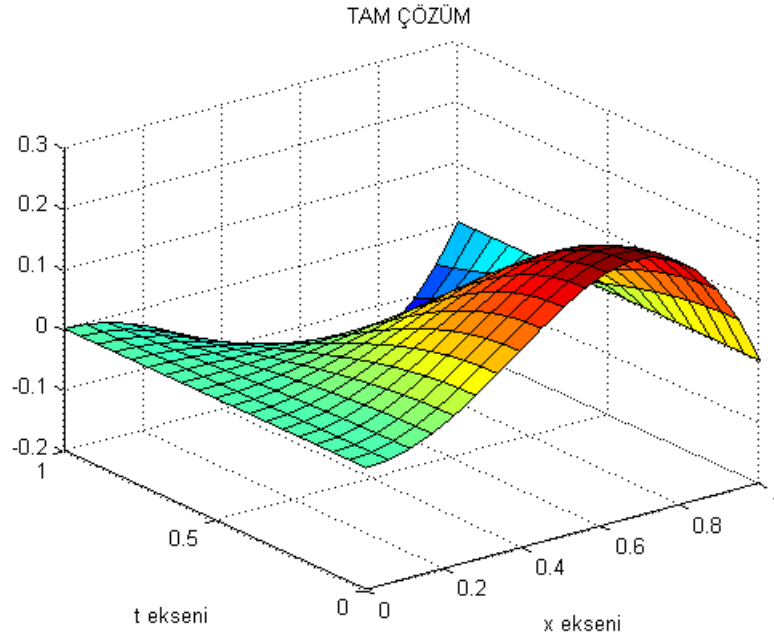
formülleri bulunmuş olur. (2.61) formülleri kullanılarak  $\alpha_n$  ve  $\beta_n$

hesaplanabilir.  $\alpha_n$  ve  $\beta_n$  hesaplandıktan sonra,  $U_M = \vec{0}$ , dan başlayarak ve

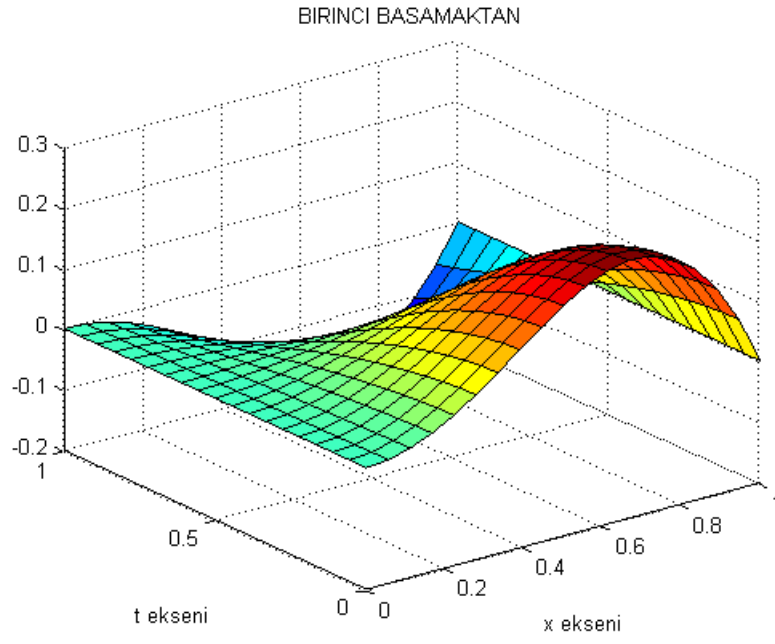
$$U_n = \alpha_{n+1}U_{n+1} + \beta_{n+1}, \quad n=M-1, \dots, 2, 1$$

iteratif denklemi kullanarak  $U_n$ ,  $1 \leq n \leq M-1$  bulunabilir.

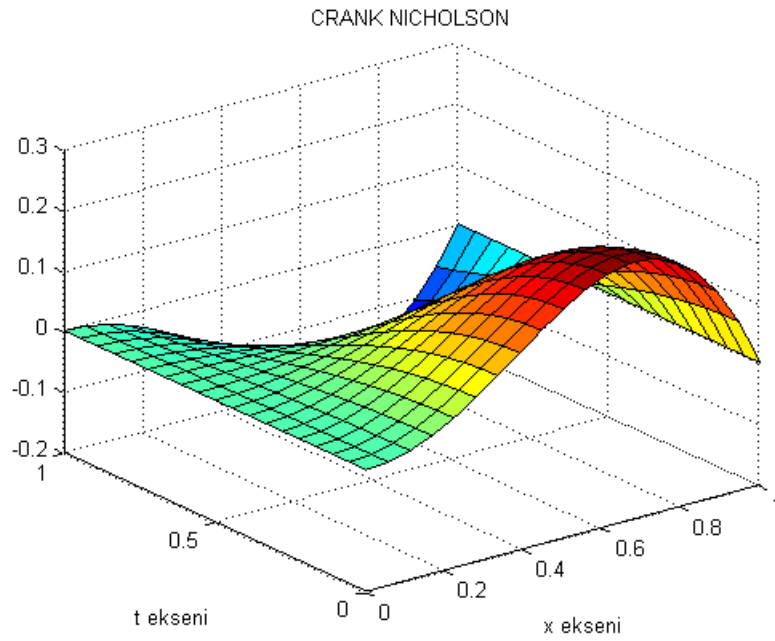
Şimdi sayısal sonuçları verelim. (2.58) probleminin tam ve yaklaşık çözümlerinin sayısal değerlerini elde etmek için MATLAB programlarını (bak Ek 1) kullandık. (2.58) probleminin tam ve yaklaşık çözümleri aşağıdaki şekillerde verilmiştir.



Şekil 2.1. Tam çözüm



Şekil 2.2. Birinci basamaktan doğruluklu fark şeması



Şekil 2.3. Crank-Nicholson fark şeması

Sayısal sonuçlar farklı  $N=M$  değerleri için verilmiştir ve burada  $u_n^k$  bu fark şemalarının  $(t_k, x_n)$  noktasında sayısal çözümlerini göstermektedir. Tam çözüm ile yaklaşık çözümleri karşılaştırabilmek için önce hatalar

$$E_N^M = \max_{1 \leq k \leq N} \left( \sum_{n=1}^M |u(t_k, x_n) - u_n^k|^2 h \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.62)$$

formülüyle hesaplandı.

Tablo 2.1, fark şemalarıyla elde edilen çözümler ile tam çözüm arasındaki hata analizini vermektedir. Tablo 2.1, sırasıyla  $N=M=18, 30$  ve  $60$  için oluşturulmuştur.

Tablo 2.1: Hatalar.

Metot	$N=M=18$	$N=M=30$	$N=M=60$
1. b. doğruluklu	0.0032	0.0021	0.0012
Crank-Nicholson	0.0005	0.0002	0.0001

İkinci olarak, tam çözüm ile yaklaşık çözümleri karşılaştırabilmek için kısmi hatalar,

$$relE_N^M = \max_{1 \leq k \leq N} \frac{E_N^M}{\left( \sum_{n=1}^M |u(t_k, x_n)|^2 h \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.63)$$

formülüyle hesaplanmıştır. Tablo 2.2 sırasıyla  $N=M=18, 30$  ve  $60$  için hesaplanmıştır.

Tablo 2.2: Kısmi Hatalar.

Metot	$N=M=18$	$N=M=30$	$N=M=60$
1. b. doğruluklu	0.0221	0.0148	0.0085
Crank-Nicholson	0.0034	0.0015	0.0005

Tablolardan da açık bir şekilde görüldüğü gibi, ikinci basamaktan doğruluklu Crank-Nicholson fark şeması yöntemi, birinci basamaktan doğruluklu fark şemasına kıyasla tam çözümlere daha yakın sonuçlar vermektedir.

## BÖLÜM 3

# SCHRÖDİNGER DENKLEMİ İÇİN İNTEGRALLİ, ÇOK NOKTALI LOKAL OLMAYAN SINIR DEĞER PROBLEMİ

Bu bölümde,  $H$  Hilbert uzayında  $A$  özeşlenik operatör olmak üzere Schrödinger denklemi için integralli, çok noktali lokal olmayan sınır değer problemi

$$\begin{cases} i \frac{du}{dt} + Au = f(t), & 0 < t < T, \\ u(0) = \sum_{m=1}^p \alpha_m u(\lambda_m) + \int_0^T \psi(s)u(s)ds + \varphi, \\ 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_p \leq T \end{cases} \quad (3.1)$$

araştırılmıştır. Bu problemin çözümünün kararlılığı incelenmiştir. İki tane çok noktali lokal olmayan sınır değer problemi incelenmiştir. Çok noktali lokal olmayan sınır değer probleminin yaklaşık çözümleri için birinci basamaktan doğruluklu fark şeması ve ikinci basamaktan doğruluklu Crank-Nicholson fark şeması kurulmuştur. Bu fark şemalarının kararlılığı gösterilmiştir. Uygulamada Schrödinger denkleminin fark denklemlerinin çözümlerinin kararlılığı elde edilmiştir. Çok noktali lokal olmayan sınır şartlı tek-boyutlu Schrödinger denkleminin çözümü sayısal olarak elde edilmiştir. Bu fark denklemlerinin çözümünde iyileştirilmiş Gauss eliminasyon metodunu içeren bir teknik kullanılmıştır. Metot sayısal değerlerle desteklenmiştir.

### 3.1 İntegralli, Çok Noktalı Lokal Olmayan Sınır Değer Problemi

**Teorem 3.1.** Eğer  $f(t) \in C^1([0, T], H)$ ,  $\varphi \in D(A)$  ve

$$\sum_{m=1}^p |\alpha_m| < 1 - \int_0^T |\psi(s)| ds$$

ise, (3.1) probleminin tek  $u(t)$  çözümü vardır ve bu çözüm için aşağıdaki

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_H \leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \psi) \left[ \|\varphi\|_H + T \max_{0 \leq t \leq T} \|f(t)\|_H \right], \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} & \max_{0 \leq t \leq T} \|u'(t)\|_H + \max_{0 \leq t \leq T} \|Au(t)\|_H \\ & \leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \psi) \left[ \|A\varphi\|_H + T \max_{0 \leq t \leq T} \|f'(t)\|_H + \|f(0)\|_H \right] \end{aligned} \quad (3.3)$$

kararlılık kestirimleri sağlanır. Burada,  $C(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \psi)$  sabiti  $\varphi$  ve  $f(t)$  den bağımsızdır.

**İspat.** Öncelikle (3.1) probleminin çözümü için formül bulalım. Bilindiği gibi

$$i \frac{du}{dt} + Au = f(t), \quad 0 < t < T, \quad u(0) = \xi \quad (3.4)$$

probleminin pürüzsüz veriler için tek bir çözümü vardır ve

$$u(t) = e^{iAt} \xi - \int_0^t e^{iA(t-s)} i f(s) ds \quad (3.5)$$

formülü sağlar.

$$u(0) = \sum_{m=1}^p \alpha_m u(\lambda_m) + \int_0^T \psi(s) u(s) ds + \varphi$$

şartını kullanarak,

$$\begin{aligned} \xi &= \sum_{m=1}^p \alpha_m e^{iA\lambda_m} \xi - \sum_{m=1}^p \alpha_m \int_0^{\lambda_m} e^{iA(\lambda_m-s)} i f(s) ds \\ &+ \int_0^T \psi(s) \left[ e^{iAs} \xi - i \int_0^s e^{iA(s-\sigma)} f(\sigma) d\sigma \right] ds + \varphi \end{aligned}$$

elde edilir.  $\sum_{m=1}^p |\alpha_m| + \int_0^T |\psi(s)| ds < 1$  olduğu için,  $I - \sum_{m=1}^p \alpha_m e^{iA\lambda_m} - \int_0^T \psi(s) e^{iAs} ds$

operatörünün

$$R = \left( I - \sum_{m=1}^p \alpha_m e^{iA\lambda_m} - \int_0^T \psi(s) e^{iAs} ds \right)^{-1}$$

şeklinde tersi vardır ve

$$\begin{aligned} \|R\| &\leq \sup_{-\infty \leq \mu \leq \infty} \frac{1}{\left| 1 - \sum_{m=1}^p \alpha_m e^{i\mu\lambda_m} - \int_0^T \psi(s) e^{i\mu s} ds \right|} \\ &\leq \sup_{-\infty \leq \mu \leq \infty} \frac{1}{\left| 1 - \left( \sum_{m=1}^p |\alpha_m| e^{i\mu\lambda_m} + \int_0^T |\psi(s)| e^{i\mu s} ds \right) \right|} \\ &\leq \frac{1}{1 - \left( \sum_{m=1}^p |\alpha_m| + \int_0^T |\psi(s)| ds \right)} \leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p, \psi) \end{aligned} \quad (3.6)$$

sağlanır. Böylece,

$$\xi = -R \left[ \sum_{m=1}^p \alpha_m \int_0^{\lambda_m} e^{iA(\lambda_m-s)} i f(s) ds + i \int_0^T \psi(s) \left[ \int_0^s e^{iA(s-\sigma)} f(\sigma) d\sigma \right] ds + \varphi \right] \quad (3.7)$$

elde edilmiş olur. Sonuç olarak integralli, çok noktalı olmayan sınır değer problemi (3.1) in çözümü için (3.5) ve (3.7) formüllerini elde etmiş oluruz.

İkinci olarak (3.2) kestirimi elde edilecektir.

$$\|e^{iAt}\|_{H \rightarrow H} \leq 1 \quad (3.8)$$

kestirimi kullanılarak, tüm  $t$  ler için

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_H &\leq \|e^{iAt}\|_{H \rightarrow H} \|\xi\|_H + \int_0^t \|e^{iA(t-s)}\|_{H \rightarrow H} \|f(s)\|_H ds \\ &\leq \|\xi\|_H + T \max_{0 \leq t \leq T} \|f(t)\|_H \end{aligned} \quad (3.9)$$

eşitsizliği sağlanır. (3.7) yi (3.6) ve (3.8) kestirimlerini kullanarak

$$\begin{aligned} \|\xi\|_H &\leq \|R\|_{H \rightarrow H} \left\{ \sum_{m=1}^p |\alpha_m| \int_0^{\lambda_m} \|e^{iA(\lambda_m-s)}\|_{H \rightarrow H} \|f(s)\|_H ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \|\psi(s)\|_H \left[ \int_0^s \|e^{iA(s-\sigma)}\|_{H \rightarrow H} \|f(\sigma)\|_H d\sigma \right] ds + \|\varphi\|_H \right\} \\ &\leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p, \psi) \left[ \sum_{m=1}^p |\alpha_m| \|\lambda_m\| \max_{0 \leq t \leq T} \|f(t)\|_H + T \max_{0 \leq t \leq T} \|f(t)\|_H \int_0^T |\psi(s)| ds + \|\varphi\|_H \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \psi) \left[ \left( \sum_{m=1}^p |\alpha_m| + \int_0^T |\psi(s)| ds \right) T \max_{0 \leq t \leq T} \|f(t)\|_H + \|\varphi\|_H \right] \\ &\leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \psi) \left[ T \max_{0 \leq t \leq T} \|f(t)\|_H + \|\varphi\|_H \right] \end{aligned} \quad (3.10)$$

bulunur. Böylelikle, (3.9) ve (3.10) kullanılarak (3.2) kestirimi elde edilir.

Şimdi (3.3) kestirimi gösterilecektir. (3.5) formülünü kullanarak

$$Au(t) = e^{iAt} A\xi + f(0) + \int_0^t f'(s) ds - f(0)e^{iAt} - \int_0^t e^{iA(t-s)} f'(s) ds \quad (3.11)$$

elde edilir. Böylece,

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|Au\|_H \leq \|A\xi\|_H + 2\|f(0)\|_H + 2T \max_{0 \leq t \leq T} \|f'(t)\|_H \quad (3.12)$$

kestirimi elde edilmiş olur.  $u(0) = \sum_{m=1}^p \alpha_m u(\lambda_m) + \int_0^T \psi(s)u(s) ds + \varphi$  şartını ve (3.11)

formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned} A\xi = R \left\{ \sum_{m=1}^p \alpha_m f(0) + \sum_{m=1}^p \alpha_m \int_0^{\lambda_m} f'(s) ds - f(0) \sum_{m=1}^p \alpha_m e^{iA\lambda_m} - \sum_{m=1}^p \alpha_m \int_0^{\lambda_m} e^{iA(\lambda_m-s)} f'(s) ds \right. \\ \left. + \int_0^T \psi(s) \left( f(0) + \int_0^s f'(\sigma) d\sigma - f(0)e^{iA\sigma} - \int_0^s e^{iA(s-\sigma)} f'(\sigma) d\sigma \right) ds + A\varphi \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada,

$$R = \left( I - \sum_{m=1}^p \alpha_m e^{iA\lambda_m} - \int_0^T \psi(s) e^{iAs} ds \right)^{-1}$$

şeklindedir. Sonuç olarak (3.6), (3.8) kestirimlerini ve  $\sum_{m=1}^p |\alpha_m| + \int_0^T |\psi(s)| ds < 1$

eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned} \|A\xi\|_H &\leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \psi) \left\{ 2\|f(0)\|_H \left( \sum_{m=1}^p |\alpha_m| + \int_0^T |\psi(s)| ds \right) \right. \\ &\quad \left. + 2T \max_{0 \leq t \leq T} \|f'(t)\|_H \left( \sum_{m=1}^p |\alpha_m| + \int_0^T |\psi(s)| ds \right) + \|A\varphi\|_H \right\} \\ &\leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \psi) \left\{ 2\|f(0)\|_H + 2T \max_{0 \leq t \leq T} \|f'(t)\|_H + \|A\varphi\|_H \right\} \end{aligned} \quad (3.13)$$

elde edilir. Sonra (3.12) ve (3.13) kestirimlerini kullanarak  $Au$  için kestirim

bulunmalıdır. Daha sonra  $Au$  için elde edilen kestirim,

$iu_t = f(t) - Au = f(0) + \int_0^t f'(s)ds - Au$  bağıntısı ve üçgen eşitsizliği kullanılarak (3.3) kestirimi elde edilmiş olur. Bu da Teorem 3.1 i ispatlar.

## 3.2 Uygulamalar

Şimdi, bu soyut sonucun aşağıdaki iki tane integralli, çok noktalı lokal olmayan sınır değer problemine uygulaması araştırılacaktır.

İlk olarak, tek boyutlu Schrödinger denklemi için

$$\begin{cases} iu_t - (a(x)u_x)_x = f(t, x), & 0 < t < T, \quad 0 < x < 1, \\ u(0, x) = \sum_{m=1}^p \alpha_m u(\lambda_m, x) + \int_0^T \psi(s)u(s, x)ds + \varphi(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ u(t, 0) = u(t, 1), \quad u_x(t, 0) = u_x(t, 1), & 0 \leq t \leq T \end{cases} \quad (3.14)$$

integralli, çok noktalı lokal olmayan sınır değer problemi ele alınsın. Problem (3.14) in pürüzsüz  $a(x)$  ( $x \in (0, 1)$ ),  $\varphi(x)$  ( $x \in [0, 1]$ ),  $f(t, x)$  ( $t \in [0, T]$ ,  $x \in (0, 1)$ ) ve  $\psi(t)$  ( $t \in [0, T]$ ) verileri için pürüzsüz tek  $u(t, x)$  çözümü vardır. Bu bize (3.14) karma problemini  $H = L_2[0, 1]$  Hilbert uzayında (3.1) problemine indirgeme imkanı sağlar, öyle ki  $A$  özeşlenik operatörü (3.14) ile tanımlanmıştır.

**Theorem 3.2.** Eğer,

$$\sum_{m=1}^p |\alpha_m| < 1 - \int_0^T |\psi(s)| ds$$

ise, (3.14) integralli, çok noktalı lokal olmayan sınır değer probleminin çözümü için aşağıdaki

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t, \cdot)\|_{L_2[0,1]} &\leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \psi) \left[ \|\varphi\|_{L_2[0,1]} + T \max_{0 \leq t \leq T} \|f(t, \cdot)\|_{L_2[0,1]} \right], \\ \max_{0 \leq t \leq T} \|u_t(t, \cdot)\|_{L_2[0,1]} + \max_{0 \leq t \leq T} \|u_{xx}(t, \cdot)\|_{L_2[0,1]} \\ &\leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \psi) \left[ \|\varphi_{xx}\|_{L_2[0,1]} + T \max_{0 \leq t \leq T} \|f_t(t, \cdot)\|_{L_2[0,1]} + \|f(0, \cdot)\|_{L_2[0,1]} \right] \end{aligned}$$

kararlılık kestirimleri sağlanır.

Bu teoremin ispatı, soyut Teorem 3.1 ve (3.14) problemi tarafından oluşturulan uzay operatörünün simetri özelliklerine dayanmaktadır.

İkinci olarak,  $n$ -boyutlu  $R^n$  Öklit uzayında  $\Omega = (0 < x_k < 1, 1 \leq k \leq n)$  bir açık küme ve  $S$  bu kümenin sınırı olsun öyle ki  $\bar{\Omega} = \Omega \cup S$ 'dir.  $[0, T] \times \bar{\Omega}$  de çok boyutlu Schrödinger denklemi için integralli, çok noktalı local olmayan sınır değer problemi

$$\begin{cases} iu_t - \sum_{r=1}^n (a_r(x)u_{x_r})_{x_r} = f(t, x), & 0 < t < T, \quad x \in \Omega, \\ u(0, x) = \sum_{m=1}^p \alpha_m u(\lambda_m, x) + \int_0^T \psi(s)u(s, x)ds + \mu(x), & x \in \bar{\Omega}, \\ 0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_p \leq T, \\ u(t, x) = 0, \quad x \in S, \quad 0 \leq t \leq T \end{cases} \quad (3.15)$$

ele alınsın. (3.15) probleminin pürüzsüz  $a_r(x)$  ( $x \in \Omega$ ),  $\varphi(x)$  ( $x \in \bar{\Omega}$ ),  $f(t, x)$  ( $t \in [0, T]$ ,  $x \in \Omega$ ) ve  $\psi(t)$  ( $t \in [0, T]$ ) verileri için pürüzsüz tek bir  $u(t, x)$  çözümü vardır. Bu bize (3.15) karma problemini  $H = L_2(\bar{\Omega})$  Hilbert uzayında (3.1) integralli, çok noktalı sınır değer problemine indirgeme imkanı sağlar, öyle ki  $A$  özeşlenik operatörü (3.15) ile tanımlanmıştır.

**Teorem 3.3. Eğer**

$$\sum_{m=1}^p |\alpha_m| < 1 - \int_0^T |\psi(s)| ds$$

ise, (3.15) integralli, çok noktalı lokal olmayan sınır değer probleminin çözümü için aşağıdaki

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t, \cdot)\|_{L_2(\bar{\Omega})} &\leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \psi) \left[ \|\varphi\|_{L_2(\bar{\Omega})} + T \max_{0 \leq t \leq T} \|f(t, \cdot)\|_{L_2(\bar{\Omega})} \right], \\ \max_{0 \leq t \leq T} \|u_t(t, \cdot)\|_{L_2(\bar{\Omega})} &+ \max_{0 \leq t \leq T} \sum_{r=1}^n \|u_{x_r x_r}(t, \cdot)\|_{L_2(\bar{\Omega})} \\ &\leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \psi) \left[ \sum_{r=1}^n \|\varphi_{x_r x_r}\|_{L_2(\bar{\Omega})} + T \max_{0 \leq t \leq T} \|f_t(t, \cdot)\|_{L_2(\bar{\Omega})} + \|f(0, \cdot)\|_{L_2(\bar{\Omega})} \right] \end{aligned}$$

kararlılık kestirimleri sağlanır.

Bu teoremin ispatı, soyut Teorem 3.1 e, (3.15) problemi tarafından oluşturulan uzay operatörünün simetri özelliklerine ve Teorem 2.10 a dayanmaktadır.

### 3.3 Fark Şemaları. Kararlılık

Öncelikle, ineğralli, çok noktalı lokal olmayan sınır değer problemi (3.1) e karşılık gelen

$$\begin{cases} i \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} + Au_k = \varphi_k, & \varphi_k = f(t_k), \quad t_k = k\tau, \quad 1 \leq k \leq N, \\ N\tau = T, \quad u_0 = \sum_{m=1}^p \alpha_m u_{l_m} + \tau \sum_{k=1}^N \psi_{k-1} u_{k-1} + \varphi. \end{cases} \quad (3.16)$$

birinci basamaktan fark denklemini ele alalım. Burada,  $m = 1, \dots, p$  için

$l_m = [\frac{\lambda_m}{\tau}]$  ve  $\tau \leq \lambda_m$  şeklindedir. (3.16) nın çözümü için formül bulalım. (3.4)

Cauchy probleminin yaklaşık çözümü için

$$i \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} + Au_k = \varphi_k, \quad 1 \leq k \leq N, \quad u_0 = \xi \quad (3.17)$$

birinci mertebeden fark şemasının çözümü tümevarım yöntemiyle

$$u_k = R^k \xi - i\tau \sum_{j=1}^k R^{k-j+1} \varphi_j, \quad 1 \leq k \leq N \quad (3.18)$$

şeklinde bulunur. Burada,

$$R = (I - i\tau A)^{-1}$$

şeklindedir. (3.18) formülünü ve

$$u_0 = \sum_{m=1}^p \alpha_m u_{l_m} + \tau \sum_{k=1}^N \psi_{k-1} u_{k-1} + \varphi$$

şartını kullanarak

$$\begin{aligned} \xi = & \left( \sum_{m=1}^p \alpha_m R^{l_m} \xi - \sum_{m=1}^p \alpha_m \sum_{j=1}^{l_m} i\tau R^{l_m-j+1} \varphi_j + \tau \psi_0 \xi \right. \\ & \left. + \tau \sum_{k=2}^N \psi_{k-1} \left( R^{(k-1)} \xi - i\tau \sum_{j=1}^{k-1} R^{k-j} \varphi_j \right) + \varphi \right) \end{aligned}$$

yani,

$$\begin{aligned} & \left( I - \left( \sum_{m=1}^p \alpha_m R^{l_m} + \tau \sum_{k=1}^N \psi_{k-1} R^{(k-1)} \right) \right) \xi = \\ & - \sum_{m=1}^p \alpha_m \sum_{j=1}^{l_m} i\tau R^{l_m-j+1} \varphi_j - i\tau^2 \sum_{k=2}^N \psi_{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} R^{k-j} \varphi_j + \varphi \end{aligned}$$

elde edilir.  $I - \left( \sum_{m=1}^p \alpha_m R^{l_m} + \tau \sum_{k=1}^N \psi_{k-1} R^{(k-1)} \right)$  operatörünün tersi olduğu için

$$\xi = -T_\tau \left\{ \sum_{m=1}^p \alpha_m \sum_{j=1}^{l_m} i\tau R^{l_m-j+1} \varphi_j + i\tau^2 \sum_{k=2}^N \psi_{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} R^{k-j} \varphi_j + \varphi \right\} \quad (3.19)$$

olur. Burada,

$$T_\tau = \left( I - \left( \sum_{m=1}^p \alpha_m R^{l_m} + \tau \sum_{k=1}^N \psi_{k-1} R^{(k-1)} \right) \right)^{-1}$$

şeklindedir. Böylece (3.16) probleminin çözümü için

$$u_k = \begin{cases} R^k \xi - i\tau \sum_{j=1}^k R^{k-j+1} \varphi_j, & 1 \leq k \leq N, \\ -T_\tau \left\{ i\tau \sum_{m=1}^p \alpha_m \sum_{j=1}^{l_m} R^{l_m-j+1} \varphi_j + i\tau^2 \sum_{k=2}^N \psi_{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} R^{k-j} \varphi_j + \varphi \right\}, & k = 0 \end{cases} \quad (3.20)$$

formülü elde edilmiş olur.

**Teorem 3.4.** Eğer  $\varphi \in D(A)$

$$\sum_{m=1}^p |\alpha_m| < 1 - \tau \sum_{k=1}^N |\psi_{k-1}|$$

ise, (3.16) fark şemasının çözümü için

$$\max_{0 \leq k \leq N} \|u_k\|_H \leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \psi) \left[ \|\varphi\|_H + T \max_{1 \leq k \leq N} \|\varphi_k\|_H \right], \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq k \leq N} \left\| \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} \right\|_H + \max_{1 \leq k \leq N} \|Au_k\|_H \\ & \leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \psi) \left[ \|A\varphi\|_H + \|\varphi_1\|_H + T \max_{2 \leq k \leq N} \left\| \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\tau} \right\|_H \right] \end{aligned} \quad (3.22)$$

kararlılık kestirimleri sağlanır.

**İspat.**

$$\|R\|_{H \rightarrow H} \leq 1 \quad (3.23)$$

kestirimi ve (3.18) formülü kullanılarak

$$\max_{1 \leq k \leq N} \|u_k\|_H \leq \left[ \|u_0\|_H + T \max_{1 \leq k \leq N} \|\varphi_k\|_H \right] \quad (3.24)$$

elde edilir. Özeşlenik operatörlerin spektral gösterimi kullanılarak

$$\|T_\tau\|_{H \rightarrow H} \leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \psi) \quad (3.25)$$

elde edilir. Daha açık olarak,

$$\|T_\tau\|_{H \rightarrow H} \leq \sup_{-\infty \leq \mu < \infty} \left| \left( 1 - \left( \sum_{m=1}^p \alpha_m \left( \frac{1}{(1-i\tau\mu)} \right)^{l_m} + \tau \sum_{k=1}^N \psi_{k-1} \left( \frac{1}{(1-i\tau\mu)} \right)^{(k-1)} \right)^{-1} \right) \right|.$$

Burada,

$$\left| \sum_{m=1}^p \alpha_m \left( \frac{1}{(1-i\tau\mu)} \right)^{l_m} + \tau \sum_{k=1}^N \psi_{k-1} \left( \frac{1}{(1-i\tau\mu)} \right)^{(k-1)} \right| \leq \sum_{m=1}^p |\alpha_m| + \tau \sum_{k=1}^N |\psi_{k-1}| < 1$$

olduğu için

$$\|T_\tau\|_{H \rightarrow H} \leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \psi)$$

kestirimi sağlanır. Böylelikle (3.19) formülünü, üçgen eşitsizliğini ve (3.23) ve (3.25) kestirimlerini kullanarak aşağıdaki kestirim elde edilir:

$$\begin{aligned} \|u_0\|_H &\leq \|T_\tau\|_{H \rightarrow H} \left( \sum_{m=1}^p |\alpha_m| \sum_{j=1}^{l_m} \tau \|R\|_{H \rightarrow H}^{l_m-j+1} \|\varphi_j\|_H + \|\varphi\|_H \right. \\ &\quad \left. + \tau^2 \sum_{k=2}^N \|\psi_{k-1}\|_H \sum_{j=1}^{k-1} \|R\|_{H \rightarrow H}^{k-j} \|\varphi_j\|_H \right) \\ &\leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \psi) \left( \sum_{m=1}^p |\alpha_m| \sum_{j=1}^{l_m} \tau \|\varphi_j\|_H + \tau^2 \sum_{k=2}^N \|\psi_{k-1}\|_H \sum_{j=1}^{k-1} \|\varphi_j\|_H + \|\varphi\|_H \right) \\ &\leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \psi) \left( T \max_{1 \leq k \leq N} \|\varphi_k\|_H \sum_{m=1}^p |\alpha_m| + \tau T \max_{1 \leq k \leq N} \|\varphi_k\|_H \sum_{k=2}^N \|\psi_{k-1}\|_H + \|\varphi\|_H \right) \\ &\leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \psi) \left( T \max_{1 \leq k \leq N} \|\varphi_k\|_H + \|\varphi\|_H \right). \end{aligned} \tag{3.26}$$

(3.21) kestirimi (3.24) ve (3.26) kestirimlerinin direk sonucudur.

Şimdi (3.22) kestirimi elde edilecektir. (3.18) i kullanarak

$$Au_k = R^k A\xi - i\tau \sum_{j=1}^k AR^{k-j+1} \varphi_j, \quad 1 \leq k \leq N,$$

elde edilir. Bu durumda (2.28) i yani

$$Au_k = R^k A\xi + \sum_{j=2}^k R^{k-j+1} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) + \varphi_1 - \sum_{j=2}^k (\varphi_{j-1} - \varphi_j) - R^k \varphi_1 \quad (3.27)$$

kullanarak

$$\max_{1 \leq k \leq N} \|Au_k\|_H \leq \|A\xi\|_H + 2T \max_{2 \leq k \leq N} \left\| \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\tau} \right\|_H + 2\|\varphi_1\|_H \quad (3.28)$$

kestirimi sağlanır.  $\|A\xi\|_H$  için de kestirim elde edilmelidir.

$$u_0 = \sum_{m=1}^p \alpha_m u_{l_m} + \tau \sum_{k=1}^N \psi_{k-1} u_{k-1} + \varphi$$

şartını ve (3.27) formülünü kullanarak

$$\begin{aligned} A\xi &= \sum_{m=1}^p \alpha_m R^{l_m} A\xi + \sum_{m=1}^p \alpha_m \left( \sum_{j=2}^{l_m} R^{l_m-j+1} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) + \varphi_1 - \sum_{j=2}^{l_m} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) - R^{l_m} \varphi_1 \right) \\ &+ \tau \sum_{k=1}^N \psi_{k-1} \left( R^{k-1} A\xi + \sum_{j=2}^{k-1} R^{k-j} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) + \varphi_1 - \sum_{j=2}^{k-1} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) - R^{k-1} \varphi_1 \right) + A\varphi \end{aligned}$$

yani,

$$\begin{aligned} A\xi &= T_\tau \left\{ \sum_{m=1}^p \alpha_m \left( \sum_{j=2}^{l_m} R^{l_m-j+1} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) + \varphi_1 - \sum_{j=2}^{l_m} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) - R^{l_m} \varphi_1 \right) \right. \\ &\left. + \tau \sum_{k=1}^N \psi_{k-1} \left( \sum_{j=2}^{k-1} R^{k-j} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) + \varphi_1 - \sum_{j=2}^{k-1} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) - R^{k-1} \varphi_1 \right) + A\varphi \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$T_\tau = \left( I - \left( \sum_{m=1}^p \alpha_m R^{l_m} + \tau \sum_{k=1}^N \psi_{k-1} R^{(k-1)} \right) \right)^{-1}$$

şekindedir. Böylelikle,

$$\begin{aligned} \|A\xi\|_H &\leq \|T_\tau\|_H \left\{ \sum_{m=1}^p |\alpha_m| \left( \sum_{j=2}^{l_m} \|R\|_{H \rightarrow H}^{l_m-j+1} \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H + \|\varphi_1\|_H + \sum_{j=2}^{l_m} \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H \right) \right. \\ &+ \|R\|_{H \rightarrow H}^{l_m} \|\varphi_1\|_H \left. + \tau \sum_{k=1}^N |\psi_{k-1}| \left( \sum_{j=2}^{k-1} \|R\|_{H \rightarrow H}^{k-j} \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H + \|\varphi_1\|_H \right) \right. \\ &\left. + \sum_{j=2}^{k-1} \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H + \|R\|_{H \rightarrow H}^{k-1} \|\varphi_1\|_H \right) + \|A\varphi\|_H \left. \right\} \\ &\leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \psi) \left\{ \sum_{m=1}^p |\alpha_m| \left( 2 \sum_{j=2}^{l_m} \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H + 2\|\varphi_1\|_H \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \tau \sum_{k=1}^N |\psi_{k-1}| \left( 2 \sum_{j=2}^{k-1} \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H + 2 \|\varphi_1\|_H \right) + \|A\varphi\|_H \Big\} \\
& \leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \psi) \left( \left( 2T \max_{2 \leq k \leq N} \left\| \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\tau} \right\|_H + 2 \|\varphi_1\|_H \right) \left( \sum_{m=1}^p |\alpha_m| + \tau \sum_{k=1}^N |\psi_{k-1}| \right) + \|A\varphi\|_H \right) \\
& \leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \psi) \left( 2T \max_{1 \leq k \leq N} \left\| \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\tau} \right\|_H + 2 \|\varphi_1\|_H + \|A\varphi\|_H \right) \quad (3.29)
\end{aligned}$$

sağlanmış olur. Sonra, (3.28) ve (3.29) kestirimlerini kullanarak  $Au_k$  için kestirim elde edilir. Daha sonra,  $Au_k$  için elde edilen kestirim,

$$i \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} = \varphi_k - Au_k = \varphi_1 - \sum_{j=2}^k (\varphi_{j-1} - \varphi_j) - Au_k \text{ bağıntısı ve üçgen eşitsizliği}$$

kullanılarak (3.22) kestirimi elde edilmiş olur. Bu da Teorem 3.5 i ispatlar.

İkinci olarak, ikinci basamaktan doğruluklu Crank- Nicholson fark şeması

$$\begin{cases} i \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} + \frac{A}{2} (u_k + u_{k-1}) = \varphi_k, & \varphi_k = f(t_k - \frac{\tau}{2}), \quad t_k = k\tau, \quad 1 \leq k \leq N, \\ u_0 = \sum_{\frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+} \alpha_m u_{l_m} + \sum_{\frac{\lambda_m}{\tau} \notin Z^+} \alpha_m (I + id_m A)^{\frac{1}{2}} (u_{l_m} + u_{l_m+1}) \\ -i \sum_{\frac{\lambda_m}{\tau} \notin Z^+} \alpha_m d_m \varphi_{l_m} + \tau \sum_{k=1}^N \psi_{k-\frac{1}{2}} \left( \frac{u_k + u_{k-1}}{2} \right) + \varphi \end{cases} \quad (3.30)$$

ele alınacaktır. Burada  $m = 1, \dots, p$  ve  $\tau \leq \lambda_m$  için  $l_m = [\frac{\lambda_m}{\tau}]$ ,  $d_m = \lambda_m - [\frac{\lambda_m}{\tau}]\tau - \frac{\tau}{2}$  şeklindedir. Önce (3.30) un çözümü için formül bulalım.

(3.4) Cauchy probleminin yaklaşık çözümü için ikinci basamaktan doğruluklu Crank-Nicholson fark şemasının

$$\begin{cases} i \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} + \frac{A}{2} (u_k + u_{k-1}) = \varphi_k, & \varphi_k = f(t_k - \frac{\tau}{2}), \\ t_k = k\tau, \quad 1 \leq k \leq N, \quad u_0 = \xi \end{cases} \quad (3.31)$$

çözümü tümevarım yöntemiyle

$$u_k = B^k \xi - i \sum_{j=1}^k B^{k-j} C \varphi_j \tau, \quad k = 1, \dots, N \quad (3.32)$$

şeklinde bulunur. Burada,

$$C = \left( I - i \frac{A}{2} \tau \right)^{-1}, \quad B = \left( I + i \frac{A}{2} \tau \right) C$$

şeklindedir.  $u_0$  ı bulmak için (3.32) formülü ve

$$u_0 = \sum_{\frac{\lambda_m \in Z^+}{\tau}} \alpha_m u_{l_m} + \sum_{\frac{\lambda_m \notin Z^+}{\tau}} \alpha_m (I + id_m A) \frac{1}{2} (u_{l_m} + u_{l_m+1})$$

$$- i \sum_{\frac{\lambda_m \notin Z^+}{\tau}} \alpha_m d_m \varphi_{l_m} + \tau \sum_{k=1}^N \psi_{k-\frac{1}{2}} \left( \frac{u_k + u_{k-1}}{2} \right) + \varphi,$$

şartı kullanılırsa

$$\xi = \sum_{\frac{\lambda_m \in Z^+}{\tau}} \alpha_m B^{l_m} \xi - i\tau \sum_{\frac{\lambda_m \in Z^+}{\tau}} \sum_{j=1}^{l_m} \alpha_m B^{l_m-j} C \varphi_j$$

$$+ \sum_{\frac{\lambda_m \notin Z^+}{\tau}} \alpha_m (I + id_m A) \frac{1}{2} \left( B^{l_m} \xi - i\tau \sum_{j=1}^{l_m} B^{l_m-j} C \varphi_j \right)$$

$$+ \sum_{\frac{\lambda_m \notin Z^+}{\tau}} \alpha_m (I + id_m A) \frac{1}{2} \left( B^{l_m+1} \xi - i\tau \sum_{j=1}^{l_m+1} B^{l_m+1-j} C \varphi_j \right) - i \sum_{\frac{\lambda_m \notin Z^+}{\tau}} \alpha_m d_m \varphi_{l_m}$$

$$+ \sum_{k=1}^N \psi_{k-\frac{1}{2}} \frac{\tau}{2} \left( B^k \xi - i \sum_{j=1}^k B^{k-j} C \varphi_j \tau + B^{k-1} \xi - i \sum_{j=1}^{k-1} B^{k-1-j} C \varphi_j \tau \right) + \varphi \quad (3.33)$$

elde edilir.

$$I - \sum_{\frac{\lambda_m \in Z^+}{\tau}} \alpha_m B^{l_m} - \sum_{\frac{\lambda_m \notin Z^+}{\tau}} \alpha_m (I + id_m A) \frac{1}{2} (I + B) B^{l_m} - \tau \sum_{k=1}^N \psi_{k-\frac{1}{2}} \frac{(B^k + B^{k-1})}{2}$$

operatörünün tersi olduğu için

$$\xi = T_\tau \left\{ -i\tau \sum_{\frac{\lambda_m \in Z^+}{\tau}} \sum_{j=1}^{l_m} \alpha_m B^{l_m-j} C \varphi_j - i\tau \sum_{\frac{\lambda_m \notin Z^+}{\tau}} \alpha_m (I + id_m A) \right.$$

$$\times \frac{1}{2} \left[ (I + B) \sum_{j=1}^{l_m} B^{l_m-j} C \varphi_j + C \varphi_{l_m+1} \right] - i \sum_{\frac{\lambda_m \notin Z^+}{\tau}} \alpha_m d_m \varphi_{l_m}$$

$$\left. + \frac{\tau}{2} \sum_{k=1}^N \psi_{k-\frac{1}{2}} \left( -i\tau \sum_{j=1}^k B^{k-j} C \varphi_j - i\tau \sum_{j=1}^{k-1} B^{k-1-j} C \varphi_j \right) + \varphi \right\} \quad (3.34)$$

elde edilir. Burada,

$$T_\tau = \left( I - \sum_{\frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+} \alpha_m B^{l_m} - \sum_{\frac{\lambda_m}{\tau} \notin Z^+} \alpha_m (I + il_m A) \frac{1}{2} (I + B) B^{l_m} - \tau \sum_{k=1}^N \psi_{k-\frac{1}{2}} \frac{(B^k + B^{k-1})}{2} \right)^{-1} \quad (3.35)$$

şeklindedir. Sonuçta (3.30) probleminin çözümü için

$$u_k = \begin{cases} B^k \xi - i \sum_{j=1}^k B^{k-j} C \varphi_j \tau, & k = 1, \dots, N, \\ T_\tau \left\{ -i \tau \sum_{\frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+} \sum_{j=1}^{l_m} \alpha_m B^{l_m-j} C \varphi_j - i \tau \sum_{\frac{\lambda_m}{\tau} \notin Z^+} \alpha_m (I + il_m A) \right. \\ \left. \times \frac{1}{2} \left[ (I + B) \sum_{j=1}^{l_m} B^{l_m-j} C \varphi_j + C \varphi_{l_m+1} \right] - i \sum_{\frac{\lambda_m}{\tau} \notin Z^+} \alpha_m d_m \varphi_{l_m} \right\} \\ \left. - i \frac{\tau^2}{2} \sum_{k=1}^N \psi_{k-\frac{1}{2}} \left( \sum_{j=1}^k B^{k-j} C \varphi_j + \sum_{j=1}^{k-1} B^{k-1-j} C \varphi_j \right) + \varphi \right\}, & k = 0 \end{cases} \quad (3.36)$$

formülü elde edilmiş olur.

**Teorem 3.5.** *Eğer  $\varphi \in D(A)$*

$$\sum_{m=1}^p |\alpha_m| < 1 - \tau \sum_{k=1}^N |\psi_{k-\frac{1}{2}}|$$

ise, (3.30) fark şemasının çözümü için aşağıdaki

$$\max_{0 \leq k \leq N} \|u_k\|_H \leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \psi) \left[ \|\varphi\|_H + T \max_{1 \leq k \leq N} \|\varphi_k\|_H \right], \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq k \leq N} \left\| \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} \right\|_H + \max_{1 \leq k \leq N} \left\| A \frac{u_k + u_{k-1}}{2} \right\|_H \\ & \leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \psi) \left[ \|A\varphi\|_H + \|\varphi_1\|_H + T \max_{2 \leq k \leq N} \left\| \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\tau} \right\|_H \right] \end{aligned} \quad (3.38)$$

kararlılık kestirimleri sağlar.

**İspat.**

$$\|B\|_{H \rightarrow H} \leq 1 \text{ and } \|C\|_{H \rightarrow H} \leq 1 \quad (3.39)$$

kestirimlerini ve (3.32) formülünü kullanarak

$$\max_{1 \leq k \leq N} \|u_k\|_H \leq \left[ \|u_0\|_H + T \max_{1 \leq k \leq N} \|\varphi_k\|_H \right] \quad (3.40)$$

elde edilir. Özeşlenik operatörlerin spektral gösterimi kullanılarak

$$\|T_\tau\|_{H \rightarrow H} \leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \psi) \quad (3.41)$$

elde edilir. Daha açık olarak,

$$\begin{aligned} \|T_\tau\|_{H \rightarrow H} &\leq \sup_{-\infty \leq \mu < \infty} \left| \left( I - \sum_{\frac{\lambda_m \in Z^+}{\tau}} \alpha_m \left( \frac{1+i\frac{\mu}{2}\tau}{1-i\frac{\mu}{2}\tau} \right)^{l_m} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sum_{\frac{\lambda_m \notin Z^+}{\tau}} \alpha_m (1+id_m\mu) \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1+i\frac{\mu}{2}\tau}{1-i\frac{\mu}{2}\tau} \right) \left( \frac{1+i\frac{\mu}{2}\tau}{1-i\frac{\mu}{2}\tau} \right)^{l_m} \right) \right. \\ &\quad \left. - i\tau \sum_{k=1}^N \psi_{k-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \left( \left( \frac{1+i\frac{\mu}{2}\tau}{1-i\frac{\mu}{2}\tau} \right)^k + \left( \frac{1+i\frac{\mu}{2}\tau}{1-i\frac{\mu}{2}\tau} \right)^{k-1} \right) \right|^{-1} \\ &\leq \sup_{-\infty \leq \mu < \infty} \left| 1 - \sum_{\frac{\lambda_m \in Z^+}{\tau}} \alpha_m \left( \frac{1+i\frac{\mu}{2}\tau}{1-i\frac{\mu}{2}\tau} \right)^{l_m} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\frac{\lambda_m \notin Z^+}{\tau}} \alpha_m (1+id_m\mu) \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1+i\frac{\mu}{2}\tau}{1-i\frac{\mu}{2}\tau} \right) \left( \frac{1+i\frac{\mu}{2}\tau}{1-i\frac{\mu}{2}\tau} \right)^{l_m-1} \right) \\ &\quad \left. + i\tau \sum_{k=1}^N \psi_{k-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \left( \left( \frac{1+i\frac{\mu}{2}\tau}{1-i\frac{\mu}{2}\tau} \right)^k + \left( \frac{1+i\frac{\mu}{2}\tau}{1-i\frac{\mu}{2}\tau} \right)^{k-1} \right) \right|^{-1}. \end{aligned}$$

Burada,

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{\frac{\lambda_m \in Z^+}{\tau}} \alpha_m \left( \frac{1+i\frac{\mu}{2}\tau}{1-i\frac{\mu}{2}\tau} \right)^{l_m} + \sum_{\frac{\lambda_m \notin Z^+}{\tau}} \alpha_m (1+id_m\mu) \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1+i\frac{\mu}{2}\tau}{1-i\frac{\mu}{2}\tau} \right) \left( \frac{1+i\frac{\mu}{2}\tau}{1-i\frac{\mu}{2}\tau} \right)^{l_m} \right. \\ &\quad \left. + i\tau \sum_{k=1}^N \psi_{k-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \left( \left( \frac{1+i\frac{\mu}{2}\tau}{1-i\frac{\mu}{2}\tau} \right)^k + \left( \frac{1+i\frac{\mu}{2}\tau}{1-i\frac{\mu}{2}\tau} \right)^{k-1} \right) \right| \\ &\leq \sum_{\frac{\lambda_m \in Z^+}{\tau}} |\alpha_m| \left| \frac{1+i\frac{\mu}{2}\tau}{1-i\frac{\mu}{2}\tau} \right|^{l_m} + \sum_{\frac{\lambda_m \notin Z^+}{\tau}} |\alpha_m| \left| (1+id_m\mu) \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1+i\frac{\mu}{2}\tau}{1-i\frac{\mu}{2}\tau} \right) \right| \left| \frac{1+i\frac{\mu}{2}\tau}{1-i\frac{\mu}{2}\tau} \right|^{l_m} \\ &\quad + \tau \sum_{k=1}^N |\psi_{k-\frac{1}{2}}| \left| \frac{1}{2} \left( \left| \frac{1+i\frac{\mu}{2}\tau}{1-i\frac{\mu}{2}\tau} \right|^k + \left| \frac{1+i\frac{\mu}{2}\tau}{1-i\frac{\mu}{2}\tau} \right|^{k-1} \right) \right| \end{aligned}$$

$$\leq \sum_{\frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+} |\alpha_m| + \sum_{\frac{\lambda_m}{\tau} \notin Z^+} |\alpha_m| + \tau \sum_{k=1}^N \left| \psi_{k-\frac{1}{2}} \right| = \sum_{m=1}^p |\alpha_m| + \tau \sum_{k=1}^N \left| \psi_{k-\frac{1}{2}} \right| < 1$$

olduğu için

$$\|T_\tau\|_{H \rightarrow H} \leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \psi)$$

Şimdi,  $\|u_0\|_H$  için de bir kestirim elde edilmelidir. (3.35) formülü, üçgen eşitsizliği, (3.39) ve (3.41) kestirimlerini kullanarak aşağıdaki kestirim elde edilir:

$$\begin{aligned} \|u_0\|_H &\leq \|T_\tau\|_{H \rightarrow H} \left\{ \sum_{\frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+} |\alpha_m| \sum_{j=1}^{l_m} \tau \|B\|_{H \rightarrow H}^{l_m-j} \|C\|_{H \rightarrow H} \|\varphi_j\|_H \right. \\ &+ \sum_{\frac{\lambda_m}{\tau} \notin Z^+} |\alpha_m| \left[ \left\| (I + id_m A) \frac{1}{2} (I + B) \right\|_{H \rightarrow H} \sum_{j=1}^{l_m} \tau \|B\|_{H \rightarrow H}^{l_m-j} \|C\|_{H \rightarrow H} \|\varphi_j\|_H \right. \\ &\left. \left. + \tau \left\| (I + id_m A) \frac{1}{2} C \right\|_{H \rightarrow H} \|\varphi_{l_m+1}\|_H \right] + \sum_{\frac{\lambda_m}{\tau} \notin Z^+} |\alpha_m| d_m \|\varphi_{l_m}\|_H + \|\varphi\|_H \\ &\left. + \frac{\tau^2}{2} \sum_{k=1}^N \|\psi_{k-\frac{1}{2}}\|_H \left( \sum_{j=1}^k \|B\|_{H \rightarrow H}^{k-j} \|C\|_{H \rightarrow H} \|\varphi_j\|_H + \sum_{j=1}^{k-1} \|B\|_{H \rightarrow H}^{k-1-j} \|C\|_{H \rightarrow H} \|\varphi_j\|_H \right) \right\} \\ &\leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \psi) \left\{ \sum_{\frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+} |\alpha_m| \sum_{j=1}^{l_m} \tau \|\varphi_j\|_H \right. \\ &+ \sum_{\frac{\lambda_m}{\tau} \notin Z^+} |\alpha_m| \sum_{j=1}^{l_m+1} \tau \|\varphi_j\|_H + \sum_{\frac{\lambda_m}{\tau} \notin Z^+} |\alpha_m| d_m \|\varphi_{l_m}\|_H \\ &\left. + \frac{\tau^2}{2} \sum_{k=1}^N \|\psi_{k-\frac{1}{2}}\|_H \left( \sum_{j=1}^k \|\varphi_j\|_H + \sum_{j=1}^{k-1} \|\varphi_j\|_H \right) + \|\varphi\|_H \right\} \\ &\leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \psi) \left\{ T \max_{1 \leq j \leq l_m} \|\varphi_j\|_H \sum_{m=1}^p |\alpha_m| + \max_{1 \leq j \leq N} \|\varphi_j\|_H \sum_{m=1}^p |\alpha_m| d_m \right. \\ &\left. + T \tau \max_{1 \leq j \leq N} \|\varphi_j\|_H \sum_{k=1}^N \|\psi_{k-\frac{1}{2}}\|_H + \|\varphi\|_H \right\} \\ &\leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \psi) \left\{ 2T \max_{1 \leq j \leq N} \|\varphi_j\|_H + \|\varphi\|_H \right\}. \end{aligned}$$

$\frac{\lambda_m}{\tau} \notin Z^+$  olduğu için  $l_m + 1 \leq N$  olduğundan yukarıdaki kestirim geçerlidir. Sonuç olarak (3.30) fark şeması için (3.37) kestiriminin ispatı son kestirime ve (3.40) kestirimine bağlıdır.

Şimdi, (3.38) kestirimi elde edilecektir. (3.32) yi kullanarak

$$Au_k = B^k A\xi - i\tau \sum_{j=1}^k B^{k-j} AC\varphi_j, \quad k=1, \dots, N$$

elde edilir. Bu durumda  $1 \leq k \leq N$  için

$$Au_k = B^k A\xi + \sum_{j=2}^k B^{k-j+1} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) + \varphi_1 - \sum_{j=2}^k (\varphi_{j-1} - \varphi_j) - B^k \varphi_1 \quad (3.42)$$

buluruz. (3.42) yi kullanarak  $1 \leq k \leq N$  için

$$\begin{aligned} A \frac{u_k + u_{k-1}}{2} &= \frac{(I+B)}{2} B^{k-1} A\xi + \frac{(I+B)}{2} \sum_{j=2}^{k-1} B^{k-j} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) \\ &+ \frac{1}{2} B (\varphi_{k-1} - \varphi_k) + \varphi_1 - \sum_{j=2}^{k-1} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) - \frac{1}{2} (\varphi_{k-1} - \varphi_k) - \frac{(I+B)}{2} B^{k-1} \varphi_1 \\ &= B^{k-1} CA\xi + C \sum_{j=2}^{k-1} B^{k-j} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) \\ &+ \frac{(B-I)}{2} (\varphi_{k-1} - \varphi_k) + \varphi_1 - \sum_{j=2}^{k-1} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) - CB^{k-1} \varphi_1 \end{aligned} \quad (3.43)$$

elde edilir. Böylelikle,  $1 \leq k \leq N$  için

$$\begin{aligned} \left\| A \frac{u_k + u_{k-1}}{2} \right\|_H &\leq \|B\|_{H \rightarrow H}^k \|CA\xi\|_H + \|C\|_{H \rightarrow H} \sum_{j=2}^{k-1} \|B\|_{H \rightarrow H}^{k-j} \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H \\ &+ \frac{1}{2} \|B-I\|_{H \rightarrow H} \|\varphi_{k-1} - \varphi_k\|_H + \|\varphi_1\|_H + \sum_{j=2}^{k-1} \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H + \|C\|_{H \rightarrow H} \|B\|_{H \rightarrow H}^k \|\varphi_1\|_H \\ &\leq \|CA\xi\|_H + 2 \sum_{j=2}^k \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H + 2\|\varphi_1\|_H \end{aligned}$$

yani,

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq k \leq N} \left\| A \frac{u_k + u_{k-1}}{2} \right\|_H &\leq \|CA\xi\|_H + 2 \max_{2 \leq k \leq N} \sum_{j=2}^k \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H + 2\|\varphi_1\|_H \\ &\leq \|CA\xi\|_H + 2N \max_{2 \leq k \leq N} \|\varphi_k - \varphi_{k-1}\|_H + 2\|\varphi_1\|_H \end{aligned}$$

sağlanır. Böylelikle

$$\max_{1 \leq k \leq N} \left\| A \frac{u_k + u_{k-1}}{2} \right\|_H \leq \|A\xi\|_H + 2T \max_{2 \leq k \leq N} \left\| \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\tau} \right\|_H + 2\|\varphi_1\|_H \quad (3.44)$$

elde edilmiş olur.  $\|CA\xi\|_H$  için de bir kestirim bulunmalıdır.

$$u_0 = \sum_{\frac{\lambda_m \in Z^+}{\tau}} \alpha_m u_{l_m} + \sum_{\frac{\lambda_m \notin Z^+}{\tau}} \alpha_m (I + id_m A) \frac{1}{2} (u_{l_m} + u_{l_m+1})$$

$$-i \sum_{\frac{\lambda_m \notin Z^+}{\tau}} \alpha_m d_m \varphi_{l_m} + \tau \sum_{k=1}^N \psi_{k-\frac{1}{2}} \left( \frac{u_k + u_{k-1}}{2} \right) + \varphi$$

şartını ve (3.43) formülünü kullanarak

$$CA\xi = \sum_{\frac{\lambda_m \in Z^+}{\tau}} \alpha_m C \left( B^{l_m} A\xi + \sum_{j=2}^{l_m} B^{l_m-j+1} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) + \varphi_1 - \sum_{j=2}^{l_m} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) - B^{l_m} \varphi_1 \right)$$

$$+ \sum_{\frac{\lambda_m \notin Z^+}{\tau}} \alpha_m (I + id_m A) C \frac{1}{2} \left( B^{l_m} A\xi + \sum_{j=2}^{l_m} B^{l_m-j+1} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) + \varphi_1 - \sum_{j=2}^{l_m} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) - B^{l_m} \varphi_1 \right)$$

$$+ \sum_{\frac{\lambda_m \notin Z^+}{\tau}} \alpha_m (I + id_m A) \frac{1}{2} C \left( B^{l_m+1} A\xi + \sum_{j=2}^{l_m+1} B^{l_m-j+2} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) + \varphi_1 - \sum_{j=2}^{l_m+1} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) - B^{l_m+1} \varphi_1 \right)$$

$$+ \frac{\tau}{2} \sum_{k=1}^N \psi_{k-\frac{1}{2}} C \left( \left( B^k A\xi + \sum_{j=2}^k B^{k-j+1} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) + \varphi_1 - \sum_{j=2}^k (\varphi_{j-1} - \varphi_j) - B^k \varphi_1 \right) \right.$$

$$\left. + \left( B^{k-1} A\xi + \sum_{j=2}^{k-1} B^{k-j} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) + \varphi_1 - \sum_{j=2}^{k-1} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) - B^{k-1} \varphi_1 \right) \right)$$

$$-i \sum_{\frac{\lambda_m \notin Z^+}{\tau}} \alpha_m d_m CA\varphi_{l_m} + CA\varphi$$

yani,

$$CA\xi = T_\tau \left\{ \sum_{\frac{\lambda_m \in Z^+}{\tau}} \alpha_m \left( \sum_{j=2}^{l_m} B^{l_m-j+1} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) + \varphi_1 - \sum_{j=2}^{l_m} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) - B^{l_m} \varphi_1 \right) \right.$$

$$+ \sum_{\frac{\lambda_m \notin Z^+}{\tau}} \alpha_m (I + id_m A) \frac{1}{2} (I + B) \left( \sum_{j=2}^{l_m} B^{l_m-j+1} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) + (\varphi_{l_m} - \varphi_{l_m+1}) \right)$$

$$+ \frac{\tau}{2} \sum_{k=1}^N \psi_{k-\frac{1}{2}} C \left( (I + B) \sum_{j=2}^{k-1} B^{k-j} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) + 2\varphi_1 - 2 \sum_{j=2}^{k-1} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) \right.$$

$$\left. + (B - I)(\varphi_{k-1} - \varphi_k) - (I + B)B^{k-1} \varphi_1 \right) - \sum_{\frac{\lambda_m \notin Z^+}{\tau}} \alpha_m (I + id_m A) \frac{1}{2} (I + B) B^{l_m} \varphi_1$$

$$\left. + \sum_{\frac{\lambda_m \notin Z^+}{\tau}} \alpha_m \frac{1}{2} C \varphi_{l_m} + i \sum_{\frac{\lambda_m \notin Z^+}{\tau}} \alpha_m d_m C A \varphi_{l_m+1} + C A \varphi \right\} \quad (3.45)$$

elde edilir. Burada,

$$T_\tau = \left( I - \sum_{\frac{\lambda_m \in Z^+}{\tau}} \alpha_m B^{l_m} - \sum_{\frac{\lambda_m \notin Z^+}{\tau}} \alpha_m (I + i l_m A) \frac{1}{2} (I + B) B^{l_m} - \tau \sum_{k=1}^N \psi_{k-\frac{1}{2}} \frac{(B^k + B^{k-1})}{2} \right)^{-1}$$

şeklindedir. Böylece,

$$\begin{aligned} \|CA\xi\|_H &\leq \|T_\tau\|_{H \rightarrow H} \left\{ \sum_{\frac{\lambda_m \in Z^+}{\tau}} |\alpha_m| \|C\|_{H \rightarrow H} \left( \sum_{j=2}^{l_m} \|B\|_{H \rightarrow H}^{l_m-j+1} \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \|\varphi_1\|_H + \sum_{j=2}^{l_m} \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H + \|B\|_{H \rightarrow H}^{l_m} \|\varphi_1\|_H \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\frac{\lambda_m \notin Z^+}{\tau}} |\alpha_m| \left\| (I + i d_m A) \frac{1}{2} (I + B) C \right\|_{H \rightarrow H} \left( \sum_{j=2}^{l_m} \|B\|_{H \rightarrow H}^{l_m-j+1} \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H + \|\varphi_{l_m} - \varphi_{l_m+1}\|_H \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\frac{\lambda_m \notin Z^+}{\tau}} |\alpha_m| \left\| (I + i d_m A) \frac{1}{2} (I + B) C \right\|_{H \rightarrow H} \|B\|_{H \rightarrow H}^{l_m} \|\varphi_1\|_H \right. \\ &\quad \left. + \frac{\tau}{2} \sum_{k=1}^N |\psi_{k-\frac{1}{2}}| \|C\|_{H \rightarrow H} \left( \|I + B\|_{H \rightarrow H} \sum_{j=2}^{k-1} \|B\|_{H \rightarrow H}^{k-j} \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H + 2\|\varphi_1\|_H \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2 \sum_{j=2}^{k-1} \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H + \|B - I\|_{H \rightarrow H} \|\varphi_{k-1} - \varphi_k\|_H + \|I + B\|_{H \rightarrow H} \|B\|_{H \rightarrow H}^{k-1} \|\varphi_1\|_H \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{\frac{\lambda_m \in Z^+}{\tau}} |\alpha_m| \|C\|_{H \rightarrow H} \|\varphi_{l_m}\|_H + \sum_{\frac{\lambda_m \notin Z^+}{\tau}} |\alpha_m| \|d_m A C\|_{H \rightarrow H} \|\varphi_{l_m+1}\|_H + \|C\|_{H \rightarrow H} \|A \varphi\|_H \right\}. \end{aligned}$$

yani,

$$\begin{aligned} \|CA\xi\|_H &\leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \psi) \left\{ \sum_{\frac{\lambda_m \in Z^+}{\tau}} |\alpha_m| \left( 2 \sum_{j=2}^{l_m} \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H + 2\|\varphi_1\|_H \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\frac{\lambda_m \notin Z^+}{\tau}} |\alpha_m| \left( \sum_{j=2}^{l_m+1} \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H \right) + \sum_{\frac{\lambda_m \notin Z^+}{\tau}} |\alpha_m| \|\varphi_1\|_H \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\tau}{2} \sum_{k=1}^N \left| \psi_{k-\frac{1}{2}} \right| \left( 2 \sum_{j=2}^{k-1} \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H + 2 \|\varphi_1\|_H + 2 \sum_{j=2}^{k-1} \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H \right. \\
& \left. + 2 \|\varphi_{k-1} - \varphi_k\|_H + 2 \|\varphi_1\|_H \right) + \frac{1}{2} \sum_{\frac{\lambda_m}{\tau} \notin Z^+} |\alpha_m| \|\varphi_{l_m}\|_H + \sum_{\frac{\lambda_m}{\tau} \notin Z^+} |\alpha_m| \|\varphi_{l_m+1}\|_H + \|A\varphi\|_H \Big\} \\
& \leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \psi) \left\{ 2T \max_{2 \leq k \leq N} \left\| \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\tau} \right\|_H \left( \sum_{m=1}^p |\alpha_m| + \tau \sum_{k=1}^N \left| \psi_{k-\frac{1}{2}} \right| \right) \right. \\
& \left. + 2 \|\varphi_1\|_H \left( \sum_{m=1}^p |\alpha_m| + \tau \sum_{k=1}^N \left| \psi_{k-\frac{1}{2}} \right| \right) + \frac{1}{2} \|\varphi_1\|_H + T \max_{2 \leq k \leq N} \left\| \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\tau} \right\|_H \right. \\
& \left. \leq \tilde{C}(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \psi) \left( T \max_{2 \leq k \leq N} \left\| \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\tau} \right\|_H + \|\varphi_1\|_H + \|A\varphi\|_H \right) \right. \quad (3.46)
\end{aligned}$$

elde edilir.  $\frac{\lambda_m}{\tau} \notin Z^+$  için  $l_m + 1 \leq N$  olduğundan yukarıdaki kestirim geçerlidir.

Sonra, (3.43) ve (3.46) kestirimleri kullanılarak  $A \frac{u_k + u_{k-1}}{2}$  için kestirim

bulunur. Son olarak  $A \frac{u_k + u_{k-1}}{2}$  için kestirim,

$$i \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} = \varphi_k - A \frac{u_k + u_{k-1}}{2} = \varphi_1 - \sum_{j=2}^k (\varphi_{j-1} - \varphi_j) - A \frac{u_k + u_{k-1}}{2} \text{ bağıntısı ve üçgen}$$

eşitsizliği kullanılarak (3.38) kestirimi elde edilir. Bu da Teorem 3.5 in ispatını tamamlar.

Not etmek gerekir ki, Teorem 3.4 ve Teorem 3.5 de  $\tau \rightarrow 0$  için limit alınsa integralli, çok noktalı lokal olmayan sınır değer problemi (3.1) in kararlılığını ifade eden Teorem 3.1 elde edilir.

### 3.4 Fark Şemaları İçin Uygulamalar.

Bu kısımda Teorem 3.4 ve Teorem 3.5 soyut teoremleri iki tane integralli, çok noktalı lokal olmayan sınır değer problemine uygulanacaktır.

İlk olarak (3.14) problemi ele alınacak. (3.14) problemini kesikli hale dönüştürmek iki adımda olur. İlk önce ağ kümesi ve (3.49) formülüyle  $A_h^x$  operatörü tanımlanır. Bu fark operatörü  $A_h^x$  sayesinde (3.14) integralli, çok noktalı lokal olmayan sınır değer problemi

$$\begin{cases} i \frac{du^h(t,x)}{dt} + A_h^x u^h(t,x) = f^h(t,x), & 0 < t < T, \quad x \in [0,1]_h, \\ u^h(0,x) = \sum_{m=1}^p \alpha_m u^h(\lambda_m, x) + \int_0^T \psi(s) u(s,x) ds + \phi^h(x), \\ 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_p \leq T, \quad x \in [0,1]_h \end{cases} \quad (3.47)$$

adi differansiyel denkleminin dönüşürülür.

İkinci adımda ise, (3.47) problemi için (3.16) birinci basamaktan doğruluklu fark şeması kullanılarak

$$\begin{cases} i \frac{u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x)}{\tau} + A_h^x u_k^h(x) = \phi_k^h(x), \\ \phi_k^h(x) = f^h(t_k, x), \quad t_k = k\tau, \quad 1 \leq k \leq N, \quad x \in [0,1]_h \\ u_0^h(x) = \sum_{m=1}^p \alpha_m u_{l_m}^h(x) + \tau \sum_{k=1}^N \psi_{k-1} u_{k-1}^h(x) + \phi^h(x), \quad x \in [0,1]_h \end{cases} \quad (3.48)$$

fark şeması ve (3.30) Crank-Nicholson fark şeması kullanılarak

$$\begin{cases} i \frac{u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x)}{\tau} + \frac{A_h^x}{2} (u_k^h(x) + u_{k-1}^h(x)) = \phi_k^h(x), \\ \phi_k^h(x) = f^h(t_k - \frac{\tau}{2}, x), \quad t_k = k\tau, \quad 1 \leq k \leq N, \quad x \in [0,1]_h \\ u_0^h(x) = \sum_{\frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+} \alpha_m u_{l_m}^h(x) + \phi^h(x) \\ + \sum_{\frac{\lambda_m}{\tau} \notin Z^+} \alpha_m (I_h + id_m A_h^x)^{\frac{1}{2}} (u_{l_m}^h(x) + u_{l_m+1}^h(x)) - i \sum_{\frac{\lambda_m}{\tau} \notin Z^+} d_m \phi_{l_m}^h(x), \\ + \tau \sum_{k=1}^N \psi_{k-\frac{1}{2}}^h \left( \frac{u_k + u_{k-1}}{2} \right), \quad x \in [0,1]_h \end{cases} \quad (3.49)$$

fark şeması yazılır.

**Teorem 3.6.**  $\tau$  ve  $|h|$  yeterince küçük sayılar olsun. Eğer (3.48) fark şeması için

$$\sum_{m=1}^p |\alpha_m| < 1 - \tau \sum_{k=1}^N |\psi_{k-1}|$$

eşitsizliği ve (3.49) fark şeması için de

$$\sum_{m=1}^p |\alpha_m| < 1 - \tau \sum_{k=1}^N |\psi_{k-\frac{1}{2}}|$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, (3.48) fark şemasının çözümü için

$$\max_{0 \leq k \leq N} \|u_k^h\|_{L_{2h}} \leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \psi) \left[ \|\varphi^h\|_{L_{2h}} + T \max_{1 \leq k \leq N} \|\varphi_k^h\|_{L_{2h}} \right], \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq k \leq N} \left\| \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\|_{L_{2h}} + \max_{1 \leq k \leq N} \|(u_k^h)_{xx}\|_{L_{2h}} \\ & \leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \psi) \left[ \left\| \left( \varphi_x^h \right)_x \right\|_{L_{2h}} + \|\varphi_1^h\|_{L_{2h}} + T \max_{2 \leq k \leq N} \left\| \frac{\varphi_k^h - \varphi_{k-1}^h}{\tau} \right\|_{L_{2h}} \right] \end{aligned}$$

kararlılık kestirimleri ve (3.49) fark şemasının çözümü için de (3.50) ve

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq k \leq N} \left\| \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\|_{L_{2h}} + \max_{1 \leq k \leq N} \left\| \frac{(u_k^h)_{xx} + (u_{k-1}^h)_{xx}}{2} \right\|_{L_{2h}} \\ & \leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \psi) \left[ \left\| \left( \varphi_x^h \right)_x \right\|_{L_{2h}} + \|\varphi_1^h\|_{L_{2h}} + T \max_{2 \leq k \leq N} \left\| \frac{\varphi_k^h - \varphi_{k-1}^h}{\tau} \right\|_{L_{2h}} \right] \end{aligned}$$

kararlılık kestirimleri sağlanır.

Burada,  $C(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \psi)$  sabiti  $h$ ,  $\varphi^h(x)$  ve  $\varphi_k^h(x)$ ,  $1 \leq k \leq N$  den bağımsızdır.

Teorem 3.6'nın ispatı Teorem 3.4 ve Teorem 3.5 soyut teoremlerine ve aynı zamanda (2.49) formülüyle  $L_{2h}$  da tanımlı  $A_h^x$  fark operatörünün simetri özelliklerine dayanmaktadır.

İkinci uygulama olarak (3.15) problemini ele alalım. (3.15) probleminin de diskrit hale dönüştürülmesi iki adımda olur. Birinci adımda ağ kümesi ve (2.53) formülüyle verilen  $A_h^x$  fark operatörü tanımlanır. Bu fark operatörü  $A_h^x$  sayesinde (3.15) integralli, çok noktalı lokal olmayan sınır değer problemi

$$\begin{cases} i \frac{du^h(t,x)}{dt} + A_h^x u^h(t,x) = f^h(t,x), & 0 < t < T, \quad x \in \tilde{\Omega}_h, \\ u^h(0,x) = \sum_{m=1}^p \alpha_m u^h(\lambda_m, x) + \int_0^T \psi^h(s) u^h(s,x) ds + \varphi^h(x), \\ 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_p \leq T, \quad x \in \tilde{\Omega}_h \end{cases} \quad (3.51)$$

adi differansiyel denklem sistemine dönüştürülür.

İkinci adımda ise, (3.51) problemi için (3.16) birinci basamaktan doğruluklu fark şeması kullanılarak

$$\begin{cases} i \frac{u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x)}{\tau} + A_h^x u_k^h(x) = \varphi_k^h(x), \\ \varphi_k^h(x) = f^h(t_k, x), \quad t_k = k\tau, \quad 1 \leq k \leq N, \quad x \in \tilde{\Omega}_h, \\ u_0^h(x) = \sum_{m=1}^p \alpha_m u_{l_m}^h(x) + \tau \sum_{k=1}^N \psi_{k-1} u_{k-1}^h(x) + \varphi^h(x), \quad x \in \tilde{\Omega}_h, \end{cases} \quad (3.52)$$

fark şeması ve (3.30) Crank-Nicholson fark şeması kullanılarak

$$\begin{cases} i \frac{u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x)}{\tau} + \frac{A_h^x}{2} (u_k^h(x) + u_{k-1}^h(x)) = \varphi_k^h(x), \\ \varphi_k^h(x) = f^h(t_k - \frac{\tau}{2}, x), \quad t_k = k\tau, \quad 1 \leq k \leq N, \quad x \in \tilde{\Omega}_h, \\ u_0^h(x) = \sum_{\frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+} \alpha_m u_{l_m}^h(x) + \varphi^h(x) \\ + \sum_{\frac{\lambda_m}{\tau} \notin Z^+} \alpha_m (I_h + id_m A_h^x) \frac{1}{2} (u_{l_m}^h(x) + u_{l_m+1}^h(x)) - i \sum_{\frac{\lambda_m}{\tau} \notin Z^+} \alpha_m d_m \varphi_{l_m}^h(x) \\ + \tau \sum_{k=1}^N \psi_{k-\frac{1}{2}}^h \left( \frac{u_k + u_{k-1}}{2} \right), \quad x \in \tilde{\Omega}_h \end{cases} \quad (3.53)$$

fark şeması yazılır.

**Teorem 3.7.**  $\tau$  ve  $|h| = \sqrt{h_1^2 + \dots + h_n^2}$  yeterince küçük sayılar olsun.

Eğer (3.52) fark şeması için

$$\sum_{m=1}^p |\alpha_m| < 1 - \tau \sum_{k=1}^N |\psi_{k-1}|$$

eşitsizliği ve (3.53) fark şeması için de

$$\sum_{m=1}^p |\alpha_m| < 1 - \tau \sum_{k=1}^N |\psi_{k-\frac{1}{2}}|$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, (3.52) fark şemasının çözümü için

$$\max_{0 \leq k \leq N} \|u_k^h\|_{L_2(\tilde{\Omega}_h)} \leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \psi) \left[ \|\varphi^h\|_{L_2(\tilde{\Omega}_h)} + T \max_{1 \leq k \leq N} \|\varphi_k^h\|_{L_2(\tilde{\Omega}_h)} \right] \quad (3.54)$$

$$\max_{1 \leq k \leq N} \left\| \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\|_{L_2(\tilde{\Omega}_h)} + \max_{1 \leq k \leq N} \sum_{r=1}^n \left\| (u_k^h)_{x_r, x_r, j_r} \right\|_{L_2(\tilde{\Omega}_h)}$$

$$\leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \psi) \left[ \sum_{r=1}^n \left\| (\varphi^h)_{x_r, x_r, j_r} \right\|_{L_2(\tilde{\Omega}_h)} + \|\varphi_1^h\|_{L_2(\tilde{\Omega}_h)} + T \max_{2 \leq k \leq N} \left\| \frac{\varphi_k^h - \varphi_{k-1}^h}{\tau} \right\|_{L_2(\tilde{\Omega}_h)} \right]$$

kararlılık kestirimleri ve (3.53) fark şemasının çözümü için de (3.54) ve

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq k \leq N} \left\| \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\|_{L_2(\tilde{\Omega}_h)} + \max_{1 \leq k \leq N} \sum_{r=1}^n \left\| \frac{(u_k^h)_{\bar{x}_r, \bar{x}_r, j_r} + (u_{k-1}^h)_{\bar{x}_r, \bar{x}_r, j_r}}{2} \right\|_{L_2(\tilde{\Omega}_h)} \\ & \leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \psi) \left[ \sum_{r=1}^n \left\| (\varphi^h)_{\bar{x}_r, \bar{x}_r, j_r} \right\|_{L_2(\tilde{\Omega}_h)} + \|\varphi_1^h\|_{L_2(\tilde{\Omega}_h)} + T \max_{2 \leq k \leq N} \left\| \frac{\varphi_k^h - \varphi_{k-1}^h}{\tau} \right\|_{L_2(\tilde{\Omega}_h)} \right] \end{aligned}$$

kararlılık kestirimleri sağlanır.

Burada,  $C(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \psi)$  sabiti  $h$ ,  $\varphi^h(x)$  ve  $\varphi_k^h(x)$ ,  $1 \leq k \leq N$  den bağımsızdır.

Teorem 3.7 nin ispatı Teorem 3.4 ve Teorem 3.5 soyut teoremlerine, (2.53) formülüyle  $L_{2h}$  da tanımlı fark  $A_h^x$  operatörünün simetri özelliklerine ve aynı zamanda Teorem 2.10 a dayanmaktadır.

### 3.5 Sayısal Sonuçlar

Bu kısımda, Schrödinger denklemi için integralli, çok noktalı lokal olmayan sınır değer probleminin

$$\left\{ \begin{array}{l} i \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + u(t,x) = \exp\left(\frac{i\pi^2}{4}\right) \left[ (x^2 - 2) \cos \frac{\pi}{2} x + 2\pi x \sin \frac{\pi}{2} x \right], \\ 0 < t, \quad x < 1, \\ u(0,x) = \frac{1}{2} u\left(\frac{1}{2}, x\right) + \frac{1}{3} u\left(\frac{1}{3}, x\right) + \int_0^1 \frac{1}{12} u(t,x) dt + \varphi(x), \\ \varphi(x) = \left(1 - \frac{1}{2} \exp\left(\frac{i\pi^2}{8}\right) - \frac{1}{3} \exp\left(\frac{i\pi^2}{12}\right) + \frac{i}{3\pi^2} (\exp\left(\frac{i\pi^2}{4}\right) - 1)\right) x^2 \cos \frac{\pi}{2} x, \\ 0 \leq x \leq 1, \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1 \end{array} \right. \quad (3.55)$$

(3.16) birinci basamaktan doğruluklu fark şemasını ve (3.30) Crank-Nicholson fark şemasını kullanarak sayısal çözümleri araştırılacak. Bu problemin tam çözümü

$$u(t,x) = \left( \exp\left(\frac{it\pi^2}{4}\right) \right) \left( x^2 \cos \frac{\pi}{2} x \right)$$

şekindedir.

Öncelikle,  $[0,1]_r \times [0,1]_h$  ağ kümesi üzerinde birinci basamaktan doğruluklu fark şemasını kullanalım. (3.55) probleminin yaklaşık çözümlerini

bulmak için aşağıdaki birinci basamaktan doğruluklu fark şeması kurulur:

$$\left\{ \begin{array}{l} i \frac{u_n^k - u_n^{k-1}}{\tau} - \left( \frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} \right) + u_n^k = f(t_k, x_n), \\ 1 \leq k \leq N, \quad 1 \leq n \leq M-1, \\ u_n^0 = \frac{1}{3} u_n^{[\frac{1}{3\tau}]} + \frac{1}{2} u_n^{[\frac{1}{2\tau}]} + \tau \sum_{k=1}^N \frac{1}{12} u_n^{k-1} + \varphi(x_n), \\ 1 \leq n \leq M-1; \quad u_0^k = u_M^k = 0, \quad 0 \leq k \leq N, \\ f(t, x) = \exp\left(\frac{i\pi^2}{4}\right) \left[ (x^2 - 2) \cos \frac{\pi}{2} x + 2\pi x \sin \frac{\pi}{2} x \right], \\ \varphi(x) = \left( 1 - \frac{1}{2} \exp\left(\frac{i\pi^2}{8}\right) - \frac{1}{3} \exp\left(\frac{i\pi^2}{12}\right) + \frac{i}{3\pi^2} (\exp\left(\frac{i\pi^2}{4}\right) - 1) \right) x^2 \cos \frac{\pi}{2} x. \end{array} \right. \quad (3.56)$$

Böylelikle,  $(N+1) \times (M+1)$  lineer denklem sistemi elde edilmiş olur. Bu lineer denklem sistemi düzenlenerek

$$\left\{ \begin{array}{l} AU_{n+1} + BU_n + CU_{n-1} = D\varphi_n, \quad 1 \leq n \leq M-1, \\ U_0 = \tilde{0}, \quad U_M = \tilde{0}, \end{array} \right.$$

matris formunda yazılabilir. Burada,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} b & c & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b & c & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & c & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & b & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & b & c \\ 1 - \frac{\tau}{12} & -\frac{\tau}{12} & -\frac{\tau}{12} & \dots & \frac{-1}{3} - \frac{\tau}{12} & \dots & -\frac{\tau}{12} & \dots & \frac{-1}{2} - \frac{\tau}{12} & \dots & -\frac{\tau}{12} & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$C = A, \quad D = I_{(N+1) \times (N+1)}, \quad U_s = \begin{bmatrix} U_s^0 \\ U_s^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ U_s^{N-1} \\ U_s^N \end{bmatrix}, \quad s = n-1, n, n+1.$$

Ayrıca,

$$a = -\frac{1}{h^2}, \quad b = -\frac{i}{\tau}, \quad c = \frac{i}{\tau} + \frac{2}{h^2} + 1$$

$$\varphi_n = \begin{bmatrix} \varphi_n^0 \\ \varphi_n^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi_n^N \end{bmatrix}, \quad \varphi_n^k = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{2} \exp\left(\frac{i\tau^2}{8}\right) - \frac{1}{3} \exp\left(\frac{i\tau^2}{12}\right) + \frac{i}{3\tau^2} (\exp\left(\frac{i\tau^2}{4}\right) - 1)\right) x_n^2 \cos \frac{\pi}{2} x_n, & k=0, \\ f(t_k, x_n), & 1 \leq k \leq N, \end{cases}$$

şekindedir.

Şimdi (3.55) probleminin yaklaşık çözümlerini elde etmek için Crank-Nicholson fark şeması kullanılacak. (3.55) probleminin yaklaşık çözümleri için (3.30) u uygulanırsa, aşağıdaki Crank-Nicholson fark şeması kurulur:

$$\left\{ \begin{array}{l}
i \frac{u_n^k - u_n^{k-1}}{\tau} - \frac{1}{2} \left( \frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} + \frac{u_{n+1}^{k-1} - 2u_n^{k-1} + u_{n-1}^{k-1}}{h^2} \right) + \frac{1}{2} u_n^k + \frac{1}{2} u_n^{k-1} = f\left(t_k - \frac{\tau}{2}, x_n\right), \\
1 \leq k \leq N, \quad 1 \leq n \leq M-1, \\
u_n^0 = \frac{1}{3} u_n^{\lceil \frac{1}{3\tau} \rceil} + \frac{1}{2} u_n^{\lceil \frac{1}{2\tau} \rceil} + \tau \sum_{k=1}^N \frac{1}{12} \left( \frac{u_n^k + u_n^{k-1}}{2} \right) + \varphi(x_n), \quad 1 \leq n \leq M-1; \\
u_0^k = u_M^k = 0, \quad 0 \leq k \leq N, \\
f(t, x) = \exp\left(\frac{i\pi^2}{4}\right) \left[ (x^2 - 2) \cos \frac{\pi}{2} x + 2\pi x \sin \frac{\pi}{2} x \right], \\
\varphi(x) = \left( 1 - \frac{1}{2} \exp\left(\frac{i\pi^2}{8}\right) - \frac{1}{3} \exp\left(\frac{i\pi^2}{12}\right) + \frac{i}{3\pi^2} (\exp\left(\frac{i\pi^2}{4}\right) - 1) \right) x^2 \cos \frac{\pi}{2} x.
\end{array} \right. \quad (3.57)$$

Böylelikle,  $(N+1) \times (M+1)$  lineer denklem sistemi elde edilmiş olur. Bu lineer denklem sistemi düzenlenerek

$$\left\{ \begin{array}{l}
AU_{n+1} + BU_n + CU_{n-1} = D\varphi_n, \quad 1 \leq n \leq M-1, \\
U_0 = \tilde{0}, \quad U_M = \tilde{0},
\end{array} \right.$$

matris formunda yazılabilir. Burada,

$$A = \begin{bmatrix}
a & a & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & a & a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & a & a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & a & a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & a & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & a & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a & a \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} b & c & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b & c & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & c & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & b & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & b & c \\ \left[ 1 - \frac{\tau}{24} \quad -\frac{\tau}{12} \quad -\frac{\tau}{12} \quad \dots \quad \frac{-1}{3} - \frac{\tau}{12} \quad \dots \quad -\frac{\tau}{12} \quad \dots \quad \frac{-1}{2} - \frac{\tau}{12} \quad \dots \quad -\frac{\tau}{12} \quad -\frac{\tau}{24} \right] \end{bmatrix}$$

ve

$$C = A, \quad D = I_{(N+1) \times (N+1)}, \quad U_s = \begin{bmatrix} U_s^0 \\ U_s^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ U_s^{N-1} \\ U_s^N \end{bmatrix}, \quad s = n-1, n, n+1.$$

Ayrıca,

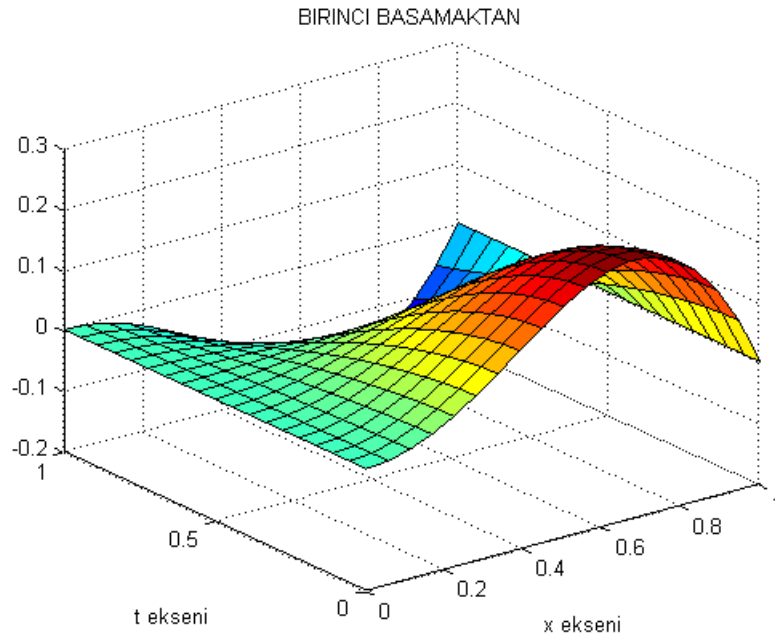
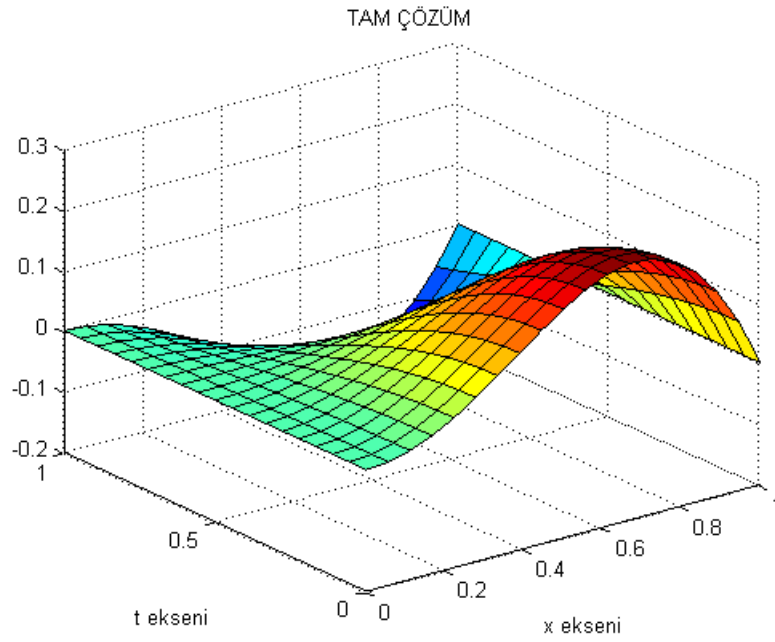
$$a = -\frac{1}{2h^2}, \quad b = \left( -\frac{i}{\tau} + \frac{1}{h^2} + \frac{1}{2} \right), \quad c = \frac{i}{\tau} + \frac{1}{h^2} + \frac{1}{2}$$

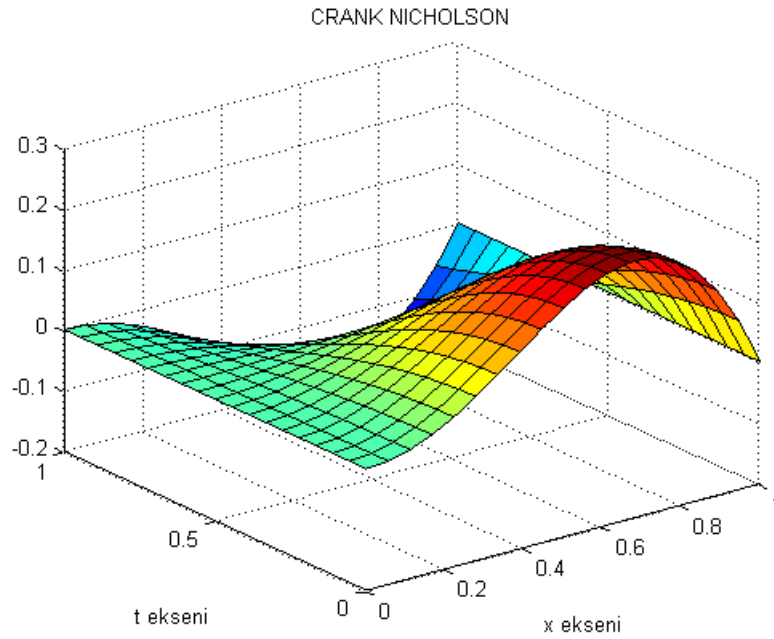
$$\varphi_n = \begin{bmatrix} \varphi_n^0 \\ \varphi_n^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi_n^N \end{bmatrix}, \quad \varphi_n^k = \begin{cases} \left( 1 - \frac{1}{2} \exp\left(\frac{i\pi^2}{8}\right) - \frac{1}{3} \exp\left(\frac{i\pi^2}{12}\right) + \frac{i}{3\pi^2} (\exp\left(\frac{i\pi^2}{4}\right) - 1) \right) x_n^2 \cos \frac{\pi}{2} x_n, & k=0, \\ f\left(t_k - \frac{\tau}{2}, x_n\right), & 1 \leq k \leq N, \end{cases}$$

şeklindedir. Dolayısıyla ikinci mertebeden katsayıları matris olan,  $n$  ye göre fark denklemleri elde edilmiş oldu. Bu iki fark denklemlerini de, yani birinci basamaktan doğruluklu fark şeması ve ikinci basamaktan doğruluklu fark şeması, çözmek için Bölüm 2 deki gibi iyileştirilmiş Gauss eliminasyon yöntemi kullanılacaktır.

Şimdi, sayısal sonuçları verelim. (3.55) probleminin tam ve yaklaşık çözümlerinin sayısal değerlerini elde etmek için Matlab programlarını (bak Ek

2) kullandık. (3.55) probleminin tam ve yaklaşık çözümleri aşağıdaki şekillerde verilmiştir.





Şekil 3.3. Crank-Nicholson fark şeması

Sayısal sonuçlar farklı  $N=M$  değerleri için verilmiştir. Tam çözüm ile yaklaşık çözümleri karşılaştırabilmek için önce hatalar (2.62) formülüyle hesaplandı.

Tablo 3.1, fark şemalarıyla elde edilen çözümler ile tam çözüm arasındaki hata analizini vermektedir. Tablo 3.1 sırasıyla  $N=M=18, 30$  ve  $60$  için oluşturulmuştur.

Tablo 3.1: Hatalar.

Metot	$N=M=18$	$N=M=30$	$N=M=60$
1. b. doğruluklu	0.0032	0.0022	0.0013
Crank-Nicholson	0.0005	0.0002	0.0001

İkinci olarak, tam çözüm ile yaklaşık çözümü karşılaştırabilmek için kısmi hatalar (2.63) formülüyle hesaplandı. Tablo 3.2 sırasıyla  $N=M=18, 30$  ve  $60$  için oluşturulmuştur.

Tablo 3.2: Kısmi Hatalar.

Metot	$N=M=18$	$N=M=30$	$N=M=60$
1. b. doğruluklu	0.0225	0.0153	0.0089
Crank-Nicholson	0.0034	0.0015	0.0005

Tablolardan da açık bir şekilde görüldüğü gibi ikinci basamaktan doğruluklu Crank-Nicholson fark şeması yöntemi birinci basamaktan doğruluklu fark şemasına kıyasla tam çözümlere daha yakın sonuçlar vermektedir.

## BÖLÜM 4

# SCHRÖDİNGER DENKLEMİ İÇİN ÇOK NOKTALI LOKAL OLMAYAN SINIR DEĞER PROBLEMİNE İYİLEŞTİRİLMİŞ CRANK-NICHOLSON FARK ŞEMALARI

Bu bölümde, çok noktalı lokal olmayan sınır değer problemi (2.1) araştırılmıştır. Çok noktalı lokal olmayan sınır değer probleminin yaklaşık çözümleri için ikinci basamaktan doğruluklu  $r$ -iyileştirilmiş Crank-Nicholson fark şemaları kurulmuştur. Bu fark şemalarının kararlılığı gösterilmiştir. Uygulamada Schrödinger denkleminin fark denklemlerinin çözümlerinin kararlılığı elde edilmiştir. Çok noktalı lokal olmayan sınır şartlı tek-boyutlu Schrödinger denkleminin çözümü sayısal olarak elde edilmiştir. Bu fark denklemlerinin çözümünde iyileştirilmiş Gauss eleme metodunu içeren bir teknik kullanılmıştır. Metot sayısal değerlerle desteklenmiştir.

Bu bölümün ana amacı (2.1) probleminin yaklaşık çözümleri için  $r$ -iyileştirilmiş Crank-Nicholson fark şemalarını çalışmaktır. Bu bölümde  $1 \leq m \leq p$  için  $2\tau \leq \lambda_m$  olduğu kabul edilmektedir. Bu çok noktalı lokal olmayan sınır değer probleminin yaklaşık çözümü için ikinci mertebeden doğruluklu  $r$ -iyileştirilmiş Crank-Nicholson fark şemaları

$$\left\{ \begin{array}{l} i \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} + \frac{A}{2} (u_k + u_{k-1}) = \varphi_k, \quad r+1 \leq k \leq N, \\ i \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} + Au_k = \varphi_k, \quad 1 \leq k \leq r, \\ u_0 = \sum_{r\tau \geq \lambda_m} \alpha_m \left( (I + i l_{0_m} A) u_{l_m} - i l_{0_m} \varphi_{l_m} \right) + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} \alpha_m u_{l_m} \\ + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} \alpha_m (I + i d_m A)^{\frac{1}{2}} (u_{l_m} + u_{l_m+1}) - i \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} \alpha_m d_m \varphi_{l_m} + \varphi, \\ 0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_p \leq T, \end{array} \right. \quad (4.1)$$

şeklinde kurulmuştur [7]. Burada  $Z^+$ ,  $\{2, \dots, n, \dots\}$  kümesini ve  $l_m = \left[ \frac{\lambda_m}{\tau} \right]$ ,

$l_{0m} = \lambda_m - [\frac{\lambda_m}{\tau}]\tau$ ,  $d_m = \lambda_m - [\frac{\lambda_m}{\tau}]\tau - \frac{\tau}{2}$  ve  $\varphi_k = f(t_k - \frac{\tau}{2})$ ,  $t_k = k\tau$  belirtmektedir.

## 4.1 Kararlılık Teoremi

Cauchy probleminin yaklaşık çözümü için kurulan  $r$ -iyileştirilmiş Crank-Nicholson fark şemalarının

$$\begin{cases} i \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} + \frac{A}{2}(u_k + u_{k-1}) = \varphi_k, & r+1 \leq k \leq N, \\ i \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} + Au_k = \varphi_k, & 1 \leq k \leq r, \quad u_0 = \xi, \end{cases}$$

$\varphi_k = f(t_k - \frac{\tau}{2})$ ,  $t_k = k\tau$  olmak üzere çözümü

$$u_k = \begin{cases} R^k \xi - i\tau \sum_{j=1}^k R^{k-j+1} \varphi_j, & k=1, \dots, r, \\ B^{k-r} R^r \xi - i\tau \sum_{j=1}^r B^{k-r} R^{r-j+1} \varphi_j \\ -i\tau \sum_{j=r+1}^k B^{k-j} C \varphi_j, & k=r+1, \dots, N \end{cases} \quad (4.2)$$

şekindedir [7].

Burada,

$$R = (I - i\tau A)^{-1}, \quad C = \left( I - i \frac{A}{2} \tau \right)^{-1}, \quad B = \left( I + i \frac{A}{2} \tau \right) C$$

şekindedir.  $u_0$  ı bulmak için (4.2) formülünü ve

$$\begin{aligned} u_0 &= \sum_{r\tau \geq \lambda_m} \alpha_m \left( (I + i l_{0m} A) u_{l_m} - i l_{0m} \varphi_{l_m} \right) \\ &+ \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} \alpha_m u_{l_m} + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \notin Z^+}} \alpha_m \left( (I + i d_m A)^{\frac{1}{2}} (u_{l_m} + u_{l_m+1}) - i d_m \varphi_{l_m} \right) + \varphi \end{aligned}$$

şartını kullanırsak

$$\begin{aligned} \xi &= \sum_{r\tau \geq \lambda_m} \alpha_m (I + i l_{0m} A) R^{l_m} \xi - i\tau \sum_{r\tau \geq \lambda_m} \alpha_m (I + i l_{0m} A) \sum_{j=1}^{l_m} R^{l_m-j+1} \varphi_j - i \sum_{r\tau \geq \lambda_m} \alpha_m l_{0m} \varphi_{l_m} \\ &+ \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} \alpha_m \left( B^{l_m-r} R^r \xi - i\tau \sum_{j=1}^r B^{l_m-r} R^{r-j+1} \varphi_j - i\tau \sum_{j=r+1}^{l_m} B^{l_m-j} C \varphi_j \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+ \\ \left\lceil \frac{\lambda_m}{\tau} \right\rceil = r}} \alpha_m (I + id_m A) \frac{1}{2} \left[ \left( R^r \xi - i\tau \sum_{j=1}^r R^{k-j+1} \varphi_j \right) + \left( BR^r \xi - i\tau \sum_{j=1}^r BR^{r-j+1} \varphi_j \right) \right] \\
& + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+ \\ \left\lceil \frac{\lambda_m}{\tau} \right\rceil > r}} \alpha_m (I + id_m A) \frac{1}{2} \left( B^{l_m-r} R^r \xi - i\tau \sum_{j=1}^r B^{l_m-r} R^{r-j+1} \varphi_j - i\tau \sum_{j=r+1}^{l_m} B^{l_m-j} C \varphi_j \right) \\
& + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+ \\ \left\lceil \frac{\lambda_m}{\tau} \right\rceil > r}} \alpha_m (I + id_m A) \frac{1}{2} \left\{ \left( B^{l_m+1-r} R^r \xi - i\tau \sum_{j=1}^r B^{l_m+1-r} R^{r-j+1} \varphi_j \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - i\tau \sum_{j=r+1}^{l_m+1} B^{l_m+1-j} C \varphi_j \right) \right\} - i \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} \alpha_m d_m \varphi_{l_m} + \varphi
\end{aligned}$$

elde ederiz. Fakat  $B^{l_m-r} R^r \xi - i\tau \sum_{j=1}^r B^{l_m-r} R^{r-j+1} \varphi_j - i\tau \sum_{j=r+1}^{l_m} B^{l_m-j} C \varphi_j$  ifadesinde  $l_m = r$

koyar ve  $l_m = r$  için  $\sum_{j=r+1}^{l_m} B^{l_m-j} C \varphi_j = 0$  alırsak bu ifade  $\left( R^r \xi - i\tau \sum_{j=1}^r R^{k-j+1} \varphi_j \right)$  ye

indirgenir. Böylelikle, gerçekte

$$\begin{aligned}
\xi & = \sum_{r\tau \geq \lambda_m} \alpha_m (I + il_{0_m} A) R^{l_m} \xi - i\tau \sum_{r\tau \geq \lambda_m} \alpha_m (I + il_{0_m} A) \sum_{j=1}^{l_m} R^{l_m-j+1} \varphi_j - i \sum_{r\tau \geq \lambda_m} \alpha_m l_{0_m} \varphi_{l_m} \\
& + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} \alpha_m \left( B^{l_m-r} R^r \xi - i\tau \sum_{j=1}^r B^{l_m-r} R^{r-j+1} \varphi_j - i\tau \sum_{j=r+1}^{l_m} B^{l_m-j} C \varphi_j \right) \\
& + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} \alpha_m (I + id_m A) \frac{1}{2} \left( B^{l_m-r} R^r \xi - i\tau \sum_{j=1}^r B^{l_m-r} R^{r-j+1} \varphi_j - i\tau \sum_{j=r+1}^{l_m} B^{l_m-j} C \varphi_j \right) \\
& + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} \alpha_m (I + id_m A) \frac{1}{2} \left\{ \left( B^{l_m+1-r} R^r \xi - i\tau \sum_{j=1}^r B^{l_m+1-r} R^{r-j+1} \varphi_j \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - i\tau \sum_{j=r+1}^{l_m+1} B^{l_m+1-j} C \varphi_j \right) \right\} - i \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} \alpha_m d_m \varphi_{l_m} + \varphi
\end{aligned}$$

olur.

$$I - \sum_{r\tau \geq \lambda_m} \alpha_m (I + il_{0_m} A) R^{l_m} - \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} \alpha_m B^{l_m - r} R^r - \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \notin Z^+}} \alpha_m (I + id_m A) \frac{1}{2} (I + B) B^{l_m - r} R^r$$

operatörünün tersi olduğu için

$$\begin{aligned} \xi = T_\tau \left\{ \left( -i\tau \sum_{r\tau \geq \lambda_m} \alpha_m (I + il_{0_m} A) \sum_{j=1}^{l_m} R^{l_m - j + 1} \varphi_j - i \sum_{r\tau \geq \lambda_m} \alpha_m l_{0_m} \varphi_{l_m} \right) \right. \\ \left. -i\tau \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} \alpha_m \left( \sum_{j=1}^r B^{l_m - r} R^{r - j + 1} \varphi_j + \sum_{j=r+1}^{l_m} B^{l_m - j} C \varphi_j \right) \right. \\ \left. -i\tau \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \notin Z^+}} \alpha_m (I + id_m A) \frac{1}{2} \left( (I + B) \left( \sum_{j=1}^r B^{l_m - r} R^{r - j + 1} \varphi_j + \sum_{j=r+1}^{l_m} B^{l_m - j} C \varphi_j \right) + C \varphi_{l_m + 1} \right) \right. \\ \left. -i \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \notin Z^+}} \alpha_m d_m \varphi_{l_m} + \varphi \right\} \quad (4.3) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada,

$$T_\tau = \left( I - \sum_{r\tau \geq \lambda_m} \alpha_m (I + il_{0_m} A) R^{l_m} - \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} \alpha_m B^{l_m - r} R^r - \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \notin Z^+}} \alpha_m (I + id_m A) \frac{1}{2} (I + B) B^{l_m - r} R^r \right)^{-1}$$

şekindedir. Böylece, (4.1) probleminin çözümü için

$$\begin{aligned}
u_k = & \left\{ \begin{array}{l} R^k u_0 - i\tau \sum_{j=1}^k R^{k-j+1} \varphi_j, \quad k=1, \dots, r, \\ \\ B^{k-r} R^r u_0 - i\tau \sum_{j=1}^r B^{k-r} R^{r-j+1} \varphi_j, \\ \\ -i\tau \sum_{j=r+1}^k B^{k-j} C \varphi_j, \quad k=r+1, \dots, N \\ \\ T_\tau \left\{ \left( -i\tau \sum_{r\tau \geq \lambda_m} \alpha_m (I + i l_{0_m} A) \sum_{j=1}^{l_m} R^{l_m-j+1} \varphi_j - i \sum_{r\tau \geq \lambda_m} \alpha_m l_{0_m} \varphi_{l_m} \right) \right. \\ \\ -i\tau \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} \alpha_m \left( \sum_{j=1}^r B^{l_m-r} R^{r-j+1} \varphi_j + \sum_{j=r+1}^{l_m} B^{l_m-j} C \varphi_j \right) \\ \\ -i\tau \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} \alpha_m (I + i d_m A) \frac{1}{2} \left( (I + B) \left( \sum_{j=1}^r B^{l_m-r} R^{r-j+1} \varphi_j + \sum_{j=r+1}^{l_m} B^{l_m-j} C \varphi_j \right) + C \varphi_{l_m+1} \right) \\ \\ \left. -i \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} \alpha_m d_m \varphi_{l_m} + \varphi \right\}, \quad k=0. \end{array} \right. \tag{4.4}
\end{aligned}$$

formülü elde edilir.

**Teorem 4.1.** Eğer  $\varphi \in D(A)$  ve

$$\sum_{m=1}^p |\alpha_m| < 1$$

ise, (4.1) fark şemalarının çözümü için aşağıdaki

$$\max_{0 \leq k \leq N} \|u_k\|_H \leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \left[ \|\varphi\|_H + T \max_{1 \leq k \leq N} \|\varphi_k\|_H \right], \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}
& \max_{1 \leq k \leq N} \left\| \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} \right\|_H + \max_{1 \leq k \leq r} \|A u_k\|_H + \max_{r+1 \leq k \leq N} \left\| A \frac{u_k + u_{k-1}}{2} \right\|_H \\
& \leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \left[ \|A \varphi\|_H + \|\varphi_1\|_H + T \max_{2 \leq k \leq N} \left\| \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\tau} \right\|_H \right] \tag{4.6}
\end{aligned}$$

kararlılık kestirimleri sağlanır.

Burada,  $C(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$  sabiti  $\tau, h, \varphi(x)$  ve  $\varphi_k(x), 1 \leq k \leq N$  den bağımsızdır.

**İspat.**

$$\|R\|_{H \rightarrow H} \leq 1, \|B\|_{H \rightarrow H} \leq 1, \|C\|_{H \rightarrow H} \leq 1 \quad (4.7)$$

kestrimlerini ve (4.2) formülünü kullanarak

$$\max_{1 \leq k \leq N} \|u_k\|_H \leq \left[ \|u_0\|_H + T \max_{1 \leq k \leq N} \|\varphi_k\|_H \right] \quad (4.8)$$

elde edilir. Özeşlenik operatörlerin spektral gösterimi kullanılarak

$$\|T_\tau\|_{H \rightarrow H} \leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \quad (4.9)$$

sağlanır. Daha açık olarak,

$$\begin{aligned} \|T_\tau\|_{H \rightarrow H} &\leq \sup_{-\infty \leq \mu < \infty} \left| \left( 1 - \sum_{\substack{r\tau \geq \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} \alpha_m (1 + il_{0_m} \mu) \left( \frac{1}{1 - i\tau\mu} \right)^{l_m} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} \alpha_m \left( \frac{1 + \frac{i\tau\mu}{2}}{1 - \frac{i\tau\mu}{2}} \right)^{l_m - r} \left( \frac{1}{1 - i\tau\mu} \right)^r \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} \alpha_m (1 + id_m \mu) \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1 + \frac{i\tau\mu}{2}}{1 - \frac{i\tau\mu}{2}} \right) \left( \frac{1 + \frac{i\tau\mu}{2}}{1 - \frac{i\tau\mu}{2}} \right)^{l_m - r} \left( \frac{1}{1 - i\tau\mu} \right)^r \right) \right|^{-1} \\ &\leq \sup_{-\infty \leq \mu < \infty} \left( 1 - \left| \sum_{\substack{r\tau \geq \lambda \\ \frac{\lambda}{\tau} \in Z^+}} \alpha_m (1 + il_{0_m} \mu) \left( \frac{1}{1 - i\tau\mu} \right)^{l_m} + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} \alpha_m \left( \frac{1 + \frac{i\tau\mu}{2}}{1 - \frac{i\tau\mu}{2}} \right)^{l_m - r} \left( \frac{1}{1 - i\tau\mu} \right)^r \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} \alpha_m (1 + id_m \mu) \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1 + \frac{i\tau\mu}{2}}{1 - \frac{i\tau\mu}{2}} \right) \left( \frac{1 + \frac{i\tau\mu}{2}}{1 - \frac{i\tau\mu}{2}} \right)^{l_m - r} \left( \frac{1}{1 - i\tau\mu} \right)^r \right) \right|^{-1}. \end{aligned}$$

Burada,

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{\substack{r\tau \geq \lambda \\ \frac{\lambda}{\tau} \in Z^+}} \alpha_m (1 + il_{0_m} \mu) \left( \frac{1}{1 - i\tau\mu} \right)^{l_m} + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} \alpha_m \left( \frac{1 + \frac{i\tau\mu}{2}}{1 - \frac{i\tau\mu}{2}} \right)^{l_m - r} \left( \frac{1}{1 - i\tau\mu} \right)^r \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} \alpha_m (1 + id_m \mu) \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1 + \frac{i\tau\mu}{2}}{1 - \frac{i\tau\mu}{2}} \right) \left( \frac{1 + \frac{i\tau\mu}{2}}{1 - \frac{i\tau\mu}{2}} \right)^{l_m - r} \left( \frac{1}{1 - i\tau\mu} \right)^r \right| \\ &\leq \sum_{\substack{r\tau \geq \lambda \\ \frac{\lambda}{\tau} \in Z^+}} |\alpha_m| \left| \frac{1 + il_{0_m} \mu}{1 - i\tau\mu} \right| \left| \frac{1}{1 - i\tau\mu} \right|^{l_m - 1} + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} |\alpha_m| \left| \frac{1 + \frac{i\tau\mu}{2}}{1 - \frac{i\tau\mu}{2}} \right|^{l_m - r} \left| \frac{1}{1 - i\tau\mu} \right|^r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \notin Z^+}} |\alpha_m| \left| \frac{1 + id_m \mu}{1 - \frac{i\tau\mu}{2}} \right| \left| \frac{1 + \frac{i\tau\mu}{2}}{1 - \frac{i\tau\mu}{2}} \right|^{l_m - r} \left| \frac{1}{1 - i\tau\mu} \right|^r \\
& \leq \sum_{r\tau \geq \lambda} |\alpha_m| + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} |\alpha_m| + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \notin Z^+}} |\alpha_m| = \sum_{m=1}^p |\alpha_m| < 1
\end{aligned}$$

olduğu için

$$\|T_\tau\|_{H \rightarrow H} \leq \frac{1}{1 - \sum_{m=1}^p |\alpha_m|} \leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$$

kestirimi sağlanır.  $\|u_0\|_H$  için de bir kestirim bulunmalıdır. (4.3) formülünü, üçgen eşitsizliğini ve (4.7), (4.9) kestirimleri kullanılarak aşağıdaki kestirim elde edilir:

$$\begin{aligned}
\|u_0\|_H & \leq \|T_\tau\|_{H \rightarrow H} \left\{ \sum_{r\tau \geq \lambda_m} |\alpha_m| \left( \sum_{j=1}^{l_m} \tau \|(I + il_{0m}A)R^{l_m - j + 1}\|_{H \rightarrow H} \|\varphi_j\|_H + l_{0m} \|\varphi_{l_m}\|_H \right) \right. \\
& + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} \tau |\alpha_m| \left( \sum_{j=1}^r \|B\|_{H \rightarrow H}^{l_m - r} \|R\|_{H \rightarrow H}^{r - j + 1} \|\varphi_j\|_H + \sum_{j=r+1}^{l_m} \|B\|_{H \rightarrow H}^{l_m - j} \|C\|_{H \rightarrow H} \|\varphi_j\|_H \right) \\
& + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \notin Z^+}} |\alpha_m| \tau \left( \left\| (I + id_m A) \frac{1}{2} (I + B) \right\|_{H \rightarrow H} \left( \sum_{j=1}^r \|B\|_{H \rightarrow H}^{l_m - r} \|R\|_{H \rightarrow H}^{r - j + 1} \|\varphi_j\|_H + \sum_{j=r+1}^{l_m} \|B\|_{H \rightarrow H}^{l_m - j} \|\varphi_j\|_H \right) \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \|(I + id_m A)C\|_{H \rightarrow H} \|\varphi_{l_m + 1}\|_H \right) + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \notin Z^+}} |\alpha_m| d_m \|\varphi_{l_m}\|_H + \|\varphi\|_H \left. \right\} \\
& \leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \left\{ \max_{1 \leq j \leq N} \|\varphi_j\|_H \sum_{r\tau \geq \lambda_m} |\alpha_m| (l_m + 1) \tau + \max_{1 \leq j \leq N} \|\varphi_j\|_H \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} \tau |\alpha_m| l_m \right. \\
& \left. + \max_{1 \leq j \leq N} \|\varphi_j\|_H \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \notin Z^+}} |\alpha_m| \tau l_m + \max_{1 \leq j \leq N} \|\varphi_j\|_H \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \notin Z^+}} |\alpha_m| \frac{\tau}{2} + \|\varphi\|_H \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \left\{ \max_{1 \leq j \leq N} \|\varphi_j\|_H T \left( \sum_{r\tau \geq \lambda_m} |\alpha_m| + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda}{\tau} \in Z^+}} |\alpha_m| + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda}{\tau} \notin Z^+}} |\alpha_m| \right) \right. \\
&\quad \left. + \max_{1 \leq j \leq N} \|\varphi_j\|_H \tau \left( \sum_{r\tau \geq \lambda_m} |\alpha_m| + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda}{\tau} \in Z^+}} |\alpha_m| \right) + \|\varphi\|_H \right\} \\
&\leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \left\{ 2T \max_{1 \leq j \leq N} \|\varphi_j\|_H + \|\varphi\|_H \right\}.
\end{aligned}$$

(4.5) kestiriminin ispatı son kestirime ve (4.8) kestirimine dayanmaktadır.

Şimdi (4.6) eşitsizliği elde edilecektir. (4.2) formülü kullanılarak

$$Au_k = \begin{cases} R^k A\xi - i\tau \sum_{j=1}^k AR^{k-j+1} \varphi_j, & k=1, \dots, r, \\ B^{k-r} R^r A\xi - i\tau \sum_{j=1}^r B^{k-r} AR^{r-j+1} \varphi_j, & \\ -i\tau \sum_{j=r+1}^k B^{k-j} A\varphi_j, & k=r+1, \dots, N \end{cases} \quad (4.10)$$

elde edilir. Böylelikle,

$$Au_k = \begin{cases} R^k A\xi + \left( \sum_{j=2}^k R^{k-j+1} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) + \varphi_k - R^k \varphi_1 \right) & k=1, \dots, r, \\ B^{k-r} R^r A\xi + \left( \sum_{j=2}^r B^{k-r} R^{r-j+1} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) + B^{k-r} \varphi_r - B^{k-r} R^r \varphi_1 \right. \\ \left. + \sum_{j=r+1}^k B^{k-j+1} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) + \varphi_k - B^{k-r} \varphi_r \right), & k=r+1, \dots, N, \end{cases}$$

yani

$$Au_k = \begin{cases} R^k A\xi + \left( \sum_{j=2}^k R^{k-j+1} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) + \varphi_k - R^k \varphi_1 \right) & k=1, \dots, r, \\ B^{k-r} R^r A\xi + \left( \sum_{j=2}^r B^{k-r} R^{r-j+1} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) - B^{k-r} R^r \varphi_1 \right. \\ \left. + \sum_{j=r+1}^k B^{k-j+1} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) + \varphi_k \right), & k=r+1, \dots, N, \end{cases} \quad (4.11)$$

olur. (4.6) kestiriminin ispatı için (i)  $k=1, \dots, r$ , ve (ii)  $k=r+1, \dots, N$  durumları ayrı ayrı incelenmelidir.

$1 \leq k \leq r$  durumunu ele alalım. Bu durumda, (4.11) formülünü kullanarak  $1 \leq k \leq r$  için

$$\begin{aligned} \|Au_k\|_H &\leq \|R\|_{H \rightarrow H}^{k-1} \|RA\xi\|_H + \sum_{j=2}^k \|R\|_{H \rightarrow H}^{k-j+1} \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H \\ &\quad + \|\varphi_1\|_H + \sum_{j=1}^k \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H + \|R\|_{H \rightarrow H}^k \|\varphi_1\|_H \\ &\leq \|RA\xi\|_H + 2 \sum_{j=2}^k \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H + 2\|\varphi_1\|_H \end{aligned}$$

yani,

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq k \leq r} \|Au_k\|_H &\leq \|RA\xi\|_H + 2 \max_{2 \leq k \leq N} \sum_{j=2}^k \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H + 2\|\varphi_1\|_H \\ &\leq \|RA\xi\|_H + 2N \max_{2 \leq k \leq N} \|\varphi_k - \varphi_{k-1}\|_H + 2\|\varphi_1\|_H. \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\max_{1 \leq k \leq r} \|Au_k\|_H \leq \|RA\xi\|_H + 2T \max_{2 \leq k \leq N} \left\| \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\tau} \right\|_H + 2\|\varphi_1\|_H \quad (4.12)$$

sağlanır.  $\|RA\xi\|_H$  için de kestirim elde edilmelidir. (4.3) ve (4.11) formüllerini kullanarak,

$$\begin{aligned} RA\xi &= T_\tau \left\{ \sum_{r\tau \geq \lambda_m} \alpha_m (I + i l_{0_m} A) R \left( \sum_{j=2}^{l_m} R^{l_m-j+1} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) + \varphi_{l_m} - R^{l_m} \varphi_1 \right) \right. \\ &\quad \left. - i \sum_{r\tau \geq \lambda_m} \alpha_m l_{0_m} R A \varphi_{l_m} + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in \mathbb{Z}^+}} \alpha_m R \left( \sum_{j=2}^r B^{l_m-r} R^{r-j+1} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) - R^r \varphi_1 \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} \alpha_m R \left( \sum_{j=r+1}^{l_m} B^{l_m-j+1} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) + \varphi_{l_m} \right) \\
& + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} \alpha_m (I + id_m A) \frac{1}{2} R \left( \left( \sum_{j=2}^r B^{l_m-r} R^{r-j+1} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) - R^r \varphi_1 \right. \right. \\
& + \sum_{j=r+1}^{l_m} B^{l_m-j+1} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) + \varphi_{l_m} \left. \right) + \left( \sum_{j=2}^r B^{l_m+1-r} R^{r-j+1} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) - R^r \varphi_1 \right. \\
& \left. \left. + \sum_{j=r+1}^{l_m+1} B^{l_m-j+2} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) + \varphi_{l_m+1} \right) \right) - i \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} \alpha_m d_m AR \varphi_{l_m} + RA \varphi
\end{aligned}$$

formülü bulunur. Böylelikle,

$$\begin{aligned}
& \|RA\xi\|_H \leq \|T_\tau\|_{H \rightarrow H} \left\{ \sum_{r\tau \geq \lambda_m} |\alpha_m| \|(I + il_0 A)R\|_{H \rightarrow H} \right. \\
& \left( \sum_{j=2}^{l_m} \|R\|_{H \rightarrow H}^{l_m-j+1} \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H + \|\varphi_{l_m}\|_H + \|R\|_{H \rightarrow H}^{l_m} \|\varphi_1\|_H \right) + \sum_{r\tau \geq \lambda_m} |\alpha_m| \|l_0 AR\|_{H \rightarrow H} \|\varphi_{l_m}\|_H \\
& + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} |\alpha_m| \|R\|_{H \rightarrow H} \left( \sum_{j=2}^r \|B\|_{H \rightarrow H}^{l_m-r} \|R\|_{H \rightarrow H}^{r-j+1} \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H + \|R\|_{H \rightarrow H}^r \|\varphi_1\|_H \right) \\
& + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} |\alpha_m| \|R\|_{H \rightarrow H} \left( \sum_{j=r+1}^{l_m} \|B\|_{H \rightarrow H}^{l_m-j+1} \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H + \|\varphi_{l_m}\|_H \right) \\
& + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} |\alpha_m| \|(I + id_m A)R\|_{H \rightarrow H} \frac{1}{2} \left( \left( \sum_{j=2}^r \|B\|_{H \rightarrow H}^{l_m-r} \|R\|_{H \rightarrow H}^{r-j+1} \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H \right. \right. \\
& + \|R\|_{H \rightarrow H}^r \|\varphi_1\|_H + \sum_{j=r+1}^{l_m} \|B\|_{H \rightarrow H}^{l_m-j+1} \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H + \|\varphi_{l_m}\|_H \left. \right) \\
& \left. + \left( \sum_{j=2}^r \|B\|_{H \rightarrow H}^{l_m+1-r} \|R\|_{H \rightarrow H}^{r-j+1} \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H + \|R\|_{H \rightarrow H}^r \|\varphi_1\|_H \right. \right. \\
& \left. \left. + \sum_{j=r+1}^{l_m+1} \|B\|_{H \rightarrow H}^{l_m-j+2} \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H + \|\varphi_{l_m+1}\|_H \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} |\alpha_m| \left\| d_m AR \right\|_{H \rightarrow H} \left\| \varphi_{l_m} \right\|_H + \left\| R \right\|_{H \rightarrow H} \left\| A\varphi \right\|_H \right\} \\
& \leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \left\{ \sum_{r\tau \geq \lambda_m} |\alpha_m| \left( \sum_{j=2}^{l_m} \left\| \varphi_{j-1} - \varphi_j \right\|_H + \left\| \varphi_{l_m} \right\|_H + \left\| \varphi_1 \right\|_H \right) + \sum_{r\tau \geq \lambda_m} |\alpha_m| \left\| \varphi_{l_m} \right\|_H \right. \\
& \quad + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} |\alpha_m| \left( \sum_{j=2}^r \left\| \varphi_{j-1} - \varphi_j \right\|_H + \left\| \varphi_1 \right\|_H \right) \\
& \quad + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} |\alpha_m| \left( \sum_{j=r+1}^{l_m} \left\| \varphi_{j-1} - \varphi_j \right\|_H + \left\| \varphi_{l_m} \right\|_H \right) \\
& \quad + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} |\alpha_m| \frac{1}{2} \left( \left( \sum_{j=2}^r \left\| \varphi_{j-1} - \varphi_j \right\|_H + \left\| \varphi_1 \right\|_H + \sum_{j=r+1}^{l_m} \left\| \varphi_{j-1} - \varphi_j \right\|_H + \left\| \varphi_{l_m} \right\|_H \right) \right. \\
& \quad \left. + \left( \sum_{j=2}^r \left\| \varphi_{j-1} - \varphi_j \right\|_H + \left\| \varphi_1 \right\|_H + \sum_{j=r+1}^{l_m+1} \left\| \varphi_{j-1} - \varphi_j \right\|_H + \left\| \varphi_{l_m+1} \right\|_H \right) \right) \\
& \quad \left. + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} |\alpha_m| \left\| \varphi_{l_m} \right\|_H + \left\| A\varphi \right\|_H \right\}
\end{aligned}$$

sağlanır.  $\varphi_k = \varphi_1 + \sum_{j=2}^k (\varphi_j - \varphi_{j-1})$  bağıntısı kullanılarak

$$\left\| RA\xi \right\|_H \leq C_1(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \left[ \left\| A\varphi \right\|_H + \left\| \varphi_1 \right\|_H + T \max_{2 \leq k \leq N} \left\| \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\tau} \right\|_H \right] \quad (4.13)$$

elde edilir. Sonuçta (4.12) ve (4.13) kestirimleri kullanılarak

$$\max_{1 \leq k \leq r} \left\| Au_k \right\|_H \leq C_2(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \left[ \left\| A\varphi \right\|_H + \left\| \varphi_1 \right\|_H + T \max_{2 \leq k \leq N} \left\| \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\tau} \right\|_H \right] \quad (4.14)$$

kestirimi bulunur.

Sonra  $Au_k$  için elde edilen bu kestirim,

$$i \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} = \varphi_k - Au_k = \varphi_1 - \sum_{j=2}^k (\varphi_{j-1} - \varphi_j) - Au_k \text{ bağıntısı ve üçgen eşitsizliği}$$

kullanılarak

$$\max_{1 \leq k \leq r} \left\| \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} \right\|_H + \max_{1 \leq k \leq r} \left\| Au_k \right\|_H$$

$$\leq C_3(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \left[ \|A\varphi\|_H + \|\varphi_1\|_H + T \max_{2 \leq k \leq N} \left\| \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\tau} \right\|_H \right] \quad (4.15)$$

kestirimi elde edilir.

(ii) Şimdi  $k = r+1, \dots, N$  durumunu ele alalım. (4.11) formülü ve  $\frac{1}{2}(I+B) = C$

eşitliğini kullanarak

$$\begin{aligned} A \frac{u_k + u_{k-1}}{2} &= B^{k-r-1} R^{r-1} C R A \xi + \left( \sum_{j=2}^r C B^{k-1-r} R^{r-j+1} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) - R^r \varphi_1 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=r+1}^{k-1} C B^{k-j} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) + B(\varphi_{k-1} - \varphi_k) + \frac{\varphi_k + \varphi_{k-1}}{2} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylelikle  $k = r+1, \dots, N$  için

$$\begin{aligned} &\left\| A \frac{u_k + u_{k-1}}{2} \right\|_H \\ &\leq \|B\|_{H \rightarrow H}^{k-r-1} \|R\|_{H \rightarrow H}^{r-1} \|C\|_{H \rightarrow H} \|R A \xi\|_H + \left( \sum_{j=2}^r \|C\|_{H \rightarrow H} \|B\|_{H \rightarrow H}^{k-r-1} \|R\|_{H \rightarrow H}^{r-j+1} \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H \right. \\ &\quad \left. + \|R\|_{H \rightarrow H}^r \|\varphi_1\|_H + \sum_{j=r+1}^{k-1} \|C\|_{H \rightarrow H} \|B\|_{H \rightarrow H}^{k-j} \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H \right. \\ &\quad \left. + \|B\|_{H \rightarrow H} \|\varphi_{k-1} - \varphi_k\|_H + \frac{1}{2} \|\varphi_k + \varphi_{k-1}\|_H \right) \\ &\leq \|R A \xi\|_H + \left( \sum_{j=2}^r \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H + \|\varphi_1\|_H + \sum_{j=r+1}^k \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H + \|\varphi_k + \varphi_{k-1}\|_H \right) \\ &\leq \|R A \xi\|_H + \left( 3 \sum_{j=2}^k \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H + 3 \|\varphi_1\|_H \right) \end{aligned}$$

sağlanır. Bu da,

$$\max_{r+1 \leq k \leq N} \left\| A \frac{u_k + u_{k-1}}{2} \right\|_H \leq \|R A \xi\|_H + 3T \max_{2 \leq k \leq N} \left\| \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\tau} \right\|_H + 3 \|\varphi_1\|_H \quad (4.16)$$

sonucunu getirir.

Sonuç olarak (4.13) ve (4.16) kestirimlerini kullanarak

$$\max_{r+1 \leq k \leq N} \left\| A \frac{u_k + u_{k-1}}{2} \right\|_H \leq C_3(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \left[ \|A\varphi\|_H + \|\varphi_1\|_H + T \max_{2 \leq k \leq N} \left\| \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\tau} \right\|_H \right] \quad (4.17)$$

kestirimi elde edilir. Sonunda (4.17) kestirimi,

$i \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} = \varphi_k - A \frac{u_k + u_{k-1}}{2} = \varphi_1 - \sum_{j=2}^k (\varphi_{j-1} - \varphi_j) - A \frac{u_k + u_{k-1}}{2}$  bağıntısı ve üçgen

eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} & \max_{r+1 \leq k \leq N} \left\| \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} \right\|_H + \max_{r+1 \leq k \leq N} \left\| A \frac{u_k + u_{k-1}}{2} \right\|_H \\ & \leq C_4(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \left[ \|A\varphi\|_H + \|\varphi_1\|_H + T \max_{2 \leq k \leq N} \left\| \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\tau} \right\|_H \right] \end{aligned} \quad (4.18)$$

kestirimi sağlar.

(4.6) sonucu, (4.15) ve (4.18) kestirimlerinden gelmektedir. Bu da Teorem 4.1 in ispatını tamamlar.

Not etmek gerekir ki, eğer Teorem 4.1 deki kararlılık kestiriminde  $\tau \rightarrow 0$  için limit alınırsa çok noktalı lokal olmayan sınır değer problemi (2.1) in kararlılığı elde edilir.

Gelecek kısımda, soyut Teorem 4.1 iki tane çok noktalı lokal olmayan sınır değer problemine uygulanacaktır.

## 4.2 Uygulamalar

İlk olarak, tek boyutlu Schrödinger denklemi için çok noktalı lokal olmayan sınır değer problemi (2.15) ele alınacak. (2.15) problemini de kesikli hale dönüştürmek iki adımda olur. İlk adım 2.4 kısmındaki gibi yapılabilir. İkinci adımda ise, (2.50) problemi için

$$\left\{ \begin{aligned} & i \frac{u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x)}{\tau} + \frac{A_h^x}{2} (u_k^h(x) + u_{k-1}^h(x)) = \varphi_k^h(x), \\ & \varphi_k^h(x) = f^h(t_k - \frac{\tau}{2}, x), \quad t_k = k\tau, \quad r+1 \leq k \leq N, \quad x \in [0, 1]_h \\ & i \frac{u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x)}{\tau} + A_h^x u_k^h(x) = \varphi_k^h(x), \\ & \varphi_k^h(x) = f^h(t_k - \frac{\tau}{2}, x), \quad t_k = k\tau, \quad 1 \leq k \leq r, \quad x \in [0, 1]_h \\ & u_0^h(x) = \sum_{r\tau \geq \lambda_m} \alpha_m \left( (I_h + i l_{0_m} A_h^x) u_{l_m}^h(x) - i l_{0_m} \varphi_{l_m}^h(x) \right) + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in \mathbb{Z}^+}} \alpha_m u_{l_m}^h \\ & + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in \mathbb{Z}^+}} \alpha_m \left( (I_h + i d_m A_h^x) \frac{1}{2} (u_{l_m}^h(x) + u_{l_m+1}^h(x)) - i d_m \varphi_{l_m}^h(x) \right) \\ & + \varphi^h(x), \quad x \in [0, 1]_h \end{aligned} \right. \quad (4.19)$$

fark şemaları,  $r$  -iyileştirilmiş fark şemaları (4.1) kullanılarak yazılır.

**Teorem 4.2.**  $\tau$  ve  $|h|$  yeterince küçük sayılar olsun. Eğer

$$\sum_{m=1}^p |\alpha_m| < 1$$

ise, (4.19) fark şemalarının çözümü için aşağıdaki

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq k \leq N} \|u_k^h\|_{L_{2h}} &\leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \left[ \|\varphi^h\|_{L_{2h}} + T \max_{1 \leq k \leq N} \|\varphi_k^h\|_{L_{2h}} \right], \\ \max_{1 \leq k \leq N} \left\| \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\|_{L_{2h}} &+ \max_{1 \leq k \leq r} \|(u_k^h)_{xx}\|_{L_{2h}} + \max_{r+1 \leq k \leq N} \left\| \frac{(u_k^h)_{xx} + (u_{k-1}^h)_{xx}}{2} \right\|_{L_{2h}} \\ &\leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \left[ \left\| (\varphi_x^h)_x \right\|_{L_{2h}} + \|\varphi_1^h\|_{L_{2h}} + T \max_{2 \leq k \leq N} \left\| \frac{\varphi_k^h - \varphi_{k-1}^h}{\tau} \right\|_{L_{2h}} \right]. \end{aligned}$$

kararlılık kestirimleri sağlanır.

Burada,  $C(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$  sabiti  $\tau$ ,  $h$ ,  $\varphi^h(x)$  ve  $\varphi_k^h(x)$ ,  $1 \leq k \leq N$  den bağımsızdır.

Teorem 4.2 nin ispatı soyut Teorem 4.1 e ve aynı zamanda (2.49) formülüyle  $L_{2h}$  da tanımlı  $A_h^x$  fark operatörünün simetri özelliklerine dayanmaktadır.

İkinci olarak çok boyutlu Schrödinger denklemleri için çok noktalı lokal olmayan sınır değer problemi (2.16) ele alınacak. (2.16) probleminin de kesikli hale dönüştürülmesi iki adımda olur. İlk adım 2.4 kısmındaki gibi yapılabilir.

İkinci adımda, (2.54) problemi için  $r$  -iyileştirilmiş fark şemaları (4.1) kullanılarak

$$\left\{ \begin{array}{l}
i \frac{u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x)}{\tau} + \frac{A_h^x}{2} (u_k^h(x) + u_{k-1}^h(x)) = \varphi_k^h(x), \\
\varphi_k^h(x) = f^h(t_k - \frac{\tau}{2}, x), \quad t_k = k\tau, \quad r+1 \leq k \leq N, \quad x \in \tilde{\Omega}_h \\
i \frac{u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x)}{\tau} + A_h^x u_k^h(x) = \varphi_k^h(x), \\
\varphi_k^h(x) = f^h(t_k - \frac{\tau}{2}, x), \quad t_k = k\tau, \quad 1 \leq k \leq r, \quad x \in \tilde{\Omega}_h \\
u_0^h(x) = \sum_{r\tau \geq \lambda_m} \alpha_m \left( (I_h + il_{0_m} A_h^x) u_{l_m}^h(x) - il_{0_m} \varphi_{l_m}^h(x) \right) + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in \mathbb{Z}^+}} \alpha_m u_{l_m}^h \\
+ \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in \mathbb{Z}^+}} \alpha_m \left( (I_h + id_m A_h^x) \frac{1}{2} (u_{l_m}^h(x) + u_{l_m+1}^h(x)) - id_m \varphi_{l_m}^h(x) \right) \\
+ \varphi^h(x), \quad x \in \tilde{\Omega}_h.
\end{array} \right. \quad (4.20)$$

fark şemaları yazılır.

**Teorem 4.3.**  $\tau$  ve  $|h| = \sqrt{h_1^2 + \dots + h_n^2}$  yeterince küçük sayılar olsun.

Eğer

$$\sum_{m=1}^p |\alpha_m| < 1$$

ise, (4.20) fark şemalarının çözümü için aşağıdaki

$$\max_{0 \leq k \leq N} \|u_k^h\|_{L_2(\tilde{\Omega}_h)} \leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \left[ \|\varphi^h\|_{L_2(\tilde{\Omega}_h)} + T \max_{1 \leq k \leq N} \|\varphi_k^h\|_{L_2(\tilde{\Omega}_h)} \right],$$

$$\begin{aligned}
& \max_{1 \leq k \leq N} \left\| \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\|_{L_2(\tilde{\Omega}_h)} + \max_{1 \leq k \leq r} \sum_{s=1}^n \left\| (u_k^h)_{x_s, x_s, j_s}^- \right\|_{L_2(\tilde{\Omega}_h)} + \max_{r+1 \leq k \leq N} \sum_{s=1}^n \left\| \frac{(u_k^h)_{x_s, x_s, j_s}^- + (u_{k-1}^h)_{x_s, x_s, j_s}^-}{2} \right\|_{L_2(\tilde{\Omega}_h)} \\
& \leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \left[ \sum_{r=1}^n \left\| (\varphi^h)_{x_r, x_r, j_r}^- \right\|_{L_2(\tilde{\Omega}_h)} + \|\varphi^h\|_{L_2(\tilde{\Omega}_h)} + T \max_{2 \leq k \leq N} \left\| \frac{\varphi_k^h - \varphi_{k-1}^h}{\tau} \right\|_{L_2(\tilde{\Omega}_h)} \right]
\end{aligned}$$

kararlılık kestirimleri sağlar.

Burada,  $C(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$  sabiti  $\tau$ ,  $h$ ,  $\varphi^h(x)$  ve  $\varphi_k^h(x)$ ,  $1 \leq k \leq N$  den bağımsızdır.

Teorem 4.3 ün ispatı soyut Teorem 4.1 e (2.53) formülüyle  $L_2(\tilde{\Omega}_h)$  tanımlı  $A_h^x$  fark operatörünün simetri özelliklerine ve aynı zamanda Teorem 2.10 a dayanmaktadır.

### 4.3 Sayısal Sonuçlar

Bu kısımda, Schrödinger denklemi için çok noktalı lokal olmayan sınır değer probleminin

$$\left\{ \begin{array}{l} i \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + u(t,x) = \exp(it\pi^2) \sin \pi x, \\ 0 < t, x < 1, \\ u(0,x) = \frac{1}{2}u(\frac{1}{2},x) + \frac{1}{3}u(\frac{1}{3},x) + \varphi(x), \\ \varphi(x) = \left(1 - \frac{1}{2}\exp(\frac{i\pi^2}{2}) - \frac{1}{3}\exp(\frac{i\pi^2}{3})\right) \sin \pi x, \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1 \end{array} \right. \quad (4.21)$$

(4.1)  $r$ -iyileştirilmiş Crank-Nicholson fark şemaları kullanılarak sayısal çözümleri araştırılacak. Bu problemin tam çözümü

$$u(t,x) = \left(\exp(it\pi^2)\right)(\sin \pi x)$$

şeklindedir. (4.21) probleminin yaklaşık çözümleri için  $[0,1]_r \times [0,1]_h$  üzerinde (4.1) i uygularsak, aşağıdaki  $r$ -iyileştirilmiş Crank-Nicholson fark şemalarını elde ederiz:

$$\left\{ \begin{array}{l} i \frac{u_n^k - u_n^{k-1}}{\tau} - \frac{1}{2} \left( \frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} + \frac{u_{n+1}^{k-1} - 2u_n^{k-1} + u_{n-1}^{k-1}}{h^2} \right) + \frac{1}{2}u_n^k + \frac{1}{2}u_n^{k-1} = f(t_k - \frac{\tau}{2}, x_n), \\ r+1 \leq k \leq N, \quad 1 \leq n \leq M-1, \\ i \frac{u_n^k - u_n^{k-1}}{\tau} - \frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} + u_n^k = f(t_k - \frac{\tau}{2}, x_n), \quad 1 \leq k \leq r, \quad 1 \leq n \leq M-1, \\ u_n^0 = \frac{1}{3}u_n^{[\frac{1}{3\tau}]} + \frac{1}{2}u_n^{[\frac{1}{2\tau}]} + \varphi(x_n), \quad 1 \leq n \leq M-1; \\ u_0^k = u_M^k = 0, \quad 0 \leq k \leq N, \\ f(t,x) = \exp(it\pi^2) \sin \pi x, \\ \varphi(x) = \left(1 - \frac{1}{2}\exp(\frac{i\pi^2}{2}) - \frac{1}{3}\exp(\frac{i\pi^2}{3})\right) \sin \pi x. \end{array} \right. \quad (4.22)$$

Böylelikle  $(N+1) \times (M+1)$  lineer denklem sistemi elde edilir. Bu lineer denklem sistemi düzenlenerek

$$\begin{cases} AU_{n+1} + BU_n + CU_{n-1} = D\varphi_n, & 1 \leq n \leq M-1, \\ U_0 = \tilde{0}, & U_M = \tilde{0}, \end{cases}$$

matris formunda yazılabilir. Burada,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & d & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & d & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & a & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} e & f & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & f & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & f & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b & c & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b & \dots & c & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & b & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b & c \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{-1}{3} & 0 & \dots & \frac{-1}{2} & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$C = A, \quad D = I_{(N+1) \times (N+1)}, \quad U_s = \begin{bmatrix} U_s^0 \\ U_s^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ U_s^{N-1} \\ U_s^N \end{bmatrix}, \quad s = n-1, n, n+1.$$

Ayrıca,

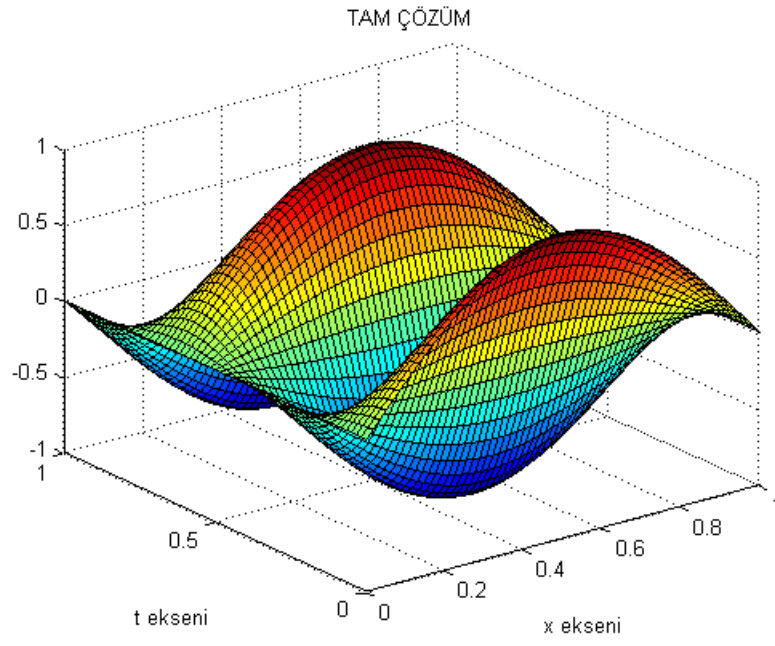
$$a = -\frac{1}{2h^2}, \quad b = \left( -\frac{i}{\tau} + \frac{1}{h^2} + \frac{1}{2} \right), \quad c = \frac{i}{\tau} + \frac{1}{h^2} + \frac{1}{2},$$

$$d = -\frac{1}{h^2}, \quad e = -\frac{i}{\tau}, \quad f = \frac{i}{\tau} + \frac{2}{h^2} + 1$$

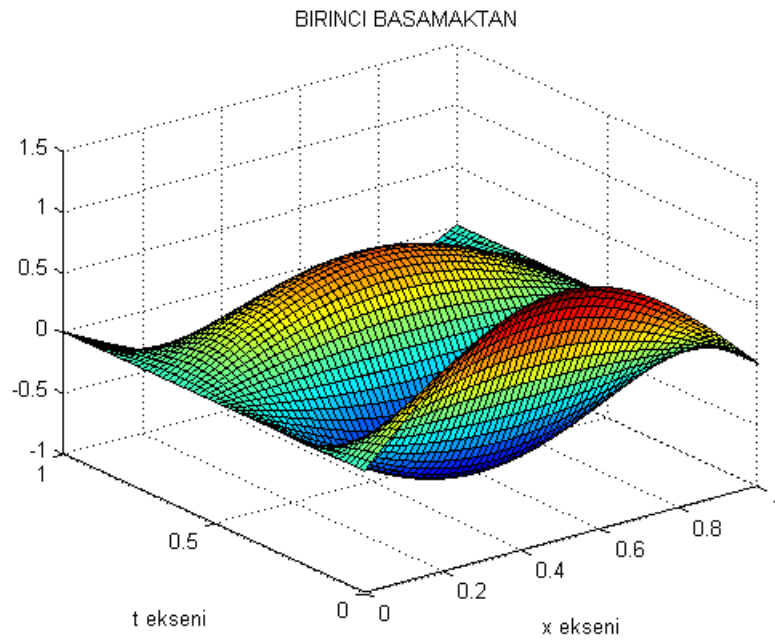
$$\varphi_n = \begin{bmatrix} \varphi_n^0 \\ \varphi_n^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi_n^N \end{bmatrix}, \quad \varphi_n^k = \begin{cases} \left( 1 - \frac{1}{2} \exp\left(\frac{i\pi^2}{2}\right) - \frac{1}{3} \exp\left(\frac{i\pi^2}{3}\right) \right) \sin \pi x, & k = 0, \\ f\left(t_k - \frac{\tau}{2}, x_n\right), & 1 \leq k \leq N, \end{cases}$$

şekindedir. Dolayısıyla ikinci mertebeden katsayıları matris olan,  $n$  ye göre fark denklemleri elde edilmiş oldu. Bu fark denklemlerini çözmek için Bölüm 2 deki gibi iyileştirilmiş Gauss eliminasyon yöntemi kullanılacaktır.

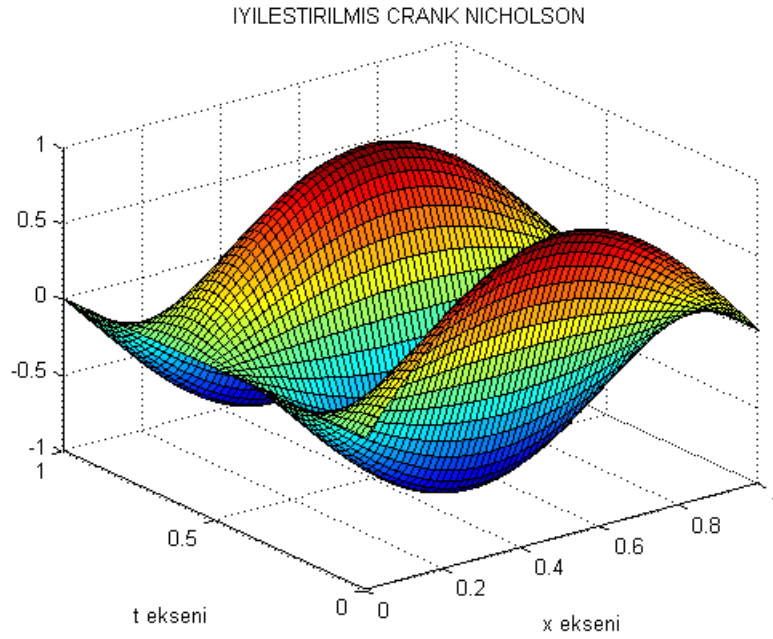
Şimdi, sayısal sonuçları verelim. (4.21) probleminin tam ve yaklaşık çözümlerinin sayısal değerlerini elde etmek için Matlab programlarını (bak Ek 3) kullandık. (4.21) probleminin tam ve yaklaşık çözümleri aşağıdaki şekillerde verilmiştir.



Şekil 4.1. Tam çözüm



Şekil 4.2. Birinci basamaktan doğruluklu fark şeması



Şekil 4.3. İyileştirilmiş Crank-Nicholson fark şemaları

Sayısal sonuçlar farklı  $N=M$  değerleri için verilmiştir. Tam çözüm ile yaklaşık çözümleri karşılaştırabilmek için önce hatalar (2.62) formülüyle hesaplandı.

Tablo 4.1, fark şemalarıyla elde edilen çözümler ile tam çözüm arasındaki hata analizini vermektedir. Tablo 4.1 sırasıyla  $N=M=18, 30$  ve  $60$  için oluşturulmuştur.

Tablo 4.1: Hatalar.

Metot	$N=M=18$	$N=M=30$	$N=M=60$
İ.C.N. $r=1$	0.2301	0.0911	0.0236
İ.C.N. $r=2$	0.2807	0.1152	0.0303
İ.C.N. $r=3$	0.3304	0.1413	0.0379
1. b. doğruluklu	0.5732	0.4948	0.3579

İkinci olarak, tam çözüm ile yaklaşık çözümü karşılaştırabilmek için kısmi hatalar (2.63) formülüyle hesaplandı. Tablo 4.2 sırasıyla  $N=M=18, 30$  ve  $60$  için oluşturulmuştur.

Table 4.2: Kısmi Hatalar.

<i>Metot</i>	N=M=18	N=M=30	N=M=60
İ.C.N. r=1	0.3254	0.1288	0.0334
İ.C.N. r=2	0.3970	0.1629	0.0428
İ.C.N. r=3	0.4673	0.1998	0.0536
1. b. doğruluklu	0.8134	0.6997	0.5061

Tablolardan da açık bir şekilde görüldüğü gibi, ikinci basamaktan doğruluklu iyileştirilmiş Crank-Nicholson fark şemaları birinci basamaktan doğruluklu fark şemasına kıyasla tam çözümlere daha yakın sonuçlar vermektedir.

## BÖLÜM 5

# SCHRÖDİNGER DENKLEMİ İÇİN İNTEGRALLİ, ÇOK NOKTALI LOKAL OLMAYAN SINIR DEĞER PROBLEMİNE İYİLEŞTİRİLMİŞ CRANK- NICHOLSON FARK ŞEMALARI

Bu bölümde, integralli, çok noktalı lokal olmayan sınır değer problemi (3.1) araştırılmıştır. İntegralli, çok noktalı lokal olmayan sınır değer probleminin yaklaşık çözümleri için ikinci basamaktan doğruluklu  $r$ -iyileştirilmiş Crank-Nicholson fark şemaları kurulmuştur. Bu fark şemalarının kararlılığı gösterilmiştir. Uygulamada Schrödinger denkleminin fark denklemlerinin çözümlerinin kararlılığı elde edilmiştir. İntegralli, çok noktalı lokal olmayan sınır şartlı tek-boyutlu Schrödinger denkleminin çözümü sayısal olarak elde edilmiştir. Bu fark denklemlerinin çözümünde iyileştirilmiş Gauss eliminasyon metodunu içeren bir teknik kullanılmıştır. Metot sayısal değerlerle desteklenmiştir.

Bu bölümün ana amacı, (3.1) probleminin yaklaşık çözümleri için  $r$ -iyileştirilmiş Crank-Nicholson fark şemalarını çalışmaktır. Bu bölümde  $1 \leq m \leq p$  için  $2\tau \leq \lambda_m$  olduğu kabul edilmektedir. Bu integralli çok noktalı lokal olmayan sınır değer probleminin yaklaşık çözümü için ikinci mertebeden doğruluklu  $r$ -iyileştirilmiş Crank-Nicholson fark şemaları

$$\left\{ \begin{array}{l}
i \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} + \frac{A}{2} (u_k + u_{k-1}) = \varphi_k, \quad r+1 \leq k \leq N, \\
i \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} + Au_k = \varphi_k, \quad 1 \leq k \leq r, \\
u_0 = \sum_{r\tau \geq \lambda_m} \alpha_m \left( (I + i l_{0_m} A) u_{l_m} - i l_{0_m} \varphi_{l_m} \right) + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} \alpha_m u_{l_m} + \varphi \\
+ \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \notin Z^+}} \alpha_m (I + i d_m A)^{\frac{1}{2}} (u_{l_m} + u_{l_m+1}) - i \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} \alpha_m d_m \varphi_{l_m} + \tau \sum_{k=1}^N \psi_{k-\frac{1}{2}} \left( \frac{u_k + u_{k-1}}{2} \right), \\
0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_p \leq T,
\end{array} \right. \quad (5.1)$$

şekindedir [7]. Burada  $Z^+$ ,  $\{2, \dots, n, \dots\}$  kümesini ve  $l_m = [\frac{\lambda_m}{\tau}]$ ,  $l_{0_m} = \lambda_m - [\frac{\lambda_m}{\tau}]\tau$ ,  $d_m = \lambda_m - [\frac{\lambda_m}{\tau}]\tau - \frac{\tau}{2}$  ve  $\varphi_k = f(t_k - \frac{\tau}{2})$ ,  $t_k = k\tau$  belirtmektedir.

## 5.1 Kararlılık Teoremi

Cauchy probleminin yaklaşık çözümü için kurulan  $r$ -iyileştirilmiş Crank-Nicholson fark şemalarının

$$\left\{ \begin{array}{l}
i \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} + \frac{A}{2} (u_k + u_{k-1}) = \varphi_k, \quad r+1 \leq k \leq N, \\
i \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} + Au_k = \varphi_k, \quad 1 \leq k \leq r, \quad u_0 = \xi,
\end{array} \right.$$

$\varphi_k = f(t_k - \frac{\tau}{2})$ ,  $t_k = k\tau$  olmak üzere çözümü

$$u_k = \left\{ \begin{array}{l}
R^k \xi - i\tau \sum_{j=1}^k R^{k-j+1} \varphi_j, \quad k = 1, \dots, r, \\
B^{k-r} R^r \xi - i\tau \sum_{j=1}^r B^{k-r} R^{r-j+1} \varphi_j \\
-i\tau \sum_{j=r+1}^k B^{k-j} C \varphi_j, \quad k = r+1, \dots, N
\end{array} \right. \quad (5.2)$$

şekindedir [7].

Burada,

$$R = (I - i\tau A)^{-1}, \quad C = \left( I - i \frac{A}{2} \tau \right)^{-1}, \quad B = \left( I + i \frac{A}{2} \tau \right) C$$

göstermektedir.  $u_0$  ı bulmak için (5.2) formülünü ve

$$u_0 = \sum_{r\tau \geq \lambda_m} \alpha_m \left( (I + il_{0_m} A) u_{l_m} - il_{0_m} \varphi_{l_m} \right) + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} \alpha_m u_{l_m} \\ + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} \alpha_m \left( (I + id_m A)^{\frac{1}{2}} (u_{l_m} + u_{l_m+1}) - id_m \varphi_{l_m} \right) + \tau \sum_{k=1}^N \psi_{k-\frac{1}{2}} \left( \frac{u_k + u_{k-1}}{2} \right) + \varphi$$

şartını kullanırsak

$$\xi = \sum_{r\tau \geq \lambda_m} \alpha_m (I + il_{0_m} A) R^{l_m} \xi - i\tau \sum_{r\tau \geq \lambda_m} \alpha_m (I + il_{0_m} A) \sum_{j=1}^{l_m} R^{l_m-j+1} \varphi_j - i \sum_{r\tau \geq \lambda_m} \alpha_m l_{0_m} \varphi_{l_m} \\ + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} \alpha_m \left( B^{l_m-r} R^r \xi - i\tau \sum_{j=1}^r B^{l_m-r} R^{r-j+1} \varphi_j - i\tau \sum_{j=r+1}^{l_m} B^{l_m-j} C \varphi_j \right) \\ + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} \alpha_m (I + id_m A) \frac{1}{2} \left( B^{l_m-r} R^r \xi - i\tau \sum_{j=1}^r B^{l_m-r} R^{r-j+1} \varphi_j - i\tau \sum_{j=r+1}^{l_m} B^{l_m-j} C \varphi_j \right) \\ + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} \alpha_m (I + id_m A) \frac{1}{2} \left\{ \left( B^{l_m+1-r} R^r \xi - i\tau \sum_{j=1}^r B^{l_m+1-r} R^{r-j+1} \varphi_j - i\tau \sum_{j=r+1}^{l_m+1} B^{l_m+1-j} C \varphi_j \right) \right\} \\ - i \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} \alpha_m d_m \varphi_{l_m} + \sum_{k=1}^r \psi_{k-\frac{1}{2}} \frac{\tau}{2} \left( R^k \xi - i\tau \sum_{j=1}^k R^{k-j+1} \varphi_j + R^{k-1} \xi - i\tau \sum_{j=1}^{k-1} R^{k-j} \varphi_j \right) \\ + \psi_{r+\frac{1}{2}} \frac{\tau}{2} \left( BR^r \xi - i\tau \sum_{j=1}^r BR^{r-j+1} \varphi_j - i\tau C \varphi_{r+1} + R^r \xi - i\tau \sum_{j=1}^r R^{r-j+1} \varphi_j \right) \\ + \sum_{k=r+2}^N \psi_{k-\frac{1}{2}} \frac{\tau}{2} \left( B^{k-r} R^r \xi - i\tau \sum_{j=1}^r B^{k-r} R^{r-j+1} \varphi_j - i\tau \sum_{j=r+1}^k B^{k-j} C \varphi_j \right. \\ \left. + B^{k-1-r} R^r \xi - i\tau \sum_{j=1}^r B^{k-1-r} R^{r-j+1} \varphi_j - i\tau \sum_{j=r+1}^{k-1} B^{k-1-j} C \varphi_j \right) + \varphi$$

elde ederiz.

$$I - \sum_{r\tau \geq \lambda_m} \alpha_m (I + il_{0_m} A) R^{l_m} - \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} \alpha_m B^{l_m-r} R^r - \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} \alpha_m (I + id_m A) \frac{1}{2} (I + B) B^{l_m-r} R^r \\ - \sum_{k=1}^r \psi_{k-\frac{1}{2}} \frac{\tau}{2} (R^k + R^{k-1}) - \sum_{k=r+1}^N \psi_{k-\frac{1}{2}} \frac{\tau}{2} (B^{k-r} + B^{k-1-r}) R^r$$

operatörünün tersi olduğu için

$$\begin{aligned}
\xi = T_\tau \left\{ \right. & \left( -i\tau \sum_{r\tau \geq \lambda_m} \alpha_m (I + il_{0_m} A) \sum_{j=1}^{l_m} R^{l_m-j+1} \varphi_j - i \sum_{r\tau \geq \lambda_m} \alpha_m l_{0_m} \varphi_{l_m} \right) \\
& - i\tau \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in \mathbb{Z}^+}} \alpha_m \left( \sum_{j=1}^r B^{l_m-r} R^{r-j+1} \varphi_j + \sum_{j=r+1}^{l_m} B^{l_m-j} C \varphi_j \right) \\
& - i\tau \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in \mathbb{Z}^+}} \alpha_m (I + id_m A) \frac{1}{2} \left( (I + B) \left( \sum_{j=1}^r B^{l_m-r} R^{r-j+1} \varphi_j + \sum_{j=r+1}^{l_m} B^{l_m-j} C \varphi_j \right) + C \varphi_{l_m+1} \right) \\
& - i \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in \mathbb{Z}^+}} \alpha_m d_m \varphi_{l_m} - i\tau \sum_{k=1}^r \psi_{k-\frac{1}{2}} \frac{\tau}{2} \left( \sum_{j=1}^k R^{k-j+1} \varphi_j + \sum_{j=1}^{k-1} R^{k-j} \varphi_j \right) \\
& \left. - i\tau \sum_{k=r+1}^N \psi_{k-\frac{1}{2}} \frac{\tau}{2} (I + B) \sum_{j=1}^r B^{k-1-r} R^{r-j+1} \varphi_j - i\tau \sum_{k=r+1}^N \psi_{k-\frac{1}{2}} \frac{\tau}{2} \left( \sum_{j=r+1}^k B^{k-j} C \varphi_j + \sum_{j=r+1}^{k-1} B^{k-1-j} C \varphi_j \right) + \varphi \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned}
T_\tau = & \left( I - \sum_{r\tau \geq \lambda_m} \alpha_m (I + il_{0_m} A) R^{l_m} - \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in \mathbb{Z}^+}} \alpha_m B^{l_m-r} R^r - \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in \mathbb{Z}^+}} \alpha_m (I + id_m A) \frac{1}{2} (I + B) B^{l_m-r} R^r \right. \\
& \left. - \sum_{k=1}^r \psi_{k-\frac{1}{2}} \frac{\tau}{2} (R^k + R^{k-1}) - \sum_{k=r+1}^N \psi_{k-\frac{1}{2}} \frac{\tau}{2} (B^{k-r} + B^{k-1-r}) R^r \right)^{-1}
\end{aligned}$$

şeklindedir. Not edelim ki, burada  $k = r+1$  için  $\sum_{j=r+1}^{k-1} B^{k-1-j} C \varphi_j = 0$  alınmıştır.

Böylece (5.1) probleminin çözümü için

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned}
& R^k u_0 - i\tau \sum_{j=1}^k R^{k-j+1} \varphi_j, \quad k = 1, \dots, r, \\
& B^{k-r} R^r u_0 - i\tau \sum_{j=1}^r B^{k-r} R^{r-j+1} \varphi_j, \\
& -i\tau \sum_{j=r+1}^k B^{k-j} C \varphi_j, \quad k = r+1, \dots, N \\
& T_\tau \left\{ \left( -i\tau \sum_{r\tau \geq \lambda_m} \alpha_m (I + i l_{0_m} A) \sum_{j=1}^{l_m} R^{l_m-j+1} \varphi_j - i \sum_{r\tau \geq \lambda_m} \alpha_m l_{0_m} \varphi_{l_m} \right) \right. \\
& \left. -i\tau \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} \alpha_m \left( \sum_{j=1}^r B^{l_m-r} R^{r-j+1} \varphi_j + \sum_{j=r+1}^{l_m} B^{l_m-j} C \varphi_j \right) \right. \\
& \left. -i\tau \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} \alpha_m (I + i d_m A) \frac{1}{2} \left( (I + B) \left( \sum_{j=1}^r B^{l_m-r} R^{r-j+1} \varphi_j + \sum_{j=r+1}^{l_m} B^{l_m-j} C \varphi_j \right) + C \varphi_{l_m+1} \right) \right. \\
& \left. -i \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} \alpha_m d_m \varphi_{l_m} - i\tau \sum_{k=1}^r \psi_{k-\frac{1}{2}} \frac{\tau}{2} \left( \sum_{j=1}^k R^{k-j+1} \varphi_j + \sum_{j=1}^{k-1} R^{k-j} \varphi_j \right) \right. \\
& \left. -i\tau \sum_{k=r+1}^N \psi_{k-\frac{1}{2}} \frac{\tau}{2} (I + B) \sum_{j=1}^r B^{k-1-r} R^{r-j+1} \varphi_j \right. \\
& \left. -i\tau \sum_{k=r+1}^N \psi_{k-\frac{1}{2}} \frac{\tau}{2} \left( \sum_{j=r+1}^k B^{k-j} C \varphi_j + \sum_{j=r+1}^{k-1} B^{k-1-j} C \varphi_j \right) + \varphi \right\}, \quad k = 0.
\end{aligned}
\right. \\
& u_k =
\end{aligned}
\tag{5.3}$$

formülü elde edilir.

**Teorem 5.1.** Eğer  $\varphi \in D(A)$  ve

$$\sum_{m=1}^p |\alpha_m| < 1 - \tau \sum_{k=1}^N |\psi_{k-\frac{1}{2}}|$$

ise, (5.1) fark şemalarının çözümü için aşağıdaki

$$\begin{aligned}
& \max_{0 \leq k \leq N} \|u_k\|_H \leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \psi) \left[ \|\varphi\|_H + T \max_{1 \leq k \leq N} \|\varphi_k\|_H \right], \\
& \max_{1 \leq k \leq N} \left\| \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} \right\|_H + \max_{1 \leq k \leq r} \|A u_k\|_H + \max_{r+1 \leq k \leq N} \left\| A \frac{u_k + u_{k-1}}{2} \right\|_H
\end{aligned}
\tag{5.4}$$

$$\leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \psi) \left[ \|A\varphi\|_H + \|\varphi_1\|_H + T \max_{2 \leq k \leq N} \left\| \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\tau} \right\|_H \right] \quad (5.5)$$

kararlılık kestirimleri sağlanır.

Burada,  $C(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \psi)$  sabiti  $h$ ,  $\varphi(x)$  ve  $\varphi_k(x)$ ,  $1 \leq k \leq N$  den bağımsızdır.

**İspat.**

$$\|R\|_{H \rightarrow H} \leq 1, \quad \|B\|_{H \rightarrow H} \leq 1, \quad \|C\|_{H \rightarrow H} \leq 1 \quad (5.6)$$

kestirimlerini ve (5.2) formülünü kullanarak

$$\max_{1 \leq k \leq N} \|u_k\|_H \leq \left[ \|u_0\|_H + T \max_{1 \leq k \leq N} \|\varphi_k\|_H \right] \quad (5.7)$$

elde edilir. Özeşlenik operatörlerin spektral gösterimi kullanılarak

$$\|T_\tau\|_{H \rightarrow H} \leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \psi) \quad (5.8)$$

olduğu gösterilir. Daha açık olarak,

$$\begin{aligned} \|T_\tau\|_{H \rightarrow H} &\leq \sup_{-\infty \leq \mu < \infty} \left| \left( 1 - \sum_{r\tau \geq \lambda_m} \alpha_m (1 + il_{0_m} \mu) \left( \frac{1}{1 - i\tau\mu} \right)^{l_m} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} \alpha_m \left( \frac{1 + \frac{i\tau\mu}{2}}{1 - \frac{i\tau\mu}{2}} \right)^{l_m - r} \left( \frac{1}{1 - i\tau\mu} \right)^r \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} \alpha_m (1 + id_m \mu) \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1 + \frac{i\tau\mu}{2}}{1 - \frac{i\tau\mu}{2}} \right) \left( \frac{1 + \frac{i\tau\mu}{2}}{1 - \frac{i\tau\mu}{2}} \right)^{l_m - r} \left( \frac{1}{1 - i\tau\mu} \right)^r \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sum_{k=1}^r \psi_{k-\frac{1}{2}} \frac{\tau}{2} \left( 1 + \left( \frac{1}{1 - i\tau\mu} \right) \right) \left( \frac{1}{1 - i\tau\mu} \right)^{k-1} - \sum_{k=r+1}^N \psi_{k-\frac{1}{2}} \frac{\tau}{2} \left( 1 + \frac{1 + \frac{i\tau\mu}{2}}{1 - \frac{i\tau\mu}{2}} \right) \left( \frac{1 + \frac{i\tau\mu}{2}}{1 - \frac{i\tau\mu}{2}} \right)^{k-1-r} \left( \frac{1}{1 - i\tau\mu} \right)^r \right)^{-1} \right| \\ &\leq \sup_{-\infty \leq \mu < \infty} \left( 1 - \left| \sum_{r\tau \geq \lambda} \alpha_m (1 + il_{0_m} \mu) \left( \frac{1}{1 - i\tau\mu} \right)^{l_m} + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} \alpha_m \left( \frac{1 + \frac{i\tau\mu}{2}}{1 - \frac{i\tau\mu}{2}} \right)^{l_m - r} \left( \frac{1}{1 - i\tau\mu} \right)^r \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} \alpha_m (1 + id_m \mu) \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1 + \frac{i\tau\mu}{2}}{1 - \frac{i\tau\mu}{2}} \right) \left( \frac{1 + \frac{i\tau\mu}{2}}{1 - \frac{i\tau\mu}{2}} \right)^{l_m - r} \left( \frac{1}{1 - i\tau\mu} \right)^r \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{k=1}^r \psi_{k-\frac{1}{2}} \frac{\tau}{2} \left( 1 + \left( \frac{1}{1 - i\tau\mu} \right) \right) \left( \frac{1}{1 - i\tau\mu} \right)^{k-1} + \sum_{k=r+1}^N \psi_{k-\frac{1}{2}} \frac{\tau}{2} \left( 1 + \frac{1 + \frac{i\tau\mu}{2}}{1 - \frac{i\tau\mu}{2}} \right) \left( \frac{1 + \frac{i\tau\mu}{2}}{1 - \frac{i\tau\mu}{2}} \right)^{k-1-r} \left( \frac{1}{1 - i\tau\mu} \right)^r \right)^{-1} \right). \end{aligned}$$

Burada,

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{r\tau \geq \lambda} \alpha_m (1 + il_{0_m} \mu) \left( \frac{1}{1 - i\tau\mu} \right)^{l_m} + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} \alpha_m \left( \frac{1 + \frac{i\tau\mu}{2}}{1 - \frac{i\tau\mu}{2}} \right)^{l_m - r} \left( \frac{1}{1 - i\tau\mu} \right)^r \right. \\
& \quad \left. + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} \alpha_m (1 + id_m \mu) \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1 + \frac{i\tau\mu}{2}}{1 - \frac{i\tau\mu}{2}} \right) \left( \frac{1 + \frac{i\tau\mu}{2}}{1 - \frac{i\tau\mu}{2}} \right)^{l_m - r} \left( \frac{1}{1 - i\tau\mu} \right)^r \right. \\
& \quad \left. + \sum_{k=1}^r \psi_{k-\frac{1}{2}} \frac{\tau}{2} \left( 1 + \left( \frac{1}{1 - i\tau\mu} \right) \right) \left( \frac{1}{1 - i\tau\mu} \right)^{k-1} + \sum_{k=r+1}^N \psi_{k-\frac{1}{2}} \frac{\tau}{2} \left( 1 + \frac{1 + \frac{i\tau\mu}{2}}{1 - \frac{i\tau\mu}{2}} \right) \left( \frac{1 + \frac{i\tau\mu}{2}}{1 - \frac{i\tau\mu}{2}} \right)^{k-1-r} \left( \frac{1}{1 - i\tau\mu} \right)^r \right| \\
& \leq \sum_{r\tau \geq \lambda} |\alpha_m| \left| \frac{1 + il_{0_m} \mu}{1 - i\tau\mu} \right| \left| \frac{1}{1 - i\tau\mu} \right|^{l_m - 1} + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} |\alpha_m| \left| \frac{1 + \frac{i\tau\mu}{2}}{1 - \frac{i\tau\mu}{2}} \right|^{l_m - r} \left| \frac{1}{1 - i\tau\mu} \right|^r \\
& \quad + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} |\alpha_m| \left| \frac{1 + id_m \mu}{1 - \frac{i\tau\mu}{2}} \right| \left| \frac{1 + \frac{i\tau\mu}{2}}{1 - \frac{i\tau\mu}{2}} \right|^{l_m - r} \left| \frac{1}{1 - i\tau\mu} \right|^r + \sum_{k=1}^r \psi_{k-\frac{1}{2}} \tau \left| \frac{1 - \frac{i\tau\mu}{2}}{1 - i\tau\mu} \right| \left| \frac{1}{1 - i\tau\mu} \right|^{k-1} \\
& \quad \quad \quad + \left| \frac{1}{1 - \frac{i\tau\mu}{2}} \right| \left| \frac{1 + \frac{i\tau\mu}{2}}{1 - \frac{i\tau\mu}{2}} \right|^{k-1-r} \left| \frac{1}{1 - i\tau\mu} \right|^r \\
& \leq \sum_{r\tau \geq \lambda} |\alpha_m| + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} |\alpha_m| + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} |\alpha_m| + \tau \sum_{k=1}^r \psi_{k-\frac{1}{2}} + \tau \sum_{k=r+1}^N \psi_{k-\frac{1}{2}} \\
& \leq \sum_{m=1}^p |\alpha_m| + \tau \sum_{k=1}^N |\psi_{k-\frac{1}{2}}| < 1
\end{aligned}$$

olduğu için de

$$\|T_\tau\|_{H \rightarrow H} \leq \frac{1}{1 - \left( \sum_{m=1}^p |\alpha_m| + \tau \sum_{k=1}^N |\psi_{k-\frac{1}{2}}| \right)} \leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \psi)$$

kestirimi sağlanır.

$\|u_0\|_H$  için de bir kestirim bulunmalıdır. (5.3) formülünü, üçgen eşitsizliğini, (5.6) ve (5.8) kestirimlerini kullanarak aşağıdaki kestirim elde edilir:

$$\|u_0\|_H \leq \|T_\tau\|_{H \rightarrow H} \left\{ \sum_{r\tau \geq \lambda_m} \tau |\alpha_m| \left( \sum_{j=1}^{l_m} \|(I + il_{0_m} A) R^{l_m - j + 1}\|_{H \rightarrow H} \|\varphi_j\|_H + l_{0_m} \|\varphi_{l_m}\|_H \right) \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda}{\tau} \in Z^+}} \tau |\alpha_m| \left( \sum_{j=1}^r \|B\|_{H \rightarrow H}^{l_m-r} \|R\|_{H \rightarrow H}^{r-j+1} \|\varphi_j\|_H + \sum_{j=r+1}^{l_m} \|B\|_{H \rightarrow H}^{l_m-j} \|C\|_{H \rightarrow H} \|\varphi_j\|_H \right) \\
& + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda}{\tau} \in Z^+}} |\alpha_m| \tau \left( \left\| (I + id_m A) \frac{1}{2} (I + B) \right\|_{H \rightarrow H} \left( \sum_{j=1}^r \|B\|_{H \rightarrow H}^{l_m-r} \|R\|_{H \rightarrow H}^{r-j+1} \|\varphi_j\|_H + \sum_{j=r+1}^{l_m} \|B\|_{H \rightarrow H}^{l_m-j} \|\varphi_j\|_H \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} \left\| (I + id_m A) C \right\|_{H \rightarrow H} \|\varphi_{l_m+1}\|_H \right) + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda}{\tau} \in Z^+}} |\alpha_m| d_m \|\varphi_{l_m}\|_H \\
& + \tau \sum_{k=1}^r \|\psi_{k-\frac{1}{2}}\|_H \frac{\tau}{2} \left( \sum_{j=1}^k \|R\|_{H \rightarrow H}^{k-j+1} \|\varphi_j\|_H + \sum_{j=1}^{k-1} \|R\|_{H \rightarrow H}^{k-j} \|\varphi_j\|_H \right) \\
& + \tau \sum_{k=r+1}^N \|\psi_{k-\frac{1}{2}}\|_H \frac{\tau}{2} \|I + B\|_{H \rightarrow H} \sum_{j=1}^r \|B\|_{H \rightarrow H}^{k-1-r} \|R\|_{H \rightarrow H}^{r-j+1} \|\varphi_j\|_H \\
& + \tau \sum_{k=r+1}^N \|\psi_{k-\frac{1}{2}}\|_H \frac{\tau}{2} \left( \sum_{j=r+1}^k \|B\|_{H \rightarrow H}^{k-j} \|C\|_{H \rightarrow H} \|\varphi_j\|_H + \sum_{j=r+1}^{k-1} \|B\|_{H \rightarrow H}^{k-1-j} \|C\|_{H \rightarrow H} \|\varphi_j\|_H \right) + \|\varphi\|_H \Big\} \\
& \leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p, \psi) \left\{ \max_{1 \leq j \leq N} \|\varphi_j\|_H \sum_{r\tau \geq \lambda_m} |\alpha_m| (l_m + 1) \tau + \max_{1 \leq j \leq N} \|\varphi_j\|_H \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda}{\tau} \in Z^+}} \tau |\alpha_m| l_m \right. \\
& \quad \left. + \max_{1 \leq j \leq N} \|\varphi_j\|_H \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda}{\tau} \in Z^+}} |\alpha_m| \tau l_m + \max_{1 \leq j \leq N} \|\varphi_j\|_H \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda}{\tau} \in Z^+}} |\alpha_m| \frac{\tau}{2} + T \max_{1 \leq j \leq N} \|\varphi_j\|_H \tau \sum_{k=1}^r \|\psi_{k-\frac{1}{2}}\|_H \right\} \\
& \quad + T \max_{1 \leq j \leq N} \|\varphi_j\|_H \tau \sum_{k=r+1}^N \|\psi_{k-\frac{1}{2}}\|_H + \|\varphi\|_H \\
& \leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \psi) \left\{ \max_{1 \leq j \leq N} \|\varphi_j\|_H T \left( \sum_{r\tau \geq \lambda_m} |\alpha_m| + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda}{\tau} \in Z^+}} |\alpha_m| + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda}{\tau} \in Z^+}} |\alpha_m| \right) \right. \\
& \quad \left. + \max_{1 \leq j \leq N} \|\varphi_j\|_H \tau \left( \sum_{r\tau \geq \lambda_m} |\alpha_m| + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda}{\tau} \in Z^+}} |\alpha_m| \right) + T \max_{1 \leq j \leq N} \|\varphi_j\|_H \tau \sum_{k=1}^N \|\psi_{k-\frac{1}{2}}\|_H + \|\mu\|_H \right\} \\
& \leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \psi) \left\{ T \max_{1 \leq j \leq N} \|\varphi_j\|_H + \|\varphi\|_H \right\}.
\end{aligned}$$

(5.1) fark şeması için (5.4) kestiriminin ispatı son kestirime ve (5.7)

kestirimine bağlıdır.

Şimdi, (5.5) kestirimi elde edilecektir. (5.5) kestiriminin ispatı için

(i)  $k=1, \dots, r$  ve (ii)  $k=r+1, \dots, N$  durumları ayrı ayrı incelenmelidir.

Önce  $1 \leq k \leq r$  durumunu ele alalım. Bu durumda (4.11) formülünü kullanarak

$$\max_{1 \leq k \leq r} \|Au_k\|_H \leq \|RA\xi\|_H + 2T \max_{2 \leq k \leq N} \left\| \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\tau} \right\|_H + 2\|\varphi_1\|_H \quad (5.9)$$

elde edilir.  $\|RA\xi\|_H$  için de kestirim bulunmalıdır.

$$\begin{aligned} u_0 &= \sum_{r\tau \geq \lambda_m} \alpha_m \left( (I + il_{0_m} A)u_{l_m} - il_{0_m} \varphi_{l_m} \right) + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} \alpha_m u_{l_m} \\ &+ \sum_{\substack{r\tau < \lambda \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \notin Z^+}} \alpha_m \left( (I + id_m A) \frac{1}{2} (u_{l_m} + u_{l_m+1}) - id_m \varphi_{l_m} \right) + \tau \sum_{k=1}^N \psi_{k-\frac{1}{2}} \left( \frac{u_k + u_{k-1}}{2} \right) + \varphi \end{aligned}$$

şartını ve (4.11) formülünü kullanarak

$$\begin{aligned} RA\xi &= T_\tau \left\{ \sum_{r\tau \geq \lambda_m} \alpha_m (I + il_{0_m} A) R \left( \sum_{j=2}^{l_m} R^{l_m-j+1} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) + \varphi_{l_m} - R^{l_m} \varphi_1 \right) \right. \\ &- i \sum_{r\tau \geq \lambda_m} \alpha_m l_{0_m} RA\varphi_{l_m} + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} \alpha_m R \left( \sum_{j=2}^r B^{l_m-r} R^{r-j+1} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) - R^r \varphi_1 \right) \\ &+ \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} \alpha_m R \left( \sum_{j=r+1}^{l_m} B^{l_m-j+1} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) + \varphi_{l_m} \right) \\ &+ \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \notin Z^+}} \alpha_m (I + id_m A) \frac{1}{2} R \left( \left( \sum_{j=2}^r B^{l_m-r} R^{r-j+1} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) - R^r \varphi_1 \right) \right. \\ &+ \left. \sum_{j=r+1}^{l_m} B^{l_m-j+1} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) + \varphi_{l_m} \right) + \left( \sum_{j=2}^r B^{l_m+1-r} R^{r-j+1} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) - R^r \varphi_1 \right. \\ &+ \left. \left. \sum_{j=r+1}^{l_m+1} B^{l_m-j+2} (\varphi_{j-1} - \varphi_j) + \varphi_{l_m+1} \right) \right) - i \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} \alpha_m d_m AR\varphi_{l_m} \\ &+ AR \left( \sum_{k=1}^r \psi_{k-\frac{1}{2}} \frac{\tau}{2} \left( \sum_{j=1}^k R^{k-j+1} \varphi_j + \sum_{j=1}^{k-1} R^{k-j} \varphi_j \right) \right) \\ &+ \sum_{k=r+1}^N \psi_{k-\frac{1}{2}} \frac{\tau}{2} (I + B) \sum_{j=1}^r B^{k-1-r} R^{r-j+1} \varphi_j \end{aligned}$$

$$+ \sum_{k=r+1}^N \psi_{k-\frac{1}{2}} \frac{\tau}{2} \left( \sum_{j=r+1}^k B^{k-j} C \varphi_j + \sum_{j=r+1}^{k-1} B^{k-1-j} C \varphi_j \right) + RA\varphi \Big\}$$

elde edilir. Bu da,

$$\begin{aligned} & \|RA\xi\|_H \leq \|T_\tau\|_{H \rightarrow H} \left\{ \sum_{r\tau \geq \lambda_m} |\alpha_m| \|(I + iI_{0_m} A)R\|_{H \rightarrow H} \right. \\ & \left( \sum_{j=2}^{l_m} \|R\|_{H \rightarrow H}^{l_m-j+1} \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H + \|\varphi_{l_m}\|_H + \|R\|_{H \rightarrow H}^{l_m} \|\varphi_1\|_H \right) + \sum_{r\tau \geq \lambda_m} |\alpha_m| \|I_{0_m} AR\|_{H \rightarrow H} \|\varphi_{l_m}\|_H \\ & + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in \mathbb{Z}^+}} |\alpha_m| \|R\|_{H \rightarrow H} \left( \sum_{j=2}^r \|B\|_{H \rightarrow H}^{l_m-r} \|R\|_{H \rightarrow H}^{r-j+1} \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H + \|R\|_{H \rightarrow H}^r \|\varphi_1\|_H \right) \\ & + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in \mathbb{Z}^+}} |\alpha_m| \|R\|_{H \rightarrow H} \left( \sum_{j=r+1}^{l_m} \|B\|_{H \rightarrow H}^{l_m-j+1} \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H + \|\varphi_{l_m}\|_H \right) \\ & + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in \mathbb{Z}^+}} |\alpha_m| \|(I + i d_m A)R\|_{H \rightarrow H} \frac{1}{2} \left( \sum_{j=2}^r \|B\|_{H \rightarrow H}^{l_m-r} \|R\|_{H \rightarrow H}^{r-j+1} \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H \right. \\ & \left. + \|R\|_{H \rightarrow H}^r \|\varphi_1\|_H + \sum_{j=r+1}^{l_m} \|B\|_{H \rightarrow H}^{l_m-j+1} \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H + \|\varphi_{l_m}\|_H \right) \\ & + \left( \sum_{j=2}^r \|B\|_{H \rightarrow H}^{l_m+1-r} \|R\|_{H \rightarrow H}^{r-j+1} \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H + \|R\|_{H \rightarrow H}^r \|\varphi_1\|_H \right. \\ & \left. + \sum_{j=r+1}^{l_m+1} \|B\|_{H \rightarrow H}^{l_m-j+2} \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H + \|\varphi_{l_m+1}\|_H \right) + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in \mathbb{Z}^+}} |\alpha_m| \|d_m AR\|_{H \rightarrow H} \|\varphi_{l_m}\|_H \\ & + \|AR\|_{H \rightarrow H} \left( \sum_{k=1}^r \|\psi_{k-\frac{1}{2}}\|_H \frac{\tau}{2} \left( \sum_{j=1}^k \|R\|_{H \rightarrow H}^{k-j+1} \|\varphi_j\|_H + \sum_{j=1}^{k-1} \|R\|_{H \rightarrow H}^{k-j} \|\varphi_j\|_H \right) \right. \\ & + \sum_{k=r+1}^N \|\psi_{k-\frac{1}{2}}\|_H \frac{\tau}{2} \|I + B\|_{H \rightarrow H} \sum_{j=1}^r \|B\|_{H \rightarrow H}^{k-1-r} \|R\|_{H \rightarrow H}^{r-j+1} \|\varphi_j\|_H \\ & + \sum_{k=r+1}^N \|\psi_{k-\frac{1}{2}}\|_H \frac{\tau}{2} \left( \sum_{j=r+1}^k \|B\|_{H \rightarrow H}^{k-j} \|C\|_{H \rightarrow H} \|\varphi_j\|_H \right. \\ & \left. + \sum_{j=r+1}^{k-1} \|B\|_{H \rightarrow H}^{k-1-j} \|C\|_{H \rightarrow H} \|\varphi_j\|_H \right) + \|R\|_{H \rightarrow H} \|A\varphi\|_H \Big\} \\ & \leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p, \psi) \left\{ \sum_{r\tau \geq \lambda_m} |\alpha_m| \left( \sum_{j=2}^{l_m} \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H + \|\varphi_{l_m}\|_H + \|\varphi_1\|_H \right) + \sum_{r\tau \geq \lambda_m} |\alpha_m| \|\varphi_{l_m}\|_H \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in \mathbb{Z}^+}} |\alpha_m| \left( \sum_{j=2}^r \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H + \|\varphi_1\|_H \right) + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in \mathbb{Z}^+}} |\alpha_m| \left( \sum_{j=r+1}^{l_m} \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H + \|\varphi_{l_m}\|_H \right) \\
& + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in \mathbb{Z}^+}} |\alpha_m| \frac{1}{2} \left( \left( \sum_{j=2}^r \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H + \|\varphi_1\|_H + \sum_{j=r+1}^{l_m} \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H + \|\varphi_{l_m}\|_H \right) \right. \\
& \left. + \left( \sum_{j=2}^r \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H + \|\varphi_1\|_H + \sum_{j=r+1}^{l_m+1} \|\varphi_{j-1} - \varphi_j\|_H + \|\varphi_{l_m+1}\|_H \right) \right) + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in \mathbb{Z}^+}} |\alpha_m| \|\varphi_{l_m}\|_H \\
& + \sum_{k=1}^r \|\psi_{k-\frac{1}{2}}\|_H \frac{\tau}{2} \left( \sum_{j=1}^k \|\varphi_j\|_H + \sum_{j=1}^{k-1} \|\varphi_j\|_H \right) + \tau \sum_{k=r+1}^N \|\psi_{k-\frac{1}{2}}\|_H \sum_{j=1}^r \|\varphi_j\|_H \\
& + \sum_{k=r+1}^N \|\psi_{k-\frac{1}{2}}\|_H \frac{\tau}{2} \left( \sum_{j=r+1}^k \|\varphi_j\|_H + \sum_{j=r+1}^{k-1} \|\varphi_j\|_H \right) + \|A\varphi\|_H \} \\
& \leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p, \psi) \left[ \|A\varphi\|_H + \|\varphi_k\|_H + T \max_{2 \leq k \leq N} \left\| \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\tau} \right\|_H \right]
\end{aligned}$$

kestirimini netice verir.  $\varphi_k = \varphi_1 + \sum_{j=2}^k (\varphi_j - \varphi_{j-1})$  bağıntısı kullanılarak

$$\|RA\xi\|_H \leq C_1(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \psi) \left[ \|A\varphi\|_H + \|\varphi\|_H + T \max_{2 \leq k \leq N} \left\| \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\tau} \right\|_H \right] \quad (5.10)$$

elde edilir. Sonuçta (5.9) ve (5.10) kestirimlerini kullanarak

$$\max_{1 \leq k \leq r} \|Au_k\|_H \leq C_2(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \psi) \left[ \|A\varphi\|_H + \|\varphi_1\|_H + T \max_{2 \leq k \leq N} \left\| \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\tau} \right\|_H \right] \quad (5.11)$$

kestirimi bulunur.

Daha sonra (5.11) kestirimi,  $i \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} = \varphi_k - Au_k = \varphi_1 - \sum_{j=2}^k (\varphi_{j-1} - \varphi_j) - Au_k$

bağıntısı ve üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \max_{1 \leq k \leq r} \left\| \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} \right\|_H + \max_{1 \leq k \leq r} \|Au_k\|_H \\
& \leq C_3(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \psi) \left[ \|A\varphi\|_H + \|\varphi_1\|_H + T \max_{2 \leq k \leq N} \left\| \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\tau} \right\|_H \right] \quad (5.12)
\end{aligned}$$

kestirimi sağlanır.

(ii) Şimdi,  $k = r+1, \dots, N$  durumunu ele alalım. (4.11) formülünü kullanarak

$$\max_{r+1 \leq k \leq N} \left\| A \frac{u_k + u_{k-1}}{2} \right\|_H \leq \|RA\xi\|_H + 3T \max_{2 \leq k \leq N} \left\| \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\tau} \right\|_H + 3\|\varphi_1\|_H \quad (5.13)$$

elde edilir.

Sonuçta (5.10) ve (5.13) kestirimleri kullanılarak

$$\max_{r+1 \leq k \leq N} \left\| A \frac{u_k + u_{k-1}}{2} \right\|_H \leq C_3(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \psi) \left[ \|A\varphi\|_H + \|\varphi_1\|_H + T \max_{2 \leq k \leq N} \left\| \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\tau} \right\|_H \right] \quad (5.14)$$

kestirimi bulunur. Sonra, (5.14) kestirimi,

$$i \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} = \varphi_k - A \frac{u_k + u_{k-1}}{2} = \varphi_1 - \sum_{j=2}^k (\varphi_{j-1} - \varphi_j) - A \frac{u_k + u_{k-1}}{2} \text{ bağıntısı ve üçgen}$$

eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} & \max_{r+1 \leq k \leq N} \left\| \frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} \right\|_H + \max_{r+1 \leq k \leq N} \left\| A \frac{u_k + u_{k-1}}{2} \right\|_H \\ & \leq C_4(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \psi) \left[ \|A\varphi\|_H + \|\varphi_1\|_H + T \max_{2 \leq k \leq N} \left\| \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\tau} \right\|_H \right] \end{aligned} \quad (5.15)$$

kestirimi elde edilir. (5.5) sonucu, (5.12) ve (5.15) kestirimlerinden gelmektedir. Bu da Teorem 5.1 in ispatını tamamlar.

Not etmek gerekir ki, eğer Teorem 5.1 deki kararlılık kestiriminde  $\tau \rightarrow 0$  için limit alınsa integralli, çok noktalı lokal olmayan sınır değer problemi (3.1) in kararlılığı elde edilir.

Gelecek kısımda, soyut Teorem 5.1 iki tane integralli, lokal olmayan sınır değer problemine uygulanacaktır.

## 5.2 Uygulamalar

İlk olarak, tek boyutlu Schrödinger denklemi için integralli, çok noktalı lokal olmayan sınır değer problemi (3.14) ele alınacak. (3.14) problemini de kesikli hale dönüştürmek iki adımda olur. İlk adım 3.4 kısımdaki gibi yapılabilir. İkinci adımda, (3.47) problemi için (5.1)  $r$ -iyileştirilmiş fark şemaları kullanılarak

$$\left\{ \begin{array}{l}
i \frac{u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x)}{\tau} + \frac{A_h^x}{2} (u_k^h(x) + u_{k-1}^h(x)) = \phi_k^h(x), \\
\phi_k^h(x) = f^h(t_k - \frac{\tau}{2}, x), \quad t_k = k\tau, \quad r+1 \leq k \leq N, \quad x \in [0, 1]_h \\
i \frac{u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x)}{\tau} + A_h^x u_k^h(x) = \phi_k^h(x), \\
\phi_k^h(x) = f^h(t_k - \frac{\tau}{2}, x), \quad t_k = k\tau, \quad 1 \leq k \leq r, \quad x \in [0, 1]_h \\
u_0^h(x) = \sum_{r\tau \leq \lambda_m} \alpha_m \left( (I_h + il_{0_m} A_h^x) u_{l_m}^h(x) - il_{0_m} \phi_{l_m}^h(x) \right) + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in \mathbb{Z}^+}} \alpha_m u_{l_m}^h \\
+ \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in \mathbb{Z}^+}} \alpha_m \left( (I_h + id_m A_h^x) \frac{1}{2} (u_{l_m}^h(x) + u_{l_m+1}^h(x)) - id_m \phi_{l_m}^h(x) \right) \\
+ \tau \sum_{k=1}^N \psi_{k-\frac{1}{2}}^h \left( \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} \right) + \phi^h(x), \quad x \in [0, 1]_h
\end{array} \right. \quad (5.16)$$

fark şemaları yazılır.

**Teorem 5.2.**  $\tau$  ve  $|h|$  yeterince küçük sayılar olsun. Eğer

$$\sum_{m=1}^p |\alpha_m| < 1 - \tau \sum_{k=1}^N |\psi_{k-\frac{1}{2}}|$$

ise, (5.16) fark şemalarının çözümü için aşağıdaki

$$\begin{aligned}
\max_{0 \leq k \leq N} \|u_k^h\|_{L_{2h}} &\leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \psi) \left[ \|\phi^h\|_{L_{2h}} + T \max_{1 \leq k \leq N} \|\phi_k^h\|_{L_{2h}} \right], \\
\max_{1 \leq k \leq N} \left\| \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\|_{L_{2h}} &+ \max_{1 \leq k \leq r} \|(u_k^h)_{xx}\|_{L_{2h}} + \max_{r+1 \leq k \leq N} \left\| \frac{(u_k^h)_{xx} + (u_{k-1}^h)_{xx}}{2} \right\|_{L_{2h}} \\
&\leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \psi) \left[ \|( \phi_x^h )_x \|_{L_{2h}} + \|\phi_1^h\|_{L_{2h}} + T \max_{2 \leq k \leq N} \left\| \frac{\phi_k^h - \phi_{k-1}^h}{\tau} \right\|_{L_{2h}} \right]
\end{aligned}$$

kararlılık kestirimleri sağlanır.

Burada  $C(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \psi)$  sabiti  $h$ ,  $\phi^h(x)$  ve  $\phi_k^h(x)$ ,  $1 \leq k \leq N$  den bağımsızdır.

Teorem 5.2 nin ispatı soyut Teorem 5.1 e ve aynı zamanda (2.49) formülüyle  $L_{2h}$  da tanımlı  $A_h^x$  fark operatörünün simetri özelliklerine dayanmaktadır.

İkinci olarak, çok boyutlu Schrödinger denklemi için integralli, çok noktalı lokal olmayan sınır değer problemi (3.15) ele alınacaktır.

(3.15) probleminin de kesikli hale dönüştürülmesi iki adımda olur. İlk adım 3.4 kısmındaki gibi yapılabilir. İkinci adımda, (3.51) problemi için (5.1)  $r$ -iyileştirilmiş fark şemaları kullanılarak

$$\left\{ \begin{array}{l} i \frac{u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x)}{\tau} + \frac{A_h^x}{2} (u_k^h(x) + u_{k-1}^h(x)) = \varphi_k^h(x), \\ \varphi_k^h(x) = f^h(t_k - \frac{\tau}{2}, x), \quad t_k = k\tau, \quad r+1 \leq k \leq N, \quad x \in \tilde{\Omega}_h \\ i \frac{u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x)}{\tau} + A_h^x u_k^h(x) = \varphi_k^h(x), \\ \varphi_k^h(x) = f^h(t_k - \frac{\tau}{2}, x), \quad t_k = k\tau, \quad 1 \leq k \leq r, \quad x \in \tilde{\Omega}_h \\ u_0^h(x) = \sum_{r\tau \geq \lambda_m} \alpha_m \left( (I_h + il_{0_m} A_h^x) u_{l_m}^h(x) - il_{0_m} \varphi_{l_m}^h(x) \right) + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} \alpha_m u_{l_m}^h \\ + \sum_{\substack{r\tau < \lambda_m \\ \frac{\lambda_m}{\tau} \in Z^+}} \alpha_m \left( (I_h + id_m A_h^x) \frac{1}{2} (u_{l_m}^h(x) + u_{l_m+1}^h(x)) - id_m \varphi_{l_m}^h(x) \right) \\ + \tau \sum_{k=1}^N \psi_{k-\frac{1}{2}}^h \left( \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} \right) + \varphi^h(x), \quad x \in \tilde{\Omega}_h \end{array} \right. \quad (5.17)$$

fark şemaları yazılır.

**Teorem 5.3.**  $\tau$  ve  $|h| = \sqrt{h_1^2 + \dots + h_n^2}$  yeterince küçük sayılar olsun. Eğer

$$\sum_{m=1}^p |\alpha_m| < 1 - \tau \sum_{k=1}^N |\psi_{k-\frac{1}{2}}^h|$$

ise, (5.17) fark şemalarının çözümü için aşağıdaki

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq k \leq N} \|u_k^h\|_{L_2(\tilde{\Omega}_h)} &\leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \psi) \left[ \|\varphi^h\|_{L_2(\tilde{\Omega}_h)} + T \max_{1 \leq k \leq N} \|\varphi_k^h\|_{L_2(\tilde{\Omega}_h)} \right], \\ \max_{1 \leq k \leq N} \left\| \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\|_{L_2(\tilde{\Omega}_h)} &+ \max_{1 \leq k \leq r} \sum_{s=1}^n \left\| (u_k^h)_{x_s, x_s, j_s}^- \right\|_{L_2(\tilde{\Omega}_h)} + \max_{r+1 \leq k \leq N} \sum_{s=1}^n \left\| \frac{(u_k^h)_{x_s, x_s, j_s}^- + (u_{k-1}^h)_{x_s, x_s, j_s}^-}{2} \right\|_{L_2(\tilde{\Omega}_h)} \\ &\leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \psi) \left[ \sum_{r=1}^n \left\| (\varphi^h)_{x_r, x_r, j_r}^- \right\|_{L_2(\tilde{\Omega}_h)} + \|\varphi_1^h\|_{L_2(\tilde{\Omega}_h)} + T \max_{2 \leq k \leq N} \left\| \frac{\varphi_k^h - \varphi_{k-1}^h}{\tau} \right\|_{L_2(\tilde{\Omega}_h)} \right] \end{aligned}$$

kararlılık kestirimleri sağlanır.

Burada,  $C(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \psi)$  sabiti  $h$ ,  $\varphi^h(x)$  ve  $\varphi_k^h(x)$ ,  $1 \leq k \leq N$  den bağımsızdır.

Teorem 5.3 ün ispatı soyut Teorem 5.1 e, (2.53) formülüyle  $L_2(\tilde{\Omega}_h)$  da tanımlı  $A_h^x$  fark operatörünün simetri özelliklerine ve aynı zamanda Teorem

2.10 a dayanmaktadır.

### 5.3 Sayısal Sonuçlar

Bu kısımda, Schrödinger denklemi için integralli, çok noktalı lokal olmayan sınır değer probleminin

$$\left\{ \begin{array}{l} i \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + u(t,x) = \exp(it\pi^2) \sin \pi x, \\ 0 < t, x < 1, \\ u(0,x) = \frac{1}{2}u(\frac{1}{2},x) + \frac{1}{3}u(\frac{1}{3},x) + \int_0^1 \frac{1}{12}u(t,x)dt + \varphi(x), \\ \varphi(x) = \left(1 - \frac{1}{2}\exp(\frac{i\pi^2}{2}) - \frac{1}{3}\exp(\frac{i\pi^2}{3}) + \frac{i}{12\pi^2}(1 - \exp(i\pi^2))\right) \sin \pi x, \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1 \end{array} \right. \quad (5.18)$$

(5.1)  $r$ -iyileştirilmiş Crank-Nicholson fark şemaları kullanılarak sayısal çözümleri araştırılacak. Bu problemin tam çözümü

$$u(t,x) = (\exp(it\pi^2))(\sin \pi x)$$

şeklindeir. (5.18) probelminin yaklaşık çözümleri için  $[0,1]_r \times [0,1]_h$  üzerinde (5.1) i uygularsak aşağıdaki  $r$ -iyileştirilmiş Crank-Nicholson fark şemalarını elde ederiz:

$$\left\{ \begin{array}{l} i \frac{u_n^k - u_n^{k-1}}{\tau} - \frac{1}{2} \left( \frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} + \frac{u_{n+1}^{k-1} - 2u_n^{k-1} + u_{n-1}^{k-1}}{h^2} \right) + \frac{1}{2}u_n^k + \frac{1}{2}u_n^{k-1} = f(t_k - \frac{\tau}{2}, x_n), \\ r+1 \leq k \leq N, \quad 1 \leq n \leq M-1, \\ i \frac{u_n^k - u_n^{k-1}}{\tau} - \frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} + u_n^k = f(t_k - \frac{\tau}{2}, x_n), \quad 1 \leq k \leq r, \quad 1 \leq n \leq M-1, \\ u_n^0 = \frac{1}{3}u_n^{[\frac{1}{3\tau}]} + \frac{1}{2}u_n^{[\frac{1}{2\tau}]} + \tau \sum_{k=1}^N \frac{1}{12} \left( \frac{u_n^k + u_n^{k-1}}{2} \right) + \varphi(x_n), \quad 1 \leq n \leq M-1; \\ u_0^k = u_M^k = 0, \quad 0 \leq k \leq N, \\ f(t,x) = \exp(it\pi^2) \sin \pi x, \\ \varphi(x) = \left(1 - \frac{1}{2}\exp(\frac{i\pi^2}{2}) - \frac{1}{3}\exp(\frac{i\pi^2}{3}) + \frac{i}{12\pi^2}(1 - \exp(i\pi^2))\right) \sin \pi x. \end{array} \right. \quad (5.19)$$

Böylelikle  $(N+1) \times (M+1)$  lineer denklem sistemi elde edilmiş olur. Bu lineer denklem sistemi düzenlenerek

$$\begin{cases} AU_{n+1} + BU_n + CU_{n-1} = D\phi_n, & 1 \leq n \leq M-1, \\ U_0 = \tilde{0}, & U_M = \tilde{0} \end{cases}$$

matris formunda yazılabilir. Burada

$$A = \begin{bmatrix} 0 & d & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & d & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & a & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} e & f & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & f & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & f & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b & c & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b & \dots & c & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & b & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b & c \\ \left[ 1 - \frac{\tau}{24} \quad -\frac{\tau}{12} \quad -\frac{\tau}{12} \quad \dots \quad \dots \quad \frac{-1}{3} - \frac{\tau}{12} \quad \dots \quad \dots \quad \frac{-1}{2} - \frac{\tau}{12} \quad \dots \quad \dots \quad -\frac{\tau}{12} \quad -\frac{\tau}{24} \right] \end{bmatrix}$$

ve

$$C = A, \quad D = I_{(N+1) \times (N+1)}, \quad U_s = \begin{bmatrix} U_s^0 \\ U_s^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ U_s^{N-1} \\ U_s^N \end{bmatrix}, \quad s = n-1, n, n+1.$$

Ayrıca,

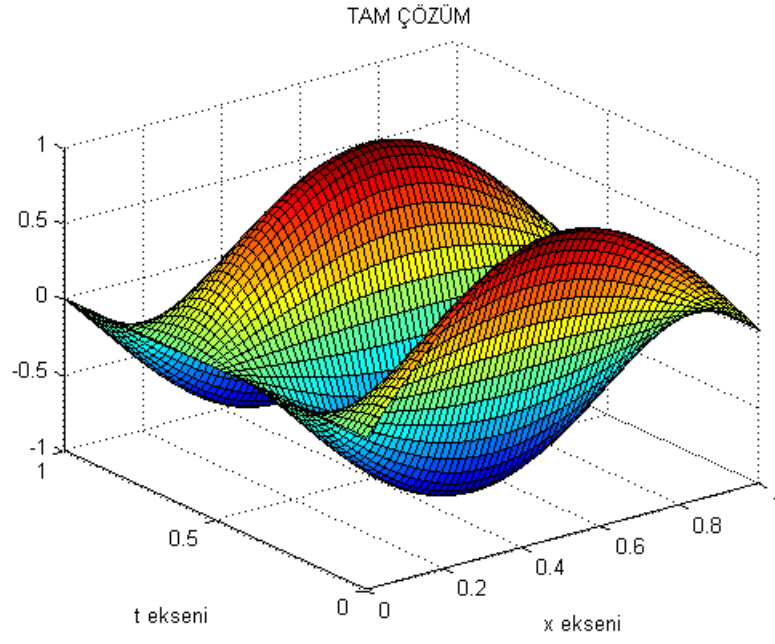
$$a = -\frac{1}{2h^2}, \quad b = \left( -\frac{i}{\tau} + \frac{1}{h^2} + \frac{1}{2} \right), \quad c = \frac{i}{\tau} + \frac{1}{h^2} + \frac{1}{2},$$

$$d = -\frac{1}{h^2}, \quad e = -\frac{i}{\tau}, \quad f = \frac{i}{\tau} + \frac{2}{h^2} + 1$$

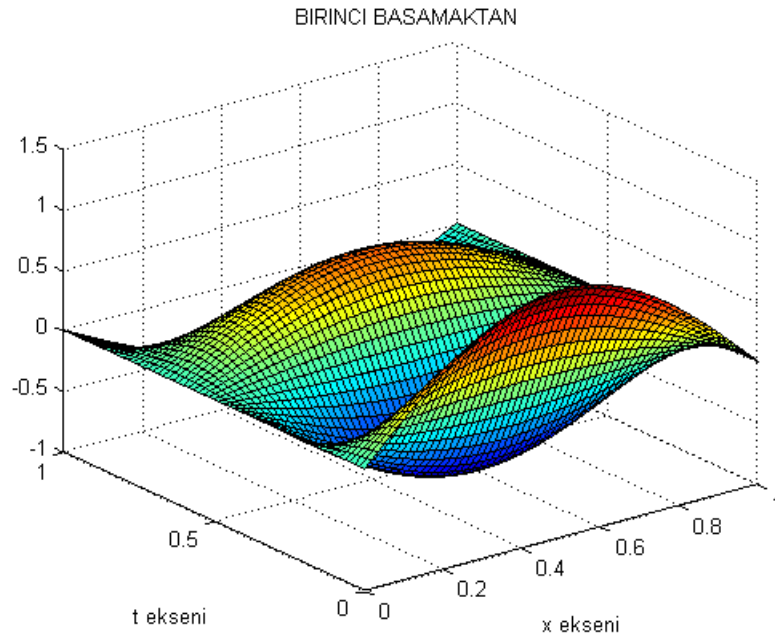
$$\varphi_n = \begin{bmatrix} \varphi_n^0 \\ \varphi_n^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi_n^N \end{bmatrix}, \quad \varphi_n^k = \begin{cases} \left( 1 - \frac{1}{2} \exp\left(\frac{i\pi^2}{2}\right) - \frac{1}{3} \exp\left(\frac{i\pi^2}{3}\right) + \frac{i}{12\pi^2} (1 - \exp(i\pi^2)) \right) \sin \pi x, & k = 0, \\ f\left(t_k - \frac{\tau}{2}, x_n\right), & 1 \leq k \leq N, \end{cases}$$

şekindedir. Dolayısıyla ikinci mertebeden katsayıları matris olan,  $n$  ye göre fark denklemleri elde edilmiş oldu. Bu fark denklemlerini çözmek için Bölüm 2 deki gibi iyileştirilmiş Gauss eliminasyon yöntemi kullanılacaktır.

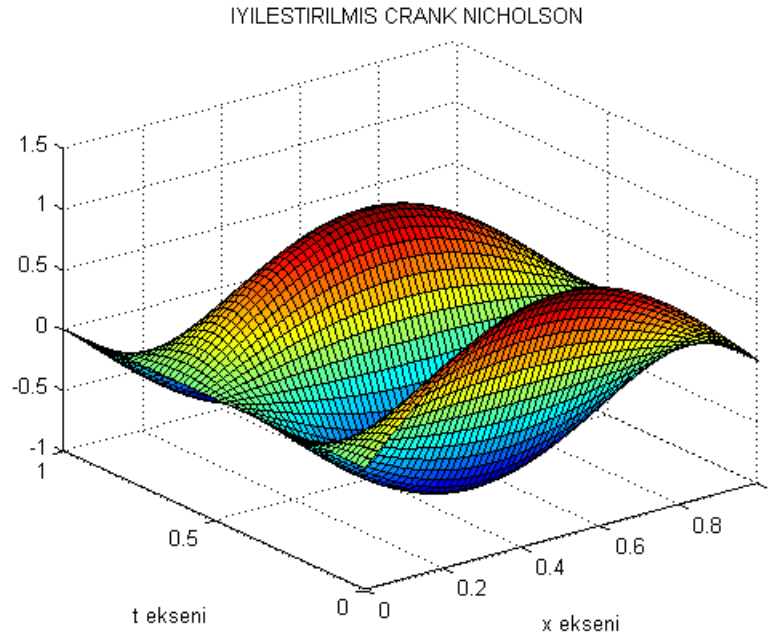
Şimdi, sayısal sonuçları verelim. (5.18) probleminin tam ve yaklaşık çözümlerinin sayısal değerlerini elde etmek için Matlab programlarını (bak Ek 4) kullandık. (5.18) probleminin tam ve yaklaşık çözümleri aşağıdaki şekillerde verilmiştir.



Şekil 5.1. Tam çözüm



Şekil 5.2. Birinci basamaktan doğruluklu fark şeması



Şekil 5.3. İyileştirilmiş Crank-Nicholson fark şemaları

Sayısal sonuçlar farklı  $N=M$  değerleri için verilmiştir. Tam çözüm ile yaklaşık çözümleri karşılaştırabilmek için önce hatalar (2.62) formülüyle hesaplandı.

Tablo 5.1, fark şemalarıyla elde edilen çözümler ile tam çözüm arasındaki hata analizini vermektedir. Tablo 5.1 sırasıyla  $N=M=18$ , 30 ve 60 için oluşturulmuştur.

Tablo 5.1: Hatalar.

Metot	$N=M=18$	$N=M=30$	$N=M=60$
İ.C.N. $r=1$	0.2162	0.0781	0.0271
İ.C.N. $r=2$	0.2704	0.1060	0.0324
İ.C.N. $r=3$	0.3223	0.1344	0.0396
1. b. doğruluklu	0.5745	0.4948	0.3602

İkinci olarak, tam çözüm ile yaklaşık çözümü karşılaştırabilmek için kısmi hatalar (2.63) formülüyle hesaplandı. Tablo 5.2 sırasıyla  $N=M=18$ , 30 ve 60 için oluşturulmuştur.

*Tablo 5.2: Kısmi Hatalar.*

<i>Metot</i>	N=M=18	N=M=30	N=M=60
İ.C.N. r=1	0.3058	0.1104	0.0384
İ.C.N. r=2	0.3824	0.1499	0.0458
İ.C.N. r=3	0.4558	0.1901	0.0560
1. b. doğruluklu	0.8125	0.6998	0.5094

Tablolardan da açık bir şekilde görüldüğü gibi ikinci basamaktan doğruluklu iyileştirilmiş Crank-Nicholson fark şemaları yöntemi birinci basamaktan doğruluklu fark şemasına kıyasla tam çözümlere daha yakın sonuçlar vermektedir.

## SONUÇLAR

Bu çalışmanın esas amacı Schrödinger denklemi için lokal olmayan sınır değer probleminin ve fark denklemlerinin kararlılık kestirimlerini elde etmektir. Yapılan bu çalışmanın sonucunda aşağıdaki orijinal sonuçlar elde edilmiştir:

$H$  Hilbert uzayında  $A$  özeşlenik soyut Schrödinger denklemi için lokal olmayan sınır değer probleminin çözümünün kararlılık kestirimleri elde edilmiştir.

Schrödinger denklemi için iki çeşit lokal olmayan sınır değer problemlerinin kararlılık kestirimleri ispatlanmıştır.

Soyut, Schrödinger denklemi için lokal olmayan sınır değer probleminin yaklaşık çözümlerini bulmak için sırasıyla birinci basamaktan doğruluklu fark şeması, ikinci basamaktan doğruluklu Crank-Nicolson fark şeması ve ikinci basamaktan doğruluklu  $r$ -iyileştirilmiş Crank-Nicolson fark şemaları kurulmuştur.

Bu kurulan fark şemalarının çözümlerinin kararlılık kestirimleri elde edilmiştir.

Schrödinger denklemi için iki çeşit lokal olmayan sınır değer probleminin yaklaşık çözümlerini bulmak için kurulan fark şemalarının kararlılık kestirimleri ispatlanmıştır.

Bu fark şemalarının çözümleri için sayısal sonuçlar alınmıştır.

## KAYNAKLAR

- [1] M.E. Mayfield, Non-reflective boundary conditions for Schrödinger's equation, PhD Thesis, University of Rhode Island, (1989).
- [2] D.G. Gordeziani and G.A. Avalishvili, Time- nonlocal problems for Schrödinger type equations: I. Problems in abstract spaces, *Differential Equations* 41 (5) (2005) 703-711.
- [3] D.G. Gordeziani and G.A. Avalishvili, Time- nonlocal problems for Schrödinger type equations: II. Results for specific problems, *Differential Equations* 41 (6) (2005) 852-859.
- [4] H. Han, J. Jin, X. Wu, A finite difference method for the one-dimensional Schrödinger equation on unbounded domain, *Computers and Mathematics with Applications* 50 (2005) 1345-1362.
- [5] X. Antoine, C. Besse, V. Mouysset, Numerical schemes for the simulation of the two-dimensional Schrödinger equation using non-reflecting boundary conditions, *Mathematics of Computation* 73 (248) (2004) 1779-1799.
- [6] A. Ashyralyev, An estimation of the convergence for the solution of the modified Crank-Nicholson difference schemes for parabolic equations with nonsmooth initial data, *Izv. Akad. Nauk Turkmen. SSR Ser. Fiz.-Tekhn. Khim. Geol. Nauk* (1) (1989) 3-8. (Russian).
- [7] A. Ashyralyev, S. Piskarev, S. Wei, On well-posedness of the difference schemes for abstract parabolic equations in  $L_p([0,1],E)$  spaces, *Numerical Functional Analysis and Optimization* 23 (7-8) (2002) 669-693.
- [8] R. Rannacher, Discretization of the heat equation with singular initial data, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 62 (5) (1982) 346-348.
- [9] Ding Lee, John S. Papadakis, Numerical solutions of the parabolic wave equation: An ordinary-differential-equation approach, *J. Acoust. Soc. Am.* 68 (5), Nov. 1980.
- [10] Ding Lee, George Botseas, John S. Papadakis, Finite difference solution of the parabolic wave equation: An , *J. Acoust. Soc. Am.* 70(3),

Sept. 1981.

- [11] A. Ashyralyev and A. Sirma, Nonlocal Boundary Value Problem for the Schrödinger Equation, Computers and Mathematics with Applications (Basım aşamasında)
- [12] A. Ashyralyev, A. Sirma, A note on the Modified Crank-Nicholson Difference Schemes for the Schrödinger Equation, International Conference on Complex Analysis and Potential Theory: Satellite to the International Congress of Mathematicians, pp.256-271, World Scientific Press, 2007 (ISBN: 10- 981-270-598-8).
- [13] J. Bourgain, Growth of Sobolev Norms in Linear Schrödinger Equations with Quasi-Periodic Potential, Communications in Mathematical Physics 204 (1999), 207-247.
- [14] M. Subaşı, An optimal control problem governed by the potential of a linear Schrödinger equation, Applied Mathematics and Computation 131 (2002), 95-106.
- [15] B. Yıldız and Murat Subaşı, On the optimal control problem for linear Schrödinger equation, Applied Mathematics and Computation 121 (2001) 373-381.
- [16] S.Theodorakis, Fronts in a piecewise linear Schrödinger equation, Physics Letters A 303 (2002) 217-222.
- [17] X. Antoine and C. Besse, Construction, Structure and Asymptotic Approximations of a Microdifferential Transparent Boundary Condition for the Linear Schrödinger Equation, J. Math. Pures Appl. 80, 7(2001) 701-738.
- [18] M. Christ, J. Collinder and T. Tao, Instability of the Periodic Nonlinear Schrödinger Equation, math. AP/0311227 v1 (2003).
- [19] N. Hayashi and P. I. Naumkin, Asymptotic Expansion of Small Analytical Solutions to the Quadratic Nonlinear Schrödinger Equations in two Dimensional Spaces, IJMMS 29:9 (2002) 501-516.
- [20] B. Heimsoeth and H. Lange, Nonlinear and Nonlocal Schrödinger Equations, Mathematisches Institut der Universität Zu Köln, Weyertal 86-90.
- [21] J. Chen and B. Guo, Strong Instability of Standing Waves for a

- nonlocal Schrödinger equation, *Physica D* 227 (2007) 142-148.
- [22] V. Bisognin and O. Villagran, On the Unique Continuation Property for the Higher Order Nonlinear Schrödinger Equation With Constant Coefficients, *Turk J Math* 31 (2007) 265-302.
- [23] N. Hayashi, K. Nakamitsu and M. Tsutsumi, On Solutions of the Initial Value Problem for the Nonlinear Schrödinger Equations in One Space Dimension, *Math Z.* 192 (1986) 637-650.
- [24] M. C. Yalabık and M. İhsan Ecemis, Numerical Implementation of Absorbing and Injecting Boundary Conditions for the Time-Dependent Schrödinger Equation, *Phys. Rev. B* 51 (1995) 2082-2086.
- [25] H. Taşeli, The Influence of the Boundedness of Polynomial Potentials on the Spectrum of the Schrödinger Equation, *Journal of Computational Physics* 101 (1992) 252-255.
- [26] H. Taşeli, On the Numerical Solution of the Schrödinger Equation, *Bulletin of the Technical University of Istanbul* 48 (1995) 159-163.
- [27] M. Subasi and B. Yıldız, Numerical solution and convergence speed of variational formulation for linear Schrödinger equation, *Turk, J. Math.*, 26 (2002) 397-420.

## ÖZGEÇMİŞ

Ali SIRMA, 1971 yılında Amasya da doğdu. Dört yaşlarındayken ailesiyle İstanbul a taşındı. İlk ve orta öğretimini İstanbul da tamamladıktan sonra 1995 de evlendi ve 1997 de Boğaziçi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü bitirdi. Aynı bölümde 1998-2000 arasında asistan olarak çalıştı. Daha sonra Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisansı bitirdi. Üç yaşlarında bir kızı vardır.

## EKLER

Bu ekler kısmında daha önceki bölümlerde verdiğimiz sayısal örneklerin matlab programları verilecektir. Bu matlab programları yazmak için Matlab 7.01 sürümü kullanılmıştır. Daha alt sürümlerde grafik çiziminde problem yaşanabilir.

### Ek 1.

#### Birinci Basamaktan Doğruluklu Fark Şeması (2.59) için Matlab Programı

```
function [table,es,p]=first order(N,M)
if nargin<1; N= 18 ; M= 18; end;
close; close;
h=1/M; tau=1/N;
a=-1/(h^2);
c=i/tau+2/(h^2)+1;
b=-i/tau;
A=zeros(N+1,N+1) ;
for k=1:N;
A(k,k+1)=a;
end;
B=zeros(N+1,N+1);
for m=1:N;
B(m,m)=b; B(m,m+1)=c;
B(N+1,1)=1; B(N+1,N/3+1)=-1/3; B(N+1,N/2+1)=-1/2;
end;
C=A;
D=zeros(N+1,N+1);
for k=1:N+1;
D(k,k)=1;
end;
fii=zeros(N+1,M);
for k=1:N+1;
```

```

for j=1:M-1;
fii(k,j)=exp(i*(k*tau)*(pi^2)/4)*((j*h)^2-
2)*cos((pi/2)*(j*h))+2*pi*(j*h)*sin((pi/2)*(j*h));
fii(N+1,j)=rox(j*h);
end;
end;
alpha{1}=zeros(N+1,N+1);
betha{1}=zeros(N+1,1);
for j=1:M-1;
Q=inv(B+C*alpha{j});
alpha{j+1}=-Q*A;
betha{j+1}=Q*(D*(fii(:,j))-(C*betha{j}));
end;
U=zeros(N+1,M);
for j=M-1:-1:1;
U(:,j)=alpha{j+1}*U(:,j+1)+betha{j+1};
end;
for Z=1:M ; p(:,Z+1)=U(:,Z);
end;
%%\%\%\%\%\%'EXACT SOLUTION OF THIS PDE' \%\%\%\%\%\%\%\%\%
for j=1:M+1;
for k=1:N+1;
t=(k-1)*tau;
x=(j-1)*h;
es(k,j)=exp(i*t*(pi^2)/4)*(x^2)*cos((pi/2)*x);
end;
end;
%%\%\% ERROR ANALYSIS OF GENERAL SOL OF THE DIFF SCHEME %
for k=1:N;
for n=1:M;
diff(k,n)=((abs(p(k,n))-es(k,n)))^2)*h;
end;
end;
for s=1:N;

```



### Crank-Nicholson Fark Şeması (2.60) için Matlab Programı

```

function [table,es,p]=Crank-Nicholson(N,M)
if nargin<1; N= 18 ; M= 18; end;
close; close;
h=1/M; tau=1/N;
a=-1/(2*(h^2));
b=-i/tau+1/(h^2)+1/2;
c=i/tau+1/(h^2)+1/2;
A=zeros(N+1,N+1) ;
for k=1:N;
A(k,k)=a; A(k,k+1)=a;
end;
B=zeros(N+1,N+1);
for m=1:N;
B(m,m)=b; B(m,m+1)=c;
end;
B(N+1,1)=1; B(N+1,N/3+1)=-1/3; B(N+1,N/2+1)=-1/2;
end;
C=A;
D=zeros(N+1,N+1) ;
for k=1:N+1;
D(k,k)=1;
end;
fii=zeros(N+1,M);
for k=1:N+1;
for j=1:M-1;
fii(k,j)=exp(i*(k*tau-tau/2)*(pi^2)/4)*(((j*h)^2-
2)*cos((pi/2)*(j*h))+2*pi*(j*h)*sin((pi/2)*(j*h)));
fii(N+1,j)=roxx(j*h);
end;
end;
alpha{1}=zeros(N+1,N+1);
betha{1}=zeros(N+1,1);

```

```

    for j=1:M-1;
    Q=inv(B+C*alpha{j});
    alpha{j+1}=-Q*A;
    betha{j+1}=Q*(D*(fii(:,j))-(C*betha{j}));
    end;
U=zeros(N+1,M);
    for j=M-1:-1:1;
    U(:,j)=alpha{j+1}*U(:,j+1)+betha{j+1};
end;
for Z=1:M ; p(:,Z+1)=U(:,Z);
end;
    %%\%%\%%\%%\%%'EXACT SOLUTION OF THIS PDE' \%%\%%\%%\%%\%%\%%\%%
for j=1:M+1;
    for k=1:N+1;
    t=(k-1)*tau;
    x=(j-1)*h;
    es(k,j)=exp(i*t*(pi^2)/4)*(x^2)*cos((pi/2)*x);
    end;
end;
    %% ERROR ANALYSIS OF GENERAL SOL OF THE DIFF SCHEME %%\%%\
for k=1:N;
    for n=1:M;
    diff(k,n)=((abs(p(k,n))-es(k,n)))^2)*h;
    end;
end;
for s=1:N;
    diffsum(s)=sum(diff(s,:));
end;
for s=1:N;
    kare(s)=diffsum(s)^0.5;
end;
Err=max(kare)
for k=1:N;
    for n=1:M;

```

```

        diff(k,n)=((abs(es(k,n)))^2)*h;
    end; end;
for s=1:N;
    diffsum(s)=sum(diff(s,:));
end;
for s=1:N;
    masa(s)=diffsum(s)^0.5;
end;
Relerr=(Err/max(masa))
%%\%%\%%\%%\%%GRAPH OF THE SOLUTION \%%\%%\%%\%%\%%\%%\%%
[xler,tler]=meshgrid(0:h:1, 0:tau:1);
figure;
surf(xler,tler,es);
title('TAM ÇÖZÜM');
rotate3d;
XLabel('x eksen'); YLabel('t eksen');
figure; surf(xler,tler,p);
title('CRANK NICHOLSON');
rotate3d ;
XLabel('x eksen'); YLabel('t eksen');
function rx=rox(x)
    rx=(1-(1/2)*exp(i*(pi^2)/8)-(1/3)*exp(i*(pi^2)/12))*(x^2)*cos((pi/2)*x);

```

## Ek 2.

### Birinci Basamaktan Doğruluklu Fark Şeması (3.56) için Matlab Programı

```

function [table,es,p]=firstorder(N,M)
    if nargin<1; N= 18 ; M= 18;
    end;
close; close;
h=1/M; tau=1/N;
a=-1/(h^2);
c=i/tau+2/(h^2)+1;
b=-i/tau;

```

```

A=zeros(N+1,N+1) ;
  for k=1:N;
A(k,k+1)=a;
end;
B=zeros(N+1,N+1);
for m=1:N;
B(m,m)=b; B(m,m+1)=c;
for k=2:N;
B(N+1,1)=1-tau/12;B(N+1,k)=-tau/12;
end;
B(N+1,N/3+1)=-((1/3+ tau/12)); B(N+1,(N/2+1))=-((1/2+ tau/12));
end;
C=A;
D=zeros(N+1,N+1);
for k=1:N+1;
D(k,k)=1;
end;
fii=zeros(N+1,M);
for k=1:N+1;
for j=1:M-1;
  fii(k,j)=exp(i*(k*tau)*(pi^2)/4)*(((j*h)^2-
2)*cos((pi/2)*(j*h))+2*pi*(j*h)*sin((pi/2)*(j*h)));
fii(N+1,j)=rox(j*h);
end; end;
alpha{1}=zeros(N+1,N+1);
betha{1}=zeros(N+1,1);
  for j=1:M-1;
    Q=inv(B+C*alpha{j});
    alpha{j+1}=-Q*A;
    betha{j+1}=Q*(D*(fii(:,j))-(C*betha{j}));
  end;
U=zeros(N+1,M);
for j=M-1:-1:1;
U(:,j)=alpha{j+1}*U(:,j+1)+betha{j+1};

```

```

end;
for Z=1:M ; p(:,Z+1)=U(:,Z);
end;
%%\%\%\%\%'EXACT SOLUTION OF THIS PDE' \%\%\%\%\%\%\%\%\%\%
for j=1:M+1;
for k=1:N+1;
t=(k-1)*tau;
x=(j-1)*h;
es(k,j)=exp(i*t*(pi^2)/4)*(x^2)*cos((pi/2)*x);
end;
end;
%% ERROR ANALYSIS OF GENERAL SOL OF THE DIFF SCHEME \%\%\%
for k=1:N;
for n=1:M;
diff(k,n)=((abs(p(k,n)-es(k,n)))^2)*h;
end;
end;
for s=1:N;
diffsum(s)=sum(diff(s,:));
end;
for s=1:N;
kare(s)=diffsum(s)^0.5;
end;
Err=max(kare)
for k=1:N;
for n=1:M;
diff(k,n)=((abs(es(k,n)))^2)*h;
end;
end;
for s=1:N;
diffsum(s)=sum(diff(s,:));
end;
for s=1:N;
masa(s)=diffsum(s)^0.5;

```



```

B(N+1,k)=-tau/12;
end;
B(N+1,1)=(1-tau/24);B(N+1,N/3+1)=-((1/3+ tau/12)); B(N+1,N/2+1)=-((1/2+
tau/12));
B(N+1,N+1)=- tau/24;
end;
C=A;
D=zeros(N+1,N+1) ;
for k=1:N+1;
D(k,k)=1;
end;
fii=zeros(N+1,M);
for k=1:N+1;
for j=1:M-1;
    fii(k,j)=exp(i*(k*tau-tau/2)*(pi^2)/4)*(((j*h)^2-
2)*cos((pi/2)*(j*h))+2*pi*(j*h)*sin((pi/2)*(j*h)));
fii(N+1,j)=roxx(j*h);
end;
end;
alpha{1}=zeros(N+1,N+1);
    betha{1}=zeros(N+1,1);
    for j=1:M-1;
Q=inv(B+C*alpha{j});
    alpha{j+1}=-Q*A;
    betha{j+1}=Q*(D*(fii(:,j))-(C*betha{j}));
    end;
U=zeros(N+1,M);
    for j=M-1:-1:1;
        U(:,j)=alpha{j+1}*U(:,j+1)+betha{j+1};
    end;
for Z=1:M ; p(:,Z+1)=U(:,Z);
end;
%%\%%\%%\%'EXACT SOLUTION OF THIS PDE' \%%\%%\%%\%%\%%\%%\%%\%%\%%\%%
for j=1:M+1;

```



```

surf(xler,tler,es);
title('TAM ÇÖZÜM');
rotate3d;
XLabel('x eksen'); YLabel('t eksen');
figure; surf(xler,tler,p);
title('CRANK NICHOLSON');
rotate3d ;
XLabel('x eksen'); YLabel('t eksen');
function rx=rox(x)
    rx=(1-(1/2)*exp(i*(pi^2)/8)-(1/3)*exp(i*(pi^2)/12)+(i/(3*(pi^2)))*
exp(i*(pi^2)/4)-1))*x^2*cos((pi/2)*x);

```

### Ek 3.

#### İyileştirilmiş Crank-Nicholson Fark Şeması (4.22) için Matlab Programı

```

function [table,es,p]=modified(N,M)
if nargin<1; N= 60 ; M= 60; end;
close; close;
h=1/M; tau=1/N;
a=-1/(2*(h^2));
b=-(i/tau)+1/(h^2)+1/2;
c=(i/tau)+1/(h^2)+1/2;
f=i/tau+2/(h^2)+1; d=-1/(h^2); e=-i/tau;
for r=1;
A=zeros(N+1,N+1) ;
for k=r+1:N;
A(k,k)=a; A(k,k+1)=a;
end;
for k=1:r;
A(k,k+1)=d;
end;
B=zeros(N+1,N+1);
for m=r+1:N;
B(m,m)=b; B(m,m+1)=c;

```

```

end;
for m=1:r;
B(m,m)=e; B(m,m+1)=f;
  B(N+1,1)=1; B(N+1,N/2+1)=-1/2; B(N+1,N/3+1)=-1/3;
end;
end;
C=A;
D=zeros(N+1,N+1) ;
for k=1:N+1;
D(k,k)=1;
end;
fii=zeros(N+1,M);
for k=1:N+1;
for j=1:M-1;
fii(k,j)=exp(i*(k*tau-tau/2)*((pi)^2))*sin((pi)*(j*h));
fii(N+1,j)=roo(j*h);
end;
end;
alpha{1}=zeros(N+1,N+1);
  betha{1}=zeros(N+1,1);
  for j=1:M-1;
Q=inv(B+C*alpha{j});
  alpha{j+1}=-Q*A;
  betha{j+1}=Q*(D*(fii(:,j))-(C*betha{j}));
  end;
U=zeros(N+1,M);
  for j=M-1:-1:1;
  U(:,j)=alpha{j+1}*U(:,j+1)+betha{j+1};
end;
for Z=1:M ; p(:,Z+1)=U(:,Z);
end;
%%\%\%\%\%'EXACT SOLUTION OF THIS PDE' \%\%\%\%\%\%\%\%
for j=1:M+1;
  for k=1:N+1;

```



```

title('TAM ÇÖZÜM');
rotate3d;
xlabel('x eksen'); ylabel('t eksen');
figure; surf(xler,tler,p);
title('İYİLEŞTİRİLMİŞ CRANK NICHOLSON');
rotate3d ;
xlabel('x eksen'); ylabel('t eksen');
function rx=rox(x)
rx=(1-(1/2)*exp(i*((pi)^2)/2) -(1/3)*exp(i*((pi)^2)/3))*sin((pi)*x);

```

## Ek 4

### İyileştirilmiş Crank-Nicholson Fark Şeması (5.19) için Matlab Programı

```

function [table,es,p]=modified(N,M)
if nargin<1; N= 60 ; M= 60; end;
close; close;
h=1/M; tau=1/N;
a=-1/(2*(h^2));
b=-(i/tau)+1/(h^2)+1/2;
c=(i/tau)+1/(h^2)+1/2;
f=i/tau+2/(h^2)+1; d=-1/(h^2); e=-i/tau;
for r=2;
A=zeros(N+1,N+1) ;
for k=r+1:N;
A(k,k)=a; A(k,k+1)=a;
end;
for k=1:r;
A(k,k+1)=d;
end;
B=zeros(N+1,N+1);
for m=r+1:N;
B(m,m)=b; B(m,m+1)=c;
end;
for m=1:r;

```

```

B(m,m)=e; B(m,m+1)=f;
for k=2:N;
B(N+1,k)=-tau/12;
end;
B(N+1,1)=(1-tau/24);B(N+1,N/3+1)=-(1/3+ tau/12); B(N+1,N/2+1)=-(1/2+
tau/12);
B(N+1,N+1)=- tau/24;
end;
end;
C=A;
D=zeros(N+1,N+1) ;
for k=1:N+1;
D(k,k)=1;
end;
fii=zeros(N+1,M);
for k=1:N+1;
for j=1:M-1;
fii(k,j)=exp(i*(k*tau-tau/2)*((pi)^2))*sin((pi)*(j*h));
fii(N+1,j)=rox(j*h);
end;
end;
alpha{1}=zeros(N+1,N+1);
  betha{1}=zeros(N+1,1);
  for j=1:M-1;
Q=inv(B+C*alpha{j});
  alpha{j+1}=-Q*A;
  betha{j+1}=Q*(D*(fii(:,j))-(C*betha{j}));
  end;
U=zeros(N+1,M);
  for j=M-1:-1:1;
  U(:,j)=alpha{j+1}*U(:,j+1)+betha{j+1};
end;
for Z=1:M ; p(:,Z+1)=U(:,Z);
end;

```

```

%%\%%\%%\%%\%'EXACT SOLUTION OF THIS PDE'\%%\%%\%%\%%\%%\%%
for j=1:M+1;
    for k=1:N+1;
        t=(k-1)*tau;
        x=(j-1)*h;
        es(k,j)=exp(i*t*((pi)^2))*sin((pi)*x);
    end;
end;
%%\%%\%% ERROR ANALYSIS OF GENERAL SOL OF THE DIFF SCHEME %
for k=1:N;
    for n=1:M;
        diff(k,n)=((abs(p(k,n))-es(k,n)))^2)*h;
    end;
end;
for s=1:N;
    diffsum(s)=sum(diff(s,:));
end;
for s=1:N;
    kare(s)=diffsum(s)^0.5;
end;
Err=max(kare)
for k=1:N;
    for n=1:M;
        diff(k,n)=((abs(es(k,n)))^2)*h;
    end;
end;
for s=1:N;
    diffsum(s)=sum(diff(s,:));
end;
for s=1:N;
    masa(s)=diffsum(s)^0.5;
end;
Relerr=(Err/max(masa))
%%\%%\%%\%%\%%\%%\%%\%'GRAPH OF THE SOLUTION'\%%\%%\%%\%%\%%\%%\%%

```

```
[xler,tler]=meshgrid(0:h:1, 0:tau:1);  
figure;  
surf(xler,tler,es);  
title('TAM ÇÖZÜM');  
rotate3d;  
XLabel('x eksen'); YLabel('t eksen');  
figure; surf(xler,tler,p);  
title('İYİLESTİRİLMİS CRANK NICHOLSON');  
rotate3d ;  
XLabel('x eksen'); YLabel('t eksen');  
function rx=rox(x)  
    rx=(1-(1/2)*exp(i*((pi)^2)/2) -(1/3)*exp(i*((pi)^2)/3)+(1-  
exp(i*(pi^2)))*(i/(12*(pi^2))))*sin((pi)*x);
```