

**T.C.
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MODÜLÜS VE ORLICZ FONKSİYONLARI
YARDIMIYLA TANIMLI DİZİ UZAYLARI**

**Tezi Hazırlayan
Özgür BAYSAL**

**Tezi Yöneten
Yrd. Doç. Dr. Abdulcabbar SÖNMEZ**

**Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi**

**Temmuz 2007
KAYSERİ**

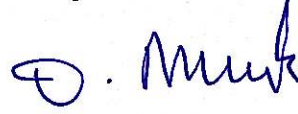
Yrd. Doç. Dr. Abdulcabbar SÖNMEZ danışmanlığında **Özgür BAYSAL** tarafından hazırlanan “**Modulus ve Orlicz Fonksiyonları Yardımıyla Tanımlı Dizi Uzayları**” adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı’nda **Yüksek Lisans** tezi olarak kabul edilmiştir.

JÜRİ:

Başkan : Prof. Dr. Mehmet ÖZDEMİR



Üye : Prof. Dr. Osman MUCUK



Üye : Yrd. Doç. Dr. Abdulcabbar SÖNMEZ

**ONAY:**

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulunun 31/08/2007 tarih ve 2007/28-03. sayılı kararı ile onaylanmıştır.

31.. / 08. / 2007



Prof. Dr. Nüsret AYYILDIZ
Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmamda, yakın ilgi ve yardımlarını hiç esirgemeyen değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Abdulcabbar SÖNMEZ'e ve manevi desteklerini her zaman yanımda hissettiğim aileme ve eşime sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

MODÜLÜS VE ORLICZ FONKSİYONLARI YARDIMIYLA TANIMLI DİZİ UZAYLARI

Özgür BAYSAL
Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi, Temmuz 2007
Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Abdalcabbar SÖNMEZ

ÖZET

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, Modülüs ve Orlicz fonksiyonları yardımıyla tanımlanan dizi uzaylarının Matematikteki yeri ve öneminden bahsedilmiştir.

İkinci bölümde, çalışma boyunca kullanılacak temel tanımlar verilmiştir.

Üçüncü bölümün ilk kısmında Modülüs fonksiyonu yardımıyla $l(p, f, s)$ dizi uzayı tanımlanıp bu uzayın özellikleri ile ilgili bazı teoremler verilmiştir. Bu bölümün ikinci kısmında ise Orlicz fonksiyonu yardımıyla yarınormlu kompleks lineer uzaylar üzerinde $l_M(p, q, s)$ dizi uzayı tanımlanıp bu uzayın özellikleri ile ilgili bazı teoremler verilmiştir.

Dördüncü bölümün ilk kısmında Orlicz fonksiyonu yardımıyla $c_0(\Delta^n, M, p)$, $c(\Delta^n, M, p)$ ve $l_\infty(\Delta^n, M, p)$ genelleştirilmiş fark dizi uzayları tanımlanıp bu uzaylar ile ilgili bazı teoremler verilmiştir. Bu bölümün ikinci kısmında ise Orlicz fonksiyonu yardımıyla $c_0(M, \Delta, p, q)$, $c(M, \Delta, p, q)$ ve $l_\infty(M, \Delta, p, q)$ fark paranormlu dizi uzayları tanımlanıp bu uzaylar ile ilgili bazı teoremler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler : Dizi uzayları, Modülüs fonksiyonu, Orlicz fonksiyonu, Fark dizi uzayı.

SEQUENCE SPACES DEFINED BY MODULUS AND ORLICZ FUNCTIONS

Özgür BAYSAL

Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences

M. Sc. Thesis, July 2007

Thesis Supervisor : Assist. Prof. Dr. Abdulcabbar SÖNMEZ

ABSTRACT

This study consists of four chapters. In the first chapter, it is mentioned the area and importance of the sequence spaces defined by Modulus and Orlicz functions.

In the second chapter, basic definitions that will be used through the study are given.

In the first section of the third chapter, the sequence space $l(p, f, s)$ is defined by a Modulus function and some theorems about the properties of this space are given. In the second section of this chapter, the sequence space $l_M(p, q, s)$ on seminormed complex linear spaces is defined by an Orlicz function and some theorems about the properties of this space are given.

In the first section of the fourth chapter, generalized difference sequence spaces $c_0(\Delta^n, M, p)$, $c(\Delta^n, M, p)$ and $l_\infty(\Delta^n, M, p)$ are defined by an Orlicz function and some theorems about this spaces are given. In the second section of this chapter, difference paranormed sequence spaces $c_0(M, \Delta, p, q)$, $c(M, \Delta, p, q)$ and $l_\infty(M, \Delta, p, q)$ are defined by an Orlicz function and some theorems about these spaces are given.

Keywords : Sequence spaces, Modulus function, Orlicz function, Difference sequence space.

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY.....	i
TEŞEKKÜR.....	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT.....	iv
SİMGELER LİSTESİ.....	vi
1. BÖLÜM	
GİRİŞ.....	1
2. BÖLÜM	
TEMEL KAVRAMLAR.....	3
3. BÖLÜM	
MODÜLÜS VE ORLICZ FONKSİYONLARI YARDIMIYLA TANIMLANAN DİZİ UZAYLARI	
3.1. $l(p, f, s)$ Dizi Uzayı ve Bazı Özellikleri.....	9
3.2. $l_M(p, q, s)$ Dizi Uzayı ve Bazı Özellikleri.....	13
4. BÖLÜM	
ORLICZ FONKSİYONLARI YARDIMIYLA TANIMLANAN FARK DİZİ UZAYLARI	
4.1. Orlicz Fonksiyonları Yardımıyla Tanımlanan Genelleştirilmiş Fark Dizi Uzayları.....	23
4.2. Orlicz Fonksiyonları Yardımıyla Tanımlanan Fark Paranormlu Dizi Uzayları.....	34
KAYNAKLAR.....	44
ÖZGEÇMİŞ.....	46

SİMGELER LİSTESİ

$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar cümlesi
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar cümlesi
$\mathbb{C}$	:	Kompleks sayılar cümlesi
Sup	:	En küçük üst sınır
Inf	:	En büyük alt sınır
c_o	:	Sıfır dizileri uzayı
c	:	Yakınsak diziler uzayı
l_∞	:	Sınırlı diziler uzayı
$\sum_k a_k$	:	$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi

1. BÖLÜM

GİRİŞ

Bugüne kadar Orlicz ve Modülüs fonksiyonları yardımıyla birçok dizi uzayı tanımlanmış ve bu dizi uzayları geliştirilerek günümüze kadar gelmiştir.

Modülüs fonksiyonu tanımı, 1953 yılında Nakano [1] tarafından verildi. Daha sonra Ruckle [2], “ $\{e_1, e_2, \dots\}$ birim vektörlerinin sınırlı cümlesini bulunduran en küçük FK uzayı var mıdır?” sorusuna cevap ararken,

$$L(f) = \left\{ x = (x_k) : \sum_{k=1}^{\infty} f(|x_k|) < \infty \right\}$$

dizi uzayını f Modülüs fonksiyonu yardımıyla tanımladı. Maddox [3], Kuvvetli Cesaro toplanabilme tanımının genelleştirmesi olan Modülüs yardımıyla Kuvvetli Cesaro Toplanabilen dizilerin sınıfını $W(f)$ olarak tanımladı. Daha sonra Connor [4], Maddox [3] un tanımını Cesaro Matrisi yerine herhangi negatif olmayan regüler matris toplanabilme metodu olarak $W(A, f)$ toplanabilme tanımına genelleştirdi.

Modülüs fonksiyonu kullanılarak Maddox [3], Kızmaz [5], Gaur ve Mursalen [6], Altın [7], Tripathy [8], ve bir çok kişi tarafından skaler ve vektör değerli çeşitli dizi uzayları tanımlanmış ve bunların çeşitli özellikleri incelenmiştir. Biz burada, yukarıdaki yazarlar tarafından yapılan çalışmaları daha da genelleştirerek elde edilen dizi uzayları üzerinde çalışacağız.

Orlicz fonksiyonları yardımıyla da bir çok dizi uzayı tanımlanmış ve bunların çeşitli özellikleri bir çok yazar tarafından incelenmiştir. Lindenstrauss and Tzafriri [9] Orlicz fonksiyonunu ilk defa

$$l_M = \left\{ x \in W : \sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right) < \infty, \text{ bazı } \rho > 0 \right\}$$

dizi uzayına uygulamıştır. Bu uzay

$$\|x\| = \inf \left\{ \rho > 0 : \sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right) \leq 1 \right\}$$

normuna göre bir Banach uzayı olur ki bu uzaya Orlicz dizi uzayı denir.

ℓ_M uzayı ℓ_p uzayı ile yakından ilgilidir. Eğer $1 \leq p < \infty$ için $M(x) = x^p$ alırsak ℓ_p uzayını elde ederiz. Orlicz fonksiyonu ile Modülüs fonksiyonu arasında da yakın bir ilişki vardır. Eğer, Orlicz fonksiyonu tanımında konvekslik yerine

$$M(x+y) \leq M(x) + M(y)$$

alınırsa, Modülüs fonksiyonu elde edilir.

Son zamanlarda, Parashar ve Choudhary [10], Bhardwaj ve Singh [11], Nuray ve Gülcü [12] ve diğer birçok kişi tarafından farklı Orlicz dizi uzayları tanımlanmış ve bunlar üzerinde birçok çalışmalar yapılmıştır. Biz bu çalışmaları referans alarak bu uzayları daha da genelleştiren uzaylar üzerinde çalışacağız.

2. BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, çalışmamızda kullanacağımız temel tanımlara yer vereceğiz.

Tanım 2.1. X boş olmayan bir cümle ve F kompleks ya da reel sayıların bir cismi olsun. Bu taktirde, $\forall x, y, z \in X$ ve $\forall \lambda, \mu \in F$ için

$$+ : X \times X \rightarrow X$$

$$\cdot : F \times X \rightarrow X$$

fonksiyonları

i) $x + y = y + x$

ii) $(x + y) + z = x + (y + z)$

iii) $x + \theta = x$ olacak şekilde bir tek $\theta \in X$ mevcut

iv) $x + (-x) = \theta$ olacak şekilde bir tek $(-x) \in X$ mevcut

v) $1 \cdot x = x$

vi) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

vii) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$

viii) $\lambda(\mu x) = (\lambda \mu)x$

özelliklerini sağlıyorsa X cümlesine F cismi üzerinde bir vektör uzayı veya bir lineer uzay denir [13].

Tanım 2.2. X , F cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. Eğer

$$q : X \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu $\forall x, y \in X$ ve $\forall \lambda \in F$ için

$$\textbf{i)} \quad q(\lambda x) = |\lambda|q(x)$$

$$\textbf{ii)} \quad q(x + y) \leq q(x) + q(y)$$

özelliklerini sağlıyorsa, q ye bir yarınorm, (X, q) uzayına da bir yarınormlu uzay denir[14].

Tanım 2.3. X , F cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. Eğer

$$g : X \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu $\forall x, y \in X$ ve $\forall \lambda \in F$ için

$$\textbf{i)} \quad g(0) = 0$$

$$\textbf{ii)} \quad g(-x) = g(x)$$

$$\textbf{iii)} \quad g(x + y) \leq g(x) + g(y)$$

$$\textbf{iv)} \quad \lambda \rightarrow \lambda_0 \text{ ve } g(x - x_0) \rightarrow 0 \text{ iken } g(\lambda x - \lambda_0 x_0) \rightarrow 0$$

şartlarını sağlıyorsa, g ye bir paranorm, (X, g) uzayına da bir paranormlu uzay denir[15].

Tanım 2.4. $g(x) = 0$ olduğunda $x = 0$ ise, g ye bir total paranorm denir [16].

Tanım 2.5. X kompleks veya reel bir lineer uzay olsun. Bu taktirde $\forall x, y \in X$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ için

$$\| \cdot \| : X \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu

i) $\|x\| \geq 0$

ii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

iii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

özelliklerini sağlıyorsa, $\| \cdot \|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm, $(X, \| \cdot \|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir [17].

Tanım 2.6. X boş olmayan bir cümle olmak üzere

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu $\forall x, y, z \in X$ için

i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

ii) $d(x, y) = d(y, x)$

iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

özelliklerini sağlıyorsa, d ye metrik fonksiyonu ve (X, d) ikilisine de bir metrik uzay denir [15].

Tanım 2.7. (X, d) bir metrik uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Eğer,

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ için } \exists n_0(\varepsilon) \ni \forall m, n > n_0(\varepsilon) \text{ için } d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

oluyorsa, (x_n) dizisine X te bir Cauchy dizisi denir [17].

Tanım 2.8. (X, d) bir metrik uzay olsun. Eğer, bu uzayda alınan her Cauchy dizisi yine bu uzayın bir noktasına yakınsıyorsa, (X, d) metrik uzayına tamdır denir [15].

Tanım 2.9. $(X, \| \cdot \|)$ bir normlu lineer uzay olsun. Eğer X cümlesi $\| \cdot \|$ normuna göre tam ise $(X, \| \cdot \|)$ uzayına bir Banach uzayı denir [15].

Tanım 2.10. $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu $\forall x, y \in [0, \infty)$ için

i) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ii) $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$

iii) f artan

iv) f sıfırda sağdan sürekli

şartlarını sağlıyorsa f fonksiyonuna modülüs fonksiyonu denir [3]. Modülüs fonksiyonu sınırlı veya sınırsız olabilir.

Tanım 2.11. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için $0 < \lambda < 1$ olmak üzere

$$M(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda M(x) + (1 - \lambda)M(y)$$

eşitsizliğini sağlayan reel değerli M fonksiyonuna konveks fonksiyon denir [18].

Tanım 2.12. $M : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu

i) M sürekli

ii) M azalmayan

iii) $M(0) = 0$

iv) $x > 0$ için $M(x) > 0$ ve $M(x) \rightarrow \infty$, $x \rightarrow \infty$

v) M konveks

şartlarını sağlıyorsa M ye bir Orlicz fonksiyonu denir [9]. Eğer yukarıdaki tanımda, M nin konveksliği yerine

$$M(x+y) \leq M(x) + M(y)$$

özellliği alınırsa M fonksiyonu modülüs fonksiyonuna dönüşür.

Tanım 2.13. M bir Orlicz fonksiyonu olsun. $u \geq 0$ olmak üzere

$$M(2u) \leq KM(u)$$

olacak şekilde bir $K > 0$ sabiti varsa, M fonksiyonu u nun bütün değerleri için Δ_2 şartını sağlıyor denir. Δ_2 şartı, $L > 1$ ve u nun bütün değerleri için

$$M(Lu) \leq KLM(u)$$

eşitsizliğinin sağlanmasına denktir [18].

Tanım 2.14. E bir dizi uzayı olsun. $(x_k) \in E$ olmak üzere $\forall k \in \mathbb{N}$ için $|\alpha_k| \leq 1$ olacak şekilde tüm (α_k) skaler dizileri için $(\alpha_k x_k) \in E$ oluyorsa, E dizi uzayına solid (ya da normal) denir [19].

Tanım 2.15. X bir cümle ve $A \subset X$ olmak üzere,

$$\psi_A : X \rightarrow \mathbb{R} , \quad \psi_A(x) = \begin{cases} 1 & , x \in A \\ 0 & , x \notin A \end{cases}$$

şeklinde tanımlı ψ_A fonksiyonuna A cümlesinin karakteristik fonksiyonu denir [17].

Tanım 2.16. E bir dizi uzayı ve ψ karakteristik fonksiyonların bir sınıfı olmak üzere, eğer $\forall u \in \psi$ ve $x \in E$ iken $u(x) \in E$ oluyorsa E ye monotondur denir [20].

Tanım 2.17. $\forall k \in \mathbb{N}$ için, $p_k > 0$ ve $H = \sup p_k$ olmak üzere $a_k, b_k \in \mathbb{C}$ olsun. Bu takdirde, $K = \max(1, 2^{H-1})$ olmak üzere

$$|a_k + b_k|^{p_k} \leq K \cdot \{ |a_k|^{p_k} + |b_k|^{p_k} \}$$

dır [13].

Tanım 2.18. (Minkowski Eşitsizliği)

$p \geq 1$, $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$, $b_1, b_2, \dots, b_n \geq 0$ olsun. Bu takdirde

$$\left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^n (a_k)^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n (b_k)^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

dir [13].

Tanım 2.19. (Hölder Eşitsizliği)

$p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$, $b_1, b_2, \dots, b_n \geq 0$ olsun. Bu takdirde

$$\sum_{k=1}^n (a_k b_k) \leq \left(\sum_{k=1}^n (a_k)^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n (b_k)^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

dur [13].

3. BÖLÜM

MODÜLÜS VE ORLICZ FONKSİYONLARI YARDIMIYLA TANIMLANAN DİZİ UZAYLARI

3.1. $l(p, f, s)$ Dizi Uzayı ve Bazı Özellikleri

Bu kısımda, modülüs fonksiyonu yardımıyla $l(p, f, s)$ dizi uzayını tanımlayıp bu uzayın özellikleri ile ilgili bazı teoremleri vereceğiz.

Tanım 3.1.1. Kompleks terimli $x = (x_k)$ dizilerinin cümlesini W ile gösterelim. Ayrıca, $p = (p_k)$ pozitif sayıların bir dizisi ve f bir modülüs fonksiyonu olsun. Bu takdirde

$$t_{km}(x) = \frac{x_m + x_{m+1} + \dots + x_{m+k}}{k+1} \quad k, m = 0, 1, 2, \dots$$

olmak üzere

$$l(p, f, s) = \left\{ x \in W : \sup_m \sum_k k^{-s} [f(|t_{km}(x)|)]^{p_k} < \infty, s \geq 0 \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Bu tanımda p, f ve s in bir veya birkaçı özel olarak seçilirse aşağıdaki dizi uzayları elde edilir.

Tanım 3.1.2. Tanım 3.1.1 de, $\forall k$ için $p = (p_k) = 1$ alınırsa

$$l(f, s) = \left\{ x \in W : \sup_m \sum_k k^{-s} [f(t_{km}(x))] < \infty, s \geq 0 \right\}$$

$s = 0$ alınırsa,

$$l(p, f) = \left\{ x \in W : \sup_m \sum_k [f(t_{km}(x))]^{p_k} < \infty \right\}$$

$f(x) = x$ birim fonksiyon alınırsa,

$$l(p, s) = \left\{ x \in W : \sup_m \sum_k k^{-s} [t_{km}(x)]^{p_k} < \infty, s \geq 0 \right\}$$

$s = 0$ ve $f(x) = x$ birim fonksiyon alınırsa,

$$l(p) = \left\{ x \in W : \sup_m \sum_k [t_{km}(x)]^{p_k} < \infty \right\}$$

$\forall k$ için $p = (p_k) = 1$ ve $s = 0$ alınırsa,

$$l(f) = \left\{ x \in W : \sup_m \sum_k [f(t_{km}(x))] < \infty \right\}$$

$\forall k$ için $p = (p_k) = 1$, $s = 0$ ve $f(x) = x$ alınırsa,

$$l = \left\{ x \in W : \sup_m \sum_k [t_{km}(x)] < \infty \right\}$$

uzayları elde edilir.

Teorem 3.1.3. $l(p, f, s)$ uzayı

$$g(x) = \sup_m \left\{ \sum_k k^{-s} [f(t_{km}(x))]^{p_k} \right\}^{\frac{1}{M}} \quad (3.1)$$

paranormu ile tanımlanmış bir tam paranormlu uzaydır. Burada $H = \sup p_k < \infty$ olmak üzere $M = \max(1, H)$ tır.

İspat : Öncelikle $l(p, f, s)$ uzayının lineer olduğunu gösterelim. Bu amaçla,

$$|a_k + b_k|^{p_k} \leq K. \{ |a_k|^{p_k} + |b_k|^{p_k} \}$$

eşitsizliği kullanılarak, $x, y \in l(p, f, s)$ ve β, μ kompleks sayıları için

$$\begin{aligned} \sum_k k^{-s} [f(l t_{km}(\beta x + \mu y))]^{p_k} &\leq K K_1^H \left\{ \sum_k k^{-s} [f(l t_{km}(x))]^{p_k} \right\} \\ &+ K K_2^H \left\{ \sum_k k^{-s} [f(l t_{km}(y))]^{p_k} \right\} < \infty \end{aligned}$$

elde edilir. Burada K_1 ve K_2 tamsayıları $|\beta| \leq K_1$ ve $|\mu| \leq K_2$ olacak şekilde seçilir.

Dolayısıyla $(\beta x + \mu y) \in l(p, f, s)$ olduğundan $l(p, f, s)$ uzayının bir lineer uzay olduğu sonucu çıkarılır. Şimdi, $l(p, f, s)$ uzayının (3.1) ile verilen $g(x)$ paranormu ile bir paranormlu uzay olduğunu gösterelim.

$$\sum_k k^{-s} [f(l t_{km}(x))]^{p_k} < \infty$$

eşitsizliğinden, $\forall x \in l(p, f, s)$ için $g(x)$ in mevcut olduğu sonucu çıkarılır. Diğer taraftan $g(\theta) = 0$ ve $\forall x \in l(p, f, s)$ için $g(x) = g(-x)$ olduğu aşıkardır. Ayrıca Minkowski eşitsizliğinden ve f bir modülüs fonksiyonu olduğundan

$$\begin{aligned} g(x + y) &= \sup_m \left\{ \sum_k k^{-s} [f(l t_{km}(x + y))]^{p_k} \right\}^{\frac{1}{M}} \leq \sup_m \left\{ \sum_k k^{-s} [f(l t_{km}(x))]^{p_k} \right\}^{\frac{1}{M}} \\ &+ \sup_m \left\{ \sum_k k^{-s} [f(l t_{km}(y))]^{p_k} \right\}^{\frac{1}{M}} \end{aligned}$$

$$= g(x) + g(y)$$

elde edilir. Şimdi skaler çarpımın sürekliliğini gösterelim. Bunun için, sabit bir x için $\lambda \rightarrow 0$ iken $g(\lambda x) \rightarrow 0$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. Sabit bir x ve $\varepsilon > 0$ için

$$\sum_{k \geq K} k^{-s} [f(|t_{km}(x)|)]^{p_k} < \varepsilon \quad (3.2)$$

olacak şekilde $K > 0$ seçebiliriz. $|\lambda| \leq 1$ iken (3.2) den dolayı

$$\sum_{k \geq K} k^{-s} [f(|t_{km}(\lambda x)|)]^{p_k} \leq \sum_{k \geq K} k^{-s} [f(|t_{km}(x)|)]^{p_k} < \varepsilon \quad (3.3)$$

elde edilir. Burada K sabit olduğu için, $\lambda \rightarrow 0$ iken

$$\sum_{k=1}^{K-1} k^{-s} [f(|t_{km}(\lambda x)|)]^{p_k} \rightarrow 0 \quad (3.4)$$

olur. (3.3) ve (3.4) ten dolayı sabit bir x için $\lambda \rightarrow 0$ iken $g(\lambda x) \rightarrow 0$ olduğu sonucu elde edilir. Bu da skaler çarpımın sürekliliğini, dolayısıyla g nin bir paranorm olduğunu ispatlar. Şimdi, $l(p, f, s)$ in tam olduğunu ispat etmek için $(x^{(i)}) \in l(p, f, s)$ olacak şekilde bir $(x^{(i)})$ Cauchy dizisi alalım. Bu durumda sabit bir k için $i, j \rightarrow \infty$ iken

$$\begin{aligned} \left\{ k^{-s} [f(|t_{km}(x^{(i)} - x^{(j)})|)]^{p_k} \right\}^{\frac{1}{M}} &\leq \left\{ \sum_k k^{-s} [f(|t_{km}(x^{(i)} - x^{(j)})|)]^{p_k} \right\}^{\frac{1}{M}} \\ &\leq g(x^{(i)} - x^{(j)}) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca, sabit bir k ve $\forall m$ için f in sürekliliğini kullanarak

$$\lim_{i, j \rightarrow \infty} \left\{ k^{-s} [f(|t_{km}(x^{(i)} - x^{(j)})|)]^{p_k} \right\}^{\frac{1}{M}} = \left\{ k^{-s} \left[f \left(\lim_{i, j \rightarrow \infty} |t_{km}(x^{(i)} - x^{(j)})| \right) \right]^{p_k} \right\}^{\frac{1}{M}}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\forall m$ için

$$\lim_{i,j \rightarrow \infty} |t_{km}(x^{(i)} - x^{(j)})| = 0$$

bulunur. Özel olarak, her sabit m için $i, j \rightarrow \infty$ iken

$$|t_{0m}(x^{(i)} - x^{(j)})| = |x_m^{(i)} - x_m^{(j)}| \rightarrow 0$$

yazılabilir. Dolayısıyla, $(x^{(i)})$ dizisi $\mathbb{C}$ de bir Cauchy dizisidir. $\mathbb{C}$ tam olduğu için $i \rightarrow \infty$ iken $x^{(i)} \rightarrow x$ olacak şekilde bir $x \in \mathbb{C}$ mevcuttur. İlk olarak $x \in l(p, f, s)$ olduğunu gösterelim. Biliyoruz ki $g(x^{(i)}) \leq K$ olacak şekilde $g(x^{(i)})$ sınırlıdır. Bu durumda, herhangi bir t için

$$\left\{ \sum_{k=1}^t k^{-s} [f(|t_{km}(x^{(i)})|)]^{p_k} \right\}^{\frac{1}{M}} \leq g(x^{(i)}) \leq K$$

yazılabilir. Buradan, $i \rightarrow \infty$ ve $t \rightarrow \infty$ iken

$$\left\{ \sum_k k^{-s} [f(|t_{km}(x)|)]^{p_k} \right\}^{\frac{1}{M}} \leq K$$

elde edilir. Bu da $x \in l(p, f, s)$ olduğunu gösterir. Son olarak $g(x^{(i)} - x) \rightarrow 0$ olduğunu gösterelim. Şu halde verilen bir $\varepsilon > 0$ ve $i, j \geq 0$ için $g(x^{(i)} - x^{(j)}) < \varepsilon$ olacak şekilde bir N tamsayısı vardır. Dolayısıyla herhangi bir t ve $i, j \geq N$ için

$$\left\{ \sum_{k=1}^t k^{-s} [f(|t_{km}(x^{(i)} - x^{(j)})|)]^{p_k} \right\}^{\frac{1}{M}} \leq \varepsilon$$

yazılabilir. t keyfi olduğundan $t \rightarrow \infty$ iken $i \geq N$ için

$$g(x^{(i)} - x) < \varepsilon$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

3.2. $l_M(p, q, s)$ Dizi Uzayı ve Bazı Özellikleri

Bu kısımda, Orlicz fonksiyonu yardımıyla yarınormlu kompleks lineer uzaylar üzerinde $l_M(p, q, s)$ dizi uzayını tanımlayıp bu uzay üzerinde çeşitli bağıntılar vereceğiz.

Tanım 3.2.1. Lindenstrauss ve Tzafriri [9] Orlicz fonksiyonu fikrini

$$l_M = \left\{ x \in W : \sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right) < \infty, \text{bazı } \rho > 0 \right\}$$

dizi uzayını inşa etmek için kullandılar. l_M uzayı

$$\|x\| = \inf \left\{ \rho > 0 : \sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{|x_k|}{\rho}\right) \leq 1 \right\}$$

normu ile Orlicz uzayı adı verilen bir Banach uzayıdır. l_M uzayı, $1 \leq p < \infty$ için $M(x) = x^p$ alındığında elde edilen l_p uzayı ile yakından ilişkilidir.

Tanım 3.2.2. M bir Orlicz fonksiyonu, (X, q) bir yarınormlu uzay, $p = (p_k)$ pozitif reel sayıların bir dizisi ve $s \geq 0$ bir reel sayı olsun. $(x_k) \in X$ olacak şekilde tüm $x = (x_k)$ dizilerinin lineer uzayını $S(x)$ ile gösterecek olursak

$$l_M(p, q, s) = \left\{ x \in S(x) : \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left[M\left(q\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right) \right]^{p_k} < \infty, s \geq 0, \text{bazı } \rho > 0 \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu tanımda p veya s in bazı özel seçimleri sonucunda aşağıdaki dizi uzayları elde edilir.

Tanım 3.2.3. Tanım 3.2.2 de, $\forall k$ için $p = (p_k) = 1$ alınırsa

$$l_M(q, s) = \left\{ x \in S(x) : \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left[M\left(q\left(\frac{x_k}{\rho}\right)\right) \right] < \infty, s \geq 0, \text{bazı } \rho > 0 \right\}$$

$s = 0$ alınır,

$$l_M(p, q) = \left\{ x \in S(x) : \sum_{k=1}^{\infty} \left[M \left(q \left(\frac{x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} < \infty, \text{ bazı } \rho > 0 \right\}$$

$\forall k$ için $p = (p_k) = 1$ ve $s = 0$ alınır,

$$l_M(q) = \left\{ x \in S(x) : \sum_{k=1}^{\infty} \left[M \left(q \left(\frac{x_k}{\rho} \right) \right) \right] < \infty, \text{ bazı } \rho > 0 \right\}$$

uzayları elde edilir.

Teorem 3.2.4. $l_M(p, q, s)$ uzayı $\mathbb{C}$ üzerinde bir lineer uzaydır.

İspat : $x, y \in l_M(p, q, s)$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ olsun. İspat yapmak için

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left[M \left(q \left(\frac{\alpha x_k + \beta y_k}{\rho_3} \right) \right) \right]^{p_k} < \infty$$

olacak şekilde bir $\rho_3 > 0$ bulmalıyız. Şu halde $x, y \in l_M(p, q, s)$ olduğundan

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left[M \left(q \left(\frac{\alpha x_k}{\rho_1} \right) \right) \right]^{p_k} < \infty$$

ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left[M \left(q \left(\frac{\beta y_k}{\rho_2} \right) \right) \right]^{p_k} < \infty$$

olacak şekilde pozitif ρ_1 ve ρ_2 değerleri vardır. Şimdi $\rho_3 = \max(2|\alpha|\rho_1, 2|\beta|\rho_2)$ olarak tanımlayalım. M azalmayan, konveks bir fonksiyon ve q bir yarınorm olduğundan

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left[M \left(q \left(\frac{\alpha x_k + \beta y_k}{\rho_3} \right) \right) \right]^{p_k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left[M \left(q \left(\frac{\alpha x_k}{\rho_3} \right) + q \left(\frac{\beta y_k}{\rho_3} \right) \right) \right]^{p_k} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left[M \left(\frac{1}{2} q \left(\frac{x_k}{\rho_1} \right) + \frac{1}{2} q \left(\frac{y_k}{\rho_2} \right) \right) \right]^{p_k} \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left\{ \frac{1}{2} \left[M \left(q \left(\frac{x_k}{\rho_1} \right) \right) + M \left(q \left(\frac{y_k}{\rho_2} \right) \right) \right] \right\}^{p_k} \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{p_k}} k^{-s} \left[M \left(q \left(\frac{x_k}{\rho_1} \right) \right) + M \left(q \left(\frac{y_k}{\rho_2} \right) \right) \right]^{p_k} \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left[M \left(q \left(\frac{x_k}{\rho_1} \right) \right) + M \left(q \left(\frac{y_k}{\rho_2} \right) \right) \right]^{p_k} \\
&\leq D \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left[M \left(q \left(\frac{x_k}{\rho_1} \right) \right) \right]^{p_k} + D \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left[M \left(q \left(\frac{y_k}{\rho_2} \right) \right) \right]^{p_k} < \infty
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $H = \sup_k p_k$ olmak üzere $D = \max(1, 2^{H-1})$ dir. Dolayısıyla

$(\alpha x_k + \beta y_k) \in l_M(p, q, s)$ olduğu için $l_M(p, q, s)$ bir lineer uzaydır.

Teorem 3.2.5. $l_M(p, q, s)$ uzayı

$$g(x) = \inf \left\{ \rho^{p_n/H} : \left[\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left[M \left(q \left(\frac{x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \right]^{\frac{1}{H}} \leq 1, n = 1, 2, 3, \dots \right\}$$

paranormu ile tanımlanmış bir paranormlu uzaydır. Burada $H = \max(1, \sup p_k)$

İspat : $l_M(p, q, s)$ in bir lineer uzay olduğunu daha önce gösterdiğimiz için $g(x)$ fonksiyonunun bir paranorm olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Bu amaçla, verilen $g(x)$ fonksiyonu için tanım 2.3 ün gerekli şartlarını inceleyelim.

i) q bir yarınorm olduğundan $q(\theta)=0$ ve M bir Orlicz fonksiyonu olduğu için $M(0)=0$ elde edilir ki buradan $x=\theta$ için $g(\theta)=0$ olur.

ii) q bir yarınorm olduğundan $q(-x)=q(x)$ tir. Dolayısıyla $g(-x)=g(x)$ elde edilir.

iii) (3.5) te $\alpha = \beta = 1$ alınıp Minkowski eşitsizliği kullanıldığında

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left[M \left(q \left(\frac{x_k + y_k}{\rho_3} \right) \right) \right]^{p_k} &\leq \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left[M \left(q \left(\frac{x_k}{\rho_1} \right) \right) + M \left(q \left(\frac{y_k}{\rho_2} \right) \right) \right]^{p_k} \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left[M \left(q \left(\frac{x_k}{\rho_1} \right) \right) \right]^{p_k} + \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left[M \left(q \left(\frac{y_k}{\rho_2} \right) \right) \right]^{p_k} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $g(x+y) \leq g(x) + g(y)$ sonucu çıkarılır.

iv) Skaler çarpımın sürekliliğini göstermek için, herhangi bir λ sayısı alalım.

$$g(\lambda x) = \inf \left\{ \rho^{p_n/H} : \left[\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left[M \left(q \left(\frac{\lambda x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \right]^{\frac{1}{H}} \leq 1, n = 1, 2, 3, \dots \right\}$$

olduğundan $r = \rho/\lambda$ alınarak

$$g(\lambda x) = \inf \left\{ (\lambda r)^{p_n/H} : \left[\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left[M \left(q \left(\frac{x_k}{r} \right) \right) \right]^{p_k} \right]^{\frac{1}{H}} \leq 1, n = 1, 2, 3, \dots \right\}$$

elde edilir. Ayrıca $|\lambda|^{p_k} \leq \max(1, |\lambda|^H)$ olduğu için

$$|\lambda|^{p_k/H} \leq [\max(1, |\lambda|^H)]^{1/H}$$

olur. Buradan

$$g(\lambda x) = [\max(1, |\lambda|^H)]^{1/H} \inf \left\{ (r)^{p_n/H} : \left[\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left[M \left(q \left(\frac{x_k}{r} \right) \right) \right]^{p_k} \right]^{\frac{1}{H}} \leq 1, n = 1, 2, 3, \dots \right\}$$

elde edilir. $g(x) \rightarrow 0$ iken bu ifade $l_M(p, q, s)$ te sıfıra yakınsar. Şimdi $n \rightarrow \infty$ iken $\lambda_n \rightarrow 0$ olduğunu kabul edelim. $x \in l_M(p, q, s)$ olmak üzere, verilen bir $\varepsilon > 0$ ve bazı $\rho > 0$ değerleri için

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} k^{-s} \left[M \left(q \left(\frac{x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde bir N pozitif tamsayısı olsun. Buradan

$$\left(\sum_{k=N+1}^{\infty} k^{-s} \left[M \left(q \left(\frac{x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \right)^{\frac{1}{H}} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

elde edilir. $0 < |\lambda| < 1$ iken M nin konveksliğini kullanarak

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} k^{-s} \left[M \left(q \left(\frac{\lambda x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} < \sum_{k=N+1}^{\infty} k^{-s} \left[|\lambda| M \left(q \left(\frac{x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} < \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^H$$

elde edilir. Ayrıca $[0, \infty)$ aralığında M sürekli olduğundan

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left[M \left(q \left(\frac{tx_k}{\rho} \right) \right) \right]$$

fonksiyonu sıfırda süreklidir. Dolayısıyla $0 < t < \delta$ için $|f(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde

$0 < \delta < 1$ mevcuttur. Son olarak $n > K$ için $|\lambda_n| < \delta$ olacak biçimde bir K değeri vardır. Şu halde $n > K$ için

$$\left(\sum_{k=N+1}^N k^{-s} \left[M \left(q \left(\frac{\lambda_n x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \right)^{\frac{1}{H}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

olması sonucunda

$$\left(\sum_{k=N+1}^{\infty} k^{-s} \left[M \left(q \left(\frac{\lambda_n x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \right)^{\frac{1}{H}} < \varepsilon$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.2.6. M, M_1, M_2 fonksiyonları Δ_2 şartını sağlayan Orlicz fonksiyonları ve $s, s_1, s_2 \geq 0$ olsun. Bu durumda

i) $s > 1$ ise $l_{M_1}(p, q, s) \subseteq l_{M \circ M_1}(p, q, s)$ dir.

ii) $l_{M_1}(p, q, s) \cap l_{M_2}(p, q, s) \subseteq l_{M_1+M_2}(p, q, s)$ dir.

iii) $s_1 \leq s_2$ ise $l_M(p, q, s_1) \subseteq l_M(p, q, s_2)$ dir.

İspat : (i) $\varepsilon > 0$ olmak üzere, $0 \leq t \leq \delta$ için $M(t) < \varepsilon$ şartını sağlayan $0 < \delta < 1$

olacak şekilde δ seçelim. $y_k = M_1 \left[q \left(\frac{x_k}{\rho} \right) \right]$ biçiminde yazılırsa

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} [M(y_k)]^{p_k} = \sum_1 k^{-s} [M(y_k)]^{p_k} + \sum_2 k^{-s} [M(y_k)]^{p_k}$$

elde edilir. Burada ilk toplam $y_k \leq \delta$ ve ikinci toplam $y_k > \delta$ şartı üzerinden yazılmıştır. M nin sürekliliğinden dolayı

$$\sum_1 k^{-s} [M(y_k)]^{p_k} < \max(1, \varepsilon^H) \sum_1 k^{-s} < \infty$$

elde edilir. Ayrıca $y_k > \delta$ olduğundan

$$y_k < \frac{y_k}{\delta} \leq 1 + \left(\frac{y_k}{\delta} \right)$$

bağıntısını kullanabiliriz. M fonksiyonu azalmayan ve konveks olduğu için

$$M(y_k) < M\left(1 + \frac{y_k}{\delta}\right) < \frac{1}{2}M(2) + \frac{1}{2}M\left(2\frac{y_k}{\delta}\right)$$

elde edilir. M fonksiyonu Δ_2 şartını sağladığından

$$M(y_k) < \frac{1}{2}K\frac{y_k}{\delta}M(2) + \frac{1}{2}\frac{y_k}{\delta}M(2) = Ky_k\delta^{-1}M(2)$$

yazılabilir. Buradan

$$\sum_2 k^{-s} [M(y_k)]^{p_k} \leq \max[1, (K\delta^{-1}M(2))^H] \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} (y_k)^{p_k} < \infty$$

elde edilir. Son olarak $x \in l_M(p, q, s)$ ve $s > 1$ olduğu için

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} [M(y_k)]^{p_k} &= \sum_1 k^{-s} [M(y_k)]^{p_k} + \sum_2 k^{-s} [M(y_k)]^{p_k} \\ &\leq \max(1, \varepsilon^H) \sum_1 k^{-s} + \max[1, (K\delta^{-1}M(2))^H] \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} (y_k)^{p_k} < \infty \end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

(ii) Tanım 2.14 ten dolayı

$$\begin{aligned} k^{-s} \left[(M_1 + M_2) \left(q \left(\frac{x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} &= k^{-s} \left[M_1 \left(q \left(\frac{x_k}{\rho} \right) \right) + M_2 \left(q \left(\frac{x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \\ &\leq Dk^{-s} \left[M_1 \left(q \left(\frac{x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} + Dk^{-s} \left[M_2 \left(q \left(\frac{x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \end{aligned} \quad (3.6)$$

yazılabilir. $x = (x_k) \in l_{M_1}(p, q, s) \cap l_{M_2}(p, q, s)$ olduğunu kabul edelim. Şu halde (3.6)

nın $\sum_{k=1}^{\infty}$ toplamı alındığında $x = (x_k) \in l_{M_1+M_2}(p, q, s)$ olduğu sonucu elde edilir.

(iii) $s_1 \leq s_2$ ve $x \in l_M(p, q, s_1)$ olsun. Bu durumda $k^{-s_2} \leq k^{-s_1}$ olduğu için

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s_2} \left[M \left(q \left(\frac{x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} < \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s_1} \left[M \left(q \left(\frac{\alpha x_k}{\rho_1} \right) \right) \right]^{p_k} < \infty$$

elde edilir ki bu da $x \in l_M(p, q, s_2)$ olduğunu gösterir.

Teorem 3.2.7. (i) $\forall k$ için $0 < r_k \leq t_k < \infty$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $l_M(r, q) \subseteq l_M(t, q)$ olur.

(ii) $l_M(q) \subseteq l_M(q, s)$ dir.

(iii) $l_M(p, q) \subseteq l_M(p, q, s)$ dir.

İspat : (i) $x \in l_M(r, q)$ olsun. Bu durumda

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left[M \left(q \left(\frac{x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} < \infty$$

olacak şekilde bir $\rho > 0$ mevcuttur. Dolayısıyla i nin yeteri kadar büyük değerleri için

$$M \left(q \left(\frac{x_i}{\rho} \right) \right) \leq 1$$

elde edilir. Ayrıca, M azalmayan bir fonksiyon olduğu için

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left[M \left(q \left(\frac{x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{t_k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left[M \left(q \left(\frac{x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{r_k} < \infty$$

yazılabilir. Buradan $x \in l_M(t, q)$ olur.

(ii) $x \in l_M(q)$ olsun. (i) deki yöntemle benzer şekilde $s \geq 0$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \left[M \left(q \left(\frac{x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left[M \left(q \left(\frac{x_k}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} < \infty$$

elde edilir. Yani $x \in l_M(p, q, s)$ tir.

Teorem 3.2.8. (i) $\forall k$ için $0 < p_k \leq 1$ ise $l_M(p, q) \subseteq l_M(q)$ dir.

(ii) $\forall k$ için $p_k \geq 1$ ise $l_M(q) \subseteq l_M(p, q)$ dir.

İspat : (i) Teorem 3.2.7 (i) de $\forall k$ için $r_k = p_k$ ve $t_k = 1$ alınırsa $l_M(p, q) \subseteq l_M(q)$ elde edilir.

(ii) Yine Teorem 3.2.7 (i) de $\forall k$ için $t_k = p_k$ ve $r_k = 1$ alınırsa $l_M(q) \subseteq l_M(p, q)$ elde edilir.

4. BÖLÜM

ORLICZ FONKSİYONLARI YARDIMIYLA TANIMLANAN FARK DİZİ UZAYLARI

Bu bölümde, Orlicz fonksiyonu yardımıyla bazı genelleştirilmiş fark dizi uzaylarını tanımlayıp, bu uzayların özellikleri ile ilgili çeşitli bağıntıları vereceğiz.

4.1. Orlicz Fonksiyonları Yardımıyla Tanımlanan Genelleştirilmiş Fark Dizi Uzayları

Bu kısımda, Orlicz fonksiyonunu kullanarak $c_0(\Delta^n, M, p)$, $c(\Delta^n, M, p)$ ve $l_\infty(\Delta^n, M, p)$ genelleştirilmiş fark dizi uzaylarını tanımlayıp bu uzaylarla ilgili bazı teoremleri vereceğiz.

Tanım 4.1.1. Kompleks terimli $x = (x_k)$ dizilerinin uzayını W ile gösterelim. Diğer taraftan $k \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere

$$\|x\|_\infty = \sup_k |x_k|$$

normu ile $x = (x_k)$ kompleks terimli sınırlı, yakınsak ve sıfır dizilerinin uzayını sırasıyla l_∞ , c ve c_0 ile gösterelim. Bu durumda $X(\Delta)$ fark dizi uzayı aşağıdaki biçimde tanımlanır.

$\forall k \in \mathbb{N}$ için $\Delta x_k = x_k - x_{k+1}$ ve $X = l_\infty, c$ ve c_0 olmak üzere

$$X(\Delta) = \{x = (x_k) \in W : (\Delta x_k) \in X\}$$

dir [5]. Bu tanımda $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$\Delta^n x_k = \Delta^{n-1} x_k - \Delta^{n-1} x_{k+1} \quad \text{ve} \quad \Delta^0 x_k = x_k$$

olmak üzere $X = l_\infty$, c ve c_0 alınırsa

$$X(\Delta^n) = \{x = (x_k) \in W : (\Delta^n x_k) \in X\}$$

şeklinde genelleştirilmiş fark dizi uzayları elde edilir [21].

Ayrıca $X = l_\infty(p)$, $c(p)$ ve $c_0(p)$ alınarak bu fark dizi uzayları daha da genelleştirilebilir [22]. Genelleştirilmiş fark dizisi, Binom gösterimi kullanılarak $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$\Delta^n x_k = \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu \binom{n}{\nu} x_{k+\nu}$$

biçiminde ifade edilebilir. Mesela, $\Delta^2 x_k$ fark dizisini oluşturacak olursak

$$\begin{aligned} \Delta^2 x_k &= \sum_{\nu=0}^2 (-1)^\nu \binom{2}{\nu} x_{k+\nu} \\ &= (-1)^0 \binom{2}{0} x_{k+0} + (-1)^1 \binom{2}{1} x_{k+1} + (-1)^2 \binom{2}{2} x_{k+2} \\ &= x_k - 2x_{k+1} + x_{k+2} = (x_k - x_{k+1}) - (x_{k+1} - x_{k+2}) \end{aligned}$$

elde edilir.

LEMMA 4.1.2. E dizi uzayı normal ise aynı zamanda monotondur.

Tanım 4.1.3. $\forall k$ için $p = (p_k)$ pozitif reel sayıların bir dizisi, M bir Orlicz fonksiyonu ve $n \in \mathbb{N}^+$ olsun. Bu durumda

$$c_0(\Delta^n, M, p) = \left\{ x = (x_k) : \lim_{k \rightarrow \infty} \left[M \left(\frac{|\Delta^n x_k|}{\rho} \right) \right]^{p_k} = 0, \text{ bazı } \rho > 0 \right\}$$

$$c(\Delta^n, M, p) = \left\{ x = (x_k) : \lim_{k \rightarrow \infty} \left[M \left(\frac{|\Delta^n x_k - l|}{\rho} \right) \right]^{p_k} = 0, \text{ bazı } \rho > 0, l \in \mathbb{C} \right\}$$

$$l_\infty(\Delta^n, M, p) = \left\{ x = (x_k) : \sup_{k \geq 0} \left[M \left(\frac{|\Delta^n x_k|}{\rho} \right) \right]^{p_k} < \infty, \text{ bazı } \rho > 0 \right\}$$

şeklinde tanımlanır [23]. Bu tanımda p veya n in bazı özel seçimleri sonucunda aşağıdaki dizi uzayları elde edilir.

Tanım 4.1.4. Tanım 4.1.3 te $\forall k$ için $p = (p_k) = 1$ alınırsa

$$c_0(\Delta^n, M) = \left\{ x = (x_k) : \lim_{k \rightarrow \infty} \left[M \left(\frac{|\Delta^n x_k|}{\rho} \right) \right] = 0, \text{ bazı } \rho > 0 \right\}$$

$$c(\Delta^n, M) = \left\{ x = (x_k) : \lim_{k \rightarrow \infty} \left[M \left(\frac{|\Delta^n x_k - l|}{\rho} \right) \right] = 0, \text{ bazı } \rho > 0, l \in \mathbb{C} \right\}$$

$$l_\infty(\Delta^n, M) = \left\{ x = (x_k) : \sup_{k \geq 0} \left[M \left(\frac{|\Delta^n x_k|}{\rho} \right) \right] < \infty, \text{ bazı } \rho > 0 \right\}$$

uzayları elde edilir. Aynı tanımda $n = 1$ alınırsa,

$$c_0(\Delta, M, p) = \left\{ x = (x_k) : \lim_{k \rightarrow \infty} \left[M \left(\frac{|\Delta x_k|}{\rho} \right) \right]^{p_k} = 0, \text{ bazı } \rho > 0 \right\}$$

$$c(\Delta, M, p) = \left\{ x = (x_k) : \lim_{k \rightarrow \infty} \left[M \left(\frac{|\Delta x_k - l|}{\rho} \right) \right]^{p_k} = 0, \text{ bazı } \rho > 0, l \in \mathbb{C} \right\}$$

$$l_\infty(\Delta, M, p) = \left\{ x = (x_k) : \sup_{k \geq 0} \left[M \left(\frac{|\Delta x_k|}{\rho} \right) \right]^{p_k} < \infty, \text{ bazı } \rho > 0 \right\}$$

elde edilir.

Teorem 4.1.5. $c_0(\Delta^n, M, p)$, $c(\Delta^n, M, p)$ ve $l_\infty(\Delta^n, M, p)$ uzayları $\mathbb{C}$ üzerinde birer lineer uzaydır.

İspat : Burada $l_\infty(\Delta^n, M, p)$ nin lineer uzay olduğunu ispatlarsak diğerleri için de benzer yöntem kullanılabilir. $x, y \in l_\infty(\Delta^n, M, p)$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ olsun. $l_\infty(\Delta^n, M, p)$ uzayının lineer olduğunu göstermek için

$$\sup_{k \geq 0} \left[M \left(\frac{|\Delta^n(\alpha x_k + \beta y_k)|}{\rho_3} \right) \right]^{p_k} < \infty$$

olacak şekilde bir $\rho_3 > 0$ bulmalıyız. $x, y \in l_\infty(\Delta^n, M, p)$ olduğundan

$$\sup_{k \geq 0} \left[M \left(\frac{|\Delta^n x_k|}{\rho_1} \right) \right]^{p_k} < \infty \quad (4.1)$$

ve

$$\sup_{k \geq 0} \left[M \left(\frac{|\Delta^n y_k|}{\rho_2} \right) \right]^{p_k} < \infty \quad (4.2)$$

olacak şekilde $\rho_1 > 0$ ve $\rho_2 > 0$ mevcuttur. Şimdi $\rho_3 = \max(2|\alpha|\rho_1, 2|\beta|\rho_2)$ olarak tanımlayalım. M nin azalmayan ve konveks bir fonksiyon olmasının yanında (4.1) ve (4.2) den dolayı

$$\begin{aligned} \sup_{k \geq 0} \left[M \left(\frac{|\Delta^n(\alpha x_k + \beta y_k)|}{\rho_3} \right) \right]^{p_k} &\leq \sup_{k \geq 0} \left[M \left(\frac{|\Delta^n(\alpha x_k)| + |\Delta^n(\beta y_k)|}{\rho_3} \right) \right]^{p_k} \\ &\leq \sup_{k \geq 0} \left[M \left(\frac{1}{2} \frac{|\Delta^n x_k|}{\rho_1} + \frac{1}{2} \frac{|\Delta^n y_k|}{\rho_2} \right) \right]^{p_k} \\ &\leq \sup_{k \geq 0} \left[\frac{1}{2} \left[M \left(\frac{|\Delta^n x_k|}{\rho_1} \right) + M \left(\frac{|\Delta^n y_k|}{\rho_2} \right) \right] \right]^{p_k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sup_{k \geq 0} \frac{1}{2^{p_k}} \left[M \left(\frac{|\Delta^n x_k|}{\rho_1} \right) + M \left(\frac{|\Delta^n y_k|}{\rho_2} \right) \right]^{p_k} \\
&\leq \sup_{k \geq 0} \left[M \left(\frac{|\Delta^n x_k|}{\rho_1} \right) + M \left(\frac{|\Delta^n y_k|}{\rho_2} \right) \right]^{p_k} \\
&\leq D \sup_{k \geq 0} \left[M \left(\frac{|\Delta^n x_k|}{\rho_1} \right) \right]^{p_k} + D \sup_{k \geq 0} \left[M \left(\frac{|\Delta^n y_k|}{\rho_2} \right) \right]^{p_k} < \infty
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $H = \sup_k p_k$ ve $D = \max(1, 2^{H-1})$ dir. Böylelikle

$(\alpha x + \beta y) \in l_\infty(\Delta^n, M, p)$ olduğu için $l_\infty(\Delta^n, M, p)$ bir lineer uzaydır.

Teorem 4.1.6. $l_\infty(\Delta^n, M, p)$ uzayı

$$G(x) = \inf \left\{ \rho^{p_m/H} : \sup_{k \geq 0} \left[M \left(\frac{|\Delta^n x_k|}{\rho} \right) \right]^{p_k} \right]^{\frac{1}{H}} \leq 1 \right\}$$

paranormu ile tanımlanan bir paranormlu uzaydır.

İspat : $l_\infty(\Delta^n, M, p)$ nin bir lineer uzay olduğunu önceki teoremin ispatında gösterdiğimiz için $G(x)$ fonksiyonunun bir paranorm olduğunu göstermek yeterlidir. Bu taktirde Tanım 2.3 ün gerekli şartları $G(x)$ fonksiyonu için incelendiğinde,

(i) $\Delta^n x_k$ nin tanımı ve M nin Orlicz fonksiyonu olması gereği $G(0) = 0$ olduğu aşıkardır.

(ii) $|\Delta^n(-x_k)| = |\Delta^n x_k|$ olduğundan $G(-x) = G(x)$ dir.

(iii) $x, y \in l_\infty(\Delta^n, M, p)$ olsun. Bu durumda

$$\sup_{k \geq 0} \left[M \left(\frac{|\Delta^n x_k|}{\rho_1} \right) \right]^{p_k} < \infty$$

ve

$$\sup_{k \geq 0} \left[M \left(\frac{|\Delta^n y_k|}{\rho_2} \right) \right]^{p_k} < \infty$$

olacak şekilde $\rho_1 > 0$ ve $\rho_2 > 0$ mevcuttur. Şimdi $\rho = \rho_1 + \rho_2$ alalım. Şu halde

$$\begin{aligned} \left\{ \sup_{k \geq 0} \left[M \left(\frac{|\Delta^n (x_k + y_k)|}{\rho} \right) \right]^{p_k} \right\}^{\frac{1}{H}} &\leq \frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2} \left\{ \sup_{k \geq 0} \left[M \left(\frac{|\Delta^n x_k|}{\rho} \right) \right]^{p_k} \right\}^{\frac{1}{H}} \\ &+ \frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2} \left\{ \sup_{k \geq 0} \left[M \left(\frac{|\Delta^n y_k|}{\rho} \right) \right]^{p_k} \right\}^{\frac{1}{H}} \leq 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} G(x + y) &= \inf \left\{ (\rho_1 + \rho_2)^{p_m/H} : \left[\sup_{k \geq 0} \left[M \left(\frac{|\Delta^n (x_k + y_k)|}{\rho} \right) \right]^{p_k} \right]^{\frac{1}{H}} \leq 1 \right\} \\ &\leq \inf \left\{ \rho_1^{p_m/H} : \left[\sup_{k \geq 0} \left[M \left(\frac{|\Delta^n x_k|}{\rho_1} \right) \right]^{p_k} \right]^{\frac{1}{H}} \leq 1 \right\} \\ &+ \inf \left\{ \rho_2^{p_m/H} : \left[\sup_{k \geq 0} \left[M \left(\frac{|\Delta^n y_k|}{\rho_2} \right) \right]^{p_k} \right]^{\frac{1}{H}} \leq 1 \right\} \\ &\leq G(x) + G(y) \end{aligned}$$

elde edilir.

iv) Skaler çarpımın sürekliliğini göstermek için, herhangi bir $\lambda \in \mathbb{C}$ alalım.

$$G(\lambda x) = \inf \left\{ \rho^{p_m/H} : \left[\sup_{k \geq 0} \left[M \left(\frac{|\lambda \Delta^n x_k|}{\rho} \right) \right]^{p_k} \right]^{\frac{1}{H}} \leq 1 \right\}$$

olduğundan $r = \frac{\rho}{|\lambda|}$ alınarak

$$G(\lambda x) = \inf \left\{ (|\lambda| r)^{p_m/H} : \left[\sup_{k \geq 0} \left[M \left(\frac{|\Delta^n x_k|}{r} \right) \right]^{p_k} \right]^{\frac{1}{H}} \leq 1 \right\}$$

elde edilir. Ayrıca $|\lambda|^{p_k} \leq \max(1, |\lambda|^H)$ olduğu için $|\lambda|^{p_k/H} \leq \left[\max(1, |\lambda|^H) \right]^{\frac{1}{H}}$ olur.

Buradan

$$G(\lambda x) = \left[\max(1, |\lambda|^H) \right]^{\frac{1}{H}} \inf \left\{ (|\lambda| r)^{p_m/H} : \left[\sup_{k \geq 0} \left[M \left(\frac{|\Delta^n x_k|}{r} \right) \right]^{p_k} \right]^{\frac{1}{H}} \leq 1 \right\}$$

elde edilir. $G(x) \rightarrow 0$ iken bu ifade $l_\infty(\Delta^n, M, p)$ de sıfıra yakınsar. Şimdi $n \rightarrow \infty$ iken $\lambda \rightarrow 0$ olduğunu kabul edelim. $x \in l_\infty(\Delta^n, M, p)$ olmak üzere verilen bir $\varepsilon > 0$ ve bazı $\rho > 0$ değerleri için

$$\sup_{k \geq N+1} \left[M \left(\frac{|\Delta^n x_k|}{\rho} \right) \right]^{p_k} < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde N pozitif bir tamsayı olsun. Buradan

$$\left\{ \sup_{k \geq N+1} \left[M \left(\frac{|\Delta^n x_k|}{\rho} \right) \right]^{p_k} \right\}^{\frac{1}{H}} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

elde edilir. $0 < |\lambda| < 1$ iken M nin konveksliğini kullanarak

$$\sup_{k \geq N+1} \left[M \left(\frac{|\lambda \Delta^n x_k|}{\rho} \right) \right]^{p_k} < \sup_{k \geq N+1} \left[|\lambda| M \left(\frac{|\Delta^n x_k|}{\rho} \right) \right]^{p_k} < \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^H$$

yazılabilir. $[0, \infty)$ aralığında M sürekli olduğundan

$$f(t) = \sup_{k \geq 0} \left[M \left(\frac{|t \Delta^n x_k|}{\rho} \right) \right]^{p_k}$$

fonksiyonu sıfırda süreklidir. Dolayısıyla $0 < t < \delta$ için $|f(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde

$0 < \delta < 1$ mevcuttur. Son olarak $n > K$ için $|\lambda_n| < \delta$ olacak biçimde bir K değeri alalım. Buradan $n > K$ için

$$\left\{ \sup_{k \geq 0} \left[M \left(\frac{|\lambda_n \Delta^n x_k|}{\rho} \right) \right]^{p_k} \right\}^{\frac{1}{H}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

olması sonucunda $n > K$ için

$$\left\{ \sup_{k \geq 0} \left[M \left(\frac{|\lambda_n \Delta^n x_k|}{\rho} \right) \right]^{p_k} \right\}^{\frac{1}{H}} < \varepsilon$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.1.7. (i) $0 < \inf p_k \leq p_k \leq 1$ olmak üzere $c_0(\Delta^n, M, p) \subset c_0(\Delta^n, M)$ dir.

(ii) $1 \leq p_k \leq \sup p_k < \infty$ olmak üzere $c_0(\Delta^n, M) \subset c_0(\Delta^n, M, p)$ dir.

İspat : (i) $x \in c_0(\Delta^n, M, p)$ olsun. Yani

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[M \left(\frac{|\Delta^n x_k|}{\rho} \right) \right]^{p_k} = 0$$

olduğunu kabul edelim. $0 < \inf p_k \leq p_k \leq 1$ olduğundan

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[M \left(\frac{|\Delta^n x_k|}{\rho} \right) \right] \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left[M \left(\frac{|\Delta^n x_k|}{\rho} \right) \right]^{p_k} = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla $x \in c_0(\Delta^n, M)$ olur.

(ii) $\forall k$ için $(p_k) \geq 1$ ve $\sup_k p_k < \infty$ olsun. Bu taktirde $x \in c_0(\Delta^n, M)$ iken $0 < \varepsilon < 1$ şartını sağlayan $\forall \varepsilon$ için $k \geq N$ olmak üzere

$$\left[M \left(\frac{|\Delta^n x_k|}{\rho} \right) \right] \leq \varepsilon$$

şartını sağlayan bir N pozitif tamsayısı mevcuttur. $1 \leq p_k \leq \sup p_k < \infty$ olduğundan eşitsizliğin her iki tarafının $k \rightarrow \infty$ iken limiti alınırsa

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[M \left(\frac{|\Delta^n x_k|}{\rho} \right) \right]^{p_k} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left[M \left(\frac{|\Delta^n x_k|}{\rho} \right) \right] \leq \varepsilon < 1$$

elde edilir. Dolayısıyla $x \in c_0(\Delta^n, M, p)$ dir.

Teorem 4.1.8. $\forall k$ için $0 < p_k \leq q_k < \infty$ iken $c_0(\Delta^n, M, p) \subset c_0(\Delta^n, M, q)$ dir.

İspat : $x \in c_0(\Delta^n, M, p)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[M \left(\frac{|\Delta^n x_k|}{\rho} \right) \right]^{p_k} = 0$$

dir. $\forall k$ için $0 < p_k \leq q_k < \infty$ olduğundan

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[M \left(\frac{|\Delta^n x_k|}{\rho} \right) \right]^{q_k} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left[M \left(\frac{|\Delta^n x_k|}{\rho} \right) \right]^{p_k} = 0$$

yazılabilir. Dolayısıyla $x \in c_0(\Delta^n, M, q)$ olur.

Teorem 4.1.9. M , Δ_2 şartını sağlayan bir Orlicz fonksiyonu olsun. Bu durumda $c_0(\Delta^n, M, p) \subset c(\Delta^n, M, p) \subset l_\infty(\Delta^n, M, p)$ dir.

İspat : $x \in c_0(\Delta^n, M, p)$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned} \left[M\left(\frac{|\Delta^n x_k|}{\rho}\right) \right]^{p_k} &= \left[M\left(\frac{|\Delta^n x_k - l + l|}{\rho}\right) \right]^{p_k} \leq \left[M\left(\frac{|\Delta^n x_k - l|}{\rho} + \frac{|l|}{\rho}\right) \right]^{p_k} \\ &\leq \left[M\left(\frac{|\Delta^n x_k - l|}{\rho}\right) + M\left(\frac{|l|}{\rho}\right) \right]^{p_k} \\ &\leq C \left[M\left(\frac{|\Delta^n x_k - l|}{\rho}\right) \right]^{p_k} + C \left[M\left(\frac{|l|}{\rho}\right) \right]^{p_k} \\ &\leq C \left[M\left(\frac{|\Delta^n x_k - l|}{\rho}\right) \right]^{p_k} + C \left[K\delta^{-1}\left(\frac{|l|}{\rho}\right) M(2) \right]^H \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $H = \max(1, \sup p_k)$ ve $C = \max(1, 2^{H-1})$ dir. Dolayısıyla $x \in l_\infty(\Delta^n, M, p)$ dir.

Diğer taraftan $x \in c_0(\Delta^n, M, p)$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned} \left[M\left(\frac{|\Delta^n x_k - l|}{\rho}\right) \right]^{p_k} &\leq \left[M\left(\frac{|\Delta^n x_k| + |l|}{\rho}\right) \right]^{p_k} \leq \left[M\left(\frac{|\Delta^n x_k|}{\rho}\right) + M\left(\frac{|l|}{\rho}\right) \right]^{p_k} \\ &\leq C \left[M\left(\frac{|\Delta^n x_k|}{\rho}\right) \right]^{p_k} + C \left[M\left(\frac{|l|}{\rho}\right) \right]^{p_k} \\ &\leq C \left[M\left(\frac{|\Delta^n x_k|}{\rho}\right) \right]^{p_k} + C \left[K\delta^{-1}\left(\frac{|l|}{\rho}\right) M(2) \right]^H \end{aligned}$$

elde edilir. Bu yüzden $x \in c(\Delta^n, M, p)$ olur ki bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.1.10. $c_0(M, p)$ ve $l_\infty(M, p)$ uzayları normal ve dolayısıyla monotondur.

İspat : $x \in c_0(M, p)$ olsun. Bu durumda

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[M \left(\frac{|x_k|}{\rho} \right) \right]^{p_k} = 0$$

olacak biçimde bir $\rho > 0$ mevcuttur. Ayrıca $|\alpha_k| \leq 1$ şartını sağlayan bir (α_k) skalerler dizisi alalım. Buradan

$$\left[M \left(\frac{|\alpha_k x_k|}{\rho} \right) \right]^{p_k} \leq C \left[M \left(\frac{|x_k|}{\rho} \right) \right]^{p_k} = 0$$

bulunur. Eşitsizliğin her iki tarafının $k \rightarrow \infty$ iken limiti alınırsa

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[M \left(\frac{|\alpha_k x_k|}{\rho} \right) \right]^{p_k} \leq C \lim_{k \rightarrow \infty} \left[M \left(\frac{|x_k|}{\rho} \right) \right]^{p_k} = 0$$

bulunur. Dolayısıyla $(\alpha_k x_k) \in c_0(M, p)$ olduğu için $c_0(M, p)$ uzayı normal olur.

Lemma 4.1.2 den dolayı $c_0(M, p)$ uzayı monotondur.

Şimdi $x \in l_\infty(M, p)$ olduğunu kabul edelim. Şu halde

$$\sup_{k \geq 0} \left[M \left(\frac{|x_k|}{\rho} \right) \right]^{p_k} < \infty$$

olacak biçimde bir $\rho > 0$ mevcuttur. Bunun yanında $|\alpha_k| \leq 1$ şartını sağlayan bir (α_k) skalerler dizisi alınırsa

$$\sup_{k \geq 0} \left[M \left(\frac{|\alpha_k x_k|}{\rho} \right) \right]^{p_k} \leq C \sup_{k \geq 0} \left[M \left(\frac{|x_k|}{\rho} \right) \right]^{p_k} < \infty$$

elde edilir. Bu da $(\alpha_k x_k) \in l_\infty(M, p)$ olmasını gerektirir. Yani, $l_\infty(M, p)$ uzayı normal olur. Aynı şekilde Lemma 4.1.2 den dolayı $l_\infty(M, p)$ uzayı monotondur.

$c_0(\Delta^n, M, p)$, $c(\Delta^n, M, p)$ ve $l_\infty(\Delta^n, M, p)$ uzayları genellikle normal değildir. Şimdi bu uzayların normal olmadığı duruma bir örnek verelim.

ÖRNEK 4.1.11. $M(x) = x$ ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için $p_k = 1$ olduğunu kabul edelim. Bunun yanında $\forall k \in \mathbb{N}$ için $x = (k^m)$ alınırsa açıkça $x \in l_\infty(\Delta^n, M, p)$ dir. Diğer taraftan $(\alpha_k) = ((-1)^k)$ alındığı takdirde $(\alpha_k x_k) \notin l_\infty(\Delta^n, M, p)$ olduğu görülür.

4.2. Orlicz Fonksiyonları Yardımıyla Tanımlanan Fark Paranormlu Dizi Uzayları

Bu kısımda, Orlicz fonksiyonunu kullanarak $c_0(M, \Delta, p, q)$, $c(M, \Delta, p, q)$ ve $l_\infty(M, \Delta, p, q)$ fark paranormlu dizi uzaylarını tanımlayıp bu uzaylarla ilgili bazı teoremleri vereceğiz.

Tanım 4.2.1. W tüm kompleks dizilerin uzayı, M bir Orlicz fonksiyonu, $p = (p_k)$

pozitif reel sayıların bir dizisi, $t_k = \left(\frac{1}{p_k}\right)$ ve (X, q) bir yarınormlu uzay olmak üzere

$$c_0(M, \Delta, p, q) = \left\{ (x_k) \in W : \lim_{k \rightarrow \infty} \left[M \left(\frac{q(\Delta x_k)}{\rho} \right) \right]^{p_k} t_k = 0, \text{ bazı } \rho > 0 \right\}$$

$$c(M, \Delta, p, q) = \left\{ (x_k) \in W : \lim_{k \rightarrow \infty} \left[M \left(\frac{q(\Delta x_k - L)}{\rho} \right) \right]^{p_k} t_k = 0, \text{ bazı } \rho > 0, L \in \mathbb{C} \right\}$$

$$l_\infty(M, \Delta, p, q) = \left\{ (x_k) \in W : \sup_{k \geq 0} \left[M \left(\frac{q(\Delta x_k)}{\rho} \right) \right]^{p_k} t_k < \infty, \text{ bazı } \rho > 0 \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 4.2.2. $\forall p = (p_k)$ pozitif reel sayıların bir dizisi için $c_0(M, \Delta, p, q)$, $c(M, \Delta, p, q)$ ve $l_\infty(M, \Delta, p, q)$ birer lineer uzaydır.

İspat : Burada $c_0(M, \Delta, p, q)$ uzayının bir lineer uzay olduğunu ispatlarsak diğerleri için de benzer yöntem kullanılabilir.

$x = (x_k)$, $y = (y_k) \in c_0(M, \Delta, p, q)$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ olsun. $c_0(M, \Delta, p, q)$ uzayının lineerliğini göstermek için

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[M \left(\frac{q(\alpha \Delta x_k + \beta \Delta y_k)}{\rho} \right) \right]^{p_k} t_k = 0$$

olacak biçimde bir $\rho > 0$ bulmalıyız. $x, y \in c_0(M, \Delta, p, q)$ olduğundan

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[M \left(\frac{q(\Delta x_k)}{\rho_1} \right) \right]^{p_k} t_k = 0 \quad (4.3)$$

ve

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[M \left(\frac{q(\Delta y_k)}{\rho_2} \right) \right]^{p_k} t_k = 0 \quad (4.4)$$

olacak şekilde $\rho_1 > 0$ ve $\rho_2 > 0$ mevcuttur. Şimdi $\rho = \max(2|\alpha|\rho_1, 2|\beta|\rho_2)$ olsun. M azalmayan ve konveks bir fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned} \left[M \left(\frac{q(\alpha \Delta x_k + \beta \Delta y_k)}{\rho} \right) \right]^{p_k} t_k &\leq \left[M \left(\frac{q(\alpha \Delta x_k) + q(\beta \Delta y_k)}{\rho} \right) \right]^{p_k} t_k \\ &\leq \left[M \left(\frac{1}{2} \frac{q(\Delta x_k)}{\rho_1} + \frac{1}{2} \frac{q(\Delta y_k)}{\rho_2} \right) \right]^{p_k} t_k \\ &\leq \left[\frac{1}{2} \left[M \left(\frac{q(\Delta x_k)}{\rho_1} \right) + M \left(\frac{q(\Delta y_k)}{\rho_2} \right) \right] \right]^{p_k} t_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{2^{p_k}} \left[M\left(\frac{q(\Delta x_k)}{\rho_1}\right) + M\left(\frac{q(\Delta y_k)}{\rho_2}\right) \right]^{p_k} t_k \\
&\leq \left[M\left(\frac{q(\Delta x_k)}{\rho_1}\right) + M\left(\frac{q(\Delta y_k)}{\rho_2}\right) \right]^{p_k} t_k \\
&\leq D \left[M\left(\frac{q(\Delta x_k)}{\rho_1}\right) \right]^{p_k} t_k + D \left[M\left(\frac{q(\Delta y_k)}{\rho_2}\right) \right]^{p_k} t_k
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $H = \sup_k p_k$ ve $D = \max(1, 2^{H-1})$ dir. Son olarak eşitsizliğin her iki

tarafının $k \rightarrow \infty$ iken limiti alınırsa, (4.3) ve (4.4) ten dolayı

$$\begin{aligned}
\lim_{k \rightarrow \infty} \left[M\left(\frac{q(\alpha \Delta x_k + \beta \Delta y_k)}{\rho}\right) \right]^{p_k} t_k &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ D \left[M\left(\frac{q(\Delta x_k)}{\rho_1}\right) \right]^{p_k} t_k + D \left[M\left(\frac{q(\Delta y_k)}{\rho_2}\right) \right]^{p_k} t_k \right\} \\
&\leq D \lim_{k \rightarrow \infty} \left[M\left(\frac{q(\Delta x_k)}{\rho_1}\right) \right]^{p_k} t_k + D \lim_{k \rightarrow \infty} \left[M\left(\frac{q(\Delta y_k)}{\rho_2}\right) \right]^{p_k} t_k \\
&= 0
\end{aligned}$$

olacağından $(\alpha x_k + \beta y_k) \in c_0(M, \Delta, p, q)$ olduğu sonucu çıkar. Bu da $c_0(M, \Delta, p, q)$ nun bir lineer uzay olduğunu ispatlar.

Teorem 4.2.3. $l_\infty(M, \Delta, p, q)$ uzayı

$$g(x) = q(x_1) + \inf \left\{ \rho^{p_k/H} : \sup_{k \geq 1} \left[M\left(\frac{q(\Delta x_k)}{\rho}\right) t_k^{\frac{1}{p_k}} \right] \leq 1, \rho > 0 \right\}$$

paranormu ile tanımlanan bir paranormlu uzaydır.

İspat : Önceki teoremin ispatında $c_0(M, \Delta, p, q)$ nun bir lineer uzay olduğunu gösterdiğimiz için benzer yöntemle $l_\infty(M, \Delta, p, q)$ nun lineerliği de gösterilebilir. Bu

taktirde, $g(x)$ fonksiyonunun bir paranorm olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Bu amaçla Tanım 2.3 ün gerekli şartları incelendiğinde,

(i) q bir yarınorm ve M bir Orlicz fonksiyonu olduğundan $x = \theta$ için $q(\theta) = 0$ ve $M(0) = 0$ olması sonucunda $g(\theta) = 0$ dır.

(ii) $q(-x) = q(x)$ olduğu için $g(-x) = g(x)$ olur.

(iii) $x = (x_k)$, $y = (y_k) \in l_\infty(M, \Delta, p, q)$ olsun. Bu durumda

$$M\left(\frac{q(\Delta x_k)}{\rho_1}\right)t_k^{\frac{1}{p_k}} \leq 1$$

ve

$$M\left(\frac{q(\Delta y_k)}{\rho_2}\right)t_k^{\frac{1}{p_k}} \leq 1$$

olacak şekilde $\rho_1 > 0$ ve $\rho_2 > 0$ mevcuttur. Şimdi $\rho = \rho_1 + \rho_2$ alalım. Şu halde

$$\begin{aligned} \sup_{k \geq 1} \left[M\left(\frac{q(\Delta x_k + \Delta y_k)}{\rho}\right)t_k^{\frac{1}{p_k}} \right] &\leq \frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2} \sup_{k \geq 1} \left[M\left(\frac{q(\Delta x_k)}{\rho}\right)t_k^{\frac{1}{p_k}} \right] \\ &+ \frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2} \sup_{k \geq 1} \left[M\left(\frac{q(\Delta y_k)}{\rho}\right)t_k^{\frac{1}{p_k}} \right] \leq 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} g(x + y) &= q(x_1 + y_1) + \inf \left\{ (\rho_1 + \rho_2)^{p_k/H} : \sup_{k \geq 1} \left[M\left(\frac{q(\Delta x_k + \Delta y_k)}{\rho}\right)t_k^{\frac{1}{p_k}} \right] \leq 1 \right\} \\ &\leq q(x_1) + \inf \left\{ (\rho_1)^{p_k/H} : \sup_{k \geq 1} \left[M\left(\frac{q(\Delta x_k)}{\rho_1}\right)t_k^{\frac{1}{p_k}} \right] \leq 1 \right\} \\ &+ q(y_1) + \inf \left\{ (\rho_2)^{p_k/H} : \sup_{k \geq 1} \left[M\left(\frac{q(\Delta y_k)}{\rho_2}\right)t_k^{\frac{1}{p_k}} \right] \leq 1 \right\} \end{aligned}$$

$$\leq g(x) + g(y)$$

elde edilir.

(iv) Skaler çarpımın sürekliliğini göstermek için herhangi bir $\lambda \in \mathbb{C}$ alalım.

$$g(\lambda x) = q(\lambda x_1) + \inf \left\{ \rho^{p_k/H} : \sup_{k \geq 1} \left[M \left(\frac{q(\lambda \Delta x_k)}{\rho} \right) t_k^{\frac{1}{p_k}} \right] \leq 1 \right\}$$

olduğundan $r = \frac{\rho}{|\lambda|}$ alınarak

$$g(\lambda x) = q(\lambda x_1) + \inf \left\{ (|\lambda| r)^{p_k/H} : \sup_{k \geq 1} \left[M \left(\frac{q(\Delta x_k)}{r} \right) t_k^{\frac{1}{p_k}} \right] \leq 1 \right\}$$

yazılabilir. Ayrıca $|\lambda|^{p_k} \leq \max(1, |\lambda|^H)$ olduğu için $|\lambda|^{p_k/H} \leq \left[\max(1, |\lambda|^H) \right]^{\frac{1}{H}}$ olur.

Buradan

$$g(\lambda x) = q(\lambda x_1) + \left[\max(1, |\lambda|^H) \right]^{\frac{1}{H}} \inf \left\{ (r)^{p_k/H} : \sup_{k \geq 1} \left[M \left(\frac{q(\Delta x_k)}{r} \right) t_k^{\frac{1}{p_k}} \right] \leq 1 \right\}$$

elde edilir. $g(x) \rightarrow 0$ iken bu ifade $l_\infty(M, \Delta, p, q)$ da sıfıra yakınsar. Şimdi $n \rightarrow \infty$ iken $\lambda_n \rightarrow 0$ olduğunu kabul edelim. $x \in l_\infty(M, \Delta, p, q)$ olmak üzere verilen bir $\varepsilon > 0$ ve bazı $\rho > 0$ değerleri için

$$\sup_{k \geq N+1} \left[M \left(\frac{q(\Delta x_k)}{\rho} \right) t_k^{\frac{1}{p_k}} \right]^{p_k} < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde N pozitif bir tamsayı olsun. Buradan $0 < |\lambda| < 1$ iken M nin konveksliğini kullanarak

$$\sup_{k \geq N+1} \left[M \left(\frac{q(\lambda \Delta x_k)}{\rho} \right) t_k^{\frac{1}{p_k}} \right]^{p_k} < \sup_{k \geq N+1} \left[|\lambda| M \left(\frac{q(\Delta x_k)}{\rho} \right) t_k^{\frac{1}{p_k}} \right]^{p_k} < \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^H$$

yazılabilir. $[0, \infty)$ aralığında M sürekli olduğu için

$$f(t) = \sup_{k \geq N+1} \left[M \left(\frac{q(t\Delta x_k)}{\rho} \right) t_k^{\frac{1}{p_k}} \right]^{p_k}$$

fonksiyonu sıfırda süreklidir. Dolayısıyla $0 < t < \delta$ için $|f(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde

$0 < \delta < 1$ mevcuttur. Son olarak $n > K$ için $|\lambda_n| < \delta$ olacak biçimde bir K değeri alalım. Buradan $n > K$ için

$$\sup_{k \geq 1} \left[M \left(\frac{q(\lambda_n \Delta x_k)}{\rho} \right) t_k^{\frac{1}{p_k}} \right] < \varepsilon$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.2.4. $p \in l_\infty$ olmak üzere $c_0(M, \Delta, p, q)$, $c(M, \Delta, p, q)$ ve $l_\infty(M, \Delta, p, q)$ uzayları

$$g(x) = q(x_1) + \inf \left\{ \rho^{p_k/J} : \sup_{k \geq 1} \left[M \left(\frac{q(\Delta x_k)}{\rho} \right) t_k^{\frac{1}{p_k}} \right] \leq 1, \rho > 0 \right\}$$

paranormu ile tanımlanmış bir tam paranormlu uzaydır.

İspat : $l_\infty(M, \Delta, p, q)$ uzayının bir tam paranormlu uzay olduğunu gösterirsek diğer uzayların tam paranormlu olduğu da benzer şekilde gösterilebilir.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $x^n = (x_k^n)_{k=1}^\infty$ olmak üzere, (x^n) dizisi $l_\infty(M, \Delta, p, q)$ uzayında bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda $i, j \rightarrow \infty$ iken $g(x^i - x^j) \rightarrow 0$ olur. Verilen bir $\varepsilon > 0$ için

$$\frac{\varepsilon}{rx_0} > 0 \quad \text{ve} \quad M \left(\frac{rx_0}{2} \right) \geq \sup_{k \geq 1} (p_k)^{t_k}$$

olacak şekilde r ve x_0 alalım. Şu halde $i, j \rightarrow \infty$ iken $g(x^i - x^j) \rightarrow 0$ olmasından dolayı $\forall i, j \geq m_0$ için

$$g(x^i - x^j) < \frac{\varepsilon}{rx_0}$$

olacak şekilde bir $m_0 \in \mathbb{N}$ mevcuttur. Buradan

$$q(x_1^i - x_1^j) < \frac{\varepsilon}{rx_0}$$

ve

$$\inf \left\{ \rho^{p_k/J} : \sup_{k \geq 1} \left[M \left(\frac{q(\Delta x_k^i - \Delta x_k^j)}{\rho} \right) t_k^{\frac{1}{p_k}} \right] \leq 1, \rho > 0 \right\} < \frac{\varepsilon}{rx_0} \quad (4.5)$$

elde edilir. Bu da (x_1^i) nin X te bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. Ayrıca X tam olduğu için (x_1^i) dizisi X te yakınsaktır.

Şimdi $\lim_{i \rightarrow \infty} x_1^i = x_1$ olduğunu kabul edelim. Buradan

$$\lim_{j \rightarrow \infty} q(x_1^i - x_1^j) < \frac{\varepsilon}{rx_0}$$

olmasından dolayı

$$q(x_1^i - x_1) < \frac{\varepsilon}{rx_0}$$

yazılabilir. Ayrıca (4.1) den dolayı

$$M \left(\frac{q(\Delta x_k^i - \Delta x_k^j)}{g(x^i - x^j)} \right) t_k^{\frac{1}{p_k}} \leq 1$$

elde edilir. Bu ise

$$M \left(\frac{q(\Delta x_k^i - \Delta x_k^j)}{g(x^i - x^j)} \right) \leq (p_k)^{t_k} \leq M \left(\frac{rx_0}{2} \right)$$

olduğunu gösterir. Dolayısıyla

$$q(\Delta x_k^i - \Delta x_k^j) < \frac{rx_0}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{rx_0} < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacağından $\forall k \in \mathbb{N}$ için (Δx_k^i) dizisi X te bir Cauchy dizisidir. Bu yüzden (Δx_k^i) dizisi X te yakınsaktır.

Şimdi $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\lim_{i \rightarrow \infty} \Delta x_k^i = y_k$ olsun. Buradan $\lim_{i \rightarrow \infty} \Delta x_2^i = y_1 - x_1$ yazılabilir. Bu şekilde devam edilirse $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\lim_{i \rightarrow \infty} \Delta x_{k+1}^i = y_k - x_k$ elde edilir. Ayrıca M nin konveksliğini kullanarak

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \sup_{k \geq 1} M \left(\frac{q(\Delta x_k^i - \Delta x_k^j)}{\rho} \right) t_k^{\frac{1}{p_k}} \leq 1$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\sup_{k \geq 1} M \left(\frac{q(\Delta x_k^i - \Delta x_k)}{\rho} \right) t_k^{\frac{1}{p_k}} \leq 1$$

yazılabilir. Son olarak $i \geq m_0$ şeklinde alalım. Bu şekilde ρ ların infumumu alınarak $g(x^i - x) < \varepsilon$ elde edilir. Bu da $(x^i - x) \in l_\infty(M, \Delta, p, q)$ olmasını gerektirir. $l_\infty(M, \Delta, p, q)$ bir lineer uzay olduğu için $x = x^i - (x^i - x) \in l_\infty(M, \Delta, p, q)$ şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla $l_\infty(M, \Delta, p, q)$ tamdır.

Teorem 4.2.5. M_1 ve M_2 , Δ_2 şartını sağlayan iki Orlicz fonksiyonu olsun. $Z = c, c_0$ veya l_∞ olmak üzere

(i) Eğer $(p_k) \in l_\infty$ ise $Z(M_1, \Delta, p, q) \subseteq Z(M_2 \circ M_1, \Delta, p, q)$ dir.

(ii) $Z(M_1, \Delta, p, q) \cap Z(M_2, \Delta, p, q) \subseteq Z(M_1 + M_2, \Delta, p, q)$ dir.

İspat : (i) $(x_k) \in c_0(M_1, \Delta, p, q)$ olsun. Tanım gereği $k \rightarrow \infty$ iken

$$\left\{ \left[M_1 \left(\frac{q(\Delta x_k)}{\rho} \right) \right]^{p_k} t_k \right\} \rightarrow 0$$

olur. Ayrıca $\forall k \in \mathbb{N}$ için $y_k = M_1 \left(\frac{q(\Delta x_k)}{\rho} \right)$ alalım. $0 < \delta < 1$ olmak üzere $y_k \geq \delta$ için

$$y_k < \frac{y_k}{\delta} < 1 + \frac{y_k}{\delta}$$

elde edilir. M_2 fonksiyonu Δ_2 şartını sağladığından

$$M_2(y_k) < \frac{Ky_k}{2\delta} M_2(2) < \frac{Ky_k}{2\delta} M_2(2) = KM_2(2) \frac{y_k}{\delta}$$

olacak şekilde bir $K \geq 1$ mevcuttur. Buradan $k \rightarrow \infty$ iken

$$\begin{aligned} \left[(M_2 \circ M_1) \left(\frac{q(\Delta x_k)}{\rho} \right) \right]^{p_k} t_k &= \left[M_2 \left\{ M_1 \left(\frac{q(\Delta x_k)}{\rho} \right) \right\} \right]^{p_k} t_k \\ &= [M_2(y_k)]^{p_k} t_k \\ &\leq \max \left\{ \sup_k ([M_2(1)]^{p_k}), \sup_k ([KM_2(2)\delta^{-1}]^{p_k}) \right\} (y_k)^{p_k} t_k \rightarrow 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Yani $(x_k) \in c_0(M_2 \circ M_1, \Delta, p, q)$ dır. Diğer durumlar da benzer şekilde ispatlanabilir.

(ii) $x_k \in c_0(M_1, \Delta, p, q) \cap c_0(M_2, \Delta, p, q)$ olsun. Bu durumda $k \rightarrow \infty$ iken

$$\left\{ \left[M_1 \left(\frac{q(\Delta x_k)}{\rho_1} \right) \right]^{p_k} t_k \right\} \rightarrow 0$$

ve

$$\left\{ \left[M_2 \left(\frac{q(\Delta x_k)}{\rho_2} \right) \right]^{p_k} t_k \right\} \rightarrow 0$$

olacak şekilde $\rho_1 > 0$ ve $\rho_2 > 0$ mevcuttur. $\rho = \max\{\rho_1, \rho_2\}$ alınırsa

$$\left\{ \left[(M_1 + M_2) \left(\frac{q(\Delta x_k)}{\rho} \right) \right]^{p_k} t_k \right\} \leq D \left\{ \left[M_1 \left(\frac{q(\Delta x_k)}{\rho_1} \right) \right]^{p_k} t_k + \left[M_2 \left(\frac{q(\Delta x_k)}{\rho_2} \right) \right]^{p_k} t_k \right\}$$

elde edilir. Dolayısıyla $c_0(M_1, \Delta, p, q) \cap c_0(M_2, \Delta, p, q) \subset c_0(M_1 + M_2, \Delta, p, q)$ dir.

Diğer durumlar da benzer şekilde ispatlanabilir.

KAYNAKLAR

1. Nakano, H., Concave Modulars J. Math. Soc. Japan, 5, 29-49, 1953.
2. Ruckle, W. H., FK Spaces in Which the Sequence of Coordinate Vectors is Bounded, Canad. J. Math, 25, 973-978, 1973.
3. Maddox, I. J., Sequence Spaces Defined by a Modulus, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 100, 161-166, 1986.
4. Connor, J., On Strong Matrix Summability with Respect to a Modulus and Statistical Convergence, Canad. Math. Bull., 32, 194-198, 1989.
5. Kızmaz, H., On Certain Sequence Spaces, Canad. Math. Bull., 24 (2), 169-176, 1981.
6. Gaur, A. K., Mursaleen, M., Difference Sequence Spaces Defined by a Sequence of Moduli, Demonstratio Math. 31, 275-278, 1998.
7. Altın, Y., et al., The Sequences Space $\left|\overline{N}_p\right|(M, r, q, s)$ on Seminormed Spaces, Appl. Math. and Comp., 154, 423-430, 2004.
8. Tripathy, B. C., On a Class of Generalized Difference Sequences Defined by a Modulus Function, Hokkaido Math. J., 34, 667-677, 2005.
9. Lindenstrauss, J., Tzafriri, L., On Orlicz Sequence Spaces, Israel J. Math., 10(3), 379-390, 1971.
10. Parashar, S. D., Choudhary, B., Sequence Spaces Defined by Orlicz Functions, Indian J. Pure Appl. Math. 25 (4), 419-428, 1994.
11. Bhardwaj, V. K., Singh, N., Some Sequence Spaces Defined by $\left|\overline{N}, p_n\right|$ Summability and an Orlicz Function, Indian J. Pure Appl. Math. 31 (3), 319-325, 2000.
12. Nuray, F., Gülcü, A., Some New Sequence Spaces Defined by Orlicz Functions, Indian J. Pure Appl. Math. 26 (12), 1169-1176, 1995.
13. Maddox, I. J., Elements of Functional Analysis, Cambridge University Press, 1970.
14. Pehlivan, S., Fisher, B., On Some Sequence Spaces, Indian J. Pure Appl. Math, 25, 1067-1071, 1994.
15. Maddox, I. J., Elements of Functional Analysis, Cambridge University Press (Second Edition), 1988.

16. Wilansky, A., Functional Analysis, Blaisdell Publishing Company, New York, 1964.
17. Kreyszig, E., Introductory Functional Analysis with Applications, Wiley, 1978.
18. Krasnoselskii, M. A., Rutitskii, Y. B., Convex Functions and Orlicz Spaces, Groningen, Netherlands, 1961.
19. Kamphan, P. K., Gupta, M., Sequence Spaces and Series, Marcel Dekker. Inc., New York, 1981.
20. Boos, J., Classical and Modern Methods in Summability, p. 543, Oxford Univ. Pres, 2000.
21. Çolak, R., Et, M., On Some Generalized Difference Sequence Spaces, Soochow Journal of Math., 21 (4), 377-386, 1995.
22. Et, M., Başarır, M., On Some New Generalized Difference Sequence Spaces, Periodica Math. Hungarica, 35 (3), 169-175, 1997.
23. Mursaleen, Khan, M. A., Qamaruddin, Difference Sequence Spaces Defined by Orlicz Functions, Demonstratio Math., 32 (1), 145-150, 1999.

ÖZGEÇMİŞ

Özgür BAYSAL, 1979 yılında Kayseri’de doğdu. İlk ve orta öğrenimini Kayseri’de tamamladı. 2000 yılında Orta Doğu Teknik Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümü’nden mezun oldu. 2003 yılında Erciyes Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’nde yüksek lisans öğrenimine başladı. Halen Kayseri Kocasinan Ahmet Eren Anadolu Lisesi’nde matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.

Adres : Hürriyet Mah. Fırat Cad. No: 75/10, Melikgazi/KAYSERİ

E-posta : baysaloz@msn.com