T.C

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ RAMANUJAN TOPLAMLARININ ÖZELLİKLERİ VE UYGULAMALARI

Nihal AKSÜLLÜ DİNCER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Konya, 2008

T.C
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ RAMANUJAN TOPLAMLARININ

ÖZELLİKLERİ VE UYGULAMALARI

Nihal AKSÜLLÜ DİNCER

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 04/08/2008 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir

....	....	....
Yrd.Doç.Dr.Saadet ARSLAN	Prof.Dr.Hasan ŞENAY	Prof.Dr.Durmuş BOZKURT
(Danışman)	(Üye)	(Üye)

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GENELLEŞTİRİLMİŞ RAMANUJAN TOPLAMLARININ ÖZELLİKLERİ VE UYGULAMALARI

Nihal AKSÜLLÜ DİNCER

Selçuk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Saadet ARSLAN
2008, 48 Sayfa

Jüri: Yrd. Doç. Dr. Saadet ARSLAN
Prof. Dr. Hasan ŞENAY
Prof. Dr. Durmuş BOZKURT

$n \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{Z}^+$ ve $\mu(r)$ *Möbius* fonksiyonu olmak üzere $C(n,r) = \sum_{d|(n,r)} \mu\left(\frac{r}{d}\right).d$ ile tanımlanan *Ramanujan* toplamının iki genellemesi Ecford Cohen tarafından *Jordan*'ın *Totient* fonksiyonu $J_k(r)$ ve *Cohen'*nin *Totient* fonksiyonu $\Phi_k(r)$ kullanılarak sırasıyla, $C^{(k)}(n,r) = \sum_{d|(n,r)} \mu\left(\frac{r}{d}\right) d^k$ ve $C^k(n,r) = \sum_{d^k|(n,r^k)_k} \mu\left(\frac{r}{d}\right) d^k$ biçiminde verilir.

Tom Apostol tarafından *Dirichlet* çarpımının genellemesi olarak verilen $S_{f,g}(n,r) = \sum_{d|(n,r)} f(d) g\left(\frac{r}{d}\right)$ çarpımında özel durumda $f(r) = r,\ g(r) = \mu(r)$ alınırsa $C(n,r)$ ye dönüşür. Bütün bu genellemelerde *Möbius* fonksiyonu $\mu(r)$ nin aritmetik ifadesinde hiçbir değişiklik olmamıştır.

$C(n,r)$ nin yeni bir genellemesi, klasik *Ramanujan* toplamında alışılmış *Möbius* fonksiyonu $\mu(r)$ nin yerine *Souriau-Hsu Möbius* fonksiyonu μ_α yazılarak tanımlanır ve bu genelleme $C^{(\alpha)}(n,r) = \sum_{d|(n,r)} \mu_\alpha\left(\frac{r}{d}\right).d$ şeklinde verilir (Laohakosol ve ark. 2006).

Anahtar Kelimeler: Genelleştirilmiş Ramanujan Toplamları, Genelleştirilmiş Totient Fonksiyonları, Genelleştirilmiş Möbius Fonksiyonları

ABSTRACT
Ms Thesis

PROPERTIES OF GENERALIZED RAMANUJAN SUMS AND ITS APPLICATIONS

Nihal AKSÜLLÜ DİNCER

Selçuk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Yrd. Doç. Dr. Saadet ARSLAN
2008, 48 Sayfa

Jury: Yrd. Doç. Dr. Saadet ARSLAN
Prof. Dr. Hasan ŞENAY
Prof. Dr. Durmuş BOZKURT

The *Ramanujan* sum is defined by $C(n,r)=\sum_{d|(n,r)}\mu\left(\frac{r}{d}\right).d$ where $n\in\mathbb{Z}$, $r\in\mathbb{Z}^{+}$ and $\mu(r)$ is the *Möbius* function.Two generalizations of $C(n,r)$ have been obtained by Ecford Cohen using the *Jordan*'s *Totient* function $J_k(r)$ and the *Cohen*'s *Totient* function $\Phi_k(r)$. These generalizations are given by

$$C^{(k)}(n,r)=\sum_{d|(n,r)}\mu\left(\frac{r}{d}\right)d^k \text{ and } C^k(n,r)=\sum_{d^k|(n,r^k)_k}\mu\left(\frac{r}{d}\right)d^k$$

respectively.

Tom Apostol introduced the sum $S_{f,g}(\mathrm{n,r})=\sum_{d|(n,r)}f(d)g\left(\frac{r}{d}\right)$ which is generalized the *Dirichlet* convolution and reduced $C(n,r)$ with $f(r)=r,\ g(r)=\mu(r)$. All these generalizations do not affect the *Möbius* function $\mu(r)$ in their arithmetical representations.

A new generalization of the Ramanujan sum is defined by replacing the usual the *Möbius* function $\mu(r)$ in the classical *Ramanujan* sum with the *Souriau-Hsu Möbius* function μ_α, and this generalization is given by $C^{(\alpha)}(n,r)=\sum_{d|(n,r)}\mu_\alpha\left(\frac{r}{d}\right).d$ (Laohakosol ve ark. 2006).

Key Words: Generalized Ramanujan Sums, Generalized Totient Function,Generalized Möbius Function.

ÖNSÖZ

Tez çalışmam süresince yardımlarını, bilgi ve tecrübelerini esirgemeyen ve kendisiyle çalışmanın bana çok şey kazandırdığına içtenlikle inandığım değerli danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Saadet ARSLAN'a, eğitimim süresince maddi ve manevi her konuda beni destekleyen, bugünlere gelmemin ana mimarı olan sevgili aileme ve çalışmalarım sırasında desteğini esirgemeyen eşim İbrahim DİNCER'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım

Nihal AKSÜLLÜ DİNCER

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER

(a,b)	a ile b nin en büyük ortak bölei
$\mid$	Böler
σ_k	Bölen fonksiyonları
$*$	*Dirichlet* çarpım
φ	*Euler Totient* fonksiyonu
Φ_k	*Eckford Cohen*'nin *Totient* fonksiyonu
J_k	*Jordan*'ın *Totient* fonksiyonu
ψ_k	*Klee'*nin *Totient* fonksiyonu
μ	Mőbius fonksiyon
$C(n,r)$	*Ramanujan* toplamı
$C^*(n,r)$	*Ramanujan* toplamının *unitary* benzeri
S_k	*Schemmel'* in *Totient* fonksiyonu
μ_α	*Souriau-Hsu Möbius* fonksiyonu
$\parallel$	*Unitary* bölen
$\oplus$	*Unitary* çarpım

1. GİRİŞ

Anderson ve Apostol 1952**,** *Möbius* fonksiyonuna ve *Euler*'in φ fonksiyonuna bağlı olarak *Ramanujan* toplamının nasıl hesaplanacağını göstermiştir. Buna bağlı olarak $S(n,r)=\sum_{d|(n,r)} f(d)g\left(\frac{r}{d}\right)$ ile tanımlanan iki değişkenli fonksiyonlar incelenmiş ve özel durumlarda $C_r(n)$ *Ramanujan* toplamı değerlendirilmiştir. $S(n,r)$ nın çarpanlanabilirliği ile ilgili teoremler verilmiştir.

Apostol 1972**,** $S_{f,g}(n,r)=\sum_{d|(n,r)} f(d)g\left(\frac{r}{d}\right)$ toplamının yeni aritmetik özellikleri verilmiştir. Bu aritmetik özellikler *Ramanujan* toplamlarının ve *Sterneck* fonksiyonlarının bilinen özelliklerini genelleştirir. Bu çalışmada kullanılan metot daha önce verilenlerden daha basit ve kolaydır. Ayrıca pek çok yazar tarafından çalışılan *Smith* determinant formülü bu yeni genellemelerin yardımı ile genişletilir:

$$\mathrm{A}_{nxn}=(a_{ij})_{nxn}=\left[S_{f,g}(i,j)\right]$$

ise

$$\det \mathrm{A}=f(1).f(2).\cdots.f(n).g(1)^n .$$

Haukkanen 1989**,** Narkiewicz'in tanımlamış olduğu *regüler* çarpım *A*-çarpım olmak üzere**,** çarpanlanabilir bir aritmetik fonksiyonun *A*-çarpanlanabilir olması için gerek ve yeter şart genelleştirilmiş *Ramanujan* toplamları yardımı ile verilmiştir. Ayrıca çarpanlanabilir bir aritmetik fonksiyonun tam çarpanlanabilir olması için gerek ve yeter şart yine genelleştirilmiş *Ramanujan* toplamları ile verilmiştir.

Haukkanen 1991**,** Aritmetik *semi*-grupların kümesinde $(\bmod r)$ ye göre *totally A-k*-çift fonksiyonların *Dirichlet* serilerini kullanılarak *Ramanujan* özdeşliklerinin genellemelerini çalışmıştır.

Johnson 1982**,** $S_r(n)$ *Ramanujan* toplamının *unitary* benzeri

$$S_r^*(n)=\sum_{d\|(n,r)_*} f(d)g\left(\frac{r}{d}\right)$$

ile tanımlanarak çarpanlanabilirlik özelliği çalışılmıştır.

Johnson 1990, $S(n,r)=\sum_{d|(n,r)} f(d)g(\frac{r}{d})$ biçiminde Anderson ve Apostol tarafından verilen genelleştirilmiş *Ramanujan* toplamları için çarpanlanabilir bir fonksiyonun hangi şartlar altında genelleştirilmiş *Ramanujan* toplamı olacağı ile ilgili gerek ve yeter şartlar verilmiştir.

Haukanen 1996, *n* pozitif bir tamsayı ve *d*, *n*'nin pozitif bir böleni olmak üzere bütün $\langle n,d\rangle$ sıralı ikilileri üzerinde tanımlanan *kompleks* değerli *K*(*n,d*) fonksiyonu için *f* ve *g* aritmetik fonksiyonlarının *K*- çarpımı

$$\left(f *_K g\right)=\sum_{d|n} K\left(n,d\right)f\left(d\right)g\left(\frac{n}{d}\right)$$

ile tanımlanır. Özel olarak $K(n,d)\equiv 1$ alınırsa *K*-çarpımı *Dirichlet* çarpımına dönüşür.

Toth 1997, *A*-çarpımı Narkiewicz'in *regüler* çarpımı olmak üzere *n* nin *A*- bölenlerinin sayısı τ_A *(n)* olsun. Bu çalışmada τ_A için bir *asimptotik* formül verilmiştir.

Laohakosol ve ark. 2002, μ_α genelleştirilmiş *Möbius* kavramını ilk kez 1995 te Hsu kullanmıştır. Tam çarpanlanabilir fonksiyonlara ait $\left(\mu_\alpha f\right)^{-1}=\mu_{-\alpha} f$ ve $f^\alpha=\mu_{-\alpha} f$ biçimindeki iki özdeşlik genelleştirilmiş *Möbius* fonksiyonu μ_α kullanılarak ortaya konulmuştur.

Laohakosol ve ark. 2006, Alışılmış *Ramanujan* toplamlarında klasik *Möbius* fonksiyonu yerine, *Souriau - Hsu Möbius* fonksiyonu olarak adlandırılan ve $\mu_\alpha\left(r\right)=\prod_{p|r}\binom{\alpha}{v_p\left(r\right)}\left(-1\right)^{v_p(r)}$ şeklinde tanımlanan *Souriau-Hsu Möbius* fonksiyonu μ_α kullanılarak, genelleştirilmiş *Ramanujan* toplamları: *n* negatif olmayan bir tam sayı ve *r* pozitif tam sayı olmak üzere $C^{(\alpha)}\left(n,r\right)=\sum_{d|(n,r)} d\mu_\alpha\left(\frac{r}{d}\right)$ biçiminde tanımlamıştır. Bu genelleştirilmiş *Ramanujan* toplamlarının aritmetik özelliklerini incelemiştir.

Bu çalışmamız beş bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünde konuyla ilgili yapmış olduğumuz kaynak araştırması verilmiştir. İkinci bölümde temel tanım ve teoremler, üçüncü bölümde aritmetik çarpımlar (*konvülüsyonlar*), dördüncü bölümde

Euler Totient fonksiyonunun genellemeleri, sonlu değişmeli grupların karakterleri ve karakterlerin o*rtagonallik* bağıntıları verilmiştir. Beşinci bölümde genelleştirilmiş *Ramanujan* toplamları ve genelleştirilmiş *Möbius* fonksiyonu ile tanımlanan genelleştirilmiş *Ramanujan* toplamının aritmetik özellikleri incelenmiştir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde çalışmamızda kullanılacak temel tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1. Pozitif tamsayılar kümesinden *kompleks* sayılar kümesinin herhangi bir alt kümesine tanımlanan fonksiyonlara *aritmetik fonksiyon* yada *teorik sayı* fonksiyonu denir.

İyi bilinen aritmetik fonksiyonlar *Euler'in Totient* fonksiyonu $\varphi(n)$, *Möbius* fonksiyonu $\mu(n)$, bölen fonksiyonları $\sigma_k(n)$, *Liouville* fonksiyonu $\lambda(n)$, *Mangoldt* fonksiyonu $\Lambda(n)$ dir.

Tanım 2.2. $n \geq 1$ olan bir tamsayı olmak üzere, n ile aralarında asal olan ve n den küçük pozitif tamsayıların sayısını veren fonksiyona *Euler*'in *Totient* fonksiyonu denir ve $\varphi(n)$ ile gösterilir.

Euler'in totient fonksiyonu

$$\varphi(n) = \sum_{\substack{k=1 \\ (n,k)=1}}^{n} 1$$

biçiminde ifade edilir ve $\varphi(1) = 1$ kabul edilir (Apostol 1976).

Örneğin: $\varphi(2) = 1$, $\varphi(3) = 2$, $\varphi(6) = 2$, $\varphi(9) = 6$, $\varphi(13) = 12$, $\varphi(27) = 18$.

Teorem 2.1. $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere,

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) = n$$

yazılır (Apostol 1976).

Teorem 2.2. *Euler*'in *Totient* fonksiyonunun aşağıdaki özellikleri vardır.

a) p bir asal ve $k \geq 1$ ise $\varphi\left(p^k\right) = p^k - p^{k-1}$,

b) $(m,n) = d$ olmak üzere $\varphi(m.n) = \varphi(m).\varphi(n).\dfrac{d}{\varphi(d)}$,

c) $m|n$ ise $\varphi(m)|\varphi(n)$,

d) $n \geq 3$ için $\varphi(n)$ çift sayıdır. Ayrıca *n* nin *r* tane farklı tek asal çarpanı varsa $2^r|\varphi(n)$,

e) $n = p_1^{a_1}.p_2^{a_2}.\cdots.p_k^{a_k} \Rightarrow \varphi(n) = n\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right)$

(Apostol 1976).

Tanım 2.3. $n > 1$ ve $n = p_1^{a_1}.p_2^{a_2}.\cdots.p_k^{a_k}$ şeklinde asal çarpanlarına ayrılmış bir tamsayı olmak üzere $\mu(n)$ ile gösterilen *Möbius* fonksiyonu,

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ (-1)^k, & a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 1 \\ 0, & a_i > 1 \ (herhangi\ bir\ i\ için) \end{cases}$$

ile tanımlanır (Apostol 1976).

Örneğin; $\mu(1) = 1, \quad \mu(2) = 1, \quad \mu(3) = -1, \quad \mu(6) = 1, \quad \mu(8) = 0, \quad \mu(12) = 0$ olur.

Teorem 2.3. *x* bir reel sayı, *x* değerini geçemeyen ve *x* ten küçük en büyük tamsayı değerini veren fonksiyon $[x]$ olmak üzere;

$$\sum_{d|n}\mu(d) = \left[\frac{1}{n}\right] = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0, & n > 1 \end{cases}$$

dır (Apostol 1976).

Tanım 2.4. Reel veya *kompleks* bir *k* sayısı ve $n \geq 1$ tamsayısı için $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$ ile tanımlanan $\sigma_k(n)$ aritmetik fonksiyonuna *bölen* fonksiyonu denir (Şenay 2007).

$\sigma_0(n)$ fonksiyonu *n* nin bütün pozitif bölenlerinin sayısını verir. $\sigma_1(n)$ fonksiyonu da *n* nin bütün pozitif bölenlerinin toplamını verir. Bu özel durumlardaki aritmetik fonksiyonlar sırasıyla $\sigma_0(n) = \tau(n)$ ve $\sigma_1(n) = \sigma(n)$ ile gösterilir.

Ayrıca;

$$\tau(n)=\sum_{d|n}1,$$

$$\sigma(n)=\sum_{d|n}d$$

yazılır (Apostol 1976).

Teorem 2.4. Standart biçimi $n=p_1^{a_1}.p_2^{a_2}.\cdots.p_r^{a_r}$ olan $n>1$ tamsayısı için

$$\sigma_k(n)=\prod_{i=1}^{r}\frac{1-p_i^{(a_i+1).k}}{1-p_i^k},\quad (k\neq 0),$$

$$\tau(n)=\prod_{i=1}^{r}(a_i+1),\quad (k=0)$$

dır (Şenay 2007).

Tanım 2.5. Standart biçimi $n=p_1^{a_1}.p_2^{a_2}.\cdots.p_r^{a_r}$ olan $n>1$ tamsayısı için $\lambda(n)$ ile gösterilen *Liouville* fonksiyonu

$$\lambda(n)=(-1)^{a_1+a_2+\cdots+a_r}$$

şeklinde tanımlanır ve $\lambda(1)=1$ kabul edilir (Apostol 1976).

Örneğin; $n=2$ için $\lambda(2)=(-1)^1=-1$, $n=4$ için $\lambda(4)=(-1)^2=1$,

$n=6$ için $\lambda(6)=(-1)^{1+1}=1$, $n=20$ için $\lambda(20)=(-1)^{2+1}=-1$

olur.

Teorem 2.5. $n\geq 1$ tamsayı olmak üzere

$$\sum_{d|n}\lambda(d)=\begin{cases}1, & n \text{ } karesel \text{ } ise\\ 0, & diğer \text{ } durumlarda\end{cases}$$

dır (Apostol 1976).

Örnek 2.1.

a) $n=49$ olsun. n nin pozitif bölenleri $d=\{1,7,49\}$ olduğundan,

$$\sum_{d|49}\lambda(d)=\lambda(1)+\lambda(7)+\lambda(49)=1+(-1)^1+(-1)^2=1.$$

b) $n=12$ olsun. n nin pozitif bölenleri $d=\{1,2,3,4,6,12\}$ olduğundan,

$$\sum_{d|12}\lambda(d)=\lambda(1)+\lambda(2)+\lambda(3)+\lambda(4)+\lambda(6)+\lambda(12)$$

$$=1+(-1)^1+(-1)^1+(-1)^2+(-1)^2+(-1)^3=0.$$

Tanım 2.6. $n\geq 1$ tamsayısı için

$$\Lambda(n)=\begin{cases}\log p, & n=p^a,\ a\geq 1,\ p\ asal\ ise\\ 0, & diğer\ durumlarda\end{cases}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona *Mangoldt* fonksiyonu denir (Apostol 1976).

Örneğin; $n=1$ için $\Lambda(1)=0$, $n=2$ için $\Lambda(2)=\log 2$,

$n=6$ için $\Lambda(6)=0$, $n=125$ için $\Lambda(125)=\log 5$

olur.

Teorem 2.6. $n\geq 1$ tamsayısı için

a) $\log n=\sum_{d|n}\Lambda(d)$,

b) $\Lambda(n)=\sum_{d|n}\mu(d)\log\left(\frac{n}{d}\right)=-\sum_{d|n}\mu(d)\log d$

dır (Şenay 2007).

Tanım 2.7. $(m,n)=1$ olan her *m, n* pozitif tamsayı çifti için $f(m.n)=f(m).f(n)$ ise *f* aritmetik fonksiyonuna *çarpanlanabilir* aritmetik fonksiyon denir. Bütün *m, n* pozitif tamsayı çiftleri için $f(m.n)=f(m).f(n)$ ise bu takdirde *f* aritmetik fonksiyonuna *tam çarpanlanabilir* aritmetik fonksiyon denir (Şenay 2007).

Örnek 2.1.

1. $k\in\mathbb{C}$ olmak üzere $I_k(n)=n^k$ ile tanımlanan kuvvet fonksiyonu tam çarpanlanabilir aritmetik fonksiyondur.

2. $I_0(n)=e(n)=1$ ile tanımlanan sabit fonksiyon tam çarpanlanabilirdir.

3. Liouville fonksiyonu $\lambda(n)$ tam çarpanlanabilirdir.

4. *Euler*'in *Totient* fonksiyonu $\varphi(n)$ ve *Möbius* fonksiyonu $\mu(n)$ çarpanlanabilir aritmetik fonksiyonlardır. Ancak hem $\varphi(n)$ hem de $\mu(n)$ tam çarpanlanabilir değildir. Gerçekten,

$$\mu(4)=0 \text{ iken } \mu(2).\mu(2)=(-1).(-1)=1 \text{ olup } \mu(4)\neq\mu(2).\mu(2)$$

ve

$$\varphi(4)=2 \text{ iken } \varphi(2).\varphi(2)=1.1=1 \text{ olup } \varphi(4)\neq\varphi(2)\varphi(2)$$

olduğundan tam çarpanlanabilir olmadığı görülür.

Teorem 2.7.

a) f çarpanlanabilir bir aritmetik fonksiyon ise $f(1)=1$,

b) $f(1)=1$ verilsin. Bu takdirde,

i) f aritmetik fonksiyonunun çarpanlanabilir olması için gerek ve yeter şart $\forall a_i \geq 1$ tamsayıları ve her p_i asalı için

$$f\left(p_1^{a_1}, p_2^{a_2}, p_3^{a_3}, \cdots, p_r^{a_r}\right) = f\left(p_1^{a_1}\right)\cdots f\left(p_r^{a_r}\right),$$

ii) Çarpanlanabilir bir f fonksiyonunun tam çarpanlanabilir olması için gerek ve yeter şart her p asalı ve her $a \geq 1$ tamsayısı için $f\left(p^a\right)=f(p)^a$ olmasıdır,

c) f çarpanlanabilir ise $F(n)=\sum_{d|n} f(d)$ ile tanımlanan $F(n)$ fonksiyonu da çarpanlanabilir bir aritmetik fonksiyondur (Apostol 1976).

Tanım 2.8. $n>1$ pozitif tamsayısı $n=p_1^{a_1}.p_2^{a_2}.\cdots.p_r^{a_r}$ şeklinde standart formda verilsin. n sayısının farklı asal çarpanlarının çarpımı $\gamma(n)$ ile gösterilir ve $\gamma(n)$ sayısına *n* nin çekirdeği (*core*) denir (Sivaramakrishnan 1989).

Tanım 2.9. $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$dan *kompleks* sayıların bir alt kümesine tanımlanan iki değişkenli $f(n,r)$ aritmetik fonksiyonuna, $(nr, n'r')=1$ olan her (n,r) ve (n',r') tamsayı çiftleri için $f(n,r).f(n',r')=f(nn',rr')$ eşitliği sağlanırsa çarpanlanabilir aritmetik fonksiyon denir (Sivaramakrishnan 1989).

3-ARİTMETİK ÇARPIMLAR (*KONVÜLÜSYONLAR*)

Bütün aritmetik fonksiyonların kümesi $\mathcal{A}$ ile gösterilsin. $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde tanımlanan ve aritmetik çarpım (*konvülüsyon)* olarak adlandırılan birçok ikili işlem vardır.

f ve g aritmetik fonksiyonları aritmetik fonksiyonların kümesi üzerinde herhangi iki fonksiyon olmak üzere , $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için *elemanter* toplam, *elemanter* çarpım işlemleri sırasıyla,

$$(f+g)(n) = f(n) + g(n)$$

$$(f \cdot g)(n) = f(n) \cdot g(n)$$

şeklinde tanımlanır (Sivaramakrishnan 1989).

($\mathcal{A}$,+) değişmeli bir gruptur. Sıfır fonksiyonu ($\mathcal{A}$,+) grubunun birimidir. Ayrıca f aritmetik fonksiyonunun toplamsal tersi $-f$ dir. $(\mathcal{A}, \cdot)$ bir monoidtir. Sabit fonksiyon $e \equiv 1$ birim elemanıdır.

Tanım 3.1. r pozitif bir tamsayı olsun. Herhangi iki f ve g aritmetik fonksiyonunun $(f * g)(r)$ *Dirichlet* çarpımı toplam r nin bütün pozitif d bölenleri üzerinden değerler almak üzere

$$(f * g)(r) = \sum_{d \mid r} f(d) g\left(\frac{r}{d}\right)$$

ile tanımlanır (Sivaramakrishnan 1989).

Tanım 3.2.

$$e_0(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \quad ise \\ 0, & n > 1 \quad ise \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona *özdeşlik* fonksiyonu denir (Sivaramakrishnan 1989).

Teorem 3.1. $f, g, h \in \mathcal{A}$ aritmetik fonksiyonlar olmak üzere,

a) $f * g = g * f$,

b) $(f * g) * h = f * (g * h)$,

c) $f * e_0 = e_0 * f = f$,

d) $f(1) \neq 0$ olan f aritmetik fonksiyonu için $f * f^{-1} = f^{-1} * f = e_0$ eşitliğini gerçekleyecek şekilde bir tek f^{-1} *Dirichlet* tersi vardır. Bu f^{-1} *Dirichlet* tersi $\forall r > 1$ için

$$f^{-1}(1) = \frac{1}{f(1)} \quad \text{ve} \quad f^{-1}(r) = \frac{-1}{f(1)} \sum_{\substack{d \mid r \\ d < r}} f\left(\frac{r}{d}\right) . f^{-1}(d) \text{(indirgeme formülü)},$$

e) $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$

dır (McCarthy 1985).

O halde $f(1) \neq 0$ olan bütün aritmetik fonksiyonların kümesi *Dirichlet* çarpımına göre değişmeli bir gruptur. Buradan $(\mathcal{A}, +, *)$ nın birimli ve değişmeli bir halka olduğu görülür.

Teorem 3.2.

a) *f* ve *g* çarpanlanabilir iki aritmetik fonksiyon ise $(f * g)$ *Dirichlet* çarpımı da çarpanlanabilirdir. Ancak tam çarpanlanabilir aritmetik fonksiyonların *Dirichlet* çarpımı tam çarpanlanabilir olmak zorunda değildir,

b) *f* çarpanlanabilir ise f^{-1} *Dirichlet* tersi de çarpanlanabilirdir,

c) *f* çarpanlanabilir aritmetik fonksiyonunun tam çarpanlanabilir olması için gerek ve yeter şart $\forall r \geq 1$ tamsayısı için $f^{-1}(r) = (\mu f)(r)$ olmasıdır,

d) f çarpanlanabilir bir aritmetik fonksiyon ise

$$\sum_{d \mid r} \mu(d) f(d) = \prod_{p \mid r} (1 - f(p))$$

eşitliğini sağlar (Apostol 1976).

Teorem 3.3. $h \in \mathcal{A}$ bir *tersinir* aritmetik fonksiyon olsun. $f, g \in \mathcal{A}$ için

$$f(r) = (g * h)(r) \Leftrightarrow g(r) = (f * h^{-1})(r) = (h^{-1} * f)(r)$$

dır (Sivaramakrishnan 1989).

Bu teoremde $h(r) = \mu(r)$ alınırsa $\mu^{-1} = e$ olduğundan $f = g * e \Leftrightarrow g = f * \mu$ olur. Böylece *Möbius* ters çevirme formülü elde edilir.

Örnek 3.1. *Euler*'in φ fonksiyonu için $\sum_{d|r}\varphi(d)=r$ idi. $I(r)=r$ fonksiyonu ve *Dirichlet* çarpımı tanımı göz önüne alınarak $(\varphi * e)(r)=I(r)$ yazılır. Bu eşitliğe Teorem 3.3. uygulanarak

$$\varphi(r)=\left(I * e^{-1}\right)(r)=(I * \mu)(r) \Rightarrow \varphi(r)=\sum_{d|r} d\mu\left(\frac{r}{d}\right)$$

elde edilir.

Örnek 3.2. S.S. Pillai'nin $\beta(r)$ aritmetik fonksiyonu

$$\beta(r)=\sum_{k=1}^{r}(k,r)=\sum_{d|r} d\varphi\left(\frac{r}{d}\right)$$

ile tanımlanır. Buradan,

$$\beta(r)=(I * \varphi)(r)=\left[I *\left(I * e^{-1}\right)\right](r)$$

$$\beta(r)=\left[(I * I) * e^{-1}\right](r)$$

$$(\beta * e)(r)=(I * I)(r)$$

$$\sum_{d|r}\beta(d)=\sum_{d|r} d.\frac{r}{d}=r\sum_{d|r}1=r.d(r)$$

olur (Sivaramakrishnan 1989).

Örnek 3.3.

$$(\sigma * \varphi)(r)=\left[(I * e) *\left(I * e^{-1}\right)\right](r)$$

$$=\left[(I * I) *\left(e * e^{-1}\right)\right](r)$$

$$=(I * I)(r)$$

$$= r.d(r).$$

O halde,

$$\sum_{\mathrm{d|r}}\sigma(d)\varphi\left(\frac{r}{d}\right)=r.d(r)$$

olur (Sivaramakrishnan 1989).

Tanım 3.3. $r \geq 1$ pozitif bir tamsayı olsun. r nin pozitif bir d böleni için $\left(d, \frac{r}{d}\right) = 1$ ise d ye r'nin *unitary* böleni denir ve $d \| r$ ile gösterilir.

Tanım 3.4. f ve g aritmetik fonksiyonlar olmak üzere $f \oplus g$ ile gösterilen *unitary* çarpımı,

$$(f \oplus g)(r) = \sum_{d \| r} f(d) g\left(\frac{r}{d}\right)$$

ile tanımlanır (Sivaramakrishnan1989).

Dirichlet çarpımının birimi olan e_0 özdeşlik fonksiyonu *unitary* çarpımının da birimidir. f aritmetik fonksiyonunun *unitary* çarpıma göre tersine f nin eşleniği denir ve $conj(f)$ gösterilir. *Dirichlet* çarpımında olduğu gibi f nin ters fonksiyonu $conj(f)$ nin olması için gerek ve yeter şart $f(1) \neq 0$ olmasıdır (Sivaramakrishnan 1989). O halde,

$$\left(e \oplus conj(e)\right)(r) = e_0(r)$$

olduğundan

$$\sum_{d \| r} conj(e)(d) = \begin{cases} 1, & r = 1 \\ 0, & r \neq 1 \end{cases}$$

dır (Sivaramakrishnan1989).

Ayrıca d, r nin *unitary* bir böleni ise $\frac{r}{d}$ de r nin *unitary* böleni olacağından *unitary* çarpımının değişme özelliği vardır.

$(\mathcal{A}, +, \oplus)$ değişmeli bir halkadır. Ancak sıfır bölenlidir. Sabit fonksiyon $e(r)$ nin *unitary* çarpıma göre karesi

$$e^{(2)}(r) = (e \oplus e)(r) = \sum_{d \| r} 1 = d^*(r)$$

olur (Sivaramakrishnan1989).

$d^*(r)$ görüldüğü gibi r nin *unitary* bölenlerinin sayısıdır. Benzer şekilde *Möbiüs* fonksiyonu $\mu(r)$ nin, *Euler'*in *Totient* fonksiyonu $\varphi(r)$ nin ve bölen fonksiyonu

$\sigma(r)$ nin *unitary* benzerleri, $r = p_1^{a_1}.p_2^{a_2}.\cdots.p_s^{a_s}$ tamsayısının farklı asal çarpanlarının sayısı $w(r)$ ve $w(1)=0$ olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlanır:

a) $d^*(r) = 2^{w(r)}$,

b) $\mu^*(r) = (-1)^{w(r)} = conj(e)(r)$,

c) $\sigma^*(r) = \prod_{i=1}^{s}\left(1+p_i^{a_1}\right)$,

d) $\varphi^*(r) = \sum_{d\|r}\mu^*\left(\frac{r}{d}\right).d$ ve $\varphi^*\left(p^m\right) = p^m - 1$,

e) $\varphi^*(r) = \left(conj(e)\oplus I\right)(r) = \left(\mu^*\oplus I\right)(r)$ ise $\sum_{d\|r}\varphi^*(d) = r$

(Sivaramakrishnan 1989).

Örnek 3.4. $d^*(r)$, $\mu^*(r)$, $\sigma^*(r)$, $\varphi^*(r)$ *Unitary* aritmetik fonksiyonların sağladığı eşitliklerin uygulamaları aşağıdaki sayısal örneklerle gösterilmiştir.

a) $r = 3.2^2$ için $w(12)=2$ olduğundan $d^*(12) = 2^2 = 4$ tür. Burada 12 nin *unitary* bölenleri 1,3,4 ve 12 olup dört tanedir.

$r = 5^2$ için $w(25)=1$, $d^*(25)=2$. Burada 25 in unitary bölenleri 1ve 25 tir.

b) $\mu^*(12) = (-1)^2 = 1$ ve $\mu^*(25) = (-1)^1 = -1$.

c) $\sigma^*(12) = (1+3).\left(1+2^2\right) = 20$, $\sigma^*(25) = \left(1+5^2\right) = 26$.

d) $\varphi^*(12) = \sum_{d\|12}\mu*\left(\frac{r}{d}\right).d = \mu*\left(\frac{12}{1}\right).1 + \mu*\left(\frac{12}{3}\right).3 + \mu*\left(\frac{12}{4}\right).4 + \mu*\left(\frac{12}{12}\right).12$

$$= (-1)^2.1 + (-1)^1.3 + (-1)^1.4 + (-1)^2.1 + 1.12 = 6.$$

$$\varphi^*(25) = \sum_{d\|25}\mu^*\left(\frac{r}{d}\right).d = \mu^*\left(\frac{25}{1}\right).1 + \mu^*\left(\frac{25}{25}\right).25 = (-1)^1.1 + 1.25 = 24$$

ve

$\varphi^*\left(5^2\right) = 5^2 - 1 = 24$ olur.

e) $\sum_{d\|4}\varphi^*(d) = \varphi^*(1) + \varphi^*(4) = 1 + 3 = 4$.

Dirichlet ve *unitary* çarpımının tanımında verilen aritmetik fonksiyonların kümesi $\mathcal{A}$ ile gösterilmişti. $\mathcal{A}$ kümesindeki her aritmetik fonksiyonun tanım kümesi pozitif tamsayılar idi. Şimdi, aşağıda tanımı verilen *Cauchy* çarpımında ise aritmetik fonksiyonlar negatif olmayan tamsayılar kümesi üzerinde tanımlanır ve bu aritmetik fonksiyonların kümesi $\mathcal{B}$ ile gösterilir.

Tanım 3.5. $f,g \in \mathcal{B}$ aritmetik fonksiyonları için $(f \odot g)$ ile gösterilen *Cauchy* çarpımı,

$$(f \odot g)(r) = \sum_{i=0}^{r} f(i)g(r-i)$$

ile tanımlanır (Sivaramakrishnan 1989).

$$e_1(r) = \begin{cases} 1, & r = 0 \\ 0, & r \neq 0 \end{cases}$$

biçiminde verilen e_1 aritmetik fonksiyonu *Cauchy* çarpımının birimidir. $(\mathcal{B},+,\odot)$ değişmeli ve birimli bir halkadır.

Tanım 3.6. $f \in \mathcal{B}$ aritmetik fonksiyonuna; eğer $f(0) = 0$ ise *singüler* ve $f(0) \neq 0$ ise *non*-singüler denir (Sivaramakrishnan 1989).

C*auchy* çarpımı ile verilen bir *f* aritmetik fonksiyonunun tersinin olabilmesi için gerek ve yeter şart f nin *non - singüler* olmasıdır (Sivaramakrishnan 1989).

Tanım 3.7. r pozitif bir tamsayı ve $d|r$ olsun. Sıralı bütün $< r,d >$ çiftlerinin kümesi üzerinde tanımlı *kompleks* değerli bir aritmetik fonksiyon $K(r,d)$ olmak üzere *f* ve *g* aritmetik fonksiyonlarının $(f *_K g)(r)$ ile gösterilen *K*- çarpımı

$$(f *_K g)(r) = \sum_{d|r} K(r,d) f(d) g\left(\frac{r}{d}\right)$$

ile tanımlanır (Haukkanen 1989).

Eğer $K(r,d) = 1$ ise $f *_K g = f * g$ olur.

Ayrıca:

$$K(r,d)=\begin{cases}1, & d \textit{ unitary ise}\\ 0, & \textit{diğer durumlarda}\end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa $f *_K g = f \oplus g$ olur.

Tanım 3.8. *r* nin pozitif bölenlerinin bir alt kümesi $A(r)$ olsun. $A(r)$ nin elemanlarına *r* nin *A-bölenleri* denir. *f* ve *g* aritmetik fonksiyonlarının *A-çarpımı*

$$(f *_A g)(r)=\sum_{d\in A(r)} f(d)g\left(\frac{r}{d}\right)$$

ile tanımlanır (Narkiewicz 1963).

Narkiewicz aşağıdaki şartları sağlayan herhangi bir *A*-çarpımı *regüler çarpım* olarak adlandırır:

a) Aritmetik fonksiyonların kümesi *A*-çarpım ve adi toplama işlemine göre birimli, değişmeli bir halkadır,

b) Çarpanlanabilir fonksiyonların *A*-çarpımı da çarpanlanabilirdir,

c) Sabit $e\equiv 1$ fonksiyonunun *A*-çarpımına göre μ_A ile gösterilen ters fonksiyonu vardır ve *r* bir asalın kuvveti iken $\mu_A(r)=0$ veya -1 dir.

Dirichlet ve *unitary* çarpımlar *regüler* çarpımlardır.

4- TOTİENT FONKSİYONLARI

4.1 Schemmel'in Totient Fonksiyonu

V.Schemel tarafından $S_k(r)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 4.1.1. $k \geq 2$ bir tamsayı olmak üzere, *r* den küçük ve her biri *r* ile aralarında asal olan k tane ardışık sayıdan oluşan kümelerin sayısına *Schemmel'* in *Totient* fonksiyonu denir ve $S_k(r)$ ile gösterilir. $S_k(1)=1$ kabul edilir ve

$$S_k(r) = r.\prod_{p|r}\left(1-\frac{k}{p}\right)$$

biçiminde ifade edilir (Sivaramakrishnan 1989).

Schemmel 'in *Totient* fonksiyonunun tanımından *r* nin herhangi bir *p* asal böleni için, $k \geq p^a \quad (a>1)$ ise $S_k(r)=0$ dır. Burada $k \geq 2$ dir. Çünkü $k=1$ ise $S_1(r)=\varphi(r)$ dir. Ayrıca,

$$S_k(p^m) = p^m\left(1-\frac{k}{p}\right)$$

yazılır (Sivaramakrishnan 1989).

$\lambda_k(r)$ fonksiyonu,

$$\lambda_k(r) = \begin{cases} 1, & r=1 \\ (-k)^s, & r = p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots . p_s \\ 0, & d^2 \mid r,\ d>1 \end{cases}$$

ile tanımlanır (Sivaramakrishnan 1989).

Örnek 4.1.1.

1) $k=2$ ve $r=10$ olsun. 10 un asal bölenleri $\{2,5\}$ tir. O halde,

$$S_2(10) = 10.\prod_{p|10}\left(1-\frac{2}{p}\right) = 10.\left(1-\frac{2}{2}\right).\left(1-\frac{2}{5}\right) = 0 .$$

2) $k=2$ ve $r=21$ olsun. 21 in asal bölenleri $\{3,7\}$ için,

$$S_2(21)=21.\prod_{p|21}\left(1-\frac{2}{p}\right)=21\left(1-\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{2}{7}\right)=5\,.$$

olarak bulunur ki (1,2), (4,5), (10,11), (16,17), (19,20) sıralı ikililerinin her biri 21 ile aralarında asaldır ve görüldüğü gibi sayısı 5 tanedir.

Teorem 4.1.1. $r\in\mathbb{Z}^+$ ve $I(r)=r$ olmak üzere;

$$S_k(r)=(I*\lambda_k)(r)$$

yazılır (Sivaramakrishnan 1989).

Ayrıca λ_k nın tanımından, $\lambda_k(r)=k.\mu(r)$ olduğu da çok kolay görülür.

4.2. Jordan'ın Totient Fonksiyonu

Tanım 4.2.1. $k\geq 1$ olmak üzere (mod *r*) ye göre tam kalan sınıfları sisteminden seçilen sıralı *k* tane elemandan oluşan ve bu k tane elemanın en büyük ortak böleni *r* ile aralarında asal olacak şekildeki kümelerin sayısına *Jordan*'ın *Totient* fonksiyonu denir. Bu fonksiyon $J_k(r)$ ile gösterilir (Sivaramakrishnan 1989).

$k=1$ için *Jordan*'ın *Totient* fonksiyonu *Euler*'in *Totient* fonksiyonuna dönüşür.

$I_k(r)=r^k$ olmak üzere *Jordan*'ın *Totient* fonksiyonu aşağıdaki özdeşlikleri sağlar:

a) $J_k(r)=r^k\prod_{p|r}\left(1-\frac{1}{p^k}\right)$,

b) $J_k(r)=\sum_{d|r}\mu\left(\frac{r}{d}\right)d^k$,

c) $\sum_{d|r}J_k(r)=r^k$,

d) $J_k(rs)=\frac{J_k(r)J_k(s)d^k}{J_k(d)},\quad d=(r,s)$

(Sivaramakrishnan 1989).

Örnek 4.2.1. *Jordan*'ın *Totient* fonksiyonunun aritmetik özelliklerinin uygulamaları aşağıdaki örneklerle verilmiştir.

1) $J_1(15) = 15^1 \prod_{p|15}\left(1-\frac{1}{p^1}\right) = 15.\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right) = 8$ ve

$$J_1(15) = \sum_{d|15}\mu\left(\frac{15}{d}\right).d^1 = \mu\left(\frac{15}{1}\right).1^1 + \mu\left(\frac{15}{3}\right).3^1 + \mu\left(\frac{15}{5}\right).5^1 + \mu\left(\frac{15}{15}\right).15^1$$

$$= (-1)^2.1 + (-1).3 + (-1).5 + 1.15 = 8.$$

2) $J_2(15) = 15^2 \prod_{p|15}\left(1-\frac{1}{p^2}\right) = 15^2.\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right) = 192$ ve

$$J_2(15) = \sum_{d|15}\mu\left(\frac{15}{d}\right).d^2 = \mu\left(\frac{15}{1}\right).1^2 + \mu\left(\frac{15}{3}\right).3^2 + \mu\left(\frac{15}{5}\right).5^2 + \mu\left(\frac{15}{15}\right).15^2$$

$$= (-1)^2.1 + (-1).9 + (-1).5 + 1.225 = 192.$$

3) $J_3(15) = 15^3 \prod_{p|15}\left(1-\frac{1}{p^3}\right) = 15^3.\left(1-\frac{1}{3^3}\right)\left(1-\frac{1}{5^3}\right) = 3224$ ve

$$J_3(15) = \sum_{d|15}\mu\left(\frac{15}{d}\right).d^3 = \mu\left(\frac{15}{1}\right).1^3 + \mu\left(\frac{15}{3}\right).3^3 + \mu\left(\frac{15}{5}\right).5^3 + \mu\left(\frac{15}{15}\right).15^3$$

$$= (-1)^2.1 + (-1).27 + (-1).125 + 1.3375 = 3224.$$

4) $\sum_{d|15} J_1(d) = J_1(1) + J_1(3) + J_1(5) + J_1(15) = 1+2+4+8 = 15.$

5) $J_2(3.15) = J_2(3).J_2(15)\frac{3^2}{J_2(3)} = 192.$

Teorem 4.2.1 r nin katlılıkları da dahil bütün asal çarpanlarının sayısı $\Omega(r)$ olsun. $\lambda(r)$ fonksiyonu $\lambda(r) = (-1)^{\Omega(r)}$ olmak üzere *Jordan*'ın *Totient* fonksiyonu

$$\sum_{d|r}\lambda(d)J_k(d)J_k\left(\frac{r}{d}\right) = \begin{cases} J_{2k}\left(\sqrt{r}\right), & r \text{ bir tam kare ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

eşitliğini sağlar (Sivaramakrishnan 1989).

4.3. Klee'nin Totient Fonksiyonu

Tanım 4.3.1. 1 den büyük pozitif bir tamsayının k. kuvvetten bir böleni yoksa bu tam sayıya *k-serbest* denir (Sivaramakrishnan 1989).

.

Tanım 4.3.2. r pozitif tamsayısı k *-serbest* olsun. $1 \leq h \leq r$ olmak üzere h ve r nin en büyük ortak böleni k. kuvvetten serbest olacak şekildeki h tamsayılarının sayısına *Klee*'nin *Totient* fonksiyonu denir ve $\psi_k(r)$ ile tanımlanır (Sivaramakrishnan 1989).

$\psi_k(r)$ *Klee*'nin *totient* fonksiyonu, $k=1$ için *Euler'*in *Totient* fonksiyonuna indirgenir.

Tanım 4.3.3. $\mu_k(r)$ aritmetik fonksiyonu

$$\mu_k(r) = \begin{cases} \mu\left(r^{\frac{1}{k}}\right), & r \text{ bir } k \text{ nıncı kuvvet ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ile tanımlanır (Sivaramakrishnan 1989).

Tanım 4.3.4. $\varepsilon_k(r)$ aritmetik fonksiyonu,

$$\varepsilon_k(r) = \begin{cases} 1, & r \text{ bir } k \text{ nıncı kuvvet ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır (Sivaramakrishnan 1989).

Tanım 4.3.2., 4.3.3., 4.3.4. göz önüne alındığı takdirde *Klee'*nin *Totient* fonksiyonu aşağıdaki özdeşlikleri sağlar:

a) $\psi_k(r) = \sum_{d|r} \mu_k(d) \frac{r}{d}$,

b) $\psi_k(r) = r \prod_{p^k|r} \left(1 - \frac{1}{p^k}\right)$,

c) $\sum_{d^k|r} \psi_k\left(\frac{r}{d^k}\right) = r \Rightarrow (\psi_k * \varepsilon_k)(r) = I(r)$

(Sivaramakrishnan 1989).

Örnek 4.3.1. $\psi_k(r)$ *Totient* fonksiyonunun aritmetik özelliklerinin uygulamaları aşağıdaki örneklerle verilmiştir.

1) $\psi_1(6)=\sum_{d|6}\mu_1(d).\frac{6}{d} \; = \mu_1(1).\frac{6}{1}+\mu_1(2).\frac{6}{2}+\mu_1(3).\frac{6}{3}+\mu_1(6).\frac{6}{6}$

$$=1.6+(-1).3+(-1).2+1.1=2.$$

$$\psi_1(6)=6.\prod_{p^1|6}\left(1-\frac{1}{p^1}\right)=6\left(1-\frac{1}{2^1}\right).\left(1-\frac{1}{3^1}\right)=2.$$

2) $\psi_2(9)=\sum_{d|9}\mu_2(d).\frac{9}{d} \; =\mu_2(1).\frac{9}{1}+\mu_2(3).\frac{9}{3}+\mu_2(9).\frac{9}{9} \; =1.9+0+(-1).1=8.$

$$\psi_2(9)=9.\prod_{p^2|9}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)=9.\left(1-\frac{1}{3^2}\right)=8.$$

3) $\psi_2(12)=\sum_{d|12}\mu_2(d)\frac{12}{d}$

$$=\mu_2(1).\frac{12}{1}+\mu_2(2).\frac{12}{2}+\mu_2(3).\frac{12}{3}+\mu_2(4).\frac{12}{4}+\mu_2(6).\frac{12}{6}+\mu_2(12).\frac{12}{12}$$

$$=1.12+0.6+0.4+(-1).3+0.2+0.1=9.$$

$$\psi_2(12)=12.\prod_{p^2|r}\left(1-\frac{1}{p^2}\right) \; =12.\left(1-\frac{1}{2^2}\right)=9.$$

4) $\sum_{d^2|12}\psi_2\left(\frac{12}{d^2}\right)=\psi_2\left(\frac{12}{1}\right)+\psi_2\left(\frac{12}{4}\right) \; =9+3 \; =12.$

Teorem 4.3.1 Toplam *r'*nin *k*-serbest *d* bölenleri üzerinden değerler almak üzere

$$\psi_k(r)=\sum_{d|r}\psi\left(\frac{r}{d}\right)$$

olur (Sivaramakrishnan 1989).

4.4. Eckford Cohen'nin Totient Fonksiyonu

Tanım 4.4.1. m ve n her ikisi birden sıfır olmayan tamsayılar olsun. m ve n tamsayılarının k. kuvvetten en büyük ortak böleni $(m,n)_k = 1$ ise m ile n ye aralarında *k-asal* denir.

$(\text{mod } r^k)$ ya göre bir M tam kalan sınıfları sisteminin N alt kümesini göz önüne alalım. N kümesi r^k ile aralarında k-asal olan elemanların kümesi ise bu kümeye $(\text{mod } r)$ ye göre *k-indirgenmiş* kalan sınıfları sistemi denir ve bu sistemdeki elemanların sayısı $\Phi_k(r)$ ile gösterilir. $\Phi_k(r)$ fonksiyonuna *Eckford Cohen*' in *Totient* fonksiyonu denir (Sivaramakrishnan 1989).

$(a,b)_k = d^k \Leftrightarrow \left(\dfrac{a}{d^k}, \dfrac{b}{d^k}\right) = 1$ dir. Bu ifade göz önüne alınırsa $\Phi_k(r)$ *Eckford Cohen*'in *Totient* fonksiyonu aşağıdaki özdeşlikleri sağlar:

a) $\Phi_k(r) = \left(I_k * e^{-1}\right)(r) = \sum_{d|r} \mu\left(\dfrac{r}{d}\right).d^k$,

b) $\sum_{d|r} \Phi_k(d) = r^k$,

c) $(r,s) = d$ ise $\Phi_k(r.s) = \Phi_k(r).\Phi_k(s).\dfrac{d^k}{\Phi_k(d)}$

(Sivaramakrishnan 1989).

Örnek 4.4.1. $\Phi_k(r)$ *Totient* fonksiyonunun aritmetik özelliklerinin uygulamaları aşağıdaki örneklerle verilmiştir.

1) $\Phi_2(15) = \sum_{d|15} \mu\left(\dfrac{15}{d}\right).d^2 = \mu\left(\dfrac{15}{1}\right).1^2 + \mu\left(\dfrac{15}{3}\right).3^2 + \mu\left(\dfrac{15}{5}\right).5^2 + \mu\left(\dfrac{15}{15}\right).15^2$

$$= 1.1 + (-1).9 + (-1).25 + 1.225 = 192.$$

2) $\sum_{d|15} \Phi_2(d) = \Phi_2(1) + \Phi_2(3) + \Phi_2(5) + \Phi_2(15) = 1 + 8 + 24 + 192 = 225 = 15^2$.

3) $(3,15) = 3$ olduğundan $\Phi_2(3,15) = \Phi_2(3).\Phi_2(15).\left(\dfrac{3^2}{\Phi_2(3)}\right) = 8.192.\left(\dfrac{9}{8}\right) = 1728$.

4.5. Sonlu Grupların Karakterleri

Tanım 4.5.1. G herhangi bir grup olsun. G üzerinde tanımlı *kompleks* değerli f fonksiyonu;

a) Bazı $c \in G$ için $f(c) \neq 0$,

b) Her $a,b,\in G$ için $f(a.b) = f(a).f(b)$ çarpanlanabilirlik özelliklerini sağlar ise bu f fonksiyonuna G grubunun karakteri denir (Apostol 1976).

Teorem 4.5.1. G birimi e olan sonlu bir grup ve f fonksiyonu da G nin bir karakteri olsun. Bu takdirde $f(e) = 1$ ve her $f(a)$ değeri birimin köküdür (Apostol 1976).

İspat. $f(c) \neq 0$ olacak şekilde $c \in G$ alalım:

$$c.e = c \Rightarrow f(c.e) = f(c) \Rightarrow f(c)f(e) = f(c) \Rightarrow f(e) = 1,$$

$$a^n = e \Rightarrow f(a)^n = f(a^n) = f(e) = 1.$$

Her G grubunun özdeş olarak 1 olan en az bir karakteri vardır. Bu karaktere *esas karakter* denir. Eğer G mertebesi n olan değişmeli bir grup ise G nin birbirinden farklı n tane karakteri vardır. Bu n tane karakteri $f_1, f_2 \cdots, f_n$ ile gösterelim. Ayrıca f_1 esas karakteri göstersin. Böylece $i \neq 1$ için $f_i(a) \neq 1$ olacak şekilde $\exists\ a \in G$ vardır.

Her $a \in G$ için karakterlerin çarpımı $(f_i.f_j)(a) = f_i(a).f_j(a)$ ile tanımlanır. Bu çarpma işlemine göre $f_1, f_2, \cdots, f_n$ karakterleri bir grup oluşturur. Bu grubun birimi f_1 esas karakteridir. Ayrıca f_i nin tersi $\frac{1}{f_i}$ dir.

$f(a)$ değeri birimin kökü olduğu için $|f(a)| = 1$ dir. Böylece $\frac{1}{f(a)} = \overline{f(a)}$ *kompleks* eşleniğine eşittir ve $\overline{f}(a) = \overline{f(a)}$ yazılır: $\overline{f}(a) = \frac{1}{f(a)} = f(a^{-1})$.

4.6. Karekterin Ortagonallik Bağıntıları

$G=\{a_1,a_{2,}\cdots,a_n\}$ kümesi değişmeli bir grup ve $\{f_1,f_{2,}\cdots,f_n\}$ G nin karakterleri f_1 de esas karakteri olsun. A=A(G), nxn mertebeden a_{ij} elemanı $a_{ij}=f_i\left(a_j\right)$ ile verilen matrisi göstersin.

Teorem 4.6.1. A matrisinin i.satırdaki elemanlarının toplamı,

$$\sum_{r=1}^{n} f_i\left(a_r\right)=\begin{cases} n, & i=1 \; ve \, f_i \;\; esas \; karakter \; ise \\ 0, & diğer \; durumlarda \end{cases}$$

dır (Apostol 1976).

İspat: A matrisinin i.satır toplamını S ile gösterelim. $i=1$ ise toplamdaki her bir terimin değeri 1 olacağından $S=n$ olur.

Eğer $f_i \neq f_1$ ise bu takdirde $f_i\left(b\right)\neq 1$ olacak şekilde bir $b\in G$ vardır. a_r G ’nin bütün elemanları üzerinde değerler alırken $b.a_r \in G$ olur.

$$S=\sum_{r=1}^{n} f_i\left(ba_r\right)=f_i\left(b\right)\sum_{r=1}^{n} f_i\left(a_r\right)=f_i\left(b\right).S$$

Buradan $S\left(1-f_i\left(b\right)\right)=0$ ve $f_i\left(b\right)\neq 1$ olduğundan $S=0$ elde edilir.

Teorem 4.6.2. A matrisinin eşlenik *transpozu* A^* ile gösterilsin. I , $n\times n$ tipinde birim matris olmak üzere $A.A^*=n.I$ (Apostol 1976).

İspat. B= $A.A^*$ olsun. B nin b_{ij} elemanı $b_{ij}=\sum_{r=1}^{n} f_i\left(a_r\right)\overline{f_j}\left(a_r\right)=\sum_{r=1}^{n}\left(f_i\overline{f_j}\right)\left(a_r\right)$.

$f_k=f_i\overline{f_j}=\dfrac{f_i}{f_j}$ olmak üzere $b_{ij}=\sum_{r=1}^{n} f_k\left(a_r\right)$ olur. Buradan $\dfrac{f_i}{f_j}=f_1 \Leftrightarrow i=j$ dir.

Teorem 4.6.1.den

$$b_{ij}=\begin{cases} n, & i=j \; ise \\ 0, & i\neq j \;\; ise \end{cases}$$

elde edilir. O halde $B=n.I$ olup istenilen elde edilir.

Teorem 4.6.3. n elemanlı bir G grubunun $i=1,2,3,\cdots,r$ olmak üzere f_i karakterleri

$$\sum_{r=1}^{n}\overline{f_r}\left(a_i\right)f_r\left(a_j\right)=\begin{cases} n, & a_i=a_j \text{ ise} \\ 0, & a_i\neq a_j \text{ ise}\end{cases}$$

eşitliğini sağlar (Apostol 1976).

Sonuç 4.6.1.

$$\overline{f_r}\left(a_i\right)=f_r\left(a_i\right)^{-1}=f_r\left(a_i^{-1}\right)\Rightarrow\overline{f_r}\left(a_i\right)f_r\left(a_j\right)=f_r\left(a_i^{-1}\right).f_r\left(a_j\right)=f_r\left(a_i^{-1}a_j\right).$$

Bu son eşitlikten karakterler için Teorem 4.6.3 ile verilen *ortagonallik* bağıntısı

$$\sum_{r=1}^{n}f_r\left(a_i^{-1}a_j\right)=\begin{cases} n, & a_i=a_j \text{ ise} \\ 0, & a_i\neq a_j \text{ ise}\end{cases}$$

biçiminde ifade edilir ve bu ifadede $a_i=e$ birim eleman için

$$\sum_{r=1}^{n}f_r\left(a_j\right)=\begin{cases} n, & a_j=e \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

eşitliği elde edilir (Apostol 1976).

Tanım 4.6.1. $\overline{n}\equiv n\left(\bmod k\right)$ olsun. $\left(\bmod\ k\right)$ ya göre indirgenmiş kalan sınıflarının grubu G ile gösterilsin. G nin her bir f karakteri ile karşılaştırılan $\chi=\chi_f$ aritmetik fonksiyonuna $\left(\bmod\ k\right)$ ya göre *Dirichlet* karakteri denir.

$$\chi\left(n\right)=\begin{cases} f\left(\overline{n}\right), & \left(n,k\right)=1 \\ 0, & \left(n,k\right)>1\end{cases}$$

ve esas *Dirichlet* karakteri χ_1;

$$\chi_1\left(n\right)=\begin{cases} 1, & \left(n,k\right)=1 \\ 0, & \left(n,k\right)>1\end{cases}$$

biçiminde tanımlanır (Apostol 1976).

İndirgenmiş kalan sınıflarının bir grubu G olmak üzere, sonlu ve değişmeli bir grubun mertebesi adedince karakteri olacağından $\left(\bmod\ k\right)$ ya göre tanımlanan G grubunun birbirinden farklı $\varphi\left(k\right)$ tane *Dirichlet* karakteri vardır.

Ayrıca;

$$\begin{cases} (m,\ k)=(n,\ k)=1 \Rightarrow (mn,k)=1, \\ m \ ve \ n \ den \ en \ az \ biri \ k \ ile \ aralarında \ asal \ değil \Rightarrow (mn,k)>1 \end{cases}$$

olacağından χ *Dirichlet* karakteri bütün m ve n ler için $\chi(m.n)=\chi(m).\chi(n)$ tam çarpanlanabilirlik özelliğini sağlar.

Teorem 4.6.4 $\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_{\varphi(k)}$ $(\mathrm{mod}\ k)$ ya göre $\varphi(k)$ tane birbirinden farklı *Dirichlet* karakterini göstersin. $m,n\in\mathbb{Z}$ ve $(n,k)=1$ olsun. Bu takdirde

$$\sum_{r=1}^{\varphi(k)} \chi_r(m)\overline{\chi_r}(n)=\begin{cases} \varphi(k),\ m\equiv n(\mathrm{mod}\, k) \\ 0,\ \ m\not\equiv n(\mathrm{mod}\, k) \end{cases}$$

olur (Apostol 1976).

Tanım 4.6.2. f aritmetik fonksiyonuna $\forall n\in\mathbb{N}$ için $f(n+r)=f(n)$ olacak şekilde bir $r\in\mathbb{N}$ varsa f ye periyodik aritmetik fonksiyon r'yede bu fonksiyonun *periyodu* denir (Toth 2007).

Bu tanım şu şekilde de ifade edilebilir; n_1 ve n_2 doğal sayıları için $n_1\equiv n_2(\mathrm{mod}\ r)$ iken $f(n_1)=f(n_2)$ ise f ye $(\mathrm{mod}\ r)$ göre periyodik aritmetik fonksiyon $r\in\mathbb{Z}^+$ da *periyod* denir.

Tanım 4.6.3. f aritmetik fonksiyonuna $\forall n\in\mathbb{N}$ için eğer $f((n,\ r))=f(n)$ ise $(\mathrm{mod}\ r)$ ye göre çift fonksiyon denir (Toth 2007).

$\forall n\in\mathbb{Z}$ için $f(n+r)=f((n+r),r)=f((n,r))=f(n)$ olduğundan $(\mathrm{mod}\ r)$ ye göre çift olan her f aritmetik fonksiyonu aynı zamanda $(\mathrm{mod}\ r)$ ye göre periyodiktir.

$f(a)=(a,b)$ ile gösterilen en büyük ortak bölen fonksiyonu ve *Dirichlet* karakterleri periyodik fonksiyonlardır.

5. GENELLEŞTİRİLMİŞ RAMANUJAN TOPLAMLARI

Ramanujan toplamları özellikle tamsayıların karelerin toplamı olarak temsillerinde önemli yer tutar. 1900 den hemen sonra pek çok matematikçinin çalışmasında bu toplamlardan bahsedilir. "*Ramanujan Toplamları*" adlandırılması bu toplamlara Ramanujan'ın yapmış olduğu önemli katkılardan dolayı Hardy tarafından verilmiştir. Bazı kaynaklarda trigonometrik toplamlar olarak da bahsedilir.

Üstel $e(a,b)$ fonksiyonunu, a ve b tamsayılar olmak üzere

$$e(a,b) = \exp\left(\frac{2\pi i a}{b}\right) = e^{\frac{2\pi i a}{b}}$$

ile tanımlanır (Carthy 1986).

Reel değişkenli üstel fonksiyonun seriye açılımı $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ dır. Eğer θ reel ise $e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!}$ olur. Bu açılımda reel ve sanal kısmı ayırırsak,

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n.\theta^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n.\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

yazılır. Kosinüs ve sinüs için toplam formüllerden $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ olduğu bilinir. $\left|e^{i\theta}\right| = \left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = 1 \Rightarrow k \in Z$ için $e^{2\pi i k} = \cos(2\pi k) + i\sin(2\pi k) = 1$ dir. Dolayısıyla,

$$\left[\mathrm{e}(a,b)\right]^b = e^{2\pi i a} = 1$$

olur ve $e(a,b)$ ye birimin b. mertebeden kökleri denir. Eğer $e(a,b) = e^{\frac{2\pi i a m}{b}}$ ifadesinde $\frac{m}{b}$ kesri indirgenmiş formda ise; $0 < k < b$ olmak üzere

$$\left[e(a,b)\right]^k \neq 1$$

dir. Bu şekildeki birimin b. mertebeden köklerine *pirimitif* (*asli*) kökleri denir.

Tanım 5.1. $n \in \mathbb{Z}$ ve $r \in \mathbb{Z}^+$ olsun. Toplam $(\bmod\ r)$ ye göre indirgenmiş kalan sınıfları sistemi üzerinden değerler almak üzere,

$$C(n,r)=C_r(n)=\sum_{\substack{h(\mathrm{mod}\, r)\\ (h,r)=1}} e(hn,r)=\sum_{\substack{h(\mathrm{mod}\, r)\\ (h,r)=1}} \exp\left(\frac{2\pi ihn}{r}\right)$$

ile tanımlanan trigonometrik $C(n,r)$ toplamlarına *Ramanujan Toplamları* denir.

Yukarıdaki toplam tanımında $C_r(n)$ gösterimi ile sabit r ve pozitif n tamsayıları alındığına dikkat edilmelidir. Yani $C_r(n)=C(\cdot,r)$ alınmıştır. Benzer şekilde n sabit olarak kabul edilirse $C(n,\cdot)$ aritmetik fonksiyonu elde edilir.

O halde $n=0$ olarak alınırsa $C(n,r)$ toplamı bütün r ler için *Euler'*in *Totient* fonksiyonu $\varphi(r)$ ye dönüşür:

$$C(0,r)=\varphi(r).$$

Ayrıca $n=1$ iken bütün r ler için bu kez *Möbiüs* fonksiyonu $\mu(r)$ elde edilir.

$$C(1,r)=\mu(r)$$

$C_r(n)$ gösteriminde r ye *Ramanujan* toplamının *indisi* adı verilir.

Teorem 5.1. *Ramanujan* toplamları indislerine göre çarpanlanabilir aritmetik fonksiyonlardır. Yani $(m,n)=1$ olmak üzere her $k\in\mathbb{Z}$ için:

$$C_m(k).C_n(k)=C_{m.n}(k)$$

dır (Grosswald 1984).

İspat:
$$C_m(k).C_n(k)=\sum_{\substack{h_1(\mathrm{mod}\, m)\\ (h_1,m)=1}} e^{\frac{2\pi ih_1k}{m}}.\sum_{\substack{h_2(\mathrm{mod}\, n)\\ (h_2,n)=1}} e^{\frac{2\pi ih_2k}{n}}$$

$$=\sum_{h_1}\sum_{h_2} e^{\frac{2\pi ik(h_1n+h_2m)}{m.n}}$$

$(h_1,m)=1$ ve $(h_2,n)=1$ olduğu için $h=h_1n+h_2m$ toplamı (mod *mn)* ye göre indirgenmiş tam kalan sınıfları sistemi üzerinden değerler alır. Böylece son eşitlik,

$$C_m(k).C_n(k)=\sum_{\substack{h(\mathrm{mod}\, mn)\\ (h,mn)=1}} e^{\frac{2\pi ikh}{mn}}$$

olarak yazılır ki, bu da $C_{mn}(k)$ nın tanımından başka bir şey değildir. Böylece teoremde ispatlanmış olur.

Teorem 5.2. $f \pmod{k}$ periyodik bir aritmetik fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$f(m) = \sum_{n=0}^{k-1} g(n) e^{\frac{2\pi imn}{k}}$$

olacak şekilde

$$g(n) = \frac{1}{k} \sum_{m=0}^{k-1} f(m) e^{\frac{-2\pi imn}{k}}$$

ile tek bir şekilde tanımlanan $g \pmod{k}$ periyodik aritmetik fonksiyonu vardır (Grosswald 1984).

Teorem 5.2 de f ve $g \pmod{k}$ periyodik olduğundan her bir toplam $(\bmod\ k)$ya göre tam kalan sınıfları üzerinden değerler almak üzere aşağıdaki gibi yeniden ifade edilebilir:

$$f(m) = \sum_{n(\bmod k)} g(n) e^{\frac{2\pi imn}{k}},$$

$$g(n) = \frac{1}{k} \sum_{m(\bmod k)} f(m) e^{\frac{-2\pi imn}{k}}.$$

Burada $f(m)$ fonksiyonuna f aritmetik fonksiyonunun sonlu *Fourier* açılımı ve $g(n)$ fonksiyonuna da f aritmetik fonksiyonun *Fourier katsayısı* denir (Apostol 1976).

Teorem 5.3. f ve g aritmetik fonksiyonlar ve $S_k(n) = \sum_{d|(n,k)} f(d) g\left(\frac{k}{d}\right)$ olsun. O zaman $S_k(n)$nin *Fourier* katsayısı $a_k(m) = \sum_{d|(m,k)} g(d) f\left(\frac{k}{d}\right) . \frac{d}{k}$ olacak şekilde

$$S_k(n) = \sum_{m(\bmod k)} a_k(m) e^{\frac{2\pi imn}{k}}$$

sonlu *Fourier* açılımı vardır (Apostol 1976).

Teorem 5.4. $(m,n)=d$ olmak üzere, $C_n(m)$ *Ramanujan* toplamı

$$C_n(m)=\sum_{\ell \mid d} \ell.\mu\left(\frac{n}{\ell}\right)$$

aritmetik temsili ile ifade edilir (Grosswald 1984).

İspat. I.Yol:

$$\sum_{k \mid v} \mu(k)=\begin{cases}1, & v=1 \\ 0, & v \neq 1\end{cases}$$

olduğu *Möbius* fonksiyonunun tanımından biliniyor. Dolayısıyla *Ramanujan* toplamının tanımında, toplamın değerlerini aldığı şartları daha da basit hale indirgeyebiliriz. Yani, h nın $(\operatorname{mod} n)$ ye göre indirgenmiş kalan sınıfları üzerinden değerler alması yerine $(h,n)=1$ şartını göz ardı ederek h in bütün kalanlar üzerinden değerler aldığını kabul edelim. Fakat bu durumda $(h,n)\neq 1$ iken $\mathrm{C}_n(m)$ nin tanımında $\sum_{d \mid (h,n)} \mu(d)$ şeklinde yeni bir çarpan oluşur ve böylece:

$$\begin{aligned}\mathrm{C}_n(m) &= \sum_{h(\operatorname{mod} n)} e^{\frac{2\pi i h m}{n}} \sum_{k \mid (h,n)} \mu(k) \\ &= \sum_{k \mid n} \mu(k) \sum_{\substack{h \equiv 0(\operatorname{mod} k) \\ 1 \leq h \leq n}} e^{\frac{2\pi i h m}{n}}\end{aligned}$$

$h=rk$, $\quad r=1,2,\cdots,\frac{n}{k}$ yazılarak

$$\begin{aligned}C_n(m) &= \sum_{k \mid n} \mu(k) \sum_{r=1}^{n/k} e^{\frac{2\pi i r k m}{n}} \\ &= \sum_{k \mid n} \mu(k) \sum_{r=1}^{n/k} e^{\frac{2\pi i r m}{n/k}} .\end{aligned}$$

Eğer $(n/k)\mid m$ ise $e^{\frac{2\pi i r m}{n/k}}=1$ ve $\sum_{r=1}^{n/k} e^{\frac{2\pi i r m}{(n/k)}}=\frac{n}{k}$ olur. Aksi halde ise toplam sıfırdır. Dolayısıyla,

$$C_n(m)=\sum_{\substack{k \mid n \\ (n/k) \mid m}} \mu(k)\frac{n}{k} .$$

veya $\ell = \frac{n}{k} \Rightarrow k = \frac{n}{l}$ değeri yerine yazılırsa

$$C_n(m) = \sum_{\substack{\ell | n \\ \ell | m}} \ell \mu(\frac{n}{\ell})$$

elde edilir. Bununla beraber $\ell | n$ ve $\ell | m \Leftrightarrow (m,n) = d$ iken $\ell \,| d$ olduğu da göz önüne alınarak

$$C_n(m) = \sum_{\ell | d} \ell \mu(\frac{n}{\ell})$$

bulunur ve istenen gösterilmiş olur.

II. Yol: Teorem 5.4. ispatı, Teorem 5.3. te $f(k) = k,\ \mathrm{g}(\mathrm{k}) = \mu(k)$ alınarak daha kolay bir şekilde gösterilebilir:

$$a_k(m) = \sum_{d|(m,k)} \mu(d) = \left[\frac{1}{(m,k)}\right] = \begin{cases} 1, & (m,k) = 1 \ ise \\ 0, & (m,k) > 1 \ ise \end{cases}$$

olmak üzere;

$$\sum_{d|(n,k)} d\mu\left(\frac{k}{d}\right) = \sum_{m(\operatorname{mod} k)} a_k(m)\, e^{\frac{2\pi i m n}{k}}$$

$$= \sum_{\substack{m(\operatorname{mod} k) \\ (m,k)=1}} e^{\frac{2\pi i m n}{k}}$$

$$= C_k(n).$$

Özel durumda $n = p$ ve $p \nmid m$ ise $(m,p) = 1$ olur. Bu takdirde,

$$\mathrm{C}_p(m) = \sum_{\ell | 1} \ell \mu(\frac{p}{\ell})$$

$$= 1\, \mu(p)$$

$$= -1.$$

Ramanujan toplamı *C(n,r) Hölder* bağıntısını sağlar: φ *Euler'in totient* fonksiyonu μ *Möbius* fonksiyonu ve $m = \frac{r}{(n,r)}$ olmak üzere *Hölder* bağıntısı,

$$C(n,r) = \frac{\mu(m).\varphi(r)}{\varphi(m)}$$

ile verilir (Hardy 1975).

Bu eşitliğin sağ tarafına *Van Sterneck* sayısı-bağıntısı denir ve $\phi(n,r)$ ile gösterilir. O halde $C\ (n,r)=\phi(n,r)$ yazılır.

Örnek 5.1. $C_r(n)$ nin aritmetik temsili ve *Hölder* bağıntısı ile ilgili aşağıdaki örnekler verilmiştir.

a) $C_5(6)=\sum\limits_{\ell|(5.6)}\ell.\mu\left(\dfrac{5}{\ell}\right)=1.\mu(5)=-1\ ,\ \left((5.6)=1,\ \ell=\{1\}\right).$

$$C_5(6)=C(6,5)=\frac{\varphi(5)\ \mu(5)}{\varphi(5)}=-1\ ,\ \left(m=\frac{5}{(6,5)}=5\right).$$

b) $C_4(12)=\sum\limits_{\ell|(12,4)}\ell.\mu\left(\dfrac{4}{\ell}\right)=1.\mu\left(\dfrac{4}{1}\right)+2.\mu\left(\dfrac{4}{2}\right)+4.\mu\left(\dfrac{4}{4}\right)=1.0+2.(-1)+4.1=2$,

$\left((12,4)=4,\ \ell=\{1,2,4\}\right).$

$$C_4(12)=C(12,4)=\frac{\varphi(4).\mu(1)}{\varphi(1)}=\frac{2.1}{1}=2\ ,\ \left(m=\frac{4}{(12,4)}=1\right).$$

c) $C_{15}(12)=\sum\limits_{\ell|(12,15)}\ell.\mu\left(\dfrac{15}{\ell}\right)=1.\mu\left(\dfrac{15}{1}\right)+3\mu\left(\dfrac{15}{3}\right)=1.(-1)^{-2}+3.(-1)=-2$,

$\left((12,15)=-3,\ \ell=\{1,3\}\right).$

$$C_{15}(12)=C(12,15)=\frac{\varphi(15).\mu(5)}{\varphi(5)}=\frac{8.(-1)}{4}=-2\ .$$

Eckford Cohen tarafından ispatlanan $C(n,r)$ nin *ortogonallik* özelliği aşağıdaki teoremle verilmiştir.

Teorem 5.5. Eğer *d* ve *e, r* nin bölenleri ise o zaman

$$\sum_{t|r}C(\frac{r}{t},d)\,C(\frac{r}{e},t)=\begin{cases}r, & d=e\\ 0, & d\neq e\end{cases}$$

olur (Sivaramakrishnan 1989).

İspat. t ve d için $\left(\frac{r}{t},d\right)=k$ olsun. O zaman $(r,dt)=kt$ veya $d\left(\frac{r}{d},t\right)=kt.$

Yani, $\left(\frac{r}{d},t\right)=\frac{kt}{d}$ dir. Şimdi $\frac{d}{k}\left|\frac{r}{k}\right.$ olduğu için $\frac{d}{k}\ \left|\left(\frac{r}{kt}\right)t\right.$ dır. Fakat $\left(\frac{d}{k},\frac{r}{kt}\right)$=1 dir. Böylece $\frac{d}{k}\ |\,t$ olur. Dolayısıyla,

$$\left(\frac{r}{d},t\right)=\frac{kt}{d}=\frac{t}{(d/k)}$$

yazılır ve böylece,

$$C\left(\frac{r}{t},d\right)\varphi(t)=C(k,d)\,\varphi(t)\ =\frac{\mu\left(\frac{d}{k}\right)\varphi(d)\varphi(t)}{\varphi\left(\frac{d}{k}\right)}\ ,$$

ve

$$C\left(\frac{r}{d},t\right)\varphi(d)=C\left(\frac{t}{\frac{d}{k}},t\right)\varphi(d)\ =\frac{\mu\left(\frac{d}{k}\right)\varphi(t)\varphi(d)}{\varphi\left(\frac{d}{k}\right)}$$

olur. Buradan

$$C\left(\frac{r}{d},t\right)\varphi(d)=C\left(\frac{r}{t},d\right)\varphi(t)$$

yazılır. Şu halde yukarıdaki ifadeden

$$\sum_{t|r}C\left(\frac{r}{t},d\right)C\left(\frac{r}{e},t\right)=\varphi(d)\sum_{t|r}\frac{C\left(\frac{r}{d},t\right)C\left(\frac{r}{e},t\right)}{\varphi(t)}$$

elde edilir. r nin sabit d ve e bölenleri için,

$$F(r)=\varphi(d)\sum_{t|r}\frac{C\left(\frac{r}{d},t\right)C\left(\frac{r}{e},t\right)}{\varphi(t)}$$

r ye göre çarpanlanabilirdir. Dolayısıyla p bir asal ve $0\le b\le a$, $0\le c\le a$ olmak üzere $r=p^a$, $d=p^b$, $e=p^c$ iken teoremin ifadesinin gerçeklendiğini göstermek yeterli olacaktır. $b\le c$ veya $c\le b$ seçip seçmememiz önemsizdir. Kesinlik için $b\le c$ alalım. O zaman a-$b\ge a$-c olur.

Hölder bağıntısını kullanarak,

$$\varphi\left(p^{b}\right)\sum_{t|p^{a}}\frac{C\left(p^{a-b},t\right).C\left(p^{a-c},t\right)}{\varphi(t)}=\begin{cases}\varphi(p^{b})\left[p^{a-b}+\dfrac{p^{a-b}}{p-1}\right], & c=b\\ \varphi\left(p^{b}\right)\left[p^{a-c}-\dfrac{\varphi\left(p^{a-c+1}\right)}{p-1}\right], & c\neq b\end{cases}$$

$$=\begin{cases}p^{a},\ c=b\\ 0,\ c\neq b\end{cases}.$$

Dolayısıyla,

$$F(r)=\begin{cases}r,\ d=e\\ 0,\ d\neq e\end{cases}$$

olur ki

Unitary bölen tanımını kullanarak genelleştirilmiş *Ramanujan* toplamlar tanımlanmıştır. Bu toplamlara *Ramanujan* toplamlarının *unitary benzeri* denir ve $C_r^*(n)$ ile gösterilir.

r nin unitary bölenlerinden j yi bölen en büyük tamsayı $(j,r)_*$ ile gösterilsin. O zaman, *Ramanujan* toplamının *unitary benzeri* $C_r^*(n)$ için

$$C_r^*(n)=\sum_{\substack{(j,r)_*=1\\ j(\operatorname{mod} r)}}\exp\left(\frac{2\pi jin}{r}\right)$$

$$=\sum_{\substack{d|n\\ d\|r}}d\mu^*\left(\frac{r}{d}\right)$$

$$=\sum_{d\|(n,r)_*}d\mu^*\left(\frac{r}{d}\right)$$

yazılır (Johnson 1982).

Örnek 5.2. $C_r^*(n)$ aritmetik fonksiyonunun, aritmetik özelliklerinin uygulamaları aşağıdaki örneklerle verilmiştir.

a) $C_6^*(2)=\sum_{d\|(6,2)_*} d.\mu^*\left(\frac{r}{d}\right)=1.\mu^*\left(\frac{15}{1}\right)+2.\mu^*\left(\frac{15}{2}\right)=1.1+2.(-1)=-1$,

b) $C_{12}^*(15)=\sum_{d\|(12,15)_*} d.\mu^*\left(\frac{r}{d}\right)=1.\mu^*\left(\frac{15}{1}\right)+3.\mu^*\left(\frac{15}{3}\right)=1.1+3.(-1)=-2$.

Ayrıca μ^* ve φ^* sırasıyla μ ve φ aritmetik fonksiyonlarının *unitary* benzerlerini göstermek üzere,

$$C_n^*(0)=\varphi^*(n)$$

$$C_n^*(1)=\mu^*(n)$$

dır. p bir asal ve $a\geq 1$ olmak üzere, $C_r^*(n)$ toplamı

$$C^*(n,p^a)=\begin{cases} p^a-1, & p^a|n \\ -1, & p^a\nmid n \end{cases}$$

ve

$$\sum_{d\|r} C^*(n,d)=\begin{cases} r, & r|n \\ 0, & r\nmid n \end{cases}$$

eşitliklerini sağlar (Sivaramakrishnan 1989).

Örnek 5.3. Yukarıdaki son iki eşitliğin uygulamaları aşağıdaki örneklerle gösterilmiştir.

a) $C^*(8,4)=\sum_{d\|(8,4)_*} d.\mu^*\left(\frac{r}{d}\right)=1.\mu^*\left(\frac{4}{1}\right)+4.\mu^*\left(\frac{4}{4}\right)=1.(-1)+4.1=3$ ve

$p^a|n$ *iken* $C^*(n,p^a)=p^a-1\Rightarrow C^*(8,4)=2^2-1=3$.

b) $C^*(9,3)=\sum_{d\|(9,3)_*} d.\mu^*\left(\frac{r}{d}\right)=1.\mu^*\left(\frac{3}{1}\right)+3.\mu^*\left(\frac{3}{3}\right)=1.(-1)+3.1=2$ ve

$C^*(9,3)=3-1=2$.

c) $\sum_{d\|4} C^*(12,d)=C^*(12,1)+C^*(12,4)=1+3=4$,

$$\left(\begin{array}{l} C^*(12,1)=\sum_{d\|(12,1)_*} d.\mu^*\left(\frac{1}{d}\right)=1.\mu^*(1)=1 \\ C^*(12,4)=\sum_{d\|(12,4)_*} d.\mu^*\left(\frac{4}{d}\right)=1.\mu^*\left(\frac{4}{1}\right)+4.\mu^*\left(\frac{4}{4}\right)=1.(-1)+4(1)=3 \end{array}\right).$$

d) $\sum_{d\|4} C^*(5,d) = C^*(5,1) + C^*(5,4) = 1 + (-1) = 0$,

$$\begin{pmatrix} C^*(5,1) = \sum_{d\|(5,1)_*} d.\mu^*\left(\dfrac{1}{d}\right) = 1.\mu^*(1) = 1 \\ C^*(5,4) = \sum_{d\|(5,4)_*} d.\mu^*\left(\dfrac{4}{d}\right) = 1.\mu^*\left(\dfrac{4}{1}\right) = (-1) \end{pmatrix}.$$

f ve *g* aritmetik fonksiyonlar olmak üzere

$$F(k) = \sum_{d|k} f(d)\, g\left(\frac{k}{d}\right) = S(k)$$

ile verilen $F(k)$ aritmetik fonksiyonu kullanılarak genelleştirilmiş *Ramanujan* toplamı

$$\mathrm{S}_{f,g}(n;k) = \mathrm{S}_k(n) = \mathrm{S}(n;k) = \sum_{d|(n,k)} f(d)\, g\left(\frac{k}{d}\right)$$

biçiminde tanımlanır (Apostol 1952). Eğer bu toplamda $k|n$ ise toplam $F(k)$ fonksiyonuna dönüşür. Teorem 5.4. ü dikkate aldığımız zaman $C_k(n)$ *Ramanujan* toplamının; $S_k(n)$ toplamının özel ve önemli bir örneği olduğu görülür.

Eğer *a* herhangi bir aritmetik fonksiyon ve $g(1) \neq 0$ ise

$$S(n) = \sum_{d|n} a(d)\, g\left(\frac{n}{d}\right) \Leftrightarrow a(n) = \sum_{d|n} S(d)\, g^{-1}\left(\frac{n}{d}\right)$$

dır (Apostol 1972). Burada $g = \mu$ özel durumu alınırsa iyi bilinen *Möbiüs* ters çevirme formülü elde edilir.

$\alpha_{n,d}$ fonksiyonu,

$$\alpha_{n,d} = \begin{cases} 1, & d|n \\ 0, & d \nmid n \end{cases}$$

ile tanımlansın. $S_{f,g}(m,k)$ toplamı bu $\alpha_{n,d}$ fonksiyonunu kullanarak iki farklı şekilde ifade edilir:

$$S_{f,g}(m,k) = \sum_{d|m} \alpha_{k,d} f(d) g\left(\frac{k}{d}\right)$$

$$S_{f,g}(m,k) = \sum_{d|k} \alpha_{m,d} f(d) g\left(\frac{k}{d}\right)$$

(Apostol 1972).

$h_k(d)=\alpha_{k,d} f(d) g\left(\frac{k}{d}\right)$ olmak üzere yukarıdaki ilk iki eşitlikten birincisinde sabit bir k için $S_{f,g}(m,k)$ toplamı,

$$S_{f,g}(m,k)=(\mathrm{h}_k * \mu^{-1})(m)$$

şeklinde *Dirichlet* çarpımı ile ifade edilebilir (Apostol 1972). Bu gösterimi aşağıdaki teoremin ispatında kullanacağız.

Teorem 5.6. Eğer $k \geq 1$, $n \geq 1$ ise

$$\sum_{d|n} S_{f,g}(d,k)=\sum_{d|(n,k)} f(d) g\left(\frac{k}{d}\right)\sigma\left(\frac{n}{d}\right)$$

dır (Apostol 1972).

İspat: Sabit bir k için $S(m)=S_{f,g}(m,k)$ dır.

$$S(m)=(h_k * \mu^{-1})(m)$$

ve böylece,

$$\begin{aligned}\sum_{d|n} S_{f,g}(d,k)&=\sum_{d|n} S(d)\\ &=(\mathrm{S} * \mu^{-1})(n)\\ \sum_{d|n} S_{f,g}(d,k)&=\left[\left(h_k * \mu^{-1}\right) * \mu^{-1}\right](n)\\ &=\left(h_k * \mu^{-1} * \mu^{-1}\right)(n).\end{aligned}$$

Burada n bölenlerinin toplamı $\sigma(n)$ fonksiyonu için $\left(\mu^{-1} * \mu^{-1}\right)(n)=\sigma(n)$ olduğundan

$$\begin{aligned}\sum_{d|n} S_{f,g}(d,k)&=(h_k * \sigma)(\mathrm{n})\\ &=\sum_{d|n} \alpha_{k,d}\, f(d) g\left(\frac{k}{d}\right)\sigma\left(\frac{n}{d}\right)\\ &=\sum_{\substack{d|n\\ d|k}} f(d) g\left(\frac{k}{d}\right)\sigma\left(\frac{n}{d}\right)\\ &=\sum_{d|(n.k)} f(d) g\left(\frac{k}{d}\right)\sigma\left(\frac{n}{d}\right).\end{aligned}$$

Örnek 5.4. Apostol (1972) tarafından aşağıdaki örnekler verilmiştir.

1) Eğer $(n,k)=n$ ise

$$\sum_{d|n} S_{f,g}(d,k)=\sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{k}{d}\right)\sigma\left(\frac{n}{d}\right).$$

2) Eğer $k=n$ ise

$$\sum_{d|n} S_{f,g}(d,n)=\sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right)\sigma\left(\frac{n}{d}\right).$$

3) Eğer $k=n$ ve $g=\mu$ ise

$$\sum_{d|n} S_{f,\mu}(d,n)=\sum_{d|n} \mu(d)\sigma(d)f\left(\frac{n}{d}\right).$$

4) Eğer f tam çarpanlanabilir ve $f(n)\neq 0$ ise

$$f\left(\frac{n}{d}\right)=\frac{f(n)}{f(d)}$$

olacağından, örnek 5.4.-3) ten

$$\sum_{d|n} S_{f,\mu}(d,n)=f(n)\sum_{d|n}\frac{\mu(d)\sigma(d)}{f(d)}$$

$$\sum_{d|n} S_{f,\mu}(d,n)=f(n)\prod_{p|n}\left(1-\frac{\sigma(p)}{f(p)}\right)$$

$$=f(n)\prod_{p|n}\left(1-\frac{2}{f(p)}\right).$$

5) Örnek 5.4.- 4) te $f(n)=n$ özel durumu alınırsa

$$\sum_{d|n}\phi(d,n)=n\prod_{p|n}\left(1-\frac{2}{p}\right)$$

formülü elde edilir.

Herhangi bir f aritmetik fonksiyonu için

$$f^{*}(r)=\sum_{d|r} f(d)$$

fonksiyonu tanımlansın. $n\times n$ tipindeki A matrisi (m,k) en büyük ortak böleni göstermek üzere

$$A = (a_{mk}) = \left[f^{*}\left((m,k) \right) \right]$$

ile verilsin. A matrisinin determinantı *Smith* determinantı olarak bilinen,

$$\det \mathrm{A} = f(1).f(2).\cdots.f(n)$$

formülü ile hesaplanır (Apostol 1972).

Örnek 5.5. Apostol (1972) tarafından verilen örnek 5.4.-5) te f yerine Euler'in φ fonksiyonu alınırsa *Smith* determinantı elde edilir:

$f^{*}(r) = \sum_{d|r} \varphi(d)$ olsun

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow A = (a_{mk}) = \left[f^{*}\left((m,k) \right) \right] \text{ olduğundan}$$

$$a_{11} = f^{*}(1) = \varphi(1) = 1, \quad a_{12} = f^{*}(1) = \varphi(1) = 1, \quad a_{13} = f^{*}(1) = \varphi(1) = 1$$

$$a_{21} = f^{*}(1) = \varphi(1) = 1, \quad a_{22} = f^{*}(1) = \varphi(1) = 1, \quad a_{23} = f^{*}(1) = \varphi(1) = 1$$

$$a_{31} = f^{*}(1) = \varphi(1) = 1, \quad a_{32} = f^{*}(1) = \varphi(1) = 1, \quad a_{33} = f^{*}(3) = \varphi(1) + \varphi(3) = 1 + 2 = 3$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow det(A) = 6 + 1 + 1 - (2 + 1 + 3) = 2$$

ve

$$\det(A) = \varphi(1).\varphi(2).\varphi(3) = 1.1.2 = 2$$

bulunur.

Ramanujan toplamının determinant hesabı ile ilgili bir uygulaması aşağıdaki teorem ile verilir.

Teorem 5.7. $n \times n$ tipindeki A matrisinin a_{mk} elemanı $a_{mk} = S_{f,g}(m,k)$ olsun. Bu matrisin determinantı:

$$\det \mathrm{A} = f(1).f(2)...f(\mathrm{n}).g(1)^{n}$$

ile bulunur (Apostol 1972).

İspat: B (*f*) *ve* C (*g*) $n\times n$ tipinde alt üçgen matrisler olmak üzere,

$$\mathrm{A}=\mathrm{B}(f).\mathrm{C}(g)$$

yazılır. Burada,

$$\mathrm{B}(f)=\left[\alpha_{m,k}f(m)\right] \text{ ve } C(g)=\left[\alpha_{m,k}g\left(\frac{m}{k}\right)\right].$$

$\mathrm{B}(f).\mathrm{C}(g)^t$ çarpımının a_{mk} elemanı,

$$\sum_{r=1}^{n}\alpha_{m,r}\, f(r)\, .\, \alpha_{k,r}\; g\left(\frac{k}{r}\right)=\sum_{\substack{r|m\\ r|k}} f(r)g\left(\frac{k}{r}\right)$$

$$=\mathrm{S}_{f,g}\,(m,k)$$

dır. O halde iddia edildiği gibi $\mathrm{A}=\mathrm{B}(f).\mathrm{C}(g)^t$ olur.

$$\det\mathrm{B}(f)=f(1).f(2).\cdots.f(n),\;\; \det\mathrm{C}(g)=g(1)^n$$

olduğu da göz önüne alınırsa detA nın teoremde verilen formülle hesaplanacağı görülür.

Örnek 5.6. Teorem 5.7.de $f(n)=n$ *ve* $g=\mu$ alınırsa A matrisinin a_{mk} elemanı C_k (m) *Ramanujan* toplamı olan $n\times n$ tipindeki bir matris olur ve determinantı

$$\det\mathrm{A}=\det\left[\mathrm{C}_k(m)\right]=n!$$

ile hesaplanır (Apostol 1972)

Örnek 5.6. nın 3×3 tipinde bir matris için uygulaması aşağıda yapılmıştır

$$C(m,k)=\sum_{d|(m,k)} d.\mu\left(\frac{k}{d}\right) \text{olmak üzere, } A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} \Rightarrow A=(a_{mk})=\left[C(m,k)\right]$$

$$a_{11}=C(1.1)=\sum_{d|1} d.\mu(d)=1, \qquad a_{12}=C(1,2)=\sum_{d|1} d.\mu(d)=1$$

$$a_{13}=C(1,3)=\sum_{d|1} d.\mu(d)=1, \qquad a_{21}=C(2,1)=\sum_{d|1} d.\mu(d)=1$$

$$a_{22}=C(2,2)=\sum_{d|2} d.\mu(d)=-1, \quad a_{23}=C(2,3)=\sum_{d|1} d.\mu(d)=1$$

$$a_{31} = C(3,1) = \sum_{d|1} d.\mu(d) = 1 \ , \qquad a_{32} = C(32) = \sum_{d|1} d.\mu(d) = 1$$

$$a_{33} = C(3,3) = \sum_{d|3} d.\varphi(d) = -2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = 2+1+1-(-1-2+1) = 6$$

ve

$$\det(A) = 3! = 6$$

elde edilir.

$C(n,r)$ ile ilgili diğer bir aritmetik toplam *Kloosterman* toplamıdır *h* (mod *r*) ye göre indirgenmiş kalan sınıfları sistemi üzerinden değerler almak üzere,

$$h\,h' \equiv 1(\bmod r)$$

ise bu takdirde

$$S(u,v,r) = \sum_{\substack{h(\bmod r) \\ (h,r)=1}} \exp\left[\frac{2\pi i(uh+vh')}{r}\right]$$

ile tanımlanan toplama *Kloosterman* toplamı denir. $r|v$ olduğunda *S*(*u,v,r*) toplamı $C(n,r)$ toplamına dönüşür.

h ve r^k nin 1den başka *k* ıncı kuvvetten ortak böleni yoksa yani $(h,r^k\ )_k = 1$ ise *Ramanujan* toplamı:

$$C^k(n,r) = C_r^k(n) = \sum_{\substack{h(\bmod r^k) \\ (h,r^k)_k=1}} \exp\left(\frac{2\pi hn}{r^k}\right)$$

şeklinde genelleştirilir (Cohen 1948).

Bu genelleştirmede $k=1\,ise$ $C_r^k(n) = C_r(n)$ olduğu apaçıktır. Üstelik bu genelleştirilmiş toplam $C_r(n)$ toplamının özelliklerini uygun formda gerçekler. Bu özelliklerden biri ,

$$C_{rq}^k(n) = C_r^k(n).C_q^k(n)$$

biçiminde verilen çarpanlanabilirlik özelliğidir (Sivaramakrishnan 1989). Yine diğer bir özellikte aşağıdaki teoremle verilir.

Teorem 5.8. μ *Möbiüs* fonksiyonu olmak üzere

$$C^k(n,r) = \sum_{d^k \mid (n,r^k)_k} \mu\left(\frac{r}{d}\right) d^k$$

dır (Sivaramakrishnan 1989).

Ayrıca sırasıyla aşağıda verilen *Hölder* bağıntısını ve *ortagonal* özelliklerini de gerçekler:

$$C^k(n,r) = \frac{\mu(m_k).\phi_k(r)}{\phi_k(m_k)} \quad ; \; m_k = \frac{r^k}{(n,r^k)_k},$$

d ve e, r^k nın bölenleri ise

$$\sum_{t \mid r^k} C^k\left(\frac{r^k}{t}, d\right) C^k\left(\frac{r^k}{e}, t\right) = \begin{cases} r^k, & d = e \\ 0, & d \neq e \end{cases}$$

dır (Sivaramakrishnan 1989).

$C(n,r)$ genellemelerinden biri olan $C^k(n,r)$ ile yukarıda verdiğimiz toplamın Eckford Cohen nin $\Phi_k(r)$ *totient* fonksiyonuna dayandığı, yani; toplamın (mod r) ye göre k indirgenmiş kalan sınıfları üzerinden değerler aldığını tekrar vurgulamalıyız. $C(n,r)$ nin diğer bir genellemeside *Jordan*'ın *Totient* fonksiyonu $J_k(r)$ nin tanımlanması için kullanılan k vektör gösterimine dayanır.

$k \geq 1$, $i = 1, 2, \cdots, k$ olmak üzere $\{x_i\}$ değerlerini (mod k,r) ye göre indirgenmiş kalan sınıfları sistemi üzerinden almak üzere;

$$C^{(k)}(n,r) = \sum_{((x_i),r)=1} \exp\left(\frac{2\pi in(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)}{r}\right)$$

eşitliği ile tanımlanır (Sivaramakrishnan 1989).

Açık olarak $C^{(1)}(n,r) = C(n,r)$ dir.

Teorem 5.9. μ *Möbiüs* fonksiyonu olmak üzere

$$C^{(k)}(n,r) = \sum_{d|(n,r)} \mu\left(\frac{r}{d}\right) d^k$$

dır (Sivaramakrishnan 1989).

İspat:

$$\sum_{d|r} C^{(k)}(n,d) = \begin{cases} r^k, & r|n \\ 0, & r \nmid n \end{cases}$$

olduğunan *Möbiüs* ters çevirme formülünü kullanarak sonuç elde edilir.

Sonuç 5.1.

1) *n ve r* ye göre $C^{(k)}(n,r)$ çarpanlanabilirdir; Çünkü $C^{(k)}(n,r)$, *r'* ye göre çarpanlanabilir ve (mod *r*) ye göre çift fonksiyondur,

2) $C^{(k)}(n,r) = \dfrac{\mu(m) J_k(r)}{J_k(m)}$; $m = \dfrac{r}{(n,r)}$ (Bu bağıntı $C(n,r)$ için verilen *Hölder* bağıntısının benzeridir),

3) $C^{(k)}(n,r)$ toplamı *ortagonallik* özelliğini sağlar. *d* ve *e, r* nin bölenleri olmak üzere

$$\sum_{t|r} C^{(k)}\left(\frac{r}{t}, d\right) . C^{(k)}\left(\frac{r}{e}, t\right) = \begin{cases} r^k, & d = e \\ 0, & d \neq e \end{cases}$$

dır (Sivaramakrishnan 1989).

Genel olarak $C(n,r) = C_r(n)$ için geçerli olan bütün sonuçların benzerlerinin $C^k(n,r)$ *ve* $C^{(k)}(n,r)$ için de sağlanır.

5.1.Genelleştirilmiş Möbius Fonksiyonu ve İlgili Ramanujan Toplamı

Klasik *Möbius* fonksiyonu $\mu(n)$ nin bir genellemesi olan *Souriau-Hsu-Möbius* fonksiyonu μ_α kullanılarak Genelleştirilmiş Ramanujan toplamı tanımlanmıştır (Laohakosol, ve ark. 2006).

Tanım 5.1.1. n tamsayısının bir p asal çarpanının katlılığı $v_p(n)$ olmak üzere n nin standart biçimi

$$n = \prod_p p^{v_p(n)}$$

olsun. $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere *Souriau-Hsu-Möbius* fonksiyonu μ_α

$$\mu_\alpha(n) = \prod_{p|n} \binom{\alpha}{v_p(n)} (-1)^{v_p(n)}$$

Şeklinde tanımlanır (Laohakosol ve ark. 2006).

Özel durumlarda, $\alpha = 1$ için $\mu_1 = \mu$ ve $\alpha = 0$ için *Dirichlet* çarpımının özdeşlik fonksiyonu $\mu_0 = e_0$ olur.

α, β reel sayıları için $\mu_{\alpha+\beta} = \mu_\alpha * \mu_\beta$ dir. O halde $\mu_{\alpha-1} = \mu_\alpha * \mu_{-1}$ olur.

Örnek 5.1.1. *Souriau-Hsu-Möbius* fonksiyonu μ_α için aşağıdaki uygulamalar yapılmıştır.

a) $60 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1$, $v_2(60) = 2,\ v_3(60) = 1,\ v_5(60) = 1$ olduğundan

$$\mu_5(60) = \prod_{p|60} \binom{5}{v_p(n)} (-1)^{v_p(n)} = \binom{5}{2}(-1)^2 \cdot \binom{5}{1}(-1)^1 \cdot \binom{5}{1}(-1)^1$$

$$= 10.1 \cdot 5.(-1).5.(-1) = 250.$$

b) $12 = 2^2.3,\ v_2(12) = 2,\ v_3(12) = 1$, $\alpha = |-4| = 4$ olduğundan

$$\mu_{-4}(12) = \prod_{p|12} \binom{4}{v_p(n)} (-1)^{v_p(n)} = \binom{4}{2}(-1)^2 . \binom{4}{1}(-1)^1 = 6.1.4.(-1) = -24.$$

c) $20 = 2^2.5,\quad v_2(20) = 2 \quad \mathrm{v}_5(20) = 1$, $[\alpha] = \left[\frac{10}{3}\right] \Rightarrow [\alpha] = 3$ olduğundan

$$\mu_{\frac{10}{3}}(20) = \prod_{p|20} \binom{3}{v_p(n)} (-1)^{v_p(n)} = \binom{3}{2}(-1)^2 . \binom{3}{1}(-1)^1 = 3.1.3(-1) = -9.$$

d) $20 = 2^2.5,\ \mathrm{v}_2(20) = 2,\ \mathrm{v}_5(20) = 1$, $|\alpha| = |3+i| \Rightarrow |\alpha| = \sqrt{10}$, $[|\alpha|] = [\sqrt{10}] = 3$,

$$\mu_{3+i}(20) = \prod_{p|20} \binom{3}{v_p(n)} = (-1)^{v_p(n)} = \binom{3}{2}(-1)^2 . \binom{3}{1}(-1)^1 = 3.1.3(-1) = -9.$$

f aritmetik fonksiyonunun tam çarpanlanabilir olması için gerek ve yeter şart $g(1) \neq 0$ olacak şekildeki her g aritmetik fonksiyonu için $(fg)^{-1} = f.g^{-1}$ olmasıdır. Ayrıca f çarpanlanabilir ise f nin tam çarpanlanabilir olması için gerek ve yeter şart $(\mu f)^{-1} = \mu^{-1} f = \mu_{-1} f$ olmasıdır (Apostol 1976).

Teorem 5.1.1. α bir reel sayı ve f çarpanlanabilir bir aritmetik fonksiyon olsun. O zaman f aritmetik fonksiyonunun tam çarpanlanabilir olması için gerek ve yeter şart

$$(\mu_\alpha f)^{-1} = \mu_{-\alpha} f$$

olmasıdır (Laohakosol, ve ark. 2002).

Sonlu *Fourier* açılım $S_k(n)$ ve *Fourier* katsayısı $a_k(m)$ nin tanımında $f(m) = m$ ve $g(m) = \mu_\alpha(m)$ alınırsa aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 5.1.2. $k \in \mathbb{Z}^+$, α *kompleks* bir sayı ve n bir tamsayı ise

$$\sum_{d|(n,k)} d\mu_\alpha\left(\frac{k}{d}\right) = \sum_{m(\mathrm{mod}\, k)} \mu_{\alpha-1}\left((m,k)\right) e^{\frac{2\pi i m n}{k}}$$

dır (Laohakosol, ve ark. 2006).

Tanım 5.1.2. $k \in \mathbb{Z}^+$, $n \in \mathbb{N}$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ olsun. α nıncı mertebeden Genelleştirilmiş *Ramanujan* toplamı

$$C^{(\alpha)}(n,k) = \sum_{d|(n,k)} d\mu_\alpha\left(\frac{k}{d}\right) = \sum_{m(\mathrm{mod}\, k)} \mu_{\alpha-1}\left((m,k)\right) e^{\frac{2\pi i m n}{k}}$$

ile tanımlanır (Laohakosol, ve ark. 2006).

Bu tanımda $\alpha = 1$ alınırsa bildiğimiz $C(n,r)$ *Ramanujan* toplamına dönüşür.

$C^{(\alpha)}(n,r)$ Genelleştirilmiş *Ramanujan* toplamının aşağıdaki özellikleri vardır: $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, p bir asal ve $\alpha \in \mathbb{C}$ olsun. O zaman,

1) $\sum_{j|n} C^{(\alpha)}(m,j) = C^{(\alpha-1)}(m,n)$,

2) $C^{(0)}(m,n)=\begin{cases} n, & n|m \ ise \\ 0, & diğer \ durumlarda \end{cases}$,

3) $\sigma_1(t)=\sum_{d|t} d \Rightarrow C^{(-1)}(m,n)=\sigma_1((m,n))$,

4) $C^{(\alpha)}(n,1)=1$,

5) $C^{(\alpha)}(1,m)=\mu_\alpha(m)$,

6) $(n,m)=1 \Rightarrow C^{(\alpha)}(n,m)=\mu_\alpha(m)$,

7) $(a,k)=(b,m)=(m,k)=1 \Rightarrow C^{(\alpha)}(ab,mk)=C^{(\alpha)}(a,m).C^{(\alpha)}(b,k)$,

8) $(b,m)=1 \Rightarrow C^{(\alpha)}(ab,m)=C^{(\alpha)}(a,m)$,

9) $(a,k)=(m,k)=1 \Rightarrow C^{(\alpha)}(a,mk)=C^{(\alpha)}(a,m).\mu_\alpha(k)$,

10) $(r,s)=1 \Rightarrow C^{(\alpha)}(n,rs)=C^{(\alpha)}(n,r).C^{(\alpha)}(n,s)$,

11) $a,b\in\mathbb{Z}^+$ için $\mathrm{C}^{(\alpha)}(p^b,p^a)=\sum_{i=0}^{\min(a,b)}(-1)^{a-i}\binom{\alpha}{\alpha-i}.p^i$ ve $\mathrm{C}^{(\alpha)}(p^b,p)=p-\alpha$,

12) $\mathrm{p}\nmid\mathrm{n} \Rightarrow C^{(\alpha)}(n,p^a)=(-1)^a\binom{\alpha}{a}$,

13) $p^k \| n \Rightarrow C^{(\alpha)}(n,p^\alpha)=\sum_{i=0}^{\min(a,k)}(-1)^{a-i}\binom{\alpha}{a-i}p^i$

(Laohakosol, ve ark. 2006).

6. KAYNAKLAR

Anderson, D.R.and Apostol T.M. 1952. The Evaluation Of Ramanujan's Sum and Generalizations, California Inst. Of Tech.

Apostol, T.M. 1972. Arithmetical Properties Of Generalized Ramanujan Sums, Pacif. Journal Of Mathematic, Vol.41, No.2.

Apostol, T.M. 1976. An Introduction To Analytic Number Theory, California.

Carty, Mc P.J. 1986. Introduction To Arithmetical Functions, Springer- Verlag.

Cohen, E. 1948. An Extension Of Ramanujan's Sum, Duke Mat, J.16.

Grosswald, Emil. 1984. Topics From The Theory Of Numbers**,** 2nd. Edition, Boston

Hardy,G.H.,Wright,E.M. 1975. An Introduction To The Theory Of Number, Oxford.

Haukkanen, P. 1989. A Property Of Generalized Ramanujan's Sums Concerning Generalized Completely Multiplicative Functions, Publications de L'Institut Math., No.46.

Haukkanen, P. 1990. Some Further Arithmetical Identitiens Involving a Generalization Of Ramanujans Sums, Ann. Acad. Scie. Fenni. Series, A.I. Math. Vol.15.

Haukkanen, P. 1991. On Generalization Of Some Identities Ramanujan, Bull. Soc. Math. Belg., Vol.43.

Haukkanen, P., Sivaramakrishnan, R. 1994. On Certain Trigonometric Sums In Several Variables, Collect. Math. 45, 3.

Johnson, K.R. 1982. Unitary Analogs Of Generalized Ramanujan Sums, Pacific Journal Of Mathematich Vol.103, No.2.

Johnson, K.R. 1990. A Criterion For Generalized Ramanujan Sums, Indian J. Pure And Appl. Math., 21.

Laohakosol,V., Ruengesınsub,P., Pabhapote, N. 2002. Characterizing Completely Multiplicative Functions By Generalized Möbius Functions, Internanational Journal Of Mathematics And Mathematical Sciences 29, No. 11, Pages 633-639.

Laohakosol,V., Ruengesınsub,P., Pabhapote, N. 2006. Ramanujan Sums Via Generalized Möbius Function And Applications, Hindavi Publishing Corparation International Journal Of Mathematics And Mathematical Sciences Volume 2006, Article ID 60528, Pages 1-34.

Nicol, C.A., Vandiver, H.S. 1954. A Von Sterneck Arithmetical Function And Restricted Partitions With Respect To Modulus, Proc.N.A.S., Vol. 40.

Sivaramakrishnan, R. 1989. Classical Theory Of Arithmetic Function, Marrel Dekker, Inc, New York.

Şenay, H. 2007. Sayılar Teorisi Dersleri, Selçuk Üniversitesi, ISBN 978-975-448-185-3, Konya.

Toth, L. 1997. Asymptotic Formule Concerning Arithmetical Functions Defined By Cross-Convolution, II. Divisor Function, Studia Univ, Babeş-Bolyai, Math.42.

Toth, L. 2007. Ramanujan Sums, Kütahyai Egyetem, Törökország Erasmus.