T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DİFERANSİYEL CEBİRLER

Mukaddes BALÇİK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2019

Dr. Öğr. Üyesi Zehra VELİOĞLU danışmanlığında, Mukaddes BALÇİK'in hazırladığı **"Diferansiyel Cebirler"** konulu bu çalışma 04/01/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

İmza

Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Zehra VELİOĞLU ……………………………

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Cennet ESKAL ……………………………

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Kemal TOKER ……………………………

Bu Tezin Matematik Anabilim Dalında Yapıldığını ve Enstitümüz Kurallarına Göre Düzenlendiğini Onaylarım.

Prof. Dr. Halil Murat ALĞIN
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DİFERANSİYEL CEBİRLER

Mukaddes BALÇİK

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Zehra VELİOĞLU
Yıl: 2019, Sayfa: 60

R değişmeli, birimli bir diferansiyel halka ve $\Delta = \{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ kümesi ise R üzerinde tanımlı derivasyon operatörlerin bir kümesi olsun. Θ, Δ kümesi tarafından üretilen serbest monoid olmak üzere, katsayıları R de olan $y_1, \dots, y_n$ belirsizlerine bağlı diferansiyel polinomlar halkası $R[\theta y_i | \theta \in \Theta, 1 \leq i \leq n]$ şeklinde tanımlı bir polinom halkası olup $R\{y_1, \dots, y_n\}$ ile gösterilir. Bu çalışmada $\Delta = \{\delta\}$ olmak üzere iki bilinmeyene bağlı $R\{y_1, y_2\}$ polinom halkasının otomorfizm grubunun önemli bazı altgrupları tanımlanmıştır. Ayrıca bu altgruplardan diferansiyel tame altgrubunun, diferansiyel elementer ve diferansiyel üçgensel altgrupların karıştırılmış serbest çarpımı olduğu gösterilmiştir. Dahası $R\{y_1, y_2\}$ nin bir diferansiyel endomorfizminin bir diferansiyel tame otomorfizmi olup olmadığına karar veren bir algoritma verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Diferansiyel cebirler, diferansiyel polinom halkaları, tame otomorfizmler

ABSTRACT

MSc Thesis

DIFFERENTIAL ALGEBRAS

Mukaddes BALÇİK

Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Zehra VELİOĞLU
Year: 2019, Page: 60

Let R be a commutative differential ring with unit, $\Delta= \{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$ be the set of derivation operators of R and Θ be the free monoid generated by the set Δ. The ring of differential polynomials with coefficients in R in differential indeterminates $y_1, \ldots, y_n$ is the ring of polynomials $R[\theta y_i | \theta \in \Theta, 1 \leq i \leq n]$ and denoted as $R\{y_1, \ldots, y_n\}$. In this work we define some important subgroups of the automorphism group of the differential ring in two intereminates $R\{y_1, y_2\}$, with $\Delta= \{\delta\}$. Moreover, we show that the subgroup of the differential tame automorphisms is the amalgamated free product of the subgroup of differential affine and the subgroup of differential triangular automorphisms. Furthermore, we describe an algorithm which decides if a polynomial endomorphism of $R\{y_1, y_2\}$ is tame.

KEY WORDS: Differential algebras, diferential polynomial rings, tame automorphisms

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimimde benden yardımını esirgemeyen danışman hocam sayın Dr. Öğr. Üyesi Zehra VELİOĞLU'na ve tez çalışmamızda bilgilerini bizden esirgemeyen Prof. William SIT'e teşekkür ederim.

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar
$\mathbb{R}$	Reel sayılar
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar
δ	Derivasyon operatörü
Δ	Derivasyon operatörlerinin kümesi
θ	Derivatif operatörü
Θ	Derivatif operatörlerinin kümesi
$\Delta - halka$	Diferansiyel halka
$\Delta - ideal$	Diferansiyel ideal
$\Delta - homomorfizm$	Diferansiyel homomorfizm
$\Delta - izomorfizm$	Diferansiyel izomorfizm
$ord\theta$	θ derivatif operatörünün mertebesi
$degP$	P diferansiyel polinomunun derecesi
deg_Λ^P	P diferansiyel polinomunun Λ daki derecesi
$ordP$	P diferansiyel polinomunun mertebesi
$charK$	K cisminin karakteristiği
$Kerf$	f nin çekirdeği
$[S]$	S yi içeren en küçük diferansiyel ideal
$\{S\}$	S yi içeren en küçük radikal diferansiyel ideal
$[S]_R$	R nin S tarafından üretilen diferansiyel ideali
$Q(R)$	R nin kesirlerinin tam diferansiyel halkası
R^*	R halkasının sıfırdan farklı elemanlarının kümesi
R^Δ	R nin bütün sabitlerinin kümesi
$R_0\{S\}$	R_0 üzerinde S tarafından üretilen diferansiyel halka
$F_0\langle S\rangle$	F_0 ve S nin bütün elemanlarını içeren en küçük diferansiyel altcisim
$R\left\{\left(y_j\right)_{j\in J}\right\}$	Katsayıları R de olan $\left(y_j\right)_{j\in J}$ belirsizlerine bağlı diferansiyel polinom cebiri
$R\{x_1, \dots, x_n\}$	$x_1, \dots, x_n$ belirsizlerine bağlı diferansiyel polinom halkası
$F\langle\left(y_j\right)_{j\in J}\rangle$	Diferansiyel tamlık bölgesinin kesirler cismi
$\lvert J\varphi_f\rvert$	Jacobi matrisinin determinantı
id_R	R üzerinde tanımlı birim dönüşüm
wtF	F nin ağırlığı
u_A	A nın baş terimi
I_A	A nın başlangıç polinomu
S_A	A nın ayrışımı
$Aut_\delta(K\|R)$	K nın bütün $R - \delta - otomorfizm$lerinin kümesi
$Aff_\delta(K\|R)$	Afin $\delta - altgrup$
$J_\delta(K\|R)$	Üçgensel $\delta - altgrup$
$E_\delta(K\|R)$	Elementer $\delta - altgrup$
$T_\delta(K\|R)$	Tame $\delta - altgrup$
$A *_C B$	A ve B kümelerinin C üzerinde karıştırılmış serbest çarpımı

1. GİRİŞ

Derivasyonlar bir cebir, (halka veya cisim) üzerinde tanımlı Leibniz koşulunu sağlayan lineer operatörlerdir. Diferansiyel cebirler (halkalar veya cisimler) ise üzerinde sonlu sayıda derivasyonlar tanımlı olan yapılardır. Örneğin kompleks sayılar üzerinde tanımlı bir t bilinmeyenine bağlı rasyonel fonksiyonların cismi bir doğal diferansiyel cisimdir. Bu cisimdeki derivasyon t bilinmeyenine göre türev operatörüdür. Diferansiyel cebirler bu cebirsel nesnelerin incelenmesinin yanı sıra matematiğin bu nesnelerin diferansiyel denklemlerdeki cebirsel kullanımını içeren alanıyla da ilgilidir.

Diferansiyel cebirler teorisi Ritt (1948) tarafından kurulmuştur. Kolchin (1973), Ritt tarafından oluşturulan bu teoriyi geliştirmiş ve bunun yanı sıra bu çalışmalarını lineer cebirsel gruplar teorisinin temellerini oluşturmak için kullanmıştır. Kaplansky'nin 1957 de yazdığı "Diferansiyel Cebire Giriş" adlı kitabı, teoriyi daha erişilebilir kılmıştır. Diferansiyel Galois Teorisi (Crespo ve Hajto, 2006) ve diferansiyel Gröbner bazları (Mansfield, 1991) diferansiyel cebirler teorisinde çalışılan diğer önemli çalışmalardır.

Cebirsel yapıların özellikleri ile ilgili önemli bilgiler verdiğinden, cebirsel yapıların otomorfizmlerini incelemek önemlidir. Bu konuda en ilgi çekici araştırmalardan biri de otomorfizmlerin tame olup olmamasıdır. Bu konuda yapılan bir çok çalışma vardır. Örneğin iki değişkenli polinom cebirlerinin otomorfizmlerinin tame olduğu ispatlandı (Jung, 1942 ve Kulk, 1953). Benzer biçimde iki değişkenli serbest Poisson cebirlerinin otomorfizmlerinin tame olduğunu ispatlandı (Limanov, Trusbekova ve Umirbaev, 2008). Bu tez çalışmasında otomorfizmler ile ilgili olan bu önemli sonuçlar diferansiyel cebirler teorisinde araştırıldı.

Bu çalışmada öncelikle diferansiyel cebirler teorisi için önemli bazı tanım ve teoremler verilmiştir. Ayrıca bir polinom halkası özelliğini taşıyan diferansiyel polinom halkaları tanıtılmış ve önemli özellikleri belirtilmiştir. Daha sonra iki bilinmeyene bağlı diferansiyel polinom halkasının otomorfizmleri incelenmiş, bu halkanın otomorfizmler grubunun önemli bazı altgrupları tanımlanmıştır. Ayrıca diferansiyel polinom halkasının verilen bir homomorfizminin tame olup olmadığını inceleyen bir algoritma tasarlanmıştır.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde, tez çalışmamız için gerekli olan bazı temel kavramlara yer verilmiştir. Bu bölümde verilen tanım ve teoriler Kolchin (1973)'un kitabı ve Ovchinnikov'un ders notları detaylı bir şekilde incelenmesi sonucu hazırlanmıştır ve bu bölümde yer alan araştırmalar ve örnekler bu çalışmaların ışığında çözülmüştür.

2.1.Diferansiyel Halkalar

Tanım 2.1.1. R değişmeli ve birimli bir halka olsun ve $\delta: R \to R$ operatörü tanımlansın. Eğer $\forall a, b \in R$ için

$$\delta(a+b) = \delta(a) + \delta(b)$$

$$\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b) \qquad \text{(Leibniz kuralı)}$$

koşulları sağlanıyor ise δ ya R nin bir derivasyon operatörüdür denir.

Tanım 2.1.2. R nin derivasyon operatörlerinin bir $\Delta = \{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ kümesini ele alalım. Eğer $\forall a \in R$ için

$$\delta_i \delta_j(a) = \delta_j \delta_i(a)$$

ise R ye Δ kümesi ile birlikte bir diferansiyel halka denir. Bu durumda R kısaca Δ-halka olarak adlandırılır.

Eğer $\Delta = \{\delta\}$ (Δ, bir tek derivasyondan oluşuyor) ise o zaman R ye bir adi diferansiyel halka denir. Eğer $\Delta = \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\}$ (Δ, birden fazla derivasyondan oluşuyor) ise R ye bir kısmi diferansiyel halka denir.

Eğer R bir tamlık bölgesi veya bir cisim ise R ye bir diferansiyel tamlık bölgesi veya diferansiyel cisim denir.

Örnek 2.1.1. R değişmeli ve birimli bir halka ve $\Delta = \{\delta\}$ olsun. $\forall r \in R$ için $\delta(r) = 0$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda R diferansiyel halka olmanın tüm özelliklerini trivial olarak sağladığından R bir diferansiyel halkadır.

Örnek 2.1.2. $i = 1,2, \dots, m$ için $\frac{\partial}{\partial x_i}$ bilinen kısmi türev operatörü olsun. m tane reel $x_1, x_2, \dots, x_m$ değişkeninin uzayındaki bir bölgenin her noktasında sonsuz türevlenebilir ve reel değerli olan tüm fonksiyonların halkasını ele alalım. Bu halka $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}\right\}$ kümesi ile birlikte bir diferansiyel halkadır.

Örnek 2.1.3. $R = \mathbb{Z}$ olsun. Bu durumda $\mathbb{Z}$ nin olası derivasyonlarının neler olduğunu inceleyelim.
$\delta(n)$ $\delta(1)$ veya $\delta(-1)$ ler tarafından belirlenir. Gerçekten $n \geq 1$ için

$$\delta(n) = \delta\underbrace{(1 + 1 + \cdots + 1)}_{n\ tane} = \underbrace{\delta(1) + \ \dots + \delta(1)}_{n\ tane} = n\delta(1)$$

olur. (Benzer şekilde $n \geq 1$ için $\delta(-n) = \delta\underbrace{\left((-1) + \ \dots + (-1)\right)}_{n\ tane} = n\delta(-1)$).

$n = 0$ olsun. O halde

$$\delta(0) = \delta(0 + 0) = \delta(0) + \delta(0)$$

olup $\delta(0) = 0$ olduğu görülür.
$n = -1$ için

$$\delta(-1) = \delta\big(1.(-1)\big) = \delta(1).(-1) + 1.\delta(-1)$$

elde edilir. Her iki taraftan $\delta(-1)$ i çıkarırsak

$$0 = (-1)\delta(1)$$

olur. O halde

$$0 = \delta(1) = \delta\big((-1)(-1)\big) = \delta(-1)(-1) + (-1)\delta(-1) = -2\delta(-1)$$

olup $\delta(-1) = 0$ elde edilir. Böylece $\mathbb{Z}$ üzerinde tanımlı tek derivasyon $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $\delta(n) = 0$ (aşikar) derivasyon olduğu görülür.

Örnek 2.1.4. $R = \mathbb{Q}$ olsun. Şimdi $\mathbb{Q}$ nun derivasyonlarını inceleyelim. $0 \neq b \in \mathbb{Z}$ için $\frac{1}{b}$ elemanını ele alalım. O halde

$$0 = \delta(1) = \delta(b.1/b) = \delta(b).1/b + b.\delta(1/b)$$

$$\delta\left(\frac{1}{b}\right) = -\frac{\delta(b)}{b^2}$$

olur. Böylece herhangi bir $0 \neq b \in \mathbb{Z}$ için $\delta\left(\frac{a}{b}\right)$ hesaplanabilir.

$$\delta(a/b) = \delta(a.1/b)$$

dir ve Leibniz kuralından

$$\delta(a.1/b) = \delta(a).1/b + a.\delta(1/b)$$
$$= \frac{\delta(a)}{b} - \frac{a\delta(b)}{b^2}$$
$$= \frac{\delta(a)b - a\delta(b)}{b^2}$$

olur. $a, b \in \mathbb{Z}$ olduğundan

$$\delta(a/b) = \frac{\delta(a)b - a\delta(b)}{b^2}$$
$$= \frac{0.b - a.0}{b^2}$$
$$= 0$$

sonucu elde edilir ve bu derivasyon $\mathbb{Q}$ nun trivial derivasyonudur.

Örnek 2.1.5. $R = \mathbb{Q}[x]$ ve $\delta(x) = 1$ olsun. O halde $a_n x^n + \ldots + a_0 \in R$ olmak üzere

$$\delta(a_n x^n + \ldots + a_0) = \delta(a_n x^n) + \ \ldots + \delta(a_0)$$
$$= a_n \delta(x^n) + a_{n-1}\delta(x^{n-1}) + \cdots + a_1$$
$$= a_n n x^{n-1} + \ldots + a_1$$

dir.

Alıştırma 2.1.1. R, $\Delta = \{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$ derivasyon kümesi ile bir Δ-halka olsun. O halde aşağıdaki koşulların doğruluğunu gösteriniz.

i. $\forall x \in R$ ve $m \in \mathbb{Z}^+$ için $\delta_i(x^m) = m x^{m-1}\delta_i(x)$ dir. (1)

ii. $\forall m \in \mathbb{Z}^+$ ve $a, b \in R$ için $\delta_i^m(ab) = \underbrace{\delta_i(\delta_i(\ldots(\delta_i}_{m-tane}(ab))))$ olmak üzere;

$$\delta_i^m(ab) = \sum_{p=0}^{m} \binom{m}{p} \delta_i^p(a)\delta_i^{m-p}(b) \qquad (2)$$

dir.

Çözüm.

i koşulundaki eşitliğin doğruluğu m üzerinden tümevarımla ispatlanır.

$m = 1$ için

$$\delta_i(x^1) = 1x^{1-1}\delta_i(x)$$

olup eşitlik sağlanır. $m = k$ için (1) eşitliği doğru olsun. Yani

$$\delta_i(x^k) = kx^{k-1}\delta_i(x)$$

olsun. O halde $m = k + 1$ için (1) eşitliğinin doğruluğunu gösterelim:

$$\begin{aligned}\delta_i(x^{k+1}) &= \delta_i(x^k x)\\ &= \delta_i(x^k)x + x^k\delta_i(x)\\ &= kx^{k-1}\delta_i(x)x + x^k\delta_i(x)\\ &= kx^k\delta_i(x) + x^k\delta_i(x)\\ &= (k+1)x^k\delta_i(x)\end{aligned}$$

olup verilen eşitlik $\forall x \in R$ ve $m \in \mathbb{Z}^+$ için doğrudur. Benzer şekilde ii deki eşitliğin doğruluğu da m üzerinden tümevarımla ispatlanabilir.

$m = 1$ için

$$\begin{aligned}\delta_i^1(ab) &= \delta_i(a)b + a\delta_i(b)\\ &= \binom{1}{0}\delta_i^0(a)\delta_i^{1-0}(b) + \binom{1}{1}\delta_i^1(a)\delta_i^{1-1}(b)\end{aligned}$$

olup eşitlik sağlanır.

$m = k$ için (2) eşitliği doğru olsun. Yani

$$\delta_i^k(ab) = \sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}\delta_i^p(a)\delta_i^{k-p}(b)$$

olsun.

$m = k + 1$ için eşitliğin doğru olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned}\delta_i^{k+1}(ab) &= \underbrace{\delta_i(\delta_i(\ldots(\delta_i}_{k+1\ tane}(ab))))\\ &= \delta_i\left(\delta_i^k(ab)\right)\\ &= \delta_i\left(\textstyle\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}\delta_i^p(a)\delta_i^{k-p}(b)\right)\\ &= \delta_i\left(\tbinom{k}{0}\delta_i^0(a)\delta_i^{k-0}(b) + \tbinom{k}{1}\delta_i^1(a)\delta_i^{k-1}(b) + \ldots + \tbinom{k}{k}\delta_i^k(a)\delta_i^{k-k}(b)\right)\\ &= \binom{k}{0}\delta_i^0(a)\delta_i^{k+1}(b) + \binom{k}{0}\delta_i^1(a)\delta_i^k(b) + \binom{k}{1}\delta_i^1(a)\delta_i^k(b)\\ &\quad + \binom{k}{1}\delta_i^2(a)\delta_i^{k-1}(b) + \cdots + \binom{k}{k}\delta_i^k(a)\delta_i^{k-k+1}(b)\\ &\quad + \binom{k}{k}\delta_i^{k+1}(a)\delta_i^{k-k}(b)\end{aligned}$$

$$= 1\delta_i^0(a)\delta_i^{(k+1)-0}(b) + 1\delta_i^1(a)\delta_i^{(k+1)-1}(b) + k\delta_i^1(a)\delta_i^{(k+1)-1}(b)$$
$$+ k\delta_i^2(a)\delta_i^{(k+1)-2}(b) + \cdots + 1\delta_i^k(a)\delta_i^{(k+1)-k}(b)$$
$$+ 1\delta_i^{k+1}(a)\delta_i^{(k+1)-(k+1)}(b)$$
$$= 1\delta_i^0(a)\delta_i^{(k+1)-0}(b) + (k+1)\delta_i^1(a)\delta_i^{(k+1)-1}(b) + \cdots$$
$$+ 1\delta_i^{k+1}(a)\delta_i^{(k+1)-(k+1)}(b)$$
$$= \binom{k+1}{0}\delta_i^0(a)\delta_i^{(k+1)-0}(b) + \binom{k+1}{1}\delta_i^1(a)\delta_i^{(k+1)-1}(b) + \cdots$$
$$+ \binom{k+1}{k+1}\delta_i^{(k+1)}(a)\delta_i^{(k+1)-(k+1)}(b)$$
$$= \sum_{p=0}^{k+1}\binom{k+1}{p}\delta_i^p(a)\delta_i^{(k+1)-p}(b)$$

olup verilen eşitlik $\forall x \in R$ ve $m \in \mathbb{Z}^+$ için doğrudur.

Not 2.1.1. Örnek 2.1.5 deki $\delta(x) = 1$ in yerine herhangi bir $f \in R$ için $\delta(x) = f$ olursa o zaman elde edilen sonuç analizdeki zincir kuralı olacaktır. Yani

$$\delta(a_n x^n + \ldots + a_0) = a_n n x^{n-1} f + \cdots + a_1 f$$

olur.

S bir adi diferansiyel halka ve $R = S[x]$ olsun. O zaman herhangi bir $f \in R$ için $\delta(x) = f$ olursa R bir diferansiyel halka olur. Derivasyonun keyfi şekilde seçimi sadece adi diferansiyel halkalar için geçerlidir. Bu durum birden fazla derivasyonlar için genişletilmek istenirse problem oluşabilir. Bunun için aşağıdaki örneği inceleyelim.

Örnek 2.1.6. $R = \mathbb{Q}[x]$ ve $\Delta = \{\delta_1, \delta_2\}$ olsun. O halde $\delta_1(x) = 1$, $\delta_2(x) = x$ seçelim. Bu durumda derivasyonlar değişmeli olmaz. Yani $\delta_1(\delta_2(x)) = 1$ iken $\delta_2(\delta_1(x)) = 0$ olur. Bu durumda R bir diferansiyel halka değildir.

Tanım 2.1.3. R derivasyon operatörlerinin Δ kümesi ile birlikte bir diferansiyel halka olsun. Δ nın elemanları tarafından üretilen serbest değişmeli yarı grup (çarpımsal tanımlı) Θ ile gösterilsin. Bu durumda $e(\delta)$ bir doğal sayı olmak üzere Θ

nın herhangi bir elemanı $\prod_{\delta\in\Delta}\delta^{e(\delta)}$ şeklinde yazılabilir ve bu şekildeki her çarpım da Θ nın elemanıdır.

Θ, R üzerindeki operatörlerin bir kümesi yapılabilir. Şöyle ki: Δ nın elemanlarının R üzerinde birer derivasyon operatörü olduğunu biliyoruz. Bu durumda $\forall a\in R,\ \theta,\theta'\in\Theta$ olmak üzere $1a=a$ ve $(\theta\theta')a=\theta(\theta'(a))$ koşulları ile birlikte Θ nın elemanları R üzerinde birer operatör olurlar. Bu durumda Θ nın elemanları R diferansiyel halkasının derivatif operatörleri olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.4. $\theta=\prod_{\delta\in\Delta}\delta^{e(\delta)}$, R nin bir derivatif operatörü olsun. $s=\sum_{\delta\in\Delta}e(\delta)$ ya θ nın mertebesi denir ve $ord\theta$ ile gösterilir. Herhangi bir $a\in R$ için a nın derivatifi olan $\theta(a)$ nın mertebesi s dir. Özellikle a kendisinin derivatifidir ve mertebesi 0 dır. Mertebesi 0 dan büyük olan a nın bir derivatifine a nın öz derivatifi denir.

Not 2.1.2. $\Delta=\{\delta\}$ ile birlikte R bir adi diferansiyel halka olsun. Bu durumda R nin derivatif elemanları $\delta a,\delta^2 a,\delta^3 a,\delta^4 a,\dots,\delta^s a,\dots$ olup bu elemanlar sırasıyla $a',a'',a''',a^{(4)},\dots,a^{(s)},\dots$ şeklinde gösterilebilir.

Tanım 2.1.5. R bir Δ-halka, R_0, R nin bir alt halkası ve $\Delta R_0\subset R_0$ olsun (yani R_0, Δ nın elemanları altında değişmez olsun). Bu durumda Δ nın elemanlarını R_0 a kısıtlayabiliriz. Böylece bu elemanlar R_0 ın da derivasyon operatörleri olurlar. O halde R_0 da bir diferansiyel Δ-halkası olup R_0 halkasına R nin bir diferansiyel alt halkası ve R ye de R_0 ın bir diferansiyel üst halkası denir. Bazen bu durum diferansiyel halka genişlemesi olarak da tanımlanır.

Tanım 2.1.6. R nin diferansiyel alt halkalarının herhangi bir kesişimi de R nin bir diferansiyel alt halkasıdır. Bundan dolayı S, R nin elemanlarının herhangi bir kümesi (veya ailesi) ise R nin R_0 alt halkasını ve S nin bütün elemanlarını içeren bir en küçük diferansiyel alt halkası vardır. Buna R_0 üzerinde S tarafından üretilen diferansiyel halka denir ve $R_0\{S\}$ ile gösterilir. S ye R_0 üzerinde $R_0\{S\}$ diferansiyel halkasının üreteçlerinin kümesi (veya ailesi) denir.

S, R nin bir alt kümesi ise (veya eğer S, R nin elemanlarının $(a_i)_{i\in I}$ ailesi ve ΘS, $(\theta a_i)_{\theta\in\Theta, i\in I}$ ailesi ise) o halde $R_0\{S\}$, R_0 üzerinde ΘS tarafından üretilen $R_0[\Theta S]$ halkası ile aynıdır.

Eğer R_0 üzerinde üreteçlerin bir sonlu kümesi varsa R_0 diferansiyel halkasının bir diferansiyel üst halkası R_0 üzerinde sonlu olarak üretilir denir.

Tanım 2.1.7. F_0 ve F diferansiyel cisimler olsun. F_0, F nin bir diferansiyel alt halkası ise o zaman F_0 cismine F nin bir diferansiyel alt cismi ve F ye bir diferansiyel üst cisim veya diferansiyel cisim genişlemesi (veya sadece F_0 ın bir genişlemesi) denir.

F nin diferansiyel alt cisimlerinin kesişim kümesi F nin bir diferansiyel alt cismidir.

Tanım 2.1.8. S, F cisminin elemanlarından oluşan herhangi bir küme (veya aile) ise F_0 ın ve S nin bütün elemanlarını içeren F nin bir en küçük diferansiyel alt cismi vardır ve bu alt cisim $F_0\langle S\rangle$ şeklinde gösterilir. Buna S nin ve F_0 ın elemanlarından oluşan diferansiyel cisim veya S tarafından üretilen F_0 ın genişlemesi denir ve S ye F_0 ın $F_0\langle S\rangle$ genişlemesinin üreteçlerinin bir kümesi (veya ailesi) denir. O halde $F_0\langle S\rangle$, F_0 ın ΘF tarafından üretilen $F_0(\Theta S)$ üst cismi ile aynıdır.

Tanım 2.1.9. Δ derivasyon operatörlerinden oluşan bir küme ve R bir Δ-halka olsun. Eğer $\delta \forall \in \Delta$ için $\delta(c) = 0$ ise $c \in R$ elemanına R nin bir sabiti denir. R nin bütün sabitlerinin kümesi R^{Δ} ile gösterilir.

Alıştırma 2.1.2. R nin bütün sabitlerinin kümesi R nin bir diferansiyel alt halkası olduğunu ve eğer R bir cisim ise R nin bütün sabitlerinin kümesi R nin bir alt cismi olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $R^{\Delta} = \{r \in R | \delta_i(r) = 0, \delta_i \in \Delta\}$ olsun. Öncelikle R^{Δ} nın R nin bir alt halkası olduğunu gösterelim. $r_1, r_2 \in R^{\Delta}$ olsun. Bu durumda $r_1 + r_2 \in R^{\Delta}$ olduğu gösterilmelidir. Derivasyonların tanımından

$$\delta_i(r_1 + r_2) = \delta_i(r_1) + \delta_i(r_2) = 0 + 0 = 0$$

olduğundan $r_1 + r_2 \in R^{\Delta}$ dır. Şimdi $-r_1 \in R^{\Delta}$ olduğunu gösterelim. Leibniz koşulundan

$$\delta_i(-r_1) = \delta_i\big((-1)r_1\big) = \delta_i(-1)r_1 + (-1)\delta_i(r_1) = 0 + 0 = 0$$

olup $-r_1 \in R^{\Delta}$ olur. Şimdi ise $r_1 r_2 \in R^{\Delta}$ olduğunu gösterelim. Leibniz koşulundan

$$\delta_i(r_1 r_2) = \delta_i(r_1) r_2 + r_1 \delta_i(r_2) = 0 + 0 = 0$$

olur ve böylece $r_1 r_2 \in R^{\Delta}$ olur.

O halde R^{Δ}, R nin bir alt halkasıdır. Şimdi R^{Δ} nın R nin bir alt cismi olduğunu gösterelim.

$r_1, r_2 \in R^{\Delta}$ için yukarıda $r_1 + r_2, -r_1, r_1 r_2 \in R^{\Delta}$ olduğunu gösterdik. Böylece $r_2 \neq 0$ olmak üzere ${r_2}^{-1} \in R^{\Delta}$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\delta_i({r_2}^{-1}) = \delta_i\left(\frac{1}{r_2}\right) = -\frac{\delta_i(r_2)}{(r_2)^2} = 0$$

olup ${r_2}^{-1} \in R^{\Delta}$ dır.

Örnek 2.1.7.

(1) Eğer $R = \mathbb{Z}$ ise $R^{\Delta} = \mathbb{Z}$ dir.

(2) Eğer $R = \mathbb{Q}$ ise $R^{\Delta} = \mathbb{Q}$ dır.

(3) Eğer $R = \mathbb{Q}[x]$ ve $\delta(x) = 1$ ise $R^{\Delta} = \mathbb{Q}$ dır.

Not 2.1.3. Eğer K karakteristiği 0 olan bir cisim ve $K^{\Delta} = K$ ise o zaman bütün $K \subset L$ cebirsel cisim genişlemeleri için (yani $\forall a \in L$ elemanları K üzerinde cebirsel elemanlardır) $L^{\Delta} = L$ dir.

2.2.Diferansiyel İdealler

Δ derivasyon operatörlerinin bir kümesi olmak üzere bu bölüm boyunca R halkası birimli ve değişmeli bir Δ-halka olarak düşünülecektir.

Tanım 2.2.1. I, R nin bir ideali olsun. $\forall\delta \in \Delta$ ve $\forall a \in I$ için $\delta(a) \in I$ ise $I \subseteq R$ idealine bir diferansiyel ideal denir ve kısaca Δ-ideal olarak ifade edilir.

Örnek 2.2.1. Δ, derivasyon operatörlerinin bir kümesi ve R bir Δ-halka olsun.

(1) $I = R$ ve

(2) $I = \{0\}$

R nin iki diferansiyel idealidir.

Önerme 2.2.1. $I = (f_1, f_2, \dots, f_m) \subset R$, R deki $f_1, f_2, \dots, f_m$ elemanları tarafından üretilen bir ideal olsun. I nın bir diferansiyel ideal olması için gerek ve yeter koşul her $1 \leq j \leq m$ ve $1 \leq i \leq n$ için $\delta_i(f_j) \in I$ olmasıdır.

İspat. I nın bir diferansiyel ideal olduğunu kabul edelim. Diferansiyel ideal tanımından her i, j için $\delta_i(f_j) \in I$ olur. Tersine her i, j için $\delta_i(f_j) \in I$ olsun. $g \in I$ yı göz önüne alalım. Bu durumda

$$g = a_1 f_1 + \cdots + a_m f_m$$

olur. O halde $\delta_i(g) \in I$ olduğunu göstereceğiz. Eğer g nin diferansiyeli alınırsa

$$\begin{aligned}\delta_i(g) &= \delta_i(a_1 f_1 + \cdots + a_m f_m)\\ &= \delta_i(a_1) f_1 + a_1 \delta_i(f_1) + \cdots + \delta_i(a_m) f_m + a_m \delta_i(f_m)\end{aligned}$$

elde edilir. $\forall f_i \in I$ ve $\forall \delta_i(f_j) \in I$ olduğundan eşitliğin sağ tarafındaki herbir terim I nın elemanıdır ve buradan $\delta_i(g) \in I$ olur.

Not 2.2.1. R nin diferansiyel ideallerinin herhangi bir ailesinin kesişimi, toplam ve sonlu çarpım aileleri de birer diferansiyel idealdir. I_i ler R nin diferansiyel idealleri olsun. Yani bütün i değerleri ve $\forall a \in I_i$ için $\delta(a) \in I_i$ dir. Bu durumda

$$\forall a \in \bigcap I_i \text{ için } \delta(a) \in \bigcap I_i,$$

$$\forall a \in \sum I_i \text{ için } \delta(a) \in \sum I_i$$

ve

$$\forall a \in \prod_{1\leq i\leq n} I_i \text{ için } \delta(a) \in \prod_{1\leq i\leq n} I_i$$

olduğu açıktır.

Tanım 2.2.2. S, R nin elemanlarının herhangi bir kümesi (veya ailesi) olsun. S nin elemanlarını içeren bütün ideallerin kesişimi, S nin elemanlarını içeren en küçük diferansiyel idealdir. Bu ideale R nin S tarafından üretilen diferansiyel ideali denir. $[S]_R$ veya kısaca $[S]$ ile gösterilir.

Not 2.2.2. R nin ΘS tarafından üretilen (ΘS) ideali ile $[S]$ aynıdır. Daha açık olarak ΘS nin elemanları $\theta \in \Theta$ ve $s \in S$ olmak üzere $\theta(s)$ formundaki elemanlardır. Aynı zamanda $[S]$ ise S tarafından üretilen diferansiyel ideal yani $i_{1,}, i_2, \dots, i_n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\forall \delta_i \in \Delta$ ve $s \in S$ için $\delta_1^{i_1}\delta_2^{i_2} \dots \delta_n^{i_n}(s)$ elemanlarıdır. $\theta = \delta_1^{i_1}\delta_2^{i_2} \dots \delta_n^{i_n}$ olarak ele alınırsa $(\Theta S) = [S]$ olduğu açıktır.

Lemma 2.2.1. a ve b herhangi bir diferansiyel halkanın elemanları olsunlar. θ mertebesi $h \in \mathbb{N}$ olan bir derivatif operatörü olsun. O halde $a^{h+1}\theta(b) \in [ab]$ dir. Daha açık olarak θ_1, θ yı bölmek üzere $a^{h+1}\theta(b)$ elemanı $\theta_1(ab)$ derivatif elemanları tarafından üretilen idealin içindedir.

İspat. İspatı h üzerinden tümevarım yöntemi ile yapalım. $h = 1$ için $\theta = \delta$ alınabilir.

O halde $a^{h+1}\theta(b) = a^2\delta(b)$

olur. Ayrıca

$$\delta(ab) \in [ab]$$

dir. Buradan

$$\delta(a)b + a\delta(b) \in [ab]$$

elde edilir. Yukardaki özdeşlik a ile çarpılırsa

$$ab\delta(a) + a^2\delta(b) \in [ab]$$

olur. Böylece $a^2\delta(b) \in [ab]$ dir.

Hipotez $h - 1$ için doğru olsun. Yani θ' nün mertebesi $h - 1$ olmak üzere $a^h\theta'(b) \in [ab]$ olsun. Şimdi de hipotezin h için doğru olup olmadığına bakalım. Yani $\theta = \delta\theta'$ olmak üzere $a^{h+1}\theta(b)$, $[ab]$ nin elemanı mıdır?

$$\begin{aligned} \delta\left(a^h\theta'(b)\right) &= \delta(a^h)\theta'(b) + a^h\delta\theta'(b) \\ &= \delta(a^h)\theta'(b) + a^h\theta(b) \end{aligned}$$

olur. Bu son eşitlik a ile çarpılırsa

$$a\delta\Big(a^h\theta'(b)\Big) = a\delta(a^h)\theta'(b) + a^{h+1}\theta(b)$$

olur. Buradan

$$a^{h+1}\theta(b) \in \Big(a^h\theta'(b), \delta\Big(a^h\theta'(b)\Big)\Big) \subset [ab]$$

dir. Sonuç olarak

$$a^{h+1}\theta(b) \in [ab]$$

elde edilir. O halde $h = 0$ durumu için de $ab \in [ab]$ dir.

Lemma 2.2.2. a herhangi bir Δ-halkasının bir elemanı olsun. $h \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\delta_1, \dots, \delta_{2h-1}$ birbirinden farklı derivasyon operatörleri olsunlar. O halde

$$h! \prod_{1\leq\lambda\leq 2h-1} \big(\delta_\lambda(a)\big) \in [a^h]$$

dir.

İspat. $h > 0$ olsun. Lemmanın ispatı $i = h$ durumu için yani

$$h(h-1)\dots(h-i+1)a^{h-i} \prod_{1\leq\lambda\leq 2i-1} \big(\delta_\lambda(a)\big) \in [a^h] \qquad (1 \leq i \leq h)$$

için tümevarım metodu kullanılarak yapılacaktır.

$i = 1$ için

$$ha^{h-1}\delta_1(a) = \delta_1(a^h)\epsilon[a^h]$$

olduğundan hipotez doğrulanır.

Şimdi hipotez $i = r$ ($r < h$ için) için doğru olsun. Yani

$$h(h-1)\dots(h-r+1)a^{h-r} \prod_{1\leq\lambda\leq 2r-1} \big(\delta_\lambda(a)\big) \in [a^h]$$

olsun. Daha açık bir şekilde yazılırsa

$$h(h-1)\dots(h-r+1)a^{h-r}\delta_1(a)\delta_2(a)\dots\delta_{2r-1}(a) \in [a^h]$$

olur. Yukardaki özdeşliğin sol tarafı δ_{2r} ye göre derivasyonu alınırsa

$$\delta_{2r}\Big(h(h-1)\dots(h-r+1)a^{h-r}\delta_1(a)\delta_2(a)\dots\delta_{2r-1}(a)\Big) \in [a^h]$$

$$h\dots(h-r+1)\big[\delta_{2r}(a^{h-r})\delta_1(a)\dots\delta_{2r-1}(a) + a^{h-r}\delta_{2r}\big(\delta_1(a)\dots\delta_{2r-1}(a)\big)\big] \in [a^h]$$

$$\begin{aligned} &h(h-1)\dots(h-r+1)(h-r)a^{h-r-1}\delta_{2r}(a)\delta_1(a)\dots\delta_{2r-1}(a) \\ &\qquad + h(h-1)\dots(h-r+1)a^{h-r}\delta_{2r}\big(\delta_1(a)\dots\delta_{2r-1}(a)\big) \in [a^h] \end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$h(h-1)\dots(h-r+1)(h-r)a^{h-r-1}\delta_1(a)\dots\delta_{2r-1}(a)\delta_{2r}(a)\in[a^h]$$

dır. Soldan $\delta_{2r+1}(a)$ ile çarpılırsa

$$h(h-1)\dots(h-r+1)(h-(r+1)+1)a^{h-(r+1)}\delta_1(a)\dots\delta_{2r}(a)\delta_{2r+1}(a)\in[a^h]$$

olur. Yani

$$h(h-1)\dots(h-(r+1)+1)a^{h-(r+1)}\prod_{1\le\lambda\le 2r+1}(\delta_\lambda(a))\in[a^h]$$

elde edilir. Bu durumda özdeşliğin doğruluğu $i=r+1$ durumu için de ispatlanmış olur.

Tanım 2.2.3. R bir Δ −halka ve I, R nin bir ideali olsun. R/I diferansiyel halkasını ele alalım. $\forall\delta\in\Delta$ ve $\forall r+I\in R/I$ için

$$\delta(r+I)=\delta(r)+I \tag{3}$$

tanımlansın. Şimdi (3) işleminin iyi tanımlı olduğunu gösterelim. $\forall r+I, s+I\in R/I$ için $r+I=s+I$ olsun ($r-s\in I$ dır). $\forall\delta\in\Delta$ için

$$\delta(r+I)=\delta(s+I)$$

dır. Yani

$$\delta(r)+I=\delta(s)+I$$

olur. Bu durumda $r-s\in I$ ve I bir diferansiyel ideal olduğundan

$$\delta(r)-\delta(s)=\delta(r-s)\in I$$

olur. Şimdi R/I nın (3) işlemi ile birlikte bir diferansiyel halka olduğunu gösterelim.$\forall r+I, s+I\in R/I$ ve $\forall\delta\in\Delta$ için

(i) $$\begin{aligned}\delta((r+I)+(s+I)) &= \delta(r+s+I)\\ &= \delta(r+s)+I\\ &= \delta(r)+\delta(s)+I\\ &= \delta(r)+I+\delta(s)+I\\ &= \delta(r+I)+\delta(s+I)\end{aligned}$$

(ii) $$\begin{aligned}\delta\big((r+I)(s+I)\big) &= \delta(rs+I)\\ &= \delta(rs)+I\\ &= \delta(r)s+r\delta(s)+I\\ &= (\delta(r)+I)(s+I)+(r+I)(\delta(s)+I)\\ &= \delta(r+I)(s+I)+(r+I)\delta(s+I)\end{aligned}$$

(iii) $\forall \delta_i, \delta_j \in \Delta$ ve $\forall r + I \in R/I$ için

$$\begin{aligned}\delta_i\left(\delta_j(r+I)\right) &= \delta_i(\delta_j(r)+I)\\ &= \delta_i\left(\delta_j(r)\right)+I\\ &= \delta_j\left(\delta_i(r)\right)+I\\ &= \delta_j(\delta_i(r+I))\end{aligned}$$

olur. Böylece R/I bir Δ-halka olup R/I ya R nin I diferansiyel idealine göre kalan sınıflarının halkası denir.

2.2.1. Radikal diferansiyel idealler

Tanım 2.2.1.1. R bir halka olsun. $\forall f \in R$ için $f^n \in I$ olduğunda $f \in I$ olacak şekilde $n \geq 1$ varsa $I \subset R$ idealine bir radikal ideal denir.

Bir $I \subset R$ ideali verilsin. I yı kapsayan en küçük radikal ideal $\sqrt{I}$ ile gösterilir.

Örnek 2.2.1.1. $R = \mathbb{Q}[x]$ olsun. $I = (x^2)$ idealini ele alalım. $x^2 \in I$ iken $x \notin I$ olduğundan I bir radikal ideal değildir.

Not 2.2.1.1. Eğer $I \neq R$ ise $\sqrt{I} \neq R$ dir. Gerçekten eğer $1 \in \sqrt{I}$ ise o zaman bazı $n \geq 1$ için $1^n \in I$ olup $1 \in I$ dır.

Tanım 2.2.1.2. R bir Δ-halka ve I, R nin bir ideali olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa I ya bir radikal diferansiyel ideal denir.

(1) I bir diferansiyel idealdir.

(2) I bir radikal idealdir.

$S \subset R$ için S yi içeren en küçük radikal diferansiyel ideal $\{S\}$ ile gösterilir. Bu durumda S kümesi $\{S\}$ radikal diferansiyel idealini üretir. Aslında bir radikal diferansiyel ideal elde etmek için $\sqrt{[S]}$ yeterliymiş gibi görülebilir. Ama bu her zaman doğru değildir.

Örnek 2.2.1.2. Δ, derivasyon operatörlerinin bir kümesi, $R = \mathbb{Z}_2[x, y]$ bir $\Delta -$halka,

$$\delta(x) = y \text{ ve } \delta(y) = 0$$

olsun. $I = [x^2]$ yi göz önüne alalım.

$$\delta(x^2) = 2x\delta(x) = 2xy = 0$$

dır. Bu da $I = (x^2)$ demektir. $\sqrt{I} = (x)$ olduğu kolaylıkla görülür. Ancak

$$\delta(x) = y \notin (x)$$

olduğundan $\sqrt{[x^2]} = \sqrt{(x^2)}$ bir diferansiyel ideal değildir.

Lemma 2.2.1.1. R bir $\Delta -$halka, $I \subset R$ bir diferansiyel ideal ve $\mathbb{Q} \subset R$ olsun. $a^n \in I$ olacak şekilde $a \in R$ olsun. O zaman $\big(\delta(a)\big)^{2n-1} \in I$ dır.

İspat. Amacımız $1 \leq k \leq n$ için

$$a^{n-k}\delta(a)^{2k-1} \in I \tag{4}$$

olduğunu göstermektir. Bunu tümevarım ile göstereceğiz. Böylece Lemma $k = n$ olma durumu göz önüne alındığında ispatlanmış olacaktır.

$$\delta(a^n) = na^{n-1}\delta(a) \in I$$

olduğundan (4), $k = 1$ için doğrudur. (4) ın k için doğru olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$a^{n-(k+1)}\delta(a)^{2k+1} \in I \tag{5}$$

olduğunu göstereceğiz. (4) ın derivasyonunu alalım.

$$\begin{aligned}
\delta(a^{n-k}\delta(a)^{2k-1}) &= \delta(a^{n-k})\delta(a)^{2k-1} + a^{n-k}\delta(\delta(a)^{2k-1}) \\
&= (n-k)a^{n-k-1}\delta(a)\delta(a)^{2k-1} + a^{n-k}(2k-1)\delta(a)^{2k-2}\delta\big(\delta(a)\big) \\
&= (n-k)a^{n-k-1}\delta(a)^{2k} + a^{n-k}(2k-1)\delta(a)^{2k-2}\delta\big(\delta(a)\big) \in I
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda

$$(n-k)a^{n-k-1}\delta(a)^{2k} \in I \text{ ve } (n-k)a^{n-(k+1)}\delta(a)^{2k+1} \in I$$

olduğundan

$$a^{n-(k+1)}\delta(a)^{2(k+1)-1} \in I$$

elde edilir.

2.2.2. Asal diferansiyel idealler

Tanım 2.2.2.1. $P \subset R$ bir ideal olsun. $\forall a, b \in R$ için $ab \in P$ iken $a \in P$ ya da $b \in P$ oluyor ise P ye asal ideal denir.

Örnek 2.2.2.1. $R = \mathbb{Q}[x, y]$ ve $I = (xy)$ bir ideal olsun. I bir asal ideal değildir. Çünkü $xy \in I$ iken ne $x \in I$ ne de $y \in I$ dır. Ancak $P_1 = (x)$ ve $P_2 = (y)$ idealleri asaldır.

Tanım 2.2.2.2. P bir R Δ-halkasının bir diferansiyel ideali olsun. Eğer P hem diferansiyel ideal hem de asal ideal ise P ye asal diferansiyel ideal denir.

Not 2.2.2.1. Eğer P bir asal diferansiyel ideal ise tanımdan dolayı P aynı zamanda bir radikal diferansiyel ideal olur.

Not 2.2.2.2. Eğer $I_1, \ldots, I_n$ diferansiyel idealler ise o zaman $\bigcap_{i=1}^{n} I_i$ de bir diferansiyel idealdir.

Lemma 2.2.2.1. R bir Δ-halka ve $I \subset R$ nin bir radikal diferansiyel ideali olsun. Eğer $ab \in I$ ise o zaman $\delta(a)b \in I$ ve $a\delta(b) \in I$ dır.

İspat. $ab \in I$ olması $\delta(ab) \in I$ olması anlamına gelir. Diğer yandan

$$\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b) \in I$$

dır. $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b) \in I$ ifadesini a ile çarpalım. Bu durumda

$$\delta(a)ab + a^2\delta(b) \in I$$

elde edilir ki bu da $a^2\delta(b) \in I$ anlamına gelir. $a^2\delta(b)$ yi $\delta(b)$ ile çarpalım. O halde

$$\left(a\delta(b)\right)^2 \in I$$

elde edilir. I radikal olduğundan $a\delta(b) \in I$ olur. Bu da istenen sonuçtur.

2.3. Diferansiyel Homomorfizmler

Tanım 2.3.1. Δ derivasyon operatörlerin bir kümesi, R ve R' birer Δ-halka olsunlar. $f: R \to R'$ bir halka homomorfizmini (izomorfizmini) ele alalım. Eğer $\forall a \in R$ ve $\forall \delta \in \Delta$ için

$$f\big(\delta(a)\big) = \delta\big(f(a)\big)$$

koşulu sağlanıyor ise f ye bir diferansiyel homomorfizm (diferansiyel izomorfizm) denir. Bu kısaca Δ-homomorfizm (Δ -izomorfizm) olarak ifade edilir.

Örnek 2.3.1. R bir Δ-halka olsun. id_R ile R üzerinde tanımlı birim dönüşümü ile gösterelim. Bu durumda

$$id_R\big(\delta(a)\big) = \delta(a) = \delta(id_R(a))$$

olup bu dönüşüm bir diferansiyel halka homomorfizmidir.

Tanım 2.3.2. R ve R' bir R_0 $\Delta-$halkasının üst halkaları olsunlar. $f: R \to R'$ bir halka homomorfizmi olsun. Eğer $\forall a \in R_0$ için $f(a) = a$ ise f ye R_0 üzerinde bir homomorfizm veya R_0-homomorfizm denir.

Önerme 2.3.1. R ve S birer $\Delta-$halka, $\varphi: R \to S$ bir örten diferansiyel halka homomorfizmi ve $I \subset R$ bir diferansiyel ideal olsun. O halde $\varphi(I)$ bir diferansiyel idealdir.

İspat. Öncelikle $\varphi(I)$ nın bir diferansiyel alt halka olduğunu gösterelim. $\varphi: R \to S$ bir $\Delta-$homomorfizm olsun. R nin $\varphi(R)$ görüntüsü S nin bir diferansiyel alt halkasıdır. Gerçekten de φ bir homomorfizm olduğundan $\varphi(R)$, S nün bir alt halkasıdır. Ayrıca $\forall\varphi(a) \in \varphi(R)$ ve $\delta_i, \delta_j \in \Delta$ için

$$\begin{aligned}
\delta_i\delta_j\big(\varphi(a)\big) &= \delta_i\left(\varphi\left(\delta_j(a)\right)\right) \\
&= \varphi\left(\delta_i\delta_j(a)\right) \\
&= \varphi\left(\delta_j\delta_i(a)\right) \\
&= \delta_j\left(\varphi\big(\delta_i(a)\big)\right) \\
&= \delta_j\delta_i\big(\varphi(a)\big)
\end{aligned}$$

olduğundan $\varphi(R)$ bir diferansiyel alt halkadır.

Şimdi $\varphi(I)$ nın bir diferansiyel ideal olduğunu gösterelim.
$\forall\varphi(a) \in \varphi(I)$, $\forall\varphi(s) \in S$ ve $\forall\delta \in \Delta$ için

$$\varphi(a)\varphi(s) = \varphi(as) \in \varphi(I)$$

ve

$$\delta\big(\varphi(a)\big) = \varphi(\delta(a)) \in \varphi(I)$$

dır.

Tanım 2.3.3. R nin Δ altında sabit olan elemanlarının kümesine f nin çekirdeği denir. Bu küme

$$Kerf = \{a \in R | \forall\delta \in \Delta \; için \; \delta(a) = a\}$$

şeklindedir. Gerçekten de eğer $\forall\delta \in \Delta \; için \; \delta(a) = a$ ise

$$f(\delta(a)) = \delta\big(f(a)\big) = f(a)$$

olup

$$f(a) = 0$$

dır. Yani $a \in Kerf$ dir.

Önerme 2.3.2. R ve S iki $\Delta -$halka ve $\varphi: R \to S$ bir halka homomorfizmi olsun. Eğer φ bir diferansiyel halka homomorfizmi ise $Ker\varphi$ bir diferansiyel idealdir.

İspat. $\forall a \in Ker\varphi$ ve $\forall r \in R$ için

$$\varphi(ar) = \varphi(a)\varphi(r) = 0$$

olduğundan $ar \in Ker\varphi$ dir. Yani $Ker\varphi,$ R nin bir idealidir.
$\forall a \in Ker\varphi$ için

$$\varphi\big(\delta(a)\big) = \delta\big(\varphi(a)\big) = 0$$

olup $\delta(a) \in Ker\varphi$ dir. O halde $Ker\varphi$, S nin bir diferansiyel idealidir.

Not 2.3.1. Önerme 2.3.2 nin tersi her zaman doğru olmak zorunda değildir. Bu durumu bir örnek ile açıklayalım. $R = S = K\{y\}$, $\Delta = \{\delta\}$ ile birlikte bir diferansiyel polinom halkası olsun. $a \in K, n \geq 2$ olmak üzere

$$\varphi: K\{y\} \to K\{y\}$$

$$\varphi(y) = \delta(y)$$

$$\varphi(\delta y) = y$$

$$\varphi(\delta^n y) = \delta^n y$$

$$\varphi(a) = a$$

şeklinde tanımlansın. Bu φ dönüşümü bir halka homomorfizmidir. Buradan $Ker\varphi = \{0\}$ bir diferansiyel idealdir. Ancak

$$\delta\big(\varphi(y)\big) = \delta(\delta y) = \delta^2 y \neq y = \varphi(\delta y))$$

olup $\delta\varphi \neq \varphi\delta$ olduğundan φ bir diferansiyel homomorfizm değildir.

2.4. Kesirlerin Diferansiyel Halkaları

R bir halka ve S, R nin çarpımsal kapalı olan bir alt kümesi olsun. O halde $1 \in S$ olup R nin S üzerinde tanımlı kesirler halkası $S^{-1}R$ ile gösterilir. Bu küme aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$S^{-1}R = \{{}^{a}/_{s} \,|\, a \in R, s \in S\}$$

Şimdi R bir diferansiyel halka olsun. Bu durumda R nin S üzerinde tanımlı kesirlerin diferansiyel halkası benzer şekilde tanımlanır. O halde $S^{-1}R$ üzerinde bir derivasyon operatörünün nasıl tanımlandığını gösterelim.

$$\delta: S^{-1}R \to S^{-1}R$$

$$\delta\left(\frac{a}{s}\right) = \frac{\delta(a)s - a\delta(s)}{s^2}$$

olsun.

$a_1 s_2 = a_2 s_1$ eşitliğini ele alalım. Eğer δ, R üzerinde tanımlı bir derivasyon operatörü ise

$$\delta(a_1 s_2) = \delta(a_2 s_1)$$

$$\delta(a_1)s_2 + a_1\delta(s_2) = \delta(a_2)s_1 + a_2\delta(s_1)$$

$$\delta(a_1)s_2 - a_2\delta(s_1) = \delta(a_2)s_1 - a_1\delta(s_2)$$

$$\delta(a_1)s_2 - \frac{a_1 s_2}{s_1}\delta(s_1) = \delta(a_2)s_1 - \frac{a_2 s_1}{s_2}\delta(s_2)$$

$$\frac{s_1 s_2\delta(a_1) - a_1 s_2\delta(s_1)}{s_1} = \frac{s_1 s_2\delta(a_2) - a_2 s_1\delta(s_2)}{s_2}$$

$$\frac{s_2[s_1\delta(a_1) - a_1\delta(s_1)]}{s_1} = \frac{s_1[s_2\delta(a_2) - a_2\delta(s_2)]}{s_2}$$

$$\frac{s_1\delta(a_1) - a_1\delta(s_1)}{s_1^2} = \frac{s_2\delta(a_2) - a_2\delta(s_2)}{s_2^2}$$

$$\delta\left(\frac{a_1}{s_1}\right)=\delta\left(\frac{a_2}{s_2}\right)$$

dir. Yani δ, $S^{-1}R$ üzerinde iyi tanımlıdır. Şimdi ise $S^{-1}R$ nin R üzerinde tanımlı diferansiyel operatörüyle birlikte bir diferansiyel halka olduğunu görelim. Yani $\forall\delta_i,\delta_j\in\Delta$ ve $\frac{a}{s}\in S^{-1}R$ için

$$\delta_i\delta_j\left(\frac{a}{s}\right)=\delta_j\delta_i\left(\frac{a}{s}\right)$$

olduğunu göstermeliyiz.

$$\delta_i\delta_j\left(\frac{a}{s}\right)=\delta_i\left(\frac{\delta_j(a)s-a\delta_j(s)}{s^2}\right)$$

$$=\frac{\left(\delta_i\delta_j(a)s+\delta_j(a)\delta_i(s)-\delta_i(a)\delta_j(s)-a\delta_i\delta_j(s)\right)s^2-2s\delta_i(s)\left(\delta_j(a)s-a\delta_j(s)\right)}{(s^2)^2}$$

$$=\frac{\delta_i\delta_j(a)s^3+s^2\delta_j(a)\delta_i(s)-s^2\delta_i(a)\delta_j(s)-s^2a\delta_i\delta_j(s)-2s^2\delta_j(a)\delta_i(s)}{s^4}$$

$$+\frac{2sa\delta_i(s)\delta_j(s)}{s^4}$$

$$=\frac{\delta_i\delta_j(a)s^3-s^2\delta_j(a)\delta_i(s)-s^2\delta_i(a)\delta_j(s)-s^2a\delta_i\delta_j(s)+2sa\delta_i(s)\delta_j(s)}{s^4}$$

$$\delta_j\delta_i\left(\frac{a}{s}\right)=\delta_j\left(\frac{\delta_i(a)s-a\delta_i(s)}{s^2}\right)$$

$$=\frac{\left(\delta_j\delta_i(a)s+\delta_i(a)\delta_j(s)-\delta_j(a)\delta_i(s)-a\delta_j\delta_i(s)\right)s^2-2s\delta_j(s)\left(\delta_i(a)s-a\delta_i(s)\right)}{(s^2)^2}$$

$$=\frac{\delta_j\delta_i(a)s^3+s^2\delta_i(a)\delta_j(s)-s^2\delta_j(a)\delta_i(s)-s^2a\delta_j\delta_i(s)-2s^2\delta_i(a)\delta_j(s)}{s^4}$$

$$+\frac{2sa\delta_i(s)\delta_j(s)}{s^4}$$

$$=\frac{\delta_i\delta_j(a)s^3-s^2\delta_i(a)\delta_j(s)-s^2\delta_j(a)\delta_i(s)-s^2a\delta_i\delta_j(s)+2sa\delta_i(s)\delta_j(s)}{s^4}$$

Bu durumda $S^{-1}R$ ye R nin S üzerinde tanımlı kesirlerin diferansiyel halkası denir. Özel olarak $S=R$ alınırsa bu diferansiyel halkaya R nin kesirlerinin tam diferansiyel halkası denir ve $Q(R)$ ile gösterilir. Eğer R bir diferansiyel tamlık bölgesi ise $Q(R)$ ye R nin kesirlerinin diferansiyel cismi denir.

2.5. Diferansiyel Modüller

Tanım 2.5.1. R bir Δ-halka ve M bir R-modül olsun. Eğer $\delta \in \Delta$, $u, v \in M$, $a \in R$ için

$$\delta(u+v) = \delta(u) + \delta(v)$$
$$\delta(au) = \delta(a)u + a\delta(u)$$

koşulları sağlanıyor ise M ye R üzerinde bir diferansiyel modül veya diferansiyel R-modül denir.

Tanım 2.5.2. Bir F cismi üzerinde tanımlı bir diferansiyel modüle F üzerinde tanımlı bir diferansiyel vektör uzayı denir.

Diferansiyel alt modül, diferansiyel alt uzay ve bir diferansiyel R-modülünden diğer bir diferansiyel R-modülüne tanımlı homomorfizm kavramları modül teorisi ve vektör uzayı teorisinde tanımlandığı gibi tanımlanır.

Eğer $f: M \to N$ bir modül homomorfizmi ise $Kerf$ ve $f(M)$ sırasıyla M ve N nin diferansiyel alt modülleridir. M ve N diferansiyel vektör uzayı olduğunda $Kerf$ ve $f(M)$ sırasıyla M ve N nin diferansiyel alt uzaylarıdır.

M bir diferansiyel R-modül ve N bir R-modül olsun. Eğer $f: M \to N$ örten bir modül homomorfizmi ve $Kerf$, M nin bir diferansiyel alt modülü ise bu durumda N modülü, f bir diferansiyel R-modül homomorfizmi olacak şekilde, bir tek diferansiyel R-modül yapısına sahiptir.

Tanım 2.5.3. M bir diferansiyel R-modül olsun. M_0, M nin herhangi bir alt modülü ise $M \to M/M_0$ kanonik modül homomorfizmi bir diferansiyel modül homomorfizmi olacak şekilde M/M_0 bölüm modülü üzerinde bir tek diferansiyel R-modül yapısı vardır. M/M_0 ile birlikte bu yapıya M ile M_0 ın diferansiyel bölüm modülü denir.

Tanım 2.5.4. R bir Δ-halka ve A, R halkası üzerinde tanımlı bir cebir olsun. R nin operatörleri üzerinde tanımlı bu A cebirine R üstünde tanımlı bir diferansiyel cebir veya diferansiyel R-cebir denir.

A, Δ operatörleri üzerinde bir diferansiyel halka olduğunda $\delta \in \Delta$, $a \in R$ ve $u \in A$ için

$$\delta(au) = \delta(a)u + a\delta(u)$$

koşulunu sağlar. O halde A bir diferansiyel R-modül yapısına sahiptir.

Eğer R bir R' diferansiyel halkasının bir diferansiyel alt halkası ise o zaman R' bir diferansiyel R-cebir yapısına sahiptir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu tez çalışması için ilk önce internet yardımı ile literatür taraması yapıldı. Bunun sonucunda tez için gerekli olduğu düşünülen kitap, tez, makale v.s. gibi kaynaklar elde edildi. Ayrıca Harran Üniversitesi kütüphanesinden yararlı olduğu düşünülen temel cebir kaynakları alınarak çalışıldı.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Bu bölümde tez çalışmamızın temel konusu olan diferansiyel polinom halkaları detaylı bir şekilde çalışılmıştır. Bu bölüm için Kolchin (1973) ve Ritt (1948) kaynakları incelenmiştir. Ayrıca Van Den Essen (2000) kaynağında yer alan polinom halkalarındaki çalışmalardan hareketle diferansiyel polinom halkalarının otomorfizmleri incelenmiş ve bu halkaların otomorfizm grubunun bazı önemli alt grupları tanımlanmıştır.

4.1. Diferansiyel Polinom Halkaları

R sıfırdan farklı bir diferansiyel halka, Δ ise R nin derivasyon operatörlerinin bir kümesi ve Θ, R nin derivatif operatörlerinin kümesi olsun.

Tanım 4.1.1. $(\alpha_i)_{i\in I}$, R nin bir diferansiyel üst halkasının bir ailesi olsun. Eğer $(\theta\alpha_i)_{i\in I,\theta\in\Theta}$ ailesi R üstünde cebirsel bağımlı ise $(\alpha_i)_{i\in I}$ ailesine R üstünde diferansiyel cebirsel bağımlı (Δ-cebirsel bağımlı) denir. Aksi durumda ise $(\alpha_i)_{i\in I}$ ailesine R üstünde diferansiyel cebirsel bağımsız (Δ-cebirsel bağımsız) veya R üstünde diferansiyel cebirsel belirsizlerin bir ailesi denir.

S, R nin bir üst halkasının bir alt kümesi olsun. $(\alpha)_{\alpha\in S}$ ailesi diferansiyel cebirsel bağımlı (diferansiyel cebirsel bağımsız) olması durumunda S kümesi de diferansiyel cebirsel bağımlı (diferansiyel cebirsel bağımsız) olur.

Eğer S bir tek α elemanından oluşuyor ise S nin diferansiyel cebirsel bağımlı olması durumunda α ya R üzerinde diferansiyel cebirsel eleman, diğer durumda ise R üzerinde diferansiyel transandantal eleman denir.

J herhangi bir küme olsun. Şimdi R üzerinde diferansiyel belirsizlerin bir ailesinin daima var olabileceğini gösterelim. İndis kümesi $J\times\Theta$ olmak üzere,

$R\left[\left(y_{j\theta}\right)_{j\in J,\theta\in\Theta}\right]$ cebiri $\left(y_{j\theta}\right)_{j\in J,\theta\in\Theta}$ belirsizlerine bağlı R halkası üzerinde tanımlı bilinen polinomların cebiri olsun. $\forall\delta\in\Delta$ için, R nin

$$a\to\delta(a)\qquad(a\in R)$$

derivasyonu, $R\left[\left(y_{j\theta}\right)_{j\in J,\theta\in\Theta}\right]$ nın $j\in J,\theta\in\Theta$ olmak üzere, $y_{j\theta}$ elemanını $y_{j,\delta\theta}$ elemanına götüren bir tek derivasyonuna genişletilebilir. Böylece Δ, $R\left[\left(y_{j\theta}\right)_{j\in J,\theta\in\Theta}\right]$ üstünde derivasyon operatörlerinin bir kümesi olup bu cebir R üzerinde bir diferansiyel cebir olur. 1 rakamı, mertebesi 0 olan derivatif operatörünü temsil etmek üzere

$$y_{j1}=y_j$$

alalım. O halde

$$y_{j\theta}=\theta y_j$$

olur. Böylece $(y_j)_{j\in J}$, R üzerinde diferansiyel cebirsel bağımsız elemanlar olup

$$R\left[\left(y_{j\theta}\right)_{j\in J,\theta\in\Theta}\right]=R\left\{\left(y_j\right)_{j\in J}\right\}$$

olur.

Tanım 4.1.2. $\left(y_j\right)_{j\in J}$ ailesi R üzerinde diferansiyel belirsizlerin bir ailesi olsun. $R\left\{\left(y_j\right)_{j\in J}\right\}$ ye R üzerinde tanımlı, $\left(y_j\right)_{j\in J}$ ye bağlı diferansiyel polinom cebiri denir. $R\left\{\left(y_j\right)_{j\in J}\right\}$ nin elemanlarına ise katsayıları R de olan $\left(y_j\right)_{j\in J}$ belirsizlerine bağlı diferansiyel polinomlar denir.

Eğer R bir F diferansiyel cismi ise o zaman $F\left\{\left(y_j\right)_{j\in J}\right\}$ bir diferansiyel tamlık bölgesidir. Bu diferansiyel tamlık bölgesinin kesirler cismi $F\left\langle\left(y_j\right)_{j\in J}\right\rangle$ ile gösterilir ve bu kesirler cisminin elemanlarına katsayıları F de olan $\left(y_j\right)_{j\in J}$ ye bağlı diferansiyel rasyonel kesirler denir.

$\Delta = \{\delta_1, \dots \delta_m\}$ ve belirsizlerin kümesi ise sonlu bir $\{y_1, \dots, y_n\}$ kümesi olsun. O halde $\Theta = \{\delta_1^{i_1} \dots \delta_m^{i_m} | i_1, \dots, i_m \geq 0\}$ olur. Bu durumda $\{y_1, \dots, y_n\}$ ye bağlı diferasiyel polinom halkası

$$R[\theta y_i | \theta \in \Theta, 1 \leq i \leq n] = R\{y_1, \dots, y_n\}$$

şeklinde ifade edilir. Kabul edelim ki

$$\theta = \delta_1^{p_1} \dots \delta_i^{p_i} \dots \delta_m^{p_m}$$

ve $1 \leq s \leq m$ için $p_s \geq 0$ olsun. Bu durumda

$$\delta_i \theta = \delta_1^{p_1} \dots \delta_i^{p_i+1} \dots \delta_m^{p_m}$$

dir. Yani her i, j için

$$\delta_i(\theta y_j) = (\delta_i \theta) y_j$$

eşitliği ile diferansiyel polinomlar halkasına bir diferansiyel cebir yapısı kazandırılmış olur.

Örnek 4.1.1. $\Delta = \{\delta\}$ olmak üzere bir K diferansiyel cismini ele alalım. K cismine sonsuz çoklukta $\delta^i y$ $(i \geq 0)$ belirsizlerinin eklenmesiyle

$$K\{y\} = K[y, \delta y, \delta^2 y, \dots, \delta^n y, \dots]$$

bir tek belirsize bağlı diferansiyel polinomlar halkası elde edilir. Bu halka bazen

$$K[y, y', y'', \dots, y^{(n)}, \dots]$$

şeklinde yazılabilir.

Tanım 4.1.3. $(\theta y_j)_{j \in J, \theta \in \Theta}$ derivatiflerin ailesi R üstünde cebirsel belirsizler olduğundan $R\left\{(y_j)_{j \in J}\right\}$ diferansiyel polinom cebirini $(\theta y_j)_{j \in J, \theta \in \Theta}$ belirsizlerine bağlı R üstünde tanımlı polinom cebiri olarak kabul edildiğini biliyoruz. Bundan dolayı eğer $P \in R\left\{(y_j)_{j \in J}\right\}$ ise P nin derecesi $(degP)$ veya daha genel olarak Λ, $(\theta y_j)_{j \in J, \theta \in \Theta}$ nin bir altailesi olmak üzere P nin Λ daki derecesi $(deg_\Lambda P)$, P nin terimleri, P nin katsayıları ve P nin homojen olması gibi terimler bilinen polinom cebirlerinde tanımlandığı gibidir. Benzer şekilde θy_j nin P de bulunması durumunda P, θy_j yi içeriyor aksi durumda ise P, θy_j-serbesttir tanımlarını yapmak mümkündür.

Eğer P, mertebesi r olan θy_j derivatifini içeriyorken r den daha büyük mertebeli bir derivatifi içermiyorsa P nin mertebesi r dir denir ve $ord\,P$ ile gösterilir. Eğer P hiçbir θy_j derivatifini içermiyorsa yani $P \in R$ ise P nin mertebesi -1 kabul edilir. Bu tanımlamalar için aşağıdaki örnek incelenebilir.

Örnek 4.1.2. $\alpha = \delta_1\delta_2(a)$ diferansiyel polinomu için

$$\deg\alpha = 1, \; ord\,\alpha = 2$$

dir. Benzer şekilde $\beta = \left(\delta_1^2(a)\right)^3$ polinomunu ele alalım. Bu durumda

$$deg\beta = 3, \qquad ord\,\beta = 6$$

dır. Ayrıca $p = a \in R$ ise

$$degp = 0, \qquad ord\,p = -1$$

olur. Eğer $q = \delta_1\delta_2(a) + \delta_1^2\delta_2(a) + \left(\delta_1(a)\right)^3 + \delta_1^3(a)$ şeklinde bir poliom ise

$$degq = 3, \qquad deg_{\delta_1(a)}q = 3, \; ord\,q = 3$$

olup bu polinomun homojen olmadığı görülür.

Alıştırma 4.1.1. R bir diferansiyel halka, $\Delta = \{\delta_1, \dots, \delta_m\}$ kümesi R nin derivasyon operatörlerinin kümesi ve Θ, R nin derivatif operatörlerinin kümesi olsun. t, R üstünde bir diferansiyel bağımsız eleman olmak üzere $B(ty_0, ty_1, \dots, ty_n) = t^r B(y_0, y_1, \dots, y_n)$ olacak şekilde bir $r \in \mathbb{N}$ varsa bu durumda $B \in R\{y_0, y_1, \dots, y_n\}$ diferansiyel polinomuna bir diferansiyel homojen polinom denir. Bu durumda aşağıdakilerin doğruluğunu ispatlayınız.

(a) Eğer $B \neq 0$ bir diferansiyel homojen polinom ise B homojendir ve $r = degB$ dir.

(b) B nin derecesi r olan bir diferansiyel homojen polinom olması için gerek ve yeter koşul $B(y_0, y_1, \dots, y_n) = {y_0}^r A\left(\frac{y_1}{y_0}, \dots, \frac{y_n}{y_0}\right)$ olmak üzere $Q(R\{y_0, y_1, \dots, y_n\})$ de bir $A \in R\{y_1, \dots, y_n\}$ diferansiyel polinomunun bulunmasıdır.

Çözüm.

(a) B bir diferansiyel homojen polinom olsun. O halde

$$B(ty_0, ty_1, \dots, ty_n) = t^r B(y_0, y_1, \dots, y_n)$$

olacak şekilde bir $r \in \mathbb{N}$ vardır.

$$B(y_0,\dots,y_n)=a_i\big(\theta(y_0)\big)^{i_0}\dots\big(\theta(y_n)\big)^{i_n}+\cdots+a_k\big(\theta(y_0)\big)^{k_0}\big(\theta(y_1)\big)^{k_1}\dots\big(\theta(y_n)\big)^{k_n}$$

dir. Ayrıca

$$B(ty_0,\dots,ty_n)=a_i\big(\theta(ty_0)\big)^{i_0}\dots\big(\theta(ty_n)\big)^{i_n}+\cdots+a_k\big(\theta(ty_0)\big)^{k_0}\dots\big(\theta(ty_n)\big)^{k_n}$$

$$=a_it^{i_0+\cdots+i_n}\big(\theta(y_0)\big)^{i_0}\dots\big(\theta(y_n)\big)^{i_n}+\cdots+a_kt^{k_0+\cdots+k_n}\big(\theta(y_0)\big)^{k_0}\dots\big(\theta(y_n)\big)^{k_n}$$

$$=t^r\Big(a_it^{i_0+\cdots+i_n-r}\big(\theta(y_0)\big)^{i_0}\dots\big(\theta(y_n)\big)^{i_n}+\cdots$$
$$+a_kt^{k_0+\cdots+k_n-r}\big(\theta(y_0)\big)^{k_0}\dots\big(\theta(y_n)\big)^{k_n}\Big)$$

$$=t^r\Big(a_i\big(\theta(y_0)\big)^{i_0}\dots\big(\theta(y_n)\big)^{i_n}+\cdots+\ a_k\big(\theta(y_0)\big)^{k_0}\dots\big(\theta(y_n)\big)^{k_n}\Big)$$

olur. O halde

$$i_0+i_1+\cdots+i_n-r=0,\ \dots,\ k_0+k_1+\cdots+k_n-r=0$$

olup

$$i_0+i_1+\cdots+i_n=r,\ \dots,\ k_0+k_1+\cdots+k_n=r$$

olur. Yani B homojendir ve $degB=r$ dir.

(b) $Q(R\{y_0,y_1,\dots,y_n\})$ de $B(y_0,y_1,\dots,y_n)={y_0}^rA\left(\frac{y_1}{y_0},\dots,\frac{y_n}{y_0}\right)$ olacak şekilde bir $A\in R\{y_1,\dots,y_n\}$ diferansiyel polinomu var olsun. Bu durumda

$$A(y_1,\dots,y_n)=a_i\big(\theta(y_1)\big)^{i_1}\dots\big(\theta(y_n)\big)^{i_n}+\cdots+a_k\big(\theta(y_1)\big)^{k_1}\dots\big(\theta(y_n)\big)^{k_n}$$

dır. O halde

$$A\left(\frac{y_1}{y_0},\dots,\frac{y_n}{y_0}\right)=a_i\left(\theta\left(\frac{y_1}{y_0}\right)\right)^{i_1}\dots\left(\theta\left(\frac{y_n}{y_0}\right)\right)^{i_n}+\cdots+a_k\left(\theta\left(\frac{y_1}{y_0}\right)\right)^{k_1}\dots\left(\theta\left(\frac{y_n}{y_0}\right)\right)^{k_n}$$

$$=a_i\frac{\big(\theta(y_1)\big)^{i_1}\dots\big(\theta(y_n)\big)^{i_n}}{{y_0}^{i_1+\cdots+i_n}}+\cdots+a_k\frac{\big(\theta(y_1)\big)^{k_1}\dots\big(\theta(y_n)\big)^{k_n}}{{y_0}^{k_1+\cdots+k_n}}$$

$${y_0}^rA\left(\frac{y_1}{y_0},\dots,\frac{y_n}{y_0}\right)=a_i{y_0}^{r-(i_1+\cdots+i_n)}\big(\theta(y_1)\big)^{i_1}\dots\big(\theta(y_n)\big)^{i_n}+\cdots$$
$$+a_k{y_0}^{r-(k_1+\cdots+k_n)}\big(\theta(y_1)\big)^{k_1}\dots\big(\theta(y_n)\big)^{k_n}$$

$$B(y_0,\dots,y_n)=b_\alpha\big(\theta(y_0)\big)^{\alpha_0}\big(\theta(y_1)\big)^{\alpha_1}\dots\big(\theta(y_n)\big)^{\alpha_n}+\cdots$$
$$+b_\beta\big(\theta(y_0)\big)^{\beta_0}\big(\theta(y_1)\big)^{\beta_1}\dots\big(\theta(y_n)\big)^{\beta_n}$$

olur. $B(y_0, y_1, \ldots, y_n) = {y_0}^r A\left(\frac{y_1}{y_0}, \ldots, \frac{y_n}{y_0}\right)$ olduğundan

$$\begin{cases} \alpha_0 = 0, & \beta_0 = 0 \\ \alpha_1 = i_1, & \beta_1 = k_1 \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_n = i_n, & \beta_n = k_n \end{cases}$$

ve

$$r - (i_1 + \cdots + i_n) = 0$$
$$\ldots$$
$$r - (k_1 + \cdots + k_n) = 0$$

olup

$$r = i_1 + \cdots + i_n = \cdots = k_1 + \cdots + k_n$$

elde edilir. Böylece B homojendir ve $degB = r$ dir. Tersi de benzer şekilde gösterilebilir.

4.2. İzin Verilebilir Derecelendirme

R bir diferansiyel halka, $\Delta = \{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$ kümesi R nin derivasyon operatörlerinin kümesi ve Θ, R nin derivatif operatörlerinin kümesi olsun. $(y_j)_{j\in J}$ R üstünde diferansiyel belirsizlerin bir ailesi olsun. $A = R\left\{(y_j)_{j\in J}\right\}$ diferansiyel polinom cebirini ele alalım.

Tanım 4.2.1. A_k, A nın k dereceli homojen olan bütün elemanlarının kümesini göstersin. A_k, A diferansiyel R-modülünün bir diferansiyel alt modülüdür. Bu durumda $A = \oplus_{k\in\mathbb{Z}} A_k$ bir direkt toplam olup $\forall k, l \in \mathbb{Z}$ için $A_k A_l \subset A_{k+l}$ dir. Böylece A, $(A_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ derecelendirmesi ile birlikte bir derecelendirilmiş cebirdir. Bu derecelendirmeye A nın olağan derecelendirmesi denir.

A üzerinde tanımlı farklı derecelendirmeler de mevcuttur.

Tanım 4.2.2. $j \in J$ olmak üzere $v_j, \mu_1, \ldots, \mu_m \in \mathbb{Z}$ olsun. Her bir $u = \delta_1^{e_1} \ldots \delta_m^{e_m} y_j$ derivatifi için $g(u) = v_j + \mu_1 e_1 + \cdots + \mu_m e_m$ şeklinde tanımlansın. A_k, $\left(y_j\right)_{j \in J}$ deki $\oplus_h g(u_h) = k$ koşulunu sağlayan $\prod_h u_h$ diferansiyel monomiallerinin ürettiği alt modüldür. Bu durumda A, $(A_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ derecelendirmesi ile birlikte bir derecelendirilmiş cebir olup $A = \sum_{k \in \mathbb{Z}} A_k$ ve $A_k A_l \subset A_{k+l}$ $(k, l \in \mathbb{Z})$ dır. Bu şekilde elde edilen herhangi bir derecelendirmeye A nın bir izin verelebilir derecelendirmesi denir.

Eğer özel olarak $v_j = 1$ $(j \in J)$ ve $\mu_i = 0$ $(1 \leq i \leq m)$ seçilirse olağan derecelendirme elde edilir.

Tanım 4.2.3. İzin verilebilir derecelendirmede özel olarak $v_j = 0$ $(j \in J)$ ve $\mu_i = 1$ $(1 \leq i \leq m)$ alınırsa elde edilen bu yeni derecelendirmeye göre A nın homojen olan (yani $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} A_k$ da olan) elemanlarına izobarik eleman denir.

Tanım 4.2.4. P, A nın bir izobarik elemanı olsun. P elemanı en az bir k için A_k nın elemanıdır ($P \neq 0$ ise sadece bir k değeri için doğrudur, $P = 0$ ise bütün k değerleri için doğrudur). Bu durumda P, k ağırlığına sahiptir denir ve $wtP = k$ ile gösterilir.

Tanım 4.2.5. $\delta A_k \subset A_k$ $(\delta \in \Delta, k \in \mathbb{Z})$ özelliğini sağlayan A nın herhengi bir derecelendirmesine bir diferansiyel derecelendirme denir. Örneğin olağan derecelendirme bir diferansiyel derecelendirmedir.

Bir izin verilebilir derecelendirmenin diferansiyel olması için gerek ve yeter koşul $\mu_i = 0$ $(1 \leq i \leq m)$ olmasıdır.

4.3. Diferansiyel Dönüşümler

Diferansiyel halkalarının homomorfizmlerinin tanımı ikinci bölümde verilmişti. Bu bölümde ise diferansiyel otomorfizmler detaylı bir şekilde incelenecektir. Özellikle diferansiyel operatör kümesi $\Delta = \{\delta\}$ olan bir R diferansiyel halkası üzerinde tanımlı iki bilinmeyene bağlı $R\{x, y\}$ diferansiyel polinom halkasının diferansiyel otomorfizmleri (δ-otomorfizmleri) detaylı bir şekilde incelenmiştir.

$Aut_\delta R$ ile bir diferansiyel R halkasının bütün δ-otomorfizmlerinin kümesini göstereceğiz. Ayrıca K, R nin bir diferansiyel genişlemesi ve φ, K nın R üzerinde tanımlı olan bir δ-otomorfizmi ise φ yi kısaca R-δ-otomorfizm olarak ifade edeceğiz. K nın bütün R-δ-otomorfizm kümesi dönüşümlerin bilinen bileşke işlemi altında bir grup olup bu grup $Aut_\delta(K|R)$ ile gösterilir.

$R\{x_1, \dots, x_n\}$ diferansiyel polinom halkası diferansiyel cebirler kategorisinde $\{x_1, \dots, x_n\}$ kümesi üzerinde tanımlı bir serbest nesne olduğundan evrensel dönüşüm özelliğine sahiptir. Bu yüzden diferansiyel polinomların her $F = (F_1, F_2, \dots, F_n) \in R\{x_1, \dots, x_n\}^n$ n-lisine bir tek

$$\sigma_F: R\{x_1, \dots, x_n\} \to R\{x_1, \dots, x_n\}$$

R-δ-homomorfizmi karşılık gelir öyle ki $1 \leq i \leq n$ için $\sigma_F(x_i) = F_i$ ve $P \in R\{x_1, \dots, x_n\}$ için $\sigma_F(P) = P(F_1, F_2, \dots, F_n)$ dir. Tersine $R\{x_1, \dots, x_n\}$ nin her R-δ-homomorfizmi bir $F \in R\{x_1, \dots, x_n\}^n$ için σ_F formundadır.

Tanım 4.3.1. $1 \leq i \leq n$ için $F_i \in R\{x_1, \dots, x_n\}$ olmak üzere diferansiyel polinomların bir $F = (F_1, F_2, \dots, F_n) \in R\{x_1, \dots, x_n\}^n$ n-lisini göz önüne alalım. Her $F \in R\{x_1, \dots, x_n\}^n$ diferansiyel polinom n-lisi

$$\varphi_F: R^n \to R^n$$

$$(a_1, \dots, a_n) \to (F_1(a_1, \dots, a_n), \dots, F_n(a_1, \dots, a_n))$$

şeklinde bir dönüşüm tanımlar. Bu dönüşüme diferansiyel polinom dönüşümü denir.

Tanım 4.3.2. Bir φ_F diferansiyel polinom dönüşümünün tersinir olması için gerek ve yeter koşul $\varphi_G \circ \varphi_F = i$ olacak şekilde bir $G = (G_1, \dots, G_n) \in R\{x_1, \dots, x_n\}^n$ olmasıdır. Burada i, R^n üzerinde tanımlı birim dönüşümdür.

Önerme 4.3.1. $\varphi_F: R^n \to R^n$ dönüşümü $F = (F_1, \dots, F_n) \in R\{x_1, \dots, x_n\}^n$ diferansiyel polinom n-lisine karşılık gelen bir diferansiyel polinom dönüşümü olsun.

O halde φ_F nin tersinir olabilmesi için gerek ve yeter koşul $R\{x_1, \dots, x_n\} = R\{F_1, \dots, F_n\}$ olmasıdır.

İspat. φ_F tersinir olsun. Kabul edelim ki $G = (G_1, \dots, G_n) \in R\{x_1, \dots, x_n\}^n$, F nin tersi olan diferansiyel polinom olsun. O halde

$$
\begin{aligned}
(x_1, \dots, x_n) &= (\varphi_G \circ \varphi_F)(x_1, \dots, x_n) \\
&= \varphi_G\big(\varphi_F(x_1, \dots, x_n)\big) \\
&= \varphi_G\big(F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_n(x_1, \dots, x_n)\big) \\
&= \Big(G_1\big(F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_n(x_1, \dots, x_n)\big), \dots, G_n\big(F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_n(x_1, \dots, x_n)\big)\Big)
\end{aligned}
$$

$$(x_1, \dots, x_n) = \big(G_1(F_1, \dots, F_n), \dots, G_n(F_1, \dots, F_n)\big)$$

olur ve buradan

$$x_i = G_i(F_1, \dots, F_n)$$

dir. Her i için $x_i \in R\{F_1, \dots, F_n\}$ ve $R\{x_1, \dots, x_n\} = R\{F_1, \dots, F_n\}$ dir. Şimdi tersini kabul edelim. $R\{x_1, \dots, x_n\} = R\{F_1, \dots, F_n\}$ olsun. O halde her i için $x_i \in R\{F_1, \dots, F_n\}$ dir ve herhangi bir G_i için $x_i = G_i(F_1, \dots, F_n)$ dir. Yani φ_F tersinirdir.

Tanım 4.3.3. R bir halka, $R[x_1, \dots, x_n]$ ise $x_1, \dots, x_n$ belirsizlerine bağlı bir polinom halkası, $F = (F_1, \dots, F_n) \in R[x_1, \dots, x_n]^n$ bir polinom n-lisi ve

$$\varphi_F : R^n \to R^n$$

$$(x_1, \dots, x_n) \to (x) = (F_1, \dots, F_n)$$

F ye karşılık gelen polinom dönüşümü olsun. $\frac{\partial F_i}{\partial x_i}$, F_i nin x_i ye göre kısmi türev olmak üzere

$$J\varphi_F = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

ifadesine Jacobi matrisi denir. Jacobi matrisinin determinantına da Jacobi determinantı denir ve $|J\varphi_F|$ ile gösterilir.

Yukarıda diferansiyel polinom dönüşümlerinin tanımı ve bu dönüşümlerin tersinir olma koşullarından bahsedildi. Bilinen polinom halkalarında bir polinom dönüşümü tersinir ise bu dönüşüme karşılık gelen homomorfizm bir otomorfizm olur ve bunun tersi de doğrudur (Van Den Essen, 2000). Peki diferansiyel polinom halkalarında bu durum benzer midir? Aşağıda verilen teoremler bu sorunun cevabı için gerekli olacaktır.

Teorem 4.3.1. K, karakteristiği 0 olan bir k adi diferansiyel cisminin bir diferansiyel cisim genişlemesi olsun. O halde K yı k üzerinde üreten her $S \subset K$ kümesi (yani $K = k\langle S\rangle$) K nın bir diferansiyel transandantal bazlarını içerir. k üzerindeki K nın iki diferansiyel transandantal bazlarının eleman sayıları birbirine eşittir. Buna k üzerinde K nın diferansiyel boyutu denir.

Bu teorem Kolchin Teoremi'nin [1973, Teorem 4, sayfa 105] kolaylaştırılmış bir versiyonudur. Ayrıca bu teorem karakteristiği sıfır olduğunda bir k cismi üzerindeki bir K cisim genişlemesinin herhangi iki transandantal bazlarının eleman sayılarının eşit olduğu cebirsel gerçeğinin diferansiyel cisim teorisindeki uyarlamasıdır.

Tanım 4.3.4. R bir diferansiyel halka ve $V \subseteq R^2$ olsun. Eğer V, $R\{x, y\}$ nin bir I radikal idealinin R^2 de bulunan tüm ortak sıfırlarının kümesi ise V ye Kolchin kapalı küme denir.

Tanım 4.3.5. R bir diferansiyel cisim olsun. Eğer katsayıları R de olan her diferansiyel polinom denklem sisteminin R de bir çözümü varsa R ye diferansiyel kapalıdır denir.

Teorem 4.3.2. R karakteristiği sıfır olan bir diferansiyel kapalı cisim olsun. $R\{x, y\}$ nin I radikal diferansiyel ideallerinin kümesi ile $V \subseteq R^2$ Kolchin-kapalı altkümelerinin kümesi arasında bir bağıntı vardır. Bu bağıntıyı şöyle ifade etmek mümkündür:

$$I(V) = \{P \in R\{x, y\} | \forall a, b \in V \text{ } için \text{ } P(a, b) = 0\}$$

ve

$$V(I) = \{(a, b) \in R^2 | \forall P \in I \text{ } için \text{ } P(a, b) = 0\}$$

kümeleri tanımlansın. Bu durumda

$$I \to V(I)$$

dönüşümü bijektiftir ve tersi ise

$$V \subseteq R^2 \to I(V)$$

dönüşümüdür.

Not 4.3.1. Sonuç olarak $V(\{0\}) = R^2$ ve $I(R^2) = \{0\}$ dır. Ayrıca R şu özelliğe sahiptir: Herhangi bir $P \in R\{x, y\}$ ve herhangi bir $(a, b) \in R^2$ için eğer P sıfırlanırsa o zaman $P = 0$ dır. Teorem 4.3.3 ün III. kısmında bu özelliğe ihtiyacımız olacaktır (R bir diferansiyel kapalı cisim olmak zorunda değildir).

Kişisel bağlantılarımız sonucunda tez çalışmalarımızın bazı bölümlerini tartışmak üzere Prof. William Sit ile iletişime geçilmiştir. Aşağıdaki teorem tezimizin ilerideki bölümlerinde bulunan konular için önemli bir temel teşkil etmekte olup Prof. W. Sit tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 4.3.3. R bir diferansiyel tamlık bölgesi, $R\{x, y\}$ ise R üzerinde tanımlı diferansiyel polinom halkası olmak üzere ve $F = (F_1, F_2) \in R\{x, y\}^2$ olsun.

1. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

(a) $G = (G_1, G_2) \in R\{x, y\}^2$ herhangi bir polinom olmak üzere, F ye karşılık gelen σ_F diferansiyel homomorfizmi tersi σ_G olan bir otomorfizmdir.

(b) σ_F örtendir (Yani $R\{x, y\} = R\{F_1, F_2\}$).

(c) Bazı $G = (G_1, G_2)$ için $x = G_1(F_1, F_2)$ ve $y = G_2(F_1, F_2)$ dir.

2. Eğer F, 1 deki koşullardan herhangi birini sağlıyor ise o halde;

(d) φ_F polinom dönüşümü tersinirdir (Yani bir G için $\varphi_G \circ \varphi_F = i$ dir. Burada i, R^2 üzerinde birim dönüşümdür).

(e) Bazı $G = (G_1, G_2)$ için $x = F_1(G_1, G_2)$ ve $y = F_2(G_1, G_2)$ dir.

(f) Bazı $G = (G_1, G_2)$ için φ_F nin tersi φ_G dir.

3. Eğer R karakteristiği sıfır olan bir diferansiyel kapalı cisim ise yukarıdaki tüm koşullar birbirine denktir ve $G \in R\{x, y\}^2$ elemanı bir tektir.

İspat.

1. (a)⇒(b)⇒(c) aşikardır. Şimdi (c)⇒(b)⇒(a) yı göstereceğiz.

(c)⇒(b):

(c) den $x, y \in R\{F_1, F_2\}$ dir. Böylece $\sigma_F(R\{x,y\}) = R(F_1, F_2) = R(x,y)$ olup σ_F örtendir.

(b)⇒(a):

(b) den K, R tamlık bölgesinin bölüm cismi olsun. O halde K bir diferansiyel cisim olup $R\{x,y\}$ nin $K\langle x,y\rangle$ bölüm cismi ile $R\{F_1,F_2\}$ nin $K\langle F_1,F_2\rangle$ bölüm cismi eşdeğerdir. Teorem 4.3.1 den $\{F_1,F_2\}$ kümesi K üzerinde tanımlı $K\langle x,y\rangle = K\langle F_1,F_2\rangle$ nin bir diferansiyel transandantal bazıdır. O halde F_1, F_2, K üzerinde diferansiyel cebirsel bağımsızdır ve dahası R üzerinde cebirsel bağımsızdır. Bu da σ_F nin birebir olduğu anlamına gelir. Buradan (a) nın doğruluğu gösterilmiş olur.

2. Şimdi kabul edelim ki F elemanı (a), (b) ve (c) koşullarını sağlasın. İspatın bu kısmı için G elemanı (c) deki gibi tanımlanmış olsun.

(c)⇒(d):

$\forall (a,b) \in R^2$ için (c) koşulundan

$$\begin{aligned}\varphi_G \circ \varphi_F(a,b) &= \varphi_G\big(F_1(a,b), F_2(a,b)\big)\\ &= \Big(G_1\big(F_1(a,b),F_2(a,b)\big), G_2\big(F_1(a,b),F_2(a,b)\big)\Big) \qquad (6)\\ &= (a,b)\end{aligned}$$

dir. Buradan $\varphi_G \circ \varphi_F = i$ elde edilir ve böylece (d) sağlanır.

(c) ⇒(e):

(c) den $\sigma_F\big(F_1(G_1,G_2)\big) = F_1\big(G_1(F_1,F_2), G_2(F_1,F_2)\big) = F_1(x,y) = \sigma_F(x)$ elde edilir. (c) ⇒(a) dan σ_F birebir olup $F_1(G_1,G_2) = x$ dir. Benzer şekilde $F_2(G_1,G_2) = y$ dir. Böylece (e) elde edilmiş olur.

(c) ⇒(f):

I dönüşümü $R\{x,y\}$ nin birim otomorfizmini temsil etsin. (c) den $\sigma_F \circ \sigma_G = I$ ve (6) numaralı denklemden $\varphi_G \circ \varphi_F = i$ dir. (c) ⇒(e) den $\sigma_F \circ \sigma_G = I$ ve $\varphi_G \circ \varphi_F = i$ dir. Böylece (f) elde edilmiş olup σ_G, σ_F nin tersidir.

3. R, $charR = 0$ olan bir diferansiyel kapalı cisim olsun. 1. koşulda (c) de ifade edilen G elemanı için (a) koşulun sağlandığı ve bu ifadenin tersinin de doğru olduğu gösterildi. 2. koşulda (c) de tanımlı G elemanının (d), (e), (f) için sağlandığı ispatlandı. Şimdi tersini ispatlayacağız. Yani (d), (e), (f) nin herhangi birinde tanımlı olan G elemanının (c) koşulunu sağlandığını göstereceğiz. Ayrıca buradan G nin tekliğini (Çünkü G, σ_F nin tekliğini temsil ediyor) ve bütün koşullardaki G lerin aynı olduğunu ispatlayacağız.

(d) ⇒(c):

Kabul edelim ki $\varphi_G \circ \varphi_F = i$ olacak şekilde $G = (G_1, G_2) \in R\{x, y\}^2$ elemanı var olsun. O halde (6) denkleminden $P = G_1(F_1, F_2) - x$ ve $Q = G_2(F_1, F_2) - y$ polinomlarının her biri her $(a, b) \in R^2$ elemanı için aldığı değer sıfırdır. Not 4.3.1. den $P = Q = 0$ olup (c) elde edilir.

(e) ⇒(c):

$G = (G_1, G_2)$, (e) deki gibi olsun. Şimdi teoremin F için ispatlanmış olan ilk iki kısmını G ye uygulayalım ve G için geçerli olan koşulları '$*$' ile ifade edelim. O halde (e) den $F = (F_1, F_2)$ kullanılırsa G için (c)* koşulu elde edilmiş olur. Böylece G için (c)* ⇒(e)* olduğu gösterilmiş olur. (c)* den F yi ve (e) den G yi kullanılırsa (e) ⇒(c) elde edilmiş oluruz.

(f) ⇒(c):

φ_G, φ_F nin tersi olacak şekilde G polinomunu ele alalım. $\varphi_G \circ \varphi_F = i$ dir ki bu da (d) dir ve buradan da (c) elde edilir.

4.4. $R\{x, y\}$ nin Diferansiyel Otomorfizm Grubunun Alt Grupları

Herhangi bir $F = (F_1, F_2) \in R\{x, y\}^2$ polinom 2-lisine karşılık bir polinom dönüşümünün ve bir diferansiyel homomorfizminin karşılık geldiğini biliyoruz.
Bu bölümde amacımız $Aut_\delta(R\{x, y\}|R)$ nin önemli bazı alt gruplarını tanımlamaktır. Bunu yaparken otomorfizmler üzerinde çalışmak yerine Teorem 4.3.3 den faydalanarak bu otomorfizmlere karşılık gelen polinom dönüşümlerini inceleyeceğiz.

Daha genel olarak bu bölümde yaptığımız çalışmayı şöyle ifade edebiliriz. Eleman özelliklerine göre belirlenen herhangi bir $S \subseteq R\{x, y\}^2$ kümesi için F üzerinde öyle C_S koşulları oluşturalım ki her $F \in S$ için $\sigma_F \in Aut_\delta(R\{x, y\}|R)$ olsun. Yani σ_F homomorfizminin tersi ${\sigma_F}^{-1} \in Aut_\delta(R\{x, y\}|R)$ var olsun. Bu durumda C_S kümesi sadece σ_F diferansiyel homomorfizmini birebir ve örten yapan koşulların kümesi değil aynı zamanda S kümesini tanımlayan özelliklerin bir parçası olacaktır.

Bu durumda $F \to \sigma_F$ dönüşümüyle birlikte S sadece diferansiyel homomorfizmlerin bir kümesi değil aynı zamanda $Aut_\delta(R\{x,y\}|R)$ nin bir $\sum(S)$ alt kümesi olarak düşünülebilir. Bu durumda $S \subseteq R\{x,y\}^2$ altkümelerini $\sum(S) = \{\sigma_F | F \in S\}$ kümesinin $Aut_\delta(R\{x,y\}|R)$ nin bir altkümesi olacak şekilde belirlenmeye çalışılacaktır.

Bu bölüm boyunca R karakteristiği sıfır olan bir diferansiyel kapalı cisim olacaktır.

4.4.1. Afin δ-alt grup

$S = \{(ax+by+c, dx+ey+f) | a,b,c,d,e,f \in R\}$ kümesini ele alalım. S kümesindeki her $F = (F_1, F_2) \in R\{x,y\}^2$ diferansiyel polinom 2-lisi bir R-δ-homomorfizmine karşılık gelir. Yani

$$\sigma_F : R\{x,y\} \to R\{x,y\}$$
$$x \to ax + by + c$$
$$y \to dx + ey + f$$

dir. Diğer yandan F nin bir φ_F polinom dönüşümü tanımladığı biliniyor. Teorem 4.3.3 gereği eğer R karakteristiği sıfır olan bir diferansiyel kapalı cisim ise F ye karşılık gelen φ_F polinom dönüşümünün tersinir olması halinde F ye karşılık gelen σ_F diferansiyel endomorfizmi bir otomorfizm olur. O halde burada $\varphi_G \circ \varphi_F = i$ olacak şekilde $G = (G_1, G_2) \in R\{x,y\}^2$ polinom 2-lileri incelenmelidir. Böylece teorem gereği φ_F tersinir olup σ_F bir otomorfizm olacaktır. Bu durumda $\forall (a,b) \in R^2$ için

$$\varphi_G \circ \varphi_F(a,b) = \varphi_G\big(F_1(a,b), F_2(a,b)\big)$$
$$= \Big(G_1\big(F_1(a,b), F_2(a,b)\big), G_2\big(F_1(a,b), F_2(a,b)\big)\Big) = (a,b)$$

olacak şekilde $G = (G_1, G_2) \in R\{x,y\}^2$ nin varlığını araştıralım. Kabul edelim ki

$$G_1 = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 \text{ ve } G_2 = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2$$

olsun. O halde

$$x = G_1(F_1, F_2)$$
$$x = G_1(ax + by + c, dx + ey + f)$$

$$x = \alpha_1 ax + \alpha_1 by + \alpha_1 c + \beta_1 dx + \beta_1 ey + \beta_1 f + \gamma_1$$
$$x = (\alpha_1 a + \beta_1 d)x + (\alpha_1 b + \beta_1 e)y + \alpha_1 c + \beta_1 f + \gamma_1$$

eşitlikleri göz önünde bulundurulduğunda $\alpha_1 a + \beta_1 d = 1,\ \alpha_1 b + \beta_1 e = 0$ elde edilir.

$\alpha_1 a + \beta_1 d = 1$ denklemini b ile $\alpha_1 b + \beta_1 e = 0$ denklemini $-a$ ile çarpıp bu iki denklemi kendi aralarında toplarsak $ae - bd \in R^*$ ise

$$\beta_1 = \frac{b}{bd - ae}$$

elde edilir. Ayrıca $\alpha_1 b + \beta_1 e = 0$ eşitliğinde β_1 değeri yerine yazılır ise $\alpha_1 b + \frac{b}{bd-ae} e = 0$

olup

$$\alpha_1 = \frac{e}{ae-bd}$$

bulunur. Diğer yandan $\alpha_1 c + \beta_1 f + \gamma_1 = 0$ eşitliğinde bulunan bu değerler yerine yazılır ise

$$\frac{ec}{ae-bd} + \frac{bf}{bd-ae} + \gamma_1 = 0$$

denklemi elde edilip

$$\gamma_1 = \frac{bf - ec}{ae - bd}$$

bulunur. Böylece

$$G_1 = \frac{1}{ae - bd}(ex - by + bf - ec)$$

olarak hesaplanır. Benzer şekilde $G_2 = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2$ olmak üzere

$$y = G_2(F_1, F_2)$$
$$y = G_2(ax + by + c, dx + ey + f)$$
$$y = \alpha_2 ax + \alpha_2 by + \alpha_2 c + \beta_2 dx + \beta_2 ey + \beta_2 f + \gamma_2$$
$$y = (\alpha_2 a + \beta_2 d)x + (\alpha_2 b + \beta_2 e)y + \alpha_2 c + \beta_2 f + \gamma_2$$

olup $\alpha_2 a + \beta_2 d = 0,\ \ \alpha_2 b + \beta_2 e = 1$ eşitlikleri elde edilir. $\alpha_2 a + \beta_2 d = 0$ denklemini $-b$ ile $\alpha_2 b + \beta_2 e = 1$ denklemini ise a ile çarpıp bu iki denklemi kendi aralarında toplarsak

$$\beta_2 = \frac{a}{ae - bd}$$

bulunur. Bu değeri $\alpha_2 a + \beta_2 d = 0$ de yazarsak

$$\alpha_2 a + \frac{a}{ae - bd} d = 0$$

olup

$$\alpha_2 = \frac{d}{bd - ae}$$

bulunur. Diğer yandan bulunan bütün değerleri $\alpha_2 c + \beta_2 f + \gamma_2 = 0$ de yerine yazılırsa

$$\frac{dc}{bd - ae} + \frac{af}{ae - bd} + \gamma_2 = 0$$

olup

$$\gamma_2 = \frac{dc - af}{ae - bd}$$

elde edilir. Böylece

$$G_2 = \frac{1}{ae - bd}(-dx + ay + dc - af)$$

olarak hesaplanır. Bu durumda $ae - bd \in R^*$ olduğunda $G = (G_1, G_2) \in R\{x, y\}^2$ vardır ve ayrıca $G \in S$ dir. Bu durumda φ_F nin tersi var olup ve σ_F bir otomorfizmdir. Yani $\sum(S) \subset Aut_\delta(R\{x, y\}|R)$ olur. Böylece S kümesi

$$S = \{(ax + by + c, dx + ey + f) | a, b, c, d, e, f \in R, ae - bd \in R^*\}$$

şeklinde güncellemek gerekir. Peki bu tanımladığımız altküme $Aut_\delta(R\{x, y\}|R)$ nin bir alt grubu olur mu? Şimdi bu sorunun cevabını araştıralım.

$\forall \sigma_F, \sigma_E \in \sum(S)$ için $\sigma_F \circ \sigma_E = \sigma_H \in \sum(S)$ olacak şekilde $H = (H_1, H_2) \in S$ olduğunu gösterelim. Bu durumda $\sigma_F \in \sum(S)$ olduğundan $a_1 e_1 - b_1 d_1 \in R^*$ olacak şekilde $a_1, b_1, d_1, e_1 \in R$ vardır öyle ki

$$\sigma_F : R\{x, y\} \to R\{x, y\}$$
$$x \to a_1 x + b_1 y + c_1$$
$$y \to d_1 x + e_1 y + f_1$$

ve benzer şekilde $\sigma_E \in \sum(S)$ olduğundan $a_2 e_2 - b_2 d_2 \in R^*$ olacak şekilde $a_2, b_2, d_2, e_2 \in R$ vardır öyle ki

$$\sigma_E : R\{x, y\} \to R\{x, y\}$$

$$x \to a_2x + b_2y + c_2$$
$$y \to d_2x + e_2y + f_2$$

dir. O halde

$$\begin{aligned}
\sigma_F \circ \sigma_E(x) &= \sigma_F(a_2x + b_2y + c_2) \\
&= a_2\sigma_F(x) + b_2\sigma_F(y) + c_2 \\
&= a_2(a_1x + b_1y + c_1) + b_2(d_1x + e_1y + f_1) + c_2 \\
&= \underbrace{(a_1a_2 + b_2d_1)}_{a_3 \in R}x + \underbrace{(b_1a_2 + b_2e_1)}_{b_3 \in R}y + \underbrace{(c_1a_2 + b_2f_1 + c_2)}_{c_3 \in R} \\
&= a_3x + b_3y + c_3 \ = H_1
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\sigma_F \circ \sigma_E(y) &= \sigma_F(d_2x + e_2y + f_2) \\
&= d_2\sigma_F(x) + e_2\sigma_F(y) + f_2 \\
&= d_2(a_1x + b_1y + c_1) + e_2(d_1x + e_1y + f_1) + f_2 \\
&= \underbrace{(a_1d_2 + e_2d_1)}_{d_3 \in R}x + \underbrace{(b_1d_2 + e_2e_1)}_{e_3 \in R}y + \underbrace{(c_1d_2 + e_2f_1 + f_2)}_{f_3 \in R} \\
&= d_3x + e_3y + f_3 \ = \ H_2
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda elde edilen $H = (a_3x + b_3y + c_3, d_3x + e_3y + f_3)$ kümesi S nin elamanı mıdır? Yani $a_3e_3 - b_3d_3 \in R^*$ midir?

$$\begin{aligned}
a_3e_3 - b_3d_3 &= (a_1a_2 + b_2d_1)(b_1d_2 + e_2e_1) - (b_1a_2 + b_2e_1)(a_1d_2 + e_2d_1) \\
&= a_1a_2b_1d_2 + a_1a_2e_2e_1 + b_2d_1b_1d_2 + b_2d_1e_2e_1 - b_1a_2a_1d_2 - b_1a_2e_2d_1 \\
&\quad - b_2e_1a_1d_2 - b_2e_1e_2d_1 \\
&= a_1a_2e_2e_1 + b_2d_1b_1d_2 - b_1a_2e_2d_1 - b_2e_1a_1d_2 \\
&= a_1a_2e_2e_1 - b_1a_2e_2d_1 + b_2d_1b_1d_2 - b_2e_1a_1d_2 \\
&= a_2e_2(a_1e_1 - b_1d_1) - b_2d_2(a_1e_1 - b_1d_1) \\
&= (a_1e_1 - b_1d_1)(a_2e_2 - b_2d_2)
\end{aligned}$$

olup $a_1e_1 - b_1d_1 \in R^*$ ve $a_2e_2 - b_2d_2 \in R^*$ olduğundan bunların çarpımı olan $(a_1e_1 - b_1d_1)(a_2e_2 - b_2d_2) = a_3e_3 - b_3d_3 \in R^*$ dır.

$Aut_\delta(R\{x,y\}|R)$ nin $\sum(S)$ alt grubunu belirleyen S kümesi Afin δ-alt grubu olarak adlandırılacak ve $Aff_\delta(R\{x,y\}|R)$ ile gösterilecektir.

4.4.2. Üçgensel δ-alt grup

$S = \{(ax + f(y), by + c) \,|\, a, b, c \in R, f(y) \in R\{y\}\}$ kümesini ele alalım. S kümesindeki her $F = (F_1, F_2) \in R\{x, y\}^2$ diferansiyel polinom 2-lisi bir R-δ-homomorfizmine karşılık gelir. Yani

$$\sigma_F: R\{x, y\} \to R\{x, y\}$$
$$x \to ax + f(y)$$
$$y \to by + c$$

dir. Diğer yandan F nin bir φ_F polinom dönüşümü tanımladığı biliniyor. Teorem 4.3.3 gereği eğer R karakteristiği sıfır olan bir diferansiyel kapalı cisim ise F ye karşılık gelen φ_F polinom dönüşümünün tersinir olması halinde F ye karşılık gelen σ_F diferansiyel endomorfizmi bir otomorfizm olur. O halde burada $\varphi_G \circ \varphi_F = i$ olacak şekilde $G = (G_1, G_2) \in R\{x, y\}^2$ polinom 2-lileri incelenmelidir. Böylece teorem gereği φ_F tersinir olup σ_F bir otomorfizm olacaktır. Bu durumda $\forall(a, b) \in R^2$ için

$$\varphi_G \circ \varphi_F(a, b) = \varphi_G\big(F_1(a, b), F_2(a, b)\big)$$
$$= \Big(G_1\big(F_1(a, b), F_2(a, b)\big), G_2\big(F_1(a, b), F_2(a, b)\big)\Big) = (a, b)$$

olacak şekilde $G = (G_1, G_2) \in R\{x, y\}^2$ nin varlığını araştıralım. Kabul edelim ki

$$G_1 = \alpha_1 x + \beta_1 f(y) + \gamma_1 \text{ ve } G_2 = \alpha_2 x + \beta_2 f(y) + \gamma_2$$

olsun. O halde

$$x = G_1(F_1, F_2)$$
$$x = G_1(ax + f(y), by + c)$$
$$x = \alpha_1 ax + \alpha_1 f(y) + \beta_1 f(by + c) + \gamma_1$$

olur. Böylece $\alpha_1 a = 1$ olup $a \in R^*$ için $\alpha_1 = \frac{1}{a}$ dır. Diğer yandan

$$\alpha_1 f(y) + \beta_1 f(by + c) + \gamma_1 = 0$$
$$\beta_1 f(by + c) + \gamma_1 = -\alpha_1 f(y)$$

olur. $b \in R^*$ olmak üzere $y = \frac{y-c}{b}$ alalım. Bu durumda

$$\beta_1 f(y) + \gamma_1 = -\frac{1}{a} f\left(\frac{y-c}{b}\right)$$

dır. Bu durumda $a, b \in R^*$ olmak üzere

$$\alpha_1 = \frac{1}{a} \qquad \text{ve} \qquad -\frac{1}{a} f\left(\frac{y-c}{b}\right) = g(y) \in R\{y\}$$

olup $G_1 = \alpha_1 x + g(y)$ olur.

Benzer şekilde $G_2 = \alpha_2 x + \beta_2 f(y) + \gamma_2$ olmak üzere

$$y = G_2(F_1, F_2)$$
$$y = G_2(ax + f(y), by + c)$$
$$y = \alpha_2 ax + \alpha_2 f(y) + \beta_2 f(by + c) + \gamma_2$$

$\alpha_2 = 0$ dır. Böylece

$$\beta_2 f(by + c) + \gamma_2 = y$$

olur. $b \in R^*$ olmak üzere $y = \frac{y-c}{b}$ alınırsa

$$\beta_2 f(y) + \gamma_2 = \frac{y - c}{b} = \frac{1}{b} y - \frac{c}{b}$$

elde edilir. Bu durumda $b \in R^*$ için $\frac{1}{b} = r$ ve $-\frac{c}{b} = s$ olmak üzere $G_2 = ry + s$ olur. Bu durumda $a, b \in R^*$ olduğunda $G = (G_1, G_2) \in R\{x, y\}^2$ vardır ve ayrıca $G \in S$ dir. Yani bu durumda φ_F nin tersi vardır ve σ_F bir otomorfizmdir. O halde $\sum(S) \subset Aut_\delta(R\{x, y\}|R)$ olur. Bu durumda C_S koşulu olarak $a, b \in R^*$alınmalıdır. Böylece S kümesi

$$S = \{(ax + f(y), by + c) \big| a, b \in R^*, c \in R, f(y) \in R\{y\}\}$$

şeklinde güncellemek gerekir.

Peki bu tanımladığımız kümeye göre $\sum(S)$ kümesi $Aut_\delta(R\{x, y\}|R)$ nin bir alt grubu olur mu? Şimdi bu sorunun cevabını araştıralım.

$\forall \sigma_F, \sigma_E \in \sum(S)$ için $\sigma_F \circ \sigma_E = \sigma_H \in \sum(S)$ olacak şekilde $H = (H_1, H_2) \in S$ olduğunu göstermeliyiz. $\sigma_F \in \sum(S)$ olduğundan $a_1, b_1 \in R^*$ ve $f_1(y) \in R\{y\}$ vardır öyle ki

$$\sigma_F: R\{x, y\} \to R\{x, y\}$$
$$x \to a_1 x + f_1(y)$$
$$y \to b_1 y + c_1$$

ve benzer şekilde $\sigma_E \in \sum(S)$ olduğundan $a_2, b_2 \in R^*$ ve $f_2(y) \in R\{y\}$ vardır öyle ki

$$\sigma_E: R\{x, y\} \to R\{x, y\}$$
$$x \to a_2 x + f_2(y)$$
$$y \to b_2 y + c_2$$

dir. O halde

$$\begin{aligned}\sigma_F \circ \sigma_E(x) &= \sigma_F\big(a_2x + f_2(y)\big) = a_2\sigma_F(x) + \sigma_F\big(f_2(y)\big)\\ &= a_2a_1x + a_2f_1(y) + f_2\big(\sigma_F(y)\big)\\ &= a_2a_1x + a_2f_1(y) + f_2(b_1y + c_1)\end{aligned}$$

olur. Ayrıca

$a_2f_1(y) + f_2(b_1y + c_1) = f_3(y)$ ve $a_2a_1 = a_3$ için

$$\sigma_H(x) = a_3x + f_3(y) = H_1$$

olur. Benzer şekilde

$$\sigma_F \circ \sigma_E(y) = \sigma_F(b_2y + c_2) = b_2\sigma_F(y) + c_2 = b_2b_1y + b_1c_1 + c_2$$

olur.

$$b_2b_1 = b_3 \quad \text{ve} \quad b_1c_1 + c_2 = c_3$$

için

$$\sigma_H(y) = b_3y + c_3 = H_2$$

olur. Peki elde edilen $H = (a_3x + f_3(y), b_3y + c_3)$ kümesi S nin elamanı mıdır? Yani $a_3, b_3 \in R^*$ ve $f_3(y) \in R\{y\}$ midir?

$a_3 = a_2a_1$ olup $a_1, a_2 \in R^*$ olduğundan $a_3 \in R^*$ dır ve aynı şekilde $b_3 = b_2b_1$ olup $b_1, b_2 \in R^*$ olduğundan $b_3 \in R^*$ dır. $f_1(y), f_2(y) \in R\{y\}$ olduğundan $a_2f_1(y) + f_2(b_1y + c_1) = f_3(y) \in R\{y\}$ dir. O halde $\sum(S)$ alt kümesi $Aut_\delta(R\{x,y\}|R)$ nin bir alt grubu olur.

$Aut_\delta(R\{x,y\}|R)$ nin $\sum(S)$ altgrubunu belirleyen S kümesi üçgensel δ-alt grup olarak adlandırılacak ve $J_\delta(R\{x,y\}|R)$ olarak gösterilecektir.

4.3.3. Elementer δ-alt grup

$S = \{(ax + f(y), y) \mid a \in R, f(y) \in R\{y\}\}$ kümesini ele alalım. S kümesindeki her $F = (F_1, F_2) \in R\{x,y\}^2$ diferansiyel polinom 2-lisi bir R-δ-homomorfizmine karşılık gelir. Yani

$$\begin{aligned}\sigma_F: R\{x,y\} &\to R\{x,y\}\\ x &\to ax + f(y)\\ y &\to y\end{aligned}$$

dir. Afin ve üçgensel diferansiyel altgruplarda ki işlemlerle benzer bir şekilde $\varphi_G \circ \varphi_F = i$ olacak şekilde $G = (G_1, G_2) \in R\{x,y\}^2$ polinom 2-lileri incelenmelidir. Böylece Teorem 4.3.3 gereği φ_F tersinir olup σ_F bir otomorfizm olacaktır. Bu durumda $\forall (a,b) \in R^2$ için

$$\varphi_G \circ \varphi_F(a,b) = \varphi_G\big(F_1(a,b), F_2(a,b)\big)$$

$$= \Big(G_1\big(F_1(a,b), F_2(a,b)\big), G_2\big(F_1(a,b), F_2(a,b)\big)\Big) = (a,b)$$

olacak şekilde $G = (G_1, G_2) \in R\{x,y\}^2$ nin varlığını araştıralım. Kabul edelim ki

$$G_1 = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 \quad \text{ve} \quad G_2 = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2$$

olsun. O halde

$$x = G_1(F_1, F_2)$$
$$x = G_1(ax + f(y), y)$$
$$x = \alpha_1 a x + \alpha_1 f(y) + \beta_1 y + \gamma_1$$

olur. Böylece $\alpha_1 a = 1$ olup $a \in R^*$ için $\alpha_1 = \frac{1}{a}$ dır. Diğer yandan

$$\alpha_1 f(y) + \beta_1 y + \gamma_1 = 0$$
$$\beta_1 y + \gamma_1 = -\alpha_1 f(y) = -\frac{1}{a} f(y)$$

olur. $a \in R^*$, $\alpha_1 = \frac{1}{a}$ ve $-\frac{1}{a} f(y) = g(y) \in R\{y\}$ olmak üzere $G_1 = \alpha_1 x + g(y)$ olur. Benzer şekilde $G_2 = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2$ olmak üzere

$$y = G_2(F_1, F_2)$$
$$y = G_2(ax + f(y), y)$$
$$y = \alpha_2 a x + \alpha_2 f(y) + \beta_2 y + \gamma_2$$

$\alpha_2 a = 0$ eşitliğinden $\alpha_2 = 0$ olur ve buradan da $\beta_2 = 1, \gamma_2 = 0$ olur. Böylece

$$G_2 = y$$

elde edilir. Bu durumda $a \in R^*$ olduğunda $G = (G_1, G_2) \in R\{x,y\}^2$ vardır ve ayrıca $G \in S$ dir. Bu durumda φ_F nin tersi vardır ve σ_F bir otomorfizmdir. Yani $\sum(S) \subset Aut_\delta(R\{x,y\}|R)$ olur. Böylece S kümesi

$$S = \big\{(ax + f(y), y) \big| a \in R^*, f(y) \in R\{y\}\big\}$$

şeklinde güncellemek gerekir.

Peki bu tanımladığımız alt küme $Aut_\delta(R\{x,y\}|R)$ nin bir alt grubu olur mu? Şimdi bu sorunun cevabını araştıralım.

$\forall \sigma_F, \sigma_E \in \sum(S)$ için $\sigma_F \circ \sigma_E = \sigma_H \in \sum(S)$ olacak şekilde $H = (H_1, H_2) \in S$ olduğunu gösterelim. Bu durumda $\sigma_F \in \sum(S)$ olduğundan $a_1 \in R^*$ ve $f_1(y) \in R\{y\}$ vardır öyle ki

$$\sigma_F: R\{x, y\} \to R\{x, y\}$$
$$x \to a_1 x + f_1(y)$$
$$y \to y$$

ve benzer şekilde $\sigma_E \in \sum(S)$ olduğundan $a_2 \in R^*$ ve $f_2(y) \in R\{y\}$ vardır öyle ki

$$\sigma_E: R\{x, y\} \to R\{x, y\}$$
$$x \to a_2 x + f_2(y)$$
$$y \to y$$

dir. O halde

$$\sigma_F \circ \sigma_E(x) = \sigma_F\big(a_2 x + f_2(y)\big) = a_2 \sigma_F(x) + \sigma_F\big(f_2(y)\big)$$
$$= a_2 a_1 x + a_2 f_1(y) + f_2\big(\sigma_F(y)\big)$$
$$= a_2 a_1 x + a_2 f_1(y) + f_2(y)$$

olur. Ayrıca $a_2 f_1(y) + f_2(y) = f_3(y)$ ve $a_2 a_1 = a_3$ için

$$\sigma_H(x) = a_3 x + f_3(y) = H_1$$

olur.

$$\sigma_F \circ \sigma_E(y) = \sigma_F(y) = y = H_2$$

olur. Peki elde edilen $H = (a_3 x + f_3(y), y\ )$ kümesi S nin elamanı mıdır? Yani $a_3 \in R^*$ ve $f_3(y) \in R\{y\}$ midir?

$a_3 = a_2 a_1$ olup $a_1, a_2 \in R^*$ olduğundan $a_3 \in R^*$ dır ve $f_1(y), f_2(y) \in R\{y\}$ olduğundan $a_2 f_1(y) + f_2(y) = f_3(y) \in R\{y\}$ dir.

$Aut_\delta(R\{x, y\}|R)$ nin $\sum(S)$ alt grubunu belirleyen S kümesi elementer δ-alt grup olarak adlandırılacak ve $E_\delta(R\{x, y\}|R)$ ile gösterilecektir.

4.4.4. Tame $\boldsymbol{\delta}$-alt grup

Tanım 4.4.4.1. $Aut_\delta(R\{x, y\}|R)$ nin $Aff_\delta(R\{x, y\}|R)$ ve $J_\delta(R\{x, y\}|R)$ tarafından üretilen alt grubuna tame δ −altgrup denir ve $T_\delta(K|R)$ ile gösterilir. Yani

$$T_\delta(R\{x, y\}|R) = \langle Aff_\delta(R\{x, y\}|R), J_\delta(R\{x, y\}|R)\rangle.$$

Tanım 4.4.4.2. G bir grup, A ve B, G nin alt grupları $C = A \cap B$ olsun. $G = \langle A, B \rangle$ ve $\forall a_1, \dots, a_{k+1} \in A$, $\forall b_1, \dots, b_k \in B$ ve $k \geq 1$ için $a_2, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k \notin C$ ve $a_1 \in C$ olacak şekilde

$$g = a_1 b_1 \dots a_k b_k a_{k+1}$$

çarpımı C ye ait değilse G grubuna A ve B nin C üzerinde karıştırılmış serbest çarpımı (amalgamated free product) denir ve $G = A *_C B$ şeklinde gösterilir.

Yukarıda $\Delta = \{\delta\}$ olmak üzere $R\{x, y\}$ nin otomorfizm grubunun bazı alt grupları ispatlandı. Şimdi ise $R\{x, y\}$ nin tame otomorfizmlerinin üçgensel ve afin otomorfizmlerinin karıştırılmış serbest çarpımı olduğunu göstereceğiz. Ayrıca $R\{x, y\}$ nin verilen bir endomorfizminin bir tame otomorfizmi olup olmadığını inceleyen bir algoritma tanımlayacağız.

Aşağıdaki lemma grup teorisinde bilinen bir lemmadır.

Lemma 4.4.4.1. G grubu H ve K alt grupları tarafından üretilmiş bir grup olsun. O halde $2 \leq i \leq l$ için $h_i \in H \setminus K$, $1 \leq i \leq l$ için $k_i \in K \setminus H$, $h_1 \in H \cap K$ ve $h_{l+1} \in H$ olmak üzere bazı $l \geq 1$ için G nin her g elemanı

$$g = h_1 k_1 h_2 \dots h_l k_l h_{l+1}$$

şeklinde yazılabilir.

İspat. Eğer $g \in G$ ise $l \geq 1$, $h_i \in H$ ve $k_i \in K$ için

$$g = h_1 k_1 h_2 \dots h_l k_l h_{l+1}$$

dir. h_i ve k_i için yukarıda belirtilen $h_2, \dots, h_l \in H \setminus K$ ve $k_1, \dots, k_l \in K \setminus H$ şartlarının sağlanmadığını düşünelim. Örneğin bir $2 \leq i_0 \leq l$ için $h_{i_0} \in K$ olsun. Bu durumda

$$g = h_1 k_1 \dots h_{i_0 - 1} \left(k_{i_0 - 1} h_{i_0} k_{i_0}\right) \dots h_l k_l h_{l+1}$$

dir. $k_{i_0 - 1} h_{i_0} k_{i_0} \in K$ olduğundan g yi istenen forma gelene kadar kısaltabiliriz. Bu işlem gerektiği kadar tekrarlanırsa istenen sonuç elde edilir.

Şimdi daha sonra vereceğimiz lemmalarda ve bahsettiğimiz algoritmada kullanacağımız bazı notasyonları tanımlayacağız. $F = (F_1, F_2) \in R\{x, y\}^2$ ve σ_F ise

$R\{x,y\}$ nin F ye karşılık gelen R-δ-homomorfizmi olsun. Bu durumda $\sigma_F(x) = F_1$, $\sigma_F(y) = F_2$ dir $i = 1,2$ için $wt(F_i)$, F_i diferansiyel polinomunun ağırlığı olmak üzere F nin ağırlığı $wt(F) = max\{wt(F_1), wt(F_2)\}$ olarak tanımlanır. Bunlardan hareketle

$$bidegF = \big(deg(F_1), deg(F_2)\big)$$
$$tdegF = deg(F_1) + deg(F_2)$$
$$biwtF = \big(wt(F_1), wt(F_2)\big)$$
$$twtF = wt(F_1) + wt(F_2)$$

dereceleri tanımlansın. Şimdi yukarıda tanımlanan bu derecelerin homomorfizmlerin bileşkesi üzerindeki etkisini inceleyelim. Kabul edelim ki $G = (G_1, G_2) \in R\{x,y\}^2$ ve σ_G ise $R\{x,y\}$ nin G ye karşılık gelen diferansiyel homomorfizmi olsun. Bu durumda

$$\sigma_H(x) = (\sigma_F \circ \sigma_G)(x) = G_1\big(F_1(x,y), F_2(x,y)\big) = H_1$$
$$\sigma_H(y) = (\sigma_F \circ \sigma_G)(y) = G_2\big(F_1(x,y), F_2(x,y)\big) = H_2$$

olacak şekilde $H = (H_1, H_2)$ vardır. Bu durumda

$$bidegH = \big(deg(H_1), deg(H_2)\big)$$
$$tdegH = deg(H_1) + deg(H_2)$$
$$biwtH = \big(wt(H_1), wt(H_2)\big)$$
$$twtH = wt(H_1) + wt(H_2)$$

şeklinde tanımlanır.

Şimdi Lemma 4.4.4.1 de $F \in T_\delta(R\{x,y\}|R)$ ve $G = T_\delta(R\{x,y\}|R)$, $H = Aff_\delta(R\{x,y\}|R)$, $K = J_\delta(R\{x,y\}|R)$ ve $g = F$ alalım. Bu durumda $\lambda_1 \in Aff_\delta(R\{x,y\}|R) \cap J_\delta(R\{x,y\}|R)$ $\lambda_{l+1} \in Aff_\delta(R\{x,y\}|R)$, $2 \le i \le l$ için

$$\lambda_i \in Aff_\delta(R\{x,y\}|R) \setminus J_\delta(R\{x,y\}|R)$$

ve $1 \le i \le l$ için $\tau_i \in J_\delta(R\{x,y\}|R) \setminus Aff_\delta(R\{x,y\}|R)$ olmak üzere

$$F = \lambda_1 \circ \tau_1 \circ \lambda_2 \circ \ldots \circ \lambda_l \circ \tau_l \circ \lambda_{l+1}$$

dir.

Eğer $\lambda \in Aff_\delta(R\{x,y\}|R)$ ise $ae - bd \in R^*$ ve $a,b,c,d,e,f \in R$ olacak şekilde

$$\lambda = (ax + by + c, dx + ey + f)$$

olur. Ayrıca $\tau \in J_\delta(R\{x,y\}|R)$ ise $\alpha, \beta \in R^*$, $\gamma \in R$, $f(y) \in R\{y\}$ olacak şekilde

$$\tau = (\alpha x + f(y), \beta y + \gamma)$$

olduğunu biliyoruz.

Diğer yandan bir i değeri için eğer $\lambda_i \in Aff_\delta(R\{x,y\}|R) \setminus J_\delta(R\{x,y\}|R)$ ise $a_i e_i - b_i d_i \in R^*$, $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i \in R$, $d_i \neq 0$ olacak şekilde

$$\lambda_i = (a_i x + b_i y + c_i, d_i x + e_i y + f_i)$$

olur.

Eğer bir l değeri için $\lambda_l \in H \cap K$ ise $a_l, b_l, c_l, e_l, f_l \in R$, $a_l e_l \in R^*$ olup

$$\lambda_l = (a_l x + b_l y + c_l, e_l y + f_l)$$

dir.

Eğer bir j değeri için $\tau_j \in J_\delta(R\{x,y\}|R) \setminus Aff_\delta(R\{x,y\}|R)$ ise $\alpha_j, \beta_j \in R^*$, $\gamma_j \in R$, $f_j(y) \in R\{y\}$ olup ya $wt(f_j) \geq 1$ yada $wt(f_j) = 0$ iken $deg(f_j) \geq 2$ dir ve

$$\tau_j = \left(\alpha_j x + f_j(y), \beta_j y + \gamma_j\right)$$

olur.

Lemma 4.4.4.2. $\lambda_1 \in Aff_\delta(R\{x,y\}|R) \cap J_\delta(R\{x,y\}|R)$, $2 \leq i \leq l$ için $\lambda_i \in Aff_\delta(R\{x,y\}|R) \setminus J_\delta(R\{x,y\}|R)$, $1 \leq i \leq l$ için $\tau_i \in J_\delta(R\{x,y\}|R) \setminus Aff_\delta(R\{x,y\}|R)$ ve $deg(\tau_i) \geq 2$ olmak üzere

$$bideg(\lambda_1 \circ \tau_1 \circ \ldots \circ \lambda_l \circ \tau_l) = \left(\prod_{j=1}^{l} deg\tau_j(x), \prod_{j=1}^{l-1} deg\tau_j(x)\right)$$

dir. Eğer $l = 1$ ise $bideg(\lambda_1 \circ \tau_1) = (deg\tau_1(x), 1)$dir.

İspat. Lemmayı tümevarım yöntemi ile ispatlayalım.

$l = 1$ için

$$\begin{aligned}\lambda_1 \circ \tau_1 &= (a_1 x + b_1 y + c_1, e_1 y + f_1) \circ (\alpha_1 x + f_1(y), \beta_1 y + \gamma_1) \\ &= (\alpha_1 a_1 x + \alpha_1 b_1 y + \alpha_1 c_1 + f_1(e_1 y + f_1), \beta_1 e_1 y + \beta_1 f_1 + \gamma_1)\end{aligned}$$

olup $bideg(\lambda_1 \circ \tau_1) = (deg\tau_1(x), 1)$ dir.

$l = n$ için

$$bideg(\lambda_1 \circ \tau_1 \circ \ldots \circ \lambda_n \circ \tau_n) = \left(\prod_{j=1}^{n} deg\tau_j(x), \prod_{j=1}^{n-1} deg\tau_j(x)\right)$$

olsun. Kolaylık olması için $\lambda_1 \circ \tau_1 \circ \ldots \circ \lambda_n \circ \tau_n = (F_1, F_2)$ olsun.

$\lambda_1 \circ \tau_1 \circ \ldots \circ \lambda_n \circ \tau_n \circ \lambda_{n+1}$ elemanını inceleyelim. $\lambda_{n+1} \in Aff_\delta(R\{x,y\}|R) \setminus J_\delta(R\{x,y\}|R)$ olduğundan $d_{n+1} \neq 0$ dır

$$\begin{aligned}\lambda_1 \circ \tau_1 \circ \ldots \circ \tau_n \circ \lambda_{n+1} &= (F_1, F_2) \circ (a_{n+1}x + b_{n+1}y + c_{n+1}, d_{n+1}x + e_{n+1}y + f_{n+1}) \\ &= (a_{n+1}F_1 + b_{n+1}F_2 + c_{n+1}, d_{n+1}F_1 + e_{n+1}F_2 + f_{n+1}) \\ &= (G_1, G_2)\end{aligned}$$

$$bideg(G_1, G_2) = \left(p_i, \prod_{j=1}^{n} deg\tau_j(x)\right)$$

olup

$$p_i \leq \prod_{j=1}^{n} deg\tau_j(x)$$

olur. Şimdi $\lambda_1 \circ \tau_1 \circ \ldots \circ \lambda_n \circ \tau_n \circ \lambda_{n+1} \circ \tau_{n+1}$ elemanının ağırlığını hesaplayalım. $\tau_{n+1} \in J_\delta(R\{x,y\}|R) \setminus Aff_\delta(R\{x,y\}|R)$ olduğundan $\tau_{n+1} = (\alpha_{n+1}x + f_{n+1}(y), \beta_{n+1}y + \gamma_{n+1})$ olur.

$$\begin{aligned}\lambda_1 \circ \tau_1 \circ \ldots \circ \lambda_n \circ \tau_n \circ \lambda_{n+1} \circ \tau_{n+1} &= (G_1, G_2) \circ (\alpha_{n+1}x + f_{n+1}(y), \beta_{n+1}y + \gamma_{n+1}) \\ &= (\alpha_{n+1}G_1 + f_{n+1}(G_2), \beta_{n+1}G_2 + \gamma_{n+1})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}bideg(\lambda_1 \circ \tau_1 \circ \ldots \circ \lambda_{n+1} \circ \tau_{n+1}) &= \left(\prod_{j=1}^{n} deg\tau_j(x).deg\tau_{n+1}(x), \prod_{j=1}^{n} deg\tau_j(x)\right) \\ &= \left(\prod_{j=1}^{n+1} deg\tau_j(x), \prod_{j=1}^{n} deg\tau_j(x)\right)\end{aligned}$$

elde edilir.

Lemma 4.4.4.3. $\lambda_1 \in Aff_\delta(R\{x,y\}|R) \cap J_\delta(R\{x,y\}|R)$, $2 \leq i \leq l$ için $\lambda_i \in Aff_\delta(R\{x,y\}|R) \setminus J_\delta(R\{x,y\}|R)$, $1 \leq i \leq l$ için $\tau_i \in J_\delta(R\{x,y\}|R) \setminus Aff_\delta(R\{x,y\}|R)$ ve $wt(\tau_i) \geq 1$ olmak üzere

$$biwt(\lambda_1 \circ \tau_1 \circ \ldots \circ \lambda_l \circ \tau_l) = \left(\sum_{j=1}^{l} wt\tau_j(x), \sum_{j=1}^{l-1} wt\tau_j(x)\right)$$

dir. Eğer $l = 1$ ise $biwt(\lambda_1 \circ \tau_1) = (wt\tau_1(x), 0)$dir.

İspat. İspatı tümevarım yöntemi ile yapacağız.

$l = 1$ için

$$\lambda_1 \circ \tau_1 = (a_1 x + b_1 y + c_1, e_1 y + f_1) \circ (\alpha_1 x + f_1(y), \beta_1 y + \gamma_1)$$
$$= (\alpha_1 a_1 x + \alpha_1 b_1 y + \alpha_1 c_1 + f_1(e_1 y + f_1), \beta_1 e_1 y + \beta_1 f_1 + \gamma_1)$$

olup $biwt(\lambda_1 \circ \tau_1) = (wt\tau_1(x), 0)$ dir.

$l = n$ için,

$$biwt(\lambda_1 \circ \tau_1 \circ \dots \circ \lambda_n \circ \tau_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} wt\tau_j(x), \sum_{j=1}^{n-1} wt\tau_j(x) \right)$$

olsun. Kolaylık olması için $\lambda_1 \circ \tau_1 \circ \dots \circ \lambda_n \circ \tau_n = (F_1, F_2)$ alalım. Şimdi $\lambda_1 \circ \tau_1 \circ \dots \circ \lambda_n \circ \tau_n \circ \lambda_{n+1}$ elemanını inceleyelim. $\lambda_{n+1} \in Aff_\delta(R\{x,y\}|R) \setminus J_\delta(R\{x,y\}|R)$ olduğundan $d_{n+1} \neq 0$ dır

$$\lambda_1 \circ \tau_1 \circ \dots \circ \tau_n \circ \lambda_{n+1} = (F_1, F_2) \circ (a_{n+1} x + b_{n+1} y + c_{n+1}, d_{n+1} x + e_{n+1} y + f_{n+1})$$
$$= (a_{n+1} F_1 + b_{n+1} F_2 + c_{n+1}, d_{n+1} F_1 + e_{n+1} F_2 + f_{n+1})$$
$$= (G_1, G_2)$$

$$biwt(G_1, G_2) = \left(p_i, \sum_{j=1}^{n} wt\tau_j(x) \right)$$

olup

$$p_i \leq \sum_{j=1}^{n} wt\tau_j(x)$$

olur. Şimdi $\lambda_1 \circ \tau_1 \circ \dots \circ \lambda_n \circ \tau_n \circ \lambda_{n+1} \circ \tau_{n+1}$ elemanının derecesini hesaplayalım. $\tau_{n+1} \in J_\delta(R\{x,y\}|R) \setminus Aff_\delta(R\{x,y\}|R)$ olduğundan $\tau_{n+1} = (\alpha_{n+1} x + f_{n+1}(y), \beta_{n+1} y + \gamma_{n+1})$ olur.

$$\lambda_1 \circ \tau_1 \circ \dots \circ \lambda_n \circ \tau_n \circ \lambda_{n+1} \circ \tau_{n+1} = (G_1, G_2) \circ (\alpha_{n+1} x + f_{n+1}(y), \beta_{n+1} y + \gamma_{n+1})$$
$$= (\alpha_{n+1} G_1 + f_{n+1}(G_2), \beta_{n+1} G_2 + \gamma_{n+1})$$

$$biwt(\lambda_1 \circ \tau_1 \circ \dots \circ \tau_n \circ \lambda_{n+1} \circ \tau_{n+1}) = \left(\sum_{j=1}^{n} wt\tau_j(x) + wt\tau_{n+1}(x), \sum_{j=1}^{n} wt\tau_j(x) \right)$$
$$= \left(\sum_{j=1}^{n+1} wt\tau_j(x), \sum_{j=1}^{n} wt\tau_j(x) \right)$$

elde edilir.

Sonuç 4.4.4.1. $C = Aff_\delta(R\{x,y\}|R) \cap J_\delta(R\{x,y\}|R)$ olmak üzere $T_\delta(R\{x,y\}|R) = Aff_\delta(R\{x,y\}|R) *_C J_\delta(R\{x,y\}|R)$ dir yani $T_\delta(R\{x,y\}|R)$, $Aff_\delta(R\{x,y\}|R)$ ve $J_\delta(R\{x,y\}|R)$ tarafından üretilir ve eğer $\lambda_i \in Aff_\delta(R\{x,y\}|R) \setminus J_\delta(R\{x,y\}|R)$ ve $\tau_i \in J_\delta(R\{x,y\}|R) \setminus Aff_\delta(R\{x,y\}|R)$ ise $\tau_1 \circ \lambda_2 \circ \dots \circ \tau_{n-1} \circ \lambda_n \circ \tau_n \notin C$ dir.

İspat. $T_\delta(R\{x,y\}|R)$ nin $Aff_\delta(R\{x,y\}|R)$ ve $J_\delta(R\{x,y\}|R)$ tarafından üretildiğini biliyoruz. Kabul edelim ki her i için $\tau_i \in J_\delta(R\{x,y\}|R) \setminus Aff_\delta(R\{x,y\}|R)$ ve $\lambda_i \in Aff_\delta(R\{x,y\}|R) \setminus J_\delta(R\{x,y\}|R)$ için

$$\tau_1 \circ \lambda_2 \circ \dots \circ \tau_{n-1} \circ \lambda_n \circ \tau_n = \lambda \in C$$

olsun. O halde

$$\lambda^{-1} \circ \tau_1 \circ \lambda_2 \circ \dots \circ \tau_{n-1} \circ \lambda_n \circ \tau_n(x,y) = (x,y) \tag{7}$$

olup

$$biwt(\lambda^{-1} \circ \tau_1 \circ \lambda_2 \circ \dots \circ \tau_{n-1} \circ \lambda_n \circ \tau_n) = (0,0)$$

dır. $\tau_i \in J_\delta(R\{x,y\}|R) \setminus Aff_\delta(R\{x,y\}|R)$ olduğundan iki durum söz konusudur.

<u>Durum 1</u>. $wt\tau_j \geq 1$ olsun. Bu durumda Lemma 4.4.4.3 den

$$biwt(\lambda^{-1} \circ \tau_1 \circ \lambda_2 \circ \dots \circ \tau_{n-1} \circ \lambda_n \circ \tau_n) = \left(\sum_{j=1}^{n-1} wt\tau_j(x) + wt\tau_n(x), \sum_{j=1}^{n-1} wt\tau_j(x)\right)$$

$$= (0,0)$$

olup $wt\tau_n(x) = 0$ olur. Bu da $wt\tau_j \geq 1$ kabulü ile çelişir.

<u>Durum 2</u>. $wt\tau_j = 0$ olsun. O halde $deg\tau_j \geq 2$ olmalıdır. Bu durumda (7) denkleminden

$$bideg(\lambda^{-1} \circ \tau_1 \circ \lambda_2 \circ \dots \circ \tau_{n-1} \circ \lambda_n \circ \tau_n) = (1,1)$$

elde edilir. Lemma 4.4.4.2 den

$$bideg(\lambda^{-1} \circ \tau_1 \circ \lambda_2 \circ \dots \circ \tau_{n-1} \circ \lambda_n \circ \tau_n)$$

$$= \left(\prod_{j=1}^{n-1} deg\tau_j(x).deg\tau_n(x), \prod_{j=1}^{n-1} deg\tau_j(x)\right)$$

olup $deg\tau_n(x) = 1$ olmak zorunda kalır. $deg\tau_j \geq 2$ olduğundan bu bir çelişkidir. O halde kabulümüz yanlıştır.

Sonuç 4.4.4.2. $F = (F_1, F_2) \in T_\delta(R\{x,y\}|R)$ ve $biwtF = (d_1, d_2)$ olsun. h_i, F_i nin ağırlığı d_i olan izobarik bileşeni olsun. Eğer $wtF_i > 0$ ise o zaman;

(i) Eğer $d_1 < d_2$ ise $\exists c \in R$ için $h_2 = c\delta^{d_2 - d_1} h_1$ dir.

(ii) Eğer $d_2 < d_1$ ise $\exists c \in R$ için $h_1 = c\delta^{d_1 - d_2} h_2$ dir.

(iii) Eğer $d_1 = d_2$ ise $(F_1', F_2') = F \circ \tau$ olmak üzere $wt(F_1') > wt(F_2')$ olacak şekilde $\tau \in J_\delta(R\{x,y\}|R)$ vardır.

İspat. $F = \lambda_1 \circ \tau_1 \circ \lambda_2 \circ \dots \circ \lambda_l \circ \tau_l \circ \lambda_{l+1}$ olmak üzere Lemma 4.4.4.3 den

$$biwt(\lambda_1 \circ \tau_1 \circ \dots \circ \lambda_l \circ \tau_l) = \left(\sum_{j=1}^{n} wt\tau_j(x), \sum_{j=1}^{n-1} wt\tau_j(x) \right) = (f_1, f_2)$$

dir. $\lambda_{l+1} = (a_{l+1}x + b_{l+1}y + c_{l+1}, d_{l+1}x + e_{l+1}y + f_{l+1})$ olmak üzere $\lambda_1 \circ \tau_1 \circ \dots \circ \lambda_l \circ \tau_l = (G_1, G_2)$ olsun. Kabul edelim ki $a_{l+1} = 0$ olsun.

$$\begin{aligned}\lambda_1 \circ \tau_1 \circ \dots \circ \lambda_l \circ \tau_l \circ \lambda_{l+1} &= (G_1, G_2) \circ (b_{l+1}y + c_{l+1}, d_{l+1}x + e_{l+1}y + f_{l+1}) \\ &= (b_{l+1}G_2 + c_{l+1}, d_{l+1}G_1 + e_{l+1}G_2 + f_{l+1}) \\ biwtF &= (d_1, d_2) = (f_2, f_1)\end{aligned}$$

olup $f_2 < f_1$ olduğundan $d_1 < d_2$ olur. Yani eğer $a_{l+1} = 0$ ise $d_1 < d_2$ olur.

$wth_1 = d_1$ ise $h_1 = \delta^{d_1}(f(x,y))$, $f(x,y) \in R[x,y]$ dir ve $wth_2 = d_2$ ise $h_2 = \delta^{d_2}(f(x,y))$, $f(x,y) \in R[x,y]$ dir. $h_1 = \delta^{d_1}(f(x,y))$ eşitliğinin her iki tarafının $\delta^{d_2 - d_1}$ ile derivasyonu alınırsa $\delta^{d_2 - d_1} h_1 = h_2$ elde edilir.

$\lambda_{l+1} = (a_{l+1}x + b_{l+1}y + c_{l+1}, d_{l+1}x + e_{l+1}y + f_{l+1})$ olmak üzere $\lambda_1 \circ \tau_1 \circ \dots \circ \lambda_l \circ \tau_l = (G_1, G_2)$ olsun. Kabul edelim ki $d_{l+1} = 0$ olsun.

$$\begin{aligned}\lambda_1 \circ \tau_1 \circ \dots \circ \lambda_l \circ \tau_l \circ \lambda_{l+1} &= (G_1, G_2) \circ (a_{l+1}x + b_{l+1}y + c_{l+1}, e_{l+1}y + f_{l+1}) \\ &= (a_{l+1}G_1 + b_{l+1}G_2 + c_{l+1}, e_{l+1}G_2 + f_{l+1}) \\ biwtF &= (d_1, d_2) = (f_1, f_2)\end{aligned}$$

olup $f_2 < f_1$ olduğundan $d_{l+1} = 0$ olma durumu $d_2 < d_1$ durumunu oluşturur.

$wth_1 = d_1$ ise $h_1 = \delta^{d_1}(f(x,y))$, $f(x,y) \in R[x,y]$ dir ve $wth_2 = d_2$ ise $h_2 = \delta^{d_2}(f(x,y))$, $f(x,y) \in R[x,y]$ dir. $h_2 = \delta^{d_2}(f(x,y))$ eşitliğinin her iki tarafının $\delta^{d_1 - d_2}$ ile derivasyonu alınırsa $\delta^{d_1 - d_2} h_2 = h_1$ elde edilir.

$\lambda_{l+1} = (a_{l+1}x + b_{l+1}y + c_{l+1}, d_{l+1}x + e_{l+1}y + f_{l+1})$ olmak üzere $\lambda_1 \circ \tau_1 \circ \dots \circ \lambda_l \circ \tau_l = (G_1, G_2)$ olsun. Kabul edelim ki $a_{l+1}.d_{l+1} \neq 0$ olsun.

$$\lambda_1 \circ \tau_1 \circ \dots \circ \tau_l \circ \lambda_{l+1} = (G_1, G_2) \circ (a_{l+1}x + b_{l+1}y + c_{l+1}, d_{l+1}x + e_{l+1}y + f_{l+1})$$

$$= (a_{l+1}G_1 + b_{l+1}G_2 + c_{l+1}, d_{l+1}G_1 + \ e_{l+1}G_2 + f_{l+1})$$

$biwtF = (d_1, d_2) = (f_1, f_1)$ olur. O halde $a_{l+1}.d_{l+1} \neq 0$ ise $d_1 = d_2$ elde edilir. $\tau = (\alpha x + f(y), \beta y + \gamma)$ olsun.

$$\begin{aligned}(F_1', F_2') &= F \circ \tau \\ &= (F_1, F_2) \circ (\alpha x + f(y), \beta y + \gamma) \\ &= (\alpha F_1 + f(F_2), \beta F_2 + \gamma)\end{aligned}$$

$wtF_1' = wtF_2 + wt\tau$, $wtF_2' = wtF_2$ olup $wtF_1' > wtF_2'$ dir.

Böylece λ_{l+1} de sırasıyla $a_{l+1} = 0$, $d_{l+1} = 0$ ve $a_{l+1}d_{l+1} \neq 0$ olma durumları bize (i), (ii), (iii) koşullarını verir.

Bu sonucu aşağıdaki örneklerle daha ayrıntılı bir şekilde görelim. Yukarıdaki sonucu $l = 1$ için uygulayalım.

Örnek 4.4.4.1. $\lambda_1 = (x + y, y) \in J_\delta(R\{x, y\}|R) \cap Aff_\delta(R\{x, y\}|R)$, $\tau_1 = (x + y'', y) \in J_\delta(R\{x, y\}|R) \setminus Aff_\delta(R\{x, y\}|R)$, $\lambda_2 = (x + y, y) \in Aff_\delta(R\{x, y\}|R)$ ve $F = \lambda_1 \circ \tau_1 \circ \lambda_2$ olsun. O halde

$$\lambda_1 \circ \tau_1 \circ \lambda_2(x, y) = \lambda_1 \circ (x + y'' + y, y) = (x + y + y'' + y, y)$$

elde edilir. Bu durumda $h_1 = y''$, $h_2 = y$ olur. λ_2 de $d_2 = 0$ olduğunda sonucun (ii) koşulunun elde edildiği görülür. Yani $h_1 = 1\delta^{2-0}h_2$ olacak şekilde $1 \in R$ vardır.

Örnek 4.4.4.2. $\lambda_1 = (x + y, y) \in J_\delta(R\{x, y\}|R) \cap Aff_\delta(R\{x, y\}|R)$, $\tau_1 = (x + y'', y) \in J_\delta(R\{x, y\}|R) \setminus Aff_\delta(R\{x, y\}|R)$, $\lambda_2 = (y, x + y) \in Aff_\delta(R\{x, y\}|R)$ ve $F = \lambda_1 \circ \tau_1 \circ \lambda_2$ olsun. O halde

$$\lambda_1 \circ \tau_1 \circ \lambda_2(x, y) = \lambda_1 \circ (y, x + y'' + y) = (y, x + y + y'' + y)$$

elde edilir. λ_2 de $a_2 = 0$ olduğundan (i) koşulu elde edilmelidir. $h_1 = y$, $h_2 = y''$ olur. $h_2 = 1\delta^{2-0}h_1$ olacak şekilde $1 \in R$ vardır.

Örnek 4.4.4.3. $\lambda_1 = (x + y, y) \in J_\delta(R\{x, y\}|R) \cap Aff_\delta(R\{x, y\}|R)$, $\tau_1 = (x + y'', y) \in J_\delta(R\{x, y\}|R) \setminus Aff_\delta(R\{x, y\}|R)$, $\lambda_2 = (\ x + y, x - y) \in Aff_\delta(R\{x, y\}|R)$ ve $F = \lambda_1 \circ \tau_1 \circ \lambda_2$ olsun. O halde

$$\begin{aligned}\lambda_1 \circ \tau_1 \circ \lambda_2(x, y) &= \lambda_1 \circ (x + y'' + y, x + y'' - y\ ) \\ &= (x + y + y'' + y, x + y'' + y - y\ )\end{aligned}$$

elde edilir. λ_2 de $a_2 d_2 \neq 0$ olduğundan (iii) koşulu elde edilmelidir. $\lambda_1 \circ \tau_1 \circ \lambda_2$ bileşkesi için $biwt$ yi hesaplayalım.

$$biwt(\lambda_1 \circ \tau_1 \circ \lambda_2) = (2,2)$$

elde edilir. $wt(F_1') > wt(F_2')$ olmak üzere $(F_1', F_2') = F \circ \tau$ olacak şekilde $\tau \in J_\delta(R\{x,y\}|R)$ var mıdır? $\tau = (\alpha x + y', \beta y + \gamma)$ olsun.

$$\begin{aligned}(F_1', F_2') = F \circ \tau &= (y'' + 2y + x, y'' + x\,) \circ (\alpha x + y', \beta y + \gamma)\\ &= (\alpha y'' + 2\alpha y + \alpha x + y''' + x', \beta y'' + \beta x + \gamma)\end{aligned}$$

$wt(F_1') = 3$, $wt(F_2') = 2$ olup $wt(F_1') > wt(F_2')$ dir.

Not 4.4.4.1. Eğer F Sonuç 4.4.4.2 deki (i) (veya (ii)) gibi ise o zaman $\tau = (x, y + c\delta^{d_2 - d_1}x)$ (veya $\tau = (x + c\delta^{d_1 - d_2}y, y)$) olmak üzere $twt(F \circ \tau^{-1}) < twtF$ dir.

$d_1 < d_2$ için $h_2 = c\delta^{d_2 - d_1}h_1$ olacak şekilde $c \in R$ vardır. $\tau^{-1} = (x, y - c\delta^{d_2 - d_1}x)$ dir.

$$F \circ \tau^{-1} = (F_1, F_2) \circ (x, y - c\delta^{d_2 - d_1}x) = (F_1, F_2 - c\delta^{d_2 - d_1}F_1)$$

$twt(F \circ \tau^{-1}) = d_1 + k$, $(k < d_2)$ olduğundan $twt(F \circ \tau^{-1}) < twtF$ dir.

Eğer $d_2 < d_1$ ise en az bir $c \in R$ vardır öyle ki $h_1 = c\delta^{d_1 - d_2}h_2$ dir. $\tau = (x + c\delta^{d_1 - d_2}y, y)$ olsun. $\tau^{-1} = (x - c\delta^{d_1 - d_2}y, y)$ olduğu biliniyor. O halde

$$F \circ \tau^{-1} = (F_1, F_2) \circ (x - c\delta^{d_1 - d_2}y, y) = (F_1 - c\delta^{d_1 - d_2}F_2, F_2)$$

olur. $twt(F \circ \tau^{-1}) = d_2 + t$, $(t < d_1)$ elde edilir. O halde $twt(F \circ \tau^{-1}) < twtF$ dir.

Not 4.4.4.2. Sonuç 4.4.4.2 deki F için $d_1 = d_2 = 0$ ise F ye karşılık gelen σ_F diferansiyel homomorfizmi, $R[x,y]$ nin bir endomorfizmidir. Bu durumda Van Den Essen (2000, Sonuç 5.1.6) deki $R[x,y]$ polinom cebirleri için elde edilen sonuçlardan yararlanılır.

$F = (F_1, F_2) \in R\{x,y\}^2$ ve σ_F, $R\{x,y\}$ de F ye karşılık gelen endomorfizmi olsun. Şimdi σ_F nin $T_\delta(R\{x,y\}|R)$ nin elemanı olup olmadığını inceleyen bir algoritma vereceğiz.

1. $biwtF = (d_1, d_2)$ ve $bidegF = (f_1, f_2)$ olsun.
2. Eğer $d_1 = d_2 = 0$ ise 7 ye git.

3. Eğer $d_1 \neq d_2$ ise 5 e git.
4. Eğer $twt(F \circ \tau) < twtF$ olacak şekilde $\tau \in J_\delta(R\{x,y\}|R)$ varsa F yerine $F \circ \tau$ yazıp 1 e git, $\tau \in J_\delta(R\{x,y\}|R)$ yoksa $F \notin T_\delta(R\{x,y\}|R)$ dir.
5. Eğer $d_2 < d_1$ ise F yerine (F_2, F_1) yaz.
6. Eğer $h_2 = c\delta^{d_2-d_1}h_1$ olacak şekilde $c \in R$ varsa F yerine $F \circ (x, y - c\delta^{d_2-d_1}x)$ yaz ve 1 e git, $c \in R$ yoksa $F \notin T_\delta(R\{x,y\}|R)$ dir.
7. Eğer $f_1 = f_2 = 1$ ise 12 ye git.
8. Eğer $f_1 \neq f_2$ ise 10 a git.
9. Eğer $tdeg(F \circ \lambda) < tdegF$ olacak şekilde $\lambda \in Aff_\delta(R\{x,y\}|R)$ varsa F yerine $F \circ \lambda$ yazıp 7 ye git, $\lambda \in Aff_\delta(R\{x,y\}|R)$ yoksa $F \notin T_\delta(R\{x,y\}|R)$ dir.
10. Eğer $f_2 < f_1$ ise F yerine (F_2, F_1) yaz.
11. Eğer $f_1|f_2$ ise ve $t_2 = pt_1^{f_2/f_1}$ olacak şekilde $p \in R$ varsa F yerine $\left(x, y - px^{f_2/f_1}\right) \circ F$ yaz ve 7 ye git, $p \in R$ yoksa $F \notin T_\delta(R\{x,y\}|R)$ dir.
12. Eğer $|JF| \in R^*$ ise $F \in T_\delta(R\{x,y\}|R)$ dir, değilse $F \notin T_\delta(R\{x,y\}|R)$dir.

Örnek 4.4.4.4. $F = (y'' + x + y, y)$ diferansiyel dönüşümünün tame olup olmadığını algoritma yardımıyla inceleyelim.

İlk olarak $biwtF = (d_1, d_2) = (2,0)$ ve $bidegF = (f_1, f_2) = (1,1)$ dir. $d_1 \neq d_2$ olduğundan 5.adıma gideriz. 5.adımdan $d_2 < d_1$ olduğundan F yerine (F_2, F_1) olan $(y, y'' + x + y)$ yazıp 6.adım ile devam ederiz.

$$h_1 = y \text{ ve } h_2 = y''$$

olup $h_2 = c\delta^{d_2-d_1}h_1$ olacak şekilde $c \in R$ vardır. Bundan dolayı F yerine $F \circ (x, y - c\delta^{d_2-d_1}x)$ yazarız. O halde yeni oluşan F

$$F = (y, y'' + x + y) \circ (x, y - \delta^2 x) = (y, x + y)$$

olur. Buradan tekrar 1.adıma gideriz. Yeni oluşan F için

$$biwtF = (d_1, d_2) = (0,0) \text{ ve } bidegF = (f_1, f_2) = (1,1)$$

dir. $d_1 = d_2 = 0$ olduğundan 7.adıma gideriz. dır. $f_1 = f_2 = 1$ olduğundan 12.adıma gideriz.

$$|JF| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \in R^*$$

olduğundan $F \in T_\delta(R\{x, y\}|R)$ dir.

Örnek 4.4.4.5. $F = (y'' + y, y'' + 1)$ diferansiyel dönüşümünün tame olup olmadığını algoritma yardımıyla inceleyelim.

$biwtF = (d_1, d_2) = (2, 2)$ ve $bidegF = (f_1, f_2) = (1, 1)$ dir. $d_1 = d_2$ olduğundan 4.adıma gideriz.

$$F \circ \tau = (y'' + y, y'' + 1) \circ (x, y + cx) = (y'' + y, y'' + 1 + cy'' + cy)$$

olup $c = -1$ için $F \circ \tau = (y'' + y, -y + 1)$ olup $twt(F \circ \tau) < twtF$ olacak şekilde $\tau \in J_\delta(R\{x, y\}|R)$ vardır. O halde F yerine $F \circ \tau$ yazıp 1.adıma gideriz. O zaman yeni

$$F = (y'' + y, -y + 1)$$

olup

$$biwtF = (d_1, d_2) = (2, 0) \text{ ve } bidegF = (f_1, f_2) = (1, 1)$$

dir. $d_1 \neq d_2$ olduğundan 5.adıma gideriz. 5.adımdan $d_2 < d_1$ olduğundan $F = (-y + 1, y'' + y)$

olur. 6.adımla devam edersek $h_1 = -y$ ve $h_2 = y''$ eşitliklerinden $h_2 = c\delta^{d_2 - d_1} h_1$ olacak şekilde $c \in R$ vardır. O zaman O halde F yerine

$$F \circ (x, y - c\delta^{d_2 - d_1} x)$$

yazarız. O halde yeni oluşan F

$$F = (-y + 1, y'' + y) \circ (x, y + \delta^2 x) = (-y + 1, y)$$

olur. En son elde ettiğimiz F ye göre

$$biwtF = (d_1, d_2) = (0, 0) \text{ ve } bidegF = (f_1, f_2) = (1, 1)$$

olup

$d_1 = d_2 = 0$ olduğundan 7.adıma gideriz. $f_1 = f_2 = 1$ olduğundan 12.adıma gideriz.

$$|JF| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \notin R^*$$

olduğundan $F \notin T_\delta(R\{x, y\}|R)$ dir.

5.SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında diferansiyel cebirler için temel bilgiler verildi ve diferansiyel polinom halkaları tanıtıldı. Ayrıca iki bilinmeyene bağlı polinom halkalarının otomorfizm grubunun elementer, afin, üçgensel ve tame gibi bazı önemli alt grupları ilk defa tanımlanmış oldu. Bu alt gruplardan tame alt grubunun afin ve üçgensel alt grupların karıştırılmış serbest çarpımı olduğu ispatlandı. Dahası verilen bir endomorfizminin bir tame otomorfizm olup olmadığını inceleyen bir algoritma yazıldı.

Bu tezde iki bilinmeyene bağlı diferansiyel polinom halkası üzerinde yapılan bu çalışmalar n bilinmeyene bağlı diferansiyel polinom halkasına genelleştirilebilir. Ayrıca bu tezdeki çalışmaların ve bilinen polinom halkalarının ışığında diferansiyel polinom halkalarının otomorfizm grupları sınıflandırılabilir.

KAYNAKLAR

ASCHENBRENNER, M., DRIES, L.V.D. ve HOEVEN, J.V.D., 2015. Asymtotic Differential Algebra and Model Theory of Transseries. Princeton University, New Jersey, 880.

BOURBAKI, N., 1971. Algebra 1: Chapters 1-3 (Elements Of Mathematics). Hermann, Paris, 710.

CRESPO, T. ve HAJTO, Z., 2006. Introduction to Differential Galois Theory. Cracow University of Technology, Spanish, 90.

DRENSK, V. ve YU, J.T., 2008. Automorphisms of Polynomial Algebras and Dirichlet Series. Journal of Algebras, 321(2009): 292-302.

DUMMIT, D.S. ve FOOTE, R.M., 2004. Abstract Algebra. Printed in the United States of America, America, 932.

JUNG, H. W. (1942). Über ganze birationale Transformationen der Ebene. Journal für die reine und angewandte Mathematik , 184, 161-174.

KAPLANSKY, I., 1957. An Introduction to Differential Algebra. Rue De La Sorbonne, Paris, 63.

KOLCHIN, E.R., 1973. Differential Algebra and Algebraic Groups. Department of Mathematics Columbia University, New York, 446.

KULK, W. V. (1953). On polynomial rings in two variables. Nieuw Archief voor Wiskunde , 3 (1), 33-41.

LANG, S., 2004. Algebra. Springer, New Haven, 866.

MAKAR-LİMANOV, L., TURUSBEKOVA, U. ve UMIRBAEV, U., Automorphisms and Derivations of Free Poisson Algebras in the Two Variables. Math.RA,

MANSFIELD, E., 1991. Differential Gröbner Basis. University of Sydney, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ph.D Thesis, Sydney, 111.

MORRISON, S., 2002. Differential Polynomial Algebra in Characteristic Zero. Notes Prepared for the Kolchin Seminar in Differential Algebra, 14 September, New York, s.6-10.

NAGATA, M., 1959. On Automorphism Group of $k[x,y]$.Department of Mathematics Kyoto University, Tokyo, 53.

OVCHINNIKOV, A., Differential Algebra. Lecture Notes (http://qcpages.qc.cuny.edu/”aovchinnikov/)

RITT, J.F, 1948. Differential Algebra. American Mathematical Society Providence, New York, 184.

VAN DEN ESSEN, A., 2000. Polynomial Automorphisms and the Jacobian Conjecture. Department of Mathematics University of Nijmegen, Berlin, 329.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Mukaddes BALÇİK
Uyruğu : T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi : Hilvan-Şanlıurfa, 20.09.1992
Telefon : 05432430399
e-mail : matematikci.91@hotmail.com

EĞİTİM

Derece	Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	: Şanlıurfa Kız Lisesi, Merkez, Şanlıurfa	2009
Üniversite	: Gaziantep Üniversitesi, Şahinbey, Gaziantep	2013