

**T.C.**  
**GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**AYRIK STURM-LIOUVILLE DENKLEMLERİNİN**  
**CRUM TİPİ DÖNÜŞÜMLERİ**

**MATEMATİK**  
**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**MEHMET EMİN DEMİR**  
**OCAK 2019**

**OCAK 2019**

**Yüksek Lisans - Matematik**

**MEHMET EMİN DEMİR**

**Ayrık Sturm-Liouville Denklemlerinin Crum Tipi  
Dönüşümleri**

**Gaziantep Üniversitesi**

**Matematik**

**Yüksek Lisans Tezi**

**Danışman**

**Doç. Dr. Abdullah KABLAN**

**Mehmet Emin DEMİR**

**Ocak 2019**



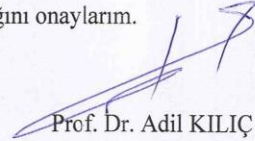
© 2019 [Mehmet Emin DEMİR]

T.C.  
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Tezin Adı : Ayrık Sturm-Liouville Denklemlerinin Crum Tipi  
Dönüşümleri  
Öğrencinin, Adı Soyadı : Mehmet Emin DEMİR  
Tez Savunma Tarihi : 24.01.2019  
Fen Bilimleri Enstitüsü onayı


Prof. Dr. Ahmet Necmeddin YAZICI  
FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığımı onaylarım.

  
Prof. Dr. Adil KILIÇ

Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımca okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

  
Doç. Dr. Abdullah KABLAN

Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

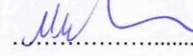
Jüri Üyeleri:

İmzası

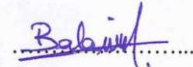
Doç. Dr. Abdullah KABLAN



Dr. Öğr. Üyesi Mine MENEKŞE YILMAZ



Dr. Öğr. Üyesi Bayram BALA



**İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek ilgili tezde yer aldığını beyan ederim.**

**Mehmet Emin DEMİR**

## **ABSTRACT**

### **CRUM TRANSFORMATIONS OF DISCRETE STURM-LIOUVILLE EQUATIONS**

**DEMIR, MEHMET EMIN**

**M.Sc. in Mathematics Department**

**Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Abdullah KABLAN**

**January 2019**

**43 pages**

We consider a general weighted second-order difference equation. Two transformations are studied which transform the given equation into another weighted second order difference equation of the same type, these are based on the Crum transformation. We also show how Dirichlet and non-Dirichlet boundary conditions transform as well as how the spectra and norming constants are affected.

**Key Words:** Difference equations, Transformations of difference equations, Sturm-Liouville boundary value problems

## ÖZET

### AYRIK STURM-LIOUVILLE DENKLEMLERİNİN CRUM TİPİ DÖNÜŞÜMLERİ

DEMİR, MEHMET EMİN

Yüksek Lisans Tezi, Matematik

Tez Yöneticisi: Doç. Dr. Abdullah KABLAN

Ocak 2019

43 sayfa

Bu çalışmada genel ağırlıklı ikinci mertebeden bir fark denklemini inceleyeceğiz. Verilen denklemi bir diğer aynı türdeki genel ağırlıklı ikinci mertebeden denkleme dönüştüren iki dönüşümü çalışacağız. Hâlihazırda bu dönüşümler Crum dönüşümüne dayandırılmıştır. Normalleştirici katsayılar ve spektrumların nasıl etkilendiğinin yanı sıra Dirichlet ve non-Dirichlet sınır şartlarının nasıl dönüştüğünü de göstereceğiz.

**Anahtar Kelimeler:** Fark denklemleri, Fark denklemlerinin dönüşümleri, Sturm-Liouville sınır değer problemleri



*Sevdiklerime...*

## TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın her aőamasında desteğiyle, deneyimiyle, bilgi birikimiyle ve emeğiyle yanımda olan, zorlandığım zamanlarda motive ve teővik ederek yardımcı olup büyüklüğünü gösteren değerli hocam, güzel insan Doç. Dr. Abdullah KABLAN'a kalbi duygularıyla teşekkür ederim.

Kardeőim S. Harun DEMİR'e ve onun nezdinde diğer aile fertlerime de verdikleri destekten dolayı müteőekkirim.

## İÇİNDEKİLER

	Sayfa
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>v</b>
<b>ÖZET</b> .....	<b>vi</b>
<b>TEŞEKKÜR</b> .....	<b>viii</b>
<b>İÇİNDEKİLER</b> .....	<b>ix</b>
<b>SEMBOLLER LİSTESİ</b> .....	<b>x</b>
<b>BÖLÜM 1 : GİRİŞ</b> .....	<b>1</b>
<b>BÖLÜM 2 : STURM-LIOUVILLE PROBLEMİ VE FARK DENKLEMLERİ.</b> 6	
2.1. Sturm-Liouville Problemi.....	13
2.2. Fark Denklemleri.....	14
2.3. Bazı Sturm-Liouville Denklemlerinin Fark Formu.....	16
<b>BÖLÜM 3 : DÖNÜŞÜMLER 1</b> .....	<b>17</b>
3.1. Denklemin Dönüşümü.....	17
3.2. Sınır Şartlarının Dönüşümü.....	19
3.3. Normalleştirici Katsayıların Dönüşümü.....	20
<b>BÖLÜM 4 : DÖNÜŞÜMLER 2</b> .....	<b>25</b>
4.1. Denklemin Dönüşümü.....	25
4.2. Sınır Şartlarının Dönüşümü.....	27
4.3. Normalleştirici Katsayıların Dönüşümü.....	32
<b>BÖLÜM 5 : SONUÇ</b> .....	<b>36</b>
<b>KAYNAKLAR</b> .....	<b>42</b>

## SEMBOLLER LİSTESİ

$l$	Fark denklemi operatörü
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}(a)$	$a \in \mathbb{N}$ için $\{a, a+1, \dots\}$ kümesi
$\mathbb{N}(a, b-1)$	$a, b \in \mathbb{N}$ için $\{a, a+1, \dots, b-1\}$ kümesi
$\bar{\mathbb{N}}$	$\mathbb{N}$ , $\mathbb{N}(a)$ , $\mathbb{N}(a, b-1)$ kümelerinden herhangi biri
$\lambda$	Özdeğer
$c_n$	Ağırlık fonksiyonu
$b_n$	Potansiyel fonksiyon

## BÖLÜM 1

### GİRİŞ

Bu tezin amacı Binding ve arkadaşlarının özellikle [1] ve [2] 'deki (ayrıktan ziyade) sürekli Sturm-Liouville sınır değer problemlerinin dönüşümleri ve faktörizasyonları (çarpanlarına ayrılması) üzerinedir. Burada fark denklemlerinin dönüşümleri için [3-5] 'teki yöntem kullanılacaktır.

Bu tezde aşağıdaki forma sahip ağırlıklı ikinci mertebeden fark denklemi ele alınacaktır:

$$ly := -c_n y_{n+1} + b_n y_n - c_{n-1} y_{n-1} = c_n \lambda y_n \quad (1.1)$$

burada  $c_n > 0$  bir ağırlık fonksiyonunu,  $b_n$  ise bir potansiyel fonksiyonu temsil etmektedir.

Öncelikle burada (1.1) ile ilgili  $l$  formal operatörünün iki faktörizasyonu verilecektir. Her ne kadar bu operatörün [2] ve [6] 'da görüleceği üzere birçok faktörizasyonu olsa da ileriki bölümlerde Teorem 3.1 ve Teorem 4.1 'de verilecek olan faktörizasyonlar bizim için ayrı bir öneme sahiptir. Çünkü bu faktörizasyonlar sürekli Sturm-Liouville durumundaki faktörizasyonlara benzemektedir. Diğer taraftan, eğer operatör, Teorem 3.1 'deki gibi  $SQ$  şeklinde veya Teorem 4.1 'deki gibi  $PR$  şeklinde faktörize edilirse, o zaman bizim çalışmak istediğimiz Darboux-Crum tipli dönüşüm, sırasıyla  $Q$  veya  $R$  dönüşümleri ile verilir. Bu dönüşümün uygulanmasıyla, orijinal denklemlerle tamamen aynı olan dönüştürülmüş denklemler elde edilmelidir. Bunu yapmak için, ele alınan orijinal fark denkleminin (1.1) formunda olması gerekir. Özel olarak;  $c_n$  ağırlığı, diagonal dışı elemanlara bağlılığı da belirler. Burada belirtelim ki, daha genel denklem olan

$$c_n y_{n+1} - b_n y_n + c_{n-1} y_{n-1} = -a_n \lambda y_n \quad (1.2)$$

denklemini  $SQ$  olarak faktörize edilebilir; ancak, bu faktörizasyonun tersi olan  $QS$ , (1.2) ile aynı tipte dönüştürülmüş denklemi vermek zorunda değildir. Orijinal denklemle tamamen aynı formda dönüştürülmüş denklemi elde etmenin önemi ise, en sonunda bizim (bu tezin neticesi olarak) bu dönüşümleri (1.1) 'li sınır değer problemleriyle değişik sınır şartları arasında bir hiyerarşi kurmak için kullanacak olmamızdır. Diferansiyel denklem durumu için [4] 'e bakılabilir. Bu tezde öncelikle non-Dirichlet sınır şartlarını Dirichlet sınır şartlarına dönüştürüp daha sonra tam tersini yapacağız. Yine bu tezin sonuçlarından biri de non-Dirichlet sınır şartlarının,  $\lambda$  parametresini afin formda içeren sınır şartlarına dönüştürülmesi ve bunun tersinin yapılmasıdır. Burada her zaman, dönüştürülmüş sınır değer probleminin özdeğeri ile orijinal sınır değer probleminin özdeğerleri arasındaki bağlantının nasıl olduğunu bileceğiz.

Teorem 3.1 ve Teorem 4.1 'de verilen dönüşümler izospektral, yani aynı spektruma sahiptir. Özel olarak, hiyerarşi içinde özel bir noktada hangi dönüşümün uygulandığına bağlı olarak, biz ya en küçük özdeğeri kaybederiz ya da en küçük özdeğerin de altında bir özdeğer kazanırız. Burada belirtilmelidir ki ikinci bölüm ve üçüncü bölümdeki dönüşümler art arda uygulanırsa tam olarak başlangıçtaki sınır değer probleminin spektrumu elde edilir. Gerçekten belirlenen sınır değer probleminin en küçük özdeğerinden daha küçük bir  $\lambda$  ile birlikte (1.1) 'in  $z_n$  çözümünün uygun bir seçimi için, Sonuç 4.3 'ten, Teorem 3.1 'de verilen dönüşümün uygulanması ve hemen ardından Teorem 4.1 'de verilen dönüşümün uygulanması ile elde edeceğimiz sınır değer problemi, tam olarak orijinal sınır değer problemi ile aynı fark denklemine, aynı sınır şartına ve dolayısıyla aynı spektruma sahiptir.

Teschl'ın [6] 'daki Jacobi operatörlerinin spektral ve ters spektral teorisi üzerine olan çalışmasında ikinci mertebeden fark denkleminin faktörizasyonu yapılmış ve bu çarpanların birbirinin eşleniği olduğu gösterilmiştir. Fakat bu çalışmada bundan daha farklı bir sistematik gösterilmiştir.

Fark denklemleri, fark operatörleri ve bunların çözümlerinin varlığı ve inşası [7] ve [8] 'de incelenmiştir. Fark denklemleri birçok alanda ortaya çıksa da, özellikle yineleme hesaplarında kullanılmaktadır. Fark denklemlerinin, devre analizinde, dinamik sistemlerde, istatistikte birçok farklı alanda kullanımı vardır.

Daha özel olarak, Atkinson'un [9] çalışmasından (1.1) fark denklemlerinin aşağıda bahsedeceğimiz üç fiziksel uygulamasını biliyoruz. Şimdi bunlara kısaca değinelim.

Bunlardan birincisi titreşen yay problemi ile ilgilidir. Buradaki yay ağırlıksızdır ve  $x_0, \dots, x_{m-1}$  noktalarında ağırlığı  $c_0, \dots, c_{m-1}$  olan  $m$  tane  $p_0, \dots, p_{m-1}$  parçacıklarını taşıyan bir yaydır. Yay birim miktarda gerdiriliyor. Bu durumda eğer  $s_n$ ,  $p$  parçacığının  $t$  zamanındaki yer değişimi ise, o zaman yayın gerilmesinden kaynaklanan geri çağırıcı kuvvetler  $c_{n-1}(s_n - s_{n-1})$  ve  $-c_n(s_{n+1} - s_n)$ 'dir. Böylece parçacıklar için, hareketin ikinci mertebeden denklemini bulabiliriz. Bu denklemin çözümünü  $s_n = y_n \cos(\omega t)$  biçiminde elde ederiz. Burada  $y_n$  ifadesi  $p_n$  parçacığının salınımının yüksekliğidir. Bu denklemin  $y_n$  ifadesine göre çözümü, (1.1) formundaki fark denkleminin çözümüne indirgenebilir. Değişik sınır şartlarının probleme empoze edilmesi ise, yayın bir veya iki ucunun sabitlenmesi veya herhangi bir parçacığın sabitlenmesi demektir. Daha fazla detay için [9]'a bakılabilir.

İkinci olarak, elektriksel şebeke teorisindeki birbirine denk senaryoların varlığıdır. Bu durumda  $c_n$  indüktans,  $1/c_n$  kapasitans ve  $s_n$  de art arda gelen ağlardaki dönen akımdır.

Üç terimli (1.1) fark denkleminin üçüncü uygulaması da stokastik süreçlerle ilgili Markov zincirleridir. Markov Zinciri, Markov özelliğini haiz bir stokastik (değişken) süreçtir. Bu özelliği haiz olmak, mevcuttaki durum verildiğinde, gelecekteki durumların geçmişteki durumlardan bağımsız olması anlamına gelir.

Yukarıdaki üç uygulama, ağırlık ile diyagonal dışı elemanlar arasındaki bağlantıdan dolayı bir miktar kısıtlanmış olsa bile yine de ilgi çekicidir. (1.1) olarak verilen üç terimli fark denkleminin fizik uygulamaları elbette bunlarla sınırlı değildir. Burada değinilen uygulamalar kısıtlamalardan soyutlanmış değildir.

Üç terimli fark denklemi ile ortogonal polinomlar arasında açık bir bağlantının olduğu [10]'da gösterilmiştir. Her ne kadar bu çalışmanın amacı olmasa da, (1.1) ile verilen üç terimli yineleme bağıntısını sağlayan ortogonal polinomların hangileri olduğu ve bu polinomların ne tür özelliklere sahip olduğu ayrıca çalışılabilir.

[9] 'da Atkinson normalleştirici katsayılarla üç terimli yineleme bağıntısını sağlayan ortogonal polinomlar arasındaki bağıntı verilmiştir. Dolayısıyla burada Teorem 3.1 ve Teorem 4.1 'de verilen dönüşümler altında normalleştirici katsayıların nasıl dönüştüğünü göstermek gerekir. Beklendiği üzere, sürekli durumdan dolayı biliyoruz ki  $n$ -inci yeni normalleştirici katsayı, orijinal normalleştirici  $n$ -inci katsayının  $\lambda_n - \lambda_0$  ile çarpımıdır. Veya hangi dönüşümün kullanıldığına bağlı olarak yine orijinal  $n$ -inci normalleştirici katsayının  $1 / (\lambda_n - \lambda_0)$  ile çarpımıdır.

Bu tez çalışması aşağıdaki şekilde düzenlenmiştir:

Birinci bölümde tezin yazılış amacı ile ilgili bilgiler verilmiş ve diğer disiplinlerle olan ilişkisinden kısmi olarak bahsedilecektir.

İkinci bölümde tez boyunca ihtiyaç duyacağımız tanım, teorem ve kavramlar verilecektir.

Üçüncü bölümde ise, uç noktalarda non-Dirichlet sınır şartların sahip (1.1) fark denklemini, yine uç noktalarda Dirichlet şartlarına sahip ve aynı formda olan fark denklemine dönüştüreceğiz. Böylelikle yeni sınır değer probleminin spektrumunun, orijinal sınır değerinin spektrumuyla (en küçük özdeğer hariç) aynı olduğunu ispatlamış olacağız.

Dördüncü bölümde yine (1.1) formundaki fakat bu sefer uç noktalarda Dirichlet sınır şartlarına sahip sınır değer problemini ele alacağız. Ve kabul edeceğiz ki  $\lambda_0$  verilen sınır değer probleminin en küçük özdeğerinden daha küçük olmak üzere  $\lambda = \lambda_0$  için (1.1) , kesin pozitif  $z_n$  çözümüne sahiptir. Daha sonra, verilen bu sınır değer problemini yine kendisiyle aynı formda olan fakat uç noktalarda non-Dirichlet sınır şartlarına sahip sınır değer problemine dönüştüreceğiz. Elde edilen yeni sınır değer probleminin spektrumunun bir fazla özdeğere (ki buna  $\lambda_0$  diyeceğiz) sahip olduğunu göstereceğiz.

Önce ikinci bölümde verilen dönüşüm ve hemen ardından üçüncü bölümde verilen dönüşüm, genel olarak ağırlıklı ikinci mertebeden (1.1) formundaki fark denkleminin izospektral dönüşümleridir.

Sonuç b6l6m6nde ise ikinci ve 66nc6 b6l6mde yapılan işlemelerin tersinin de m6mk6n olduğu g6sterilmiştir. Tersine d6ř6nce ile, Crum d6n6ř6m6ne dayandırılan bu d6n6ř6mlerle normalleştirici katsayıların ve sınır şartlarının elde edililişini vereceğiz.



## BÖLÜM 2

### STURM-LIOUVILLE PROBLEMİ VE FARK DENKLEMLERİ

Bu bölümde tez için gerekli olan tanım, teorem ve kavramlar verilecektir. Özellikle Sturm-Liouville Problemi, Fark Denklemleri ve bazı Sturm-Liouville denklemlerinin fark formu incelenecektir.

İkinci mertebeden özeşlenik lineer diferansiyel denklem,

$$[p(x)y']' + q(x)y = h(x)$$

biçimindedir. Farz edelim ki,  $p$ ,  $q$  ve  $h$  fonksiyonları verilen  $I$  aralığında sürekli ve  $p(x) > 0$  olsun. Bununla birlikte

$$\bar{D} := \{y : y \text{ ve } py', I \text{ aralığında sürekli diferansiyellenebilir}\}$$

biçiminde tanımlansın.

**Tanım 2.1:**  $\bar{D}$  üzerinde tanımlı  $L$  lineer operatörü,  $x \in I$  için

$$Ly(x) = (p(x)y'(x))' + q(x)y(x)$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda yukarıda verilen özeşlenik denklem kısaca

$$Ly = h(x)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$h(x) \equiv 0$$

denkliği var ise,

$$Ly = 0$$

denkleminde *homogen özdeşlik diferansiyel denklem*, aksi durumda  $Ly = h(x)$  denkleminde *homogen olmayan özdeşlik diferansiyel denklem* denir.

**Tanım 2.2:** Eğer  $y \in \bar{D}$  ve  $x \in I$  için  $Ly(x) = h(x)$  ise, o zaman  $y$ 'ye  $I$  aralığında  $Ly = h(x)$  denkleminin *çözümüdür* denir.

**Teorem 2.3:** (*Varlık ve Teklik Teoremi*) Kabul edelim ki  $p$ ,  $q$  ve  $h$  fonksiyonları  $I$  aralığında sürekli ve ayrıca  $p(x) > 0$  olsun. Eğer  $a \in I$  ise,  $y_0$  ve  $y_1$  verilen sabitler olmak üzere,

$$Ly = h(x)$$

$$y(a) = y_0, \quad y'(a) = y_1$$

olarak verilen başlangıç değer problemi bir tek çözüme sahiptir. Ve bu çözüm tüm  $I$  aralığında vardır.

**İspat:** Öncelikle  $Ly = h(x)$  denklemini, ona eşdeğer olan vektör denklemini şeklinde yazalım. Şimdi  $Ly = h(x)$  denkleminin bir çözümü  $y$  ve ayrıca

$$z(x) := p(x)y'(x)$$

olsun. O halde

$$y'(x) = \frac{1}{p(x)} z(x)$$

olarak yazılabilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} z'(x) &= (p(x)y'(x))' \\ &= -q(x)y(x) + h(x) \end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır. Eğer,

$$u(x) := \begin{bmatrix} y(x) \\ z(x) \end{bmatrix}$$

biçiminde tanımlanıyorsa,  $u(x)$  vektörü

$$u' = A(x)u + b(x)$$

vektör denkleminin çözümü olur. Burada

$$A(x) := \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{p(x)} \\ -q(x) & 0 \end{bmatrix}$$

$$b(x) := \begin{bmatrix} 0 \\ h(x) \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bununla birlikte  $A(x)$  matrisi ve  $b(x)$  vektörü  $I$  aralığında süreklidir. Tersine düşünersek,

$$u' = A(x)u + b(x)$$

vektör denkleminin çözümü

$$u(x) := \begin{bmatrix} y(x) \\ z(x) \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanan  $u(x)$  vektörü ise şu durumda  $y$  de  $Ly = h(x)$  denkleminin (skaler denklem) çözümüdür. Ve

$$z(x) = p(x)y'(x)$$

eşitliği vardır. Buradan

$$u' = A(x)u + b(x)$$

$$u(a) = \begin{bmatrix} y_0 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

başlangıç değer problemi,  $I$  aralığının bütününde bir tek  $u$  çözümüne sahiptir. Bu da  $I$  aralığının tamamında  $Ly = h(x)$  denkleminin,

$$y(a) = y_0$$

$$p(a)y'(a) = z_1$$

eşitliklerini gerçekleyen bir tek çözümünün olduğunu gösterir. Dolayısıyla  $I$  aralığında

$$Ly = (p(x)y')' + q(x)y = h(x)$$

$$y(a) = y_0, \quad y'(a) = y_1$$

olarak verilen başlangıç değer probleminin de bir tek çözümü vardır.

Burada

$$y(a) = y_0, \quad y'(a) = y_1$$

şeklinde verilen şartlara *başlangıç şartları* denir.

**Tanım 2.4:** Kabul edelim ki  $y$  ve  $z$  fonksiyonları, verilen  $I$  aralığı üzerinde diferansiyellenebilir olsun.  $x \in I$  için,

$$W[y(x), z(x)] = \begin{vmatrix} y(x) & z(x) \\ y'(x) & z'(x) \end{vmatrix} := y(x)z'(x) - y'(x)z(x)$$

ifadesine bu fonksiyonların *Wronskian'ı* denir.

**Teorem 2.5:** (*Lagrange Özdeşliği*) Varsayalım ki  $y, z \in \bar{D}$  olsun.  $x \in I$  için

$$z(x)Ly(x) - y(x)Lz(x) = \{z(x); y(x)\}'$$

eşitliği vardır. Ayrıca burada

$$\{z(x); y(x)\} := p(x)w[z(x), y(x)], \quad x \in I$$

şeklinde tanımlıdır.  $W[z(x), y(x)]$  ifadesi de  $y$  ve  $z$  fonksiyonlarının Wronskian'ıdır.

**İspat:**  $y, z \in \bar{D}$  olsun.  $x \in I$  için,

$$\begin{aligned}\{z(x); y(x)\}' &= \{z(x)p(x)y'(x) - y(x)p(x)z'(x)\}' \\ &= z(x)(p(x)y'(x))' + z'(x)p(x)y'(x) \\ &\quad - y(x)(p(x)z'(x))' - y'(x)p(x)z'(x)\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik düzenlenirse,

$$\begin{aligned}&= z(x)\left\{(p(x)y'(x))' + q(x)y(x)\right\} \\ &\quad - y(x)\left\{(p(x)z'(x))' + q(x)z(x)\right\} \\ &= z(x)Ly(x) - y(x)Lz(x)\end{aligned}$$

bulunur ki bu da ispatın tamamlanması demektir.

**Sonuç 2.6:** (*Abel Formülü*)  $I$  aralığı üzerinde

$$Ly = 0$$

denkleminin çözümleri  $y$  ve  $z$  olsun.  $\forall x \in I$  için,  $C$  bir sabit olmak üzere

$$W[y(x), z(x)] = \frac{C}{p(x)}$$

eşitliği vardır.

**İspat:** Kabul edelim ki  $I$  aralığı üzerinde

$$Ly = 0$$

denkleminin çözümleri  $y$  ve  $z$  olsun. Lagrange özdeşliğini kullanarak,  $\forall x \in I$  için

$$y(x)Lz(x) - z(x)Ly(x) = \{y(x); z(x)\}'$$

$$x(t)Ly(t) - y(t)Lx(t) = \{x(t); y(t)\}'$$

eşitlikleri yazılabilir. Verilen  $I$  aralığında  $y$  ve  $z$  birer çözüm olduklarından,  $\forall x \in I$  için,

$$\{y(x); z(x)\}' = 0$$

dir. Bu da  $C$  bir sabit olmak üzere şu anlama gelir :

$$\{y(x); z(x)\} = C$$

Ve böylece,  $\forall x \in I$  olmak üzere,

$$W[z(x), y(x)] = \frac{C}{p(x)}$$

sonucuna ulaşılır.

**Sonuç 2.7:**  $y_1$  ve  $y_2$  ifadeleri

$$Ly = 0$$

denkleminin çözümleri ise ,

(i)  $y_1$  ve  $y_2$  ,  $\forall x \in I$  için lineer bağımsız ancak ve ancak  $W[y_1(x), y_2(x)] \neq 0$  ,

(ii)  $y_1$  ve  $y_2$  ,  $\forall x \in I$  için lineer bağımlı ancak ve ancak  $W[y_1(x), y_2(x)] = 0$  dır.

Burada bir konuya değinelim.  $y_1$  ,

$$Ly_1 = 0, y_1(a) = 1, y_1'(a) = 0$$

probleminin çözümü olsun. Aynı şekilde  $y_2$  de

$$Ly_2 = 0, y_2(a) = 0, y_2'(a) = 1$$

probleminin çözümü olsun. Bu iki çözümün de Wronskian'ı  $a$  noktasında sıfıra eşit olmadığından, (yukarıdaki sonuca göre) verilen bu çözümler  $I$  aralığında lineer bağımsızdır.

**Teorem 2.8:**  $y_1$  ve  $y_2$ , verilen  $I$  aralığında

$$Ly = 0$$

denkleminin lineer bağımsız çözümleri olsun. Buradan hareketle,

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

olarak ifade edilen  $y$ ,

$$Ly = 0$$

denkleminin genel çözümüdür.

**İspat:** Kabul edelim ki  $y_1$  ve  $y_2$ , verilen  $I$  aralığında

$$Ly = 0$$

denkleminin lineer bağımsız çözümleri ve bununla birlikte  $y$  de

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

formunda olsun. Şu halde

$$Ly = L[c_1 y_1 + c_2 y_2] = c_1 Ly_1 + c_2 Ly_2 = 0$$

olur. Bu yüzden

$$Ly = 0$$

denkleminin bir çözümü  $y$  'dir. Tersine, varsayalım ki  $I$  aralığında

$$Ly = 0$$

denkleminin bir çözümü  $y$  olsun.  $x_0 \in I$  olmak üzere,

$$y_0 := y(x_0)$$

$$y_1 := y'(x_0)$$

$$z(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

olsun.  $c_1$  ve  $c_2$  sabitlerini öyle seçelim ki ,

$$z(x_0) = y_0$$

$$z'(x_0) = y_1$$

olacağını gösterelim. Burada son iki denklem,

$$c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = y_0$$

$$c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = y_1$$

biçimindeki denklemlere denktir. Bu sistemin katsayılar matrisinin determinanı, yukarıda verilen sonuç ışığında,

$$W[y_1, y_2](x_0) \neq 0$$

olur. Şimdi, bu sistemin tek çözümü  $c_1$  ve  $c_2$  olsun. Öyleyse

$$z = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

olarak verilen  $z$  ;

$$Ly = 0$$

denkleminin,  $x_0$  noktasında,  $y$  'nin sağladığı gibi, aynı başlangıç koşullarını sağlayan bir çözümdür. Fakat başlangıç probleminin çözümünün tekliliğinden  $y$  ve  $z$  aynı çözümdür. Buradan,

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

sonucu elde edilmiş olur.

Şimdi bu temel giriş kısmından sonra aşağıdaki alt başlıklara geçelim.

## 2.1. Sturm-Liouville Problemi

Sturm-Liouville diferansiyel denklemi,

$$(p(x)y')' + (\lambda r(x) + q(x))y = 0 \quad (2.1)$$

biçimindedir. Burada  $p$  ve  $q$  katsayı fonksiyonları, verilen bir  $I$  aralığında süreklidir ve  $p(x) > 0$  'dır.  $r$  katsayı fonksiyonu ise  $I$  aralığında reel değerli sürekli bir fonksiyon ve  $r(x) \geq 0$  'dır; fakat  $I$  aralığında sıfıra denk değildir. (2.1) denklemi

$$Ly = -\lambda r(x)y$$

formunda yazılabilir.

**Tanım 2.9:**  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  ve  $\delta$  değerleri,  $\alpha^2 + \beta^2 > 0$  ile  $\gamma^2 + \delta^2 > 0$  şartlarını sağlayan sabitler olmak üzere,

$$Ly = -\lambda r(x)y \quad (2.2)$$

$$\alpha y(a) - \beta y'(a) = 0 \quad (2.3)$$

$$\gamma y(b) + \delta y'(b) = 0 \quad (2.4)$$

biçimindeki probleme *Sturm-Liouville Problemi* denir.

**Tanım 2.10:** Tanım 2.9 'da verilen Sturm-Liouville Problemi, bir  $\lambda = \lambda_0$  için  $y_0$  aşikar olmayan çözümüne sahip ise,  $\lambda_0$  değerine Sturm-Liouville Probleminin *özdeğeri* ve  $y_0$  ifadesine de bu özdeğere karşılık gelen *özfonksiyon* denir. Ayrıca  $(\lambda_0, y_0)$  çiftine de Sturm-Liouville probleminin *özçifti* denir.

$(\lambda_0, y_0)$ , Tanım 2.9 'daki Sturm-Liouville probleminin özçifti ise ve ayrıca  $k$  sıfır olmayan bir sabit ise o zaman  $(\lambda_0, ky_0)$  çifti de bu problemin özçiftidir.

$\lambda_0$ , Tanım 2.9 'daki Sturm-Liouville probleminin özdeğeri olsun. Bu özdeğere karşılık gelen yalnızca bir tane lineer bağımsız özfonksiyon var ise  $\lambda_0$  özdeğerine *basit özdeğerdir* denir.

## 2.2. Fark Denklemleri

Bu alt başlıkta fark denklemleri ile ilgili bazı tanımlar verilmiştir. Kullanılacak olan bazı notasyonlar ise şu şekildedir:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\},$$

$$a \in \mathbb{N} \text{ için } \mathbb{N}(a) = \{a, a+1, \dots\} ,$$

$$a, b \in \mathbb{N} \text{ için } \mathbb{N}(a, b-1) = \{a, a+1, \dots, b-1\} .$$

Burada  $a < b-1 < \infty$  dur. Bu üç kümeden herhangi biri  $\bar{\mathbb{N}}$  ile gösterilecektir.

$n_1, n_2 \in \bar{\mathbb{N}}$  ve  $n_1 > n_2$  için

$$\sum_{k=n_1}^{n_2} f(k) = 0 \quad \text{ve} \quad \prod_{k=n_1}^{n_2} f(k) = 1$$

olmak üzere  $f(n)$  ,  $\bar{\mathbb{N}}$  kümesi üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun.

**Tanım 2.11:**  $n \in \bar{\mathbb{N}}$  ve  $f(n)$  ,  $\bar{\mathbb{N}}$  kümesi üzerinde tanımlı bir fonksiyon olmak üzere

$$Ef(n) = f(n+1)$$

ise  $E$  ye *ileri operatör* denir. Dolayısıyla  $m$  pozitif tamsayısı için şu eşitlik yazılabilir:

$$E^m f(n) = E[E^{m-1} f(n)] = f(n+m) .$$

**Tanım 2.12:**  $n \in \bar{\mathbb{N}}$  olmak üzere  $If(n) = f(n)$  eşitliği sağlanıyorsa  $I$  ya *birim operatör* denir.

**Tanım 2.13:**  $n \in \bar{\mathbb{N}}$  olmak üzere

$$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$$

ifadesine *ileri fark*,

$$\nabla f(n) = f(n) - f(n-1)$$

ifadesine de *geri fark operatörü* denir.

**Tanım 2.14:**  $n \in \bar{\mathbb{N}}$  bağımsız değişkenini ve  $y_n$  bilinmeyenini içeren

$$f[n, y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+m}] = 0 \quad (2.5)$$

fonksiyonel denkleminin *Fark Denklemi* denir. Burada  $f$  fonksiyonu  $n$  ve  $y_n$  'e bağlıdır. (2.5) denkleminin mertebesi, denkleminde bulunan  $n$  değerinin en yüksek değişimi ile en düşük değişiminin farkıdır. Örneğin;

$$y_{n+4} - 3y_{n+3} + 5y_{n+1} = 0$$

denkleminin üçüncü mertebeden bir denklemdir.

### 2.3. Bazı Sturm-Liouville Denklemlerinin Fark Formu

Bu altbaşlıkta bazı Sturm-Liouville denklemlerinin fark formundan bahsedeceğiz.

Homojen ve lineer sınır değer problemlerinin aşikâr olmayan çözümleri olabilir. Fark denkleminin katsayıları veya sınır koşulları bir parametreye bağlı ise, matematiksel fiziğin öncü problemlerinden birisi aşikâr olmayan çözümlerin varlığı için parametrenin değerini veya değerlerini belirlemektedir. Parametrelerin bu özel değerlerine *özdeğerler* ve özdeğerlere karşılık gelen aşikâr olmayan çözümlere ise *özfonksiyonlar* denir. Fark denkleminin oluşturduğu sınır değer problemi,

$$\Delta[p(n-1)\Delta y_{n-1}] + q(n)y_n + \lambda r(n)y_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}(1, N) \quad (2.6)$$

ve sınır koşulları

$$y_0 = \alpha y_1, \quad y_{N+1} = \beta y_N \quad (2.7)$$

biçimindedir. Burada  $\mathbb{N}(1, N) = \{1, \dots, N\}$  'dir. Bu probleme *Sturm-Liouville Probleminin Fark Formu* denir. (2.6) fark denkleminde,  $\lambda$  bir parametredir ve  $p$ ,  $q$  ve  $r$  fonksiyonları ise doğal sayı olmak kaydıyla sırasıyla  $\mathbb{N}(0, N)$ ,  $\mathbb{N}(1, N)$  ve  $\mathbb{N}(1, N)$  kümelerinde tanımlıdır.  $n \in \mathbb{N}(0, N)$  için  $p(n) > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}(1, N)$  için  $r(n) > 0$  dir. (2.7) sınır şartlarında  $\alpha$  ve  $\beta$  bilinen sabitlerdir.

## BÖLÜM 3

### DÖNÜŞÜMLER 1

#### 3.1. Denklemin Dönüşümü

(1.1) 'in farklı şekilde yazılmış formu olan aşağıdaki ikinci mertebe fark denklemini ele alalım.

$$c_n y_{n+1} - (b_n - \lambda_0 c_n) y_n + c_{n-1} y_{n-1} = -c_n (\lambda - \lambda_0) y_n \quad (3.1)$$

Burada  $n=0, \dots, m-1$  'dir.  $h$  ve  $H$  sabitler olmak üzere (1.1) 'in aşağıdaki sınır şartlarını sağlayan en küçük özdeğerini  $\lambda_0$  ile gösterelim [9].

$$h y_{-1} + y_0 = 0 \quad , \quad H y_{m-1} + y_m = 0 \quad (3.2)$$

$n=0, \dots, m-1$  olmak üzere aşağıdaki formal operatörün bir faktörizasyonunu bulmak istiyoruz:

$$l y_n := -y_{n+1} + \left( \frac{b_n}{c_n} - \lambda_0 \right) y_n - \frac{c_{n-1}}{c_n} y_{n-1} = (\lambda - \lambda_0) y_n \quad (3.3)$$

öyle ki burada  $l = SQ$  ve hem  $S$  hem  $Q$  birinci mertebeden formal fark operatörüdür. [11]

**Teorem 3.1:**  $u_n^0$  , (1.1) 'in  $\lambda = \lambda_0$  a karşılık gelen çözümü olsun. Şimdi aşağıdaki formal fark operatörlerini tanımlayalım:

$$\begin{aligned} S y_n &:= y_n - y_{n-1} \frac{u_{n-1}^0 c_{n-1}}{u_n^0 c_n} \\ Q y_n &:= y_{n+1} - y_n \frac{u_{n+1}^0}{u_n^0} \end{aligned} \quad (3.4)$$

burada  $S$  için  $n=0, \dots, m$  ve  $Q$  için  $n=-1, \dots, m-1$  'dir. O zaman  $l y_n = S Q y_n$  ,  $n=0, \dots, m-1$  yazılabilir ve bundan sonra dönüştürülmüş operatör olarak

adlandıracağımız  $\tilde{l}$  operatörü  $\tilde{l}\tilde{y}_n = QS\tilde{y}_n$  ,  $n = 0, \dots, m-1$  biçimindedir. Ki bu durumda dönüştürülmüş operatör şu şekilde olur:

$$\tilde{c}_n \tilde{y}_{n+1} - \tilde{b}_n \tilde{y}_n + \tilde{c}_{n-1} \tilde{y}_{n-1} = -\tilde{c}_n \lambda \tilde{y}_n \quad , \quad n = 0, \dots, m-2 \quad (3.5)$$

Burada;

$$\tilde{c}_n = \frac{u_n^0 c_n}{u_{n+1}^0} > 0 \quad , \quad n = -1, \dots, m-1 \quad (3.6)$$

$$\tilde{b}_n = \left[ \frac{u_n^0 c_n}{u_{n+1}^0 c_{n+1}} - \frac{c_{n-1} u_{n-1}^0}{c_n u_n^0} + \frac{b_n}{c_n} - \lambda_0 \right] \frac{u_n^0 c_n}{u_{n+1}^0} \quad , \quad n = 0, \dots, m-1 \quad (3.7)$$

şeklindedir.

**İspat:**  $S$  ve  $Q$  'nun tanımından aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$SQy_n = S \left( y_{n+1} - \frac{u_{n+1}^0}{u_n^0} y_n \right) = y_{n+1} - \frac{u_{n+1}^0 y_n}{u_n^0} - \left[ y_n - \frac{u_n^0}{u_{n-1}^0} y_{n-1} \right] \frac{u_{n-1}^0 c_{n-1}}{u_n^0 c_n} \quad (3.8)$$

(3.3) 'ten ve  $u_{n+1}^0$  'in yerine yazılmasından sonra ifade düzenlenirse;

$$\begin{aligned} SQy_n &= y_{n+1} - \frac{1}{u_n^0} \left[ -\lambda_0 u_n^0 - \frac{c_{n-1}}{c_n} u_{n-1}^0 + \frac{b_n}{c_n} u_n^0 \right] y_n - y_n \frac{u_{n-1}^0 c_{n-1}}{u_n^0 c_n} + y_{n-1} \frac{c_{n-1}}{c_n} \\ &= y_{n+1} - \left( \frac{b_n}{c_n} - \lambda_0 \right) y_n + \frac{c_{n-1}}{c_n} y_{n-1} \\ &= -(\lambda - \lambda_0) y_n \end{aligned} \quad (3.9)$$

eşitliği  $n = 0, \dots, m-1$  olmak üzere elde edilir. Böylece  $l = SQ$  dur. Şimdi  $Qy_n = \tilde{y}_n$  ,  $n = -1, \dots, m-1$  diyelim. Bu durumda;

$$QS\tilde{y}_n = QSQy_n = -Q(\lambda - \lambda_0)y_n = -(\lambda - \lambda_0)\tilde{y}_n \quad (3.10)$$

$n = 0, \dots, m-1$  eşitliğine ulaşılır. Bu da beklenen dönüştürülmüş denklemdir.

$\tilde{l}$  'yi bulmak için  $QS\tilde{y}_n$  ifadesini belirlememiz gerekir. Öncelikle,

$$S\tilde{y}_n = \tilde{y}_n - \tilde{y}_{n-1} \frac{u_{n-1}^0 c_{n-1}}{u_n^0 c_n}, \quad n = 0, \dots, m-1 \quad (3.11)$$

dir. Böylece  $n = 0, \dots, m-2$  için,

$$\begin{aligned} Q(S\tilde{y}_n) &= \tilde{y}_{n+1} - \tilde{y}_n \frac{u_n^0 c_n}{u_{n+1}^0 c_{n+1}} - \left( \tilde{y}_n - \tilde{y}_{n-1} \frac{u_{n-1}^0 c_{n-1}}{u_n^0 c_n} \right) \frac{u_{n+1}^0}{u_n^0} \\ &= \tilde{y}_{n+1} - \tilde{y}_n \left[ \frac{u_n^0 c_n}{u_{n+1}^0 c_{n+1}} + \frac{u_{n+1}^0}{u_n^0} \right] + \tilde{y}_{n-1} \left[ \frac{u_{n-1}^0 c_{n-1} u_{n+1}^0}{u_n^0 c_n u_n^0} \right] \end{aligned} \quad (3.12)$$

olur. Bu ifadenin her iki tarafı  $u_n^0 c_n / u_{n+1}^0$  ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} \frac{u_n^0 c_n}{u_{n+1}^0} \tilde{y}_{n+1} - \left[ \frac{u_n^0 c_n}{u_{n+1}^0 c_{n+1}} - \frac{c_{n-1} u_{n-1}^0}{c_n u_n^0} + \frac{b_n}{c_n} - \lambda_0 \right] \frac{u_n^0 c_n}{u_{n+1}^0} \tilde{y}_n + \frac{u_{n-1}^0 c_{n-1}}{u_n^0} \tilde{y}_{n-1} \\ = -(\lambda - \lambda_0) \tilde{y}_n \frac{u_n^0 c_n}{u_{n+1}^0} \end{aligned} \quad (3.13)$$

bulunur. Böylece (3.5) 'i elde ederiz.

### 3.2. Sınır Şartlarının Dönüşümü

Bu bölümde (3.2) ile verilen non-Dirichlet sınır şartlarının  $Q$  dönüşümü altındaki formunu inceleyeceğiz. (3.2) 'deki sınır şartlarından hareketle  $y$  ;  $n = -1, \dots, m$  için tanımlıdır.

**Teorem 3.2:**  $u^0$  , (1.1) ve (3.2) 'nin en küçük özdeğeri olan  $\lambda_0$  a karşılık gelen özfonksiyonu olmak üzere  $\tilde{y}_n = y_{n+1} - y_n u_{n+1}^0 / u_n^0$  ,  $n = -1, \dots, m-1$  biçiminde tanımlanan  $y \mapsto \tilde{y}$  dönüşümü,  $y$  'nin sağladığı (3.2) sınır şartlarını  $\tilde{y}$  'nin sağladığı aşağıdaki Dirichlet şartlarına dönüştürür:

$$\tilde{y}_{-1} = 0, \quad \tilde{y}_{m-1} = 0 \quad (3.14)$$

**İspat:**  $\tilde{y}_n = y_{n+1} - y_n u_{n+1}^0 / u_n^0$  olduğundan aşağıdakiler elde edilir:

$$y_{-1} = y_0 - y_{-1} \frac{u_0^0}{u_{-1}^0} = -h y_{-1} - y_{-1} (-h) = 0. \quad (3.15)$$

Burada  $y$  ifadesi  $hy_{-1} + y_0 = 0$  non-Dirichlet sınır şartını sağlarken  $\tilde{y}$  ise  $\tilde{y}_{-1} = 0$  Dirichlet sınır şartını sağlar. Benzer şekilde ikinci sınır şartını sağlar:

$$\tilde{y}_{m-1} = y_m - y_{m-1} \frac{u_m^0}{u_{m-1}^0} = -Hy_{m-1} - y_{m-1}(-H) = 0 . \quad (3.16)$$

(3.14) 'ü dönüştürülmüş sınır şartları olarak adlandıralım.

Yukarıda elde edilen sonuçları birleştirerek aşağıdaki sonucu verelim:

**Sonuç 3.3:** Teorem 3.2 'de verilen  $y \mapsto \tilde{y}$  dönüşümü (1.1) , (3.2) sınır değer probleminin özfonksiyonlarını (3.5) , (3.14) sınır değer probleminin özfonksiyonları yapar. (3.5) ve (3.14) dönüştürülmüş sınır değer probleminin spektrumu (1.1) ve (3.2) 'nin spektrumu ile aynıdır. Sadece  $\lambda_0$  olarak verilen en küçük özdeğer hariçtir.

**İspat:** Teorem 3.1 ve Teorem 3.2,  $y \mapsto \tilde{y}$  dönüşümünün (1.1) ve (3.2) 'nin özfonksiyonlarını, (3.5) ve (3.14) 'ün özfonksiyonlarına (mümkün olan sıfır çözümüne) dönüştürdüğünü ispatlar. (1.1) ve (3.2) sınır değer problemi  $n = 0, \dots, m-1$  için  $n$  tane reel ve ayrık özdeğere ve bunlara karşılık gelen lineer bağımsız  $u_n^0, \dots, u_n^{m-1}$  özfonksiyonlarına sahiptir. Bunun daha genel hali olan vektör fark denklemleri için [12] 'e bakılabilir. Özel olarak eğer  $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_{m-1}$  , (1.1) ve (3.2) 'nin özdeğerleri ve  $u^0, \dots, u^{m-1}$  bunlara karşılık gelen özfonksiyonlar ise o zaman  $\tilde{u}^0 \equiv 0$  ve  $\tilde{u}^1, \dots, \tilde{u}^{m-1}$  'ler de (3.5) ve (3.14) 'ün  $\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}$  özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonlarıdır. Basit bir hesaplamayla gösterilebilir ki  $\tilde{u}^1, \dots, \tilde{u}^{m-1} \neq 0$  'dır. Dönüştürülmüş sınır değer probleminin aralığı orijinal aralıktan bir kısa olduğundan (3.5) ve (3.14) problemi bir eksik özdeğere sahiptir. Böylece (3.5) ve (3.14) probleminin tüm özdeğerleri tam olarak  $\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}$  'dir.

### 3.3. Normalleştirici Katsayıların Dönüşümü

$\lambda_0 < \dots < \lambda_{m-1}$  (1.1) 'in ve (3.2) probleminin özdeğerleri ve  $y^0, \dots, y^{m-1}$  'ler de  $y_0^n = 1$  olacak şekilde normalleştirilmiş özfonksiyonları olsun. Bu bölümde, Teorem 3.2 'de verilen dönüşüm altında yeni normalleştirici katsayının, orijinal normalleştirici katsayının  $1/(\lambda_n - \lambda_0)$  katı olduğunu göstereceğiz.

**Lemma 3.4:** Daha önce

$$ly := -c_n y_{n+1} + b_n y_n - c_{n-1} y_{n-1} = c_n \lambda y_n$$

olarak verilen (1.1) 'in normalleştirici katsayıları  $\rho_n$  olsun ve şu şekilde tanımlansın:

$$\rho_n := \sum_{j=0}^{m-1} (-c_j) \left( \frac{y_j^n}{y_0^n} \right)^2 = \sum_{j=0}^{m-1} -c_j (y_j^n)^2 \quad (3.17)$$

Burada, eşitliğin ikinci kısmından da dikkat edileceği üzere,  $y_0^n = 1$  olduğu daha önce söylenmişti. Eğer  $\tilde{\tau}_n$ ,

$$\tilde{\tau}_n := \sum_{j=0}^{m-2} (-\tilde{c}_j) (\tilde{y}_j^n)^2 \quad (3.18)$$

şeklinde tanımlanırsa, o zaman  $\lambda = \lambda_0$  a karşılık gelen  $u^0$  özfonksiyonu  $u_0^0 = 1$  ile normalleştirilir:

$$\begin{aligned} (\lambda_n - \lambda_0) \rho_n &= (\lambda_n - \lambda_0) \sum_{j=0}^{m-1} (-c_j) \left( \frac{y_j^n}{y_0^n} \right)^2 = (\lambda_n - \lambda_0) \sum_{j=0}^{m-1} -c_j (y_j^n)^2 \\ &= \tilde{\tau}_n - c_{-1} \frac{u_{-1}^0}{u_0^0} (y_0^n)^2 + c_{-1} y_{-1}^n y_0^n - (y_{m-1}^n)^2 c_{m-1} \frac{u_m^0}{u_{m-1}^0} + y_{m-1}^n y_m^n c_{m-1} \end{aligned} \quad (3.19)$$

**İspat:**  $\tilde{y}_j^n$  ve  $\tilde{c}_j$ ,  $n=1, \dots, m-1$  olmak üzere (3.18) 'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_n &= \sum_{j=0}^{m-2} \left( \frac{-u_j^0 c_j}{u_{j+1}^0} (y_{j+1}^n)^2 + 2y_j^n y_{j+1}^n c_j - \frac{u_{j+1}^0}{u_j^0} c_j (y_j^n)^2 \right) \\ &= \sum_{j=0}^{m-2} \left( \frac{-u_j^0 c_j}{u_{j+1}^0} (y_{j+1}^n)^2 + 2y_j^n y_{j+1}^n c_j - [b_j - c_j \lambda_0] (y_j^n)^2 + c_{j-1} \frac{u_{j-1}^0}{u_j^0} (y_j^n)^2 \right) \\ &= \sum_{j=0}^{m-2} \left( 2y_j^n y_{j+1}^n c_j - [b_j - c_j \lambda_0] (y_j^n)^2 \right) + c_{-1} \frac{u_{-1}^0}{u_0^0} (y_0^n)^2 - c_{m-2} \frac{u_{m-2}^0}{u_{m-1}^0} (y_{m-1}^n)^2 \end{aligned} \quad (3.20)$$

elde edilir. Böylece  $\rho_n$  tanımı kullanılarak şuna ulaşılır:

$$\begin{aligned}
(\lambda_n - \lambda_0)\rho_n &= \sum_{j=0}^{m-1} (\lambda_n - \lambda_0)(-c_j)y_j^n y_j^n \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} (c_j y_{j+1}^n - (b_j - \lambda_0 c_j)y_j^n + c_{j-1}y_{j-1}^n y_j^n) \\
&= 2 \sum_{j=0}^{m-1} [c_j y_{j+1}^n y_j^n] - \sum_{j=0}^{m-1} [b_j - \lambda_0 c_j (y_j^n)^2] \\
&\quad + c_{-1} y_{-1}^n y_0^n - c_{m-1} y_{m-1}^n y_m^n \\
&= \sum_{j=0}^{m-2} [2c_j y_{j+1}^n y_j^n - (b_j - \lambda_0 c_j)(y_j^n)^2] \\
&\quad + c_{m-1} y_m^n y_{m-1}^n - [b_{m-1} - \lambda_0 c_{m-1}](y_{m-1}^n)^2 + c_{-1} y_{-1}^n y_0^n \\
&= \tilde{\tau}_n + c_{m-2} \frac{u_{m-2}^0}{u_{m-1}^0} (y_{m-1}^n)^2 + c_{m-1} y_m^n y_{m-1}^n \\
&\quad - [b_{m-1} - \lambda_0 c_{m-1}](y_{m-1}^n)^2 + c_{-1} y_{-1}^n y_0^n - c_{-1} \frac{u_{-1}^0}{u_0^0} (y_0^n)^2
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Şimdi,

$$\begin{aligned}
-(b_{m-1} - \lambda_0 c_{m-1})(y_{m-1}^n)^2 &= -c_{m-1} y_m^n y_{m-1}^n \\
-c_{m-2} y_{m-2}^n y_{m-1}^n - c_{m-1} (\lambda_n - \lambda_0)(y_{m-1}^n)^2
\end{aligned} \tag{3.22}$$

dir. Böylece,

$$\begin{aligned}
(\lambda_n - \lambda_0)\rho_n &= \tilde{\tau}_n - c_{-1} \frac{u_{-1}^0}{u_0^0} (y_0^n)^2 \\
&\quad + c_{-1} y_{-1}^n y_0^n + c_{m-2} \frac{u_{m-2}^0}{u_{m-1}^0} (y_{m-1}^n)^2 \\
&\quad - c_{m-2} y_{m-2}^n y_{m-1}^n - c_{m-1} (\lambda_n - \lambda_0)(y_{m-1}^n)^2
\end{aligned} \tag{3.23}$$

bulunur. (1.1) 'de  $c_{m-2} u_{m-2}^0$  ve  $c_{m-2} y_{m-2}^n$  yerine konursa;

$$\begin{aligned}
(\lambda_n - \lambda_0)\rho_n &= \tilde{\tau}_n - c_{-1} \frac{u_{-1}^0}{u_0^0} (y_0^n)^2 + c_{-1} y_{-1}^n y_0^n \\
&+ (y_{m-1}^n)^2 \left( -c_{m-1} \lambda_0 + b_{m-1} - c_{m-1} \frac{u_m^0}{u_{m-1}^0} \right) \\
&- y_{m-1}^n \left( -c_{m-1} \lambda_n y_{m-1}^n + b_{m-1} y_{m-1}^n - c_{m-1} y_m^n \right) \\
&- c_{m-1} (\lambda_n - \lambda_0) (y_{m-1}^n)^2 \\
&= \tilde{\tau}_n - c_{-1} \frac{u_{-1}^0}{u_0^0} (y_0^n)^2 + c_{-1} y_{-1}^n y_0^n \\
&- (y_{m-1}^n)^2 c_{m-1} \frac{u_m^0}{u_{m-1}^0} + y_{m-1}^n y_m^n c_{m-1}
\end{aligned} \tag{3.24}$$

sonucunu verir.

**Teorem 3.5:** Eğer Lemma 3.4 'te tanımlanan  $\rho_n$  'ler (1.1) ve (3.2) probleminin normalleştirici katsayıları ise ve

$$\tilde{\rho}_n := \sum_{j=0}^{m-2} -\tilde{c}_j \left( \frac{\tilde{y}_j^n}{\tilde{y}_0^n} \right)^2 \tag{3.25}$$

biçimindeki  $\tilde{\rho}_n$  'ler (3.5) ve (3.14) probleminin normalleştirici katsayıları ise o zaman

$$\rho_n = (\lambda_n - \lambda_0) \tilde{\rho}_n \tag{3.26}$$

gerçeklenir.

**İspat:** Lemma 3.4 ve

$$hy_{-1} + y_0 = 0$$

$$Hy_{m-1} + y_m = 0$$

olarak verilen (3.2) sınır şartları birlikte kullanılırsa şu sonucu verir:

$$(\lambda_n - \lambda_0)\rho_n = \tilde{\tau}_n \tag{3.27}$$

Şimdi (3.14) 'ten  $\tilde{y}_{-1} = 0$  olur. Böylece;

$$\tilde{y}_0 = y_1 - \frac{u_1^0}{u_0^0} y_0 = y_1 - u_1^0 = -(\lambda - \lambda_0) \quad (3.28)$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} (\lambda_n - \lambda_0) \rho_n &= (\tilde{y}_0^n)^2 \sum_{j=0}^{m-2} -\tilde{c}_j \left( \frac{\tilde{y}_j^n}{\tilde{y}_0^n} \right)^2 \\ &= (\lambda_n - \lambda_0)^2 \sum_{j=0}^{m-2} -\tilde{c}_j \left( \frac{\tilde{y}_j^n}{\tilde{y}_0^n} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.29)$$

sonucuna ulaşılır ve aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\rho_n = (\lambda_n - \lambda_0) \tilde{\rho}_n \quad (3.30)$$

## BÖLÜM 4

### DÖNÜŞÜMLER 2

#### 4.1. Denklemin Dönüşümü

$n = 0, \dots, m-2$  olmak üzere ve  $\tilde{y}_n$ ,  $n = -1, \dots, m-1$  iken (3.14) koşullarını sağlamak üzere (3.5) denklemini ele alalım.

Yine  $\lambda_0$ , (3.5) ve (3.14) 'ün en küçük özdeğerinden daha küçük olmak üzere  $\lambda = \lambda_0$  olduğu andaki (3.5) 'in çözümü  $z_n$  olsun. Burada tüm  $n = -1, \dots, m-1$  için  $z_n > 0$  olsun. Bu bölümdeki amacımız aşağıdaki formda verilen  $l^z$  operatörünü faktörize etmektir.

$$l^z \tilde{y}_n = -\tilde{y}_{n+1} + \left( \frac{\tilde{b}_n}{\tilde{c}_n} - \lambda_0 \right) \tilde{y}_n - \frac{\tilde{c}_{n-1}}{\tilde{c}_n} \tilde{y}_{n-1} = (\lambda - \lambda_0) \tilde{y}_n \quad (4.1)$$

$n = 0, \dots, m-2$  için ve  $P$  ve  $R$  birinci mertebeden formal fark operatörleri olmak üzere,

$$l^z = PR$$

olacaktır.

#### **Teorem 4.1:**

$$\begin{aligned} P\tilde{y}_n &:= \tilde{y}_{n+1} - \tilde{y}_n \frac{z_{n-1}\tilde{c}_{n-1}}{z_n\tilde{c}_n}, n = 0, \dots, m-2 \\ R\tilde{y}_n &:= \tilde{y}_n - \tilde{y}_{n-1} \frac{z_n}{z_{n-1}}, n = 0, \dots, m-1 \end{aligned} \quad (4.2)$$

olsun. O zaman  $l^z = PR$  'dir ve ayrıca

$$RP\hat{y} = -(\lambda - \lambda_0)\hat{y}$$

dönüştürülmüş denkleminin çözümü,

$$\widehat{y}_n = R\tilde{y}_n \text{ 'dir.}$$

Burada  $n = 1, \dots, m-2$  olmak üzere

$$\widehat{l\tilde{y}}_n := -\widehat{c}_n \widehat{y}_{n+1} + \widehat{b}_n \widehat{y}_n - \widehat{c}_{n-1} \widehat{y}_{n-1} = \widehat{c}_n \lambda \widehat{y}_n \quad (4.3)$$

dir. Ve yine  $n = 0, \dots, m-1$  için,

$$\begin{aligned} \widehat{c}_n &= \frac{z_{n-1} \tilde{c}_{n-1}}{z_n} \\ \widehat{b}_n &= \left( \frac{z_{n-1} \tilde{c}_{n-1}}{z_n \tilde{c}_n} + \frac{z_n}{z_{n-1}} \right) \frac{z_{n-1} \tilde{c}_{n-1}}{z_n} \end{aligned} \quad (4.4)$$

eşitlikleri vardır.

**İspat:**  $P$  ve  $R$  'nin tanımından;

$$\begin{aligned} PR\tilde{y}_n &= \tilde{y}_{n+1} - \tilde{y}_n \frac{z_{n+1}}{z_n} \\ &- \left( \tilde{y}_n - \tilde{y}_{n-1} \frac{z_n}{z_{n-1}} \right) \frac{z_{n-1} \tilde{c}_{n-1}}{z_n \tilde{c}_n} \\ &= \tilde{y}_{n+1} - \tilde{y}_n \left( -\lambda_0 - \frac{\tilde{c}_{n-1} z_{n-1}}{\tilde{c}_n z_n} + \frac{\tilde{b}_n}{\tilde{c}_n} \right) \\ &- \tilde{y}_n \frac{z_{n-1} \tilde{c}_{n-1}}{z_n \tilde{c}_n} + \tilde{y}_{n-1} \frac{\tilde{c}_{n-1}}{\tilde{c}_n} \\ &= -(\lambda - \lambda_0) \tilde{y}_n \end{aligned} \quad (4.5)$$

elde edilir. Böylece  $l^z = PR$  olur.

Eğer  $\widehat{y}_n = R\tilde{y}_n$  denilirse,

$$RP\widehat{y}_n = R(PR\tilde{y}_n) = R(\lambda_0 - \lambda)\tilde{y}_n = -(\lambda - \lambda_0)\widehat{y}_n \quad (4.6)$$

bulunur ki bu da  $\widehat{y}$  'nin dönüştürülmüş denklemin çözümü olması demektir.

Şimdi, dönüştürülmüş denklemi açık bir şekilde elde edelim.  $R$  ve  $P$  'nin tanımından,

$$\begin{aligned}
RP\hat{y}_n &= R \left( \hat{y}_{n+1} - \hat{y}_n \frac{z_{n-1}\tilde{c}_{n-1}}{z_n\tilde{c}_n} \right) = \hat{y}_{n+1} - \hat{y}_n \frac{z_{n-1}\tilde{c}_{n-1}}{z_n\tilde{c}_n} \\
&- \left( \hat{y}_n - \hat{y}_{n-1} \frac{z_{n-2}\tilde{c}_{n-2}}{z_{n-1}\tilde{c}_{n-1}} \right) \frac{z_n}{z_{n-1}} \\
&= \hat{y}_{n+1} - \hat{y}_n \left( \frac{z_{n-1}\tilde{c}_{n-1}}{z_n\tilde{c}_n} + \frac{z_n}{z_{n-1}} \right) \\
&+ \hat{y}_{n-1} \frac{z_{n-2}\tilde{c}_{n-2}z_n}{z_{n-1}\tilde{c}_{n-1}z_{n-1}}
\end{aligned} \tag{4.7}$$

eşitliğine ulaşılır. Bu da aşağıdaki ifadeyi verir:

$$\begin{aligned}
\frac{z_{n-1}\tilde{c}_{n-1}}{z_n} \hat{y}_{n+1} - \left( \frac{z_{n-1}\tilde{c}_{n-1}}{z_n\tilde{c}_n} + \frac{z_n}{z_{n-1}} \right) \frac{z_{n-1}\tilde{c}_{n-1}}{z_n} \hat{y}_n \\
+ \frac{z_{n-2}\tilde{c}_{n-2}}{z_{n-1}} \hat{y}_{n-1} = -(\lambda - \lambda_0) \hat{y}_n \frac{z_{n-1}\tilde{c}_{n-1}}{z_n}
\end{aligned} \tag{4.8}$$

#### 4.2. Sınır Şartlarının Dönüşümü

$\hat{y}_n$  ,  $n = 0, \dots, m-1$  için tanımlanmış olsun. Şimdi  $\hat{y}_n$  'in tanımını, aşağıdaki sınır şartlarını kullanarak  $n = -1, \dots, m$  'e genişletelim:

$$\begin{aligned}
\hat{h}\hat{y}_{-1} + \hat{y}_0 &= 0 \\
\hat{H}\hat{y}_{m-1} + \hat{y}_m &= 0
\end{aligned} \tag{4.9}$$

burada,

$$\begin{aligned}
\hat{h} &:= \left[ \frac{\hat{c}_0}{\hat{c}_{-1}} \left( \frac{\tilde{b}_0}{\tilde{c}_0} - \frac{z_1}{z_0} - \frac{\hat{b}_0}{\hat{c}_0} \right) \right]^{-1} \\
\hat{H} &:= \frac{\tilde{b}_{m-2}}{\tilde{c}_{m-2}} - \frac{\hat{b}_{m-1}}{\hat{c}_{m-1}} - \frac{z_{m-2}\hat{c}_{m-2}}{z_{m-1}\hat{c}_{m-1}}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

ve bu işlemde  $\hat{c}_{-1} = c_{-1}$  olmaktadır.

**Teorem 4.2:**  $z_n$  , daha önce tanımlanmış olan çözüm olmak üzere,

$$\hat{y}_n = \tilde{y}_n - \tilde{y}_{n-1}(z_n / z_{n-1}) , \quad n = 0, \dots, m-1$$

biçiminde tanımlanan  $\tilde{y} \mapsto \hat{y}$  dönüşümü ; (3.14) şartlarını sağlayan  $\tilde{y}$  'yı, (4.9) non-Dirichlet şartlarını sağlayan  $\hat{y}$  'ya dönüştürür. Ve burada  $\hat{y}$  ,  $n = 0, \dots, m-1$  olmak üzere

$$\hat{L}\hat{y}_n = \lambda \hat{c}_n \hat{y}_n$$

denkleminin çözümüdür.

**İspat:**  $\hat{h}$  ve  $\hat{H}$  'nın yapısından dolayı açıktır ki (4.9) şartları  $\hat{y}$  tarafından sağlanır.

Şimdi göstereceğiz ki  $\hat{y}$  , genişletilmiş problemin çözümüdür. Teorem 4.1 'den,

$$\hat{L}\hat{y}_n = \lambda \hat{c}_n \hat{y}_n$$

eşitliğini sadece  $n=0$  ve  $n=m-1$  için göstermemiz gerekir.  $n=0$  için (4.9) ile birlikte (4.3) 'ten,

$$\hat{c}_0 \hat{y}_1 + \hat{c}_{-1} \left( \frac{-\hat{y}_0}{\hat{h}} \right) = (\hat{b}_0 - \hat{c}_0 \lambda) \hat{y}_0 \quad (4.11)$$

elde edilir. Yine bu dönüşüm  $n=0$  için,

$$\hat{y}_0 = \tilde{y}_0 - \tilde{y}_{-1} \frac{z_0}{z_{-1}} \quad (4.12)$$

eşitliğini verir. Böylece (3.14) 'ü kullanarak,  $\hat{y}_0 = \tilde{y}_0$  elde ederiz. Dolayısıyla,

$$\hat{c}_0 \hat{y}_1 + \hat{c}_{-1} \left( \frac{\tilde{y}_0}{\hat{h}} \right) = (\hat{b}_0 - \hat{c}_0 \lambda) \tilde{y}_0 \quad (4.13)$$

bulunur. Sonrasında,  $n=1$  için bu dönüşüm kullanılarak aşağıdaki eşitliğe ulaşılır:

$$\hat{c}_0 \left( \tilde{y}_1 - \tilde{y}_0 \frac{z_1}{z_0} \right) + \hat{c}_{-1} \left( \frac{-\tilde{y}_0}{\hat{h}} \right) = (\hat{b}_0 - \hat{c}_0 \lambda) \tilde{y}_0 \quad (4.14)$$

Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\tilde{y}_1 - \left( \frac{\hat{b}_0}{\hat{c}_0} + \frac{\hat{c}_{-1}}{\hat{c}_0 \hat{h}} + \frac{z_1}{z_0} \right) \tilde{y}_0 = -\lambda \tilde{y}_0 \quad (4.15)$$

sonucuna ulaşılır.

Yine  $n = 0$  için (3.5), (3.14) ile birlikte,

$$\tilde{y}_1 - \frac{\tilde{b}_0}{\tilde{c}_0} \tilde{y}_0 = -\lambda \tilde{y}_0 \quad (4.16)$$

bulunur. Şimdi

$$\tilde{y}_1 - \frac{\tilde{b}_0}{\tilde{c}_0} \tilde{y}_0 = -\lambda \tilde{y}_0$$

ile verilen (4.16) denkleminde

$$\tilde{y}_1 - \left( \frac{\hat{b}_0}{\hat{c}_0} + \frac{\hat{c}_{-1}}{\hat{c}_0 h} + \frac{z_1}{z_0} \right) \tilde{y}_0 = -\lambda \tilde{y}_0$$

ile verilen (4.15) denklemini çıkarılırsa,

$$\hat{c}_0 \left( \frac{\tilde{b}_0}{\tilde{c}_0} - \frac{z_1}{z_0} - \frac{\hat{b}_0}{\hat{c}_0} \right) = \frac{\hat{c}_{-1}}{h} \quad (4.17)$$

elde edilir.

Aynı düşünceyle gösterebiliriz ki  $n = m-1$  için de (4.3) sağlanır. Böylece  $\hat{y}$  ifadesi,  $n = 0, \dots, m-1$  için

$$\hat{t}y_n = \lambda \hat{c}_n \hat{y}_n$$

denkleminin çözümüdür.

Teorem 4.1 ve Teorem 4.2 kullanılarak aşağıdaki sonuca ulaşılır:

**Sonuç 4.3:**  $\lambda_0$ , (3.5) ve (3.14)'ün en küçük özdeğerinden daha küçük olmak üzere  $z_n$ , (3.5)'in çözümüdür. Öyle ki  $n = -1, \dots, m-1$  için  $z_n > 0$  'dır. Ayrıca burada verilen (3.5) denklemini, başlangıç noktasında veya uç noktada tanımlanmış (4.9) non-Dirichlet sınır şartlarına sahip, (4.3) ile aynı tipte olan denkleme dönüştürebiliriz. Yine (4.3) ve (4.9) dönüştürülmüş sınır değer probleminin spektrumu,  $\lambda_0$  (eklenmiş özdeğer) hariç (3.5) ve (3.14) 'ün spektrumu ile aynıdır.

**İspat:** Teorem 4.1 ve Teorem 4.2 'de  $\tilde{y} \mapsto \hat{y}$  dönüşümü (3.5) ve (3.14) 'ün özfonksiyonunu (4.3) ve (4.9) 'un özfonksiyonuna dönüştürür. Özel olarak, eğer  $n = -1, \dots, m-1$  olmak üzere  $\lambda_1 < \dots < \lambda_{m-1}$  'ler (3.5), (3.14) 'ün özdeğerleri ise ve  $\tilde{u}^1, \dots, \tilde{u}^{m-1}$  'lar da bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar ise o zaman  $n = -1, \dots, m$  olmak üzere  $z, \tilde{u}^1, \dots, \tilde{u}^{m-1}$  'ler (4.3) ve (4.9) 'un özfonksiyonlarıdır. Ki bu özfonksiyonların özdeğerleri de  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}$  'dir. Dönüştürülmüş sınır değer probleminin indeksi, orijinal sınır değer probleminin indeksinden tam olarak bir fazla olduğundan (4.3) ve (4.9) tek bir özdeğere sahiptir. Böylece (4.3) ve (4.9) 'un tüm özdeğerleri  $\lambda_0, \dots, \lambda_{m-1}$  'den ibarettir.

Böylece aşağıdaki sonucu ispatlamış olduk:

**Sonuç 4.4:** (1.1), (3.2) 'den (3.5) ve (3.14) 'e olan ve daha sonra (4.3), (4.9) 'a olan dönüşüm, izospektral dönüşümdür. Yani (1.1), (3.2) 'nin spektrumu (4.3) ve (4.9) 'un spektrumu ile aynıdır.

Şimdi göstereceğiz ki  $z_n$  in özel bir seçimi için (1.1), (3.2) 'den (3.5), (3.14) 'e ve daha sonra (4.3), (4.9) 'a olan dönüşüm orijinal sınır değer problemi içinde sonuçlandırılır.

Genelliği kaybetmeden spektrumun ötelenmesiyle (1.1), (3.2) 'nin en küçük özdeğeri olan  $\lambda_0$  ,  $\lambda_0 = 0$  olacak şekilde kabul edilebilir. Ek olarak  $u_n^0$  (1.1), (3.2) 'nin  $\lambda_0 = 0$  özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonu olsun.

**Teorem 4.5:** Eğer  $z_n$

$$z_n := 1/u_n^0 c_n$$

olarak tanımlanırsa, o zaman  $z_n$  ,  $\lambda = \lambda_0 = 0$  için (3.5) 'in çözümü olur. Burada  $\lambda_0 = 0$  , (3.5) ve (3.14) 'ün en küçük özdeğerinden daha küçüktür ve  $z_n$   $n = -1, \dots, m-1$  aralığında sifira sahip değildir. Ayrıca  $n = -1, \dots, m-1$  için  $\hat{h} = h$  ,  $\hat{H} = H$  ve  $n = 0, \dots, m-1$  için  $\hat{b}_n = b_n$  dir.

**İspat:** (3.5) 'in sol tarafı  $\tilde{y} = z$  ile aşağıdaki duruma gelir:

$$\tilde{c}_n z_{n+1} - \tilde{b}_n z_n + \tilde{c}_{n-1} z_{n-1}, \quad n = 0, \dots, m-1 \quad (4.18)$$

ki burada  $z$  yerine  $\tilde{c}$  ve  $\tilde{b}$  yazılırsa bu ifade 0 olur. Açık ki (3.5) 'in sağ tarafı  $\lambda = \lambda_0 = 0$  için 0 olur. Buradan  $z_n$ ,  $\lambda = \lambda_0 = 0$  için (3.5)'in çözümüdür. Burada  $\lambda_0 = 0$ , (3.5) ve (3.14) 'ün en küçük özdeğerinden daha küçüktür. Denklemde  $z_n$  yerine  $z_{n-1}$  ve  $\hat{c}_n$  yerine  $\tilde{c}_{n-1}$  yazılırsa  $n = 0, \dots, m-1$  olmak üzere  $\tilde{c}_n = c_n$  elde edilir. Burada  $\hat{c}_{-1} = c_{-1}$  kabul edilmiştir.

Daha sonra denklemde aynı değişken değişimi  $\hat{b}_n$  için yapılırsa,

$$\begin{aligned} \hat{b}_n &= \left( \frac{u_n^0 c_n}{u_{n-1}^0 c_{n-1}} \frac{u_{n-1}^0 c_{n-1} u_{n+1}^0}{u_n^0 u_n^0 c_n} + \frac{u_{n-1}^0 c_{n-1}}{u_n^0 c_n} \right) c_n \\ &= \frac{c_n u_{n+1}^0 + u_{n-1}^0 c_{n-1}}{u_n^0} \end{aligned} \quad (4.19)$$

elde edilir. Ancak  $u_n^0$ , (1.1) ve (3.2) 'nin  $\lambda_0 = 0$  özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonu olduğundan,

$$\hat{b}_n = \frac{-c_n \lambda_0 u_n^0 + b_n u_n^0}{u_n^0} = b_n, \quad n = 0, \dots, m-1 \quad (4.20)$$

sonucu ortaya çıkar. Son olarak,

$$\hat{h} = \left[ \frac{\hat{c}_0 \left( \frac{\tilde{b}_0}{\hat{c}_0} - \frac{z_1}{z_0} - \frac{\hat{b}_0}{\hat{c}_0} \right)}{\hat{c}_{-1} \left( \frac{\tilde{b}_0}{\hat{c}_0} - \frac{z_1}{z_0} - \frac{\hat{b}_0}{\hat{c}_0} \right)} \right]^{-1} \quad (4.21)$$

elde edilir.  $\hat{b}_0$  ve  $\hat{c}_0$  yerine yazılırsa ve  $\hat{c}_{-1} = c_{-1}$  eşitliği kullanılırsa,

$$\hat{h} = \left[ \frac{z_{-1} \tilde{c}_{-1} \left( \frac{\tilde{b}_0}{\tilde{c}_0} - \frac{z_1}{z_0} - \left( \frac{z_{-1} \tilde{c}_{-1}}{z_0 \tilde{c}_0} + \frac{z_0}{z_{-1}} \right) \right)}{z_0 c_{-1} \left( \frac{\tilde{b}_0}{\tilde{c}_0} - \frac{z_1}{z_0} - \left( \frac{z_{-1} \tilde{c}_{-1}}{z_0 \tilde{c}_0} + \frac{z_0}{z_{-1}} \right) \right)} \right]^{-1} \quad (4.22)$$

eşitliğine ulaşılır.  $z$ ,  $\lambda_0 = 0$  için (3.5) 'in çözümü olduğundan,  $n = 0$  için,

$$\frac{z_1}{z_0} - \frac{\tilde{b}_0}{\tilde{c}_0} + \frac{z_{-1}\tilde{c}_{-1}}{z_0\tilde{c}_0} = 0 \quad (4.23)$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade denklemde yerine yazılırsa  $\hat{h}$  şu biçimde elde edilir:

$$\hat{h} = -\frac{c_{-1}}{\tilde{c}_{-1}} \quad (4.24)$$

$\tilde{c}_{-1}$  ifadesi de yerine yazılırsa,

$$\hat{h} = -\frac{u_0^0}{u_{-1}^0} \quad (4.25)$$

bulunur. Ve böylece (3.2) 'den  $\hat{h} = h$  tır.

Tam olarak aynı metodu kullanarak  $\hat{H} = H$  olduğu kolayca gösterilebilir.

Böylece başta hedeflediğimiz aşağıdaki sonuca ulaşırız.

**Sonuç 3.6:** (1.1) ve (3.2) 'den (3.5) ve (3.14) 'e ve daha sonra (4.3), (4.9) 'a olan dönüşüm,  $z_n := 1/u_n^0 c_n$  ile birlikte orijinal sınır değer probleminin içinde aynı sonucu verir.

### 4.3. Normalleştirici Katsayıların Dönüşümü

Kabul edelim ki  $\tilde{y}_0 = 1$  normalizasyonuna sahip olalım. Buradaki sonuçlar Teorem 3.5 'te elde edilenlerle aynıdır.

**Lemma 4.7:** Daha önce olduğu gibi,  $\tilde{\rho}_n$  , (3.5) 'in normalleştirici katsayıları olsun ve şu şekilde tanımlansın:

$$\tilde{\rho}_n = \sum_{j=0}^{m-2} (-\tilde{c}_j) \left( \frac{\tilde{y}_j^n}{\tilde{y}_0^n} \right)^2 = \sum_{j=0}^{m-2} -\tilde{c}_j (\tilde{y}_j^n)^2 \quad (4.26)$$

Eğer  $\hat{\tau}_n$  ,

$$\hat{\tau}_n = \sum_{j=0}^{m-1} (-\hat{c}_j) (\hat{y}_j^n)^2 \quad (4.27)$$

şeklinde tanımlanırsa o zaman şu eşitlik vardır:

$$\begin{aligned}
(\lambda_n - \lambda_0)\tilde{\rho}_n &= \hat{\tau}_n + \tilde{c}_{-1} \frac{z_0}{z_{-1}} (\tilde{y}_{-1}^n)^2 \\
&\quad - \tilde{c}_{-1} \tilde{y}_{-1}^n \tilde{y}_0^n + (\tilde{y}_m^n)^2 \tilde{c}_{m-1} \frac{z_{m-1}}{z_m} - \tilde{y}_{m-1}^n \tilde{y}_m^n \tilde{c}_{m-1}
\end{aligned} \tag{4.28}$$

**İspat:**  $\hat{c}$  ve  $\hat{y}$  değerleri yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\hat{\tau}_n &= \sum_{j=0}^{m-1} \left( \frac{-z_{j-1} \tilde{c}_{j-1}}{z_j} (\tilde{y}_j^n)^2 + 2 \tilde{y}_{j-1}^n \tilde{y}_j^n \tilde{c}_{j-1} - (\tilde{y}_{j-1}^n)^2 \frac{z_j}{z_{j-1}} \tilde{c}_{j-1} \right) \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} \left( \frac{-z_{j-1} \tilde{c}_{j-1}}{z_j} (\tilde{y}_j^n)^2 + 2 \tilde{y}_{j-1}^n \tilde{y}_j^n \tilde{c}_{j-1} \right) \\
&\quad - \sum_{j=1}^{m-1} (\tilde{y}_{j-1}^n)^2 \left( \tilde{b}_{j-1} - \tilde{c}_{j-2} \frac{z_{j-2}}{z_{j-1}} - \tilde{c}_{j-1} \lambda_0 \right) \\
&\quad - (\tilde{y}_{-1}^n)^2 \frac{z_0}{z_{-1}} \tilde{c}_{-1} \\
&= \sum_{j=1}^{m-1} \left( 2 \tilde{y}_{j-1}^n \tilde{y}_j^n \tilde{c}_{j-1} - (\tilde{y}_{j-1}^n)^2 (\tilde{b}_{j-1} - \tilde{c}_{j-1} \lambda_0) \right) \\
&\quad - (\tilde{y}_{-1}^n)^2 \frac{z_0}{z_{-1}} \tilde{c}_{-1} - \frac{z_{m-2} \tilde{c}_{m-2}}{z_{m-1}} (\tilde{y}_{m-1}^n)^2 + 2 \tilde{y}_{-1}^n \tilde{y}_0^n \tilde{c}_{-1}
\end{aligned} \tag{4.29}$$

bulunur. Ayrıca  $\tilde{\rho}_n$  'in tanımını kullanarak,

$$\begin{aligned}
(\lambda_n - \lambda_0)\tilde{\rho}_n &= \sum_{j=0}^{m-2} (\lambda_n - \lambda_0)(-\tilde{c}_j) \tilde{y}_j^n \tilde{y}_j^n \\
&= \sum_{j=0}^{m-2} (\tilde{c}_j \tilde{y}_{j+1}^n - (\tilde{b}_j - \lambda_0 \tilde{c}_j) \tilde{y}_j^n + \tilde{c}_{j-1} \tilde{y}_{j-1}^n) \tilde{y}_j^n \\
&= 2 \sum_{j=0}^{m-2} [\tilde{c}_j \tilde{y}_{j+1}^n \tilde{y}_j^n] - \sum_{j=0}^{m-2} [(\tilde{b}_j - \lambda_0 \tilde{c}_j) (\tilde{y}_j^n)^2] + \\
&\quad + \tilde{c}_{-1} \tilde{y}_{-1}^n \tilde{y}_0^n - \tilde{c}_{m-2} \tilde{y}_{m-2}^n \tilde{y}_{m-1}^n \\
&= \hat{\tau}_n + (\tilde{y}_{-1}^n)^2 \tilde{c}_{-1} \frac{z_0}{z_{-1}} + \frac{z_{m-2} \tilde{c}_{m-2}}{z_{m-1}} (\tilde{y}_{m-1}^n)^2 \\
&\quad - \tilde{c}_{-1} \tilde{y}_{-1}^n \tilde{y}_0^n - \tilde{c}_{m-2} \tilde{y}_{m-2}^n \tilde{y}_{m-1}^n
\end{aligned} \tag{4.30}$$

eşitliği elde edilir.

**Teorem 4.8:** Eğer Lemma 4.7 'deki gibi verilen  $\tilde{\rho}_n$  ,

$$\tilde{\rho}_n = \sum_{j=0}^{m-2} (-\tilde{c}_j) \left( \frac{\tilde{y}_j^n}{\tilde{y}_0^n} \right)^2 = \sum_{j=0}^{m-2} -\tilde{c}_j (\tilde{y}_j^n)^2$$

biçiminde ise ve bu  $\tilde{\rho}_n$  (3.5), (3.14) sınır değeri probleminin normalleştirici katsayısı ise ve

$$\hat{\rho}_n := \sum_{j=0}^{m-1} (-\hat{c}_j) \left( \frac{\hat{y}_j^n}{\hat{y}_0^n} \right)^2 \quad (4.31)$$

biçiminde tanımlanan  $\hat{\rho}_n$  de (4.3), (4.9) sınır değeri probleminin normalleştirici katsayısı ise o zaman  $\tilde{\rho}_n$  ile  $\hat{\rho}_n$  arasında

$$\tilde{\rho}_n = \frac{1}{(\lambda_n - \lambda_0)} \hat{\rho}_n \quad (4.32)$$

veya bir başka deyişle

$$(\lambda_n - \lambda_0) \tilde{\rho}_n = \hat{\rho}_n$$

ilişkisi vardır.

**İspat:** Lemma 4.7 ile birlikte (3.14) sınır şartları kullanılırsa;

$$\begin{aligned} (\lambda_n - \lambda_0) \tilde{\rho}_n &= \hat{\tau}_n \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} (-\hat{c}_j) (\hat{y}_j^n)^2 \end{aligned} \quad (4.33)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\hat{y}_0 = \tilde{y}_0 = 1 \quad (4.34)$$

olur. Böylece,

$$\begin{aligned}
& (\lambda_n - \lambda_0) \tilde{\rho}_n \\
&= (\hat{y}_0^n)^2 \sum_{j=0}^{m-1} (-\hat{c}_j) \left( \frac{\hat{y}_j^n}{\hat{y}_0^n} \right)^2 \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} (-\hat{c}_j) \left( \frac{\hat{y}_j^n}{\hat{y}_0^n} \right)^2
\end{aligned} \tag{4.35}$$

bulunur. (4.31) 'den  $\hat{\rho}_n$  ,

$$\hat{\rho}_n := \sum_{j=0}^{m-1} (-\hat{c}_j) \left( \frac{\hat{y}_j^n}{\hat{y}_0^n} \right)^2$$

biçiminde verilmişti. Öyleyse buradan (4.35) denklemi,

$$\tilde{\rho}_n = \frac{1}{(\lambda_n - \lambda_0)} \hat{\rho}_n \tag{4.36}$$

ifadesini verir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

## BÖLÜM 5

### SONUÇ

Bu bölümde dönüşüm işleminin başka bir yoldan nasıl yapılabileceğini açıklayacağız. Bunu yapmak için öncelikle uç noktalarda Dirichlet sınır şartlarına sahip ikinci mertebeden fark denkleminin, yine uç noktalarda non-Dirichlet sınır şartlarına sahip aynı tipte ikinci mertebeden fark denklemine dönüştürülmesi ve daha sonra da orijinal sınır değer problemine tekrar dönüştürülmesi ile başlayacağız.

Şimdi bir  $\tilde{v}_n$  düşünelim. Bu  $\tilde{v}_n$ , (3.5) ve (3.14) 'ü sağlasın.  $\tilde{v} \mapsto \hat{v}$  dönüşümü aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$\hat{v}_n = \tilde{v}_n - \tilde{v}_{n-1} \frac{z_n}{z_{n-1}}, \quad n = 0, \dots, m-1 \quad (5.1)$$

Bu dönüşüm, (4.9) şartları kullanılarak  $\hat{v}_{-1}$  ve  $\hat{v}_m$  yi içerecek duruma genişletilebilir. Burada  $z_n$ , (3.5) 'in  $\lambda = \lambda_0 = 0$  için çözümü ve  $\lambda_0$  (3.5), (3.14) 'ün en küçük özdeğerinden daha küçük ve yine  $n = -1, \dots, m-1$  olmak üzere  $z_n > 0$  dır.  $\tilde{v} \mapsto \hat{v}$  dönüşümü  $\hat{v}_n$  in (4.3) ve (4.9) 'u sağlaması demektir. Böylece (4.3) ve (4.9),  $\lambda = \lambda_0 = 0$  olarak adlandırılan eklenmiş özdeğer hariç (3.5), (3.14) ile aynı spektruma sahiptir.

Şimdi  $\hat{v} \mapsto v$  dönüşümünü,

$$v_n = \hat{v}_{n+1} - \hat{v}_n \frac{u_{n+1}^0}{u_n^0}, \quad n = -1, \dots, m-1 \quad (5.2)$$

biçiminde tanımlayalım. Burada  $u_n^0$  (4.3), (4.9) 'un  $\lambda_0 = 0$  özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonudur. Bu dönüşüm

$$c_n v_{n+1} - b_n v_n + c_{n-1} v_{n-1} = -c_n \lambda v_n, \quad n = 0, \dots, m-2 \quad (5.3)$$

demektir. Ki burada,

$$c_n = \frac{u_n^0 \widehat{c}_n}{u_{n+1}^0} > 0, \quad (5.4)$$

$$b_n = \left[ \frac{u_n^0 \widehat{c}_n}{u_{n+1}^0 \widehat{c}_{n+1}} - \frac{\widehat{c}_{n-1} u_{n-1}^0}{\widehat{c}_n u_n^0} + \frac{\widehat{b}_n}{\widehat{c}_n} - \lambda_0 \right] \frac{u_n^0 \widehat{c}_n}{u_{n+1}^0}$$

dır ve sınır şartları da şu şekildedir:

$$v_{-1} = 0, \quad v_{m-1} = 0 \quad (5.5)$$

Böylece  $v$  'ye göre olan bu sınır değer probleminin spektrumu,  $\lambda = \lambda_0 = 0$  olarak adlandırılan özdeğer hariç (4.3), (4.9) 'un spektrumuyla aynıdır.

**Lemma 5.1:**  $u_n^0$  ifadesi,

$$u_n^0 := 1 / z_{n-1} \widetilde{c}_{n-1}$$

biçiminde tanımlansın. Burada  $z_n$ , ( $\lambda_0$ , (3.5) ve (3.14) 'ün en küçük özdeğerinden daha küçük olmak üzere)  $\lambda = \lambda_0 = 0$  için (3.5) 'in çözümüdür. Öyle ki  $n = -1, \dots, m-1$  olmak üzere  $z_n > 0$  dır. Bu durumda  $u_n^0$ , (4.3) ve (4.9) 'un  $\lambda_0 = 0$  özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonudur. Burada  $u_0^0$ ,  $\widehat{lu}_1^0 = 0$  ve  $u_{-1}^0 = -u_0^0 / \widehat{h}$  ile ilgili tanımlanır.

**İspat:** Problemin yapısından dolayı,

$$\widehat{h}u_{-1}^0 + u_0^0 = 0 \quad (5.6)$$

ve

$$\widehat{H} = \frac{\widetilde{b}_{m-2}}{\widetilde{c}_{m-2}} - \frac{\widehat{b}_{m-1}}{\widehat{c}_{m-1}} - \frac{z_{m-2}}{z_{m-1}} \frac{\widehat{c}_{m-2}}{\widehat{c}_{m-1}} \quad (5.7)$$

eşitliklerine sahibiz. Burada  $\widehat{b}_{m-1}$ ,  $\widehat{c}_{m-1}$  ve  $\widehat{c}_{m-2}$  yerlerine yazılırsa,

$$\widehat{H} = \frac{\widetilde{b}_{m-2}}{\widetilde{c}_{m-2}} - \frac{z_{m-2}}{z_{m-1}} \frac{\widetilde{c}_{m-2}}{\widetilde{c}_{m-1}} - \frac{z_{m-1}}{z_{m-2}} - \frac{z_{m-3} \widetilde{c}_{m-3}}{z_{m-2} \widetilde{c}_{m-2}} \quad (5.8)$$

bulunur. Ve dolayısıyla,

$$\widehat{H} = -\frac{z_{m-2} \tilde{c}_{m-2}}{z_{m-1} \tilde{c}_{m-1}} \quad (5.9)$$

elde edilir. Böylece  $u_{m-1}^0$ ,  $u_m^0$  ve  $\widehat{H}$  ifadeleri yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa,

$$\widehat{H}u_{m-1}^0 + u_m^0 = 0 \quad (5.10)$$

eşitliğine ulaşılır. Bu da  $u_n^0$ 'ın (4.9) sınır şartlarını sağlaması demektir.

Şimdi  $u_n^0$ 'ın (4.3)'ü sağladığını gösterelim. Bunun için  $n=1, \dots, m-1$  olmak üzere,

$$u_n^0 := 1/z_{n-1} \tilde{c}_{n-1}$$

olarak tanımlanan  $u_n^0$  yerine yazılırsa,

$$\widehat{c}_n u_{n+1}^0 - \widehat{b}_n u_n^0 + \widehat{c}_{n-1} u_{n-1}^0 = \frac{\widehat{c}_n}{z_n \tilde{c}_n} - \frac{\widehat{b}_n}{z_{n-1} \tilde{c}_{n-1}} + \frac{\widehat{c}_{n-1}}{z_{n-2} \tilde{c}_{n-2}} \quad (5.11)$$

bulunur.  $\widehat{c}$  ve  $\widehat{b}$  için var olan ifadeleri kullanarak aşağıdaki ifadeye ulaşırız:

$$\widehat{c}_n u_{n+1}^0 - \widehat{b}_n u_n^0 + \widehat{c}_{n-1} u_{n-1}^0 = 0, \quad n=1, \dots, m-1 \quad (5.12)$$

Burada (4.3)'ün sağ tarafının  $\lambda_0 = 0$  için sıfıra eşit olduğunu kolaylıkla görürüz.

Şimdi  $n=0$  için  $u_n^0$ 'ın (4.3)'ün çözümü olduğunu ve  $\widehat{lu}_0^0 = 0$  olduğunu gösterelim. (4.3)'ten  $\lambda_0 = 0$  için

$$\widehat{lu}_0^0 = -\widehat{c}_0 u_1^0 + \widehat{b}_0 u_0^0 - \widehat{c}_{-1} u_{-1}^0 \quad (5.13)$$

ve buradan da  $u_{-1}^0 = -u_0^0 / \widehat{h}$  eşitliği kullanılarak

$$\widehat{lu}_0^0 = -\widehat{c}_0 u_1^0 + \left( \widehat{b}_0 + \frac{\widehat{c}_{-1}}{\widehat{h}} \right) u_0^0 \quad (5.14)$$

olduğu görülebilir. Şimdi  $\widehat{lu}_1^0 = 0$  alırsak

$$u_0^0 = -\frac{\widehat{c}_1 u_2^0 + \widehat{b}_1 u_1^0}{\widehat{c}_0} \quad (5.15)$$

elde edilir. Böylece,

$$\widehat{lu}_0^0 = -\widehat{c}_0 u_1^0 + \frac{\widehat{b}_0}{\widehat{c}_0} (-\widehat{c}_1 u_2^0 + \widehat{b}_1 u_1^0) + \frac{\widehat{c}_{-1}}{\widehat{hc}_0} (-\widehat{c}_1 u_2^0 + \widehat{b}_1 u_1^0) \quad (5.16)$$

denkleminde ulaşılır.  $n=0$  ve  $n=1$  için  $\widehat{c}_n$ ,  $\widehat{b}_n$  ve  $n=1$  ve  $n=2$  için  $u_n^0$  yerlerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \widehat{lu}_0^0 &= \left( \frac{z_{-1} \widetilde{c}_{-1} + z_0}{z_0 \widetilde{c}_0} \right) \left[ -\frac{z_0 \widetilde{c}_0}{z_1} \frac{1}{z_1 \widetilde{c}_1} + \frac{1}{z_1} \left( \frac{z_0 \widetilde{c}_0 + z_1}{z_1 \widetilde{c}_1} \right) \right] \\ &+ \frac{\widehat{c}_{-1}}{\widehat{hc}_0} \left[ -\frac{z_0 \widetilde{c}_0}{z_1} \frac{1}{z_1 \widetilde{c}_1} + \frac{1}{z_1} \left( \frac{z_0 \widetilde{c}_0 + z_1}{z_1 \widetilde{c}_1} \right) \right] - \frac{z_{-1} \widetilde{c}_{-1}}{z_0} \frac{1}{z_0 \widetilde{c}_0} \end{aligned} \quad (5.17)$$

elde edilir. Burada belirtelim ki,

$$\frac{\widehat{c}_{-1}}{\widehat{hc}_0} = \frac{\widetilde{b}_0}{\widetilde{c}_0} - \frac{z_1}{z_0} - \frac{\widetilde{b}_0}{\widetilde{c}_0} \quad (5.18)$$

dir. Buradan da  $\widehat{b}_0$  ve  $\widehat{c}_0$  yerlerine yazılırsa,

$$\frac{\widehat{c}_{-1}}{\widehat{hc}_0} = \frac{\widetilde{b}_0}{\widetilde{c}_0} - \frac{z_1}{z_0} - \frac{z_{-1} \widetilde{c}_{-1}}{z_0 \widetilde{c}_0} - \frac{z_0}{z_{-1}} \quad (5.19)$$

bulunur. Buradan şu eşitliğe ulaşılır:

$$\widehat{lu}_0^0 = -\frac{z_{-1} \widetilde{c}_{-1}}{z_0} \frac{1}{z_0 \widetilde{c}_0} + \left( \frac{\widetilde{b}_0}{\widetilde{c}_0} - \frac{z_1}{z_0} \right) \left[ -\frac{z_0 \widetilde{c}_0}{z_1} \frac{1}{z_1 \widetilde{c}_1} + \frac{z_0 \widetilde{c}_0}{z_1 \widetilde{c}_1 z_1} + \frac{1}{z_0} \right] \quad (5.20)$$

$n=0$  ve  $\lambda_0=0$  için (3.5) kullanılarak;

$$-\frac{\widetilde{b}_0}{\widetilde{c}_0} + \frac{z_1}{z_0} + \frac{\widetilde{c}_{-1} z_{-1}}{\widetilde{c}_0 z_0} = 0 \quad (5.21)$$

sonucuna ulaşılır. Böylece;

$$\widehat{lu}_0^0 = -\frac{z_{-1}\tilde{c}_{-1}}{z_0} \frac{1}{z_0\tilde{c}_0} + \frac{\tilde{c}_{-1}z_{-1}}{\tilde{c}_0z_0} \left[ -\frac{z_0\tilde{c}_0}{z_1} \frac{1}{z_1\tilde{c}_1} + \frac{z_0\tilde{c}_0}{z_1\tilde{c}_1z_1} + \frac{1}{z_0} \right] \quad (5.22)$$

bulunur. Basit hesaplamalardan sonra,

$$\widehat{lu}_0^0 = 0 \quad (5.23)$$

elde edilir.

Sonuç olarak  $n=0, \dots, m-1$  için  $u_n^0$ , (4.3) 'ün bir çözümüdür ve dolayısıyla (4.3) ve (4.9) 'un  $\lambda_0 = 0$  özdeğerine karşılık gelen özfonksiyondur.

**Teorem 5.2:** Aşağıdaki sınır şartlarına sahip (5.3) sınır değer problemi,  $\tilde{v}_n$  için verilmiş olan orijinal sınır değer problemiyle (ki bu (3.5) ve (3.14) 'tür) aynıdır.

$$v_{-1} = 0, \quad v_{m-1} = 0 \quad (5.24)$$

Burada  $u_n^0$ , Lemma 5.1 'de tanımlandığı gibidir. Yani

$$u_n^0 := 1/z_{n-1}\tilde{c}_{n-1} \text{ 'dir.}$$

**İspat:** Tüm göstermemiz gereken  $c_n = \tilde{c}_n$  ve  $b_n = \tilde{b}_n$  olduğudur.  $u^0$  'ın yerine yazılmasıyla

$$c_n = \tilde{c}_n \quad (5.25)$$

elde edilir. Şimdi,

$$b_n = \left[ \frac{u_n^0 \widehat{c}_n}{u_{n+1}^0 \widehat{c}_{n+1}} - \frac{\widehat{c}_{n-1} u_{n-1}^0}{\widehat{c}_n u_n^0} + \frac{\widehat{b}_n}{\widehat{c}_n} - \lambda_0 \right] \frac{u_n^0 \widehat{c}_n}{u_{n+1}^0} \quad (5.26)$$

dır.  $c_n = \tilde{c}_n$  ve  $c_n = u_n^0 \widehat{c}_n / u_{n+1}^0$  olduğundan dolayı,

$$b_n = \left[ \frac{\tilde{c}_n}{\widehat{c}_{n+1}} - \frac{\tilde{c}_{n-1}}{\widehat{c}_n} + \frac{z_{n-1}\tilde{c}_{n-1}}{z_n\tilde{c}_n} + \frac{z_n}{z_{n-1}} - \lambda_0 \right] \tilde{c}_n \quad (5.27)$$

eşitliği elde edilir. Burada  $\widehat{c}$  ifadesi yerleştirilirse,

$$b_n = \left[ \frac{\tilde{c}_n z_{n+1}}{\tilde{c}_n z_n} - \frac{\tilde{c}_{n-1} z_n}{\tilde{c}_{n-1} z_{n-1}} + \frac{\tilde{c}_{n-1} z_{n-1}}{\tilde{c}_n z_n} + \frac{z_n}{z_{n-1}} - \lambda_0 \right] \tilde{c}_n \quad (5.28)$$

bulunur. Fakat  $z_n$  ,  $\lambda = \lambda_0 = 0$  için (3.5) olarak verilen

$$\tilde{c}_n \tilde{y}_{n+1} - \tilde{b}_n \tilde{y}_n + \tilde{c}_{n-1} \tilde{y}_{n-1} = -\tilde{c}_n \lambda \tilde{y}_n \quad , \quad n = 0, \dots, m-2$$

denklemini sağladığından, bu ifadenin yazılmasıyla birlikte,

$$b_n = \left[ \frac{\tilde{b}_n z_n}{z_n \tilde{c}_n} \right] \tilde{c}_n = \tilde{b}_n \quad (5.29)$$

sonucuna ulaşılır.

## KAYNAKLAR

- [1] Binding, P. A., Browne, P. J., Watson, B. A. (2001). Spectral isomorphisms between generalized SturmLiouville problems in Linear Operators and Matrices, Operator Theory: Advances and Applications. Basel: Birkhauser.
- [2] Browne, P. J. and Nilsen, R. V. (1983). On difference operators and their factorization. *Canadian Journal of Mathematics*. **35**(5), 873–897.
- [3] Binding, P. A., Browne P. J., Watson, B. A. (2006). Sturm-Liouville problems with reducible boundary conditions. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*. **49**(3), 593–608.
- [4] Binding, P. A., Browne P. J., Watson, B. A. (2002). Sturm-Liouville problems with boundary conditions rationally dependent on the eigenparameter II. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. **148**(1), 147–168.
- [5] Binding, P. A., Browne P. J., Watson, B. A. (2001). Transformations between Sturm-Liouville problems with eigenvalue dependent and independent boundary conditions. *The Bulletin of the London Mathematical Society*. **33**(6), 749–757.
- [6] Teschl, G. (2000). Jacobi Operators and Completely Integrable Nonlinear Lattices. vol 72. RI, USA: Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematical Society.
- [7] Miller, K.S. (1968). Linear Difference Equations. New York, USA: W. A. Benjamin.
- [8] Miller, K.S. (1966). An Introduction to the Calculus of Finite Differences and Difference Equations. New York, USA: Dover.

- [9] Atkinson, F. V. (1964). *Discrete and Continuous Boundary Value Problems*. New York, USA: Academic Press.
- [10] Gautschi, W. (2004). *Orthogonal Polynomials: Computation and Approximation*, Numerical Mathematics and Scientific Computation. New York, USA: Oxford University Press.
- [11] Currie, S., Love, A. (2010). Transformations of difference equations I. *Advances of Difference Equations*. **2010**, 947058
- [12] Shi, Y., Chen, S. (1999). Spectral theory of second-order vector difference equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. **239**(2), 195–212.