

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

CESÀRO TOPLANABİLİR
İKİ KATLI İNTEGRALLER İÇİN
TAUBER TİPİ KOŞULLAR

Çağla KAMBAK

Tez Danışmanı: Prof. Dr. İbrahim ÇANAK

Matematik Anabilim Dalı

Bilim Dalı Kodu: 403.03.01

Sunuş Tarihi: 28.12.2018

Bornova-İZMİR

2018

Çağla KAMBAK tarafından YÜKSEK LİSANS tezi olarak sunulan “Cesàro toplanabilir iki katlı integraller için Tauber tipi koşullar” başlıklı bu çalışma E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi’nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve **28.12.2018** tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/~~oyçokluğu~~ ile başarılı bulunmuştur.

Jüri üyeleri

İmza

Jüri Başkanı : Prof. Dr. İbrahim ÇANAK

İ. Çanak

Raportör Üye : Doç. Dr. Tahsin ÖNER

T. Öner

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Yılmaz ERDEM

Y. Erdem

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Cesàro toplanabilir iki katlı integraller için Tauber tipi koşullar” başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarımı ihlal edici bir davranışının olmadığını, bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlanmasından yazıma kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

28/12/2018

İmzası

Çağla KAMBAK

ÖZET

**CESÀRO TOPLANABİLİR
İKİ KATLI İNTEGRALLER İÇİN
TAUBER TİPİ KOŞULLAR**

KAMBAK, Çağla

Yüksek Lisans Tezi, Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı : Prof. Dr. İbrahim ÇANAK

Aralık 2018, 31 sayfa

Bu çalışma esas olarak üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, kısaca toplanabilme metotları ve Tauber teorisinin tarihsel gelişim sürecinden bahsedilerek, tek katlı ve iki katlı integrallerde Cesàro toplanabilme alanında yapılan çalışmalar özetlenecektir. Aynı zamanda tezde yapılacak çalışmalar hakkında bilgi verilecektir.

İkinci bölümde, ilk olarak tek katlı integrallerin Cesàro toplanabilirliği hakkında temel bilgiler verilecektir. Ardından iki katlı integrallerin Cesàro toplanabilirliği için bazı temel tanım ve ifadeler verilerek $(C, 1, 1)$ toplanabilme metodu için Tauber tipi koşullar ispatlanacaktır.

Üçüncü bölümde, iki değişkenli fonksiyonlar için Cesàro toplanabilme kavramı tanıtılacak ve daha sonra bu kavram kullanılarak Tauber tipi koşullar ispatlanacaktır.

Anahtar Sözcükler: İki katlı integraller, Cesàro toplanabilme metodu, $(C, 1, 1)$, $(C, 1, 0)$ ve $(C, 0, 1)$ toplanabilme, Tauber tipi teoremler, yavaş azalan fonksiyonlar, yavaş artan fonksiyonlar, yavaş salınımlı fonksiyonlar.

ABSTRACT

TAUBERIAN CONDITIONS FOR CESÀRO SUMMABLE DOUBLE INTEGRALS

KAMBAK, Çağla

MSc in Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. İbrahim ÇANAK

December 2018, 31 pages

This thesis essentially consists of three chapters.

In the first chapter, briefly, summability methods and the historical developments of Tauberian theory will be mentioned and studies on the subject of Cesàro summability for single and double integrals will be summarized. Also, there will be given information about the studies which will be done in the thesis.

In the second chapter, firstly there will be given some basic information about the Cesàro summability of single integrals. And then, for the Cesàro summability of double integrals, some definitions and notations will be given and Tauberian conditions will be proved for $(C, 1, 1)$ summability methods.

In the third chapter, the concept of Cesàro summability for two variable functions will be presented and moreover Tauberian conditions will be proved by using this concept.

Key Words: Double integrals, Cesàro mean method of summability, $(C, 1, 1)$, $(C, 1, 0)$ ve $(C, 0, 1)$ summability, Tauberian type theorems, slowly decreasing function, slowly increasing function, slowly oscillating function. generator sequences.

TEŞEKKÜR

İki yıllık bir çalışmanın ürünü olan bu tezin hazırlanması sürecinde,

- disiplinli çalışma anlayışını hayatıma aşıl原因, deneyimlerinden, bilgilerinden, yaptığı çalışmalarından faydalandığım, insani ve ahlaki değerleri ile de örnek edindiğim, yanında çalışmaktan onur duyduğum ve ayrıca tecrübelerinden yararlanırken göstermiş olduğu hoşgörü ve sabrından, desteğini hiçbir zaman esirgemeyen ve akademik hayatıma ismi altında başlamakta onur duyduğum değerli danışmanım Prof. Dr. İbrahim ÇANAK’a,
- akademik kariyerime adımımı attığım ilk günden beri beni cesaretlendiren, yaşamım boyunca icra etmek istediğim meslekte var olmam yönünde ellerinden geleni yapan, maddi ve manevi desteğini hiçbir zaman esirgemeyen aileme ve aşıl原因acağını düşündüğüm sıkıntılarıma sabırla dinleyip, destek olan dostlarıma

teşekkürü bir borç bilirim.

ÇAĞLA KAMBAK

Aralık 2018

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	vii
ABSTRACT	ix
TEŞEKKÜR	xi
SİMGELER DİZİNİ	xv
1 GİRİŞ	1
2 CESÀRO TOPLANABİLME METODU İÇİN TANIM VE TE- OREMLER	3
2.1 $\mathbb{R}_+$ Üzerinde İntegrallerin $(C,1)$ Toplanabilirliği	3
2.1.1 Tek Katlı İntegrallerde Cesàro Toplanabilme Metodu İçin Temel Tanımlar	3
2.1.2 Cesàro Toplanabilir Tek Katlı İntegraller İçin Tauber Tipi Koşullar	6
2.2 $\mathbb{R}_+^2$ Üzerinde İki Katlı İntegrallerin $(C,1,1)$ Toplanabilirliği	9
2.2.1 İki Katlı İntegrallerde Cesàro Toplanabilme Metodu İçin Temel Tanımlar	9
2.2.2 Cesàro Toplanabilir İki Katlı İntegraller İçin Tauber Tipi Koşullar .	12
2.2.3 $\mathbb{R}_+^2$ Üzerinde İki Katlı İntegrallerin $(C,1,0)$ Toplanabilirliği	16
3 İKİ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR İÇİN CESÀRO TOPLA- NABİLİRLİK	19
3.1 (C, α) Toplanabilirlik	19
3.2 (C, α, β) Toplanabilirlik	19
3.2.1 $\alpha = 1, \beta = 0$ yada $\alpha = 0, \beta = 1$ Durumu	24
3.2.2 $\alpha = 1, \beta = 1$ Durumu	25
KAYNAKLAR DİZİNİ	29
ÖZGEÇMİŞ	31



SİMGELER DİZİNİ

<u>Simge</u>	<u>Açıklama</u>
$s(t)$	tek değişkenli fonksiyon
$\int_0^\infty$	genelleştirilmiş integral
$\sigma(t)$	tek katlı integralin Cesàro ortalaması
$\sup$	üst sınırlarının en küçüğü
$\inf$	alt sınırlarının en büyüğü
$\limsup s(t)$	$s(t)$ fonksiyonunun üst limiti
$\liminf s(t)$	$s(t)$ fonksiyonunun alt limiti
λ_n	λ_n nin tam kısmı
∂	kısmi türev
$\mathbb{N}$	doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	reel sayılar kümesi
$f(x, y)$	iki değişkenli fonksiyon
$\int_0^\infty \int_0^\infty$	iki katlı genelleştirilmiş integral
$\sigma(u, v)$	iki katlı integralin Cesàro ortalaması
$(C, 1, 1)$	$(1, 1)$ anlamında Cesàro metodu
$(C, 1, 0)$	$(1, 0)$ anlamında Cesàro metodu
$(C, 0, 1)$	$(0, 1)$ anlamında Cesàro metodu

1 GİRİŞ

Toplanabilme teorisi, genelleştirilmiş anlamda yakınsak dizilerin davranışları hakkında bilgi sağlayarak, günümüze kadar ulaşmış ve bunun yanı sıra toplanabilme metotları üzerine birçok çalışma yapılmıştır. Toplanabilme metotları, ıraksak bazı sonsuz serileri toplamak ya da yakınsak serilerin yakınsama hızını arttırmak için tanımlanmışlardır. Bu kapsamda birçok toplanabilme metodu tanımlanmış ve aralarındaki ilişkiler incelenmiştir. Bu toplanabilme metotlarına örnek olarak, Abel, Cesàro, Nörlund, Hölder ve ağırlıklı ortalama metodu verilebilir.

Yakınsak olan her dizi regüler bir toplanabilme metoduyla yakınsadığı değere toplanabilir. Ancak regüler metot tarafından toplanabildiği değere yakınsak olmak zorunda değildir. Bu ters durumun gerçekleşmesi için uygun bazı koşullara ihtiyaç duyulur. Klasik Tauber teorisi, bir toplanabilme metodu tarafından toplanan dizinin yakınsaklığının elde edilmesi için gerekli olan bu koşulları bulmak üzerine kurulmuştur. İlk olarak bu tipteki koşullar (1897) yılında Alfred Tauber tarafından verilmiştir. Bundan dolayı yakınsaklık için gereken koşullara Tauber tipi koşul ve bu tip koşulları kapsayan teoremlere de Tauber tipi teoremler denilmiştir. A. Tauber'in başlattığı çalışmalar ile birlikte toplanabilme teorisi gelişerek çeşitli toplanabilme metotlarıyla günümüze kadar gelmiştir. Bu alandaki çalışmalar son yıllara kadar tek katlı integraller üzerine olsa da son yıllarda tek katlı integrallerden faydalanarak iki katlı integraller üzerine de yapılmıştır.

Bu tez kapsamında tek katlı ve iki katlı integraller için Cesàro toplanabilme metodu ele alınacak ve iki katlı Cesàro toplanabilir integraller için Tauber tipi teoremler verilecektir.

Cesàro toplanabilme metodu bu süreç esnasında tanıtılmış olan klasik toplanabilme metotlarından. Cesàro toplanabilme metodu için yapılan çalışmaların amacı verilen Tauber tipi koşulların zayıflatılmasıdır. Bu doğrultuda, tek katlı integrallerde Cesàro toplanabilme metodu için bu alana katkı sağlayan başlıca isimler; Landau (1910), Móricz (1994), Schmidt (1925) ve Çanak ve Totur (2011) olmuştur. Daha sonra Móricz (2000) ve Çanak ve Totur (2015) gibi başlıca isimler tek katlı integraller için verilen Tauber tipi koşulları ve Tauber tipi teoremleri

geniřleterek iki katlı integraller için vermiřlerdir.

Bu tezin amacı, iki katlı integraller için Cesàro toplanabilme metodunun özelliklerini tanıtmak ve daha önce tek katlı integraller için verilmiş bazı Tauber tipi teoremlerin, iki katlı integraller için benzerlerini ispatlamaktır.



2 CESÀRO TOPLANABİLME METODU İÇİN TANIM VE TEOREMLER

2.1 $\mathbb{R}_+$ Üzerinde İntegrallerin (C,1) Toplanabilirliği

Bu bölümde ilk olarak, tez boyunca kullanılacak Cesàro toplanabilme metodu için tek katlı integrallerdeki temel tanım ve özellikler verilecektir. Ardından, toplanabilme teorisindeki bazı metot ve kavramlardan bahsedilecek ve bu metot ve kavramları içeren bazı Tauber tipi teoremlere yer verilecektir.

2.1.1 Tek Katlı İntegrallerde Cesàro Toplanabilme Metodu İçin Temel Tanımlar

Tanım 2.1 (Móricz ve Németh, 2000) *Kompleks değerli $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu $0 < t < \infty$ için her sonlu $(0, t)$ aralığında Lebesgue anlamında integrallenebilir olsun. Bu durumda, kısaca $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ yazılabilir. Her $t > 0$ için*

$$s(t) = \int_0^t f(x)dx \quad (1)$$

şeklinde ifade edilir.

$t > 0$ için

$$\sigma(t) = \frac{1}{t} \int_0^t s(u)du$$

şeklinde tanımlansın. Eğer

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = A \quad (2)$$

ise o halde

$$\int_0^\infty f(x)dx \quad (3)$$

integraline A sonlu sayısına (C,1) toplanabilirdir denir.

Eğer limit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = A \quad (4)$$

mevcut ise yani, $\int_0^\infty f(x)dx$ genelleştirilmiş integrali A sonlu sayısına yakınsar ise o halde (2) de limit vardır. Bu durumun tersi genellikle doğru değildir.

Eğer f fonksiyonu $\mathbb{R}_+$ üzerinde sabit işaretli ise o halde (2) ve (4) limitleri birbirine denktir. Bu sonuç Fubini teoreminden kolayca elde edilir:

$$\sigma(t) = \frac{1}{t} \int_0^t du \int_0^u f(x)dx = \int_0^t \left(1 - \frac{x}{t}\right) f(x)dx.$$

Ayrıca, (3) integralinin $(C, 1)$ toplanabilirliği, $x_0 > 0$ sabit olmak üzere, herhangi bir sonlu $(0, x_0)$ aralığında $f(x)$ fonksiyonunun aldığı değere bağlı değildir.

Tanım 2.2 (Móricz ve Németh, 2000) $\mathbb{R}_+$ üzerinde tanımlı reel değerli bir $s(t)$ fonksiyonu

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1+0} \liminf_{t \rightarrow \infty} \min_{t \leq x \leq \lambda t} [s(x) - s(t)] \geq 0 \quad (5)$$

koşulunu sağlıyorsa $s(t)$ fonksiyonuna yavaş azalan denir.

Móricz $s(t)$ reel değerli fonksiyonu için (5) koşulunun

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1-0} \liminf_{t \rightarrow \infty} \min_{\lambda t \leq x \leq t} [s(t) - s(x)] \geq 0$$

koşuluna denk olduğunu ispatlamıştır.

Hardy (1956) sonlu bir değere $(C, 1)$ toplanabilir bir integralin yavaş azalan olması durumunda aynı değere yakınsadığını ispatlamıştır.

(5) koşuluna denk olarak, her $\epsilon > 0$ için öyle bir $t_0 \geq 0$ ve bir $\lambda > 1$ vardır ki $t_0 < t < x < \lambda t$ olmak üzere

$$s(x) - s(t) \geq -\epsilon$$

şeklinde yazılabilir.

Özel olarak, bir $H > 0$ sabiti ve bir $x_0 \geq 0$ vardır öyle ki hemen hemen her $x > x_0$ için,

$$xf(x) \geq -H \quad (6)$$

koşulu sağlanırsa (5) koşulu sağlanır.

Gerçekten herhangi $x_0 < t < x < \infty$ için

$$\begin{aligned} s(x) - s(t) &= \int_t^x f(u)du \geq -H \int_t^x \frac{du}{u} \\ &= -H \log \frac{x}{t} \geq -H \log \lambda \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \min_{t \leq x \leq \lambda t} [s(x) - s(t)] \geq -H \log \lambda, \quad \lambda > 1$$

sonuçlandırılır.

$\lambda \rightarrow 1 + 0$ alarak (5) eşitsizliği elde edilir.

Móricz (2000) sonlu bir değere $(C, 1)$ toplanabilir bir fonksiyonun yavaş azalan ise fonksiyonun aynı yere yakınsadığını ispatlamıştır.

Sonuç olarak reel değerli bir fonksiyonun yavaş azalanlığı Cesàro toplanabilme metodu için bir Tauber tipi koşuldur.

Tanım 2.3 (Móricz ve Németh, 2000) $\mathbb{R}_+$ üzerinde tanımlı reel değerli bir $s(t)$ fonksiyonu

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1+0} \limsup_{t \rightarrow \infty} \max_{t \leq x \leq \lambda t} [s(x) - s(t)] \leq 0 \quad (7)$$

koşulunu sağlıyorsa $s(t)$ fonksiyonuna yavaş artan denir.

$s(t)$ reel değerli fonksiyonu için (7) koşulu

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1+0} \limsup_{t \rightarrow \infty} \max_{\lambda t \leq x \leq t} [s(t) - s(x)] \leq 0$$

koşuluna denktir.

(7) koşulu denk olarak, her $\epsilon > 0$ için öyle bir $t_0 \geq 0$ ve bir $\lambda > 1$ vardır ki $t_0 < t < x \leq \lambda t$ olmak üzere

$$s(x) - s(t) \leq \epsilon$$

şeklinde yazılabilir.

Özel olarak (5) $\Rightarrow$ (6) gerektirmesine benzer şekilde $H > 0$ sabiti ve $x_0 \geq 0$ vardır öyle ki hemen hemen her $x > x_0$ için

$$xf(x) \leq H \quad (8)$$

koşulu yazılabilir.

Tanım 2.4 (Móricz ve Németh, 2000) $\mathbb{R}_+$ üzerinde tanımlı kompleks değerli $s(t)$ fonksiyonu

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1+0} \limsup_{t \rightarrow \infty} \max_{t \leq x \leq \lambda t} |s(x) - s(t)| = 0 \quad (9)$$

koşulunu sağlıyorsa $s(t)$ fonksiyonuna yavaş salınımlı denir.

$s(t)$ kompleks değerli fonksiyonu için (9) koşulu

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1-0} \limsup_{t \rightarrow \infty} \max_{\lambda t \leq x \leq t} |s(t) - s(x)| = 0$$

koşuluna denktir.

(9) koşulu denk olarak, her $\epsilon > 0$ için öyle bir $t_0 \geq 0$ ve bir $\lambda > 1$ vardır ki $t_0 < t < x \leq \lambda t$ olmak üzere

$$|s(x) - s(t)| \leq \epsilon$$

şeklinde yazılabilir.

Özel olarak, bir $H > 0$ sabiti ve bir $x_0 \geq 0$ vardır öyle ki hemen hemen her $x > x_0$ için,

$$|xf(x)| \leq H \quad (10)$$

koşulu sağlanır ise (9) koşulu sağlanır.

2.1.2 Cesàro Toplanabilir Tek Katlı İntegraller İçin Tauber Tipi Koşullar

Tezin bu kısmında, tek katlı integraller için Cesàro metodu ile toplanabilirlikten yakınsaklığa geçişi sağlayan bazı Tauber tipi koşullardan bahsedilecektir.

Aşağıda verilecek teoremlerin ispatlarında önemli rol oynayan lemma ve bazı sonuçlar verilmiştir.

Lemma 2.1 (*Móricz ve Németh, 2000*) *Eğer (3) integrali A sonlu sayısına (C, 1) toplanabilir ise o halde $\lambda \neq 1$ olmak üzere her $0 < \lambda < \infty$ için*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda t - t} \int_t^{\lambda t} s(x) dx = A \quad (11)$$

eşitliği elde edilir.

İspat. $\lambda > 1$ olsun. Tanımdan,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda t - t} \int_t^{\lambda t} s(x) dx &= \frac{1}{\lambda t} \left(1 + \frac{1}{\lambda - 1} \right) \int_0^{\lambda t} s(x) dx - \frac{1}{(\lambda - 1)t} \int_0^t s(x) dx \\ &= \sigma(\lambda t) - \frac{1}{\lambda - 1} [\sigma(\lambda t) - \sigma(t)]. \end{aligned}$$

(2) limitinden (11) kolayca elde edilir.

$0 < \lambda < 1$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} \frac{1}{t - \lambda t} \int_{\lambda t}^t s(x) dx &= \frac{1}{(1 - \lambda)t} \int_0^t s(x) dx + \frac{1}{\lambda t} \left(1 - \frac{1}{1 - \lambda}\right) \int_0^{\lambda t} s(x) dx \\ &= \frac{1}{1 - \lambda} [\sigma(t) - \sigma(\lambda t)] + \sigma(\lambda t) \end{aligned}$$

tekrar (2) limitinden (11) elde edilir.

Aşağıda bazı teoremler ve sonuçlar verilmiştir. İlk olarak f fonksiyonun reel değerli olduğu durum göz önüne alınarak aşağıdaki tek taraflı Tauber tipi koşullar verilecektir.

Teorem 2.1 (*Móricz ve Németh, 2000*) $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}_+)$ reel değerli fonksiyonu olmak üzere (3) integrali A sonlu sayısına $(C, 1)$ toplanabilir olsun. O halde (4) koşulunun sağlanması için gerek ve yeter koşul,

$$\sup_{\lambda > 1} \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda t - t} \int_t^{\lambda t} [s(x) - s(t)] dx \geq 0 \quad (12)$$

ve

$$\sup_{0 < \lambda < 1} \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t - \lambda t} \int_{\lambda t}^t [s(t) - s(x)] dx \geq 0 \quad (13)$$

şartlarının sağlanmasıdır.

Ek olarak, aşağıdaki eşitsizlikler sırasıyla (12) ve (13) eşitsizliklerinden daha güçlü eşitsizliklerdir.

Her $\lambda > 1$ için

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda t - t} \int_t^{\lambda t} [s(x) - s(t)] dx = 0 \quad (14)$$

ve her $0 < \lambda < 1$ için

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t - \lambda t} \int_{\lambda t}^t [s(t) - s(x)] dx = 0. \quad (15)$$

İspat. (Gerek Koşul). (4) koşulunun sağlandığını kabul edelim. Lemma 2.1 den,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda t - t} \int_t^{\lambda t} [s(x) - s(t)] dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda t - t} \int_t^{\lambda t} s(x) dx - \lim_{t \rightarrow \infty} s(t) \\ &= A - A = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu $\lambda > 1$ için (14) ve $0 < \lambda < 1$ için (15) koşulunu ispatlar.

(Yeter Koşul). (2), (12) ve (13) koşullarının sağlandığını kabul edelim. (4) eşitliğinin

sağlandığını ispatlamalıyız. Keyfi bir $\epsilon > 0$ verilsin. (12) eşitsizliğinden öyle bir $\lambda_1 > 1$ vardır ki

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_1 t - t} \int_t^{\lambda_1 t} [s(x) - s(t)] dx \geq -\epsilon \quad (16)$$

dir ve (13) eşitsizliğinden öyle bir $0 < \lambda_2 < 1$ vardır ki

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t - \lambda_2 t} \int_{\lambda_2 t}^t [s(t) - s(x)] dx \geq -\epsilon. \quad (17)$$

dir. (2) ve Lemma 2.1'den, her $\lambda > 1$ için

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda t - t} \int_t^{\lambda t} [s(x) - s(t)] dx = A - \limsup_{t \rightarrow \infty} s(t),$$

her $0 < \lambda < 1$ için

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t - \lambda t} \int_{\lambda t}^t [s(t) - s(x)] dx = \liminf_{t \rightarrow \infty} s(t) - A$$

elde edilir. Böylece

$$A - \epsilon \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} s(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} s(t) \leq A + \epsilon.$$

olduğu elde edilir. $\epsilon > 0$ keyfi küçük olduğundan, (4) elde edilir.

Sonuç 2.1 (*Móricz ve Németh, 2000*) (12) ve (13) koşullarının simetrik eşleri aşağıda verilmiştir:

$$\inf_{\lambda > 1} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda t - t} \int_t^{\lambda t} [s(x) - s(t)] dx \leq 0 \quad (18)$$

ve

$$\inf_{0 < \lambda < 1} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t - \lambda t} \int_{\lambda t}^t [s(t) - s(x)] dx \leq 0. \quad (19)$$

Yani, Teorem 2.1'de (12) ve (13) koşulları yerine sırasıyla (18) ve (19) koşulları alınabilir.

Sonuç 2.2 (*Móricz ve Németh, 2000*) $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}_+)$ reel değerli fonksiyonu için $\int_0^\infty f(x) dx$ integrali A sonlu sayısına $(C, 1)$ toplanabilir ve $s(t)$ integral fonksiyonu yavaş azalan ise $s(t)$ fonksiyonu A sonlu sayısına yakınsar.

Sonuç 2.3 (*Móricz ve Németh, 2000*) $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}_+)$ reel değerli fonksiyonu için $\int_0^\infty f(x) dx$ integrali A sonlu sayısına $(C, 1)$ toplanabilir olsun. (6) koşulu sağlanırsa, $t \rightarrow \infty$ iken $s(t)$ fonksiyonu A sonlu sayısına yakınsar.

Teorem 2.1 kompleks değerli fonksiyonlar için aşağıdaki gibi genişletilebilir.

Teorem 2.2 (Móricz ve Németh, 2000) $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}_+)$ kompleks değerli fonksiyonu olmak üzere (3) integrali A sonlu sayısına $(C, 1)$ toplanabilir olsun. O halde (4) eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul,

$$\inf_{\substack{0 < \lambda < \infty \\ \lambda \neq 1}} \limsup_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\lambda t - t} \int_t^{\lambda t} [s(x) - s(t)] dx \right| = 0$$

şartının sağlanmasıdır.

İspat. Bu teoremin ispatı Teorem 2.1 in ispatına benzer şekilde elde edilebilir.

Sonuç 2.4 (Móricz ve Németh, 2000) $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}_+)$ kompleks değerli fonksiyon olmak üzere $\int_0^\infty f(x)dx$ integrali A sonlu sayısına $(C, 1)$ toplanabilir olsun. Eğer (9) koşulu sağlanırsa, o halde $t \rightarrow \infty$ iken $s(t)$ fonksiyonu A sonlu sayısına yakınsar.

2.2 $\mathbb{R}_+^2$ Üzerinde İki Katlı İntegrallerin $(C, 1, 1)$ Toplanabilirliği

Tezin bu bölümünde, Cesàro toplanabilme metodunda iki katlı integraller için yeni tanımlamalar yapılmıştır ve bazı Tauber tipi koşullar iki katlı integraller için tanıtılmıştır.

2.2.1 İki Katlı İntegrallerde Cesàro Toplanabilme Metodu İçin Temel Tanımlar

Tanım 2.5 (Móricz, 2000) Kompleks değerli $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu $0 < u, v < \infty$ için $\mathbb{R}_+^2 = [0, \infty) \times [0, \infty)$ aralığı üzerinde Lebesgue anlamında integrallenebilir olsun. Bu durumda, kısaca $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}_+^2)$ yazılabilir. Her $t > 0$ için

$$s(u, v) = \int_0^u \int_0^v f(x, y) dx dy \quad (20)$$

şeklinde ifade edilebilir.

$$\sigma(u, v) = \sigma_{11} = \frac{1}{uv} \int_0^u \int_0^v s(w, z) dw dz \quad u, v > 0$$

şeklinde tanımlansın. Eğer

$$\lim_{u, v \rightarrow \infty} \sigma(u, v) = A \quad (21)$$

ise o halde

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(x, y) dx dy \quad (22)$$

integraline A sonlu sayısına $(C, 1, 1)$ (Cesàro) toplanabilir denir.

Eğer

$$\lim_{u, v \rightarrow \infty} s(u, v) = A \quad (23)$$

limiti mevcut diğer bir ifadeyle, $\int_0^\infty \int_0^\infty f(x, y) dx dy$ iki katlı genelleştirilmiş integrali A sonlu sayısına yakınsar ve eğer $s(u, v)$ fonksiyonu $\mathbb{R}_+^2$ de sınırlı ise o halde (21) limiti mevcuttur. $s(u, v)$, $\mathbb{R}_+^2$ üzerinde sınırlı olsa bile bu gerektirmenin tersi genellikle doğru değildir.

$f(x, y)$ fonksiyonu $\mathbb{R}_+^2$ üzerinde sabit işaretli olsun. O halde (21) limitinin mevcut olması için gerek ve yeter koşul $\mathbb{R}_+^2$ üzerinde $s(u, v)$ 'nin sınırlılığine denk gelen (23) limitinin varlığıdır. Bu sonuç Fubini teoremi ile hemen elde edilir:

$$\begin{aligned} \sigma(u, v) &= \frac{1}{uv} \int_0^u \int_0^v dw dz \int_0^w \int_0^z f(x, y) dx dy \\ &= \int_0^u \int_0^v \left(1 - \frac{x}{u}\right) \left(1 - \frac{y}{v}\right) f(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

(22) integralinin $(C, 1, 1)$ toplanabilirliği, $u_0, v_0 > 0$ sabit olmak üzere herhangi $(0, u_0) \times (0, v_0)$ sonlu dikdörtgeni üzerindeki $f(x, y)$ fonksiyonunun aldığı değere bağlı değildir.

Bu tezde, iki katlı integraller için yakınsaklık kavramı ile P -yakınsak (Pringsheim yakınsak)lığı anlayacağız.

Tanım 2.6 (Móricz, 2000) $\mathbb{R}_+^2$ üzerinde tanımlı reel değerli $s(u, v)$ fonksiyonu

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1+0} \liminf_{u, v \rightarrow \infty} \min_{u \leq x \leq \lambda u} [s(x, v) - s(u, v)] \geq 0 \quad (24)$$

koşulunu sağlıyorsa $s(u, v)$ fonksiyonuna birinci değişkene göre yavaş azalan denir

yada denk olarak

her $\epsilon > 0$ için öyle bir $u_0 \geq 0$ ve $\lambda > 1$ vardır ki $u_0 < u < x \leq \lambda u$ ve $u_0 < v$ iken

$$s(x, v) - s(u, v) \geq -\epsilon,$$

şeklinde yazılabilir.

Benzer şekilde $\mathbb{R}_+^2$ üzerinde tanımlı reel değerli $s(u, v)$ fonksiyonu

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1+0} \liminf_{u, v \rightarrow \infty} \min_{v \leq y \leq \lambda v} [s(u, y) - s(u, v)] \geq 0 \quad (25)$$

koşulunu sağlıyorsa $s(u, v)$ fonksiyonuna ikinci değişkene göre yavaş azalan denir.

Özel olarak, öyle bir $H > 0$ sabiti ve $x_0 \geq 0$ vardır ki $x, v > x_0$ olmak üzere hemen hemen her $(x, v) \in \mathbb{R}_+^2$ için

$$x \int_0^v f(x, z) dz \geq -H, \quad (26)$$

(24) koşulunun sağlanması için yeter Landau tip koşuldur.

Benzer şekilde öyle bir $H > 0$ sabiti ve $u, y > x_0$ olmak üzere hemen hemen her $(u, y) \in \mathbb{R}_+^2$ için

$$y \int_0^u f(w, y) dw \geq -H, \quad (27)$$

(25) koşulunun sağlanması için yeter Landau tip koşuldur.

Tanım 2.7 (Móricz, 2000) $\mathbb{R}_+^2$ üzerinde tanımlı reel değerli $s(u, v)$ fonksiyonu

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1+0} \limsup_{u, v \rightarrow \infty} \max_{u \leq x \leq \lambda u} [s(x, v) - s(u, v)] \leq 0 \quad (28)$$

koşulunu sağlıyorsa $s(u, v)$ fonksiyonuna birinci değişkene göre yavaş artan denir

yada denk olarak

her $\epsilon > 0$ için öyle bir $u_0 \geq 0$ ve $\lambda > 1$ vardır ki $u_0 < u < x \leq \lambda u$ ve $u_0 < v$ iken

$$s(x, v) - s(u, v) \leq -\epsilon,$$

şeklinde yazılabilir.

Benzer şekilde $\mathbb{R}_+^2$ üzerinde tanımlı reel değerli $s(u, v)$ fonksiyonu

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1+0} \limsup_{u, v \rightarrow \infty} \max_{v \leq y \leq \lambda v} [s(u, y) - s(u, v)] \leq 0 \quad (29)$$

koşulunu sağlıyorsa $s(u, v)$ fonksiyonuna ikinci değişkene göre yavaş artan denir.

Özel olarak, öyle bir $H > 0$ sabiti ve $x_0 \geq 0$ vardır ki $x, v > x_0$ olmak üzere hemen hemen her $(x, v) \in \mathbb{R}_+^2$ için

$$x \int_0^v f(x, z) dz \leq H,$$

(28) koşulunun sağlanması için yeter Landau tip koşuldur.

Benzer şekilde, öyle bir $H > 0$ sabiti ve $u, y > x_0$ vardır ki hemen hemen her $(u, y) \in \mathbb{R}_+^2$ için

$$y \int_0^u f(w, y) dw \leq H,$$

(29) koşulunun sağlanması için yeter Landau tip koşuldur.

Tanım 2.8 (Móricz, 2000) $\mathbb{R}_+^2$ üzerinde tanımlı kompleks değerli $s(u, v)$ fonksiyonu

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1+0} \limsup_{u, v \rightarrow \infty} \max_{u \leq x \leq \lambda u} |s(x, v) - s(u, v)| = 0 \quad (30)$$

koşulunu sağlıyorsa $s(u, v)$ fonksiyonuna birinci değişkene göre yavaş salınımlı denir

yada denk olarak

her $\epsilon > 0$ için öyle bir $u_0 \geq 0$ ve $\lambda > 1$ vardır ki $u_0 < u < x \leq \lambda u$ ve $u_0 < v$ iken

$$|s(x, v) - s(u, v)| \leq \epsilon$$

şeklinde yazılabilir.

Benzer şekilde $\mathbb{R}_+^2$ üzerinde tanımlı kompleks değerli $s(u, v)$ fonksiyonu

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1+0} \limsup_{u, v \rightarrow \infty} \max_{v \leq y \leq \lambda v} |s(u, y) - s(u, v)| = 0 \quad (31)$$

koşulunu sağlıyorsa $s(u, v)$ fonksiyonuna ikinci değişkene göre yavaş salınımlı denir.

Özel olarak, öyle bir $H > 0$ sabiti ve $x_0 \geq 0$ vardır ki $x, v > x_0$ olmak üzere hemen hemen her $(x, v) \in \mathbb{R}_+^2$ için

$$\left| x \int_0^v f(x, z) dz \right| \leq H, \quad (32)$$

(30) koşulunun sağlanması için yeter Landau tip koşuldur.

Benzer şekilde öyle bir $H > 0$ sabiti ve $x_0 \geq 0$ vardır ki $u, y > x_0$ olmak üzere hemen hemen her $(u, y) \in \mathbb{R}_+^2$ için

$$\left| y \int_0^u f(w, y) dw \right| \leq H, \quad (33)$$

(31) koşulunun sağlanması için yeter Landau tip koşuldur.

2.2.2 Cesàro Toplanabilir İki Katlı İntegraller İçin Tauber Tipi Koşullar

Bu kısımda ilk olarak iki katlı integraller için Cesàro toplanabilme metodu ile yakınsaklık arasında gerek ve yeter koşullar verilecektir.

Aşağıda verilecek olan Lemma, Tauber tipi teoremin ispatında önemli rol oynamaktadır.

Lemma 2.2 (Móricz, 2000) (22) integrali A sonlu sayısına $(C, 1, 1)$ toplanabilir olsun.

O halde her $\lambda > 1$ için

$$\lim_{u, v \rightarrow \infty} \frac{1}{(\lambda u - u)(\lambda v - v)} \int_u^{\lambda u} \int_v^{\lambda v} s(x, y) dx dy = A \quad (34)$$

ve benzer şekilde her $0 < \lambda < 1$ için

$$\lim_{u,v \rightarrow \infty} \frac{1}{(u - \lambda u)(v - \lambda v)} \int_{\lambda u}^u \int_{\lambda v}^v s(x, y) dx dy = A \quad (35)$$

olur.

İspat. $\lambda > 1$ alalım. Tanımdan,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(\lambda u - u)(\lambda v - v)} \int_u^{\lambda u} \int_v^{\lambda v} s(x, y) dx dy \\ &= \frac{1}{(\lambda - 1)^2 uv} \left\{ \int_0^{\lambda u} \int_0^{\lambda v} - \int_0^{\lambda u} \int_0^v - \int_0^u \int_0^{\lambda v} + \int_0^u \int_0^v \right\} s(x, y) dx dy \\ &= \left(1 + \frac{1}{\lambda - 1}\right)^2 \frac{1}{\lambda u \lambda v} \int_0^{\lambda u} \int_0^{\lambda v} s(x, y) dx dy - \frac{1}{\lambda - 1} \left(1 + \frac{1}{\lambda - 1}\right) \frac{1}{\lambda uv} \int_0^{\lambda u} \int_0^v s(x, y) dx dy \\ &\quad - \frac{1}{\lambda - 1} \left(1 + \frac{1}{\lambda - 1}\right) \frac{1}{u \lambda v} \int_0^u \int_0^{\lambda v} s(x, y) dx dy + \frac{1}{(\lambda - 1)^2} \frac{1}{uv} \int_0^u \int_0^v s(x, y) dx dy \\ &= \left(1 + \frac{1}{\lambda - 1}\right)^2 \sigma(\lambda u, \lambda v) - \frac{1}{\lambda - 1} \left(1 + \frac{1}{\lambda - 1}\right) \sigma(\lambda u, v) \\ &\quad - \frac{1}{\lambda - 1} \left(1 + \frac{1}{\lambda - 1}\right) \sigma(u, \lambda v) + \frac{1}{(\lambda - 1)^2} \sigma(u, v) \\ &= \sigma(\lambda u, \lambda v) + \frac{1}{\lambda - 1} [\sigma(\lambda u, \lambda v) - \sigma(\lambda u, v)] \\ &\quad + \frac{1}{\lambda - 1} [\sigma(\lambda u, \lambda v) - \sigma(u, \lambda v)] \\ &\quad + \frac{1}{(\lambda - 1)^2} [\sigma(\lambda u, \lambda v) - \sigma(\lambda u, v) - \sigma(u, \lambda v) + \sigma(u, v)] \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. (21) eşitliğinden $\lambda > 1$ için

$$\left| \frac{1}{\lambda - 1} [\sigma(\lambda u, \lambda v) - \sigma(\lambda u, v)] \right| \leq \frac{1}{\lambda - 1} |\sigma(\lambda u, \lambda v) - \sigma(\lambda u, v)| \rightarrow 0 \quad (u, v) \rightarrow \infty$$

eşitsizliğine ulaşılır. Aynı durumun eşitliğin 3. ve 4. terimleri içinde geçerli olmasından ve (21) eşitliğinden dolayı, eşitliğin her iki tarafın $u, v \rightarrow \infty$ iken limiti alınır ise

$$\lim_{u,v \rightarrow \infty} \frac{1}{(\lambda u - u)(\lambda v - v)} \int_u^{\lambda u} \int_v^{\lambda v} s(x, y) dx dy = A$$

gösterilmek istenen elde edilir. Diğer bir taraftan, $0 < \lambda < 1$ için ispat benzer şekildedir.

Lemma 2.2, $(C, 1, 1)$ ortalamalarının sonlu bir değere yakınsak olmasının, hareketli Cesàro ortalamalarının da aynı değere yakınsak olması gerektirdiğini gösterir.

İlk olarak, f fonksiyonunun reel değerler aldığı durumu göz önünde bulunduralım. Teorem 2.3'de, $(C, 1, 1)$ toplanabilirliğinden elde edilen yakınsaklık için gerek ve yeter tek taraflı Tauber tipi koşullar verilecektir.

Teorem 2.3 (Móricz, 2000) $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}_+^2)$ reel değerli bir fonksiyon olmak üzere (22) integrali A sonlu sayısına $(C, 1, 1)$ toplanabilir olsun. O halde (23) koşulunun

sağlanması için gerek ve yeter koşul,

$$\sup_{\lambda > 1} \liminf_{u, v \rightarrow \infty} \frac{1}{(\lambda u - u)(\lambda v - v)} \int_u^{\lambda u} \int_v^{\lambda v} [s(x, y) - s(u, v)] dx dy \geq 0 \quad (36)$$

ve

$$\sup_{0 < \lambda < 1} \liminf_{u, v \rightarrow \infty} \frac{1}{(u - \lambda u)(v - \lambda v)} \int_{\lambda u}^u \int_{\lambda v}^v [s(u, v) - s(x, y)] dx dy \geq 0 \quad (37)$$

koşullarının sağlanmasıdır.

Benzer şekilde, (36) ve (37) koşulları sağlanırsa sırasıyla her $\lambda > 1$ için

$$\lim_{u, v \rightarrow \infty} \frac{1}{(\lambda u - u)(\lambda v - v)} \int_u^{\lambda u} \int_v^{\lambda v} [s(u, v) - s(x, y)] dx dy = 0 \quad (38)$$

ve her $0 < \lambda < 1$ için

$$\lim_{u, v \rightarrow \infty} \frac{1}{(u - \lambda u)(v - \lambda v)} \int_{\lambda u}^u \int_{\lambda v}^v [s(x, y) - s(u, v)] dx dy = 0 \quad (39)$$

daha güçlü koşulları elde edilir.

İspat.(Gerek Koşul). (21) ve (23) koşullarının sağlandığını kabul edelim. Lemma 2.2'den,

$$\begin{aligned} \lim_{u, v \rightarrow \infty} \frac{1}{(\lambda u - u)(\lambda v - v)} & \int_u^{\lambda u} \int_v^{\lambda v} [s(x, y) - s(u, v)] dx dy \\ &= \lim_{u, v \rightarrow \infty} \frac{1}{(\lambda u - u)(\lambda v - v)} \int_u^{\lambda u} \int_v^{\lambda v} s(x, y) dx dy \\ &\quad - \lim_{u, v \rightarrow \infty} s(u, v) \\ &= A - A = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu, $\lambda > 1$ için (38) ve $0 < \lambda < 1$ için (39) koşulunu ispatlar.

(Yeter Koşul). (21), (36) ve (37) koşullarının sağlandığını kabul edelim. Aynı zamanda (23) koşulunun sağlandığı ispatlanmalıdır. $\epsilon > 0$ olsun. O halde (36) eşitliğinden öyle $\lambda_1 > 1$ vardır ki

$$\liminf_{u, v \rightarrow \infty} \frac{1}{(\lambda_1 u - u)(\lambda_1 v - v)} \int_u^{\lambda_1 u} \int_v^{\lambda_1 v} [s(u, v) - s(x, y)] dx dy \geq -\epsilon \quad (40)$$

ve (37) eşitliğinden öyle $0 < \lambda_2 < 1$ vardır ki

$$\liminf_{u, v \rightarrow \infty} \frac{1}{(u - \lambda_2 u)(v - \lambda_2 v)} \int_{\lambda_2 u}^u \int_{\lambda_2 v}^v [s(u, v) - s(x, y)] dx dy \geq -\epsilon \quad (41)$$

elde edilir. (21) ve Lemma 2.2'den, her $\lambda > 1$ için,

$$\liminf_{u, v \rightarrow \infty} \frac{1}{(\lambda u - u)(\lambda v - v)} \int_u^{\lambda u} \int_v^{\lambda v} [s(x, y) - s(u, v)] dx dy = A - \limsup_{u, v \rightarrow \infty} s(u, v);$$

her $0 < \lambda < 1$ için

$$\liminf_{u,v \rightarrow \infty} \frac{1}{(u - \lambda u)(v - \lambda v)} \int_{\lambda u}^u \int_{\lambda v}^v [s(u, v) - s(x, y)] dx dy = \liminf_{u,v \rightarrow \infty} s(u, v) - A$$

elde edilir. Böylece

$$A - \epsilon \leq \liminf_{u,v \rightarrow \infty} s(u, v) \leq \limsup_{u,v \rightarrow \infty} s(u, v) \leq A + \epsilon.$$

elde edilir. $\epsilon > 0$ keyfi küçük olduğundan dolayı (23) eşitliği sağlanır.

Sonuç 2.5 (*Móricz, 2000*) (36) ve (37) koşullarının simetrik eşleri aşağıda verilmiştir:

$$\inf_{\lambda > 1} \limsup_{u,v \rightarrow \infty} \frac{1}{(\lambda u - u)(\lambda v - v)} \int_u^{\lambda u} \int_v^{\lambda v} [s(x, y) - s(u, v)] dx dy \leq 0 \quad (42)$$

ve

$$\inf_{0 < \lambda < 1} \limsup_{u,v \rightarrow \infty} \frac{1}{(u - \lambda u)(v - \lambda v)} \int_{\lambda u}^u \int_{\lambda v}^v [s(u, v) - s(x, y)] dx dy \leq 0. \quad (43)$$

Yani, Teorem 2.3'de (36) ve (37) koşulları yerine sırasıyla (42) ve (43) koşulları yazılabilir.

Sonuç 2.6 (*Móricz, 2000*) $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}_+^2)$ reel değerli bir fonksiyon olmak üzere (22) integrali A sonlu sayısına $(C, 1, 1)$ toplanabilir ve $s(u, v)$ fonksiyonu herbir değişken için yavaş azalan ise o halde (23) elde edilir.

İspat. Özel olarak (24) koşulu sağlansın. Eğer (26) koşulu varsa (24) koşulu da vardır. İlk olarak $s(u, v)$ 'nin tanımından,

$$\begin{aligned} s(x, v) - s(u, v) &= \int_0^x \int_0^v f(a, b) da db - \int_0^u \int_0^v f(a, b) da db \\ &= \int_u^x \int_0^v f(a, b) da db \\ s(x, v) - s(u, v) &\geq - \int_u^x \frac{H}{a} da = -H \ln \frac{x}{u} \end{aligned} \quad (44)$$

elde edilir. (24) koşulunu elde etmek için (44) eşitliğinde $u \leq x \leq \lambda u$ iken her iki tarafın minimumu alınır,

$$\min_{u \leq x \leq \lambda u} [s(x, v) - s(u, v)] \geq \min_{u \leq x \leq \lambda u} -H \ln \left(\frac{x}{u} \right) = -H \ln \lambda$$

elde edilir. Son eşitlikte $u, v \rightarrow \infty$ iken her iki tarafın alt limiti alınır

$$\liminf_{u,v \rightarrow \infty} \min_{u \leq x \leq \lambda u} [s(x, v) - s(u, v)] \geq -H \ln \lambda$$

elde edilir. Sağ taraftaki terim u, v den bağımsız olduğundan dolayı aynı kalır. Elde edilen son eşitlikte $\lambda \rightarrow 1 + 0$ iken her iki tarafın limitine geçilirse

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1+0} \liminf_{u, v \rightarrow \infty} \min_{u \leq x \leq \lambda u} [s(x, v) - s(u, v)] \geq 0$$

elde edilir. Yani (24) koşulu sağlanır. İspatın benzeri (27) $\Rightarrow$ (25) gerektirmesi içinde yapılır. $\square$

İkinci olarak, f fonksiyonunun kompleks değerli kabul edildiği genel durumu göz önünde bulunduralım. Teorem 2.4'de, $(C, 1, 1)$ toplanabilirliğinden elde edilen yakınsaklık için gerek ve yeter çift taraflı Tauber tipi koşullar verilecektir.

Teorem 2.4 (Móricz, 2000) $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}_+^2)$ kompleks değerli bir fonksiyon olmak üzere (22) integrali A sonlu sayısına $(C, 1, 1)$ toplanabilir olsun. O halde (23) koşulunun sağlanması için gerek ve yeter koşul:

(Her $\lambda > 1$ için (38) koşulunu ve $0 < \lambda < 1$ için (39) koşulunu elde ettiğimiz durumda):

$$\inf_{\substack{0 < \lambda < \infty \\ \lambda \neq 1}} \limsup_{u, v \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{(\lambda u - u)(\lambda v - v)} \int_u^{\lambda u} \int_v^{\lambda v} [s(x, y) - s(u, v)] dx dy \right| = 0 \quad (45)$$

İspat. Bu Teoremin ispatı Teorem 2.3 ile benzer şekilde verilebilir.

Sonuç 2.7 (Móricz, 2000) $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}_+^2)$ kompleks değerli bir fonksiyon olmak üzere (22) integrali A sonlu sayısına $(C, 1, 1)$ toplanabilir olsun. Eğer (30) koşulu sağlanırsa, o halde $u, v \rightarrow \infty$ iken $s(u, v)$ fonksiyonu A sonlu sayısına yakınsar.

2.2.3 $\mathbb{R}_+^2$ Üzerinde İki Katlı İntegrallerin $(C, 1, 0)$ Toplanabilirliği

Tanım 2.9 (Móricz, 2000) $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}_+^2)$ kompleks değerli fonksiyonu olsun.

$$\sigma_{10}(u, v) = \frac{1}{u} \int_0^u s(w, v) dw = \int_0^u \int_0^v \left(1 - \frac{x}{u}\right) f(x, y) dx dy \quad u, v > 0$$

şeklinde tanımlayalım. Eğer

$$\lim_{u, v \rightarrow \infty} \sigma_{10}(u, v) = A$$

ise (21) integraline A sonlu sayısına $(C, 1, 0)$ toplanabilir denir.

$(C, 1, 1)$ toplanabilirliğe benzer şekilde, $\mathbb{R}_+^2$ üzerinde iki katlı integrallerin $(C, 1, 0)$ toplanabilirliği teorisi geliştirilebilir. Benzerlikten dolayı ispatlar olmadan, kabaca bazı

teorem ve sonuçları verelim.

İlk olarak, reel durum göz önünde bulunduralım. Teorem 2.5'de $(C, 1, 0)$ toplanabilirliğinden elde edilen yakınsaklık için gerek ve yeter tek taraflı Tauber tipi koşullar verilecektir.

Teorem 2.5 (*Móricz, 2000*) $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2_+)$ reel değerli bir fonksiyon olmak üzere (22) integrali A sonlu sayısına $(C, 1, 0)$ toplanabilir olsun. O halde (23) koşulunun sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$\sup_{\lambda > 1} \liminf_{u, v \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda u - u} \int_u^{\lambda u} [s(x, v) - s(u, v)] dx \geq 0 \quad (46)$$

ve

$$\sup_{0 < \lambda < 1} \liminf_{u, v \rightarrow \infty} \frac{1}{u - \lambda u} \int_{\lambda u}^u [s(u, v) - s(x, v)] dx \geq 0 \quad (47)$$

koşullarının sağlanmasıdır.

Eğer (46) ve (47) koşulları sağlanırsa daha güçlü olarak, sırasıyla her $\lambda > 1$ için

$$\lim_{u, v \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda u - u} \int_u^{\lambda u} [s(x, v) - s(u, v)] dx = 0$$

ve her $0 < \lambda < 1$ için

$$\lim_{u, v \rightarrow \infty} \frac{1}{u - \lambda u} \int_{\lambda u}^u [s(u, v) - s(x, v)] dx = 0$$

koşulları elde edilir.

Sonuç 2.8 (*Móricz, 2000*) $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2_+)$ reel değerli bir fonksiyon olmak üzere (22) integrali A sonlu sayısına $(C, 1, 0)$ toplanabilir ve $s(u, v)$ fonksiyonu u ya göre yavaş azalan ise o halde (23) eşitliği elde edilir.

Sonuç 2.9 (*Móricz, 2000*) $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2_+)$ reel değerli bir fonksiyon olmak üzere (22) integrali A sonlu sayısına $(C, 1, 0)$ toplanabilir ve (26) koşulu sağlanır ise o halde (23) eşitliği elde edilir.

İkinci olarak, kompleks durumu göz önüne alalım. Teorem 2.6'da, (22) integralinin $(C, 1, 0)$ toplanabilirliğinden yakınsaklığın elde edilmesi için gerek ve yeter çift taraflı Tauber tipi koşullar verilecektir.

Teorem 2.6 (Móricz, 2000) $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}_+^2)$ kompleks değerli bir fonksiyon olmak üzere (22) integrali A sonlu sayısına $(C, 1, 0)$ toplanabilir olsun. O halde (23) koşulunun sağlanması için gerek ve yeter koşul: (Her $\lambda > 1$ için (46) ve her $0 < \lambda < 1$ için (47) nin sağlandığı durumda)

$$\inf_{\substack{0 < \lambda < \infty \\ \lambda \neq 1}} \limsup_{u, v \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\lambda u - u} \int_u^{\lambda u} [s(x, v) - s(u, v)] dx \right| = 0.$$

Sonuç 2.10 (Móricz, 2000) $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}_+^2)$ kompleks değerli bir fonksiyon olmak üzere (22) integrali A sonlu sayısına $(C, 1, 0)$ toplanabilir ve (30) koşulu sağlanır ise o halde (23) eşitliği elde edilir.

Sonuç 2.11 (Móricz, 2000) $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}_+^2)$ kompleks değerli bir fonksiyon olmak üzere (22) integrali A sonlu sayısına $(C, 1, 0)$ toplanabilir ve (32) koşulu sağlanır ise o halde (23) eşitliği elde edilir.

Teorem 2.5 ve Teorem 2.6'nın ispatları Lemma 2.2'nin kısmi eşi olan aşağıdaki yardımcı teoreme dayanır.

Lemma 2.3 (Móricz, 2000) (22) integrali A sonlu sayısına $(C, 1, 0)$ toplanabilir ise o halde $\lambda \neq 1$ ve her $0 < \lambda < \infty$ için

$$\lim_{u, v \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda u - u} \int_u^{\lambda u} s(x, v) dx = A$$

elde edilir.

Uyarı 2.1. (Móricz, 2000) $(C, 1, 0)$ toplanabilirliğine benzer şekilde, (22) integralinin $(C, 0, 1)$ toplanabilirliği,

$$\sigma_{01}(u, v) = \frac{1}{v} \int_0^v s(u, z) dz = \int_0^u \int_0^v \left(1 - \frac{y}{v}\right) f(x, y) dx dy, u, v > 0$$

ile tanımlanmak üzere;

$$\lim_{u, v \rightarrow \infty} \sigma_{01}(u, v) = A$$

şeklinde ifade edilir.

Teorem 2.5, Teorem 2.6 ve Sonuç 2.7 - Sonuç 2.11'in herbiri (22) integralinin $(C, 1, 0)$ toplanabilirliği yerine $(C, 0, 1)$ toplanabilirliği göz önüne alınarak tekrar ifade edilebilir.

3 İKİ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR İÇİN CESÀRO TOPLANABİLİRLİK

Bu bölümde ilk olarak, $\mathbb{R}_+^2$ üzerinde tanımlı sürekli $F(T, S)$ fonksiyonu için $\alpha > -1$ ve $\beta > -1$ olmak üzere (C, α, β) toplanabilirliğinden bahsedilecektir. Daha sonra bu fonksiyon üzerine bazı koşullar koyarak (C, α, β) toplanabilme metodu için bazı Tauber tipi teoremler verilecektir.

3.1 (C, α) Toplanabilirlik

$f(t)$, $[0, \infty)$ aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. Her $\alpha > -1$ için eğer

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \left(1 - \frac{t}{T}\right)^\alpha f(t) dt = L$$

ise

$$\int_0^\infty f(t) dt$$

genelleştirilmiş integraline L sonlu sayısına (C, α) integrallenebilirdir denir.

$-1 < \alpha < \beta$ olmak üzere (C, α) integrallenebilme (C, β) integrallenebilmeyi gerektirir. Bu gerektirme toplanabilme teorisinde klasik bir sonuçtur. Bu gerektirmenin tersi $\int_0^\infty f(t) dt$ genelleştirilmiş integralinin (C, β) integrallenebilirliği üzerine bazı uygun koşullar eklenerek doğru olabilir. Genelleştirilmiş integralin (C, α) integrallenebilirliğinden, genelleştirilmiş integralin yakınsaklığını elde etmek için gerekli Tauber koşullarını belirten herhangi bir teoreme Tauber tipi teorem denir.

3.2 (C, α, β) Toplanabilirlik

Tanım 3.1 (Totur ve Çanak, 2018) $f(T, S)$, $\mathbb{R}_+^2 = [0, \infty) \times [0, \infty)$ üzerinde tanımlı sürekli bir fonksiyon olsun.

$$F(T, S) = \int_0^T \int_0^S f(t, s) dt ds \quad (48)$$

ile sürekli bir fonksiyonun iki katlı integralini; $\alpha > -1$ ve $\beta > -1$ olmak üzere

$$\sigma_{\alpha, \beta}(T, S) = \int_0^T \int_0^S \left(1 - \frac{t}{T}\right)^\alpha \left(1 - \frac{s}{S}\right)^\beta f(t, s) dt ds$$

ile sürekli fonksiyonun (C, α, β) ortalamasını gösterelim. Eğer

$$\lim_{T, S \rightarrow \infty} \sigma_{\alpha, \beta}(T, S) \quad (49)$$

limiti sonlu bir L sayısı ise o halde

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(t, s) dt ds \quad (50)$$

genelleştirilmiş integrale L sonlu sayısına (C, α, β) integrallenebilir denir.

$(C, 0, 0)$ integrallenebilirlik (50) genelleştirilmiş integralinin adi yakınsaklığıdır.

Burada $\alpha > -1$ ve $\beta > -1$ olmak üzere (50) integralinin (C, α, β) integrallenebilirliği her $h \geq 0$ ve $k \geq 0$ için (50) integralinin $(C, \alpha + h, \beta + k)$ integrallenebilirliğini gerektirir. Bu sonuca benzer olarak eğer (50) integrali, L sonlu sayısına yakınsak ise o halde her $h \geq 0$ ve $k \geq 0$ için (50) integrali, L 'ye (C, h, k) integrallenebilirdir. Fakat bu gerektirmenin tersi bazı koşullar altında doğru olabilir.

Aşağıdaki teorem $\alpha > -1$ ve $\beta > -1$ olmak üzere (50) integralinin $h \geq 0$ ve $k \geq 0$ için (C, α, β) integrallenebilmenin $(C, \alpha + h, \beta + k)$ integrallenebilmesini gerektirdiğini göstermektedir.

Teorem 3.1 (Totur ve Çanak, 2018) $\alpha > -1$ ve $\beta > -1$ olmak üzere (50) integrali L sonlu sayısına (C, α, β) integrallenebilir ve $F(T, S)$ fonksiyonunun (C, α, β) integrallenebilirliği sınırlı ise o halde her $h \geq 0$ ve $k \geq 0$ için L sonlu sayısına $(C, \alpha + h, \beta + k)$ integrallenebilirdir.

İspat. B ile Beta fonksiyonu gösterilmek üzere,

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad x > 0, y > 0$$

şeklinde tanımlansın.

$$\varphi(t, s; T, S) = \frac{1}{B(\alpha + 1, h)} \frac{1}{B(\beta + 1, k)} \frac{1}{T} \left(\frac{t}{T}\right)^\alpha \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{h-1} \frac{1}{S} \left(\frac{s}{S}\right)^\beta \left(1 - \frac{s}{S}\right)^{k-1} \quad (51)$$

olmak üzere

$$\int_0^T \int_0^S \varphi(t, s; T, S) \sigma_{\alpha, \beta}(T, S) dt ds \quad (52)$$

integralini göz önünde bulunduralım.

$u = \frac{t}{T}$, $v = \frac{s}{S}$ olarak ve Beta fonksiyonunun tanımından

$$\int_0^T \int_0^S \varphi(t, s; T, S) dt ds = 1 \quad (53)$$

elde edilir. Şimdi

$$\lim_{T,S \rightarrow \infty} \int_0^T \int_0^S \varphi(t, s; T, S) \sigma_{\alpha, \beta}(T, S) dt ds = L \quad (54)$$

eşitliği ispatlanmalıdır. Hipotezden

$$\lim_{T,S \rightarrow \infty} \sigma_{\alpha, \beta}(T, S) = L \quad (55)$$

olduğundan dolayı verilen her $\epsilon > 0$ için öyle bir T_ϵ değeri vardır ki

$$|\sigma_{\alpha, \beta}(T, S) - L| < \epsilon, \quad T \geq T_\epsilon, S \geq S_\epsilon \quad (56)$$

yazılır. (53) eşitliği ile

$$\int_0^T \int_0^S \varphi(t, s; T, S) \sigma_{\alpha, \beta}(T, S) dt ds - L = \int_0^T \int_0^S \varphi(t, s; T, S) [\sigma_{\alpha, \beta}(T, S) - L] dt ds \quad (57)$$

eşitliği elde edilir. (54) eşitliğini ispatlamak için yeterince büyük T ve S için

$$\left| \int_0^T \int_0^S \varphi(t, s; T, S) \sigma_{\alpha, \beta}(T, S) dt ds - L \right| < 4\epsilon \quad (58)$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

$\sigma_{\alpha, \beta}(T, S)$ fonksiyonu $\mathbb{R}_+^2$ de sınırlıdır. Yani her sabit K için

$$|\sigma_{\alpha, \beta}(T, S) - L| < K \quad 0 \leq T, S \leq \infty$$

(53) eşitliği ve (56) koşulunu kullanarak, (57) eşitliği ile

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \int_0^S \varphi(t, s; T, S) [\sigma_{\alpha, \beta}(T, S) dt ds - L] dt ds \right| \\ & \leq \int_0^{T_\epsilon} \int_0^{S_\epsilon} \varphi(t, s; T, S) |\sigma_{\alpha, \beta}(T, S) dt ds - L| dt ds \\ & + \int_0^{T_\epsilon} \int_{S_\epsilon}^S \varphi(t, s; T, S) |\sigma_{\alpha, \beta}(T, S) dt ds - L| dt ds \\ & + \int_{T_\epsilon}^T \int_0^{S_\epsilon} \varphi(t, s; T, S) |\sigma_{\alpha, \beta}(T, S) dt ds - L| dt ds \\ & + \epsilon \int_{T_\epsilon}^T \int_{S_\epsilon}^S \varphi(t, s; T, S) dt ds \\ & \leq K \int_0^{T_\epsilon} \int_0^{S_\epsilon} \varphi(t, s; T, S) dt ds + K \int_0^{T_\epsilon} \int_{S_\epsilon}^S \varphi(t, s; T, S) dt ds \\ & + K \int_{T_\epsilon}^T \int_0^{S_\epsilon} \varphi(t, s; T, S) dt ds + \epsilon \int_{T_\epsilon}^T \int_{S_\epsilon}^S \varphi(t, s; T, S) dt ds \\ & = K \int_0^{T_\epsilon} \int_0^{S_\epsilon} \varphi(t, s; T, S) dt ds + K \int_0^{T_\epsilon} \int_{S_\epsilon}^S \varphi(t, s; T, S) dt ds \\ & + K \int_{T_\epsilon}^T \int_0^{S_\epsilon} \varphi(t, s; T, S) dt ds + \epsilon \end{aligned}$$

$u = \frac{t}{T}$, $v = \frac{s}{S}$ alınrsa, herhangi T_ϵ ve S_ϵ sabiti için $T, S \rightarrow \infty$ iken

$$\begin{aligned} \int_0^{T_\epsilon} \int_0^{S_\epsilon} \varphi(t, s; T, S) dt ds &= \frac{1}{B(\alpha+1, h)} \int_0^{T_\epsilon} \frac{1}{T} \left(\frac{t}{T}\right)^\alpha \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{h-1} dt \\ &\times \frac{1}{B(\beta+1, k)} \int_0^{S_\epsilon} \frac{1}{S} \left(\frac{s}{S}\right)^\beta \left(1 - \frac{s}{S}\right)^{k-1} ds \\ &= \frac{1}{B(\alpha+1, h)} \int_0^{T_\epsilon/T} u^\alpha (1-u)^{h-1} du \\ &\times \frac{1}{B(\beta+1, k)} \int_0^{S_\epsilon/S} v^\beta (1-v)^{k-1} dv \end{aligned}$$

integrali sıfıra yakınsar. Böylece bazı $\hat{T}_\epsilon^1$ ve $\hat{S}_\epsilon^1$ vardır öyle ki

$$K \int_0^{T_\epsilon} \int_0^{S_\epsilon} \varphi(t, s; T, S) dt ds < \epsilon, \quad T \geq \hat{T}_\epsilon^1, S \geq \hat{S}_\epsilon^1.$$

$u = \frac{t}{T}$, $v = \frac{s}{S}$ alınrsa, herhangi T_ϵ ve S_ϵ sabiti için $T, S \rightarrow \infty$ iken

$$\begin{aligned} \int_0^{T_\epsilon} \int_{S_\epsilon}^S \varphi(t, s; T, S) dt ds &= \frac{1}{B(\alpha+1, h)} \int_0^{T_\epsilon} \frac{1}{T} \left(\frac{t}{T}\right)^\alpha \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{h-1} dt \\ &\times \frac{1}{B(\beta+1, k)} \int_{S_\epsilon}^S \frac{1}{S} \left(\frac{s}{S}\right)^\beta \left(1 - \frac{s}{S}\right)^{k-1} ds \\ &= \frac{1}{B(\alpha+1, h)} \int_0^{T_\epsilon/T} u^\alpha (1-u)^{h-1} du \\ &\times \frac{1}{B(\beta+1, k)} \int_{S_\epsilon/S}^1 v^\beta (1-v)^{k-1} dv \end{aligned}$$

integralinin sıfıra yakınsadığını elde ederiz. ($S \rightarrow \infty$ iken $\frac{1}{B(\beta+1, k)} \int_{S_\epsilon/S}^1 v^\beta (1-v)^{k-1} dv$ ifadesinin 1 yakınsadığını not edelim.) Böylece bazı $\hat{T}_\epsilon^2$ ve $\hat{S}_\epsilon^2$ vardır öyle ki

$$K \int_0^{T_\epsilon} \int_{S_\epsilon}^S \varphi(t, s; T, S) dt ds < \epsilon, \quad T \geq \hat{T}_\epsilon^2, S \geq \hat{S}_\epsilon^2.$$

Benzer şekilde herhangi T_ϵ ve S_ϵ sabiti için $T, S \rightarrow \infty$ iken

$$\int_{T_\epsilon}^T \int_0^{S_\epsilon} \varphi(t, s; T, S) dt ds$$

integrali 0 a yakınsar. ($S \rightarrow \infty$ iken $\frac{1}{B(\alpha+1, h)} \int_{T_\epsilon/T}^1 u^\alpha (1-u)^{h-1} du$ ifadesinin 1 e yakınsadığını not edelim.) Böylece bazı $\hat{T}_\epsilon^3$ ve $\hat{S}_\epsilon^3$ vardır öyle ki

$$K \int_{T_\epsilon}^T \int_0^{S_\epsilon} \varphi(t, s; T, S) dt ds < \epsilon, \quad T \geq \hat{T}_\epsilon^3, S \geq \hat{S}_\epsilon^3.$$

Böylece $T \geq \max(\hat{T}_\epsilon, \hat{T}_\epsilon^1, \hat{T}_\epsilon^2, \hat{T}_\epsilon^3)$, $S \geq \max(\hat{S}_\epsilon, \hat{S}_\epsilon^1, \hat{S}_\epsilon^2, \hat{S}_\epsilon^3)$ için (58) eşitsizliği elde edilir ve bu, (54) eşitliğini ispatlar.

$$I(u, v; T, S) = \int_u^T \int_v^S \varphi(t, s; T, S) \left(1 - \frac{u}{t}\right)^\alpha \left(1 - \frac{v}{s}\right)^\beta dt ds$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_0^S \varphi(t, s; T, S) \sigma_{\alpha, \beta}(t, s) dt ds \\
&= \int_0^T \int_0^S \varphi(t, s; T, S) \left(\int_0^t \int_0^s \left(1 - \frac{u}{t}\right)^\alpha \left(1 - \frac{v}{s}\right)^\beta f(u, v) du dv \right) dt ds \\
&= \int_0^T \int_0^S f(u, v) \left(\int_u^T \int_v^S \varphi(t, s; T, S) \left(1 - \frac{u}{t}\right)^\alpha \left(1 - \frac{v}{s}\right)^\beta dt ds \right) du dv \\
&= \int_0^T \int_0^S f(u, v) I(u, v; T, S) du dv
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $I(u, v; T, S)$ ifadesi

$$I_1(u, T) = \frac{1}{B(\alpha + 1, h)} \left(\frac{1}{T} \right)^{\alpha+1} \int_u^T \left(1 - \frac{t}{T} \right)^{h-1} (t - u)^\alpha dt$$

ve

$$I_2(v, S) = \frac{1}{B(\beta + 1, k)} \left(\frac{1}{S} \right)^{\beta+1} \int_v^S \left(1 - \frac{s}{S} \right)^{k-1} (s - v)^\beta ds$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
I(u, v; T, S) &= \int_u^T \int_v^S \varphi(t, s; T, S) \left(1 - \frac{u}{t} \right)^\alpha \left(1 - \frac{v}{s} \right)^\beta dt ds \\
&= \left(\frac{1}{B(\alpha + 1, h)} \int_u^T \frac{1}{T} \left(\frac{t}{T} \right)^\alpha \left(1 - \frac{t}{T} \right)^{h-1} \left(1 - \frac{u}{t} \right)^\alpha dt \right) \\
&\quad \times \left(\frac{1}{B(\beta + 1, k)} \int_v^S \frac{1}{S} \left(\frac{s}{S} \right)^\beta \left(1 - \frac{s}{S} \right)^{k-1} \left(1 - \frac{v}{s} \right)^\beta ds \right) \\
&= \left(\frac{1}{B(\alpha + 1, h)} \left(\frac{1}{T} \right)^{\alpha+1} \int_u^T \left(1 - \frac{t}{T} \right)^{h-1} (t - u)^\alpha dt \right) \\
&\quad \times \left(\frac{1}{B(\beta + 1, k)} \left(\frac{1}{S} \right)^{\beta+1} \int_v^S \left(1 - \frac{s}{S} \right)^{k-1} (s - v)^\beta ds \right) \\
&= I_1(u, T) I_2(v, S)
\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. $I_1(u, T)$ denkleminde $t = T - (T - u)x$ yerine yazarak

$$\begin{aligned}
I_1(u, T) &= \frac{1}{B(\alpha + 1, h)} \left(\frac{1}{T} \right)^{\alpha+1} \int_0^T \left(1 - \left(\frac{T - (T - u)x}{T} \right) \right)^{h-1} (T - (T - u)x - u)^\alpha dt \\
&= \frac{1}{B(\alpha + 1, h)} \left(\frac{1}{T} \right)^{\alpha+1} \int_0^T \left(1 - \left(1 - x + \frac{ux}{T} \right) \right)^{h-1} (T - Tx + ux - u)^\alpha dt \\
&= \frac{1}{B(\alpha + 1, h)} \left(\frac{1}{T} \right)^{\alpha+1} \int_0^T x^{h-1} \left(1 - \frac{u}{T} \right)^{h-1} (T - u)^\alpha (1 - x)^\alpha dt \\
&= \frac{1}{B(\alpha + 1, h)} \frac{1}{T^{\alpha+1}} \int_0^T x^{h-1} \left(1 - \frac{u}{T} \right)^{h-1} \left(1 - \frac{u}{T} \right)^{\alpha+1} T^{\alpha+1} (1 - x)^\alpha dt \\
&= \left(1 - \frac{u}{T} \right)^{\alpha+h} \frac{1}{B(\alpha + 1, h)} \int_0^1 x^{h-1} (1 - x)^\alpha dx \\
&= \left(1 - \frac{u}{T} \right)^{\alpha+h}
\end{aligned}$$

elde edilir ve benzer şekilde

$$I_2(v, S) = \left(1 - \frac{v}{S} \right)^{\beta+k}$$

elde edilir. Bu

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^S \varphi(t, s; T, S) \sigma_{\alpha, \beta}(t, s) dt ds &= \int_0^T \int_0^S \left(1 - \frac{u}{T}\right)^{\alpha+h} \left(1 - \frac{v}{S}\right)^{\beta+k} f(u, v) du dv \\ &= \sigma_{\alpha+h, \beta+k}(T, S) \end{aligned}$$

olduğunu gösterir. Bu, Teorem 3.1'in ispatını tamamlar. $\square$

3.2.1 $\alpha = 1, \beta = 0$ yada $\alpha = 0, \beta = 1$ Durumu

$(C, 1, 1)$ integrallenebilmeye benzer şekilde $(C, 1, 0)$ veya $(C, 0, 1)$ integrallenebilirliğin teorisi ispatlanabilir. Çünkü bu teori, tek değişkenli fonksiyonların integrallenebilirliği teorisine benzerdir. Şimdi bazı tanımları ve ispatları olmaksızın bazı teoremleri verelim.

Tanım 3.2 (Totur ve Çanak, 2018) $f(T, S), \mathbb{R}_+^2$ üzerinde sürekli bir fonksiyon ve $F(T, S), (48)$ 'deki gibi tanımlansın. (48)'in $(C, 1, 0)$ ve $(C, 0, 1)$ ortalamaları sırasıyla

$$\sigma_{1,0}(T, S) = \int_0^T \int_0^S \left(1 - \frac{t}{T}\right) f(t, s) dt ds \quad (59)$$

ve

$$\sigma_{0,1}(T, S) = \int_0^T \int_0^S \left(1 - \frac{s}{S}\right) f(t, s) dt ds \quad (60)$$

ile tanımlanır. Eğer

$$\lim_{T, S \rightarrow \infty} \sigma_{1,0}(T, S) \quad (61)$$

ve

$$\lim_{T, S \rightarrow \infty} \sigma_{0,1}(T, S) \quad (62)$$

var ve sonlu ise (50) integrali $\mathbb{R}_+^2$ üzerinde sırasıyla $(C, 1, 0)$ ve $(C, 0, 1)$ integrallenebilir denir.

$(C, 1, 0)$ ve $(C, 0, 1)$ toplanabilme metotları regülerdir. Yani, (50) integrali L sonlu sayısına yakınsak ise o halde (50) integrali, L 'ye hem $(C, 1, 0)$ hem de $(C, 0, 1)$ integrallenebilirdir.

Teorem 3.2 (Totur ve Çanak, 2018) (50) integrali L sonlu sayısına $(C, 1, 0)$ integrallenebilir ve

$$T \int_0^S f(T, s) ds = O(1)$$

koşulu sağlanıyor ise o halde (50) integrali aynı L değerine yakınsar.

Teorem 3.3 (Totur ve Çanak, 2018) (50) integrali L sonlu sayısına $(C, 0, 1)$ integral-
lenebilir ve

$$S \int_0^T f(t, S) dt = O(1)$$

koşulu sağlanıyor ise o halde (50) integrali aynı L değerine yakınsar.

3.2.2 $\alpha = 1, \beta = 1$ Durumu

Tanım 3.3 (Totur ve Çanak, 2018) $f(T, S), \mathbb{R}_+^2$ üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun.
Eğer

$$\lim_{T, S \rightarrow \infty} \int_0^T \int_0^S \left(1 - \frac{t}{T}\right) \left(1 - \frac{s}{S}\right) f(t, s) dt ds \quad (63)$$

limiti var ve sonlu ise (50) integralline $\mathbb{R}_+^2$ üzerinde $(C, 1, 1)$ integrallenebilir denir.

Teorem 3.1'in sonucu olarak sıradaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1 (Totur ve Çanak, 2018) (50) integrali L sonlu sayısına yakınsak ise o halde
(50) integrali aynı L değerine $(C, 1, 1)$ integrallenebilir.

İspat. Teorem 3.1'de $\alpha = \beta = 0$ ve $h = k = 1$ alınarak elde edildiği açıktır. $\square$

Sonuç 3.1'in tersinin genellikle doğru olmadığı aşağıdaki örnekler ile gösterilebilir.

Örnek 3.1 (Totur ve Çanak, 2018) $\int_0^\infty \int_0^\infty \cos t \cos s dt ds$ integralini alalım.

Bu integral yakınsak değildir, fakat sifıra $(C, 1, 1)$ toplanabilir:

(63) limitinden $T, S \rightarrow \infty$ iken

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^S \left(1 - \frac{t}{T}\right) \left(1 - \frac{s}{S}\right) \cos t \cos s dt ds \\ &= \int_0^T \left(1 - \frac{t}{T}\right) \cos t dt \int_0^S \left(1 - \frac{s}{S}\right) \cos s ds \\ &= \int_0^T \cos t dt - \frac{1}{T} \int_0^T t \cos t dt \\ &\times \int_0^S \cos s ds - \frac{1}{S} \int_0^S s \cos s ds \\ &= \sin T - \frac{1}{T} [T \sin T - (-\cos T + 1)] \\ &\times \sin S - \frac{1}{S} [S \sin S - (-\cos S + 1)] \\ &= \frac{(1 - \cos T)(1 - \cos S)}{TS} \end{aligned}$$

ifadesinin sıfıra yakınsadığı elde edilir.

Örnek 3.2 (Totur ve Çanak, 2018) $\int_0^\infty \int_0^\infty \sin t \sin s dt ds$ integralini alalım.

Bu integral yakınsak değildir, fakat bire $(C, 1, 1)$ toplanabiliridir:

(63) limitinden $T, S \rightarrow \infty$ iken

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T \int_0^S \left(1 - \frac{t}{T}\right) \left(1 - \frac{s}{S}\right) \sin t \sin s dt ds \\
 &= \int_0^T \left(1 - \frac{t}{T}\right) \sin t dt \int_0^S \left(1 - \frac{s}{S}\right) \sin s ds \\
 &= \int_0^T \sin t dt - \frac{1}{T} \int_0^T t \sin t dt \\
 &\times \int_0^S \sin s ds - \frac{1}{S} \int_0^S s \sin s ds \\
 &= -\cos T + 1 - \frac{1}{T}[-T \cos T + \sin T] \\
 &\times -\cos S + 1 - \frac{1}{S}[-S \cos S + \sin S] \\
 &= \frac{(T - \sin T)(S - \sin S)}{TS}
 \end{aligned}$$

ifadesinin bire yakınsadığı elde edilir.

Teorem 3.4 (Totur ve Çanak, 2018) (50) integrali L sonlu sayısına $(C, 1, 1)$ integralenebilir ve

$$T \int_0^S f(T, s) ds = O(1) \quad (64)$$

ve

$$S \int_0^T f(t, S) dt = O(1) \quad (65)$$

koşulları sağlanıyor ise (50) integrali aynı L değerine yakınsar.

İspat. (50) integrali L sonlu sayısına $(C, 1, 1)$ integrallenebilir olsun yani,

$$G(T, S) = \int_0^T \int_0^S \left(1 - \frac{t}{T}\right) \left(1 - \frac{s}{S}\right) f(t, s) dt ds \rightarrow L, \quad T, S \rightarrow \infty \quad (66)$$

$G(T, S)$ yi;

$$G_1(T, S) = \int_0^T \int_0^S \left(1 - \frac{t}{T}\right) f(t, s) dt ds \quad (67)$$

olmak üzere

$$G(T, S) = \int_0^T \left(1 - \frac{s}{S}\right) \frac{\partial}{\partial t} G_1(T, s) dt \quad (68)$$

şeklinde tekrar yazılır.

(66), (67) ve (68) eşitliğinden $\frac{\partial}{\partial S}G_1(T, S)$ 'nin L sonlu sayısına $(C, 0, 1)$ integralenebilir olduğu elde edilir.

(66) eşitliğinden

$$H_1(T, S) = \frac{1}{S} \int_0^S s \frac{\partial}{\partial S} G_1(T, s) ds \quad (69)$$

olmak üzere

$$G(T, S) = G_1(T, S) - H_1(T, S) \quad (70)$$

elde edilir.

$T, S \rightarrow \infty$ iken $H_1(T, S) \rightarrow 0$ olduğu gösterilmelidir.

(68) eşitliğinden,

$$\frac{\partial}{\partial S} G(T, S) = \frac{1}{S^2} \int_0^S s \frac{\partial}{\partial S} G_1(T, s) ds = \frac{H_1(T, S)}{T} \quad (71)$$

elde edilir. Aynı zamanda $S = e^v$ yer değiştirmesi ve $R(T, v) = H_1(T, e^v)$ eşitliğini kullanarak,

$$\begin{aligned} \int_{S_1}^{S_2} \frac{\partial}{\partial S} G(T, S) dS &= G(T, S_2) - G(T, S_1) \\ &= \int_{S_1}^{S_2} \frac{H_1(T, S)}{S} dS \\ &= \int_{\log S_1}^{\log S_2} H_1(T, e^v) dv \\ &= \int_{\log S_1}^{\log S_2} R(T, v) dv \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi $\lim_{v \rightarrow \infty} R(T, v) = 0$ olduğu gösterilmelidir. Basit bir hesaplama ile

$$\frac{\partial}{\partial v} R(T, v) = e^v \frac{\partial}{\partial v} H_1(T, e^v) = S \frac{\partial}{\partial S} H_1(T, S) \quad (72)$$

elde edilir.

(69) eşitliğinden,

$$SH_1(T, S) = \int_0^S s \frac{\partial}{\partial s} G_1(T, s) ds \quad (73)$$

elde edilir. (73) eşitliğinin her iki tarafının T 'ye göre diferansiyeli alınırsa,

$$H_1(T, S) + S \frac{\partial}{\partial S} H_1(T, S) = S \frac{\partial}{\partial S} G_1(T, S) \quad (74)$$

elde edilir.

(65) eşitliğinin her iki tarafının $(C, 1, 0)$ ortalaması alınarak; (72) eşitliğinden

$$S \frac{\partial}{\partial S} H_1(T, S) = O(1) \quad (75)$$

olduğunu gerektiren

$$S \frac{\partial}{\partial S} G_1(T, S) = O(1) \quad (76)$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 3.2'nin adımları ile $T, S \rightarrow \infty$ iken $H_1(T, S) \rightarrow 0$ olduğu kolayca elde edilir. (66) ve (70) eşitliklerinden $T, S \rightarrow \infty$ iken $G_1(T, S) \rightarrow L$ olduğu elde edilir.

$T, S \rightarrow \infty$ iken $G_1(T, S) \rightarrow L$ ve (64) koşulundan dolayı Teorem 3.2'den $\lim_{T, S \rightarrow \infty} F(T, S) = L$ elde edilir. $\square$



KAYNAKLAR DİZİNİ

- Boss, J.**, 2000, Classical and Modern Methods in Summability, University Press, Oxford.
- Chen, C. and Hsu, J.**, 2000, Tauberian theorems for weighted means of double sequences, *Anal. Math.*, 26:243–262pp.
- Çanak, İ. and Totur, Ü.**, 2012, The (C, α) integrability of functions by weighted mean methods, *Filomat*, 26:1209–1214pp.
- Hardy, G. H.**, 1910, Theorems relating to the summability and slowly oscillating series, *Proc. London Math. Soc.*, 8:310–320pp.
- Hardy, G. H.**, 1949, Divergent Series, University Press, Oxford.
- Móricz, F.**, 1994, Tauberian theorems for Cesàro summable double sequences *Studia Math.*, 110:83–96pp.
- Hardy, G. H.**, 1994, Necessary and sufficient Tauberian conditions, under which convergence follows from summability $(C, 1)$, *Bull. London Math. Soc.*, 26:288–294pp.
- Móricz, F.**, 2000, Tauberian theorems for Cesàro summable double integrals over $\mathbb{R}_+^2$, *Studia Math.*, 138:41–52pp.
- Móricz, F. and Stadtmüller, U.**, 2004, Summability of double sequences by weighted mean methods and Tauberian conditions for convergence in Pringsheim's sense, *Int. J. Math. Sci.*, 65–68pp, 3499–3511pp.
- Móricz, F. and Stadtmüller, U.**, 2013, Characterization of the convergence of weighted averages of double sequences of numbers and functions in two variables, *Publ. Math. Debrecen*, 83(3):465–480pp.
- Peyerimhoff, A.**, 1969, Lectures on Summability, Lecture Notes in Math, Berlin.
- Stadtmüller, U.**, 1999, Tauberian theorems for weighted means of double sequences, *Anal. Math.*, 25:57–68pp.
- Stadtmüller, U.**, 2002, One-sided Tauberian theorems and double sequences, *Period. Math.*, 45:135–136pp.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Totur, Ü. and Çanak, İ.**, 2012, Some general Tauberian conditions for the weighted mean summability method, *Comput. Math. Appl.*, 63:999–1006pp.
- Totur, Ü. and Çanak, İ.**, 2012, Alternative proofs of some classical type Tauberian theorems for Cesàro summability of integrals, *Math. Comput. Model.*, 55:1558–1561pp.
- Totur, Ü. and Çanak, İ.**, 2012, One-sided Tauberian conditions for $(C, 1)$ summability method of integrals *Math. Comput. Model.*, 55:1813–1818pp.
- Totur, Ü. and Çanak, İ.**, 2013, On the $(C, 1)$ summability method of improper integrals, *Appl. Math. Comput.*, 219:11065–11070pp.
- Totur, Ü. and Çanak, İ.**, 2013, On Tauberian conditions for $(C, 1)$ summability of integrals, *Rev. Un. Mat. Argentina*, 54:59–65pp.
- Totur, Ü. and Çanak, İ.**, 2017, Tauberian conditions for the (C, α) integrability of functions, *Positivity*, 21:73–83pp.
- Totur, Ü. and Çanak, İ.**, 2017 (erişim tarihi), General Tauberian theorems for integrability of functions, *Georgian Math. J.*
- Zygmund, A.**, 1959, Trigonometric Series, University Press, Cambridge.
- Totur, Ü. and Çanak, İ.**, 2018 (erişim tarihi), On the Cesàro summability for functions of two variables, *Miskolc Math. Notes*

ÖZGEÇMİŞ

Özlük Bilgileri

- Ad-Soyad: Çağla KAMBAK
- Adres: Ege Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü
35100, Bornova, İzmir
- Doğum Tarihi: 17.11.1993
- Doğum Yeri : Nazilli/AYDIN

Öğrenim Durumu

- 1999-2004 : Gökova Adile Mermerci İlköğretim Okulu (İlkokul eğitimi - Muğla)
- 2004-2007 : Gökova Adile Mermerci İlköğretim Okulu (Ortaokul eğitimi - Muğla)
- 2007-2011 : Muğla Gazi Anadolu Lisesi
- 2011-2016 : Ege Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Teorik Matematik Ağırlıklı Matematik Lisans Programı
- 2016- : Ege Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü, Uygulamalı Matematik Ana Bilim Dalı Yüksek Lisans Programı