

UYUMLU KESİRLİ BİR DALGA DENKLEMİ ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NURCAN ERBEY

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

MERSİN
EKİM- 2019

UYUMLU KESİRLİ BİR DALGA DENKLEMİ ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NURCAN ERBEY

**MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK
ANABİLİM DALI**

**Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Fatma Ayça ÇETİNKAYA**

**MERSİN
EKİM - 2019**

ONAY

Nurcan ERBEY tarafından Dr. Öğr. Üyesi Fatma Ayça ÇETİNKAYA danışmanlığında hazırlanan “Uyumlu Kesirli Bir Dalga Denklemi Üzerine” başlıklı çalışma aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından 04 Ekim 2019 tarihinde yapılan Tez Savunma Sınavı sonucunda oy birliği ile Yüksek Lisans Yeterlik tezi olarak kabul edilmiştir.

Görevi	Ünvanı, Adı ve Soyadı	İmza
Başkan	Prof.Dr. İlhan DAĞADUR	
Üye	Dr. Öğr. Üyesi Abdulkadir KARAKAŞ	
Üye	Dr. Öğr. Üyesi Fatma Ayça ÇETİNKAYA	

Yukarıdaki Jüri kararı Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun 01./11./2019 tarih ve 2019.62./1673 sayılı kararıyla onaylanmıştır.



Bu tezde kullanılan özgün bilgiler, şekil, tablo ve fotoğraflardan kaynak göstermeden alıntı yapmak 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunu hükümlerine tabidir.

ETİK BEYAN

Mersin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim Yönetmeliğinde belirtilen kurallara uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada,

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlâk kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak kullandığımı,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Bu tezin herhangi bir bölümünü Mersin Üniversitesi veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı,
- Tezin tüm telif haklarını Mersin Üniversitesi'ne devrettiğimi

beyan ederim.

ETHICAL DECLARATION

This thesis is prepared in accordance with the rules specified in Mersin University Graduate Education Regulation and I declare to comply with the following conditions:

- I have obtained all the information and the documents of the thesis in accordance with the academic rules.
- I presented all the visual, auditory and written informations and results in accordance with scientific ethics.
- I refer in accordance with the norms of scientific works about the case of exploitation of others' works.
- I used all of the referred works as the references.
- I did not do any tampering in the used data.
- I did not present any part of this thesis as an another thesis at Mersin University or another university.
- I transfer all copyrights of this thesis to the Mersin University.

04.12./ 2019

İmza / Signature

Nurcan ERBEY

ÖZET

UYUMLU KESİRLİ BİR DALGA DENKLEMİ ÜZERİNE

Bu tezde, uyumlu kesirli kısmi türevle ifade edilen bir dalga denklemine, genelleştirilmiş Fourier metodu uygulanarak elde edilen, uyumlu kesirli sınır değer probleminin özdeğer ve özfonksiyon özellikleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Uyumlu Kesirli Türev, Dalga Denklemi, Sınır Değer Problemi, Özdeğer, Özfonksiyon.

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Fatma Ayça ÇETİNKAYA, Mersin Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, Mersin.



ABSTRACT

ON A CONFORMABLE WAVE EQUATION

This work is devoted to examine the spectral properties of a conformable boundary value problem which is obtained from a conformable wave equation by applying the generalized Fourier method.

Keywords: Conformable Fractional Derivative, Wave Equation, Boundary Value Problem, Eigenvalue, Eigenfunction.

Advisor: Asst. Prof. Fatma Ayca CETINKAYA, Department of Mathematics, University of Mersin, Mersin.



TEŞEKKÜR

Mersin Üniversitesi'nde lisansüstü eğitime başladığım günden bugüne kadar her konuda yardım ve desteğini benden esirgemeyen saygıdeğer hocam Dr. Öğr. Üyesi Fatma Ayça ÇETİNKAYA'ya teşekkürlerimi sunuyorum.

Aldığım her kararda desteklerini ve sevgilerini derinden hissettiğim aileme teşekkürlerimi iletiyor, bu çalışmamı onlara ithaf ediyorum.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇ KAPAK	ii
ONAY	iii
ETİK BEYAN	iv
ÖZET	v
ABSTRACT	vi
TEŞEKKÜR	vii
İÇİNDEKİLER	viii
KISALTMALAR ve SİMGELER	ix
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI	3
3. MATERYAL ve YÖNTEM	4
3.1. Giriş	4
3.1.1 Değişkenlere Ayırma Metodu	4
3.1.2 Titreşen Tel Denklemi	6
3.1.3 Özdeğer Problemi	9
3.1.4 Özdeğer ve Özfonksiyon Özellikleri	12
3.2. Uyumlu Kesirli Türev	13
3.2.1 Uyumlu Kesirli Türev Tanımı ve Özellikleri	13
3.2.2 Uyumlu Kesirli İntegral	16
3.3 Uyumlu Kesirli Kısmi Diferansiyel Denklemler	17
3.3.1 Uyumlu Kesirli Isı Denklemi	17
3.3.2 Uyumlu Kesirli Dalga Denklemi	19
4. BULGULAR ve TARTIŞMA	21
4.1. Homojen Olmayan Uyumlu Kesirli Dalga Denklemi	21
4.2 Operatör Özellikleri	22
4.3 Özdeğer ve Özfonksiyon Özellikleri	24
5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER	27
KAYNAKLAR	28
ÖZGEÇMİŞ	30

KISALTMALAR ve SİMGELER

Kısaltma/Simgesi	Tanım
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
λ	Özdeğer parametresi
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	İç çarpım fonksiyonu
T_α	Uyumlu kesirli türev
L_α	Uyumlu kesirli diferansiyel operatör
W_α	Fonksiyonların α – Wronskiyeni



1. GİRİŞ

Değişkenlere ayırma yöntemi, süperpozisyon prensibi ile birlikte ele alındığında lineer kısmi diferansiyel denklem içeren başlangıç değer problemlerini çözmek için oldukça yaygın bir biçimde kullanılır. Bu yöntem, genellikle $u(x, y)$ bağımlı değişkenini, X ve Y , x ve y değişkenlerinin fonksiyonları olmak üzere, $u(x, y) = X(x)Y(y)$ biçiminde ifade ederek işe başlar. Çoğu durumda, kısmi diferansiyel denklem X ve Y fonksiyonlarının iki adi diferansiyel denkleme dönüşür. Benzer uygulama üç veya daha fazla bağımsız değişken içeren denklemler için de kullanılabilir. Bir kısmi diferansiyel denklemin iki veya daha fazla adi diferansiyel denkleme ayrılması sorusu aşikâr bir soru olmamakla birlikte, bu yöntem yine de geniş bir başlangıç değer problemi sınıfının çözümlerinin bulunması açısından oldukça kullanışlı bir yöntemdir. Değişkenlere ayırma yöntemi bazen Fourier yöntemi (veya özfonksiyon açılımı yöntemi) olarak da anılır. Dolayısıyla, yukarıda anlatılan yöntem özdeğerler, özfonksiyonlar ve diklik gibi, lineer problemlerle çalışmak adına oldukça genel ve önemli konularla ilgilenmenin yolunu açar.

Kesirli analiz, tam sayı olmayan mertebeden türev ve integral hesabı anlamına gelir. Keyfi mertebeli türev ve integrasyon kavramı ilk kez 1695 yılında Leibniz ve L'Hospital tarafından ortaya atılmıştır.

Kesirli türeve ilişkin farklı tanımlar olmasına karşın, bu türevlerden en çok kullanılanları Caputo ve Riemann-Liouville kesirli türevleridir. Bu kesirli türevler de dâhil literatürdeki tüm kesirli türev tanımlarının, klasik türev tanımıyla tek ortak yönü, hem kesirli türevin hem de klasik türevin lineerlik özelliğini sağlıyor olmasıdır.

Lineerlik harici özelliklerle ilgili olarak, kesirli türev ve klasik türev arasında herhangi bir uyuma rastlanmamaktadır. Örneğin, herhangi bir sabit sayının Riemann-Liouville kesirli türevi, klasik anlamdaki türeve benzer şekilde, sıfır olmamaktadır. Benzer biçimde, iki fonksiyonun çarpımının ve bölümünün klasik anlamdaki türevi ile bunların kesirli türevleri de herhangi bir uyum sergilemez. Yine, bütün kesirli türev tanımları, klasik türevin sağladığı zincir kuralını sağlamaz.

Yakın zamanda, uyumlu kesirli türev olarak isimlendirilen ve klasik türev tanımına dayandırılarak verilen yeni bir kesirli türev tanımı ortaya atılmıştır [1].

Tezde, bu uyumlu kesirli türev tanımı yardımıyla ifade edilen

$$\rho(x) \frac{\partial^{2\alpha} u}{\partial t^{2\alpha}} = \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \left(p(x) \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right) - q(x)u \quad 0 \leq x \leq l, t > 0$$

homojen olmayan telin titreşimi denklemi

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t > 0$$

sınır ve

$$u(x,0) = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi_1(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

başlangıç koşulları ile birlikte ele alınmıştır. Burada denklemdeki $p(x)$ fonksiyonunun $p(x) > 0$ özelliğini sağladığını, $\frac{\partial^\alpha p(x)}{\partial x^\alpha}$, $q(x)$ ve $\rho(x) > 0$ fonksiyonlarının $[0, l]$ aralığında sürekli fonksiyonlar olduğunu ve denklemin $0 < \alpha \leq 1$ mertebeli bir kısmi diferansiyel denklem olduğunu belirtmekte yarar vardır.

Ele alınan bu dalga denklemine, genelleştirilmiş Fourier metodu uygulanarak elde edilen, uyumlu kesirli Sturm-Liouville sınır değer probleminin özdeğer ve özfonksiyon özellikleri incelenmiştir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm olan bu “Giriş” bölümünden sonra, önceki çalışmalara değinilen “Kaynak Araştırmaları” isimli ikinci bölümde, ele alınan konu ve denklemlerle ilgili var olan literatürün özeti verilmiştir. Üçüncü bölüm olan “Materyal ve Yöntem” isimli bölüm, sonraki bölümde kullanılacak olan bazı temel kavramların hatırlatılmasına ayrılmıştır. Başlığı “Bulgular ve Tartışma” olan dördüncü bölüm tezin orijinal kısmıdır. Bu bölümde, ikinci bölümde bahsi geçen çalışmalardan farklı olarak uyumlu kesirli türev tanımı yardımıyla ifade edilen homojen olmayan telin titreşimi denklemi ele alınmıştır. Bu denklemle oluşturulan sınır değer problemine genelleştirilmiş Fourier metodu uygulanarak elde edilen, uyumlu kesirli Sturm-Liouville sınır değer probleminin özdeğer ve özfonksiyon özellikleri incelenmiştir. Burada elde edilen sonuçlar *2018 yılında Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisinde (Cilt 22, Sayı 3, pp. 1110-1113)* yayımlanmış ve *2019 yılında International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modelling, İstanbul, 10-13 Mart 2019* konferansında sözlü bildiri olarak sunulmuştur. Beşinci bölümde ise sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI

Günümüzde, kesirli analiz konusu oldukça popüler bir konu haline gelmiş olup, konuyla ilgili çeşitli bakış açılarına sahip olabilmek adına [2-9] çalışmalarına bakılabilir.

Uyumlu kesirli türev, klasik türevin doğal özelliklerini sağlayarak, bilinen anlamdaki türev tanımını genişletmeyi ve bu türev tanımı kullanılarak elde edilen uyumlu kesirli diferansiyel denklemler yardımıyla diferansiyel denklemler teorisine yeni açılımlar kazandırmayı amaçlar.

Bu yeni açılımlara örnek olarak [10-18] çalışmaları gösterilebilir. [10] da değişken katsayılı uyumlu kesirli lineer diferansiyel denklemler için Wronskiyan kavramı verilmiş ve değişken katsayılı kesirli diferansiyel denklemler için Abel formülü ispatlanmıştır. [11] de uyumlu kesirli ısı denkleminin çözümü verilmiştir. [12] de ardışık lineer uyumlu diferansiyel denklemler için varlık ve teklik teoremleri ispatlanmıştır. [13] de kesirli Fourier serileri ve değişkenlere ayırma yöntemi kullanılarak uyumlu kesirli kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri araştırılmıştır. [14] de uyumlu kesirli türev için zincir kuralı, uyumlu kısmi integrasyon, Gronwall eşitsizliği, uyumlu üstel fonksiyon ve uyumlu Laplace dönüşümü gibi kavramlar ele alınmıştır.

[15] de ikinci mertebeden lineer uyumlu kesirli diferansiyel denklemler için mertebe düşürme ve sabitlerin değişimi yöntemi, sabit katsayılı ve Cauchy-Euler tipli uyumlu kesirli diferansiyel denklemlerin genel çözümlerinin biçimleri verildikten sonra, uyumlu kesirli özdeşlik problemler ele alınmış ve bu problemlerin özellikleri incelenmiştir. [16] da oransal türevli uyumlu kesirli diferansiyel denklemler ele alınmış ve bu denklemlerin özellikleri incelenmiştir. [17] ve [18] de ise, sırasıyla, zaman skalasında tanımlı Dirac denklemler sistemi ve Sturm-Liouville problemleri ele alınmış ve bu problemlerin bazı spektral özellikleri incelenmiştir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde, tezin “Bulgular ve Tartışma” kısmındaki orijinal sonuçların elde edilmesi için gereken temel tanım ve teoremler verilmiştir. Bu amaç doğrultusunda, 3.1 numaralı alt bölümdeki kavramlar [19] numaralı kaynaktan, 3.2 numaralı alt bölümdeki kavramlar [1] numaralı kaynaktan, 3.3.1 numaralı alt bölümdeki kavramlar [11] numaralı kaynaktan, 3.3.2 numaralı alt bölümdeki kavramlar ise [13] numaralı kaynaktan yararlanılarak verilmiştir.

3.1. Giriş

3.1.1 Değişkenlere Ayırma Metodu

Bu bölümde, başlangıç değer problemlerini çözmek için oldukça yaygın bir biçimde kullanılan değişkenlere ayırma yönteminden bahsedilecektir. Bu yöntemin uygulanabildiği problemler sınıfı, matematiksel fizik, uygulamalı matematik ve mühendislik bilimlerindeki birçok problemi kapsar.

Şimdi, değişkenlerine ayırma yöntemi tanıtılacak ve bu yöntemin ikinci dereceden iki bağımsız değişkenli kısmi diferansiyel denklem içeren problemlere uygulanabilirliği için koşullar incelenecektir.

Aşağıdaki ikinci mertebeden kısmi diferansiyel denklem ele alınsın:

$$a^* u_{x^* x^*} + b^* u_{x^* y^*} + c^* u_{y^* y^*} + d^* u_{x^*} + e^* u_{y^*} + f^* u = 0. \quad (3.1.1.1)$$

Burada $a^*, b^*, c^*, d^*, e^*, f^*$ fonksiyonları x^* ve y^* değişkenlerinin fonksiyonlarıdır.

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(x^*, y^*)} \neq 0 \text{ olmak üzere}$$

$$x = x(x^*, y^*), \quad y = y(x^*, y^*)$$

dönüşümüyle (3.1.1.1) denklemi her zaman

$$a(x, y) u_{xx} + c(x, y) u_{yy} + d(x, y) u_x + e(x, y) u_y + f(x, y) u = 0 \quad (3.1.1.2)$$

kanonik biçiminde ifade edilebilir. Bu denklem, $a = -c$ iken hiperbolik, $a = 0$ veya $c = 0$ iken parabolik, $a = c$ iken eliptik olur.

(3.1.1.2) denkleminin ayrılabilir bir çözümünün

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \neq 0 \quad (3.1.1.3)$$

biçiminde olduğu kabul edilsin, burada X ve Y , sırasıyla sadece x ve sadece y değişkeninin fonksiyonlarıdır ve iki kez sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlardır. (3.1.1.3) ifadesi, (3.1.1.2) denkleminde yerine yazılırsa,

$$aX''Y + cXY'' + dX'Y + eXY' + fXY = 0 \quad (3.1.1.4)$$

denklemini elde edilir, burada X ve Y harfleri üzerindeki kesme işaretleri fonksiyonların uygun değişkenlere göre olan türevlerini göstermektedir.

(3.1.1.4) denklemini $p(x, y)$ fonksiyonuna bölünce

$$a_1(x)X''Y + b_1(y)XY'' + a_2(x)X'Y + b_2(y)XY' + [a_3(x) + b_3(y)]XY = 0 \quad (3.1.1.5)$$

denklemini elde edilecek biçimde bir $p(x, y)$ fonksiyonu olduğu varsayılın. (3.1.1.5) denklemini XY ile bölünerek

$$\left[a_1 \frac{X''}{X} + a_2 \frac{X'}{X} + a_3 \right] = - \left[b_1 \frac{Y''}{Y} + b_2 \frac{Y'}{Y} + b_3 \right] \quad (3.1.1.6)$$

elde edilir. (3.1.1.6) denkleminin sol tarafı sadece x ve sağ tarafı da sadece y değişkenine bağlıdır. Dolayısıyla, (3.1.1.6) denklemini x e göre diferansiyellenirse

$$\frac{d}{dx} \left[a_1 \frac{X''}{X} + a_2 \frac{X'}{X} + a_3 \right] = 0 \quad (3.1.1.7)$$

denklemini elde edilir. (3.1.1.7) denkleminin integrali alınarak

$$a_1 \frac{X''}{X} + a_2 \frac{X'}{X} + a_3 = \lambda \quad (3.1.1.8)$$

bulunur, burada λ bir ayırma sabitidir. (3.1.1.6) ve (3.1.1.8) ifadelerinden

$$b_1 \frac{Y''}{Y} + b_2 \frac{Y'}{Y} + b_3 = -\lambda \quad (3.1.1.9)$$

elde edilir. (3.1.1.8) ve (3.1.1.9) ifadeleri

$$a_1 X'' + a_2 X' + (a_3 - \lambda)X = 0 \quad (3.1.1.10)$$

ve

$$b_1 Y'' + b_2 Y' + (b_3 + \lambda)Y = 0 \quad (3.1.1.11)$$

biçimlerinde yazılabilir. Eğer $X(x)$ ve $Y(y)$ fonksiyonları sırasıyla (3.1.1.10) ve (3.1.1.11) adi diferansiyel denklemlerinin çözümleri ise (3.1.1.3) ifadesi ile verilen $u(x, y)$ fonksiyonu da (3.1.1.2) denkleminin çözümü olur.

Eğer (3.1.1.1) denklemindeki katsayılar sabit olursa, (3.1.1.1) denklemini kanonik forma indirgemeye gerek kalmaz. Gerçekten A, B, C, D, E ve F sıfırdan farklı sabitler olmak üzere

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = 0 \quad (3.1.1.12)$$

ikinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemini ele alınsın ve $u(x, y) = X(x)Y(y) \neq 0$ fonksiyonunun bu denklemin ayrılabilir bir çözümü olduğu kabul edilsin. $u(x, y) = X(x)Y(y) \neq 0$ ifadesi (3.1.1.12) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\frac{X''}{X} + \frac{B}{A} \frac{X' Y'}{X Y} + \frac{C}{A} \frac{Y''}{Y} + \frac{D}{A} \frac{X'}{X} + \frac{E}{A} \frac{Y'}{Y} + \frac{F}{A} = 0, A \neq 0 \quad (3.1.1.13)$$

bulunur. (3.1.1.13) ün x değişkenine göre türevi alınarak

$$\left(\frac{X''}{X}\right)' + \frac{B}{A} \left(\frac{X'}{X}\right)' \frac{Y'}{Y} + \frac{D}{A} \left(\frac{X'}{X}\right)' = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\frac{\left(\frac{X''}{X}\right)'}{\frac{B}{A} \left(\frac{X'}{X}\right)'} + \frac{D}{B} = -\frac{Y'}{Y}$$

yazılabilir. Bu eşitliğin de ayrılabilir olduğu ve bu durumda eşitliğin her iki tarafının bir λ sabitine eşit olması gerektiği söylenebilir. Buna göre,

$$Y' + \lambda Y = 0 \quad (3.1.1.14)$$

$$\left(\frac{X''}{X}\right)' + \left(\frac{D}{B} - \lambda\right) \frac{B}{A} \left(\frac{X'}{X}\right)' = 0 \quad (3.1.1.15)$$

elde edilir. (3.1.1.15) denklemi x değişkenine göre integre edilerek,

$$\frac{X''}{X} + \left(\frac{D}{B} - \lambda\right) \frac{B}{A} \left(\frac{X'}{X}\right) = -\beta \quad (3.1.1.16)$$

bulunur, burada β daha sonra belirlenecek bir sabittir. (3.1.1.14) denklemi asıl denklem olan (3.1.1.13) de yerine yazılarak

$$\frac{X''}{X} + \left(\frac{D}{B} - \lambda\right) \frac{B}{A} X' + \left(\lambda^2 - \frac{E}{C} \lambda + \frac{F}{C}\right) \frac{C}{A} X = 0 \quad (3.1.1.17)$$

bulunur. (3.1.1.16) ve (3.1.1.17) denklemleri karşılaştırılarak

$$\beta = \left(\lambda^2 - \frac{E}{C} \lambda + \frac{F}{C}\right) \frac{C}{A}$$

elde edilir. Eğer $X(x)$ ve $Y(y)$ fonksiyonları sırasıyla (3.1.1.17) ve (3.1.1.14) adi diferansiyel denklemlerinin çözümleri ise $u(x, y)$ fonksiyonu da (3.1.1.12) denkleminin çözümü olur.

3.1.2 Titreşen Tel Denklemleri

T^* sabit gerilim katsayısını ve ρ yoğunluğu göstermek üzere, x ekseninde 0 ve l noktaları arasında konumlanmış, uçları bağlı bir telin titreşimi denklemi göz önüne alınsın:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad t > 0 \quad (3.1.2.1)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (3.1.2.2)$$

$$u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (3.1.2.3)$$

$$u(0, t) = 0, \quad t > 0 \quad (3.1.2.4)$$

$$u(l, t) = 0, \quad t > 0 \quad (3.1.2.5)$$

Burada $c = T^* / \rho$ dır ve f ve g fonksiyonları sırasıyla başlangıç anındaki yer değiştirmeyi ve başlangıç anındaki hızı göstermektedir. Değişkenlerine ayırma yöntemi yardımıyla bu denklemin çözümünün

$$u(x, t) = X(x)T(t) \neq 0 \quad (3.1.2.6)$$

biçiminde olduğu kabul edilsin. (3.1.2.6) ifadesi (3.1.2.1) de yerine yazılırsa $XT'' = c^2 X''T$ ifadesi ve bu ifade yardımıyla da $XT \neq 0$ olmak üzere

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{c^2} \frac{T''}{T} \quad (3.1.2.7)$$

eşitliği elde edilir. (3.1.2.7) nin sol tarafı t değişkeni ve sağ tarafı da x değişkeninden bağımsız olduğu için, λ bir ayırma sabitini göstermek üzere,

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{c^2} \frac{T''}{T} = \lambda$$

yazılabilir. Dolayısıyla

$$X'' - \lambda X = 0 \quad (3.1.2.8)$$

ve

$$T'' - \lambda c^2 T = 0 \quad (3.1.2.9)$$

olmak üzere iki tane adi diferansiyel denklem elde edilir.

Değişkenlere ayırma yöntemi sınır koşullarına uygulanarak (3.1.2.4) ve (3.1.2.6) dan

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0$$

yazılabilir. t değişkeninin tüm değerleri için $T(t) \neq 0$ olması istendiğinden yukarıdaki son ifadeden

$$X(0) = 0$$

ve benzer biçimde (3.1.2.4) ve (3.1.2.5) den

$$X(l) = 0 \quad (3.1.2.10)$$

bulunur.

$X(x)$ çözümünü elde etmek için

$$X'' - \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(l) = 0 \quad (3.1.2.11)$$

özdeğer problemi çözümlidir. Bunun için, bu problemin sıfırdan farklı çözümlerini verecek biçimdeki λ değerleri aranmalıdır. Şimdi sırayla λ nın muhtemel üç durumu incelenir: $\lambda > 0$, $\lambda = 0$, $\lambda < 0$.

Durum 1. $\lambda > 0$. Bu durumda, A ve B keyfi sabitler olmak üzere, denklemin genel çözümü

$X(x) = Ae^{-\sqrt{\lambda}x} + Be^{\sqrt{\lambda}x}$ biçimindedir. Bu ifadenin sınır koşullarını sağlaması için

$$A + B = 0, \quad Ae^{-\sqrt{\lambda}l} + Be^{\sqrt{\lambda}l} = 0 \quad (3.1.2.12)$$

denklemin sisteminin çözümü araştırılmalıdır. (3.1.2.12) sisteminin determinantı sıfırdan farklıdır. Sonuç olarak, A ve B nin her ikisi birden sıfırdır ve $X(x)$ genel çözümü özdeş olarak sıfıra eşittir. Bu durumda aşikar çözüm elde edildiği için $\lambda > 0$ durumu (3.1.3.11) özdeğer probleminin sıfırdan farklı bir çözümünün elde edilebileceği bir durum değildir.

Durum 2. $\lambda = 0$. Bu durumda, denklemin genel çözümü $X(x) = A + Bx$ biçimindedir. Bu çözüme sınır koşulları uygulanarak $A = 0$ ve $A + Bl = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $A = B = 0$ olur ve bir önceki durumda olduğu gibi aşikar çözüm elde edilir.

Durum 3. $\lambda < 0$. Bu durumda denklemin genel çözümü

$$X(x) = A \cos \sqrt{-\lambda}x + B \sin \sqrt{-\lambda}x$$

biçimindedir. $X(0) = 0$ koşulundan, $A = 0$ ve $X(l) = 0$ koşulundan

$$B \sin \sqrt{-\lambda}l = 0$$

bulunur. $B = 0$ durumunda çözüm aşikar olacağından $B \neq 0$ alınır ve dolayısıyla $\sin \sqrt{-\lambda}l = 0$ elde edilir. Bu eşitlik $n = 1, 2, 3, \dots$ için $\sqrt{-\lambda}l = n\pi$ veya

$$-\lambda_n = (n\pi/l)^2$$

olduğunda sağlanır. λ nın bu sonsuz sayıdaki ayrık değerleri için problemin sıfırdan farklı çözümü bulunabilir. λ nın bu değerine, (3.1.3.11) özdeğer probleminin özdeğerleri ve bu özdeğerlere karşılık gelen $\sin(n\pi/l)x$, $n = 1, 2, 3, \dots$ fonksiyonlarına ise (3.1.3.11) özdeğer probleminin özfonksiyonları adı verilir. Dolayısıyla (3.1.2.11) problemin çözümleri

$$X_n(x) = B_n \sin(n\pi x/l)$$

biçiminde olur. $\lambda = \lambda_n$ için, (3.1.2.9) un genel çözümü

$$T_n(t) = C_n \cos\left(\frac{n\pi c}{l}t\right) + D_n \sin\left(\frac{n\pi c}{l}t\right)$$

biçiminde elde edilir, burada C_n ve D_n keyfi sabitlerdir. Bu durumlar $a_n = B_n C_n$ ve $b_n = B_n D_n$ olmak üzere

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = \left(a_n \cos \frac{n\pi c}{l}t + b_n \sin \frac{n\pi c}{l}t\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

fonksiyonları (3.1.2.1) denklemini ve (3.1.2.5) sınır koşulları sağlar. (3.1.2.1) denklemini lineer ve homojen olduğundan, süperpozisyon prensibinden,

$$u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi c}{l}t + b_n \sin \frac{n\pi c}{l}t\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (3.1.2.13)$$

sonsuz serisi de, yakınsak olması ve x ve t ye göre iki kez sürekli diferansiyellenebilir olması durumunda, denklemin bir çözümü olur. Serinin her bir terimi (3.1.2.4) ve (3.1.2.5) sınır

koşullarını sağladığından, serinin kendisi de bu sınır koşullarını sağlar. Problemin çözümüne ulaşmak için sağlanması gereken iki başlangıç koşulu vardır. Bu koşullar yardımıyla a_n ve b_n katsayıları belirlenecektir.

Bunun için öncelikle, (3.1.2.13) serisi t ye göre diferansiyellenerek

$$u_t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{l} \left(-a_n \sin \frac{n\pi c}{\ell} t + b_n \cos \frac{n\pi c}{\ell} t \right) \sin \left(\frac{n\pi x}{\ell} \right)$$

elde edilir. Daha sonra, (3.1.2.2) ve (3.1.2.3) başlangıç koşulları uygulanarak

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \left(\frac{n\pi x}{\ell} \right)$$

$$u_t(x, 0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{n\pi c}{\ell} \right) \sin \left(\frac{n\pi x}{\ell} \right)$$

bulunur. Bu eşitlikler, $f(x)$ ve $g(x)$ in Fourier sinüs serileriyle ifade edilebilmeleri durumunda sağlanır. Bu durumda a_n ve b_n katsayıları

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \left(\frac{n\pi x}{\ell} \right) dx, \quad b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^l g(x) \sin \left(\frac{n\pi x}{\ell} \right) dx \quad (3.1.2.14)$$

ile verilir. Dolayısıyla titreşen tel denkleminin çözümü, a_n ve b_n katsayıları (3.1.2.14) ifadeleri ile belirlenmek üzere, (3.1.2.14) serileri yardımıyla ifade edilir.

3.1.3 Özdeğer Problemi

Bir önceki bölümde, değişkenlere ayırma yöntemi yardımıyla, kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri belirlendi. Bu bölümde, değişkenlere ayırma yöntemi ve ilgili özdeğer problemleri genelleştirilecektir. Bu genelleştirme genellikle Sturm- Liouville teorisi olarak bilinir.

Ayrılabilir sınır koşulları altında, ikinci mertebeden bir homojen kısmi diferansiyel denklem

$$a_1(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_2(x) \frac{dy}{dx} + [a_3(x) + \lambda] y = 0 \quad (3.1.3.1)$$

biçimindeki bir adi diferansiyel denkleme dönüştürülebilir. Bu denklem önceki bölümde (3.1.2.10) ve (3.1.2.11) numaralı adi diferansiyel denklemlerle aynı biçime sahiptir. (3.1.3.1) denkleminde

$$\exp \left[\int_0^x \frac{a_2(t)}{a_1(t)} dt \right], \quad q(x) = \frac{a_3(x)}{a_1(x)}, \quad s(x) = \frac{p(x)}{a_1(x)} \quad (3.1.3.2)$$

ifadeleri göz önüne alınırsa,

$$\frac{d}{dx} \left(p \frac{dy}{dx} \right) + (q + \lambda s) y = 0 \quad (3.1.3.3)$$

biçiminde ifade edilen ve Sturm-Liouville denklemi olarak bilinen denklem elde edilir.

$$L \equiv \frac{d}{dx} \left(p \frac{dy}{dx} \right) + q$$

Sturm- Liouville operatörü olmak üzere (3.1.3.3) denklemi

$$L[y] + \lambda s(x)y = 0$$

biçiminde yazılabilir. Burada λ , x değişkeninden bağımsız bir parametre ve p , q , ve s fonksiyonları x değişkeninin reel değerli fonksiyonlarıdır. Çözümlerin varlığını garantilemek için kapalı sonlu bir $[a, b]$ aralığında q ve s fonksiyonlarının sürekli ve p fonksiyonun sürekli diferansiyellenebilir olduğu kabul edilir.

Eğer $p(x)$ ve $s(x)$ fonksiyonları kapalı $[a, b]$ aralığında pozitif fonksiyonlarsa, Sturm-Liouville denklemi bu $[a, b]$ aralığında regülerdir denir. Dolayısıyla verilmiş bir λ değeri için regüler Sturm-Liouville denkleminin $[a, b]$ aralığında iki tane lineer bağımsız çözümü vardır.

$$L[y] + \lambda s(x)y = 0, \quad a \leq x \leq b,$$

Sturm-Liouville denklemi a_1 , a_2 , b_1 , b_2 hepsi aynı anda sıfır olmayan keyfi reel sayılar olmak üzere

$$a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0, \quad b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0 \quad (3.1.3.4)$$

ayrık sınır koşulları ile birlikte ele alındığında bir regüler Sturm-Liouville sistemi oluşturur.

Sturm-Liouville sisteminin sıfırdan farklı çözümlerinin olduğu λ değerlerine özdeğerler, bu özdeğerlere karşılık gelen çözümlere ise özfonksiyonlar denir. Regüler bir Sturm-Liouville probleminde L operatörünün tanım kümesi $D(L)$ ile gösterilir. $D(L)$ kümesi $[a, b]$ aralığında tanımlı kompleks değerli tüm y fonksiyonlarından oluşur. Bu y fonksiyonları $y'' \in L^2([a, b])$ özelliğini ve (3.1.3.4) sınır koşullarını sağlar.

Örnek 3.1.3.1 Aşağıdaki regüler Sturm-Liouville problemi ele alınsın:

$$y'' + \lambda y = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$y(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0$$

$\lambda \leq 0$ olduğunda, λ nın bir özdeğer olmadığı gösterilebilir. $\lambda > 0$ iken Sturm-Liouville denkleminin çözümü

$$y(x) = A \cos \sqrt{\lambda} x + B \sin \sqrt{\lambda} x$$

biçimindedir. $y(0) = 0$ koşulundan $A = 0$ bulunur. $y'(\pi) = 0$ koşulu ise

$$B \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} \pi = 0$$

olmasını gerektirir. $\lambda \neq 0$ olduğundan ve $B = 0$ aşıkâr çözüm vereceğinden $\cos \sqrt{\lambda} \pi = 0$,

$B \neq 0$ elde edilir. Bu eşitlik, $n = 1, 2, 3, \dots$ iken $\sqrt{\lambda} = \frac{2n-1}{2}$ olduğunda sağlanır. Dolayısıyla

verilen problemin özdeğerleri $\lambda_n = (2n-1)^2 / 4$ biçiminde, bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar ise

$$\sin\left(\frac{2n-1}{2}x\right), \quad n=1,2,3,\dots$$

biçimindedir.

Örnek 3.1.3.2 $x^2 y'' + xy' + \lambda u = 0$, $1 \leq x \leq e$ Euler denklemini, $y(1) = 0$, $y(e) = 0$ sınır koşulları ile birlikte ele alınsın. (3.1.3.2) dönüşümü kullanılarak Euler denklemini

$$\frac{d}{dx}\left(x \frac{dy}{dx}\right) + \frac{1}{x} \lambda y = 0$$

Sturm-Liouville denklemini biçiminde yazılabilir. Euler denkleminin çözümü

$$y(x) = c_1 x^{i\sqrt{\lambda}} + c_2 x^{-i\sqrt{\lambda}}$$

ifadesi ile verilebilir. $x^{ia} = e^{ia \ln x} = \cos(a \ln x) + i \sin(a \ln x)$ olduğu göz önüne alınırsa, yukarıdaki ifade

$$y = A \cos(\sqrt{\lambda} \ln x) + B \sin(\sqrt{\lambda} \ln x)$$

halini alır, burada A ve B katsayıları c_1 ve c_2 sayıları ile ilişkili sabitlerdir. $y(1) = 0$ koşulu

$A = 0$ olmasını ve $y(e) = 0$ koşulu $\sin \sqrt{\lambda} = 0$, $B \neq 0$ olmasını gerektirir. Buradan özdeğerler, $n = 1, 2, 3, \dots$ olmak üzere $\lambda_n = n^2 \pi^2$ biçiminde, bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar ise yine $n = 1, 2, 3, \dots$ olmak üzere $\sin(n \pi \ln x)$ biçiminde bulunur.

Uygulamada kendine yer edinen başka bir problem türü periyodik Sturm-Liouville sistemleri olarak bilinir. $p(a) = p(b)$ olmak üzere

$$\frac{d}{dx}\left(p(x) \frac{dy}{dx}\right) + [q(x) + \lambda s(x)] y = 0, \quad a \leq x \leq b$$

Sturm-Liouville denklemini $y(a) = y(b)$, $y'(a) = y'(b)$ periyodik sınır koşulları ile birlikte ele alındığında oluşan sistem periyodik Sturm-Liouville sistemi olarak adlandırılır.

Örnek 3.1.3.3 Aşağıdaki periyodik Sturm-Liouville sistemi ele alınsın:

$$\begin{aligned} y'' + \lambda y &= 0, & -\pi \leq x \leq \pi \\ y(-\pi) &= y(\pi), & y'(-\pi) &= y'(\pi) \end{aligned}$$

burada $p(x) = 1$ olduğundan $p(-\pi) = p(\pi)$ eşitliğinin sağlandığını not etmekte fayda vardır.

$\lambda > 0$ iken Sturm-Liouville denkleminin çözümünün $y(x) = A \cos \sqrt{\lambda} x + B \sin \sqrt{\lambda} x$ olduğu görülebilir. Bu çözüme periyodik sınır koşulları uygulanarak $(2 \sin \sqrt{\lambda} \pi) B = 0$ ve $(2 \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} \pi) A = 0$ elde edilir. Buradan, aşık olmaya bir çözüm elde etmek için $A \neq 0$ ve $B \neq 0$ olmak üzere $\sin(\sqrt{\lambda} \pi) = 0$ olması gerektiği sonucuna varılır. Sonuç olarak,

$n = 1, 2, 3, \dots$ olmak üzere $\lambda_n = n^2$ bulunur. $\sin \sqrt{\lambda} \pi = 0$ eşitliği keyfi A ve B sayıları için sağlandığından aynı n^2 özdeğerine karşılık iki lineer bağımsız $\cos nx$ ve $\sin nx$ özfonksiyonları karşılık gelir.

$\lambda < 0$ iken Sturm-Liouville denkleminin periyodik sınır koşullarını sağlamadığı görülür. Buna rağmen, $\lambda = 0$ öz değerine karşılık gelen özfonksiyon 1 dir. Dolayısıyla, periyodik Sturm-Liouville sisteminin özdeğerleri 0 ve $\{n^2\}$, bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar ise n bir pozitif tam sayı olmak üzere 1, $\{\cos nx\}$, $\{\sin nx\}$ dir.

3.1.4 Özdeğer ve Özfonksiyon Özellikleri

Önceki bölümde, regüler Sturm-Liouville sistemleri ile ilgili verilen Örnek 3.1.3.1 ve Örnek 3.1.3.2 de, λ özdeğerine karşılık gelen yalnız bir lineer bağımsız özfonksiyon olduğu gösterilmiştir. Bu özdeğere “katlılık derecesi bir olan özdeğer” (veya basit özdeğer) denir. Bir özdeğere karşılık k tane lineer bağımsız özfonksiyon bulunabiliyorsa bu özdeğerin katlılık derecesi k dır denir. Örnek 3.1.3.3 teki periyodik Sturm-Liouville sisteminde aynı n^2 özdeğerine karşılık $\cos nx$ ve $\sin nx$ özfonksiyonları karşılık geldiği için bu özdeğerin katlılık derecesi 2 dir. Önceki örneklerde, özfonksiyonların $n = 1, 2, 3, \dots$ için $\cos nx$ ve $\sin nx$ biçiminde oldukları gösterilmiştir. Trigonometrik özdeşlikler kullanılarak, $m \neq n$ için

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = 0, \text{ tüm } m, n \text{ tamsayıları için } \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx = 0 \text{ ve yine } m \neq n \text{ için}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = 0 \text{ eşitliklerinin sağlandığı gösterilebilir. Böylece bu fonksiyonların } [-\pi, \pi]$$

aralığında birbirleri ile ortogonal oldukları söylenebilir. Ortogonalite bağıntısı genel olarak, Sturm-Liouville sistemlerinde geçerli olan bir bağıntıdır.

$\phi(x)$ ve $\psi(x)$, I aralığında reel değerli integrallenebilen fonksiyonlar olsun. Bu durumda ϕ ve ψ fonksiyonlarının I aralığında bir $\rho(x) > 0$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olmaları için gerek ve yeter koşul

$$\langle \phi, \psi \rangle = \int_I \phi(x) \psi(x) \rho(x) dx = 0 \quad (3.1.4.1)$$

bağıntısının sağlanmasıdır. I aralığı sonsuz boyutlu veya bir veya iki uçtan açık veya kapalı sonlu boyutlu bir aralık olabilir.

(3.1.4.1) de $\phi = \psi$ alınırsa ϕ fonksiyonunun normu

$$\|\phi\| = \left[\int_I \phi^2(x) \rho(x) dx \right]^{1/2}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 3.1.4.1 Sturm-Liouville sistemindeki p , q ve s katsayıları $[a, b]$ aralığında sürekli fonksiyonlar olsun. λ_j ve λ_k özdeğerlerine karşılık gelen ϕ_j ve ϕ_k özfonksiyonlarının sürekli

diferansiyellenebilir fonksiyonlar oldukları kabul edilsin. O halde, ϕ_j ve ϕ_k fonksiyonları $[a, b]$ aralığında $s(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldır.

Teorem 3.1.4.2 Herhangi $y, z \in D(L)$ fonksiyonları için

$$yL[z] - zL[y] = \frac{d}{dx} [p(yz' - zy')]$$

Lagrange özdeşliği sağlanır.

Teorem 3.1.4.3 L Sturm-Liouville operatörü özdeşleniktir. Başka bir deyişle, herhangi $y, z \in D(L)$ fonksiyonları için

$$\langle L[y], z \rangle = \langle y, L[z] \rangle$$

eşitliği sağlanır, burada $\langle \cdot, \cdot \rangle$ $L^2([a, b])$ uzayında aşağıdaki gibi tanımlanan iç çarpımdır:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

Teorem 3.1.4.4 $s(x) > 0$ olmak üzere, regüler Sturm-Liouville sisteminin tüm özdeğerleri reeldir.

Teorem 3.1.4.5 Eğer $\phi_1(x)$ ve $\phi_2(x)$, $L[y] + \lambda sy = 0$ denkleminin $[a, b]$ aralığındaki herhangi iki çözümüyse, $p(x)W(x; \phi_1, \phi_2) = \text{sabit}$ eşitliği sağlanır, burada W harfi $\phi_1(x)$ ve $\phi_2(x)$ fonksiyonlarının Wronskiyenini ifade etmektedir.

3.2 UYUMLU KESİRLİ TÜREV

3.2.1 Uyumlu Kesirli Türev Tanımı ve Özellikleri

$f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t > 0$ olsun. f fonksiyonunun t noktasındaki türevi $\frac{df}{dt} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t+\varepsilon) - f(t)}{\varepsilon}$ biçiminde tanımlıdır. Bu tanıma göre, $\frac{dt^n}{dt} = nt^{n-1}$ olduğu kolayca görülebilir. Burada, akla şu soru gelebilir: $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere, yukarıda verilen türev tanımına benzer biçimde tanımlanabilecek α -ıncı mertebeden bir kesirli türev var mıdır? Benzer türev tanımı, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\alpha \in (n, n+1]$ için de yapılabilir mi?

T_α ile α -ıncı mertebeden kesirli türev olarak isimlendirilen operatör belirtilsin. $\alpha = 1$ iken, T_1 operatörü aşağıdaki özellikleri sağlar.

- i) Tüm $a, b \in \mathbb{R}$ ve T_1 in tanım kümesinden alınan her f, g fonksiyonu için $T_1(af + bg) = aT_1(f) + bT_1(g)$ dir.
- ii) Tüm $p \in \mathbb{R}$ için $T_1(t^p) = pt^{p-1}$ dir.

- iii) $T_1(fg) = fT_1(g) + gT_1(f)$ dir.
- iv) $T_1\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gT_1(f) - fT_1(g)}{g^2}$ dir.
- v) Tüm sabit $f(t) = \lambda$ fonksiyonları için $T_1(\lambda) = 0$ dır.

Aşağıdaki tanım, $\alpha \in (0,1]$ olmak üzere, α –ıncı mertebeden kesirli türevin en basit, en doğal ve en etkili tanımıdır. Burada, bu tanımın, herhangi bir α sayısı için genelleştirilebileceğini belirtmekte yarar vardır. Fakat yine de $\alpha \in (0,1]$ durumu en önemli durumdur ve kesirli türevin tanımı bu durum için yapıldıktan sonra, diğer durumları elde etmek kolaydır.

Tanım 3.2.1.1 $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Tüm $t > 0$ ve $\alpha \in (0,1]$ için f fonksiyonunun α -ıncı mertebeden “uyumlu kesirli türevi”

$$T_\alpha(f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$

ile tanımlıdır. Eğer bazı $a > 0$ sayıları için f fonksiyonu $(0, a)$ aralığında α –diferansiyellenebilir ve $\lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(\alpha)}(t)$ mevcutsa f fonksiyonunun 0 noktasındaki α –ıncı mertebeden türevi $f^{(\alpha)}(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(\alpha)}(t)$ biçimindedir.

Bazen, f in α –ıncı mertebeden uyumlu kesirli türevi $T_\alpha(f)(t)$ yi belirtmek için $f^{(\alpha)}(t)$ gösterimi de kullanılabilir. Eğer f in α –ıncı mertebeden türevi mevcutsa, kısaca f α –türevlenebilirdir denir. Burada ayrıca $T_\alpha(t^p) = pt^{p-\alpha}$ olduğunu belirlemekte yarar vardır. Yukarıdaki tanımın bir sonucu olarak, aşağıdaki faydalı teorem verilebilir.

Teorem 3.2.1.1: $\alpha \in (0,1]$ olmak üzere, $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu bir $t_0 > 0$ noktasında α –diferansiyellenebilir, o halde f fonksiyonu t_0 noktasında süreklidir.

T_α uyumlu kesirli türevinin sağladığı özellikler aşağıdaki teoremle verilmiştir.

Teorem 3.2.1.2: $\alpha \in (0,1]$ ve f, g fonksiyonları bir $t > 0$ noktasında α –diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsun. Bu durumda

- 1) Her $a, b \in \mathbb{R}$ için $T_\alpha(af + bg) = aT_\alpha(f) + bT_\alpha(g)$ dır.
- 2) Her $p \in \mathbb{R}$ için $T_\alpha(t^p) = pt^{p-\alpha}$ dır.
- 3) Tüm sabit $f(t) = \lambda$ fonksiyonları için $T_\alpha(\lambda) = 0$ sağlanır.
- 4) $T_\alpha(fg) = fT_\alpha(g) + gT_\alpha(f)$ dır.
- 5) $T_\alpha\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gT_\alpha(f) - fT_\alpha(g)}{g^2}$ sağlanır.

6) Eğer f fonksiyonu diferansiyellenebilirse $T_\alpha(f)(t) = t^{1-\alpha} \frac{df}{dt}(t)$ olur.

Aşağıda belirli bazı fonksiyonların uyumlu kesirli türevleri verilmiştir:

- 1) Her $p \in \mathbb{R}$ için $T_\alpha(t^p) = pt^{p-\alpha}$ dır.
- 2) $T_\alpha(1) = 0$ dır.
- 3) Her $c \in \mathbb{R}$ için $T_\alpha(e^{cx}) = cx^{1-\alpha} e^{cx}$ dır.
- 4) Her $b \in \mathbb{R}$ için $T_\alpha(\sin bx) = bx^{1-\alpha} \cos bx$ dir.
- 5) Her $b \in \mathbb{R}$ için $T_\alpha(\cos bx) = -bx^{1-\alpha} \sin bx$ dir.
- 6) $T_\alpha\left(\frac{1}{\alpha}t\right) = 1$ dır.

Bunlara ek olarak, aşağıdaki eşitlikler de verilebilir:

- i) $T_\alpha\left(\sin \frac{1}{\alpha}t^\alpha\right) = \cos \frac{1}{\alpha}t^\alpha$
- ii) $T_\alpha\left(\cos \frac{1}{\alpha}t^\alpha\right) = -\sin \frac{1}{\alpha}t^\alpha$
- iii) $T_\alpha\left(e^{\frac{1}{\alpha}t^\alpha}\right) = e^{\frac{1}{\alpha}t^\alpha}$

Uyumlu kesirli türevin en önemli durumu α nın $(0,1]$ aralığında olduğu durum olmasına rağmen, $\alpha \in (n, n+1]$ iken uyumlu kesirli türevin nasıl tanımlanması gerektiği aşağıda belirtilmiştir.

Tanım 3.2.1.2: $\alpha \in (n, n+1]$ olmak üzere f , $t > 0$ noktasında n -nci mertebeden diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda, f in α -ıncı mertebeden uyumlu kesir türevi aşağıdaki gibidir:

$$T_\alpha(f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f^{(\lceil \alpha \rceil - 1)}(t + \varepsilon t^{\lceil \alpha \rceil - \alpha}) - f^{(\lceil \alpha \rceil - 1)}(t)}{\varepsilon}.$$

Burada, $\lceil \alpha \rceil$ α sayısının tam değerini belirtir.

Uyarı 3.2.1.1: Tanım 3.2.1.2 nin ışığında, $\alpha \in (n, n+1]$ ve f , $t > 0$ noktasında $(n+1)$ -inci mertebeden diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere $T^\alpha(f)(t) = t^{(\lceil \alpha \rceil - \alpha)} f^{(\lceil \alpha \rceil)}(t)$ olduğu kolayca gösterilebilir. Kesirli türev için yukarıda verilen tanımlar, α -diferansiyellenebilir fonksiyonların analizini yapmayı gerektirmese de, klasik analizin Rolle Teoremi ve Ortalama Değer Teoremi gibi önemli teoremlerinin uyumlu kesir türev için yapılan genelleştirmelerinin verilmesine engel de değildir.

Teorem 3.2.1.3: (Uyumlu Kesirli Türevlenebilir Fonksiyonlar için Rolle Teoremi)

$a > 0$ olsun ve $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun aşağıdaki koşulları sağladığı varsayalım:

- i) $f, [a, b]$ de sürekli.
- ii) Bazı $\alpha \in (0, 1)$ ler için f fonksiyonu α – diferansiyellenebilir.
- iii) $f(a) = f(b)$ dır.

Bu durumda $f^{(\alpha)}(c) = 0$ olacak biçimde bir $c \in (a, b)$ sayısı vardır.

Teorem 3.2.1.4: (Uyumlu Kesirli Türevlenebilir Fonksiyonlar İçin Ortalama Değer Teoremi)

$a > 0$ olsun ve $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlasın:

- i) $f, [a, b]$ de sürekli.
- ii) Bazı $\alpha \in (0, 1)$ ler için f α – diferansiyellenebilir.

Bu durumda $f^{(\alpha)}(c) = \frac{f(b) - f(a)}{\frac{1}{\alpha}b^\alpha - \frac{1}{\alpha}a^\alpha}$ olacak biçimde bir $c \in (a, b)$ sayısı vardır.

3.2.2 Uyumlu Kesirli İntegral

$\alpha \in (0, \infty)$ olsun ve $\alpha \neq -p$ olmak üzere keyfi $p \in \mathbb{R}$ için $J_\alpha(t^p) = \frac{t^{p+\alpha}}{p+\alpha}$ fonksiyonu tanımlansın. Eğer $f(t) = \sum_{k=0}^n b_k t^k$ ise $J_\alpha(f)$ ifadesi $J_\alpha(f) = \sum_{k=0}^n b_k J_\alpha(t^k) = \sum_{k=0}^n b_k \frac{t^{k+\alpha}}{k+\alpha}$ ile ve $f(t) = \sum_{k=0}^n b_k t^k$ ise, serinin düzgün yakınsak olması durumunda $J_\alpha(f) = \sum_{k=0}^n b_k \frac{t^{k+\alpha}}{k+\alpha}$ ile tanımlıdır. J_α nın tanım kümesinde lineer olduğu açıktır. Ayrıca, eğer $\alpha = 1$ ise, o halde J_α klasik integral ile örtüşür.

Bu tanıma göre, $\alpha = \frac{1}{2}$ iken, $J_\alpha(\sin t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+\frac{3}{2}}}{\left(2k+\frac{3}{2}\right)(2k+1)!}$ olur. Herhangi $\alpha \in (0, 1)$

için $\cos t$ ve e^t ifadeleri de benzer biçimde hesaplanabilir. Bu örnekler, $a \geq 0$ olmak üzere, bir f fonksiyonunun α – kesirli integralini aşağıdaki gibi tanımlamamıza olanak sağlar.

Tanım 3.2.2.1: $\alpha \in (0, 1)$ olmak üzere $I_\alpha^a(f)(t) = I_1^a(t^{\alpha-1}f) = \int_a^t \frac{f(x)}{x^{1-\alpha}} dx$ ile tanımlıdır.

Burada integral klasik Riemann genelleştirilmiş integralidir.

Teorem 3.2.2.1: $t \geq a$ ve f, I_α nın tanımlı olduğu bölgede sürekli bir fonksiyon olmak üzere $T_\alpha I_\alpha^a(f)(t) = f(t)$ dır.

3.3 Uyumlu Kesirli Kısmi Diferansiyel Denklemler

3.3.1 Uyumlu Kesirli Isı Denklemi

Kesirli diferansiyel denklemler, gerçek hayatta karşılaşılan olayları modellemek için kullanılan faydalı araçlardır. Bu, klasik diferansiyel denklemlerde iyi bilinen sonuçları, denklemdeki diferansiyel ifadesi kesirli türevle değiştirmek suretiyle elde edilen diferansiyel denklemleri incelemek için motivasyon sağlar. Bu bahsedilen klasik denklemlerden birisi de ısı denklemidir:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}.$$

Isı denkleminin birçok kesirli biçimi vardır. Bu biçimlerden biri, $0 < \alpha < 1$ olmak üzere $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ iken, diğerleri $1 \leq \alpha < 2$ iken $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ ve $0 < \alpha < 1$ iken $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial x^\alpha}$ olarak sıralanabilir.

Bu bölümde, $0 < \alpha < 1$ olmak üzere

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \cdot \frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad (3.3.1.1)$$

diferansiyel denklemi

$$u(0,t) = 0, \quad t > 0 \quad (3.3.1.2)$$

$$u(1,t) = 0, \quad t > 0 \quad (3.3.1.3)$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0 \quad (3.3.1.4)$$

$$u(x,0) = f(x) \quad 0 < x < 1 \quad (3.3.1.5)$$

koşulları ile birlikte ele alınmıştır, burada, denklemdeki kesirli türev, uyumlu kesirli türevdir.

Sabit katsayılı

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \cdot \frac{d^\alpha y}{dx^\alpha} \mp \mu^2 y = 0 \quad (3.3.1.6)$$

uyumlu kesirli lineer diferansiyel denklemi ele alınırsa, bu denklemin karakteristik denklemi $r^2 \mp \mu^2 = 0$ ve bu karakteristik denklemin kökleri ise $r = \mp \mu$ veya $r = \mp i\mu$ olarak bulunur.

Birinci durumda denklemin iki bağımsız çözümü $y = e^{\mp \frac{\mu}{\alpha} t^\alpha}$ olarak elde edilir. İkinci durumda bu çözümler

$$y_1 = \sin \frac{\mu}{\alpha} t^\alpha \quad \text{ve} \quad y_2 = \cos \frac{\mu}{\alpha} t^\alpha \quad (3.3.1.7)$$

olarak elde edilirler.

Genel olarak 2α – mertebeli sabit katsayılı uyumlu kesirli lineer diferansiyel denklemler

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \cdot \frac{d^\alpha y}{dx^\alpha} + a \frac{d^\alpha y}{dx^\alpha} + by = g(x)$$

biçiminde yazılır, $\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}$ ifadesi D^α ile işaretlenirse yukarıdaki denklem

$$D^\alpha (D^\alpha y) + aD^\alpha y + by = g(x)$$

biçiminde yazılabilir. Homojen denklemin çözümü için $r^2 + ar + b = 0$ denklemini göz önüne alınsın. Uyumlu kesirli türevin özellikleri kullanılarak, bu denklem için de klasik diferansiyel denklemlere benzer sonuçlar elde edilebilir.

Şimdi (3.3.1.1) ifadesi incelenmeye başlansın ve bunun için değişkenlerine ayırma metodu kullanılsın.

$u(x, t) = P(x)Q(t)$ ifadesi diferansiyel denklemde yerine yazılarak

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \cdot \frac{d^\alpha Q(t)}{dt^\alpha} P(x) = Q(t) \cdot \frac{d^2 P(x)}{dx^2}$$

ve buradan da

$$\frac{\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \cdot \frac{d^\alpha Q(t)}{dt^\alpha}}{Q(t)} = \frac{\frac{d^2 P(x)}{dx^2}}{P(x)} = \lambda$$

elde edilir, burada λ herhangi bir keyfi sabittir. Yukarıdaki denklemden iki ayrı diferansiyel denklem yazılabilir:

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \cdot \frac{d^\alpha Q(t)}{dt^\alpha} - \lambda Q = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{d^2 P(x)}{dx^2} - \lambda P = 0.$$

Burada ikinci denklem için λ nın $\lambda = 0$ $\lambda = -\mu^2$ $\lambda = \mu^2$ durumları ele alınırsa (3.3.1.2) ve

(3.3.1.3) koşulları yardımıyla

$$\mu = n\pi \quad \text{ve} \quad P_n(x) = C_n \sin n\pi x \quad (3.3.1.8)$$

elde edilir. (3.3.1.6) ve (3.3.1.7) den $Q(t) = b_1 \cos \frac{n\pi}{\alpha} t^\alpha + b_2 \sin \frac{n\pi}{\alpha} t^\alpha$ bulunur. (3.3.1.4)

koşulundan $b_2 = 0$ olur ve dolayısıyla $Q(t) = b_1 \cos \frac{n\pi}{\alpha} t^\alpha$ halini alır. Sonuç olarak, (3.3.1.8)

eşitliği kullanılarak

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\pi x \cos \frac{n\pi}{\alpha} t^\alpha$$

elde edilir. (3.3.1.5) koşulundan a_n in $f(x)$ in n – inci Fourier katsayısı olduğu söylenebilir.

3.3.2 Uyumlu Kesirli Dalga Denklemi

$0 < x < L$, $t \geq 0$ ve $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere

$$\frac{\partial^{2\alpha} u(x, t)}{\partial x^{2\alpha}} = -k \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (3.3.2.1)$$

denklemini

$$u(0, t) = 0 \quad (3.3.2.2)$$

$$u(L, t) = 0 \quad (3.3.2.3)$$

$$u(x, 0) = 0 \quad (3.3.2.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = f(x) \quad (3.3.2.5)$$

koşulları ile birlikte ele alınsın. $u(x, t) = P(x)Q(t)$ ifadesi (3.3.2.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{d^{2\alpha} P(x)}{dx^{2\alpha}} Q(t) = k P(x) \frac{d^2 Q(t)}{dt^2}$$

elde edilir. Dolayısıyla bazı λ lar için

$$\frac{d^{2\alpha} P(x)}{dx^{2\alpha}} / P(x) = -k \frac{d^2 Q(t)}{dt^2} / Q(t) = \lambda$$

yazılabilir. Buradan

$$\frac{d^{2\alpha} P(x)}{dx^{2\alpha}} - \lambda P(x) = 0 \quad (3.3.2.6)$$

ve

$$\frac{d^2 Q(t)}{dt^2} + \frac{\lambda}{k} Q(t) = 0 \quad (3.3.2.7)$$

bulunur. (3.3.2.2) ve (3.3.2.3) koşulları (3.3.2.6) denklemini ele almayı gerektirir. λ için üç durum söz konusudur:

1. $\lambda = 0$. Bu durumda (3.3.2.6) denklemi $\frac{d^{2\alpha} P(x)}{dx^{2\alpha}} = 0$ olarak yazılır. Ve uyumlu türevin $T_\alpha(c) = 0$ özelliğinden $P(x) = c$ bulunur. (3.3.2.2) ve (3.3.2.3) koşullarından $c = 0$ bulunur, dolayısıyla $\lambda = 0$ iken denklemin aşikar olmayan çözümü yoktur.

2. $\lambda > 0$ iken (3.3.2.6) denklemi $\frac{d^{2\alpha} P(x)}{dx^{2\alpha}} = \lambda P(x)$ olarak yazılır. Uyumlu türevin

$T_\alpha\left(e^{\frac{t^\alpha}{\alpha}}\right) = e^{\frac{t^\alpha}{\alpha}}$ özelliğinden $P(x) = ce^{\sqrt{\lambda} \frac{x^\alpha}{\alpha}}$ elde edilir. (3.3.2.2) ve (3.3.2.3) koşullarından $c = 0$

bulunur, dolayısıyla $\lambda > 0$ iken denklemin aşikar olmayan çözümü yoktur.

3. $\lambda < 0$ iken (3.3.2.6) denklemi $\frac{d^{2\alpha} P(x)}{dx^{2\alpha}} + \mu^2 P(x) = 0$ halini alır. Uyumlu türevin

$$T_\alpha \left(\cos \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) = -\sin \frac{t^\alpha}{\alpha} \text{ ve } T_\alpha \left(\sin \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) = \cos \frac{t^\alpha}{\alpha} \text{ özellikleri kullanılarak}$$

$$P(x) = c_1 \cos \mu \frac{x^\alpha}{\alpha} + c_2 \sin \mu \frac{x^\alpha}{\alpha}$$

elde edilir. (3.3.2.2) koşulundan $c_1 = 0$ bulunur. Bu durumda $P(x) = c_2 \sin \mu \frac{x^\alpha}{\alpha}$ olur. (3.3.2.3)

koşulundan $\sin \mu \frac{x^\alpha}{\alpha} = 0$ ve buradan $\mu = n\pi \frac{\alpha}{L^\alpha}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ bulunur. Dolayısıyla

$$P_n(x) = c_n \sin n\pi \frac{x^\alpha}{L^\alpha} \quad (3.3.2.8)$$

olur. Burada (3.3.2.7) denklemi göz önüne alınırsa

$$Q(t) = a_1 e^{\frac{n\pi\alpha}{L^\alpha \sqrt{k}} t} + a_2 e^{-\frac{n\pi\alpha}{L^\alpha \sqrt{k}} t}$$

elde edilir. (3.3.2.4) koşulu $a_2 = -a_1$ olmasını gerektirir ve böylece

$$Q(t) = 2a_1 \sin n\pi \frac{n\pi\alpha}{L^\alpha \sqrt{k}} t \quad (3.3.2.9)$$

bulunur. (3.3.2.8) ve (3.3.2.9) den

$$u(x, t) = \sum_n A_n \sin n\pi \frac{x^\alpha}{L^\alpha} \sinh \frac{n\pi\alpha}{L^\alpha \sqrt{k}} t \quad (3.3.2.10)$$

yazılabilir. (3.3.2.5) koşulundan, $A_n \frac{n\pi\alpha}{L^\alpha \sqrt{k}}$ katsayıların f fonksiyonun kesirli Fourier

katsayıları olduğu sonucuna varılır ve böylece $f(x) = \sum_n A_n \frac{n\pi\alpha}{L^\alpha \sqrt{k}} \sin n\pi \frac{x^\alpha}{L^\alpha}$ elde edilir. α -

Fourier sinüs serileri kullanılarak $A_n \frac{n\pi\alpha}{L^\alpha \sqrt{k}} = \frac{2\alpha}{p^\alpha} \int_0^p f(x) \sin \left(n \frac{x^\alpha}{\alpha} \right) \frac{dx}{x^{1-\alpha}}$ ve buradan da

$$A_n = \frac{1}{\frac{n\pi\alpha}{L^\alpha \sqrt{k}}} \cdot \frac{2\alpha}{p^\alpha} \int_0^p f(x) \sin \left(n \frac{x^\alpha}{\alpha} \right) \frac{dx}{x^{1-\alpha}} \quad \text{bulunur.} \quad \text{Dolayısıyla,}$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\pi \frac{x^\alpha}{L^\alpha} \sinh \frac{n\pi\alpha}{L^\alpha \sqrt{k}} t \text{ elde edilir.}$$

4. BULGULAR ve TARTIŞMA

Bu bölümde tezde ele alınan problem ve bu problem için elde edilen orijinal sonuçlara yer verilmiştir.

4.1 Homojen Olmayan Uyumlu Kesirli Dalga Denklemi

$0 \leq x \leq 1$, $t > 0$ olmak üzere, homojen olmayan telin titreşim denklemi ele alınsın:

$$\rho(x) \frac{\partial^{2\alpha} u}{\partial t^{2\alpha}} = \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \left(p(x) \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right) - q(x)u \quad (4.1.1)$$

Burada, $0 < \alpha \leq 1$ dır ve $p(x) > 0$, $\frac{\partial^\alpha p(x)}{\partial x^\alpha}$, $q(x)$, $\rho(x) > 0$ fonksiyonları $[0, l]$ aralığında sürekli fonksiyonlardır.

(4.1.1) denklemi

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t > 0 \quad (4.1.2)$$

sınır ve

$$u(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \varphi_1(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (4.1.3)$$

başlangıç koşulları ile birlikte dikkate alınsın ve X fonksiyonu sadece x değişkeninin, T fonksiyonu sadece t değişkeninin fonksiyonları olmak üzere (4.1.1) denkleminin sıfırdan farklı çözümü

$$u(x, t) = X(x)T(t) \neq 0 \quad (4.1.4)$$

biçiminde aransın. (4.1.4) ifadesi (4.1.1) de yerine yazılarak

$$T(t) \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \left(p(x) \frac{d^\alpha X(x)}{dx^\alpha} \right) - q(x)T(t)X(x) = \rho(x) \frac{d^{2\alpha} T(t)}{dt^{2\alpha}}$$

veya

$$\frac{\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \left(p(x) \frac{d^\alpha X(x)}{dx^\alpha} \right) - q(x)X(x)}{\rho(x)X(x)} = \frac{1}{T(t)} \frac{d^{2\alpha} T(t)}{dt^{2\alpha}} \quad (4.1.5)$$

elde edilir. (4.1.5) in sol tarafı sadece x değişkenine ve sağ tarafı sadece t değişkenine bağlı olduğundan bu oran bir sabite eşittir. Bu sabit $-\lambda$ alınırsa

$$\frac{d^{2\alpha} T(t)}{dt^{2\alpha}} + \lambda T(t) = 0$$

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \left(p(x) \frac{d^\alpha X(x)}{dx^\alpha} \right) - [q(x) - \lambda \rho(x)] X(x) = 0 \quad (4.1.6)$$

denklemleri elde edilir.

(4.1.2) deki birinci sınır koşulu

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0$$

biçiminde değişkenlerine ayrılırsa, keyfi t değerleri için $T(t) \neq 0$ olacağından

$$X(0) = 0 \quad (4.1.7)$$

elde edilir. Benzer şekilde, (4.1.2) deki ikinci sınır koşulu için

$$X(l) = 0 \quad (4.1.8)$$

elde edilir.

Bundan sonraki bölümlerde $0 \leq x \leq l$ aralığında tanımlı

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \left(p(x) \frac{d^\alpha X(x)}{dx^\alpha} \right) - [q(x) - \lambda \rho(x)] X(x) = 0 \quad (4.1.6)$$

$$X(0) = 0 \quad (4.1.7)$$

$$X(l) = 0 \quad (4.1.8)$$

uyumlu Sturm-Liouville probleminin çeşitli özellikleri incelenecektir.

4.2 Operatör Özellikleri

$$(4.1.6) \text{ denklemini } L_\alpha \equiv \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \left(p \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \right) - q \text{ operatörü yardımıyla } L_\alpha[X] + \lambda \rho(x) X = 0$$

biçiminde yazılabilir. Burada λ , x değişkeninden bağımsız bir parametre, p, q ve ρ fonksiyonları ise x değişkeninin reel değerli fonksiyonlarıdır.

L_α operatörünün tanım kümesi $D(L_\alpha)$ ile gösterilsin. Yani $D(L_\alpha)$, $[0, l]$ aralığında ikinci mertebeden α -sürekli türevlenebilir ve (4.1.7), (4.1.8) koşullarını sağlayan fonksiyonlardan oluşmuş bir küme olsun.

Teorem 4.2.1: Her $X_1, X_2 \in D(L_\alpha)$ için

$$X_1 L_\alpha[X_2] - X_2 L_\alpha[X_1] = \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \left[p(x) \left(X_1 \frac{d^\alpha X_2}{dx^\alpha} - X_2 \frac{d^\alpha X_1}{dx^\alpha} \right) \right] \quad (4.2.1)$$

Lagrange özdeşliği sağlar.

İspat: L_α operatörünün tanımından

$$X_1 L_\alpha[X_2] - X_2 L_\alpha[X_1] = X_1 \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \left(p(x) \frac{d^\alpha X_2}{dx^\alpha} \right) - q X_1 X_2 - X_2 \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \left(p(x) \frac{d^\alpha X_1}{dx^\alpha} \right) + q X_1 X_2$$

$$= X_1 \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \left(p(x) \frac{d^\alpha X_2}{dx^\alpha} \right) - X_2 \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \left(p(x) \frac{d^\alpha X_1}{dx^\alpha} \right) = \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \left[p(x) \left(X_1 \frac{d^\alpha X_2}{dx^\alpha} - X_2 \frac{d^\alpha X_1}{dx^\alpha} \right) \right]$$

elde edilir. Böylece teoremin ifadesinde belirtilen

$$X_1 L_\alpha [X_2] - X_2 L_\alpha [X_1] = \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \left[p(x) \left(X_1 \frac{d^\alpha X_2}{dx^\alpha} - X_2 \frac{d^\alpha X_1}{dx^\alpha} \right) \right]$$

eşitliğinin sağlandığı görülür ve böylece ispat biter.

Teorem 4.2.2: L^α operatörü özeşleniktir. Başka bir deyişle, keyfi $X_1, X_2 \in D(L_\alpha)$ için

$$\langle L_\alpha [X_1], X_2 \rangle = \langle X_1, L_\alpha [X_2] \rangle \quad (4.2.2)$$

sağlanır. Burada, $L^{2\alpha} [0, l]$ deki iç çarpım,

$$\langle f, g \rangle = \int_0^l f(x) \overline{g(x)} d_\alpha x$$

ile tanımlıdır.

İspat: Keyfi $X_1, X_2 \in D(L_\alpha)$ fonksiyonları ele alınsın.

$$\langle L_\alpha [X_1], X_2 \rangle - \langle X_1, L_\alpha [X_2] \rangle = \int_0^l L_\alpha [X_1(x)] \overline{X_2(x)} d_\alpha x - \int_0^l X_1(x) \overline{L_\alpha [X_2(x)]} d_\alpha x$$

olduğundan, uyumlu kesirli integraller için kısmi integrasyon formülü kullanılarak

$$\begin{aligned} \langle L_\alpha [X_1], X_2 \rangle - \langle X_1, L_\alpha [X_2] \rangle &= \int_0^l \left[\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \left(p(x) \frac{d^\alpha X_1(x)}{dx^\alpha} \right) - q(x) X_1(x) \right] \overline{X_2(x)} d_\alpha x \\ &\quad - \int_0^l X_1(x) \left[\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \left(p(x) \frac{d^\alpha X_2(x)}{dx^\alpha} \right) - q(x) X_2(x) \right] d_\alpha x \\ &= p(x) \left[\frac{d^\alpha X_1(x)}{dx^\alpha} X_2(x) - \frac{d^\alpha X_2(x)}{dx^\alpha} X_1(x) \right] \Big|_0^l \end{aligned}$$

elde edilir. $D(L_\alpha)$ kümesi $[0, l]$ aralığında ikinci mertebeden α -sürekli türevlenebilir ve

$X(0) = 0, X(l) = 0$ koşullarını sağlayan fonksiyonlardan oluşmuş bir küme olduğundan,

$$\langle L_\alpha [X_1], X_2 \rangle - \langle X_1, L_\alpha [X_2] \rangle = p(x) \left[\frac{d^\alpha X_1(x)}{dx^\alpha} X_2(x) - \frac{d^\alpha X_2(x)}{dx^\alpha} X_1(x) \right] \Big|_0^l$$

eşitliğinin sağ tarafının sıfıra eşit olduğu görülür ve böylece ispat biter.

4.3 Özdeğer ve Özfonksiyon Özellikleri

Tanım 4.3.1: (4.1.6)-(4.1.8) Sturm-Liouville problemi için sıfırdan farklı bir $X(x)$ çözümü bulunabilecek biçimdeki λ sayısına bu problemin bir özdeğeri denir. Bu durumda $X(x)$ fonksiyonu (4.1.6)-(4.1.8) Sturm-Liouville probleminin λ özdeğerine karşılık gelen bir özfonksiyonu olur.

Tanım 4.3.2: Aşağıdaki eşitliğin sağlanması durumunda f ve g fonksiyonlarına $\rho(x) > 0$ ağırlık fonksiyonuna gören α – ortogonal fonksiyonlar denir:

$$\int_0^l \rho(x) f(x) g(x) d_\alpha x = 0$$

Teorem 4.3.1: (4.1.6)-(4.1.8) sınır değer probleminin farklı özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonları $\rho(x) > 0$ ağırlık fonksiyonuna göre α – ortogonaldır.

İspat: $\lambda_1 \neq \lambda_2$, (4.1.6)-(4.1.8) sınır değer probleminin iki farklı özdeğeri, X_1 ve X_2 fonksiyonları ise sırasıyla bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar olsun. Bu durumda

$$L_\alpha [X_1(x)] = \lambda_1 \rho(x) X_1(x) \quad (4.3.1)$$

ve

$$L_\alpha [X_2(x)] = \lambda_2 \rho(x) X_2(x) \quad (4.3.2)$$

eşitlikleri sağlanır. (4.3.1) eşitliği $X_2(x)$, (4.3.2) eşitliği $X_1(x)$ ile çarpılır ve elde edilen eşitlikler taraf tarafa çıkarılırsa

$$X_2(x) L_\alpha [X_1(x)] - X_1(x) L_\alpha [X_2(x)] = (\lambda_1 - \lambda_2) \rho(x) X_1(x) X_2(x) \quad (4.3.3)$$

bulunur. (4.3.3) eşitliğinde her iki tarafın integrali alınarak, (4.2.2) eşitliği göz önünde bulundurulursa,

$$\begin{aligned} (\lambda_1 - \lambda_2) \int_0^l \rho(x) X_1(x) X_2(x) d_\alpha x &= \int_0^l (X_2(x) L_\alpha [X_1(x)] - X_1(x) L_\alpha [X_2(x)]) d_\alpha x \\ &= p(x) (X_2(x) L_\alpha [X_1(x)] - X_1(x) L_\alpha [X_2(x)]) \Big|_0^l = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olduğundan

$$\int_0^l \rho(x) X_1(x) X_2(x) d_\alpha x = 0$$

bulunur. Böylece ispat biter.

Teorem 4.3.2: (4.1.6)-(4.1.8) sınır değer probleminin tüm özdeğerleri reeldir.

İspat: λ , (4.1.6)-(4.1.8) sınır değer probleminin bir özdeğeri ve $X(x)$ bu özdeğere karşılık gelen öz fonksiyon olsun. O halde $X(x) \neq 0$ dır ve $L_\alpha[X(x)] = \lambda \rho(x) X(x)$ sağlanır. Bu durumda,

$$0 = \langle L[X(x)], X(x) \rangle - \langle X(x), L[X(x)] \rangle = (\lambda - \bar{\lambda}) \int_0^l \rho(x) |X(x)|^2 d_\alpha x$$

Bulunur. $[0, l]$ de $\rho(x) > 0$ olduğundan ve $X(x) \neq 0$ sağlandığından, integral altındaki ifade pozitifdir. Bu $\lambda = \bar{\lambda}$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla, özdeğerler reel olur ve böylece ispat biter.

Teorem 4.3.3: (4.1.6)-(4.1.8) sınır değer probleminin her bir öz değerine yalnızca bir lineer bağımsız öz fonksiyon karşılık gelir.

İspat: $X_1(x)$ ve $X_2(x)$, $L_\alpha[X(x)] = \lambda \rho(x) X(x)$ denkleminin iki lineer bağımsız çözümü olsun. Bu durumda,

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \left(p(x) \frac{d^\alpha X_1(x)}{dx^\alpha} \right) + (\lambda \rho(x) - q(x)) X_1(x) = 0,$$

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \left(p(x) \frac{d^\alpha X_2(x)}{dx^\alpha} \right) + (\lambda \rho(x) - q(x)) X_2(x) = 0$$

sağlanır. İlk eşitlik $X_2(x)$, ikinci eşitlik $X_1(x)$ çarpılıp, elde edilen eşitlikler taraf tarafa çıkarılırsa,

$$X_1(x) \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \left(p(x) \frac{d^\alpha X_2(x)}{dx^\alpha} \right) - X_2(x) \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \left(p(x) \frac{d^\alpha X_1(x)}{dx^\alpha} \right) = 0$$

bulunur. Bu eşitlik, 0 dan x e integre edilirse,

$$p(x) \left[X_1(x) \frac{d^\alpha X_2(x)}{dx^\alpha} - \frac{d^\alpha X_1(x)}{dx^\alpha} X_2(x) \right] = p(0) \left[X_1(0) \frac{d^\alpha X_2(0)}{dx^\alpha} - \frac{d^\alpha X_1(0)}{dx^\alpha} X_2(0) \right]$$

elde edilir. $X_1(x)$ ve $X_2(x)$ fonksiyonları $x=0$ noktasındaki sınır koşulunu sağladığından

$X_1(0)=0$ ve $X_2(0)=0$ olur ve buradan da $W_\alpha(0; X_1, X_2)=0$ eşitliğinin her $x \in [0, l]$ için

sağlandığı sonucu çıkar. Bu son ifade $X_1(x)$ ve $X_2(x)$ fonksiyonlarının lineer bağımlılığı için yeterli bir koşuldur. Buradan, bir λ öz değerine yalnızca bir lineer bağımsız öz fonksiyon karşılık geldiği sonucu çıkar. Böylece ispat biter.

Örnek 4.3.1 (4.1.6) denkleminde $p=1$, $q=0$ ve $\rho=1$ alınırsa denklem

$$\frac{d^{2\alpha} X(x)}{dx^{2\alpha}} + \lambda X(x) = 0 \quad (4.3.4)$$

halini alır. Bu örnekte, (4.4.1) denklemi

$$X(0)=0 \quad (4.3.5)$$

$$X(l) = 0 \quad (4.3.6)$$

sınır koşullarıyla birlikte ele alınacak ve (4.3.4)-(4.3.6) sınır değer probleminin özdeğer ve özfonksiyonları bulunacaktır. Bunun için λ nın üç durumu ele alınacaktır: $\lambda = 0$, $\lambda > 0$ ve $\lambda < 0$

i) $\lambda = 0$ iken (4.3.4) denklemi $\frac{d^{2\alpha} X(x)}{dx^{2\alpha}} = 0$ halini alır. Uyumlu kesirli türevin

$T_\alpha(c) = 0$ özelliğinden $X(x) = c$ bulunur. (4.3.5), (4.3.6) koşullarından $c = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $\lambda = 0$ iken (4.3.4)-(4.3.6) sınır değer probleminin aşikar olmayan çözümü yoktur.

ii) $\lambda > 0$ iken (4.3.4) denklemi $\frac{d^{2\alpha} X(x)}{dx^{2\alpha}} + \lambda X(x) = 0$ biçiminde yazılabilir. Uyumlu kesirli türevin $T_\alpha\left(e^{\frac{t^\alpha}{\alpha}}\right) = e^{\frac{t^\alpha}{\alpha}}$ özelliği yardımıyla $X(x)$ çözümü $X(x) = ce^{\sqrt{\lambda} \frac{x^\alpha}{\alpha}}$

biçiminde bulunur. (4.3.5), (4.3.6) koşullarından yine $c = 0$ bulunur. Dolayısıyla, $\lambda > 0$ iken de (4.3.4)-(4.3.6) sınır değer probleminin aşikar olmayan çözümünün olmadığı söylenebilir.

iii) $\lambda < 0$ iken (4.3.4) denklemi $\frac{d^{2\alpha} X(x)}{dx^{2\alpha}} - \mu^2 X(x) = 0$ biçiminde yazılabilir. Uyumlu kesirli türevin $T_\alpha\left(\cos \frac{t^\alpha}{\alpha}\right) = -\sin \frac{t^\alpha}{\alpha}$ ve $T_\alpha\left(\sin \frac{t^\alpha}{\alpha}\right) = \cos \frac{t^\alpha}{\alpha}$ özellikleri kullanılarak

$X(x)$ çözümü $X(x) = c_1 \cos \mu \frac{x^\alpha}{\alpha} + c_2 \sin \mu \frac{x^\alpha}{\alpha}$ biçiminde bulunur. (4.3.5) koşulundan

$c_1 = 0$ olur ve dolayısıyla $X(x) = c_2 \sin \mu \frac{x^\alpha}{\alpha}$ elde edilir. (4.3.6) koşulu $\sin \mu \frac{l^\alpha}{\alpha} = 0$

olmasını gerektirir. Buradan, $\mu = n\pi \frac{x^\alpha}{l^\alpha}$ ($n = 1, 2, \dots$) bulunur. Bu durumda (4.3.4)-

(4.3.6) sınır değer probleminin özfonksiyonları $X_n(x) = c_n \sin n\pi \frac{x^\alpha}{l^\alpha}$ olarak elde edilir.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1 Sonuçlar

Bu tezde, uyumlu kesirli kısmi türevle ifade edilen bir dalga denklemine, genelleştirilmiş Fourier metodu uygulanarak elde edilen, uyumlu kesirli sınır değer probleminin özdeğer ve özfonksiyon özellikleri incelenmiştir. Tezin “Bulgular ve Tartışma” kısmında verilen sonuçlar 2018 yılında Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisinde (Cilt 22, Sayı 3, pp. 1110-1113) yayımlanmış ve 2019 yılında *International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modelling, İstanbul 10-13 Mart 2019* konferansında sözlü bildiri olarak sunulmuştur. Bu tez çalışmasından elde edilen özgün sonuçlar, alanında çalışan matematikçiler için yardımcı kaynak rolü oynayacak niteliktedir.

5.2 Öneriler

Değişik uyumlu kesirli kısmi diferansiyel denklemlerle oluşturulan sınır değer problemlerinin spektral özellikleri incelenerek literatüre katkı sağlanabilir.

KAYNAKLAR

- [1] Khalil, R., Horani, M. Al., Yousef, A., Sababheh, M. (2014). A new definition of fractional derivative. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 264, 65-70.
- [2] Oldham, K. B., ;Spainer, J. (1974). *The fractional calculus, theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order*. Academic Press: New York.
- [3] Miller, K. S.,(1993). *An introduction to fractional calculus and fractional differential equations*. J. Wiley and Sons: New York.
- [4] Podlubny, I.(1999). *Fractional differential equations*. Academic Press:USA.
- [5] Kilbas, A., Srivastava, H., Trujillo, J. (2006). *Theory and applications of fractional differential equations*. Math. Studies. North-Holland: New York.
- [6] Schneider, W., Wyss, W. (1989). Fractional diffusion and wave equations. *J.Math. Phys.*, 30(1), 134-144.
- [7] Kulish., V. V., Lage, J. L. (2002). Application of fractional calculus to fluid mechanics. *J. Fluids Eng.*, 124(3), 803-806.
- [8] Magin, R. L. (2010). Fractional calculus models of complex dynamics in biological tissues. *Comput. Math. Appl.*, 59(5), 1586-1593.
- [9] Balachandran, K., Kiruthika, S., Rivero, M., Trujillo, J. J. (2010). Existence of solutions for fractional delay integrodifferential equations. *Journal of Applied Nonlinear Dynamics*, 59(5), 1586-1593.
- [10] Abu Hammad, M., Khalil, R. (2014). Abel's formula and Wronskian for conformable fractional differential equations. *Internat. J. Diff. Equ. Appl.*, 13(3), 177-183.
- [11] Abu Hammad, M., Khalil, R. (2014). Conformable fractional heat differential equations. *Internat. J. Pure. Appl. Math.*, 94(2), 215-221.
- [12] Gokdogan, A., Unal, E., Celik, E. (2016). Existence and uniqueness theorems for sequential linear conformable fractional differential equations. *Miskolc Mathematical Notes*, 17(1), 267-279.
- [13] Khalil, R., Abu-Shaab, H. (2015). Solution of some conformable fractional differential equations. *Internat. J. Pure. Appl. Math.*, 103(4), 667-673.
- [14] Abdeljawad, T. (2015). On conformable fractional calculus. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 27(9), 57-66.
- [15] Anderson, D. R., Ulness, D. J. (2016). Results for conformable differential equations. Preprint.
- [16] Anderson, D. R. (2017). Second-order self-adjoint differential equations using a proportional-derivative controller. *Commun. Appl. Nonlinear Anal.*, 24(1), 17-48.
- [17] Gulsen, T., Yilmaz, E., Göktaş, S. (2017). Conformable fractional Dirac system on time scales. *Journal of Inequalities and Applications*, 2017(161), doi: 10.1186/s136660-017-1434-8.

- [18] Gulsen, T., Yılmaz, E., Kemaloğlu, H. (2018). Conformable fractional Sturm-Liouville equation and some existence results on time scales. *Turkish Journal of Mathematics*, 42, 1348-1360.
- [19] Tyn, Myint-U, Lokenath, D. (2007). *Linear partial differential equations for scientists and engineers, fourth edition*. Birkhauser: Boston.



ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Nurcan ERBEY

Doğum Tarihi : 20.11.1988

E-mail : erbeynurcan1988@gmail.com

Öğrenim Durumu :

Derece	Bölüm/Program	Üniversite	Yıl
Lisans	Matematik	Siirt Üniversitesi	2011-2015
Yüksek Lisans	Matematik	Mersin Üniversitesi	2017-2019

ESERLER (Makaleler ve Bildiriler)

Bildiri:

1. Çetinkaya, F. A.; Erbey, N., On a Conformable Fractional Wave Equation, *International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modelling*, İstanbul 10-13 Mart 2019.