

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DEĞİŞMELİ HALKALARDA BULANIK SEZGİSEL 2- YUTAN İDEALLER



SANEM YAVUZ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI**

**DANIŞMAN
PROF. DR. BAYRAM ALİ ERSOY**

İSTANBUL, 2019

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEĞİŞMELİ HALKALARDA BULANIK SEZGİSEL 2- YUTAN İDEALLER

Sanem YAVUZ tarafından hazırlanan tez çalışması 10.05.2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Bayram Ali ERSOY
Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Bayram Ali ERSOY
Yıldız Teknik Üniversitesi



Prof. Dr. Ahmet Göksel AĞARGÜN
Yıldız Teknik Üniversitesi



Prof. Dr. Ünsal TEKİR
Marmara Üniversitesi





Bu çalışma, Yıldız Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü' nün 2016- 01- 03- YL04 numaralı projesi ile desteklenmiştir.

ÖNSÖZ

Değişmeli halkalar üzerinde bulanık sezgisel 2- yutan ideallerin incelendiği bu çalışmanın, konuya ilgi duyan araştırmacılar adına yararlı bir kaynak teşkil etmesini dilerim. Ayrıca lisans ve lisansüstü eğitim hayatım boyunca manevi desteğini esirgemeyen ve değerli bilgisiyle yol gösteren danışmanım Prof. Dr. Bayram Ali ERSOY hocama teşekkür ederim. Aynı zamanda, bu tezin hazırlanmasında her türlü desteği sağlayan tüm matematik bölümü hocalarıma teşekkür ederim.

Her koşulda maddi ve manevi desteğini esirgemeyen, çalışmalarımı destekleyen ve bugünlere gelmemi sağlayan kıymetli anneme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Mayıs, 2019

Sanem YAVUZ

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ.....	vii
ÇİZELGE LİSTESİ	ix
ÖZET.....	x
ABSTRACT	xi
BÖLÜM 1	
GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı.....	2
1.3 Hipotez	2
BÖLÜM 2	
TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1 Grup, Halka ve İdeal Yapıları.....	3
2.2 Bulanık Kümelerin Yapısı, Bulanık Halkalar ve İdealler	6
2.3 Bulanık Sezgisel Kümelerin Yapısı ve Bulanık Sezgisel İdealler.....	10
BÖLÜM 3	
DEĞİŞMELİ HALKALARDA BULANIK SEZGİSEL 2- YUTAN İDEALLER.....	13
3.1 Bulanık Sezgisel 2- Yutan İdealler	13
3.2 Bulanık Sezgisel Zayıf Tam 2- Yutan İdealler	18
BÖLÜM 4	
DEĞİŞMELİ HALKALARDA BULANIK SEZGİSEL 2- YUTAN ASALIMSİ İDEALLER	25
4.1 Bulanık Sezgisel 2- Yutan Asalımsı İdealler	25
4.2 Bulanık Sezgisel Zayıf Tam 2- Yutan Asalımsı İdealler	33

BÖLÜM 5

DEĞİŞMELİ HALKALARDA BULANIK SEZGİSEL 2- YUTAN YARIASALIMSİ İDEALLER.....41

5.1 Bulanık Sezgisel 2- Yutan Yariasalimsi İdealler41

BÖLÜM 6

SONUÇ VE ÖNERİLER48

KAYNAKLAR49

ÖZGEÇMİŞ51



SİMGE LİSTESİ

$\wedge$	Minimum veya infimum
$\min$	Minimum
$\vee$	Maksimum veya supremum
$\max$	Maksimum
μ	Bulanık alt küme
μ_A	A bulanık kümesi
$\mu_A(x)$	x'in A'ya ait olma derecesi
$[0,1]^X$	X'in bulanık kuvvet kümesi
$\mu(X)$	μ 'nün görüntü kümesi
$\text{Im}(\mu)$	μ 'nün görüntü kümesi
μ^*	μ 'nün destekleyicisi
$a_Y(x)$	$[0,1]$ -singleton
$1_Y(x)$	Karakteristik fonksiyon
μ_a	μ 'nün seviye alt kümesi
$f(\mu)$	μ 'nün f altındaki görüntüsü
$f^{-1}(v)$	v'nin f altındaki ters görüntüsü
Çek f	f'nin çekirdeği
$\mu \circ v$	μ ile v'nin nokta çarpımı
μ^{-1}	μ 'nün tersi
$L(G)$	G grubunun tüm bulanık alt gruplarının kümesi
μ_*	$\mu_* = \{x \in G \mid \mu(x) = \mu(e)\}$
$L(R)$	R halkasının tüm bulanık alt halkalarının kümesi
$LI(R)$	R halkasının tüm bulanık ideallerinin kümesi
$I^{(t,s)}$	I bulanık sezgisel kümesinin (t,s) seviye alt kümesi
$\langle \mu_I, v_I \rangle$	Bulanık sezgisel ideal
$\sqrt{I}$	I idealinin radikali
$f(I)$	I idealinin f altındaki görüntüsü
$f^{-1}(I)$	I idealinin f altındaki ters görüntüsü

$f(\sqrt{I})$ I idealinin radikalinin f altındaki görüntüsü
 $f^{-1}(\sqrt{I})$ I idealinin radikalinin f altındaki ters görüntüsü
 $\sqrt{f(I)}$ I idealinin f altındaki görüntüsünün radikali
 $\sqrt{f^{-1}(I)}$ I idealinin f altındaki ters görüntüsünün radikali
 $I \times J$ I ve J ideallerinin kartezyen çarpımı
 $\text{Im}(I)$ I idealinin görüntü kümesi
 γ $\gamma = \sqrt{I}$ bulanık sezgisel 2- yutan ideal



ÇİZELGE LİSTESİ

	Sayfa
Çizelge 3. 1 Bulanık sezgisel 2- yutan idealler	24
Çizelge 4. 1 Bulanık sezgisel 2- yutan asalımsı idealler	40



DEĞİŞMELİ HALKALARDA BULANIK SEZGİSEL 2- YUTAN İDEALLER

Sanem YAVUZ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Bayram Ali ERSOY

Bulanık kümeler teorisinin bir genişlemesi olan bulanık sezgisel kümeler ilk defa Atanassov tarafından açıklanmıştır. Bulanık sezgisel kümeler birçok araştırma alanında kullanılabilmektedir. Örneğin; kimya alanında, optimizasyon problemlerinin çözümünde, yer çekimi alanında, astronomi, sosyoloji ve biyoloji alanlarında, karar verme sürecinde ve tıbbi teşhis de kullanılmaktadır. Bu tezde, bulanık sezgisel kümeler ve 2- yutan idealler yardımıyla bulanık sezgisel 2- yutan idealler, bulanık sezgisel 2- yutan asalımsı idealler ve bulanık sezgisel 2- yutan yarıasalımsı idealler tanımlanarak, örnekler ve teoremlerle açıklanmıştır. Birinci bölümde literatür özeti verilmiştir. İkinci bölümde konuya hazırlık olması amacıyla bazı temel tanımlara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde bulanık sezgisel 2- yutan idealler ifade edilmiş ve örneklerle açıklanmıştır. Dördüncü bölümde bulanık sezgisel 2- yutan asalımsı ideallere yer verilmiştir. Beşinci bölümde bulanık sezgisel 2- yutan yarıasalımsı idealler açıklanmıştır. Son olarak bu ideallerin özellikleri karşılaştırılmış ve bazı sonuçlara ulaşılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Bulanık sezgisel küme, 2- yutan ideal, bulanık sezgisel 2- yutan ideal, bulanık sezgisel 2- yutan asalımsı ideal, bulanık sezgisel 2- yutan yarıasalımsı ideal.

INTUITIONISTIC FUZZY 2- ABSORBING IDEALS OF COMMUTATIVE RINGS

Sanem YAVUZ

Department of Mathematics

MSc. Thesis

Adviser: Prof. Dr. Bayram Ali ERSOY

Intuitionistic fuzzy sets which are expansion of the theory of fuzzy sets are explained for the first time by Atanassov. Intuitionistic fuzzy sets are used various research fields such as chemistry, solution of optimization problems, gravitational field, astronomy, sociology, biology, process of decision making and medical diagnosis. In this thesis, intuitionistic fuzzy 2- absorbing ideals are defined and examples, theorems are explained with the help of 2- absorbing ideals and intuitionistic fuzzy sets. In the first chapter, summary of literature is given. In the second chapter, some definitions are given for the purpose of preparation of main subject. In the third chapter, intuitionistic fuzzy 2- absorbing ideals are characterized and their examples are explained. In the fourth and fifth chapter, intuitionistic fuzzy 2- absorbing primary ideals and intuitionistic fuzzy 2- absorbing semiprimary ideals are described. As a result of this, these ideals are compared and some results are given.

Keywords: Intuitionistic fuzzy set, 2- absorbing ideal, intuitionistic fuzzy 2- absorbing ideal, intuitionistic fuzzy 2- absorbing primary ideal, intuitionistic fuzzy 2- absorbing semiprimary ideal.

YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

1.1 Literatür Özeti

Bulanık küme kavramı ilk kez Zadeh [1] tarafından tanımlanmıştır. Daha sonra, Rossenfeld [2] cebirsel yapılar üzerine bulanık kümeleri uygulamıştır. Liu [3] ise halka üzerinde bulanık ideal kavramını açıklamış ve bu konu üzerinde çeşitli çalışmalar yapmıştır. Mukarjee ve Sen [4] bulanık asal idealleri tanımlamışlar ve bulanık ideallerin özellikleri üzerine çalışmalar yapmışlardır.

Bulanık sezgisel küme kavramına geldiğimizde ise, ilk kez Atanassov [5] Zadeh'in tanımladığı bulanık küme kavramını geliştirerek bulanık sezgisel kümeleri oluşturmuştur. Hur vd. [6] bulanık sezgisel alt halka kavramını geliştirmişlerdir. Marashdeh ve Salleh [7] bulanık kümeleri temel alarak bulanık sezgisel halkaları çalışmışlardır. Bunun yanında, Sharma [8] bulanık sezgisel alt halkalar arasındaki geçişleri açıklamıştır.

2- yutan ideallere bakarsak, ilk defa Badavi [9] 2- yutan idealleri tanımlamıştır ve bu çalışması asal ideallerin bir genellemesi olmuştur. Ek olarak, Badavi vd. [10], [11] de verilen çalışmalarda değişmeli halkalarda n- yutan idealleri ve 2- yutan asalımsı idealleri incelemişlerdir. Günümüzde ise 2- yutan idealler üzerine çalışmalar hızla artmaktadır ve [12], [13], [14] de verilen çalışmalar gibi pek çok yazar bu konuyu kapsamlı olarak çalışmaktadır. İlaveten, Darani [15] L- bulanık 2- yutan idealleri tanımlamıştır. Darani ve Hashempoor [16] yarı halkalarda L- bulanık 2- yutan idealleri incelemişlerdir.

Asal ve asalımsı idealler ise değişmeli halkalar teorisinde çok önemli bir alana sahiptir. Asal ideallerin bir genelleştirilmesi olarak 2- yutan idealler [9] da ve asalımsı ideallerin genelleştirilmesi olarak 2- yutan asalımsı idealler [11] de tanımlanmıştır. Aynı zamanda, [4], [17] deki çalışmalarda bulanık asal idealler ve bulanık asalımsı idealler çalışılmıştır.

1.2 Tezin Amacı

Bu tezin esas amacı, 2- yutan ideallerin cebirsel yapısını bulanık sezgisel kümeler üzerinde uygulayarak oluşturmak ve aralarındaki ilişkileri, cebirsel özellikleri incelemektir. Buradan hareketle öncelikle bulanık sezgisel 2- yutan idealler kavramı oluşturulmuş ve temel özellikleri çalışılarak örneklerle desteklenmiştir. Benzer şekilde bulanık sezgisel 2- yutan asalımsı ve yarıasalımsı idealler de tanımlanmıştır. Aynı zamanda bulanık sezgisel zayıf tam 2- yutan (ve asalımsı) idealler de oluşturulmuş, cebirsel özellikleri çalışılmıştır. Dahası, literatürde yeni tanımlanan tüm bu ideallerin halka homomorfizması altında görüntü ve ters görüntü özellikleri araştırılmıştır. Sonuç olarak, tanımlanan bu ideallerin aralarındaki ilişkiler incelenmiştir.

1.3 Hipotez

Bu çalışmada, değişmeli halkalar ve bulanık sezgisel kümelerden yararlanılarak bulanık sezgisel 2- yutan ideal, bulanık sezgisel 2- yutan asalımsı ideal ve bulanık sezgisel 2- yutan yarıasalımsı ideal kavramları oluşturulmuş ve cebirsel özellikleri ispatlanmıştır. İdealler arasındaki geçiş özellikleri bulunmuştur. Aynı zamanda, halka homomorfizması altında görüntü ve ters görüntülerinin de ideal özelliklerini koruduğu belirlenmiştir. Böylece, klasik cebirdeki ideallerden yararlanılarak bulanık sezgisel 2- yutan idealler incelenmiştir.

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmamıza yardımcı olabilmesi için bazı temel tanım ve teoremler verilecektir. İlk olarak, klasik cebirde ki grup, halka, ideal kavramları tanıtılıp daha sonra halka homomorfizması ve özellikleri incelenecektir.

2.1 Grup, Halka ve İdeal Yapıları

Tanım 2.1 G boştan farklı bir küme olsun. $*$, G 'de bir ikili işlem olsun. $(G, *)$ yapısı aşağıdaki şartları sağlıyor ise, $(G, *)$ yapısına grup denir [19].

(G1) $\forall a, b \in G$ için $a * b \in G$ 'dir. (Kapalılık özelliği)

(G2) $\forall a, b, c \in G$ için $a * (b * c) = (a * b) * c$ 'dir. (Birleşme özelliği)

(G3) $\forall a \in G$ için $a * e = e * a = a$ olacak şekilde $\exists e \in G$ vardır. (Birim eleman özelliği)

(G4) $\forall a \in G$ için $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ olacak şekilde $\exists a^{-1} \in G$ vardır. (Ters eleman özelliği)

Burada $(G, *)$ bir grup ve H kümesi G 'nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Eğer H kümesi G 'deki işleme göre grup oluyorsa, H 'ye G 'nin alt grubu denir [19].

Tanım 2.2 $(G, *)$ bir grup olsun. Eğer $\forall a, b \in G$ için $a * b = b * a$ özelliği sağlanıyorsa, gruba değişmeli (abel) grup denir [19].

Örnek 2.1 $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{R} - 0, \cdot)$ ve $(\mathbb{Q} - 0, \cdot)$ birer gruptur [19].

Tanım 2.3 $R \neq \emptyset$ kümesi üzerinde $(+)$ ve $(\cdot)$ iki ikili işlem olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $(R, +, \cdot)$ cebirsel yapısına halka denir [19].

(R1) $(R, +)$ değişmeli gruptur.

(R2) $\forall a, b, c \in R$ için $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ 'dir. (Birleşme özelliği)

(R3) $\forall a, b, c \in R$ için

$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ ve $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$ (Dağılma özelliği).

R bir halka ve S boştan farklı R 'nin bir alt kümesi olsun. R 'deki işlemlere göre S alt kümesi de bir halka ise S 'ye R 'nin bir alt halkası denir [19].

Örnek 2.2 $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ birimli ve değişmeli bir halkadır [19].

Tanım 2.4 R bir halka olmak üzere $\forall a, b \in R$ için $a \cdot b = b \cdot a$ ise R halkasına değişmeli halka denir [19].

Tanım 2.5 R bir halka olmak üzere $\forall a \in R$ için $a \cdot e = e \cdot a = a$ olacak şekilde $\exists e \in R$ var ise R halkası birim elemanlı halkadır ve burada e birim elemandır [19].

Tanım 2.6 R bir halka ve R 'nin boştan farklı bir alt kümesi I olsun.

1) $\forall a, b \in I$ için $a - b \in I$ ve

2) $\forall a \in I$ ve $\forall r \in R$ için $ra \in I$ (veya $ar \in I$)

ise I 'ya R 'nin sol (ya da sağ) ideali denir. I , R 'nin hem sol hem de sağ ideali olursa kısaca I 'ya R 'nin bir ideali denir [19].

Örnek 2.3 Elemanları tam sayılardan oluşan 2×2 tipindeki matrisler halkasının bir ideali, $I = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$ dır [19].

Tanım 2.7 R değişmeli bir halka ve I R 'nin bir ideali olsun. I 'nın radikali aşağıdaki şekilde tanımlanır [19].

$$\sqrt{I} = \{a \in R \mid a^n \in I, \exists n \in \mathbb{Z}^+\} \quad (2.1)$$

Tanım 2.8 R 'nin kendinden farklı bir ideali I olsun. R 'nin A ve B idealleri için $AB \subset I$ iken $A \subset I$ veya $B \subset I$ oluyorsa, I idealine R 'nin asal ideali denir [19].

Teorem 2.1 R değişmeli bir halka olmak üzere R 'nin bir I idealinin asal ideal olması için gerek ve yeter koşul $a, b \in R$ için $ab \in I$ iken $a \in I$ ya da $b \in I$ olmasıdır [19].

Tanım 2.9 I , R halkasının bir ideali ve $I \subset R$ olsun. $\forall a, b \in R$ için $ab \in I$ ve $a \notin I$ olması $\exists n \in \mathbb{Z}^+$ için $b^n \in I$ olmasını gerektiriyorsa, I idealine asalımsı ideal denir [20].

Tanım 2.10 $(R, +, \cdot)$ ve $(S, +', \cdot')$ iki halka ve $f : R \rightarrow S$ bir fonksiyon olsun. $\forall a, b \in R$ için,

$$i) f(a + b) = f(a) + ' f(b)$$

ve

$$ii) f(a \cdot b) = f(a) \cdot ' f(b)$$

ise, f 'ye R 'den S 'ye bir halka homomorfizması denir [19].

R halkasından S halkasına bir f homomorfizması için,

i) Eğer f bire- bir ise monomorfizma olarak adlandırılır.

ii) Eğer f örten ise epimorfizma olarak adlandırılır.

iii) Eğer f bire- bir ve örten ise izomorfizma olarak adlandırılır ve R ile S de izomorf halkalar olur ve $R \cong S$ ile gösterilir.

iv) Eğer $f : R \rightarrow R$ bir izomorfizma ise, f otomorfizma olarak adlandırılır.

Burada R halkasından S halkasına f bir izomorfizma ise, f^{-1} de S halkasından R halkasına bir izomorfizmadır [19].

Tanım 2.11 f , R halkasından S halkasına bir homomorfizma olsun. 0_s , S halkasının toplamsal birimini göstermek üzere,

$$\text{Çek } f = \{a \in R \mid f(a) = 0_s\} \quad (2.2)$$

kümesine f 'nin çekirdeği denir [19].

2.2 Bulanık Kümelerin Yapısı, Bulanık Halkalar ve İdealler

Bu bölümde bulanık kümelerin yapısı incelenerek, bazı temel özellikleri verilmiştir. Daha sonra, bulanık halka ve bulanık ideal kavramları verilecektir.

Tanım 2.12 X herhangi bir küme olsun. $\mu: X \rightarrow [0,1]$ fonksiyonuna X kümesinin bulanık alt kümesi denir. X kümesinin bütün bulanık alt kümelerinin oluşturduğu kümeye de X 'in bulanık kuvvet kümesi denir ve $[0,1]^X$ olarak ifade edilir [21].

Tanım 2.13 $\mu \in [0,1]^X$ olsun. $\{\mu(x): x \in X\}$ şeklinde tanımlanan kümeye μ 'nün görüntü kümesi denir ve $\mu(X)$ ya da $\text{Im}(\mu)$ şeklinde ifade edilir [21].

Tanım 2.14 $\mu \in [0,1]^X$ olsun. $\{x \mid x \in X, \mu(x) > 0\}$ kümesine de μ 'nün destekleyicisi denir ve μ^* şeklinde gösterilir [21].

Tanım 2.15 $Y \subseteq X$ ve $a \in [0,1]$ olsun. $a_Y \in [0,1]^X$ aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$a_Y(x) = \begin{cases} a, & x \in Y \\ 0, & x \notin Y \end{cases}$$

Özel olarak, eğer $Y = \{y\}$ ise a_Y kümesi $a_{\{y\}}$ şeklinde gösterilir ve $[0,1]$ - nokta (ya da $[0,1]$ - singleton) olarak ifade edilir.

Eğer $a=1$ olursa,

$$1_Y(x) = \begin{cases} 1, & x \in Y \\ 0, & x \in X / Y \end{cases}$$

fonksiyonuna karakteristik fonksiyon denir [21].

Tanım 2.16 $\mu, \nu \in [0,1]^X$ olsun. $\forall x \in X$ için;

i) $\mu(x) \leq \nu(x)$ ise, ν bulanık alt kümesi μ bulanık alt kümesini kapsar denir ve $\mu \subseteq \nu$ şeklinde ifade edilir.

ii) μ, ν bulanık alt kümelerinin birleşimi $(\mu \cup \nu)(x) = \mu(x) \vee \nu(x)$ olarak ifade edilir.

iii) μ, ν bulanık alt kümelerinin kesişimi $(\mu \cap \nu)(x) = \mu(x) \wedge \nu(x)$ olarak ifade edilir [21].

Tanım 2.17 $\mu \in [0,1]^X$ ve $a \in [0,1]$ olmak üzere, μ 'nün seviye alt kümesi aşağıdaki şekilde ifade edilir [21].

$$\mu_a = \{x \mid x \in X, \mu(x) \geq a\}$$

Tanım 2.18 X, Y birer küme ve $\mu \in [0,1]^X$, $\nu \in [0,1]^Y$ olsun. $f : X \rightarrow Y$ bir dönüşüm olmak üzere $f(\mu) \in [0,1]^Y$ ve $f^{-1}(\nu) \in [0,1]^X$ bulanık alt kümeleri aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\forall y \in Y \text{ için } f(\mu)(y) = \begin{cases} \bigvee \{\mu(x) : x \in X, f(x) = y\}, & f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

ifadesi f altında μ 'nün görüntüsünü ifade eder.

$$\forall x \in X \text{ için } f^{-1}(\nu)(x) = \nu(f(x))$$

ifadesi de f altında ν 'nin ters görüntüsünü ifade eder [21].

Bu kısımda G birim elemanı e olan ve çarpımsal ikili işleme sahip bir gruptur. Burada sırasıyla bulanık alt grup tanımı yapılarak temel teoremleri verilecektir.

Tanım 2.19 $\forall x \in G$ için $\forall \mu, \nu \in [0,1]^G$ olmak üzere,

$$(\mu \circ \nu)(x) = \bigvee \{\mu(y) \wedge \nu(z) \mid y, z \in G, yz = x\}$$

ifadesi μ ile ν nokta çarpımını verir.

$$\mu^{-1}(x) = \mu(x^{-1})$$

ifadesi de μ bulanık alt kümesinin tersini ifade eder [21].

Tanım 2.20 G bir grup ve G 'nin bulanık alt kümesi μ olsun. Eğer μ aşağıdaki şartları sağlar ise, μ ye G 'nin bulanık alt grubu denir.

i) $\forall x, y \in G$ için $\mu(xy) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$,

ii) $\forall x \in G$ için $\mu(x^{-1}) \geq \mu(x)$.

Burada, G 'nin bütün bulanık alt gruplarının kümesi $L(G)$ ile gösterilir. $\mu \in L(G)$ olmak üzere, μ_* aşağıdaki şekilde tanımlanır [21].

$$\mu_* = \{x \in G : \mu(x) = \mu(e)\} \quad (2.3)$$

Teorem 2.2 $\mu \in [0,1]^G$ olsun. μ 'nün, G 'nin bulanık alt grubu olması için gerek ve yeter koşul μ_a 'nın, G 'nin alt grubu olmasıdır [21].

Teorem 2.3 G ve H grup, $\mu \in L(G)$ ve f de G 'den H 'ye epimorfizma olsun. Buradan, $f(\mu) \in L(H)$ elde edilir [21].

Teorem 2.4 G ve H grup, $\nu \in L(H)$ ve f de G 'den H 'ye homomorfizma olsun. Buradan, $f^{-1}(\nu) \in L(G)$ elde edilir [21].

Bundan sonra R değişmeli bir halka olarak alınacaktır. İlk olarak değişmeli halkanın bulanık alt kümeleri üzerinde bazı işlemler tanımlanacak daha sonra bulanık alt halka ve bulanık ideal kavramları tanıtılarak temel özellikleri incelenecektir.

Tanım 2.21 μ ve ν R halkasının bulanık alt kümeleri olsun. $\forall x \in R$ için,

i) μ ile ν 'nin toplamı: $(\mu + \nu)(x) = \bigvee \{ \mu(y) \wedge \nu(z) \mid y, z \in R, y + z = x \}$

ii) μ ile ν 'nin farkı: $(\mu - \nu)(x) = \bigvee \{ \mu(y) \wedge \nu(z) \mid y, z \in R, y - z = x \}$

iii) μ ile ν 'nin nokta çarpımı: $(\mu \circ \nu)(x) = \bigvee \{ \mu(y) \wedge \nu(z) \mid y, z \in R, yz = x \}$

iv) μ 'nün negatifi: $(-\mu)(x) = \mu(-x)$

olarak tanımlanır. Burada halka değişmeli olduğundan, $\mu \circ \nu = \nu \circ \mu$ dır [21].

Tanım 2.22 μ , R halkasının bulanık alt kümesi olsun. Eğer aşağıdaki özellikler sağlanırsa, μ 'ye R 'nin bulanık alt halkası denir.

i) $\forall x, y \in R$ için $\mu(x - y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$ ve

ii) $\forall x, y \in R$ için $\mu(xy) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$.

Burada R 'nin tüm bulanık alt halkalarının kümesi $L(R)$ şeklinde gösterilir [21].

Tanım 2.23 μ , R halkasının bulanık alt kümesi olsun. Eğer aşağıdaki özellikler sağlanırsa, μ 'ye R 'nin bulanık ideali denir.

i) $\forall x, y \in R$ için $\mu(x - y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$ ve

ii) $\forall x, y \in R$ için $\mu(xy) \geq \mu(x) \vee \mu(y)$.

Burada R 'nin tüm bulanık ideallerinin kümesi $LI(R)$ şeklinde gösterilir. Halka değişmeli olduğundan (ii) koşulunu sağlaması için gerek ve yeter koşul, $\mu(xy) \geq \mu(x)$ olmasıdır.

Eğer $\mu \in LI(R)$ ise, $\mu_* = \{x \in R \mid \mu(x) = \mu(0)\}$ dir [21].

Teorem 2.5 μ , R halkasının bulanık alt kümesi olsun. μ 'nün, R 'nin bulanık ideali olması için gerek ve yeter koşul μ_a 'nın, R 'nin ideali olmasıdır [21].

Teorem 2.6 R ve S halka ve $f : R \rightarrow S$ epimorfizma olsun. Burada S halkasının bulanık idealleri ile R halkasının çek f üzerinde sabit olan bulanık idealleri arasında bire- bir eşleme vardır [21].

Teorem 2.7 ν , R 'nin bulanık alt halkası ve ν 'nin bulanık ideali μ olsun. R ve S halka ve $f : R \rightarrow S$ homomorfizma olsun. Bu durumda; $f(\mu)$, $f(\nu)$ 'nin bulanık idealidir [21].

Teorem 2.8 R ve S halka ve $f : R \rightarrow S$ homomorfizma olsun. ν , S 'nin bulanık alt halkası ve ν 'nin bulanık ideali μ olsun. Bu durumda; $f^{-1}(\mu)$, $f^{-1}(\nu)$ 'nin bulanık idealidir [21].

Tanım 2.24 $\mu, \nu, \gamma \in LI(R)$ olsun. γ sabit olmamak üzere, $\mu \circ \nu \subseteq \gamma$ iken $\mu \subseteq \gamma$ ya da $\nu \subseteq \gamma$ oluyorsa, γ idealine R 'nin bulanık asal ideali denir. Burada $\gamma \in LI(R)$, $\gamma \subseteq \mu$ ve $\gamma_* \subseteq \mu_*$ olmak üzere R 'nin bütün bulanık asal γ ideallerinin kümesi P_γ ile gösterilir [1].

Teorem 2.9 $\mu, \nu, \gamma \in LI(R)$ olsun. γ sabit olmamak üzere, γ 'nın bulanık asal ideal olması için gerek ve yeter koşul $\mu\nu \subseteq \gamma$ iken $\mu \subseteq \gamma$ ya da $\nu \subseteq \gamma$ olmasıdır [1].

Tanım 2.25 $\gamma \in LI(R)$ olsun. γ bulanık idealinin radikali aşağıdaki şekilde tanımlanır ve $\sqrt{\gamma}$ olarak gösterilir.

$$\sqrt{\gamma} = \begin{cases} \bigcap \{ \mu : \mu \in P_\gamma \}, & P_\gamma \neq \emptyset \\ 1_R, & P_\gamma = \emptyset \end{cases} \quad (2.4)$$

[1].

2.3 Bulanık Sezgisel Kümelerin Yapısı ve Bulanık Sezgisel İdealler

Bu bölümde, R birimli ve değişmeli halka olarak ve $L = [0,1]$ latis olarak alınacaktır. İlk olarak, bulanık sezgisel küme kavramı tanıtılarak temel özellikleri incelenmiştir. Daha sonra, bulanık sezgisel nokta kavramı verilerek bulanık sezgisel idealler tanıtılmış ve temel teoremleri ele alınmıştır.

Tanım 2.26 X herhangi bir küme olmak üzere, X 'in bulanık sezgisel kümesi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$A = \{x, \mu(x), \nu(x) \mid x \in X\}. \quad (2.5)$$

Burada, $\mu : X \rightarrow [0,1]$ fonksiyonuna $\forall x \in X$ için üyelik derecesi denir. $\nu : X \rightarrow [0,1]$ fonksiyonuna da $\forall x \in X$ için üyelik olmama derecesi denir. Burada $\forall x \in X$ için $0 \leq \mu(x) + \nu(x) \leq 1$ eşitliği sağlanmalıdır [22].

Tanım 2.27 $\alpha, \beta \in [0,1]$ ve $\alpha + \beta \leq 1$ olsun. $x_{(\alpha,\beta)}$ bulanık sezgisel noktası, R 'nin bulanık sezgisel alt kümesi olarak aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$x_{(\alpha,\beta)}(y) = \begin{cases} (\alpha, \beta), & x = y \text{ ise} \\ (0, 1), & x \neq y \text{ ise} \end{cases}.$$

Eğer $\mu(x) \geq \alpha$ ve $\nu(x) \leq \beta$ olursa, $x_{(\alpha,\beta)}$ bulanık sezgisel noktası $\langle \mu, \nu \rangle$ bulanık sezgisel kümesine ait olur ve $x_{(\alpha,\beta)} \in \langle \mu, \nu \rangle$ olarak gösterilir. $\forall x, y \in R$ için bulanık sezgisel noktaların aşağıdaki özellikleri elde edilir:

$$i) x_{(t,s)} + y_{(\alpha,\beta)} = (x + y)_{(t \wedge \alpha, s \vee \beta)}$$

$$ii) x_{(t,s)} y_{(\alpha,\beta)} = (xy)_{(t \wedge \alpha, s \vee \beta)}$$

$$iii) \langle x_{(t,s)} \rangle \langle y_{(\alpha,\beta)} \rangle = \langle x_{(t,s)} y_{(\alpha,\beta)} \rangle \quad [22].$$

Tanım 2.28 X kümesinin bulanık sezgisel kümesi I olsun. $t, s \in L$ ve $t + s \leq 1$ için I 'nin (t, s) seviye alt kümesi:

$$I^{(t,s)} = \{x \in X \mid \mu_I(x) \geq t \text{ ve } \nu_I(x) \leq s\}$$

olarak tanımlanır [22].

Tanım 2.29 R halka olsun. $\forall x, y \in R$ için $A = \{x, \mu(x), v(x) \mid \forall x \in R\}$ bulanık sezgisel kümesi aşağıdaki şartları sağlar ise R 'nin bulanık sezgisel idealidir.

- i) $\mu(x - y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y),$
- ii) $\mu(xy) \geq \mu(x) \vee \mu(y),$
- iii) $v(x - y) \leq v(x) \vee v(y),$
- iv) $v(xy) \leq v(x) \wedge v(y)$ [22].

Tanım 2.30 R 'nin bulanık sezgisel ideali $I = \langle \mu_I, v_I \rangle$ olsun. I 'nin radikali aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\sqrt{I} = \bigvee_{n \geq 1} I(x^n)$$

[17].

Teorem 2.10 R 'nin bulanık sezgisel idealleri I, J olsun.

$$\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$$

[23].

Teorem 2.11 $f : R \rightarrow S$ örten halka homomorfizması ve R 'nin bulanık sezgisel ideali I çek f üzerinde sabit ve S 'nin bulanık sezgisel ideali J olsun. Buradan aşağıdaki durumlar elde edilir:

- i) $\sqrt{f(I)} = f(\sqrt{I}),$
- ii) $\sqrt{f^{-1}(J)} = f^{-1}(\sqrt{J})$ [23].

Tanım 2.31 R 'nin bulanık sezgisel ideali $I = \langle \mu_I, v_I \rangle$ olsun. R 'nin $A = \langle \mu_A, v_A \rangle$ ve $B = \langle \mu_B, v_B \rangle$ bulanık sezgisel idealleri için eğer $AB \subset I$ iken $A \subset I$ ya da $B \subset I$ oluyorsa, I idealine bulanık sezgisel asal ideal denir [15].

Tanım 2.32 R 'nin bulanık ideali $I = \langle \mu_I, v_I \rangle$ olsun. $\forall a, b \in R$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere,

$$\left\{ \begin{array}{c} \mu_I(ab) = \mu_I(a) \\ \text{ve} \\ \nu_I(ab) = \nu_I(a) \end{array} \right\} \text{ ya da } \left\{ \begin{array}{c} \mu_I(ab) \leq \mu_I(b^n) \\ \text{ve} \\ \nu_I(ab) \geq \nu_I(b^n) \end{array} \right\}$$

ise, I ideale bulanık sezgisel asalımsı ideal denir [24].

Tanım 2.33 $\forall a, b \in R$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ için R 'nin bulanık ideali I olmak üzere,

$$\left\{ \begin{array}{c} \mu_I(ab) \leq \mu_I(a^n) \\ \text{ve} \\ \nu_I(ab) \geq \nu_I(a^n) \end{array} \right\} \text{ ya da } \left\{ \begin{array}{c} \mu_I(ab) \leq \mu_I(b^n) \\ \text{ve} \\ \nu_I(ab) \geq \nu_I(b^n) \end{array} \right\}$$

ise, I ideale bulanık sezgisel yarıasalımsı ideal denir [24].

Tanım 2.34 R 'nin ideali I olsun. Her $n \in \mathbb{Z}^+$ ve R 'nin J ideali için $J^n \subset I$ olduğunda $J \subset I$ oluyorsa, I ideale yarı asal ideal denir [20].

Tanım 2.35 $\forall x, y \in R$ için R 'nin bulanık sezgisel ideali I olmak üzere $I(xy) = \max\{I(x), I(y)\}$ oluyorsa, I ideale bulanık sezgisel zayıf tam asal ideal denir [15].

Tanım 2.36 R 'nin öz ideali I olsun. $\forall a, b, c \in R$ için

$$abc \in I \text{ iken } ab \in I \text{ ya da } ac \in I \text{ ya da } bc \in I$$

oluyorsa, I ideale 2- yutan ideal denir. R 'nin sıfır ideali 2- yutan ideal olursa, R halkasına 2- yutan halka denir [9].

Tanım 2.37 R 'nin öz ideali I olsun. $\forall a, b, c \in R$ için

$$abc \in I \text{ iken } ab \in I \text{ ya da } ac \in \sqrt{I} \text{ ya da } bc \in \sqrt{I}$$

oluyorsa, I ideale 2- yutan asalımsı ideal denir [11].

DEĞİŞMELİ HALKALARDA BULANIK SEZGİSEL 2- YUTAN İDEALLER

Bu bölümde, değişmeli halkalarda bulanık sezgisel 2- yutan idealler tanımlanacaktır. Bu ideallerin bazı özellikleri incelenerek halka homomorfizması altında görüntü ve ters görüntülerinin özellikleri araştırılacaktır. Daha sonra bulanık sezgisel kuvvetli 2- yutan idealler tanımlanacak ve benzer şekilde özellikleri çalışılacaktır. Son olarak, bulanık sezgisel zayıf tam 2- yutan idealler ile bulanık sezgisel K-2-yutan idealler incelenecektir.

3.1 Bulanık Sezgisel 2- Yutan İdealler

Tanım 3.1 R halkasının $I = \langle \mu_I, \nu_I \rangle$ bulanık sezgisel ideali olsun. $x_{(t,s)}$ ve $y_{(\alpha,\beta)}$ herhangi bulanık sezgisel noktalar olmak üzere eğer

$$x_{(t,s)} y_{(\alpha,\beta)} \in I \text{ iken } x_{(t,s)} \in I \text{ ya da } y_{(\alpha,\beta)} \in I \quad (3.1)$$

ise $I = \langle \mu_I, \nu_I \rangle$ ideale R halkasının bulanık sezgisel tam asal ideali denir.

Tanım 3.2 R halkasının $I = \langle \mu_I, \nu_I \rangle$ bulanık sezgisel ideali olsun. $x_{(a,b)}, y_{(c,d)}, z_{(e,f)}$ herhangi bulanık sezgisel noktalar olmak üzere eğer

$$x_{(a,b)} y_{(c,d)} z_{(e,f)} \in I \text{ iken } x_{(a,b)} y_{(c,d)} \in I \text{ ya da } y_{(c,d)} z_{(e,f)} \in I \text{ ya da } x_{(a,b)} z_{(e,f)} \in I \quad (3.2)$$

ise $I = \langle \mu_I, \nu_I \rangle$ ideale R halkasının bulanık sezgisel 2- yutan ideali denir.

Teorem 3.1 R halkasının her bulanık sezgisel asal ideali, bulanık sezgisel 2- yutan idealidir.

İspat (Tanım 3.2) den kolaylıkla elde edilir.

Örnek 3.1 $R = \mathbb{Z}_6$ ve $\mathbb{Z}_6$ 'da I bulanık sezgisel alt küme olarak aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{\bar{0}, \bar{3}\} \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases} \quad \text{ve} \quad \nu(x) = \begin{cases} 0, & x \in \{\bar{0}, \bar{3}\} \\ 1, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

Burada I ideali, hem bulanık sezgisel asal idealdir hem de bulanık sezgisel 2- yutan idealdir.

Örnek 3.2 $R = \mathbb{Z}_6$ ve $\mathbb{Z}_6$ 'da I bulanık sezgisel alt küme olarak aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$\mu(x) = \begin{cases} 1/3, & x \in \{\bar{0}, \bar{3}\} \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases} \quad \text{ve} \quad \nu(x) = \begin{cases} 0, & x \in \{\bar{0}, \bar{3}\} \\ 1/3, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

$\mathbb{Z}_6$ 'da $\bar{3}_{2/5}$ ve $\bar{5}_{1/3}$ bulanık sezgisel noktaları için $\bar{3}_{2/5} \bar{5}_{1/3} \in \mu$ fakat $\bar{3}_{2/5} \notin \mu$ ve $\bar{5}_{1/3} \notin \mu$.

Sonuç olarak, (μ, ν) $\mathbb{Z}_6$ 'nın bulanık sezgisel asal ideali değildir. Diğer yandan, (μ, ν) $\mathbb{Z}_6$ 'nın bulanık sezgisel 2- yutan idealidir.

Teorem 3.2 R halkasının farklı I ve J bulanık sezgisel asal ideallerinin kesişimi bulanık sezgisel 2- yutan idealdir.

İspat R halkasının iki farklı bulanık sezgisel asal idealleri I ve J olsun. $x_{(a,b)}, y_{(c,d)}, z_{(e,f)}$ herhangi birer bulanık sezgisel noktalar olmak üzere, $x_{(a,b)}y_{(c,d)}z_{(e,f)} \in I \cap J$ fakat $x_{(a,b)}z_{(e,f)} \notin I \cap J$ ve $x_{(a,b)}y_{(c,d)} \notin I \cap J$ olsun.

1.Durum: $x_{(a,b)}y_{(c,d)} \notin I$ ve $x_{(a,b)}z_{(e,f)} \notin I$. I bulanık sezgisel asal ideal olduğundan $z_{(e,f)} \in I$ elde edilir. Sonuç olarak, $x_{(a,b)}z_{(e,f)} \in I$ olur bu durum bir çelişkidir.

2.Durum: $x_{(a,b)}y_{(c,d)} \notin I$ ve $x_{(a,b)}z_{(e,f)} \notin J$. Buradan, $x_{(a,b)}y_{(c,d)}z_{(e,f)} \in I \cap J$ ve $z_{(e,f)} \in I$ ile $y_{(c,d)} \in J$ elde edilir. Sonuç olarak, $y_{(c,d)}z_{(e,f)} \in I \cap J$.

3.Durum: $x_{(a,b)}y_{(c,d)} \notin J$ ve $x_{(a,b)}z_{(e,f)} \notin I$. Benzer şekilde, $y_{(c,d)}z_{(e,f)} \in I \cap J$ olduğu gösterilebilir.

4.Durum: $x_{(a,b)}y_{(c,d)} \notin J$ ve $x_{(a,b)}z_{(e,f)} \notin J$. Benzer şekilde, (1. Durum)'da olduğu gibi çelişki elde edilebilir.

Sonuç olarak, $I \cap J$ ideali R halkasının bulanık sezgisel 2- yutan idealdir.

Sonuç 3.1 R halkasının her farklı bulanık sezgisel asal ideallerinin kesişimi, R halkasının bulanık sezgisel 2- yutan idealidir.

İspat (Teorem 3.2) den elde edilir.

Teorem 3.3 R halkasının bulanık sezgisel 2- yutan ideali $I = \langle \mu_I, \nu_I \rangle$ olsun. $\forall t, s \in L$ ve $I^{(t,s)} \neq R$ için $I^{(t,s)}$, R halkasının 2- yutan idealidir.

İspat $a, b, c \in R$ ve $abc \in I^{(t,s)}$ olsun. Buradan $\mu_I(abc) \geq t$ ve $\nu_I(abc) \leq s$ bulunur. Dahası $a_{(t,s)}b_{(t,s)}c_{(t,s)} = (abc)_{(t,s)} \in I$. I bulanık sezgisel 2- yutan ideal olduğundan $a_{(t,s)}b_{(t,s)} \in I$ ya da $b_{(t,s)}c_{(t,s)} \in I$ ya da $a_{(t,s)}c_{(t,s)} \in I$. $\forall x \in R$ için eğer $x_{(t,s)} \in I$ ise $\mu_I(x) \geq t$ ve $\nu_I(x) \leq s$ olur. Buradan $x \in \mu_t$ ve $x \in \nu_s$ bulunur öyle ki $x \in I^{(t,s)}$. Sonuç olarak, $ab \in I^{(t,s)}$ ya da $bc \in I^{(t,s)}$ ya da $ac \in I^{(t,s)}$. $I^{(t,s)}$ 2- yutan idealdir.

Teorem 3.4 $f: R \rightarrow S$ örten halka homomorfizması olsun. Eğer I , R halkasının bulanık sezgisel 2- yutan ideali ve çek f üzerinde sabit ise $f(I)$, S halkasının bulanık sezgisel 2- yutan idealidir.

İspat $x_{(r,k)}, y_{(s,l)}, z_{(t,m)}$ S halkasının bulanık sezgisel noktaları ve $x_{(r,k)}y_{(s,l)}z_{(t,m)} \in f(I)$ olsun. f örten halka homomorfizması olduğundan, $a, b, c \in R$ vardır öyle ki $f(a) = x, f(b) = y, f(c) = z$. Buradan

$$\begin{aligned} x_{(r,k)}y_{(s,l)}z_{(t,m)}(xyz) &= (r \wedge s \wedge t) \leq f(\mu_I)(xyz) \\ &= (k \vee l \vee m) \geq f(\nu_I)(xyz) \\ &= (f(\mu_I)(f(a)f(b)f(c)), f(\nu_I)(f(a)f(b)f(c))) \\ &= (f(\mu_I)(f(abc)), f(\nu_I)(f(abc))) \\ &= (\mu_I(abc), \nu_I(abc)) \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r \wedge s \wedge t \leq \mu_I(abc) \\ a_r b_s c_t \in \mu_I \end{array} \right\} \text{ ve } \left\{ \begin{array}{l} k \vee l \vee m \geq \nu_I(abc) \\ a_k b_l c_m \in \nu_I \end{array} \right\}.$$

(μ_I, ν_I) , çek f üzerinde sabit olduğundan $a_r b_s c_t \in \mu_I$ ve $a_k b_l c_m \in \nu_I$ elde edilir. I bulanık sezgisel 2- yutan ideal olduğundan aşağıdaki durumlar elde edilir.

$$\left\{ \begin{array}{c} a_r b_s \in \mu_I \\ \text{ve} \\ a_k b_l \in \nu_I \end{array} \right\} \text{ ya da } \left\{ \begin{array}{c} b_s c_t \in \mu_I \\ \text{ve} \\ b_l c_m \in \nu_I \end{array} \right\} \text{ ya da } \left\{ \begin{array}{c} a_r c_t \in \mu_I \\ \text{ve} \\ a_k c_m \in \nu_I \end{array} \right\}.$$

i) Eğer $a_r b_s \in \mu_I$ ve $a_k b_l \in \nu_I$ ise,

$$r \wedge s \leq \mu_I(ab) = f(\mu_I)(f(ab)) = f(\mu_I)(f(a)f(b)) = f(\mu_I)(xy)$$

ve

$$k \vee l \geq \nu_I(ab) = f(\nu_I)(f(ab)) = f(\nu_I)(f(a)f(b)) = f(\nu_I)(xy).$$

buradan $x_r y_s \in f(\mu_I)$ ve $x_k y_l \in f(\nu_I)$. Sonuç olarak, $x_{(r,k)} y_{(s,l)} \in f(I)$.

ii) Eğer $b_s c_t \in \mu_I$ ve $b_l c_m \in \nu_I$ ise ispatı benzer şekilde yapılır.

iii) Eğer $a_r c_t \in \mu_I$ ve $a_k c_m \in \nu_I$ ise ispatı benzer şekilde yapılır.

Sonuç olarak, $f(I)$, S halkasının bulanık sezgisel 2- yutan idealidir.

Teorem 3.5 $f : R \rightarrow S$ halka homomorfizması olsun. Eğer I , S halkasının bulanık sezgisel 2- yutan ideali ise $f^{-1}(I)$, R halkasının bulanık sezgisel 2- yutan idealidir.

İspat R halkasının bulanık sezgisel noktaları $x_{(a,b)}, y_{(c,d)}, z_{(e,f)}$ olsun ve

$$x_{(a,b)} y_{(c,d)} z_{(e,f)} \in f^{-1}(I) \text{ olsun. Buradan}$$

$$(a \wedge c \wedge e) \leq f^{-1}(\mu_I)(xyz)$$

$$(b \vee d \vee f) \geq f^{-1}(\nu_I)(xyz)$$

$$= (\mu_I(f(xyz)), \nu_I(f(xyz)))$$

$$= (\mu_I(f(x)f(y)f(z)), \nu_I(f(x)f(y)f(z)))$$

elde edilir. $f(x)=r$, $f(y)=s$, $f(z)=t$ olsun. Bu şekilde, $(a \wedge c \wedge e) \leq \mu_I(rst)$ ve

$(b \vee d \vee f) \geq \nu_I(rst)$ elde edilir. Dahası, $r_a s_c t_e \in \mu_I$ ve $r_b s_d t_f \in \nu_I$ elde edilir. I bulanık sezgisel 2- yutan ideal olduğundan aşağıdaki durumlar bilinir.

$$\left\{ \begin{array}{c} r_a s_c \in \mu_I \\ \text{ve} \\ r_b s_d \in \nu_I \end{array} \right\} \text{ ya da } \left\{ \begin{array}{c} r_a t_e \in \mu_I \\ \text{ve} \\ r_b t_f \in \nu_I \end{array} \right\} \text{ ya da } \left\{ \begin{array}{c} s_c t_e \in \mu_I \\ \text{ve} \\ s_d t_f \in \nu_I \end{array} \right\}.$$

i) Eğer $r_a s_c \in \mu_I$ ve $r_b s_d \in \nu_I$ ise,

$$a \wedge c \leq \mu_I(rs) = \mu_I(f(x)f(y)) = \mu_I(f(xy)) = f^{-1}(\mu_I(xy))$$

ve

$$b \vee d \geq \nu_I(rs) = \nu_I(f(x)f(y)) = \nu_I(f(xy)) = f^{-1}(\nu_I(xy))$$

elde edilir ve buradan da $x_a y_c \in f^{-1}(\mu_I)$ ve $x_b y_d \in f^{-1}(\nu_I)$ oluşur. Sonuç olarak, $x_{(a,b)} y_{(c,d)} \in f^{-1}(I)$.

ii) Benzer şekilde, $x_{(a,b)} z_{(e,f)} \in f^{-1}(I)$.

iii) Benzer şekilde, $y_{(c,d)} z_{(e,f)} \in f^{-1}(I)$. Sonuç olarak, $f^{-1}(I)$, R halkasının bulanık sezgisel 2- yutan idealidir.

Tanım 3.3 R halkasının bulanık sezgisel ideali I olsun. Eğer, J, K, L idealleri R halkasının bulanık sezgisel idealleri olmak üzere,

$$JKL \subseteq I \text{ iken } JK \subseteq I \text{ ya da } JL \subseteq I \text{ ya da } KL \subseteq I \quad (3.3)$$

ise I ideale R halkasının bulanık sezgisel kuvvetli 2- yutan ideali denir.

Teorem 3.6 R halkasının her bulanık sezgisel asal ideali, bulanık sezgisel kuvvetli 2- yutan idealidir.

İspat R halkasının bulanık sezgisel asal ideali I ve R nin J, K, L bulanık sezgisel idealleri için $JKL \subseteq I$ olsun. Bulanık sezgisel asal ideallerin tanımı gereği $JK \subseteq I$ ya da $JL \subseteq I$ ya da $KL \subseteq I$ elde edilir. Sonuç olarak, I bulanık sezgisel kuvvetli 2- yutan ideal olarak bulunur.

Teorem 3.7 R halkasının her bulanık sezgisel kuvvetli 2- yutan ideali, bulanık sezgisel 2- yutan idealidir.

İspat I ideali R halkasının bulanık sezgisel kuvvetli 2- yutan ideali olsun.

$x_{(a,b)}y_{(c,d)}z_{(e,f)} \in I$ bulanık sezgisel noktalar olsun. Buradan,

$$\langle x_{(a,b)} \rangle \langle y_{(c,d)} \rangle \langle z_{(e,f)} \rangle = \langle x_{(a,b)}y_{(c,d)}z_{(e,f)} \rangle \subseteq I$$

elde edilir. I bulanık sezgisel kuvvetli 2- yutan ideal olduğundan,

$$\langle x_{(a,b)}y_{(c,d)} \rangle = \langle x_{(a,b)} \rangle \langle y_{(c,d)} \rangle \subseteq I$$

ya da

$$\langle x_{(a,b)}z_{(e,f)} \rangle = \langle x_{(a,b)} \rangle \langle z_{(e,f)} \rangle \subseteq I$$

ya da

$$\langle y_{(c,d)}z_{(e,f)} \rangle = \langle y_{(c,d)} \rangle \langle z_{(e,f)} \rangle \subseteq I.$$

Buradan, $x_{(a,b)}y_{(c,d)} \in I$ ya da $y_{(c,d)}z_{(e,f)} \in I$ ya da $x_{(a,b)}z_{(e,f)} \in I$ olur. Sonuç olarak, I ideali R halkasının bulanık sezgisel 2- yutan idealidir.

3.2 Bulanık Sezgisel Zayıf Tam 2- Yutan İdealler

Tanım 3.4 R halkasının bulanık sezgisel ideali $I = \langle \mu_I, \nu_I \rangle$ olsun. $\forall x, y \in R$ için

$$I(xy) = \max \{I(x), I(y)\} \text{ yani}$$

$$\mu_I(xy) = \max \{\mu_I(x), \mu_I(y)\} \text{ ve } \nu_I(xy) = \min \{\nu_I(x), \nu_I(y)\}$$

ise, I idealeine bulanık sezgisel zayıf tam asal ideal denir.

Tanım 3.5 R halkasının sabit olmayan bulanık sezgisel ideali $I = \langle \mu_I, \nu_I \rangle$ olsun.

$\forall x, y \in R$ için

$$I(xy) = I(0,1) \text{ iken } I(x) = I(0,1) \text{ ya da } I(y) = I(0,1)$$

ise, I idealeine bulanık sezgisel K -asal ideal denir.

Tanım 3.6 R halkasının bulanık sezgisel ideali I olsun. $\forall a, b, c \in R$ için

$$I(abc) \leq I(ab) \text{ ya da } I(abc) \leq I(ac) \text{ ya da } I(abc) \leq I(bc) \quad (3.4)$$

şartı sağlanıyor ise ya da,

$$\left(\begin{array}{c} \mu(abc) \leq \mu(ab) \\ \text{ve} \\ v(abc) \geq v(ab) \end{array} \right) \text{ ya da } \left(\begin{array}{c} \mu(abc) \leq \mu(ac) \\ \text{ve} \\ v(abc) \geq v(ac) \end{array} \right) \text{ ya da } \left(\begin{array}{c} \mu(abc) \leq \mu(bc) \\ \text{ve} \\ v(abc) \geq v(bc) \end{array} \right)$$

ise, I ideale R halkasının bulanık sezgisel zayıf tam 2- yutan ideali denir.

Sonuç 3.2 R halkasının sabit olmayan bulanık sezgisel ideali I olsun. $\forall a, b, c \in R$ için I idealinin R halkasının bulanık sezgisel zayıf tam 2- yutan ideali olması için gerek ve yeter koşul $I(abc) = \max \{I(ab), I(bc), I(ac)\}$ olmasıdır yani

$$\mu(abc) = \max \{ \mu(ab), \mu(bc), \mu(ac) \} \text{ ve } v(abc) = \min \{ v(ab), v(bc), v(ac) \}.$$

İspat (Tanım 3.6) ve bulanık sezgisel ideallerin tanımından elde edilir.

Tanım 3.7 R halkasının bulanık sezgisel ideali I olsun. $\forall a, b, c \in R$ için $I(abc) = (0,1)$ iken $I(ab) = (0,1)$ ya da $I(ac) = (0,1)$ ya da $I(bc) = (0,1)$ oluyorsa yani

$$I(abc) = (0,1) = \left(\begin{array}{c} \mu(abc) = \mu(0) \\ \text{ve} \\ v(abc) = v(1) \end{array} \right) \text{ iken} \quad \left(\begin{array}{c} \mu(ab) = \mu(0) \\ \text{ve} \\ v(ab) = v(1) \end{array} \right) \text{ veya } \left(\begin{array}{c} \mu(ac) = \mu(0) \\ \text{ve} \\ v(ac) = v(1) \end{array} \right) \text{ veya } \left(\begin{array}{c} \mu(bc) = \mu(0) \\ \text{ve} \\ v(bc) = v(1) \end{array} \right) \quad (3.5)$$

ise, I ideale R halkasının bulanık sezgisel K - 2- yutan ideali denir.

Sonuç 3.3 Her bulanık sezgisel zayıf tam 2- yutan ideal, bulanık sezgisel K - 2- yutan idealdir.

İspat (Sonuç 3.2 ve Tanım 3.7) den kolaylıkla elde edilir.

Fakat her bulanık sezgisel K - 2- yutan ideal, bulanık sezgisel zayıf tam 2- yutan ideal değildir.

Örnek 3.3 $R = \mathbb{Z}$ olsun. $\mathbb{Z}$ 'nin bulanık sezgisel ideali aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$I(x) = \begin{cases} (1, 0), & x = 0 \\ (1/3, 2/3), & x \in 8\mathbb{Z} - \{0\} \\ (1/4, 2/4), & x \in \mathbb{Z} - 8\mathbb{Z} \end{cases}.$$

Buradan, I ideali $\mathbb{Z}$ 'nin bulanık sezgisel K- 2- yutan idealidir fakat

$$\mu(40) = 1/3 > 1/4 = \max\{\mu(20), \mu(4), \mu(20)\}$$

olduğundan I bulanık sezgisel zayıf tam 2- yutan ideal değildir.

Teorem 3.8 R halkasının her bulanık sezgisel zayıf tam asal ideali, bulanık sezgisel zayıf tam 2- yutan idealidir.

İspat R halkasının bulanık sezgisel zayıf tam asal ideali I olsun. $\forall x, y, z \in R$ için

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_I(xyz) = \mu_I(x) \\ \text{ve} \\ \nu_I(xyz) = \nu_I(x) \end{array} \right\} \text{ ya da } \left\{ \begin{array}{l} \mu_I(xyz) = \mu_I(y) \\ \text{ve} \\ \nu_I(xyz) = \nu_I(y) \end{array} \right\} \text{ ya da } \left\{ \begin{array}{l} \mu_I(xyz) = \mu_I(z) \\ \text{ve} \\ \nu_I(xyz) = \nu_I(z) \end{array} \right\}.$$

$\mu_I(xyz) = \mu_I(x)$ ve $\nu_I(xyz) = \nu_I(x)$ olsun.

$\mu_I(xyz) \geq \mu_I(xy) \geq \mu_I(x)$ ve $\nu_I(xyz) \leq \nu_I(xy) \leq \nu_I(x)$ bulunur. Buradan,

$\mu_I(xyz) = \mu_I(xy)$ ve $\nu_I(xyz) = \nu_I(xy)$ olur.

Benzer şekilde,

$$\mu_I(xyz) = \mu_I(yz) \text{ ve } \nu_I(xyz) = \nu_I(yz)$$

ya da

$$\mu_I(xyz) = \mu_I(xz) \text{ ve } \nu_I(xyz) = \nu_I(xz)$$

bulunur. Sonuç olarak, her bulanık sezgisel zayıf tam asal ideal, bulanık sezgisel zayıf tam 2- yutan idealdir.

Teorem 3.9 R halkasının her bulanık sezgisel K- asal ideali, bulanık sezgisel K- 2- yutan idealidir.

İspat (Teorem 3.8) in ispatına benzer şekildedir.

Teorem 3.10 R halkasının bulanık sezgisel ideali I olsun. Aşağıdaki durumlar denktir.

i) I , R halkasının bulanık sezgisel zayıf tam 2- yutan idealidir.

ii) $\forall t, s \in L$ için I 'nin $I^{(t,s)}$ seviye alt kümesi, R halkasının 2- yutan idealidir.

İspat (i $\rightarrow$ ii) R halkasının bulanık sezgisel zayıf tam 2- yutan ideali I olsun.

$\forall x, y, z \in R$ ve $\forall t, s \in L$ için $xyz \in I^{(t,s)}$.

$$\mu(xyz) = \max\{\mu(xy), \mu(xz), \mu(yz)\} \geq t \text{ ve } v(xyz) = \min\{v(xy), v(xz), v(yz)\} \leq s.$$

Sonuç olarak,

$$\left\{ \begin{array}{c} \mu(xy) \geq t \\ \text{ve} \\ v(xy) \leq s \end{array} \right\} \text{ ya da } \left\{ \begin{array}{c} \mu(xz) \geq t \\ \text{ve} \\ v(xz) \leq s \end{array} \right\} \text{ ya da } \left\{ \begin{array}{c} \mu(yz) \geq t \\ \text{ve} \\ v(yz) \leq s \end{array} \right\}.$$

Buradan, $xy \in I^{(t,s)}$ ya da $xz \in I^{(t,s)}$ ya da $yz \in I^{(t,s)}$ bulunur. $I^{(t,s)}$, R halkasının 2- yutan idealidir.

(ii $\rightarrow$ i) $\forall t, s \in L$ için R halkasının 2- yutan ideali $I^{(t,s)}$ olsun. Kabul edelim ki,

$\forall x, y, z \in R$ için $\mu(xyz) = t$ ve $v(xyz) = s$ olsun. Buradan $xyz \in \mu_t$ ve $xyz \in v_s$ olur.

(μ_t, v_s) 2- yutan olduğundan, $xy \in \mu_t$ ve $xy \in v_s$ ya da $xz \in \mu_t$ ve $xz \in v_s$ ya da $yz \in \mu_t$ ve $yz \in v_s$ olur. Bundan dolayı,

$$\left\{ \begin{array}{c} \mu(xy) \geq t \\ \text{ve} \\ v(xy) \leq s \end{array} \right\} \text{ ya da } \left\{ \begin{array}{c} \mu(xz) \geq t \\ \text{ve} \\ v(xz) \leq s \end{array} \right\} \text{ ya da } \left\{ \begin{array}{c} \mu(yz) \geq t \\ \text{ve} \\ v(yz) \leq s \end{array} \right\}.$$

Yani,

$$\mu(xyz) = t \leq \max\{\mu(xy), \mu(xz), \mu(yz)\} \text{ ve}$$

$$v(xyz) = s \geq \min\{\mu(xy), \mu(xz), \mu(yz)\}.$$

Aynı zamanda, R halkasının bulanık sezgisel ideali I olduğundan,

$$\mu(xyz) \geq \max\{\mu(xy), \mu(xz), \mu(yz)\} \text{ ve}$$

$$v(xyz) \leq \min\{\mu(xy), \mu(xz), \mu(yz)\}.$$

Buradan,

$$\mu(xyz) = \max \{ \mu(xy), \mu(xz), \mu(yz) \} \text{ ve}$$

$$\nu(xyz) = \min \{ \mu(xy), \mu(xz), \mu(yz) \}$$

olur. Sonuç olarak, I , R halkasının bulanık sezgisel zayıf tam 2- yutan idealidir.

Teorem 3.11 $f : R \rightarrow S$ örten halka homomorfizması olsun. Eğer $I = \langle \mu, \nu \rangle$, R halkasının bulanık sezgisel zayıf tam 2- yutan ideali ve çek f üzerinde sabit ise $f(I)$, S halkasının bulanık sezgisel zayıf tam 2- yutan idealidir.

İspat $\forall a, b, c \in S$ için $f(\mu)(abc) > f(\mu)(ab)$ olsun. f örten halka homomorfizması olduğundan, $\forall x, y, z \in R$ için $f(x) = a, f(y) = b, f(z) = c$. Bundan dolayı,

$$\begin{aligned} f(\mu)(abc) &= f(\mu)(f(x)f(y)f(z)) = f(\mu)(f(xyz)) > f(\mu)(ab) \\ &= f(\mu)(f(x)f(y)) = f(\mu)(f(xy)). \end{aligned}$$

μ , çek f üzerinde sabit olduğundan $f(\mu)(f(xyz)) = \mu(xyz)$ ve $f(\mu)(f(xy)) = \mu(xy)$ olur. Yani, $f(\mu)(abc) = \mu(xyz) > \mu(xy) = f(\mu)(ab)$. I , R halkasının bulanık sezgisel zayıf tam 2- yutan ideali olduğundan,

$$\begin{aligned} \mu(xyz) &= f(\mu)(f(x)f(y)f(z)) = f(\mu)(abc) \leq \mu(xz) = f(\mu)(f(xz)) \\ &= f(\mu)(ac) \end{aligned}$$

ya da

$$\begin{aligned} \mu(xyz) &= f(\mu)(f(x)f(y)f(z)) = f(\mu)(abc) \leq \mu(yz) = f(\mu)(f(yz)) \\ &= f(\mu)(bc). \end{aligned}$$

Benzer şekilde, $\forall a, b, c \in S$ için $f(\nu)(abc) < f(\nu)(ab)$ olsun. f örten halka homomorfizması olduğundan, $\forall x, y, z \in R$ için $f(x) = a, f(y) = b, f(z) = c$ olsun. Bundan dolayı,

$$\begin{aligned} f(\nu)(abc) &= f(\nu)(f(x)f(y)f(z)) = f(\nu)(f(xyz)) < f(\nu)(ab) \\ &= f(\nu)(f(x)f(y)) = f(\nu)(f(xy)). \end{aligned}$$

ν , çek f üzerinde sabit olduğundan $f(\nu)(f(xyz)) = \nu(xyz)$ ve $f(\nu)(f(xy)) = \nu(xy)$. Yani, $f(\nu)(abc) = \nu(xyz) < \nu(xy) = f(\nu)(ab)$. I , R halkasının bulanık sezgisel zayıf tam 2- yutan ideali olduğundan,

$$\begin{aligned} v(xyz) &= f(v)(f(x)f(y)f(z)) = f(v)(abc) \geq v(xz) = f(v)(f(xz)) \\ &= f(v)(ac) \end{aligned}$$

ya da

$$\begin{aligned} v(xyz) &= f(v)(f(x)f(y)f(z)) = f(v)(abc) \geq v(yz) = f(v)(f(yz)) \\ &= f(v)(bc). \end{aligned}$$

Sonuç olarak, $f(I)$, S halkasının bulanık sezgisel zayıf tam 2- yutan idealidir.

Teorem 3.12 $f : R \rightarrow S$ halka homomorfizması olsun. Eğer $I = \langle \mu, v \rangle$, S halkasının bulanık sezgisel zayıf tam 2- yutan ideali ise $f^{-1}(I)$, R halkasının bulanık sezgisel zayıf tam 2- yutan idealidir.

İspat $\forall x, y, z \in R$ için $f^{-1}(\mu)(xyz) > f^{-1}(\mu)(xy)$ olsun. Buradan,

$$\begin{aligned} f^{-1}(\mu)(xyz) &= \mu(f(xyz)) = \mu(f(x)f(y)f(z)) > f^{-1}(\mu)(xy) \\ &= \mu(f(xy)) = \mu(f(x)f(y)). \end{aligned}$$

I , S halkasının bulanık sezgisel zayıf tam 2- yutan ideali olduğundan,

$$\begin{aligned} \mu(f(x)f(y)f(z)) &= f^{-1}(\mu)(xyz) \leq \mu(f(x)f(z)) = \mu(f(xz)) \\ &= f^{-1}(\mu)(xz) \end{aligned}$$

ya da

$$\begin{aligned} \mu(f(x)f(y)f(z)) &= f^{-1}(\mu)(xyz) \leq \mu(f(y)f(z)) = \mu(f(yz)) \\ &= f^{-1}(\mu)(yz). \end{aligned}$$

Benzer şekilde, $\forall x, y, z \in R$ için $f^{-1}(v)(xyz) < f^{-1}(v)(xy)$ olsun. Buradan,

$$\begin{aligned} f^{-1}(v)(xyz) &= v(f(xyz)) = v(f(x)f(y)f(z)) < f^{-1}(v)(xy) \\ &= v(f(xy)) = v(f(x)f(y)). \end{aligned}$$

I , S halkasının bulanık sezgisel zayıf tam 2- yutan ideali olduğundan,

$$\begin{aligned} v(f(x)f(y)f(z)) &= f^{-1}(v)(xyz) \geq v(f(x)f(z)) = v(f(xz)) \\ &= f^{-1}(v)(xz) \end{aligned}$$

ya da

$$\begin{aligned} v(f(x)f(y)f(z)) &= f^{-1}(v)(xyz) \geq v(f(y)f(z)) = v(f(yz)) \\ &= f^{-1}(v)(yz). \end{aligned}$$

Sonuç olarak, $f^{-1}(I)$, R halkasının bulanık sezgisel zayıf tam 2- yutan idealidir.

Teorem 3.13 $f : R \rightarrow S$ örten halka homomorfizması olsun. Eğer $I = \langle \mu, v \rangle$, R halkasının bulanık sezgisel K- 2- yutan ideali ve çek f üzerinde sabit ise $f(I)$, S halkasının bulanık sezgisel K- 2- yutan idealidir.

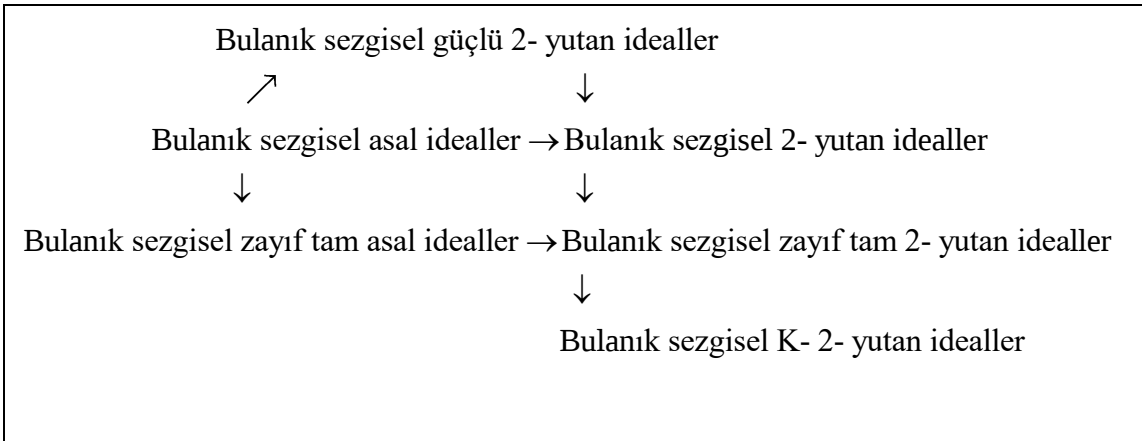
İspat (Teorem 3.11) in ispatına benzer şekildedir.

Teorem 3.14 $f : R \rightarrow S$ halka homomorfizması olsun. Eğer $I = \langle \mu, v \rangle$, S halkasının bulanık sezgisel K- 2- yutan ideali ise $f^{-1}(I)$, R halkasının bulanık sezgisel K- 2- yutan idealidir.

İspat (Teorem 3.12) nin ispatına benzer şekildedir.

Sonuç 3.4 Aşağıda verilen tablo bulanık sezgisel 2- yutan idealler ile ilgili bu bölümde yapılan çalışmaları özetlemektedir.

Çizelge 3. 1 Bulanık sezgisel 2- yutan idealler



DEĞİŞMELİ HALKALARDA BULANIK SEZGİSEL 2- YUTAN ASALIMSIZ İDEALLER

Bu kısımda, bulanık sezgisel 2- yutan asalımsız idealler tanımlanacak ve temel özellikleri çalışılacaktır. Dahası, bulanık sezgisel kuvvetli 2- yutan asalımsız idealler ile bulanık sezgisel zayıf tam 2- yutan asalımsız idealler ve bulanık sezgisel K- 2- yutan asalımsız idealler incelenecek ve örneklerle özellikleri çalışılacaktır. Tüm bu ideallerin halka homomorfizması altında görüntü ve ters görüntüleri incelenecektir. Bölüm sonunda, idealler arasındaki ilişkileri gösteren bir çizelge sunularak tüm özellikler tek bir çatı altında toplanacaktır.

4.1 Bulanık Sezgisel 2- Yutan Asalımsız İdealler

Tanım 4.1 R halkasının $I = \langle \mu_I, \nu_I \rangle$ bulanık sezgisel ideali olsun. $x_{(a,b)}, y_{(c,d)}, z_{(e,f)}$ herhangi bulanık sezgisel noktalar olmak üzere $(\forall x, y, z \in R \text{ ve } a, b, c, d, e, f \in L)$ eğer $x_{(a,b)} y_{(c,d)} z_{(e,f)} \in I$ iken $x_{(a,b)} y_{(c,d)} \in I$ ya da $y_{(c,d)} z_{(e,f)} \in \sqrt{I}$ ya da $x_{(a,b)} z_{(e,f)} \in \sqrt{I}$ (4.1)

ise $I = \langle \mu_I, \nu_I \rangle$ idealine R halkasının bulanık sezgisel 2- yutan asalımsız ideali denir.

Teorem 4.1 R halkasının her bulanık sezgisel asalımsız ideali, bulanık sezgisel 2- yutan asalımsız idealidir.

İspat (Tanım 4.1) den kolaylıkla elde edilir.

Teorem 4.2 R halkasının her bulanık sezgisel 2- yutan ideali, bulanık sezgisel 2- yutan asalımsız idealidir.

İspat (Tanım 3.2 ve Tanım 4.1) den elde edilir. Fakat her bulanık sezgisel 2- yutan asalımsı ideal, bulanık sezgisel 2- yutan ideal değildir.

Örnek 4.1 R halkasının $I = \langle \mu_I, \nu_I \rangle$ bulanık sezgisel ideali olsun ve aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$\mu_I(x) = \begin{cases} 1, & x \in 50\mathbb{Z} \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases} \quad \text{ve} \quad \nu_I(x) = \begin{cases} 0, & x \in 50\mathbb{Z} \\ 1, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

Buradan I idealinin bulanık sezgisel 2- yutan asalımsı ideal olduğu görülür. Fakat $5_1 5_1 2_1 \in \mu_I$ olup $5_1 5_1 \notin \mu_I$ ve $5_1 2_1 \notin \mu_I$ olduğundan I ideali bulanık sezgisel 2- yutan ideal değildir.

Yardımcı Teorem 4.1 R halkasının $I = \langle \mu_I, \nu_I \rangle$ bulanık sezgisel 2- yutan asalımsı ideali olsun. $\forall t, s \in L$ ve $I^{(t,s)} \neq R$ için $I^{(t,s)}$ 2- yutan asalımsı idealdir.

İspat Kabul edelim ki $\forall a, b, c \in R$ öyle ki $abc \in I^{(t,s)}$ olsun. Buradan $a_{(t,s)} b_{(t,s)} c_{(t,s)} = (abc)_{(t,s)} \in I$ olur. I bulanık sezgisel 2- yutan asalımsı ideal olduğundan $(ab)_{(t,s)} \in I$ ya da $(bc)_{(t,s)} \in \sqrt{I}$ ya da $(ac)_{(t,s)} \in \sqrt{I}$. Sonuç olarak, $(ab) \in I^{(t,s)}$ ya da $(ac) \in \sqrt{I^{(t,s)}}$ ya da $(bc) \in \sqrt{I^{(t,s)}}$ olur ve $I^{(t,s)}$ 2- yutan asalımsı ideal olarak bulunur.

Önerme 4.1 Eğer R halkasının bulanık sezgisel 2- yutan asalımsı ideali I ise, $\sqrt{I}$ ideali de R halkasının bulanık sezgisel 2- yutan idealidir.

İspat Kabul edelim ki $x_{(a,b)}, y_{(c,d)}, z_{(e,f)}$ bulanık sezgisel noktalar olsun ve $x_{(a,b)} y_{(c,d)} z_{(e,f)} \in \sqrt{I}$ ve $x_{(a,b)} y_{(c,d)} \notin \sqrt{I}$ olsun. $x_{(a,b)} y_{(c,d)} z_{(e,f)} \in \sqrt{I}$ olduğundan,

$$\begin{cases} a \wedge c \wedge e = x_a y_c z_e (xyz) \leq \sqrt{\mu}(xyz) \\ \text{ve} \\ b \vee d \vee f = x_b y_d z_f (xyz) \geq \sqrt{\nu}(xyz) \end{cases}$$

bulunur. Bulanık sezgisel ideallerin radikal özelliğinden,

$$\sqrt{\mu}(xyz) = \bigvee_{n \geq 1} \mu(x^n y^n z^n) \geq a \wedge c \wedge e \quad \text{ve} \quad \sqrt{\nu}(xyz) = \bigwedge_{n \geq 1} \nu(x^n y^n z^n) \leq b \vee d \vee f.$$

Burada $k \in \mathbb{Z}^+$ vardır öyle ki,

$$a \wedge c \wedge e \leq \mu(x^k y^k z^k) = \mu((xyz)^k) \text{ ve } b \vee d \vee f \geq v(x^k y^k z^k) = v((xyz)^k).$$

$(x_a y_c z_e)^k \in \mu$ ve $(x_b y_d z_f)^k \in v$ elde edilir. Eğer $\forall k \in \mathbb{Z}^+$ için $x_a y_c \notin \sqrt{\mu}$ ve $x_b y_d \notin \sqrt{v}$ ise, $(x_a y_c)^k = x_a^k y_c^k \notin \mu$ ve $(x_b y_d)^k = x_b^k y_d^k \notin v$ olur. I ideali bulanık sezgisel 2- yutan asalımsı ideal olduğundan,

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_a z_e) \in \sqrt{\mu} \\ \text{ve} \\ (x_b z_f) \in \sqrt{v} \end{array} \right\} \text{ ya da } \left\{ \begin{array}{l} (y_c z_e) \in \sqrt{\mu} \\ \text{ve} \\ (y_d z_f) \in \sqrt{v} \end{array} \right\}.$$

Sonuç olarak, $x_{(a,b)} z_{(e,f)} \in \sqrt{I}$ ya da $y_{(c,d)} z_{(e,f)} \in \sqrt{I}$ olur ki buradan da $\sqrt{I}$ idealinin bulanık sezgisel 2- yutan ideal olduğu bulunur.

Tanım 4.2 R halkasının bulanık sezgisel 2- yutan asalımsı ideali I olsun. Burada $\gamma = \sqrt{I}$ bulanık sezgisel 2- yutan idealdir. Bu durumda I ideale R halkasının bulanık sezgisel γ - 2- yutan asalımsı ideali denir.

Teorem 4.3 $I_1, I_2, I_3, \dots, I_n$ idealleri R halkasının bulanık sezgisel γ - 2- yutan asalımsı idealleri olsun. $I = \bigcap_{i=1}^n I_i$ de R halkasının bulanık sezgisel γ - 2- yutan asalımsı idealidir.

İspat Kabul edelim ki $x_{(a,b)} y_{(c,d)} z_{(e,f)} \in I$ ve $x_{(a,b)} y_{(c,d)} \notin I$ olsun. $\exists n \geq j \geq 1$ için $x_{(a,b)} y_{(c,d)} \notin I_j$ ve $\forall n \geq j \geq 1$ için $x_{(a,b)} y_{(c,d)} z_{(e,f)} \in I_j$ elde edilir. I_j bulanık sezgisel γ - 2- yutan asalımsı ideal olduğundan aşağıdaki durumlar elde edilir.

$$y_{(c,d)} z_{(e,f)} \in \sqrt{I_j} = \gamma = \bigcap_{i=1}^n \sqrt{I_i} = \sqrt{\bigcap_{i=1}^n I_i} = \sqrt{I}$$

ya da

$$x_{(a,b)} z_{(e,f)} \in \sqrt{I_j} = \gamma = \bigcap_{i=1}^n \sqrt{I_i} = \sqrt{\bigcap_{i=1}^n I_i} = \sqrt{I}.$$

Sonuç olarak, $I = \bigcap_{i=1}^n I_i$ bulanık sezgisel γ -2- yutan asalımsı ideal olur. Fakat, aşağıdaki örnekte I_1, I_2 idealleri R halkasının bulanık sezgisel 2- yutan asalımsı idealleri iken $I_1 \cap I_2$ ifadesi R halkasının bulanık sezgisel 2- yutan asalımsı ideali olmayabilir.

Örnek 4.2 $R = \mathbb{Z}$ olsun. $I_1 = \langle \mu_{I_1}, \nu_{I_1} \rangle$ ve $I_2 = \langle \mu_{I_2}, \nu_{I_2} \rangle$ $\mathbb{Z}$ halkasının bulanık sezgisel idealleri olsun ve aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$\mu_{I_1}(x) = \begin{cases} 1, & x \in 8\mathbb{Z} \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases} \quad \nu_{I_1}(x) = \begin{cases} 0, & x \in 8\mathbb{Z} \\ 1, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

ve

$$\mu_{I_2}(x) = \begin{cases} 1, & x \in 75\mathbb{Z} \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases} \quad \nu_{I_2}(x) = \begin{cases} 0, & x \in 75\mathbb{Z} \\ 1, & \text{aksi takdirde} \end{cases}.$$

Burada I_1, I_2 idealleri bulanık sezgisel 2- yutan asalımsı ideallerdir fakat $I_1 \cap I_2$ bulanık sezgisel 2- yutan asalımsı ideal değildir. Çünkü,

$$(\mu_{I_1} \cap \mu_{I_2})(x) = \begin{cases} 1, & x \in 600\mathbb{Z} \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases} \quad (\nu_{I_1} \cap \nu_{I_2})(x) = \begin{cases} 0, & x \in 600\mathbb{Z} \\ 1, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

olup, $25_1 3_1 8_1 \in \mu_{I_1} \cap \mu_{I_2}$ iken $25_1 3_1 \notin \mu_{I_1} \cap \mu_{I_2}$ ve $3_1 8_1 \notin \mu_{I_1} \cap \mu_{I_2}$ ve $25_1 8_1 \notin \mu_{I_1} \cap \mu_{I_2}$.

Tanım gereği,

$$\sqrt{\mu_{I_1} \cap \mu_{I_2}} = \begin{cases} 1, & x \in 30\mathbb{Z} \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases} \quad \text{ve} \quad \sqrt{\nu_{I_1} \cap \nu_{I_2}} = \begin{cases} 0, & x \in 30\mathbb{Z} \\ 1, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

bulunur. $25_1 3_1 8_1 \in \mu_{I_1} \cap \mu_{I_2}$ iken $25_1 3_1 \notin \sqrt{\mu_{I_1} \cap \mu_{I_2}}$ ve $3_1 8_1 \notin \sqrt{\mu_{I_1} \cap \mu_{I_2}}$ ve

$25_1 8_1 \notin \sqrt{\mu_{I_1} \cap \mu_{I_2}}$ elde edilir. Sonuç olarak, $I_1 \cap I_2$ bulanık sezgisel 2- yutan asalımsı ideal değildir.

Teorem 4.4 R halkasının bulanık sezgisel ideali I olsun. Eğer $\sqrt{I}$ bulanık sezgisel asal ideal ise I bulanık sezgisel 2- yutan asalımsı idealdir.

İspat Kabul edelim ki $\forall x, y, z \in R$ ve $a, b, c, d, e, f \in L$ için $x_{(a,b)} y_{(c,d)} z_{(e,f)} \in I$ ve $x_{(a,b)} y_{(c,d)} \notin I$ olsun. $x_{(a,b)} y_{(c,d)} z_{(e,f)} \in I$ ve R değişmeli halka olduğundan,

$x_{(a,b)}y_{(c,d)}z_{(e,f)}z_{(e,f)} = (x_{(a,b)}z_{(e,f)})(y_{(c,d)}z_{(e,f)}) \in I \subseteq \sqrt{I}$ bulunur.

$\sqrt{I}$ bulanık sezgisel asal ideal olduğundan, $(x_{(a,b)}z_{(e,f)}) \in \sqrt{I}$ ya da $(y_{(c,d)}z_{(e,f)}) \in \sqrt{I}$ olur. Sonuç olarak, I ideali R halkasının bulanık sezgisel 2- yutan asalımsı idealidir.

Teorem 4.5 R halkasının bulanık sezgisel 2- yutan asalımsı idealleri $\{I_i | i \in I\}$ olsun.

$I = \bigcup_{i \in I} I_i$ bulanık sezgisel ideali R halkasının bulanık sezgisel 2- yutan asalımsı idealidir.

İspat R halkasının bulanık sezgisel noktaları $x_{(a,b)}, y_{(c,d)}, z_{(e,f)}$ olsun. $x_{(a,b)}y_{(c,d)}z_{(e,f)} \in I$ iken $x_{(a,b)}y_{(c,d)} \notin I$ olsun. $\exists j \in I$ öyle ki $x_{(a,b)}y_{(c,d)}z_{(e,f)} \in I_j$ ve $\forall j \in I$ için $x_{(a,b)}y_{(c,d)} \notin I_j$. I_j bulanık sezgisel 2- yutan asalımsı ideal olduğundan, $(y_{(c,d)}z_{(e,f)}) \in \sqrt{I_j}$ ya da $(x_{(a,b)}z_{(e,f)}) \in \sqrt{I_j}$ elde edilir. Buradan,

$$(y_{(c,d)}z_{(e,f)}) \in \sqrt{I_j} \subseteq \bigcup_{i \in I} \sqrt{I_i} = \sqrt{\bigcup_{i \in I} I_i} = \sqrt{I}$$

ya da

$$(x_{(a,b)}z_{(e,f)}) \in \sqrt{I_j} \subseteq \bigcup_{i \in I} \sqrt{I_i} = \sqrt{\bigcup_{i \in I} I_i} = \sqrt{I}.$$

Sonuç olarak, $I = \bigcup_{i \in I} I_i$ ideali R halkasının bulanık sezgisel 2- yutan asalımsı idealidir.

Teorem 4.6 $f: R \rightarrow S$ örten halka homomorfizması olsun. Eğer I , R halkasının bulanık sezgisel 2- yutan asalımsı ideali ve çek f üzerinde sabit ise $f(I)$, S halkasının bulanık sezgisel 2- yutan asalımsı idealidir.

İspat $a_{(r,k)}, b_{(s,d)}, c_{(t,n)}$ S halkasının bulanık sezgisel noktaları olsunlar. Kabul edelim ki $a_{(r,k)}b_{(s,d)}c_{(t,n)} \in f(I)$ olsun. f örten halka homomorfizması olduğundan, $x, y, z \in R$ öyle ki $f(x) = a, f(y) = b, f(z) = c$. Bundan dolayı,

$$\begin{aligned} a_{(r,k)}b_{(s,d)}c_{(t,n)}(abc) &= r \wedge s \wedge t \leq f(\mu)(abc) \\ &= f(\mu)(f(x)f(y)f(z)) = f(\mu)(f(xyz)) = \mu(xyz) \end{aligned}$$

elde edilir çünkü μ , çek f üzerinde sabittir. $x_r y_s z_t \in \mu$ bulunur. I bulanık sezgisel 2- yutan asalımsı ideal olduğundan,

$$x_r y_s \in \mu \text{ ya da } x_r z_t \in \sqrt{\mu} \text{ ya da } y_s z_t \in \sqrt{\mu} .$$

Bundan dolayı,

$$r \wedge s \leq \mu(xy) = f(\mu)(f(xy)) = f(\mu)(f(x)f(y)) = f(\mu)(ab) \text{ ve } a_r b_s \in f(\mu)$$

ya da

$$\begin{aligned} r \wedge t \leq \sqrt{\mu}(xz) &= \bigvee_{n \geq 1} \mu(x^n z^n) = \bigvee_{n \geq 1} f(\mu)(f(x^n)f(z^n)) \\ &= \bigvee_{n \geq 1} f(\mu)(a^n c^n) = \sqrt{f(\mu)}(ac) \end{aligned}$$

$$\text{ve } a_r c_t \in \sqrt{f(\mu)} .$$

Benzer şekilde, eğer $y_s z_t \in \sqrt{\mu}$ ise $b_s c_t \in \sqrt{f(\mu)}$ olduğu görülür.

Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} a_{(r,k)} b_{(s,d)} c_{(t,n)}(abc) &= k \vee d \vee n \geq f(v)(abc) \\ &= f(v)(f(x)f(y)f(z)) = f(v)(f(xyz)) = v(xyz) \end{aligned}$$

çünkü v , çek f üzerinde sabittir. $x_k y_d z_n \in v$ bulunur. I bulanık sezgisel 2- yutan asalımsı ideal olduğundan,

$$x_k y_d \in v \text{ ya da } x_k z_n \in \sqrt{v} \text{ ya da } y_d z_n \in \sqrt{v} .$$

Bundan dolayı,

$$k \vee d \geq v(xy) = f(v)(f(xy)) = f(v)(f(x)f(y)) = f(v)(ab) \text{ ve } a_k b_d \in f(v)$$

ya da

$$\begin{aligned} k \vee n \geq \sqrt{v}(xz) &= \bigwedge_{n \geq 1} v(x^n z^n) = \bigwedge_{n \geq 1} f(v)(f(x^n)f(z^n)) \\ &= \bigwedge_{n \geq 1} f(v)(a^n c^n) = \sqrt{f(v)}(ac) \end{aligned}$$

$$\text{ve } a_k c_n \in \sqrt{f(v)} .$$

Benzer şekilde, eğer $y_d z_n \in \sqrt{v}$ ise $b_d c_n \in \sqrt{f(v)}$ olduğu görülür.

Sonuç olarak, $f(I)$, S halkasının bulanık sezgisel 2- yutan asalımsı idealidir.

Teorem 4.7 $f : R \rightarrow S$ halka homomorfizması olsun. Eğer I , S halkasının bulanık sezgisel 2- yutan asalımsı ideali ise $f^{-1}(I)$, R halkasının bulanık sezgisel 2- yutan asalımsı idealidir.

İspat R halkasının bulanık sezgisel noktaları $x_{(r,k)}, y_{(s,d)}, z_{(t,l)}$ olsun. Kabul edelim ki

$$x_{(r,k)} y_{(s,d)} z_{(t,l)} \in f^{-1}(I) . \text{ Buradan,}$$

$$r \wedge s \wedge t \leq f^{-1}(\mu)(xyz) = \mu(f(xyz)) = \mu(f(x)f(y)f(z)) .$$

$$f(x) = a, f(y) = b, f(z) = c \text{ olsun. Buradan da } r \wedge s \wedge t \leq \mu(abc) \text{ ve } a_r b_s c_t \in \mu \text{ bulunur.}$$

I bulanık sezgisel 2- yutan asalımsı ideal olduğundan,

$$a_r b_s \in \mu \text{ ya da } a_r c_t \in \sqrt{\mu} \text{ ya da } b_s c_t \in \sqrt{\mu} .$$

Eğer $a_r b_s \in \mu$ ise,

$$r \wedge s \leq \mu(ab) = \mu(f(x)f(y)) = \mu(f(xy)) = f^{-1}(\mu)(xy) \text{ ve } x_r y_s \in f^{-1}(\mu) \text{ bulunur.}$$

Eğer

$$a_r c_t \in \sqrt{\mu} \text{ ise, } \exists n \in \mathbb{Z}^+ \text{ için}$$

$$\begin{aligned} r \wedge t &\leq \mu(a^n c^n) = \mu(f(x)^n f(z)^n) \leq \bigvee_{n \geq 1} \mu(f(x)^n f(z)^n) = \sqrt{\mu}(f(x)f(z)) \\ &= \sqrt{\mu}(f(xz)) = f^{-1}(\sqrt{\mu})(xz) = \sqrt{f^{-1}(\mu)}(xz) \end{aligned}$$

$$\text{ve } x_r z_t \in \sqrt{f^{-1}(\mu)} \text{ bulunur.}$$

$$\text{Benzer şekilde, } y_s z_t \in \sqrt{f^{-1}(\mu)} \text{ bulunabilir.}$$

Benzer şekilde,

$$k \vee d \vee l \geq f^{-1}(\nu)(xyz) = \nu(f(xyz)) = \nu(f(x)f(y)f(z)) .$$

$$f(x) = a, f(y) = b, f(z) = c \text{ olsun. Buradan da } k \vee d \vee l \geq \nu(abc) \text{ ve } a_k b_d c_l \in \nu \text{ bulunur.}$$

I bulanık sezgisel 2- yutan asalımsı ideal olduğundan,

$$a_k b_d \in \nu \text{ ya da } a_k c_l \in \sqrt{\nu} \text{ ya da } b_d c_l \in \sqrt{\nu} .$$

Eğer $a_k b_d \in v$ ise, $k \vee d \geq v(ab) = v(f(x)f(y)) = v(f(xy)) = f^{-1}(v)(xy)$ ve $x_k y_d \in f^{-1}(v)$ olur.

Eğer $a_k c_1 \in \sqrt{v}$ ise, $\exists n \in \mathbb{Z}^+$

$$\begin{aligned} k \vee 1 \geq v(a^n c^n) &= v(f(x)^n f(z)^n) \geq \bigwedge_{n \geq 1} v(f(x)^n f(z)^n) \\ &= \sqrt{v}(f(x)f(z)) = \sqrt{v}(f(xz)) = f^{-1}(\sqrt{v})(xz) = \sqrt{f^{-1}(v)}(xz) \end{aligned}$$

ve $x_k z_1 \in \sqrt{f^{-1}(v)}$ bulunur. Benzer şekilde, $y_d z_1 \in \sqrt{f^{-1}(v)}$ bulunabilir.

Sonuç olarak, $f^{-1}(I)$, R halkasının bulanık sezgisel 2- yutan asalımsı idealidir.

Tanım 4.3 R halkasının bulanık sezgisel ideali I olsun. R halkasının herhangi J, K, L bulanık sezgisel idealleri için I ideali sabit değil ise ve

$$JKL \subseteq I \text{ iken } JK \subseteq I \text{ ya da } KL \subseteq \sqrt{I} \text{ ya da } JL \subseteq \sqrt{I} \quad (4.2)$$

ise I idealine R halkasının bulanık sezgisel kuvvetli 2- yutan asalımsı ideali denir.

Teorem 4.8 R halkasının her bulanık sezgisel asal ideali, bulanık sezgisel kuvvetli 2- yutan asalımsı idealidir.

İspat R halkasının bulanık sezgisel asal ideali I ve R nin J, K, L bulanık sezgisel idealleri için $JKL \subseteq I$ olsun. Bulanık sezgisel asal ideallerin tanımından $JK \subseteq I$ ya da $KL \subseteq \sqrt{I}$ ya da $JL \subseteq \sqrt{I}$ elde edilir. Sonuç olarak, I ideali R halkasının bulanık sezgisel kuvvetli 2- yutan asalımsı idealidir.

Teorem 4.9 Her bulanık sezgisel kuvvetli 2- yutan asalımsı ideal, bulanık sezgisel 2- yutan asalımsı idealdir.

İspat R halkasının bulanık sezgisel kuvvetli 2- yutan asalımsı ideali I olsun.

$x_{(a,b)} y_{(c,d)} z_{(e,f)} \in I$ bulanık sezgisel noktalar olsun. Buradan,

$$\langle x_{(a,b)} \rangle \langle y_{(c,d)} \rangle \langle z_{(e,f)} \rangle = \langle x_{(a,b)} y_{(c,d)} z_{(e,f)} \rangle \subseteq I.$$

I bulanık sezgisel kuvvetli 2- yutan asalımsı ideal olduğundan,

$$\langle x_{(a,b)} y_{(c,d)} \rangle = \langle x_{(a,b)} \rangle \langle y_{(c,d)} \rangle \subseteq I$$

ya da

$$\langle x_{(a,b)} z_{(e,f)} \rangle = \langle x_{(a,b)} \rangle \langle z_{(e,f)} \rangle \subseteq \sqrt{I}$$

ya da

$$\langle y_{(c,d)} z_{(e,f)} \rangle = \langle y_{(c,d)} \rangle \langle z_{(e,f)} \rangle \subseteq \sqrt{I}.$$

Sonuç olarak,

$$(x_{(a,b)} y_{(c,d)}) \in I$$

ya da

$$(x_{(a,b)} z_{(e,f)}) \in \sqrt{I}$$

ya da

$$(y_{(c,d)} z_{(e,f)}) \in \sqrt{I}$$

olur. Böylece I ideali R halkasının bulanık sezgisel 2- yutan asalımsı idealidir.

4.2 Bulanık Sezgisel Zayıf Tam 2- Yutan Asalımsı İdealler

Tanım 4.4 R halkasının bulanık sezgisel ideali I olsun. $\forall a, b, c \in R$ için aşağıdaki şartlar sağlanır ise I ideale bulanık sezgisel zayıf tam 2- yutan asalımsı ideal denir.

$$\left(\begin{array}{c} \mu(abc) \leq \mu(ab) \\ \text{ve} \\ \nu(abc) \geq \nu(ab) \end{array} \right) \text{ ya da } \left(\begin{array}{c} \mu(abc) \leq \sqrt{\mu}(ac) \\ \text{ve} \\ \nu(abc) \geq \sqrt{\nu}(ac) \end{array} \right) \text{ ya da } \left(\begin{array}{c} \mu(abc) \leq \sqrt{\mu}(bc) \\ \text{ve} \\ \nu(abc) \geq \sqrt{\nu}(bc) \end{array} \right) \quad (4.3)$$

Teorem 4.10 Her bulanık sezgisel zayıf tam 2- yutan ideal, bulanık sezgisel zayıf tam 2- yutan asalımsı idealdir.

İspat (Tanım 3.6 ve Tanım 4.4) den kolaylıkla elde edilir.

Fakat bu teoremin tersi doğru değildir. Aşağıdaki örnek bu durumu göstermektedir.

Örnek 4.3 $R = \mathbb{Z}$ olsun. $\mathbb{Z}'$ nin bulanık sezgisel ideali aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$\mu_I(x) = \begin{cases} 1, & x \in 12\mathbb{Z} \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases} \quad \nu_I(x) = \begin{cases} 0, & x \in 12\mathbb{Z} \\ 1, & \text{aksi takdirde} \end{cases}.$$

$\forall x, y, z \in R$ için $\mu_1(xyz) > \mu_1(xy)$ ve $v_1(xyz) < v_1(xy)$ olsun. Burada $\mu_1(xyz) = 1$ ve $\mu_1(xy) = 0$ olur. Benzer şekilde, $v_1(xyz) = 0$ ve $v_1(xy) = 1$. Buradan $xyz \in 12\mathbb{Z}$ ve $xy \notin 12\mathbb{Z}$ bulunur. $12\mathbb{Z}$ asalımsı ideal olduğundan, $z \in 6\mathbb{Z}$ alınır. Tanım gereği,

$$\sqrt{\mu_1}(x) = \begin{cases} 1, & x \in 6\mathbb{Z} \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases} \quad \sqrt{v_1}(x) = \begin{cases} 0, & x \in 6\mathbb{Z} \\ 1, & \text{aksi takdirde} \end{cases}.$$

$\sqrt{\mu_1}(xz) = 1$ ve $\sqrt{v_1}(xz) = 0$, ve $\sqrt{\mu_1}(yz) = 1$ ve $\sqrt{v_1}(yz) = 0$. Sonuçta, $\sqrt{\mu_1}(xz) \geq \mu_1(xyz)$ ve $\sqrt{v_1}(xz) \leq v_1(xyz)$. Dahası, $\sqrt{\mu_1}(yz) \geq \mu_1(xyz)$ ve $\sqrt{v_1}(yz) \leq v_1(xyz)$. Burada, I bulanık sezgisel zayıf tam 2- yutan asalımsı idealdir. Fakat $\mu_1(2.2.3) = 1 > 0 = \mu_1(2.2)$ ve $\mu_1(2.2.3) = 1 > 0 = \mu_1(2.3)$ olduğundan I bulanık sezgisel zayıf tam 2- yutan ideal değildir.

Önerme 4.2 Her bulanık sezgisel asalımsı ideal bulanık sezgisel zayıf tam 2- yutan asalımsı idealdir.

İspat R halkasının bulanık sezgisel asalımsı ideali I olsun. Kabul edelim ki $\forall x, y, z \in R$ için $\mu(xyz) > \mu(xy)$ ve $v(xyz) < v(xy)$ olsun. μ, v bulanık sezgisel asalımsı idealler olduklarından, $\sqrt{\mu}(z) \geq \mu(xyz)$ ve $\sqrt{v}(z) \leq v(xyz)$. $\sqrt{\mu}, \sqrt{v}$ bulanık sezgisel idealler olduklarından dolayı,

$$\left(\begin{cases} \sqrt{\mu}(xz) \geq \sqrt{\mu}(z) \geq \mu(xyz) \\ \text{ve} \\ \sqrt{v}(xz) \leq \sqrt{v}(z) \leq v(xyz) \end{cases} \right) \text{ ya da } \left(\begin{cases} \sqrt{\mu}(yz) \geq \sqrt{\mu}(z) \geq \mu(xyz) \\ \text{ve} \\ \sqrt{v}(yz) \leq \sqrt{v}(z) \leq v(xyz) \end{cases} \right).$$

Sonuç olarak, I ideali bulanık sezgisel zayıf tam 2- yutan asalımsı idealdir.

Yardımcı Teorem 4.2 R halkasının bulanık sezgisel ideali I olsun. I 'nin bulanık sezgisel zayıf tam 2- yutan asalımsı ideal olması için gerek ve yeter koşul $I^{(t,s)}$ 'nin, R halkasının 2- yutan asalımsı ideali olmasıdır.

İspat Kabul edelim ki $\forall x, y, z \in R$ için $xyz \in I^{(t,s)}$ ve $xy \notin I^{(t,s)}$ olsun. Burada $yz \in \sqrt{I^{(t,s)}}$ ya da $xz \in \sqrt{I^{(t,s)}}$ olduğu gösterilecektir. Eğer $xyz \in I^{(t,s)}$ ise, $\mu_1(xyz) \geq t$ ve

$v_I(xyz) \leq s$ olur. $\mu_I(xyz) \geq t > \mu_I(xy)$ ve $v_I(xyz) \leq s < v_I(xy)$ oldukları bilinir. μ, v bulanık sezgisel zayıf tam 2- yutan asalımsı idealler olduklarından,

$$\left(\begin{array}{c} \sqrt{\mu}(xz) \geq \mu(xyz) \geq t \\ \text{ve} \\ \sqrt{v}(xz) \leq v(xyz) \leq s \end{array} \right) \text{ ya da } \left(\begin{array}{c} \sqrt{\mu}(yz) \geq \mu(xyz) \geq t \\ \text{ve} \\ \sqrt{v}(yz) \leq v(xyz) \leq s \end{array} \right).$$

Sonuç olarak, $yz \in \sqrt{I^{(t,s)}}$ ya da $xz \in \sqrt{I^{(t,s)}}$ bulunur ve $I^{(t,s)}$, R halkasının 2- yutan asalımsı idealidir.

Tersine, $I^{(t,s)}$, R halkasının 2- yutan asalımsı ideali olsun. Eğer $\mu_I(xyz) > \mu_I(xy)$ ve $v_I(xyz) < v_I(xy)$ ise, $\exists k \in [0, \mu(0)], t \in [1, v(1)]$ öyle ki $\mu_I(xyz) = k$ ve $v_I(xyz) = t$ olur. $k = \mu_I(xyz) > \mu_I(xy)$ olduğundan, $xyz \in \mu_k$ ve $xy \notin \mu_k$ elde edilir. Benzer şekilde, $t = v_I(xyz) < v_I(xy)$ olduğundan, $xyz \in v_t$ ve $xy \notin v_t$ elde edilir. μ_k, v_t 2- yutan asalımsı idealler olduklarından,

$$\left(\begin{array}{c} xz \in \sqrt{\mu_k} \\ \text{ve} \\ xz \in \sqrt{v_t} \end{array} \right) \text{ ya da } \left(\begin{array}{c} yz \in \sqrt{\mu_k} \\ \text{ve} \\ yz \in \sqrt{v_t} \end{array} \right).$$

Sonuç olarak,

$$\left(\begin{array}{c} \sqrt{\mu}(xz) \geq k = \mu(xyz) \\ \text{ve} \\ \sqrt{v}(xz) \leq t = v(xyz) \end{array} \right) \text{ ya da } \left(\begin{array}{c} \sqrt{\mu}(yz) \geq k = \mu(xyz) \\ \text{ve} \\ \sqrt{v}(yz) \leq t = v(xyz) \end{array} \right).$$

Buradan da I bulanık sezgisel zayıf tam 2- yutan asalımsı idealdir.

Teorem 4.11 Eğer I , R halkasının bulanık sezgisel zayıf tam 2- yutan asalımsı ideali ise, $\sqrt{I}$ ideali de R halkasının bulanık sezgisel zayıf tam 2- yutan idealidir.

İspat Eğer I , R halkasının bulanık sezgisel zayıf tam 2- yutan asalımsı ideali ise, $I^{(t,s)}$, R halkasının 2- yutan asalımsı idealidir. $\sqrt{I^{(t,s)}} = \sqrt{I}^{(t,s)}$ olduğu ve R halkasının 2- yutan ideali olduğu bilinir. Tanım gereği, $\sqrt{I}^{(t,s)}$ 2- yutan idealdir ancak ve ancak $\sqrt{I}$, R halkasının bulanık sezgisel zayıf tam 2- yutan idealidir.

Tanım 4.5 R halkasının bulanık sezgisel ideali I olsun. $\forall a, b, c \in R$ için

$$I(abc) = (0,1) = \left(\left\{ \begin{array}{c} \mu(abc) = \mu(0) \\ \text{ve} \\ \nu(abc) = \nu(1) \end{array} \right\} \right) \text{ iken } \left(\left\{ \begin{array}{c} \mu(ab) = \mu(0) \\ \text{ve} \\ \nu(ab) = \nu(1) \end{array} \right\} \right) \text{ ya da}$$

$$\left(\left\{ \begin{array}{c} \sqrt{\mu}(ac) = \mu(0) \\ \text{ve} \\ \sqrt{\nu}(ac) = \nu(1) \end{array} \right\} \right) \text{ ya da } \left(\left\{ \begin{array}{c} \sqrt{\mu}(bc) = \mu(0) \\ \text{ve} \\ \sqrt{\nu}(bc) = \nu(1) \end{array} \right\} \right) \quad (4.4)$$

ise, I ideali R halkasının bulanık sezgisel K- 2- yutan asalımsı idealidir.

Teorem 4.12 Her bulanık sezgisel zayıf tam 2- yutan asalımsı ideal, bulanık sezgisel K- 2- yutan asalımsı idealdir.

İspat $I = \langle \mu_I, \nu_I \rangle$, R halkasının bulanık sezgisel zayıf tam 2- yutan asalımsı ideali olsun.

$\forall x, y, z \in R$ için

$$\{ \mu(xyz) = \mu(0) \text{ ise, } \mu(0) \geq \mu(xy) \geq \mu(xyz) = \mu(0) \}$$

ve

$$\nu(xyz) = \nu(1) \text{ ise, } \nu(1) \leq \nu(xy) \leq \nu(xyz) = \nu(1) \}$$

ya da

$$\{ \mu(0) = \sqrt{\mu}(0) \geq \sqrt{\mu}(xz) \geq \mu(xyz) = \mu(0) \}$$

ve

$$\nu(1) = \sqrt{\nu}(1) \leq \sqrt{\nu}(xz) \leq \nu(xyz) = \nu(1) \}$$

ya da

$$\{ \mu(0) = \sqrt{\mu}(0) \geq \sqrt{\mu}(yz) \geq \mu(xyz) = \mu(0) \}$$

ve

$$\nu(1) = \sqrt{\nu}(1) \leq \sqrt{\nu}(yz) \leq \nu(xyz) = \nu(1) \}.$$

μ, ν bulanık sezgisel zayıf tam 2- yutan asalımsı idealler olduklarından,

$$\left(\begin{array}{c} \mu(xy) = \mu(0) \\ \text{ve} \\ v(xy) = v(1) \end{array} \right) \text{ ya da } \left(\begin{array}{c} \sqrt{\mu}(xz) = \mu(0) \\ \text{ve} \\ \sqrt{v}(xz) = v(1) \end{array} \right) \text{ ya da } \left(\begin{array}{c} \sqrt{\mu}(yz) = \mu(0) \\ \text{ve} \\ \sqrt{v}(yz) = v(1) \end{array} \right)$$

elde edilir. Sonuç olarak, I bulanık sezgisel K - 2- yutan asalımsı idealdir. Fakat bu teoremin tersi doğru değildir. Aşağıdaki örnek bu durumu göstermektedir.

Örnek 4.4 $R = \mathbb{Z}$ olsun. $\mathbb{Z}$ 'nin I bulanık sezgisel ideali aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$\mu_I(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 1/2, & x \in 150\mathbb{Z} - 0 \\ 1/3, & x \in \mathbb{Z} - 150\mathbb{Z} \end{cases} \quad v_I(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1/2, & x \in 150\mathbb{Z} - 0 \\ 2/3, & x \in \mathbb{Z} - 150\mathbb{Z} \end{cases}$$

Burada, I bulanık sezgisel K - 2- yutan asalımsı idealdir. Fakat,

$$\mu_I(25.3.2) = 1/2 > v\{\mu_I(25.3), \mu_I(25.2), \mu_I(3.2)\} = 1/3$$

ya da

$$\mu_I(25.3.2) = 1/2 > v\{\sqrt{\mu_I}(25.3), \sqrt{\mu_I}(25.2), \sqrt{\mu_I}(3.2)\} = 1/3$$

olduğundan I bulanık sezgisel zayıf tam 2- yutan asalımsı ideal değildir.

Sonuç 4.1 Her bulanık sezgisel zayıf tam asal ideal, bulanık sezgisel zayıf tam 2- yutan asalımsı idealdir.

İspat Her bulanık sezgisel zayıf tam asal ideal, bulanık sezgisel zayıf tam 2- yutan idealdir. Her bulanık sezgisel zayıf tam 2- yutan ideal de bulanık sezgisel zayıf tam 2- yutan asalımsı idealdir.

Teorem 4.13 Her bulanık sezgisel K - 2- yutan ideal, bulanık sezgisel K - 2- yutan asalımsı idealdir.

İspat (Tanım 3.7 ve Tanım 4.5) den kolaylıkla elde edilir.

Fakat teoremin tersi doğru değildir.

Örnek 4.5 $\mathbb{Z}$ 'nin I bulanık sezgisel ideali aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$\mu_I(x) = \begin{cases} 1, & x \in 50\mathbb{Z} \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases} \quad v_I(x) = \begin{cases} 0, & x \in 50\mathbb{Z} \\ 1, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

Burada, I bulanık sezgisel K- 2- yutan asalımsı idealdir. Fakat,

$$\mu_I(5.5.2) = 1 = \mu_I(0) \neq \mu_I(5.5) = 0$$

ve

$$\mu_I(5.5.2) = 1 = \mu_I(0) \neq \mu_I(5.2) = 0$$

olduğundan I bulanık sezgisel K- 2- yutan ideal değildir.

Teorem 4.14 $f : R \rightarrow S$ örten halka homomorfizması olsun. Eğer I , R halkasının bulanık sezgisel zayıf tam 2- yutan asalımsı ideali ve çek f üzerinde sabit ise $f(I)$, S halkasının bulanık sezgisel zayıf tam 2- yutan asalımsı idealidir.

İspat Kabul edelim ki $\forall a, b, c \in S$ için $f(\mu)(abc) > f(\mu)(ab)$ olsun. f örten halka homomorfizması olduğundan, $\forall x, y, z \in R$ için $f(x) = a, f(y) = b, f(z) = c$. Bundan dolayı,

$$\begin{aligned} f(\mu)(abc) &= f(\mu)(f(x)f(y)f(z)) = f(\mu)(f(xyz)) > f(\mu)(ab) \\ &= f(\mu)(f(x)f(y)) = f(\mu)(f(xy)). \end{aligned}$$

μ , çek f üzerinde sabit olduğundan $f(\mu)(f(xyz)) = \mu(xyz)$ ve $f(\mu)(f(xy)) = \mu(xy)$ olur. Yani, $f(\mu)(abc) = \mu(xyz) > \mu(xy) = f(\mu)(ab)$. I , R halkasının bulanık sezgisel zayıf tam 2- yutan asalımsı ideali olduğundan,

$$\begin{aligned} \mu(xyz) &= f(\mu)(f(x)f(y)f(z)) = f(\mu)(abc) \leq \sqrt{\mu}(xz) = f(\sqrt{\mu})(f(xz)) \\ &= f(\sqrt{\mu})(ac) = \sqrt{f(\mu)}(ac) \end{aligned}$$

ya da

$$\begin{aligned} \mu(xyz) &= f(\mu)(f(x)f(y)f(z)) = f(\mu)(abc) \leq \sqrt{\mu}(yz) = f(\sqrt{\mu})(f(yz)) \\ &= f(\sqrt{\mu})(bc) = \sqrt{f(\mu)}(bc). \end{aligned}$$

Benzer şekilde, $\forall a, b, c \in S$ için $f(\nu)(abc) < f(\nu)(ab)$ olsun. f örten halka homomorfizması olduğundan, $\forall x, y, z \in R$ için $f(x) = a, f(y) = b, f(z) = c$. Bundan dolayı,

$$\begin{aligned} f(\nu)(abc) &= f(\nu)(f(x)f(y)f(z)) = f(\nu)(f(xyz)) < f(\nu)(ab) \\ &= f(\nu)(f(x)f(y)) = f(\nu)(f(xy)). \end{aligned}$$

v , çek f üzerinde sabit olduğundan $f(v)(f(xyz)) = v(xyz)$ ve $f(v)(f(xy)) = v(xy)$.

Yani, $f(v)(abc) = v(xyz) < v(xy) = f(v)(ab)$. I , R halkasının bulanık sezgisel zayıf tam

2- yutan asalımsı ideali olduğundan,

$$\begin{aligned} v(xyz) &= f(v)(f(x)f(y)f(z)) = f(v)(abc) \geq \sqrt{v}(xz) = f(\sqrt{v})(f(xz)) \\ &= f(\sqrt{v})(ac) = \sqrt{f(v)}(ac) \end{aligned}$$

ya da

$$\begin{aligned} v(xyz) &= f(v)(f(x)f(y)f(z)) = f(v)(abc) \geq \sqrt{v}(yz) = f(\sqrt{v})(f(yz)) \\ &= f(\sqrt{v})(bc) = \sqrt{f(v)}(bc). \end{aligned}$$

Sonuç olarak, $f(I)$, S halkasının bulanık sezgisel zayıf tam 2- yutan asalımsı idealidir.

Teorem 4.15 $f : R \rightarrow S$ halka homomorfizması olsun. Eğer I , S halkasının bulanık sezgisel zayıf tam 2- yutan asalımsı ideali ise $f^{-1}(I)$, R halkasının bulanık sezgisel zayıf tam 2- yutan asalımsı idealidir.

İspat Kabul edelim ki $\forall x, y, z \in R$ için $f^{-1}(\mu)(xyz) > f^{-1}(\mu)(xy)$ olsun. Buradan,

$$\begin{aligned} f^{-1}(\mu)(xyz) &= \mu(f(xyz)) = \mu(f(x)f(y)f(z)) > f^{-1}(\mu)(xy) \\ &= \mu(f(xy)) = \mu(f(x)f(y)). \end{aligned}$$

I , S halkasının bulanık sezgisel zayıf tam 2- yutan asalımsı ideali olduğundan,

$$\begin{aligned} \mu(f(x)f(y)f(z)) &= f^{-1}(\mu)(xyz) \leq \sqrt{\mu}(f(x)f(z)) = \sqrt{\mu}(f(xz)) \\ &= f^{-1}(\sqrt{\mu}(xz)) = \sqrt{f^{-1}(\mu)}(xz) \end{aligned}$$

ya da

$$\begin{aligned} \mu(f(x)f(y)f(z)) &= f^{-1}(\mu)(xyz) \leq \sqrt{\mu}(f(y)f(z)) = \sqrt{\mu}(f(yz)) \\ &= f^{-1}(\sqrt{\mu}(yz)) = \sqrt{f^{-1}(\mu)}(yz). \end{aligned}$$

Benzer şekilde, $\forall x, y, z \in R$ için $f^{-1}(\nu)(xyz) < f^{-1}(\nu)(xy)$ olsun. Buradan,

$$\begin{aligned} f^{-1}(\nu)(xyz) &= \nu(f(xyz)) = \nu(f(x)f(y)f(z)) < f^{-1}(\nu)(xy) \\ &= \nu(f(xy)) = \nu(f(x)f(y)). \end{aligned}$$

I , S halkasının bulanık sezgisel zayıf tam 2- yutan asalımsı ideali olduğundan,

$$\begin{aligned} v(f(x)f(y)f(z)) &= f^{-1}(v)(xyz) \geq \sqrt{v}(f(x)f(z)) = \sqrt{v}(f(xz)) \\ &= f^{-1}(\sqrt{v}(xz)) = \sqrt{f^{-1}(v)}(xz) \end{aligned}$$

ya da

$$\begin{aligned} v(f(x)f(y)f(z)) &= f^{-1}(v)(xyz) \geq \sqrt{v}(f(y)f(z)) = \sqrt{v}(f(yz)) \\ &= f^{-1}(\sqrt{v}(yz)) = \sqrt{f^{-1}(v)}(yz). \end{aligned}$$

Sonuç olarak, $f^{-1}(I)$, R halkasının bulanık sezgisel zayıf tam 2- yutan asalımsı idealidir.

Teorem 4.16 $f : R \rightarrow S$ örten halka homomorfizması olsun. Eğer I , R halkasının bulanık sezgisel K - 2- yutan asalımsı ideali ve çek f üzerinde sabit ise $f(I)$, S halkasının bulanık sezgisel K - 2- yutan asalımsı idealidir.

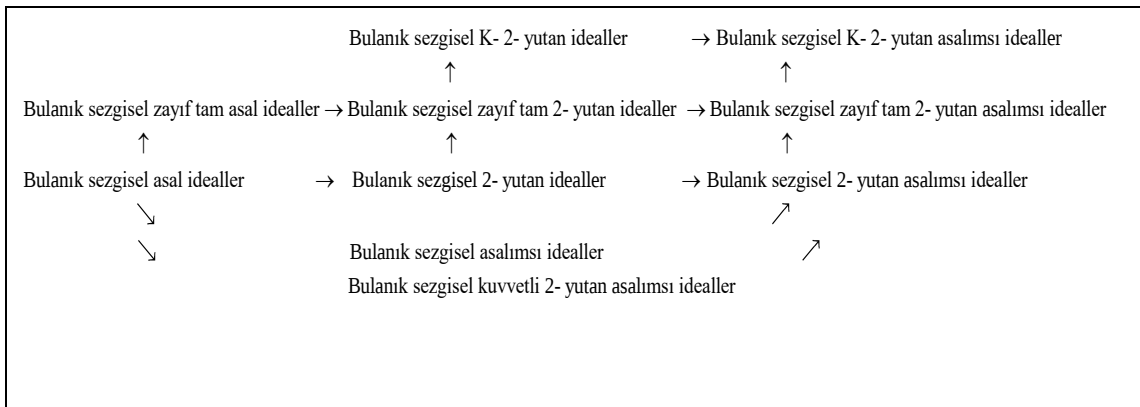
İspat (Teorem 4.14) ün ispatına benzer şekildedir.

Teorem 4.17 $f : R \rightarrow S$ halka homomorfizması olsun. Eğer I , S halkasının bulanık sezgisel K - 2- yutan asalımsı ideali ise $f^{-1}(I)$, R halkasının bulanık sezgisel K - 2- yutan asalımsı idealidir.

İspat (Teorem 4.15) in ispatına benzer şekildedir.

Sonuç 4.2 Aşağıdaki tabloda bulanık sezgisel 2- yutan asalımsı idealler ile ilgili bu bölümde yapılan çalışmalar özetlenmektedir.

Çizelge 4. 2 Bulanık sezgisel 2- yutan asalımsı idealler



DEĞİŞMELİ HALKALARDA BULANIK SEZGİSEL 2- YUTAN YARIASALIMSİ İDEALLER

Bu bölümde, ilk olarak bulanık sezgisel ideallerin kartezyen çarpımı verilmiştir. Daha sonra da bulanık sezgisel 2- yutan yariasalimsi idealler tanımlanarak temel özellikleri çalışılmıştır.

5.1 Bulanık Sezgisel 2- Yutan Yariasalimsi İdealler

Tanım 5.1 R halkasının bulanık sezgisel idealleri $I = \langle \mu_I, \nu_I \rangle$ ve $J = \langle \mu_J, \nu_J \rangle$ olsun.

$\forall x, y \in R$ için I ve J 'nin kartezyen çarpımı $(I \times J)(x, y) = I(x) \wedge J(y)$ olur öyle ki,

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mu_I \times \mu_J)(x, y) = \mu_I(x) \wedge \mu_J(y) \\ \text{ve} \\ (\nu_I \times \nu_J)(x, y) = \nu_I(x) \vee \nu_J(y) \end{array} \right\}. \quad (5.1)$$

R halkasının bulanık sezgisel noktaları $x_{(a,b)}, y_{(c,d)}$ olmak üzere eğer $(x_{(a,b)}, y_{(c,d)}) \in I \times J$ ise, $x_{(a,b)} \in I$ ve $y_{(c,d)} \in J$ olur. Buradan,

$$\left\{ \begin{array}{l} a \wedge c \leq \mu_I(x) \wedge \mu_J(y) \\ \text{ve} \\ b \vee d \geq \nu_I(x) \vee \nu_J(y) \end{array} \right\} \quad (5.2)$$

bulunur. I ve J , R halkasının bulanık sezgisel idealleri olduğundan $I \times J$ de $R \times R$ 'nin bulanık sezgisel idealidir.

Yardımcı Teorem 5.1 I ve J , R halkasının bulanık sezgisel idealleri olsun.

$$\sqrt{I \times J} = \sqrt{I} \times \sqrt{J}. \quad (5.3)$$

İspat

$$\begin{aligned} \sqrt{I \times J}(x, y) &= \bigvee_{n \geq 1} \{ (I \times J)(x^n, y^n) \} \\ &= \bigvee_{n \geq 1} \{ I(x^n) \wedge J(y^n) \} = \bigvee_{n \geq 1} \{ I(x^n) \} \wedge \bigvee_{n \geq 1} \{ J(y^n) \} \\ &= \sqrt{I}(x) \wedge \sqrt{J}(y) = (\sqrt{I} \times \sqrt{J})(x \times y). \end{aligned}$$

Yardımcı Teorem 5.2 R_1, R_2 halka ve R halkasının sabit olmayan bulanık sezgisel ideali I olmak üzere, $R = R_1 \times R_2$ olsun. Eğer I bulanık sezgisel asal ideal ise, R_1 halkasının bulanık sezgisel asal ideali I_1 olmak üzere ya $I = I_1 \times \lambda_{R_2}$ ya da R_2 halkasının bulanık sezgisel asal ideali I_2 olmak üzere $I = \lambda_{R_1} \times I_2$ dir.

İspat R halkasının bulanık sezgisel asal ideali I olsun. Sırasıyla R_1, R_2 halkalarının bulanık sezgisel idealleri α ve β vardır öyle ki $I = \alpha \times \beta$. R halkasının bulanık sezgisel noktaları $x_{(a,b)}, y_{(c,d)}$ için, $(x_{(a,b)}, y_{(c,d)}) = (x_{(a,b)}, 1_2) \cdot (1_1, y_{(c,d)}) \in I = \alpha \times \beta$. I bulanık sezgisel asal ideal olduğundan, $(x_{(a,b)}, 1_2) \in \alpha \times \beta$ ya da $(1_1, y_{(c,d)}) \in \alpha \times \beta$ olur. Sonuç olarak, $\beta = \lambda_{R_2}$ ve α bulanık sezgisel asal ideal ya da $\alpha = \lambda_{R_1}$ ve β bulanık sezgisel asal ideal olarak bulunur.

Teorem 5.1 R_1, R_2 birimli değişmeli halkalar olmak üzere $R = R_1 \times R_2$ olsun. R halkasının sabit olmayan bulanık sezgisel ideali I olsun. Burada aşağıdaki durumlar denktir:

- i) I , R halkasının bulanık sezgisel yarıasalımsı idealidir.
- ii) R_1 halkasının bulanık sezgisel yarıasalımsı ideali I_1 ve R_2 halkasının bulanık sezgisel yarıasalımsı ideali I_2 olmak üzere, ya $I = I_1 \times \lambda_{R_2}$ ya da $I = \lambda_{R_1} \times I_2$ dir.

İspat (i $\rightarrow$ ii) Kabul edelim ki R halkasının bulanık sezgisel yarıasalımsı ideali I olsun. R_1 halkasının bulanık sezgisel ideali I_1 ve R_2 halkasının bulanık sezgisel ideali I_2 olmak üzere $I = I_1 \times I_2$. $\sqrt{I} = \sqrt{I_1} \times \sqrt{I_2}$ bulanık sezgisel asal ideal olduğundan, ya $\sqrt{I_1} = \lambda_{R_1}$

buradan $I_1 = \lambda_{R_1}$ ve $\sqrt{I_2}$ bulanık sezgisel asal ideal ya da $\sqrt{I_2} = \lambda_{R_2}$ buradan $I_2 = \lambda_{R_2}$ ve $\sqrt{I_1}$ bulanık sezgisel asal idealdir. Sonuç olarak, R_1 halkasının bulanık sezgisel yarıasalımsı ideali I_1 ve R_2 halkasının bulanık sezgisel yarıasalımsı ideali I_2 olmak üzere, ya $I = I_1 \times \lambda_{R_2}$ ya da $I = \lambda_{R_1} \times I_2$ olur.

(ii $\rightarrow$ i) Eğer R_1 halkasının bulanık sezgisel yarıasalımsı ideali I_1 ise $\sqrt{I} = \sqrt{I_1 \times \lambda_{R_2}} = \sqrt{I_1} \times \lambda_{R_2}$, R halkasının bulanık sezgisel asal ideali olduğundan ispat açıktır.

Teorem 5.2 R halkasının bulanık sezgisel ideali I olsun. Eğer I bulanık sezgisel 2-yutan ideal ise $I \times \lambda_R$ ve $\lambda_R \times I$, $R \times R$ 'nin bulanık sezgisel 2-yutan idealidir.

İspat R halkasının bulanık sezgisel noktaları $x_{(d,e)}, y_{(f,g)}, z_{(h,j)}, a_{(k,m)}, b_{(p,n)}, c_{(l,r)}$ olmak

üzere $(x_{(d,e)}, a_{(k,m)})(y_{(f,g)}, b_{(p,n)})(z_{(h,j)}, c_{(l,r)}) \in I \times \lambda_R$ olsun. Buradan,

$(x_{(d,e)}y_{(f,g)}z_{(h,j)}, a_{(k,m)}b_{(p,n)}c_{(l,r)}) \in I \times \lambda_R$ olur. Bu yüzden, $(x_{(d,e)}y_{(f,g)}z_{(h,j)}) \in I$ ve

$(a_{(k,m)}b_{(p,n)}c_{(l,r)}) \in \lambda_R$ bulunur. I bulanık sezgisel 2-yutan ideal olduğundan,

$(x_{(d,e)}y_{(f,g)}) \in I$ ya da $(x_{(d,e)}z_{(h,j)}) \in I$ ya da $(y_{(f,g)}z_{(h,j)}) \in I$ elde edilir. Sonuç olarak,

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_{(d,e)}, a_{(k,m)})(y_{(f,g)}, b_{(p,n)}) \in I \times \lambda_R \\ \text{ya da} \\ (x_{(d,e)}, a_{(k,m)})(z_{(h,j)}, c_{(l,r)}) \in I \times \lambda_R \\ \text{ya da} \\ (y_{(f,g)}, b_{(p,n)})(z_{(h,j)}, c_{(l,r)}) \in I \times \lambda_R \end{array} \right\}$$

elde edilir ve $I \times \lambda_R$, $R \times R$ 'nin bulanık sezgisel 2-yutan idealidir. Benzer şekilde, $\lambda_R \times I$ 'nin $R \times R$ 'nin bulanık sezgisel 2-yutan ideali olduğu bulunabilir.

Tanım 5.2 R halkasının sabit olmayan bulanık sezgisel ideali I olsun. Eğer $\sqrt{I}$, R halkasının bulanık sezgisel 2-yutan ideali ise, I bulanık sezgisel 2-yutan yarıasalımsı idealidir.

Teorem 5.3 R_1 ve R_2 birimli değişmeli halkalar olsun. Eğer I , R_1 halkasının (ya da R_2 halkasının) bulanık sezgisel 2- yutan yarıasalımsı ideali ise, $I \times \lambda_{R_2}$ (ya da $\lambda_{R_1} \times I$) $R_1 \times R_2$ 'nin bulanık sezgisel 2- yutan yarıasalımsı idealidir.

İspat Kabul edelim ki I bulanık sezgisel 2- yutan yarıasalımsı ideal olsun. $\sqrt{I}$ bulanık sezgisel 2- yutan ideal olduğundan, $\sqrt{I \times \lambda_{R_2}} = \sqrt{I} \times \lambda_{R_2}$, $R_1 \times R_2$ 'nin bulanık sezgisel 2- yutan idealidir. Sonuçta; $I \times \lambda_{R_2}$, $R_1 \times R_2$ 'nin bulanık sezgisel 2- yutan yarıasalımsı idealidir. Benzer şekilde; $\lambda_{R_1} \times I$, $R_1 \times R_2$ 'nin bulanık sezgisel 2- yutan yarıasalımsı idealidir.

Önerme 5.1 R halkasının sabit olmayan bulanık sezgisel ideali I olsun. Aşağıdaki durumlar denktir:

- i) I bulanık sezgisel 2- yutan yarıasalımsı idealdir.
- ii) R halkasının bulanık sezgisel noktaları $x_{(a,b)}, y_{(c,d)}, z_{(e,f)}$ olmak üzere eğer $x_{(a,b)}y_{(c,d)}z_{(e,f)} \in I$ ise, $x_{(a,b)}y_{(c,d)} \in \sqrt{I}$ ya da $x_{(a,b)}z_{(e,f)} \in \sqrt{I}$ ya da $y_{(c,d)}z_{(e,f)} \in \sqrt{I}$ dir.

Örnek 5.1

- 1) Her bulanık sezgisel asal ideal, bulanık sezgisel 2- yutan yarıasalımsı idealdir.
- 2) Her bulanık sezgisel asalımsı ideal, bulanık sezgisel 2- yutan yarıasalımsı idealdir.
- 3) Her bulanık sezgisel yarıasalımsı ideal, bulanık sezgisel 2- yutan yarıasalımsı idealdir.

Sonuç 5.1 Eğer I bulanık sezgisel 2- yutan asalımsı ideal ise, I bulanık sezgisel 2- yutan yarıasalımsı idealdir.

İspat (Tanım 4.1 ve Önerme 5.1) den kolaylıkla elde edilir.

Fakat aşağıdaki örnekte bu durumun tersinin doğru olmadığı gösterilmiştir.

Örnek 5.2 $R = \mathbb{Z}$ olsun ve $\mathbb{Z}$ 'nin bulanık sezgisel ideali $I = \langle \mu_I, \nu_I \rangle$ olup aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$\mu_I(x) = \begin{cases} 1, & x \in 240\mathbb{Z} \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases} \quad \text{ve} \quad \nu_I(x) = \begin{cases} 0, & x \in 240\mathbb{Z} \\ 1, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

$I = \langle \mu_I, \nu_I \rangle$ bulanık sezgisel 2- yutan yarıasalımsı idealdir. Fakat, $10_1 3_1 8_1 \in \mu_I$ iken $10_1 3_1 \notin \mu_I$ ve $10_1 8_1 \notin \sqrt{\mu_I}$ ve $3_1 8_1 \notin \sqrt{\mu_I}$ olduğundan $I = \langle \mu_I, \nu_I \rangle$ bulanık sezgisel 2- yutan asalımsı ideal değildir.

Teorem 5.4 R değişmeli halka olsun. Aşağıdaki durumlar sağlanır:

i) R halkasının bulanık sezgisel yarı asal ideali I olsun. I 'nın bulanık sezgisel 2- yutan asalımsı ideal olması için gerek ve yeter koşul I 'nın bulanık sezgisel 2- yutan yarıasalımsı ideal olmasıdır.

ii) R halkasının yarı asal ideali I olsun. I 'nın 2- yutan asalımsı ideal olması için gerek ve yeter koşul I 'nın 2- yutan yarıasalımsı ideal olmasıdır.

İspat i) R halkasının bulanık sezgisel yarı asal ideali I olsun. R halkasının bulanık sezgisel noktaları $x_{(a,b)}, y_{(c,d)}, z_{(e,f)}$ olmak üzere eğer I bulanık sezgisel 2- yutan yarıasalımsı ideal ve $x_{(a,b)} y_{(c,d)} z_{(e,f)} \in I$ ise, $x_{(a,b)} y_{(c,d)} \in \sqrt{I}$ ya da $x_{(a,b)} z_{(e,f)} \in \sqrt{I}$ ya da $y_{(c,d)} z_{(e,f)} \in \sqrt{I}$ olur. I bulanık sezgisel yarı asal ideal olduğundan, $\sqrt{I} = I$ olur. Buradan, $x_{(a,b)} y_{(c,d)} \in \sqrt{I} = I$ ya da $x_{(a,b)} z_{(e,f)} \in \sqrt{I}$ ya da $y_{(c,d)} z_{(e,f)} \in \sqrt{I}$ elde edilir. Sonuç olarak, I bulanık sezgisel 2- yutan asalımsı idealdir. Diğer taraftan, I bulanık sezgisel 2- yutan asalımsı ideal olduğunda, I 'nın bulanık sezgisel 2- yutan yarıasalımsı ideal olduğu açıktır.

ii) İspatı, (i) şıkkına benzer şekildedir.

Teorem 5.5 R halkasının bulanık sezgisel ideali I olsun. Eğer $\forall t, s \in L$ için I bulanık sezgisel 2- yutan yarıasalımsı ideal ise, $I^{(t,s)}$ 2- yutan yarıasalımsı idealdir.

İspat Eğer I bulanık sezgisel 2- yutan yarıasalımsı ideal ise, $\sqrt{I}$ bulanık sezgisel 2- yutan idealdir. Teorem gereği, $\sqrt{I}^{(t,s)} = \sqrt{I^{(t,s)}}$ 2- yutan idealdir. Sonuç olarak, $I^{(t,s)}$ 2- yutan yarıasalımsı idealdir.

Teorem 5.6 R halkasının bulanık sezgisel ξ_1 - yarıasalımsı ideali I_1 ve bulanık sezgisel ξ_2 - yarıasalımsı ideali I_2 olsun. Aşağıdaki durumlar sağlanır:

i) $I_1 I_2$, R halkasının bulanık sezgisel 2- yutan yarıasalımsı idealdir.

ii) $I_1 \cap I_2$, R halkasının bulanık sezgisel 2- yutan yarıasalımsı idealidir.

İspat $\sqrt{I_1} = \xi_1$ ve $\sqrt{I_2} = \xi_2$ bulanık sezgisel asal idealler olduğundan, $\sqrt{I_1 I_2} = \sqrt{I_1 \cap I_2}$ olur. $\sqrt{I_1} \cap \sqrt{I_2}$ bulanık sezgisel 2- yutan idealdir. Sonuç olarak, $I_1 \cap I_2$ ve $I_1 I_2$, R halkasının bulanık sezgisel 2- yutan yarıasalımsı idealidir.

Teorem 5.7 $f: R \rightarrow S$ örten halka homomorfizması olsun. Eğer I , R halkasının bulanık sezgisel 2- yutan yarıasalımsı ideali ve çek f üzerinde sabit ise $f(I)$, S halkasının bulanık sezgisel 2- yutan yarıasalımsı idealidir.

İspat Kabul edelim ki I , R halkasının bulanık sezgisel 2- yutan yarıasalımsı ideali ve çek f üzerinde sabit olsun. Buradan $\sqrt{I}$, R halkasının bulanık sezgisel 2- yutan ideali olur ve aynı zamanda çek f üzerinde sabittir. $f(\sqrt{I}) = \sqrt{f(I)}$ olup, S halkasının bulanık sezgisel 2- yutan ideali olduğundan $f(I)$, S halkasının bulanık sezgisel 2- yutan yarıasalımsı idealidir.

Teorem 5.8 $f: R \rightarrow S$ halka homomorfizması olsun. Eğer I , S halkasının bulanık sezgisel 2- yutan yarıasalımsı ideali ise $f^{-1}(I)$, R halkasının bulanık sezgisel 2- yutan yarıasalımsı idealidir.

İspat Kabul edelim ki I , S halkasının bulanık sezgisel 2- yutan yarıasalımsı ideali olsun. Burada $\sqrt{f^{-1}(I)}$ 'nin R halkasının bulanık sezgisel 2- yutan ideali olduğu gösterilmelidir. $\sqrt{f^{-1}(I)} = f^{-1}(\sqrt{I})$ ve $\sqrt{I}$ bulanık sezgisel 2- yutan ideal olduğundan, $\sqrt{I}$ 'nin ters görüntüsü de R halkasının bulanık sezgisel 2- yutan ideali olur. Sonuçta, $\sqrt{f^{-1}(I)}$, R halkasının bulanık sezgisel 2- yutan idealidir. Sonuç olarak, $f^{-1}(I)$, R halkasının bulanık sezgisel 2- yutan yarıasalımsı idealidir.

Tanım 5.3 R halkasının bulanık sezgisel 2- yutan yarıasalımsı ideali I olsun. Burada, $\gamma = \sqrt{I}$ bulanık sezgisel 2- yutan idealdir. Sonuç olarak, I bulanık sezgisel idealine R halkasının bulanık sezgisel γ - 2- yutan yarıasalımsı ideali denir.

Teorem 5.9 R halkasının bulanık sezgisel γ - 2- yutan yarıasalımsı idealleri $I_1, I_2, \dots, I_n$

olsun. $I = \bigcap_{i=1}^n I_i$, R halkasının bulanık sezgisel γ - 2- yutan yarıasalımsı idealidir.

İspat Kabul edelim ki $i \in I$ için I_i , R halkasının bulanık sezgisel γ - 2- yutan yarıasalımsı

ideali olsun. Buradan, $\sqrt{\bigcap_{i=1}^n I_i} = \bigcap_{i=1}^n \sqrt{I_i} = \gamma = \sqrt{I}$ bulanık sezgisel 2- yutan idealdir. Sonuç

olarak, $I = \bigcap_{i=1}^n I_i$, R halkasının bulanık sezgisel γ - 2- yutan yarıasalımsı ideali olarak bulunur.



SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, klasik cebirdeki temel tanım ve teoremlerin yanı sıra bulanık kümeler ve bulanık sezgisel kümelerdeki temel tanım ve teoremler verilmiştir. Bulanık sezgisel kümelerden yararlanılarak bulanık sezgisel 2- yutan idealler ve bulanık sezgisel 2- yutan asalımsı ve yarıasalımsı ideallerin yapıları kurulmuştur. Yeni oluşturulan bu ideallerin karşılaştırılması sağlanmıştır.

Bu bağlamda, bulanık sezgisel kümeler yardımıyla oluşan yeni yapılarda da klasik cebirde var olan özelliklerin korunduğu sonucuna ulaşılmıştır. Halka homomorfizması altında bulunan idealler incelendiğinde, ideal yapılarını korudukları saptanmıştır. Yapılan çalışmalar konuya ilgi duyan araştırmacılara örnek teşkil edecek niteliktedir.

KAYNAKLAR

- [1] Zadeh, L.A., (1965). "Fuzzy Sets", Information and Control, 8: 338-353.
- [2] Rossenfeld, A., (1971). "Fuzzy Groups", J. Math. Anal. Appl., 35: 512-517.
- [3] Liu, W.J., (1983). "Operation on Fuzzy Ideals", Fuzzy Sets and Systems, 11: 31-39.
- [4] Mukherjee, T.K. ve Sen, M.K., (1989). "Prime Fuzzy Ideals in Rings", Fuzzy Sets and Systems, 32: 337-341.
- [5] Atanassov, K., (1986). "Intuitionistic Fuzzy Sets", Fuzzy Sets and Systems, 20: 87-96.
- [6] Hur, K., Kang, H.W. ve Song, H.K., (2003). "Intuitionistic Fuzzy Subgroups and Subrings", Honam Math. J., 25: 19-41.
- [7] Marashdeh, M.F. ve Salleh, A.R., (2011). "Intuitionistic Fuzzy Rings", International Journal of Algebra, 5: 37-47.
- [8] Sharma, P.K., (2011). "Translates of Intuitionistic Fuzzy Subring", International Review of Fuzzy Mathematics, 6: 77-84.
- [9] Badavi, A., (2007). "On 2- Absorbing Ideals of Commutative Rings ", Bull. Austral. Math. Soc., 75: 417-429.
- [10] Anderson, D.F. ve Badavi, A., (2011). "On n- Absorbing Ideals of Commutative Rings", Comm. Algebra, 39: 1446-1672.
- [11] Badavi, A., Tekir, U. ve Yetkin, E., (2014). "On 2- Absorbing Primary Ideals in Commutative Rings", Bull. Austral. Math. Soc. , 51: 1163-1173.
- [12] Badavi, A. ve Darani, A.Y., (2013). "On Weakly 2- Absorbing Ideals of Commutative Rings", Houston Math., 39: 441-452.
- [13] Darani, A.Y. ve Puczyłowski, E.R., (2013). "On 2- Absorbing Commutative Semigroups and Their Applications to Rings", Semigroup Forum, 86: 83-91.
- [14] Kumar, P., Dubey, M.K. ve Sarohe, P., (2015). "Some Results on 2- Absorbing Ideals in Commutative Semirings", J. Math. And Application, 38: 77-84.
- [15] Darani, A.Y., (2016). "On L- fuzzy 2- Absorbing Ideals", Italian J. of Pure and Appl. Math., 36: 147-154.

- [16] Darani, A.Y. ve Hashemipoor, A., (2014). "L- fuzzy 0- (1- or 2- or 3-) 2-Absorbing Ideals in Semiring", *Annals of Fuzzy Math. And Inform.*, 7: 303-311.
- [17] Mukherjee, T.K. ve Sen, M.K., (1993). "Primary Fuzzy Ideals and Radical of Fuzzy Ideals", *Fuzzy Sets and Systems*, 56: 97-101.
- [18] Sonmez, D., Yesilot, G., Onar, S., Ersoy, B.A. ve Davvaz, B., (2017). "On 2-Absorbing Primary Ideals of Commutative Rings", *Mathematical Problems in Engineering*.
- [19] Callıalp, F., (2011). *Örneklerle Soyut Cebir*, Güncelleştirilmiş Baskı, Birsen Yayınevi, İstanbul.
- [20] Callıalp, F. ve Tekir, U., (2009). *Değişmeli Halkalar ve Modüller*, Birinci Baskı, Birsen Yayınevi, İstanbul.
- [21] Mordeson, J.N. ve Malik, D.S., (1998). *Fuzzy Commutative Algebra*, World Scientific Publishing, Singapore.
- [22] Bakhadach, I., Melliani, S., Oukessou, M. ve Chadli, L.S., (2016). "Intuitionistic Fuzzy Ideal and Intuitionistic Fuzzy Prime Ideal in a Ring", *Intuitionistic Fuzzy Sets*, 22: 59-63.
- [23] Sidky, L.I. ve Khatab, S.A., (1992). "Nil Radical of Fuzzy Ideal", *Fuzzy Sets and Systems*, 47: 117-120.
- [24] Palanivelrajan, M. ve Nandakumar, S., (2012). "Some Operations of Intuitionistic Fuzzy Primary and Semiprimary Ideal", *Asian Journal of Algebra*, 5: 44-49.
- [25] Mukherjee, T.K. ve Sen, M.K., (1989). "Prime Fuzzy Ideals in Rings", *Fuzzy Sets and Systems*, 32: 337-341.
- [26] Ahmed, D., Elkettani, Y. ve Kasem, A., (2017). "On Intuitionistic Fuzzy 2-Absorbing Ideals in Commutative Rings", *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*, 13: 5479-5489.
- [27] Malik, D.S. ve Mordeson, J.N., (1991). "Fuzzy Relations on Rings and Groups", *Fuzzy Sets and Systems*, 43: 117-123.
- [28] Callıalp, F., Yetkin, E. ve Tekir, U., (2015). "On 2- Absorbing Primary and Weakly 2- Absorbing Primary Elements in Multiplicative Lattices", *Italian Journal of Pure and Applied Math.*, 34: 263-276.
- [29] Malik, D.S. ve Mordeson, J.N., (1990). "Fuzzy Prime Ideals of a Ring", *Fuzzy Sets and Systems*, 37: 93-98.
- [30] Dixit, V.N., Kumar, R. ve Ajmal, N., (1991). "Fuzzy Ideals and Fuzzy Prime Ideals of a Ring", *Fuzzy Sets and Systems*, 44: 127-138.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Sanem YAVUZ
Doğum Tarihi ve Yeri : 03.11.1993, İstanbul
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : ssanemy@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2019
Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2016
Lisans	Matematik Mühendisliği	Yıldız Teknik Üniversitesi	2016
Lise	Sayısal Bölüm	Bahçelievler Lisesi	2011

YAYINLARI

Makale

1. Yavuz, S., Onar, S. ve Ersoy, B. A., (2017). "Soft Gamma Modules", Ratio Mathematica, 32: 45-62.
2. Yavuz, S., Onar, S., Ersoy, B. A. ve Hila K., (2018). "Vague Soft Modules", Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 34: 2597-2609.
3. Yavuz, S., Onar, S., Sönmez, D. ve Ersoy, B. A., (2017). "Intuitionistic Fuzzy 2-Absorbing Ideals of Commutative Rings", Journal of Hyperstructures, 6: 56-71.
4. Yavuz, S., Onar, S., Sonmez, D., Ersoy, B. A. ve Yeşilot. G., (2018). "Intuitionistic Fuzzy 2- Absorbing Primary Ideals of Commutative Rings", Turkish Journal of Mathematics and Computer Science, 8: 37-48.

Bildiri

1. Yavuz, S., Onar, S., Sönmez, D. ve Ersoy, B. A., (2017). "Intuitionistic Fuzzy 2-Absorbing Ideals of Commutative Rings", 13th Algebraic Hyperstructures and its Applications Conference, 24-27 Temmuz 2017, İstanbul.
2. Yavuz, S., Onar, S., Ersoy, B. A., ve Sönmez, D., (2017). "Intuitionistic Fuzzy 2-Absorbing Primary Ideals of Commutative Rings", 5th International Fuzzy Systems Symposium, 14-15 Ekim 2017, Ankara.
3. Yavuz, S., Onar, S. ve Ersoy, B. A., (2017). "Intuitionistic Fuzzy 2- Absorbing Semiprimary Ideals of Commutative Rings", 4th International Conference on Pure and Applied Sciences, 23-25 Kasım 2017, İstanbul.

Proje

1. Yıldız Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projesi

ÖDÜLLERİ

1. Fen Edebiyat Fakültesi Fakülte İkinciliği Derecesi
2. Matematik Bölümü Bölüm Birinciliği Derecesi
3. Matematik Mühendisliği Bölüm İkinciliği Derecesi