



**ÜNİVALENT HARMONİK FONKSİYONLARIN
MİNİMAL YÜZEYLER İLE İLGİLİ
UYGULAMALARI ÜZERİNE**

Şaban DEMİRTAŞ

**Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı
Dr. Öğr. Üyesi Fatma SAĞSÖZ
2019
Her hakkı saklıdır**

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÜNİVALENT HARMONİK FONKSİYONLARIN MİNİMAL
YÜZEYLER İLE İLGİLİ UYGULAMALARI ÜZERİNE

Şaban DEMİRTAŞ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı

ERZURUM
2019

Her Hakkı Saklıdır



T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



TEZ ONAY FORMU

**ÜNİVALENT HARMONİK FONKSİYONLARIN MİNİMAL YÜZEYLER İLE
İLGİLİ UYGULAMALARI**

Dr. Öğr. Üyesi Fatma SAĞSÖZ danışmanlığında, Şaban DEMİRTAŞ tarafından hazırlanan bu çalışma, 20/09/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Analiz Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak **oybirliği / oy çokluğu** (3./3) ile kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Kürşat AKBULUT

İmza :

Üye : Prof. Dr. Erhan DENİZ

İmza :

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Fatma SAĞSÖZ

İmza :

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu'nun 10.10/2019 tarih ve ...40.../...36.... nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Mehmet KARAKAN
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildiriş, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ÜNİVALENT HARMONİK FONKSİYONLARIN MİNİMAL YÜZEYLER İLE İLGİLİ UYGULAMALARI ÜZERİNE

Şaban DEMİRTAŞ

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Fatma SAĞSÖZ

Bu çalışmada, ilk olarak minimal yüzeylerle ünivalent harmonik dönüşümler arasındaki ilişki incelenmiştir. Minimal yüzeylerle ilgili daha çok bilgi edinmemizi sağlayan Weierstrass gösteriminin farklı şekilleri verilmiştir. Ayrıca, ünivalent harmonik dönüşümlerin yeni örneklerinin oluşturulmasında oldukça kullanışlı bir yol olan makaslama tekniğine yer verilmiştir. Son olarak da yapılan araştırmalar neticesinde elde edilen sonuçlar incelenmiştir.

2019, 128 sayfa

Anahtar Kelimeler: Harmonik Ünivalent Dönüşümler, Konvekse Yakın, Yatay Doğrultuda Konveks, Minimal Yüzeyler, Weierstrass Gösterimi, Makaslama Tekniği

ABSTRACT

Master's Thesis

ON APPLICATION OF UNIVALENT HARMONIC FUNCTIONS RELATED WITH MINIMAL SURFACES

Şaban DEMİRTAŞ

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Department of Analysis and Theory of Functions

Supervisor: Dr. Öğr. Üyesi Fatma SAĞSÖZ

In this study, firstly the relationship between minimal surfaces and univalent harmonic mappings is studied. Different versions of the Weierstrass representation, which allows us to learn more about minimal surfaces, are included. Furthermore, the shearing technique which is a useful way to construct new examples of univalent harmonic mappings, is given. Finally, the results obtained from the investigations are examined.

2019, 128 pages

Keywords: Harmonic Univalent Mappings, Close-to-Convex, Convex in the Horizontal Direction, Minimal Surfaces, Weierstrass Representation, Shearing Technique

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma, Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde hazırlanmıştır.

Bu çalışmamda değerli bilgilerini benimle paylaşan, kullandığı her kelimenin hayatıma kattığı önemi asla unutmayacağım danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Fatma SAĞSÖZ'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Değerli jüri üyeleri Sayın Prof. Dr. Kürşat AKBULUT'a ve Sayın Prof. Dr. Erhan DENİZ'e teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca çalışmam boyunca benden bir an olsun yardımlarını esirgemeyen eşim Özlem DEMİRTAŞ'a ve çalışma süresince tüm zorlukları benimle göğüsleyen ve hayatımın her evresinde bana destek olan değerli annem Keziban DEMİRTAŞ'a ve yaşadığı süre boyunca verdiği fikirlerle hayatta hep dik ve güçlü olmamı sağlayan rahmetli babam Abdullah DEMİRTAŞ'a çok teşekkür ederim.

Şaban DEMİRTAŞ

Ekim, 2019

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	4
2.1. Kompleks ve Harmonik Analizdeki Bazı Temel Tanımlar.....	4
2.2. Diferansiyel Geometrideki Bazı Temel Tanımlar	15
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	30
3.1. Minimal Yüzeyler.....	30
3.2. Weierstrass Gösterimi	37
3.3. Minimal Yüzeyler ve Harmonik Ünivalent Dönüşümler	47
3.4. Harmonik Konvekse Yakın Fonksiyonlar	53
3.5. Makaslama Tekniği	56
3.6. Dilatasyon Özellikleri.....	65
4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA.....	72
4.1. Harmonik Konvekse Yakın Fonksiyonlar ve Minimal Yüzeyler İle İlgili Sonuçlar.....	72
4.2. Ünivalent Harmonik Dönüşümler ve Minimal Yüzeylere Yükseltilmesi	93
4.2.1. $\omega(z) = z \frac{z+a}{1+az}$ dilastasyonu ile oluşturulan harmonik dönüşüm.....	94
4.2.2. Makaslama yapımı ve minimal yüzeyler.....	102
5. TARTIŞMA ve SONUÇ.....	126
KAYNAKLAR	127
ÖZGEÇMİŞ	129

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{D}$	Açık birim disk
D	Bölge, basit bağlantılı bölge
Δ	Laplace operatörü
J_f	f fonksiyonunun Jakobiyesi
ω	Dilatasyon fonksiyonu
$f * g$	f ile g fonksiyonlarının Hadamard çarpımı
S	Normalize edilmiş analitik ünivalent fonksiyonlar sınıfı
S_H	Yön-koruyan harmonik ünivalent fonksiyonlar sınıfı
S_H^0	$b_1 = 0$ olacak şekilde normalize edilmiş $f \in S_H$ fonksiyonlarının sınıfı
S^*	Yıldızıl fonksiyonlar sınıfı
S_H^*	Harmonik yıldızıl fonksiyonlar sınıfı
S_H^{*0}	$b_1 = 0$ özelliğindeki harmonik yıldızıl fonksiyonlar sınıfı
C_H	Harmonik konvekse yakın fonksiyonlar sınıfı
C_H^0	$b_1 = 0$ özelliğindeki harmonik konvekse yakın fonksiyonlar sınıfı
K_H	Harmonik konveks fonksiyonlar sınıfı
K_H^0	$b_1 = 0$ özelliğindeki harmonik konveks fonksiyonlar sınıfı
$k(z)$	Koebe fonksiyonu
$k_c(z)$	Genelleştirilmiş Koebe fonksiyonu
B	Beta fonksiyonu
Γ	Gama fonksiyonu

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Yatay doğrultuda konveks ve yatay doğrultuda konveks olmayan bölge	6
Şekil 2.2. Bir yüzeyin parametrizasyonu	15
Şekil 2.3. u-parametre ve v-parametre eğrileri	17
Şekil 2.4. $T_p(M)$ teğet düzlemi ve n birim normal vektörü	18
Şekil 2.5. Normal eğrilik	21
Şekil 2.6. Gauss Dönüşümü	24
Şekil 3.1. Bazı minimal yüzey örnekleri.....	30
Şekil 3.2. Bir izotermal parametrizasyon küçük kareleri küçük karelere dönüştürür.....	33
Şekil 3.3. Helikoid, bazı bağlantılı yüzeyler ve katenoid.	36
Şekil 3.4. $f(z) = z + \frac{1}{3}\bar{z}^3$ harmonik fonksiyonu altında D nin görüntüsü	48
Şekil 3.5. Ünivalentliği korumak için analitik bir fonksiyonu makaslama)	59
Şekil 3.6. $f(z) = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} \log \left(\frac{1+z}{1-z} \right) \right] + i \operatorname{Im} \left[\frac{1}{2} \log \left(\frac{1+z}{1-z} \right) \right]$ altında D nin görüntüsü	65
Şekil 4.1. m ve α nin belirli değerlerine karşılık gelen minimal yüzeyler ve f(z) görüntüleri	82
Şekil 4.2. f(z) nin görüntüsü ve a, b, m ve α nin belirtilen değerlerine karşılık gelen minimal yüzeyler	91
Şekil 4.3. f(z) nin görüntüsü ve a, b, m ve α nin belirtilen değerlerine karşılık gelen konform ön makaslamaların görüntüleri	93
Şekil 4.4. $\omega = z \frac{z+a}{1+az}$ iken özdeşlik dönüşümünün makaslama)	95
Şekil 4.5. $\omega = z \frac{z+a}{1+az}$ deki a nın belirli değerleri için strip dönüşümünün makaslama)	97
Şekil 4.6. $\omega = z \frac{z+a}{1+az}$ deki a nın belirli değerleri için yarı düzlem dönüşümünün makaslama)	98
Şekil 4.7. $f_{0,n}(D)$ nin $c = 0$, $n = 4,6,8,10,12,14$ değerleri için minimum yüzeylere yükseltilmesi.....	104
Şekil 4.8. $n = 3,4,5,6$ değerleri için $f_{1,n}(D)$ nin dalga düzlemleri	110

Şekil 4.9. $f_{1,n}(D)$ nin $c = 1$, $n = 4,6,8,10,12,14$ değerleri için minimal yüzeylere yükseltilmesi.....	111
Şekil 4.10. $n = 3,4,5,6$ değerleri için $f_{2,n}(D)$ nin slit görüntüleri	116
Şekil 4.11. $f_{2,n}(D)$ nin, $c = 2$, $n = 4,6,8,10,12,14$ değerleri için minimal yüzeylere yükseltilmesi.....	117
Şekil 4.12. $c \in [0,2]$ nin belirli değerleri için $f_{c,3}(D)$ nin görüntüleri	124
Şekil 4.13. $c \in [0,2]$ nin belirli değerleri için $f_{c,4}(D)$ nin görüntüleri	125



1. GİRİŞ

Geometrik analiz teknikleri geometri, topoloji, fizik ve mühendislikteki çeşitli problemlerin çözümünde oldukça kullanışlıdır. Özellikle mühendislik ve fizikteki problemlerin pek çoğu, analitik bir fonksiyonun reel veya imajiner kısmını oluşturan harmonik fonksiyonları içermektedir.

Düzlemde harmonik dönüşümler, reel ve imajiner kısımları birbirinin harmonik eşleniği olması gerekli olmayan, kompleks değişkenli kompleks değerli ünivalent harmonik fonksiyonlardır. Başka bir deyişle Cauchy-Riemann denklemlerinin sağlanması gerekmez. Dolayısıyla, fonksiyonların analitik olması şart değildir.

Konform dönüşümler, reel ve imajiner kısımları Cauchy-Riemann denklemlerini sağlayan; yani reel ve imajiner kısımları harmonik eşlenik olan özel bir durumdur. Harmonik dönüşümler, konform dönüşümlerin doğal bir genelleştirmesi olmasına rağmen, minimal yüzeylerin parametrizasyonundaki rolünden dolayı 1920'lerin başlarında diferansiyel geometriciler tarafından çalışılmıştır. Harmonik dönüşümler ancak 1980'lerin ortasında kompleks analizciler tarafından yaygın bir şekilde ilgi görmeye başlamıştır. 1984'te James Clunie ve Terry Sheil-Small tarafından yapılan, konform dönüşümler için elde edilen pek çok sonucun harmonik fonksiyonlarda net benzerliklere sahip olduğunu gösteren çalışma, bu konudaki çalışmaların hızlanmasında önemli bir dönüm noktası olmuştur.

Harmonik dönüşümler ile minimal yüzeyler arasındaki ilişki, bir minimal yüzeyin Öklid koordinatlarının izotermal (konform) parametrelerinin harmonik fonksiyonlar olmasından kaynaklanmaktadır. Parametrik olmayan bir minimal yüzeyin taban düzlemi üzerine izdüşümü, harmonik bir dönüşüm tanımlar. Tersine, minimal yüzeylere yükseltelen harmonik dönüşümler, basit bir tanımlamaya ve kesin formüller ile verilebilen ilgili yüzeylere sahiptir. Bu tanımlama harmonik dönüşümleri minimal yüzeylerin

alışılmasında etkili bir araç haline getirir. Bu sayede, kompleks düzlemdeki harmonik dönüşümler incelenerek minimal yüzeyler araştırılabilir.

Tibor Rado, Lipman Bers, Erhard Heinz ve Johannes Nitsche, harmonik dönüşümler ve minimal yüzeyler arasındaki ilişkiyi aydınlatmak için (1960'dan önce) ilk çalışmaları yapan bazı önemli isimlerdir (Duren 2004).

Son yıllarda ise Greiner (2004), Dorff and Muir (2014), Ponnusamy *et al.* (2013, 2014), Ponnusamy and Kaliraj (2012) gibi pek çok araştırmacı bu konuda çalışmalar yapmışlardır.

2011 yılında M. Ökten tarafından “Minimal Yüzeylerin Harmonik Fonksiyonlarla Karakterizasyonu” başlıklı tez çalışmasında harmonik fonksiyonlar ve bazı alt sınıfları kullanılarak, belirli tipteki bir minimal yüzeyin Gauss eğriliği ve Weierstrass-Enneper parametrelerinin distorsiyon eşitsizlikleri incelenmiştir. Ayrıca 2012 yılında B. Alağaç tarafından “Minimal Yüzeylerin Log-Harmonik Fonksiyonlarla Karakterizasyonu” başlıklı tez çalışması yapılmıştır. Bu çalışmada izotermal parametrelerle verilen bir minimal yüzeyin yalnızca harmonik ve yalnızca log-harmonik fonksiyonlarla temsili, belirli tipteki minimal yüzeylerin Weierstrass-Enneper fonksiyonları ve Gauss eğriliği için growth (genişleme) teoremleri verilmiştir.

Biz ise bu çalışmada, 1984 yılında Clunie ve Sheil-Small tarafından verilen *makaslama tekniği* kullanılarak, farklı dilatasyonlar ile birim diski yatay (veya dikey) doğrultuda konveks bir bölgeye dönüştüren yön-koruyan ünivalent harmonik dönüşümlerin nasıl oluşturulduğunu ve bu tür harmonik dönüşümlerin izotermal parametrelerle ifade edilebilen minimal yüzeylere nasıl yükseltildiğini inceledik.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünde konunun tarihsel gelişimi ele alınmıştır.

Kuramsal Temeller adını alan ikinci bölümde, tezin daha iyi anlaşılması için çalışmamızda kullandığımız temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, tezin temel kısmında yer alan teoremlerin oluşturulmasında ve ispatlarında kullanılan bazı önemli bilgiler, tanım ve teoremler verilmiştir.

Dördüncü bölümde, ünivalent harmonik fonksiyonların minimal yüzeyler ile ilgili uygulamaları üzerine yapılan araştırmalar sonucunda elde edilen bazı bulgulara yer verilmiştir.

Beşinci bölümde ise, bu çalışmada elde edilen sonuçlar özetlenmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Kompleks ve Harmonik Analizdeki Bazı Temel Tanımlar

Bu bölümde minimal yüzeylerin kompleks parametrelerle ifade edilmesini anlamak için gerekli olan bazı temel tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1.1 (n . Dereceden Birim Kök): $n \in \mathbb{N}$ (yani $n = 1, 2, 3, \dots$) olmak üzere $z^n = 1$ denklemini sağlayan z kompleks sayısına n . dereceden birim kök denir.

Tanım 2.1.2 (Komşuluk): $z_0 \in \mathbb{C}$ ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere,

$$D(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$$

kümesine z_0 merkezli ε yarıçaplı açık disk veya z_0 noktasının ε komşuluğu denir.

$$\overline{D(z_0, \varepsilon)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq \varepsilon\}$$

kümesine z_0 merkezli ε yarıçaplı kapalı disk,

$$\partial D(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \varepsilon\}$$

kümesine z_0 merkezli ε yarıçaplı çember,

$$D^\circ(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \varepsilon\} = D(z_0, \varepsilon) - \{z_0\}$$

kümesine de z_0 noktasının ε delinmiş komşuluğu denir.

Tanım 2.1.3 (İç Nokta): $A \subset \mathbb{C}$ boş olmayan bir küme olsun. $z_0 \in A$ için $D(z_0, \varepsilon) \subseteq A$ olacak şekilde $\exists \varepsilon > 0$ sayısı varsa z_0 noktasına A kümesinin bir iç noktasıdır denir.

Tanım 2.1.4 (Açık ve Kapalı Küme): Her noktası iç nokta olan kümeye açık küme, tümleyeni açık olan kümeye ise kapalı küme denir.

Tanım 2.1.5 (Bağlantılı Küme): $A \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. A kümesi boş olmayan ayrık ve açık iki kümenin birleşimi olarak gösterilemiyorsa, A kümesine bağlantılıdır denir. Yani,

- i. $A \subseteq U \cup V$,
- ii. $A \cap U \neq \emptyset$ ve $A \cap V \neq \emptyset$,
- iii. $A \cap U \cap V = \emptyset$

olacak şekilde $U, V \subset \mathbb{C}$ gibi boş olmayan iki açık küme bulunamıyorsa A kümesine bağlantılı küme denir.

Tanım 2.1.6 (Basit Bağlantılı Küme): Tümleyeni bağlantılı olan kümeye basit bağlantılı küme denir.

Tanım 2.1.7 (Bölge): Kompleks düzlemde boş olmayan, açık ve bağlantılı kümeye bölge denir.

Tanım 2.1.8 (Yıldızlı Bölge): Bir $D \subset \mathbb{C}$ bölgesi ve bir $w_0 \in D$ noktası verilmiş olsun. Eğer w_0 noktasını diğer her bir $w \in D$ noktasına birleştiren doğru parçası tamamen D içinde kalıyorsa, D bölgesi w_0 noktasına göre yıldızlıdır denir. Özel olarak $w_0 = 0$ için D bölgesi orijine göre yıldızlıdır veya sadece D bölgesi yıldızlıdır denir (Duren 1983).

Tanım 2.1.9 (Konveks Bölge): Bir $D \subset \mathbb{C}$ bölgesi verilsin. Bir birinden farklı herhangi $z, w \in D$ noktaları ve $0 \leq t \leq 1$ için $tz + (1 - t)w$ doğru parçası D de kalıyorsa D bölgesi konvekstir denir (Duren 1983).

Tanım 2.1.10 (Konvekse Yakın Bölge): Herhangi bir D bölgesinin tümleyeni birbiri ile kesişmeyen yarı doğruların bir birleşimi şeklinde yazılabiliyorsa D bölgesine konvekse yakın bölge denir (Duren 1983).

Tanım 2.1.11: Bir $D \subset \mathbb{C}$ bölgesi verilsin. Eğer reel eksene paralel olan her doğru D ile bağlantılı bir kesişime sahip ise D bölgesi reel eksen doğrultusunda konveks (veya yatay doğrultuda konveks) bir bölgedir denir. Benzer şekilde imajiner eksene paralel olan her doğru D ile bağlantılı bir kesişime sahip ise D bölgesi imajiner eksen doğrultusunda konveks (veya dikey doğrultuda konveks) bir bölgedir.



Şekil 2.1. Yatay doğrultuda konveks ve yatay doğrultuda konveks olmayan bölge (Brilleslyper *et al.* 2012)

Tanım 2.1.12: Bir $D \subset \mathbb{C}$ bölgesi verilsin. Her $a \in \mathbb{C}$ için, $D \cap \{a + te^{i\varphi} : t \in \mathbb{R}\}$ kümesi bağlantılı veya boş ise D bölgesi, $e^{i\varphi}$ yönünde konveks bir bölgedir.

Tanım 2.1.13: $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonunun $z \in \mathbb{C}$ noktasındaki türevi, herhangi bir $h \in \mathbb{C}$ için

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.14: $A \subset \mathbb{C}$, $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ bir fonksiyon olsun. Her $z \in A$ noktasında f fonksiyonu diferensiyellenebilir ise f fonksiyonu A kümesinde analitiktir (veya holomorftur) denir. Tüm kompleks sayılar kümesinde analitik olan fonksiyona tam fonksiyon denir.

Analitik bir fonksiyonun orijinde kuvvet serisine açılımı

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

şeklindedir.

Tanım 2.1.15 (Hadamard Çarpımı): $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ve $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ analitik fonksiyonları verildiğinde

$$(f * g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n \quad (|z| < 1)$$

şeklinde tanımlanan $(f * g)(z)$ analitik fonksiyonuna $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonlarının Hadamard çarpımı (veya konvülasyonu) denir.

Teorem 2.1.16: $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ fonksiyonu $z = x + iy$ noktasında analitik ise bu noktada u_x, u_y, v_x, v_y kısmi türevleri vardır ve bu türevler

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Cauchy-Riemann denklemlerini sağlarlar.

Tanım 2.1.17: f fonksiyonunun analitik olduğu $A(R_1; R_2) = \{z: R_1 < |z - z_0| < R_2\}$ halka bölgesindeki

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

serisine f fonksiyonunun z_0 noktası civarındaki Laurent serisi denir. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$ serisine Laurent serisinin esas kısmı, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ serisine Laurent serisinin analitik kısmı denir. b_1 katsayısına f fonksiyonunun z_0 noktasındaki rezidüsü denir ve $\text{Rez}f(z_0) = b_1$ ile gösterilir.

Teorem 2.1.18 (Rezidü Teoremi): C pozitif yönlü basit kapalı bir çevre olmak üzere $w = f(z)$, C içinde bulunan sonlu $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ noktaları dışında C çevresinin içinde ve üzerinde analitik ise

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Rez}f(z_j)$$

ifadesi sağlanır.

Tanım 2.1.19:

- i. f fonksiyonu z_0 noktasında analitik değilse z_0 noktasına f fonksiyonunun singüler noktası denir.
- ii. z_0 , f fonksiyonunun bir singüler noktası olsun. Eğer f fonksiyonu z_0 noktasının $D^\circ(z_0, r)$ delinmiş bir komşuluğunda analitik oluyorsa z_0 noktasına f fonksiyonunun ayrık singüler noktası denir.

iii. z_0 , f fonksiyonunun bir singüler noktası olsun. Eğer f fonksiyonu z_0 noktasının $D^\circ(z_0, r)$ her delinmiş komşuluğunda en az bir singüler noktaya sahipse z_0 noktasına f fonksiyonunun ayırık olmayan singüler noktası denir.

Tanım 2.1.20 (Kutup Noktası ve Basit Kutup Noktası): $w = f(z)$ fonksiyonu basit bağlantılı D bölgesinde tanımlanmış bir fonksiyon olmak üzere $\Phi(z)$ fonksiyonu da D bölgesinin bütün noktalarında tanımlanmış sürekli ve analitik bir fonksiyon olsun. Eğer

$$f(z) = \frac{\Phi(z)}{(z-a)^n}, \quad \Phi(a) \neq 0, n \in \mathbb{Z}^+$$

ise $z = a$ noktasına f fonksiyonunun n . mertebeden kutup noktası denir. $n = 1$ ise $z = a$ ya basit kutup noktası adı verilir.

Tanım 2.1.21 (Sıfır Yerleri): $f(z) = 0$ eşitliğini sağlayan z değerine f fonksiyonunun bir sıfır yeri denir.

Tanım 2.1.22 (Meromorf Fonksiyon): Bir f fonksiyonunun bir D bölgesindeki singüler noktaları sadece kutup noktaları ise f fonksiyonuna D bölgesinde meromorf fonksiyon denir.

Tanım 2.1.23 (Harmonik Fonksiyon): Reel değerli $u(x, y)$ fonksiyonu

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Laplace denklemini sağlarsa u 'ya harmonik fonksiyon denir.

Tanım 2.1.24: u ve v reel değerli fonksiyonlar olsun. Bunlar harmonik birer fonksiyon ve Cauchy-Riemann denklemlerini sağlıyorsa u ve v fonksiyonları harmonik eşleniktir ve v , u 'nın harmonik eşleniğidir denir.

Tanım 2.1.25: u ve v , basit bağlantılı bir D bölgesinde reel değerli harmonik fonksiyonlar ise (u ve v nin harmonik eşlenik olması gerekmez) D de tanımlı $f = u + iv$ sürekli fonksiyonu D de kompleks değerli harmonik bir fonksiyondur.

Teorem 2.1.26: $D \subset \mathbb{C}$, $u: D \rightarrow \mathbb{R}$ reel değerli harmonik bir fonksiyon ise u harmonik eşleniğe sahiptir.

Tanım 2.1.27 (Ünivalent Fonksiyon): f fonksiyonu herhangi bir $D \subseteq \mathbb{C}$ bölgesinde analitik olsun. Her $z_1, z_2 \in D$ için,

$$z_1 \neq z_2 \text{ iken } f(z_1) \neq f(z_2)$$

oluyorsa, yani f fonksiyonu bu bölgede aynı değeri iki kez almıyorsa f fonksiyonuna D bölgesinde ünivalent (veya yalınkat) fonksiyon denir (Duren 1983).

Tanım 2.1.28: Normalize edilmiş analitik ünivalent fonksiyonların ailesi S olmak üzere

$$S = \{f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C} \mid f(0) = 0, f'(0) = 1 \text{ olmak üzere } f \text{ analitik ve ünivalenttir.}\}$$

şeklinde tanımlanır. Buna göre, $f \in S$ den $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$ şeklinde olur.

Tanım 2.1.29: Basit bağlantılı bir $D \subset \mathbb{C}$ bölgesinde kompleks değerli harmonik f fonksiyonu, h ve g fonksiyonları D bölgesinde analitik olmak üzere $f = h + \bar{g}$ gösterimine sahiptir. Bu gösterime f fonksiyonunun kanonik gösterimi denir.

Eğer u ve v basit bağlantılı bir bölgede reel harmonik fonksiyonlar ve $f = u + iv$ ise, o zaman $u = \operatorname{Re} K$ ve $v = \operatorname{Im} L$ olacak şekilde K ve L analitik fonksiyonları vardır. Bu nedenle,

$$f = u + iv = \operatorname{Re} K + i \operatorname{Im} L = \frac{K + \bar{K}}{2} + i \frac{L - \bar{L}}{2i} = \frac{K + L}{2} + \frac{\bar{K} - \bar{L}}{2} = h + \bar{g}$$

olur. h ve g analitik olmak üzere $f = h + \bar{g}$ olduğundan f ,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (\bar{z})^n$$

şeklinde seri açılımına sahiptir. Bu nedenle, analitik ünivalent fonksiyonlar normalize edildiği gibi harmonik ünivalent dönüşümlerde normalize edilebilir.

Tanım 2.1.30 (Dilatasyon): $f = h + \bar{g}$ nin dilatasyonu $\omega(z) = g'(z)/h'(z)$ dir.

Tanım 2.1.31: S_H birim disk üzerinde normalize edilen kompleks değerli ünivalent harmonik dönüşümlerin bir ailesi olmak üzere

$$S_H = \{f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C} \mid f(0) = a_0 = 0, f_z(0) = a_1 = 1 \text{ olmak üzere } f \text{ harmonik ünivalenttir.}\}$$

şeklinde tanımlanır. S_H sınıfı $b_1 = 0$ olmasını gerektirecek şekilde kısıtlanırsa

$$S_H^0 = \{f \in S_H \mid f_{\bar{z}}(0) = b_1 = 0\}$$

ailesi elde edilir. Buna göre

$$S \subset S_H^0 \subset S_H$$

olur.

Tanım 2.1.32 (Yıldızıl Fonksiyon): Ünivalent bir $f(z)$ fonksiyonu, D bölgesini w_o noktasına göre yıldızıl bir bölge üzerine resmediyorsa $f(z)$ fonksiyonuna, w_o noktasına göre yıldızıl fonksiyon denir. Özel olarak $w_o = 0$ ise $f(z)$ fonksiyonuna yıldızıl fonksiyon denir ve bu fonksiyonların sınıfı S^* ile gösterilir.

Tanım 2.1.33 (Harmonik Yıldızıl Fonksiyon): $f \in S_H$ (veya özel olarak $f \in S_H^0$) ve $f(\mathbb{D})$ görüntüsü yıldızıl bir bölge ise f fonksiyonuna harmonik yıldızıl fonksiyon denir. Harmonik yıldızıl fonksiyonlar sınıfı S_H^* (veya özel olarak S_H^{*0}) ile gösterilir.

Tanım 2.1.34 (Konveks Fonksiyon): Ünivalent bir $f(z)$ fonksiyonu, D bölgesini konveks bir bölge üzerine resmediyorsa f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Konveks fonksiyonlar sınıfı K ile gösterilir.

Tanım 2.1.35 (Harmonik Konveks Fonksiyon): $f \in S_H$ (veya özel olarak $f \in S_H^0$) ve $f(\mathbb{D})$ görüntüsü konveks bir bölge ise f fonksiyonuna harmonik konveks fonksiyon denir. Harmonik konveks fonksiyonlar sınıfı K_H (veya özel olarak K_H^0) ile gösterilir.

Tanım 2.1.36 (Konvekse Yakın Fonksiyon): Bir $f(z)$ analitik fonksiyonu verilsin. Bu takdirde

$$Re \left\{ \frac{zf'(z)}{g(z)} \right\} > 0$$

olacak şekilde yıldızıl bir g fonksiyonu varsa, f fonksiyonuna konvekse yakın fonksiyon denir ve konvekse yakın fonksiyonlar sınıfı C ile gösterilir.

Tanım 2.1.37 (Harmonik Konvekse Yakın Fonksiyon): $f \in S_H$ (veya özel olarak $f \in S_H^0$) ve $f(\mathbb{D})$ görüntüsü konvekse yakın bir bölge ise f fonksiyonuna harmonik konvekse

yakın fonksiyon denir. Harmonik konvekse yakın fonksiyonlar sınıfı C_H (veya özel olarak C_H^0) ile gösterilir.

Tanım 2.1.38: Bir $D \subset \mathbb{C}$ bölgesinde ünivalent olan kompleks değerli harmonik bir fonksiyona D bölgesinde harmonik bir dönüşüm denir.

Tanım 2.1.39: $D \subset \mathbb{C}$, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ bir fonksiyon olsun. $f = u + iv$ fonksiyonunun Jakobiyesi

$$J_f(z) = \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - u_y v_x$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.1.40 (Lewy Teoremi): Eğer f , bir $D \subset \mathbb{C}$ bölgesinde yerel ünivalent olan kompleks değerli harmonik bir fonksiyon ise bu durumda her $z \in D$ için $J_f(z) \neq 0$ dır (Lewy 1936).

Tanım 2.1.41: Lokal ünivalent harmonik dönüşümler, $z \in \mathbb{C}$ noktasında $J_f(z) > 0$ ise yön-koruyan, $J_f(z) < 0$ ise yön-değiştiren dönüşümlerdir.

Eğer f yön-koruyan dönüşüm ise bu durumda $\bar{f}$ yön-değiştiren dönüşümdür.

Tanım 2.1.42 (Konform Dönüşüm): Kompleks düzlemin bir D bölgesinde $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ sürekli dönüşümü verilsin. Eğer bir $z_0 \in D$ noktasından geçen ve aralarında α açısı yapan herhangi iki düzgün γ_1 ve γ_2 eğrilerinin ve $f(\gamma_1)$ ve $f(\gamma_2)$ görüntü eğrilerinin de $w_0 = f(z_0)$ noktasında aralarında yön ve büyüklük bakımından α açısı varsa, f fonksiyonuna z_0 noktasında bir konform dönüşümdür denir. Eğer f fonksiyonu her $z_0 \in D$ noktasında konform ise f fonksiyonuna D bölgesinde konformdur denir.

Konform dönüşümler yön-koruyan dönüşümlerdir. Eğriler arasındaki açıyı koruduğu için analitik ünivalent bir fonksiyona konform dönüşüm denir.

Teorem 2.1.43 (Möbius Dönüşümü): $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ olmak üzere

$$g(\infty) = \frac{a}{c} ; g\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty ; a, b, c, d \in \mathbb{C},$$

$ad - bc \neq 0$ olacak şekilde

$$g: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty, g(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

şeklindeki dönüşümlere Möbius Dönüşümü denir.

Tanım 2.1.44 (Koebe Fonksiyonu): $k: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$, $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ fonksiyonuna Koebe fonksiyonu denir (Duren1983).

Tanım 2.1.45 (Genelleştirilmiş Koebe Fonksiyonu): $k_c: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$k_c(z) = \int_0^z \frac{(1+\zeta)^{c-1}}{(1-\zeta)^{c+1}} d\zeta = \frac{1}{2c} \left[\left(\frac{1+z}{1-z} \right)^c - 1 \right], \quad c \in [0, 2] \quad (2.1)$$

fonksiyonuna genelleştirilmiş Koebe fonksiyonu denir (Jiang *et al.* 2015).

$c = 0$ olması durumunda $k_c(z)$ fonksiyonu,

$$k_0(z) = \lim_{c \rightarrow 0^+} k_c(z) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+z}{1-z} \right)$$

şeklinde yorumlanır. Açıkça burada, $k_1(z) = \frac{z}{1-z}$ ve $k_2(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ dir. Dahası, $c \in [0,2]$ için $k_c(\mathbb{D})$ yatay doğrultuda konvektir. Buna ek olarak, $[0,1]$ için $k_c(\mathbb{D})$ konvektir.

Tanım 2.1.46 (Gama Fonksiyonu): $z \in \mathbb{C}$ ve $\text{Re } z > 0$ olmak üzere

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

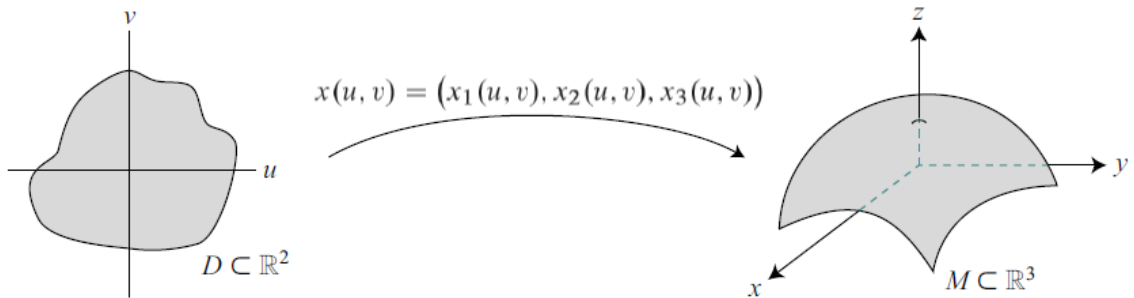
formülü ile tanımlanan fonksiyona gama fonksiyonu denir.

2.2. Diferansiyel Geometrideki Bazı Temel Tanımlar

Tanım 2.2.1 (Yüzey): $D \subset \mathbb{R}^2$ açık ve bağlantılı bir küme olsun. $x: D \rightarrow \mathbb{R}^3$, $x(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$ şeklinde tanımlanan x bir homeomorfizm ise $x(D) = M$, ($M \subset \mathbb{R}^3$) kümesine yüzey denir.

Burada x diferansiyellenebilir olduğundan her bir $x_k(u, v)$ koordinat fonksiyonu D de her mertebeden sürekli kısmi türevlere sahiptir.

Tanım 2.2.2: Eğer görüntüsü M yüzeyi olan bir $x: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dönüşümü varsa bu durumda x 'e M yüzeyinin parametrizasyonu denir.



Şekil 2.2. Bir yüzeyin parametrizasyonu (Brilleslyper *et al.* 2012)

Tanım 2.2.3 (Eğri): $\mathbb{R}$ gerçel sayı doğrusunun bir $I = (a, b)$ açık aralığından $\mathbb{R}^3$ uzayına, türevlenebilir bir

$$\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3, \alpha(t) = (x_1, x_2, x_3) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$$

dönüşümü verilsin. (a, b) nın α altındaki görüntüsüne $\mathbb{R}^3$ de türevlenebilir parametrik eğri, α ya eğrinin bir parametrizasyonu ve

$$x_1 = \alpha_1(t), \quad x_2 = \alpha_2(t), \quad x_3 = \alpha_3(t)$$

denklemlerine ise eğrinin parametrik denklemleri denir.

α türevlenebilir olduğundan her $t \in I$ için $\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)$ fonksiyonları da türevlenebilirdir.

Tanım 2.2.4 (Teğet ya da Hız Vektörü): $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ olmak üzere türevlenebilir bir $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ dönüşümü verilsin. Buna göre $\alpha'(t) = (\alpha'_1(t), \alpha'_2(t), \alpha'_3(t)) \in \mathbb{R}^3$ vektörüne α eğrisinin t noktasındaki teğet vektörü (ya da hız vektörü) denir.

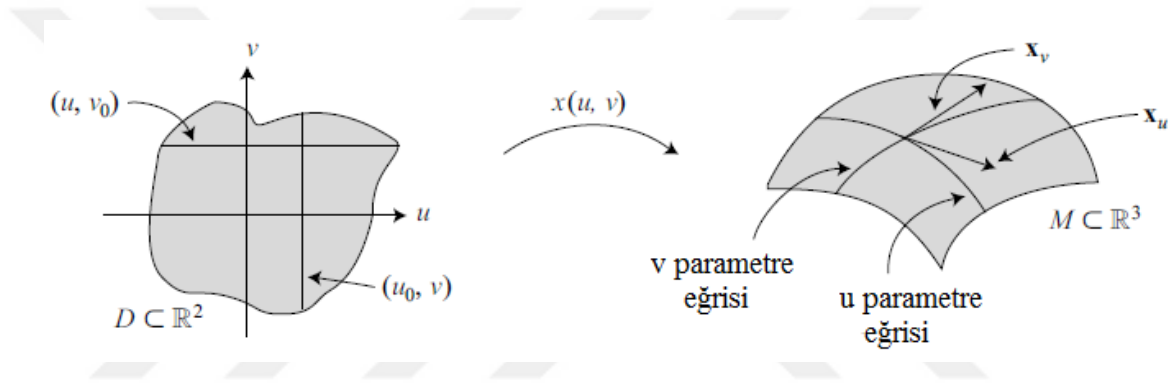
Tanım 2.2.5 (Düzgün Eğri): $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ bir türevlenebilir parametrik eğri olsun. Buna göre her $t \in I$ için $\alpha'(t) \neq 0$ ise α ya düzgün (regüler) eğri denir.

Tanım 2.2.6 (Parametre Eğrileri): $\mathbf{x}(u, v)$ dönüşümünün bir $M \subset \mathbb{R}^3$ yüzeyinin parametrizasyonu olduğunu kabul edelim. v_0 reel bir sabit olmak üzere $v = v_0$ ve u değişken olsun. Buna göre $\mathbf{x}(u, v_0)$ tek parametreye bağlı olur ve $\mathbf{x}(u, v_0)$ a u -parametre eğrisi denir. Benzer olarak, $u = u_0$ alınır ve v değişken kabul edilir ise $\mathbf{x}(u_0, v)$ şeklinde v -parametre eğrisi elde edilir.

u -parametre ve v -parametre eğrilerinin teğet vektörleri $\mathbf{x}$ in bileşen fonksiyonlarının, sırasıyla, u ve v ye göre diferansiyellenmesiyle hesaplanır. Yani $\mathbf{x}_u$ ve $\mathbf{x}_v$,

$$\mathbf{x}_u = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}, \frac{\partial x_2}{\partial u}, \frac{\partial x_3}{\partial u} \right), \quad \mathbf{x}_v = \left(\frac{\partial x_1}{\partial v}, \frac{\partial x_2}{\partial v}, \frac{\partial x_3}{\partial v} \right)$$

şeklinde tanımlanan teğet vektörlerdir. Yüzey üzerindeki her bir $p = \mathbf{x}(u_0, v_0)$ noktası için $\mathbf{x}_u$ ve $\mathbf{x}_v$ teğet vektörlerinde u_0 ve v_0 yerlerine yazılarak iki vektör elde edilir.



Şekil 2.3. u -parametre ve v -parametre eğrileri (Brilleslyper *et al.* 2012).

Burada $\mathbf{x}(u, v)$, M yüzeyinin bir parametrizasyonu olduğundan $\mathbf{x}_u$ ve $\mathbf{x}_v$ nin lineer bağımsız olması gerekir. $\mathbf{x}_u$ ve $\mathbf{x}_v$ nin spanı (yani $\mathbf{x}_u$ ve $\mathbf{x}_v$ nin lineer terkihi olarak yazılabilen tüm vektörlerin kümesi) teğet düzlem olarak adlandırılan bir düzlem oluşturur.

Tanım 2.2.7 (Teğet Düzlem): Bir p noktasında bir M yüzeyinin teğet düzlemi

$$T_p(M) = \{\mathbf{v} : \mathbf{v}, M \text{ yüzeyinin } p \text{ noktasındaki teğetidir.}\}$$

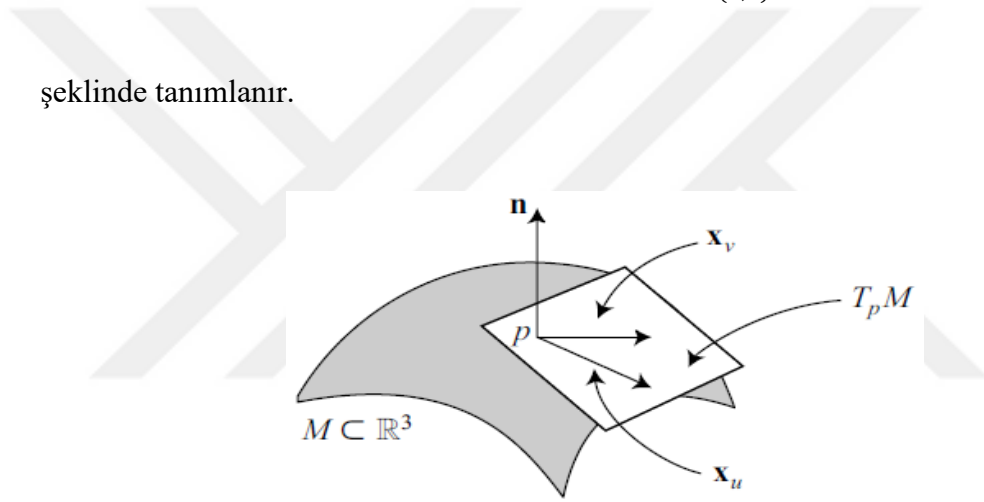
şeklinde tanımlanır (Brilleslyper *et al.* 2012).

$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v$ vektörel çarpımı teğet düzleme diktir. $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v$ vektörel çarpımı birim uzunluğu elde etmek için normalize edildiğinde, $p = x(a, b)$ noktasındaki birim normal vektör haline gelir.

Tanım 2.2.8 (Birim Normal Vektör): Bir $p = x(a, b)$ noktasında bir M yüzeyinin birim normal vektörü

$$\mathbf{n}(a, b) = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|} \Big|_{(a,b)}$$

şeklinde tanımlanır.



Şekil 2.4. $T_p(M)$ teğet düzlemi ve $\mathbf{n}$ birim normal vektörü (Brilleslyper *et al.* 2012).

Örnek 2.2.9: Bir tor, $0 \leq u, v \leq 2\pi$ olmak üzere

$$\mathbf{x}(u, v) = ((3 + 2 \cos v) \cos u, (3 + 2 \cos v) \sin u, 2 \sin v)$$

şeklinde parametrize edilir. $v_0 = \frac{\pi}{3}$ için u -parametre eğrisi

$$\mathbf{x}\left(u, \frac{\pi}{3}\right) = (4 \cos u, 4 \sin u, \sqrt{3})$$

ve $u_0 = \frac{\pi}{2}$ için v -parametre eğrisi

$$\mathbf{x}\left(\frac{\pi}{2}, v\right) = (0, 3 + 2 \cos v, 2 \sin v)$$

şeklindedir. Ayrıca

$$\mathbf{x}_u(u, v) = (-(3 + 2 \cos v) \sin u, (3 + 2 \cos v) \cos u, 0)$$

$$\mathbf{x}_v(u, v) = (-2 \sin v \cos u, -2 \sin v \sin u, 2 \cos v)$$

olur. u -parametre eğrisi $\mathbf{x}\left(u, \frac{\pi}{3}\right)$ ve v -parametre eğrisi $\mathbf{x}\left(\frac{\pi}{2}, v\right)$, tor üzerinde $p = \mathbf{x}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right)$ noktasında kesişir. p noktasındaki u ve v parametre eğrilerinin teğet vektörleri

$$\mathbf{x}_u\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right) = (-4, 0, 0)$$

$$\mathbf{x}_v\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right) = (0, -\sqrt{3}, 1)$$

dir. Bu teğet vektörleri $T_p(M)$ teğet düzlemini gererler. Buradan

$$\mathbf{x}_u\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right) \times \mathbf{x}_v\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right) = (-4, 0, 0) \times (0, -\sqrt{3}, 1) = (0, 4, 4\sqrt{3})$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\mathbf{n}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

olur.

Tanım 2.2.10 (Birim Hızlı Eğri): $\alpha: I = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi $s \in I$ yay uzunluğuna göre parametrelenmiş bir eğri olsun. Eğer $\alpha'(s)$ teğet vektörünün boyu $|\alpha'(s)| = 1$ ise α eğrisi bir birim hızlı eğridir.

Tanım 2.2.11(Eğrilik): $\alpha: I = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi $s \in I$ yay uzunluğuna göre parametrelenmiş bir eğri olsun. $|\alpha''(s)| = k(s)$ sayısına α eğrisinin s noktasındaki eğriliği denir.

Örnek 2.2.12: Bir tor, $0 \leq u, v \leq 2\pi$ olmak üzere

$$\mathbf{x}(u, v) = ((3 + 2 \cos v) \cos u, (3 + 2 \cos v) \sin u, 2 \sin v)$$

şeklinde parametrize edilir. u -parametre eğrileri ve v -parametre eğrileri için eğrilik hesaplınsın. v -parametre eğrileri (veya meridyenler), torun dikey dilimleri tarafından oluşturulan eğrilerdir ve dolayısıyla yarıçapı $b = 2$ olan dairelerdir. Bunların eğriliğini hesaplamak için u_0 sabit bir değer olmak üzere bu eğrilerin parametrizasyonu

$$\mathbf{x}(v) = \mathbf{x}(u_0, v) = ((3 + 2 \cos v) \cos u_0, (3 + 2 \cos v) \sin u_0, 2 \sin v)$$

şeklinde alınsın. $|\mathbf{x}'(v)| = 2$ olduğundan, $\mathbf{x}(v)$ 'yi birim hızlı eğri olarak yeniden parametrize etmek için v yerine $\frac{s}{2}$ yazılırsa

$$\mathbf{x}(s) = \left(\left(3 + 2 \cos \frac{s}{2} \right) \cos u_0, \left(3 + 2 \cos \frac{s}{2} \right) \sin u_0, 2 \sin \frac{s}{2} \right)$$

elde edilir. Daha sonra v -parametre eğrilerinin eğriliği $\left| \mathbf{x}'' \left(\frac{s}{2} \right) \right| = \frac{1}{2}$ olarak hesaplanır. u -parametre eğrileri (veya paraleller), torun yatay dilimleri tarafından oluşturulan eğrilerdir ve bu yüzden bu eğriler $v_0 \in (0, 2\pi)$ sabit olmak üzere $3 + 2 \cos v_0$ yarıçaplı dairelerdir. Yarıçap 1 ile 5 arasında değişir. Eğriler

$$\mathbf{x}(u) = \mathbf{x}(u, v_0) = ((3 + 2 \cos v_0) \cos u, (3 + 2 \cos v_0) \sin u, 2 \sin v_0)$$

şeklinde parametrize edilirler; öyle ki bu eğriler

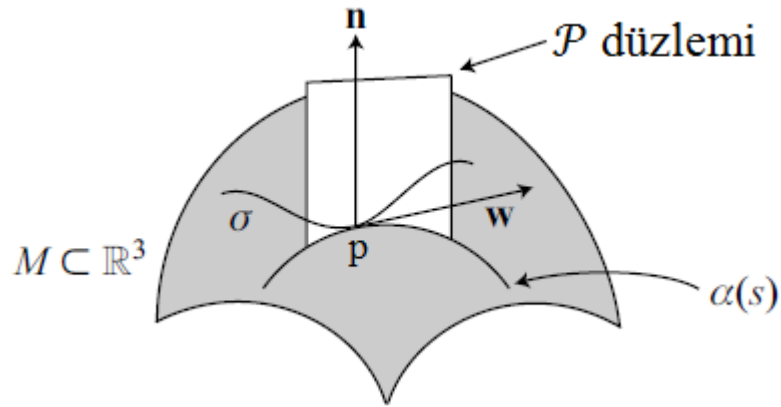
$$\mathbf{x}(s) = \left((3 + 2 \cos v_0) \cos \left(\frac{s}{3 + 2 \cos v_0} \right), (3 + 2 \cos v_0) \sin \left(\frac{s}{3 + 2 \cos v_0} \right), 2 \sin v_0 \right)$$

birim hızlı eğrisi olarak yeniden parametrize edilebilirler. Eğriliğin hesaplanması sonucunda $\frac{1}{5}$ ile 1 arasında değişen

$$|\mathbf{x}''(s)| = \frac{1}{3 + 2 \cos v_0}$$

ifadesi elde edilir.

Bir M yüzeyi üzerinde bir $\sigma(s)$ eğrisi alınsın. $p \in M$ noktasındaki σ eğrisinin birim teğet vektörü $\mathbf{w}$ ve birim normal vektörü $\mathbf{n}$ olmak üzere, $\mathbf{w}$ ve $\mathbf{n}$ nin gerdiği $\mathcal{P}$ düzlemi ile M yüzeyinin arakesiti bir $\alpha(s)$ eğrisi oluşturur.



Şekil 2.5. Normal eğrilik (Brilleslyper *et al.* 2012).

Tanım 2.2.13 (Normal Eğrilik): α eğrisi $p \in M$ noktasından geçen bir eğri olsun. α eğrisinin p noktasında $\mathbf{w}$ yönündeki normal eğriligi

$$\mathbf{k}_n(\mathbf{w}) = \langle \alpha'', \mathbf{n} \rangle$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\mathbf{n}$ ile α'' arasındaki açı θ olmak üzere

$$\langle \alpha'', \mathbf{n} \rangle = |\alpha''| |\mathbf{n}| \cos \theta$$

dır. Dolayısıyla $\langle \alpha'', \mathbf{n} \rangle$, α'' eğrilik vektörünün birim normali üzerine izdüşümüdür.

Tanım 2.2.14 (Asal Eğrilik): $\mathbf{k}_1 = \max \mathbf{k}_n(\mathbf{w})$ ve $\mathbf{k}_2 = \min \mathbf{k}_n(\mathbf{w})$ olmak üzere $\mathbf{k}_1$ ve $\mathbf{k}_2$ değerleri $p \in M$ noktasındaki asal eğrilikler olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.15 (Ortalama Eğrilik ve Gauss Eğriliği): M yüzeyinin p noktasındaki H ortalama eğriliği ve K Gauss eğriliği, asal eğrilikler türünden

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2), \quad K = \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.2.16 (I. Esas Form): $M \subset \mathbb{R}^3$ yüzeyinin p noktasındaki teğet düzlemi $T_p(M)$ ve $T_p(M)$ üzerinde ki iç çarpım $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ ile gösterilsin. Buna göre

$$I_p: T_p(M) \rightarrow \mathbb{R}, \quad I_p(\mathbf{w}) = \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle_p = |\mathbf{w}|^2 \geq 0$$

ile tanımlanan $T_p(M)$ üzerindeki I_p formu, $M \subset \mathbb{R}^3$ yüzeyinin p noktasındaki birinci esas formu olarak adlandırılır.

Şimdi birinci esas form, p noktasındaki $\mathbf{x}(u(s), v(s))$ parametrizasyonuna karşılık gelen $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ tabanına göre ifade edilsin. Bir $\mathbf{w} \in T_p(M)$ teğet vektörü, bir parametrik $\alpha(s) = \mathbf{x}(u(s), v(s))$ eğrisine teğet olduğu için zincir kuralından

$$\alpha'(s) = \mathbf{x}_u \frac{du}{ds} + \mathbf{x}_v \frac{dv}{ds}$$

olur. Bundan sonra $\frac{du}{ds}$, du ve $\frac{dv}{ds}$, dv ile gösterilecektir. α bir birim hızlı eğri olduğundan

$$\begin{aligned} 1 &= |\alpha'|^2 = \alpha' \cdot \alpha' \\ &= (\mathbf{x}_u du + \mathbf{x}_v dv) \cdot (\mathbf{x}_u du + \mathbf{x}_v dv) \\ &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u du^2 + 2\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v dudv + \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v dv^2 \\ &= Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \end{aligned} \tag{2.2}$$

şeklindedir. $E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u$, $F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v$ ve $G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v$ terimleri birinci esas formun katsayıları olarak bilinir. Bunlar bir yüzey üzerinde uzunlukların $\mathbb{R}^3$ deki ölçümleri ile karşılaştırıldığında nasıl değiştiklerini açıklar.

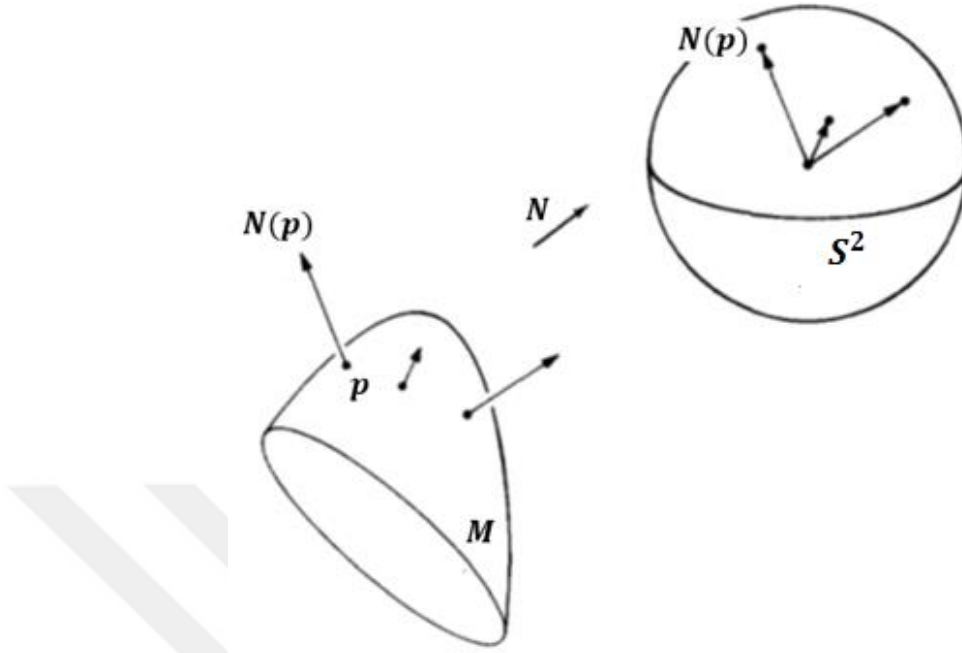
Tanım 2.2.17: $M \subset \mathbb{R}^3$ yüzeyinin açık bir $V \subset M$ alt kümesi için $N:V \rightarrow \mathbb{R}^3$ türevlenebilir dönüşümü her $q \in V$ noktasına, q noktasında bir birim normal vektör karşılık getiriyorsa, N dönüşümü V üzerinde türevlenebilir bir birim normal vektör alanıdır denir.

Eğer tüm yüzey üzerinde tanımlı türevlenebilir bir birim normal vektör alanı varsa bu düzgün yüzey yönlendirilebilirdir ve böyle bir N vektör alanı seçimine M yüzeyinin yönü denir.

Tanım 2.2.18 (Gauss Dönüşümü): Yönü N olan bir $M \subset \mathbb{R}^3$ yüzeyi alalım. $N:M \rightarrow \mathbb{R}^3$ dönüşümü

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

birim küresi üzerinde değerler alır. Bu biçimde tanımlanan $N:M \rightarrow S^2$ dönüşümüne M yüzeyinin Gauss dönüşümü denir (Do Carmo 2012).



Şekil 2.6. Gauss Dönüşümü (Do Carmo 2012)

Tanım 2.2.19 (II. Esas Form): N dönüşümünün $p \in M$ noktasındaki diferansiyeli dN_p olmak üzere $T_p(M)$ teğet düzlemi üzerinde $II_p(\mathbf{w}) = -\langle dN_p(\mathbf{w}), \mathbf{w} \rangle$ olarak tanımlanan $II_p(\mathbf{w})$ formuna, M yüzeyinin p noktasındaki ikinci esas formu denir.

$\mathbf{w}$ yönündeki normal eğrilik

$$k_n(\mathbf{w}) = \alpha'' \cdot \mathbf{n}$$

şeklinde tanımlanmıştı. Burada, $\alpha' \cdot \mathbf{n} = 0$ ve dolayısıyla $(\alpha' \cdot \mathbf{n})' = 0$ dır; yani $\alpha'' \cdot \mathbf{n} + \alpha' \cdot \mathbf{n}' = 0$ ve buna göre $\alpha'' \cdot \mathbf{n} = -\alpha' \cdot \mathbf{n}'$ olur. Benzer olarak $-\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{n}_u = \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{n}$ dir. Böylece,

$$\begin{aligned} k(\mathbf{w}) &= -\alpha' \cdot \mathbf{n}' \\ &= -(\mathbf{x}_u du + \mathbf{x}_v dv) \cdot (\mathbf{n}_u du + \mathbf{n}_v dv) \\ &= -\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{n}_u du^2 - (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{n}_v + \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{n}_u) dudv - \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{n}_v dv^2 \\ &= \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{n} du^2 + 2\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{n} dudv + \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{n} dv^2 \\ &= e du^2 + 2f dudv + g dv^2 \end{aligned}$$

olur. $e = \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{n}$, $f = \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{n}$ ve $g = \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{n}$ terimleri, ikinci esas formun katsayıları olarak adlandırılır. Bunlar yüzeyin teğet düzleminden ne kadar uzağa büküldüğünü ifade eder.

H ortalama eğriliğinin birinci ve ikinci esas formların katsayıları ile ifade edilişi

$$H = \frac{Eg + Ge - 2Ff}{2(EG - F^2)}$$

şeklindedir.

$\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ vektörleri $T_p(M)$ düzleminde iki dik birim vektör ve $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ eğrilikleri bunların $\alpha_1(s) = (u_1(s), v_1(s))$ ve $\alpha_2(s) = (u_2(s), v_2(s))$ eğrileri kullanılarak bulunan normal eğrilikleri olsun. Ayrıca, $p_1 = du_1 + idu_2$ ve $p_2 = dv_1 + idv_2$ olsun. Bu durumda, $\mathbf{k}_1$ ve $\mathbf{k}_2$ 'yi hesaplamak için ikinci esas form kullanılırsa

$$\begin{aligned} 2H &= \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 \\ &= e(du_1^2 + du_2^2) + 2f(du_1dv_1 + du_2dv_2) + g(dv_1^2 + dv_2^2) \\ &= e(p_1\overline{p_1}) + f(p_1\overline{p_2} + \overline{p_1}p_2) + g(p_2\overline{p_2}) \end{aligned}$$

elde edilir.

Bu ifade verilen eşitlikte p_1 ve p_2 görülmeyecek şekilde sadeleştirilirse (2.2) den

$$1 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

şeklinde olur. Ayrıca, $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ vektörleri dik ve dolayısıyla $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_2 \alpha_1'(s) \cdot \alpha_2'(s) = 0$ olduğundan

$$Edu_1du_2 + F(du_1dv_2 + du_2dv_1) + G(dv_1dv_2) = 0$$

olur.

Buradan,

$$\begin{aligned}
 Ep_1^2 + 2Fp_1p_2 + Gp_2^2 &= E[du_1^2 - du_2^2 + i2du_1du_2] \\
 &\quad + 2F[du_1dv_1 - du_2dv_2 + i(du_1dv_2 + du_2dv_1)] \\
 &\quad + G[dv_1^2 - dv_2^2 + i2dv_1dv_2] \\
 &= 2i[Edu_1du_2 + F(du_1dv_2 + du_2dv_1) + Gdv_1dv_2] \\
 &\quad + [Edu_1^2 + 2Fdu_1dv_1 + Gdv_1^2] \\
 &\quad - [Edu_2^2 + 2Fdu_2dv_2 + Gdv_2^2] \\
 &= 0 + 1 - 1 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
 p_1 &= \frac{-2Fp_2 \pm \sqrt{4F^2p_2^2 - 4EGp_2^2}}{2E} = \left(-\frac{F}{E} \pm i\frac{\sqrt{EG - F^2}}{E} \right) p_2, \\
 \bar{p}_1 &= \left(-\frac{F}{E} \pm i\frac{\sqrt{EG - F^2}}{E} \right) \bar{p}_2
 \end{aligned}$$

ve dolayısıyla,

$$p_1\bar{p}_1 = \left(\frac{F^2}{E^2} + \frac{EG - F^2}{E^2} \right) p_2\bar{p}_2 = \frac{G}{E} p_2\bar{p}_2 \quad (2.3)$$

ve

$$p_1\bar{p}_2 + \bar{p}_1p_2 = -\frac{2F}{E} p_2\bar{p}_2 \quad (2.4)$$

olur. Buna göre,

$$\begin{aligned} 2H = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 &= e(p_1\bar{p}_1) + f(p_1\bar{p}_2 + \bar{p}_1p_2) + g(p_2\bar{p}_2) \\ &= \left[e \frac{G}{E} + f \left(\frac{-2F}{E} \right) + g \right] p_2\bar{p}_2 \end{aligned}$$

elde edilir.

$p_2\bar{p}_2$ den kurtulmak için (2.2) kullanılırsa

$$\begin{aligned} Ep_1\bar{p}_1 + F(p_1\bar{p}_2 + \bar{p}_1p_2) + G(p_2\bar{p}_2) &= E(du_1^2 + du_2^2) \\ &\quad + 2F(du_1dv_1 + du_2dv_2) + G(dv_1^2 + dv_2^2) \\ &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

olur. (2.3) ve (2.4) kullanılarak

$$\begin{aligned} 2 &= E \left(\frac{G}{E} p_2\bar{p}_2 \right) + F \left(\frac{-2F}{E} p_2\bar{p}_2 \right) + G p_2\bar{p}_2 \\ \Rightarrow 2 &= \left[2G - \frac{2F^2}{E} \right] p_2\bar{p}_2 \\ \Rightarrow p_2\bar{p}_2 &= \frac{E}{EG - F^2} \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$H = \frac{1}{2} \left[e \frac{G}{E} + f \left(\frac{-2F}{E} \right) + g \right] p_2\bar{p}_2 = \frac{Eg + Ge - 2Ff}{2(EG - F^2)}$$

olur.

Tanım 2.2.20 (İzotermal Parametrizasyon): E, F ve G yüzeyin I . esas formunun katsayıları ve $\mathbf{x}$ yüzeyin parametrizasyonu olmak üzere $E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = G$ ve $F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 0$ ise $\mathbf{x}$ parametrizasyonu izotermaldir denir.

Tanım 2.2.21 (Minimal Yüzey): Bir minimal yüzey, her $p \in M$ noktasında ortalama eğriliği $H = 0$ olan bir M yüzeyidir.

Belli bir parametrizasyona sahip bir yüzeyin minimal olduğunu göstermek için

$$H = \frac{Eg + Ge - 2Ff}{2(EG - F^2)} = 0 \quad (2.5)$$

formülü kullanılır.

Tanım 2.2.22 (Eşlenik Minimal Yüzeyler): Bileşen fonksiyonları harmonik eşlenik çifti olan $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$, minimal yüzeylerin izotermal parametrizasyonları olsun. Yani,

$$\mathbf{x}_u = \mathbf{y}_v, \quad \mathbf{x}_v = -\mathbf{y}_u \quad (2.6)$$

olsun. Buna göre $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ eşlenik minimal yüzeyler olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.23: a yarıçaplı bir çember boyunca bu çembere dışardan teğet olan b yarıçaplı bir başka çemberin yuvarlanması sırasında, yuvarlanan çemberin üzerindeki bir noktanın çizdiği eğriye episikloid denir ve

$$\begin{aligned} x(\theta) &= (a + b) \cos \theta - b \cos \left(\left(\frac{a}{b} + 1 \right) \theta \right) \\ y(\theta) &= (a + b) \sin \theta - b \sin \left(\left(\frac{a}{b} + 1 \right) \theta \right) \end{aligned}$$

şeklinde parametrize edilir.

Tanım 2.2.24: a yarıçaplı bir çember boyunca bu çembere içerden teğet olan b yarıçaplı bir başka çemberin yuvarlanması sırasında, yuvarlanan çemberin üzerindeki bir noktanın çizdiği eğriye hiposikloid denir ve bu hiposikloid

$$x(\theta) = (a - b)\cos \theta + b \cos \left(\left(\frac{a}{b} - 1 \right) \theta \right)$$

$$y(\theta) = (a - b)\sin \theta + b \sin \left(\left(\frac{a}{b} - 1 \right) \theta \right)$$

parametrik denklemlerine sahiptir.

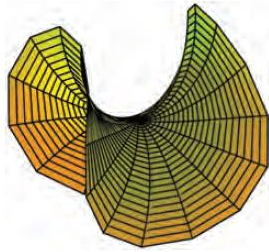
3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu başlık altında daha sonra verilecek olan temel sonuçların daha iyi anlaşılması için gerekli olan bazı açıklamalara ve teoremlere yer verilmiştir.

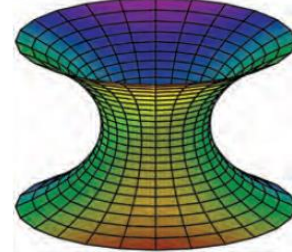
3.1. Minimal Yüzeyler

Bir M yüzeyi verilsin. Eğer M üzerinde yeterince küçük her bir basit kapalı C eğrisi için, C eğrisi tarafından sınırlanan M yüzeyinin bir kısmı, C yi içeren tüm yüzeyler arasında minimum alana sahipse bu durumda M yüzeyi bir minimal yüzey olarak adlandırılır (Duren 2004).

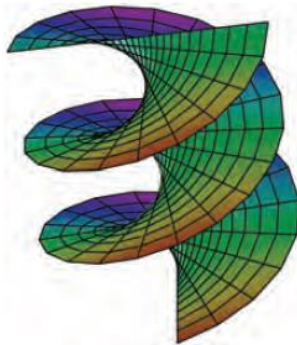
$\mathbb{R}^3$ de ki en basit minimal yüzey örneği düzlemdir. Diğer klasik minimal yüzey örnekleri katenoid, helikoid, Enneper yüzeyi ve Scherk yüzeyidir.



Enneper yüzeyi



Katenoid



Helikoid



Scherk'in iki katlı periyodik yüzeyi

Şekil 3.1. Bazı minimal yüzey örnekleri (Brilleslyper *et al.* 2012)

Aşağıda parametrik denklemleri ile birlikte bazı minimal yüzey örnekleri verilmiştir.

1. Düzlem:

$$x(u, v) = (u, v, 0).$$

2. Enneper Yüzeyi:

$$x(u, v) = \left(u - \frac{1}{3}u^3 + uv^2, v - \frac{1}{3}v^3 + u^2v, u^2 - v^2 \right)$$

3. Katanoid:

$$x(u, v) = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, av)$$

4. Helikoid:

$$x(u, v) = (a \sinh v \cos u, a \sinh v \sin u, au)$$

5. Scherk'in İki Kath Periyodik Yüzeyi:

$$x(u, v) = \left(u, v, \ln \left(\frac{\cos u}{\cos v} \right) \right)$$

6. Scherk'in Tek Kath Periyodik Yüzeyi:

$$x(u, v) = (\operatorname{arc} \sinh(u), \operatorname{arc} \sinh(v), \operatorname{arc} \sin(uv))$$

Örnek 3.1.1: Katenoidin bir minimal yüzey olduğunu gösterebilmek için (2.5) formülü kullanılır. Bir katenoid

$$x(u, v) = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, av)$$

şeklinde parametrize edilebilir. Bu parametrizasyon kullanılarak

$$\mathbf{x}_u = (-a \cosh v \sin u, a \cosh v \cos u, 0)$$

$$\mathbf{x}_v = (a \sinh v \cos u, a \sinh v \sin u, a)$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan, birinci esas formun katsayıları

$$E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = a^2 \cosh^2 v$$

$$F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 0$$

$$G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = a^2 \cosh^2 v$$

şeklinde bulunur. İkinci esas formun katsayılarını hesaplamak için, $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|}$ nin hesaplanması gerekir.

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = (a^2 \cosh v \cos u, a^2 \cosh v \sin u, -a^2 \cosh v \sinh v)$$

olduğundan

$$|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v| = a^2 \cosh^2 v$$

olur. Buna göre

$$\mathbf{n} = \left(\frac{\cos u}{\cosh v}, \frac{\sin u}{\cosh v}, -\frac{\sinh v}{\cosh v} \right)$$

dir. Ayrıca

$$\mathbf{x}_{uu} = (-a \cosh v \cos u, -a \cosh v \sin u, 0)$$

$$\mathbf{x}_{uv} = (-a \sinh v \sin u, a \sinh v \cos u, 0)$$

$$\mathbf{x}_{vv} = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, 0)$$

şeklinde olup ikinci esas formun katsayıları

$$e = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_{uu} = -a$$

$$f = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_{uv} = 0$$

$$g = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_{vv} = a$$

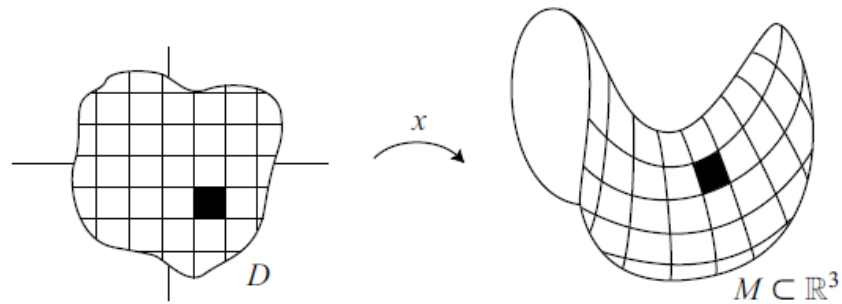
bulunur. Böylece

$$H = \frac{Eg + Ge - 2Ff}{2(EG - F^2)} = 0$$

elde edilir. Yani katenoid bir minimal yüzeydir (Brilleslyper *et al.* 2012).

Yüzeylerin temel özelliklerini incelerken yüzeyin geometrisini yansıtacak parametreler seçmek faydalıdır. İzotermal parametreler açıları koruyan parametrelerdir. Bir başka deyişle, parametre düzlemindeki iki eğri arasındaki açı yüzey üzerinde bunlara karşılık gelen iki eğri arasındaki açığa eşittir. Burada eğriler parametrizasyonları ile yönlendirilirler ve bu eğriler arasındaki açının, bu eğrilerin teğet vektörleri arasındaki açı olduğu anlaşılır (Duren 2004).

Bu nedenle, bazen izotermal bir parametrizasyona konform parametrizasyon denir.



Şekil 3.2. Bir izotermal parametrizasyon küçük kareleri küçük karelere dönüştürür (Brilleslyper *et al.* 2012).

Örnek 3.1.2: Katenoid için

$$x(u, v) = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, av)$$

parametrizasyonu izotermaldir; çünkü Örnek 3.1.1 de $E = a^2 \cosh^2 v = G$ ve $F = 0$ eşitlikleri elde edilmiştir (Brilleslyper *et al.* 2012).

Teorem 3.1.3: $\mathbb{R}^3$ de ki her minimal yüzey bir izotermal parametrizasyona sahiptir (Osserman 1986).

Teorem 3.1.4: M izotermal parametrizasyona sahip bir yüzey olsun. Buna göre M in minimal bir yüzey olması için gerek ve yeter şart *II*. esas formun e ve g katsayıları için $e = -g$ olmasıdır (Brilleslyper *et al.* 2012).

Örnek 3.1.1 de katenoidin

$$x(u, v) = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, av)$$

izotermal parametrizasyonu için $e = -g$ olduğu görülür.

Eğer $f(z) = x(u, v) + iy(u, v)$ analitik bir fonksiyon ise, o zaman f fonksiyonu Cauchy-Riemann denklemlerini sağlar. Yani

$$x_u = y_v, \quad x_v = -y_u$$

olur ve y, x in harmonik eşleniği olarak adlandırılır. Ayrıca, f analitik ise

$$f'(z) = x_u + iy_u$$

olur. Bu minimal bir yüzeyin bir başka minimal yüzeye (eşlenik minimal yüzeye) ilişkilendirilmesini sağlar.

Örnek 3.1.5:

$$\mathbf{x}(u, v) = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, av)$$

ile parametrize edilen katenoidin eşlenik yüzeyi bulunmaya çalışılsın. $\mathbf{y}(u, v)$ de bu katenoidin bir parametrizasyonu olsun. (2.6) denkleminin birinci kısmından

$$\mathbf{y}_v = \mathbf{x}_u = (-a \cosh v \sin u, a \cosh v \cos u, 0)$$

olduğu görülür. Bu ifadenin v ye göre integrali alınır, $F_k(u)$ v den bağımsız bir fonksiyon olmak üzere

$$\mathbf{y} = (-a \sinh v \sin u + F_1(u), a \sinh v \cos u + F_2(u), F_3(u))$$

olur. Benzer şekilde (2.6) denkleminin ikinci kısmından

$$\mathbf{y} = (-a \sinh v \sin u + G_1(v), a \sinh v \cos u + G_2(v), -au + G_3(v))$$

elde edilir. Bu ifadeler eşitlenirse

$$\mathbf{y} = (-a \sinh v \sin u + K_1, a \sinh v \cos u + K_2, -au + K_3)$$

olur. u ve v nin yerine $u = \tilde{u} - \frac{\pi}{2}$, $v = \tilde{v}$ yazılır ve $K_1 = 0$, $K_2 = 0$ ve $K_3 = -a\frac{\pi}{2}$ olarak alınır, minimal yüzeyin geometrisini etkilemez ve bir helikoidin

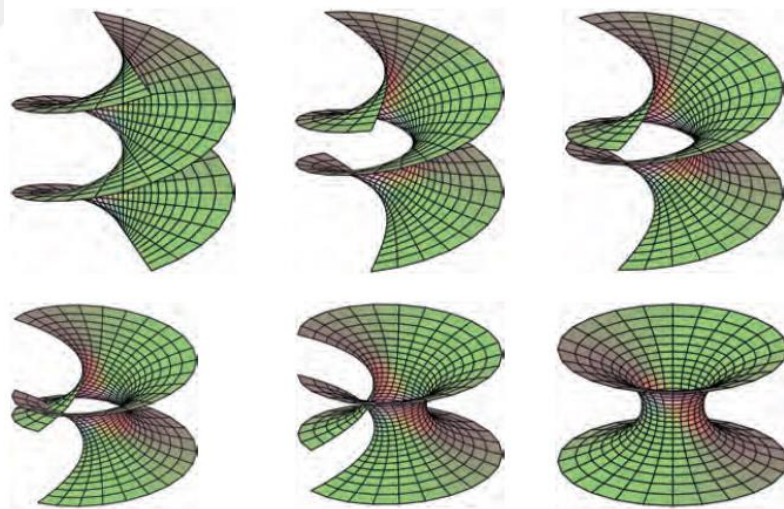
$$\mathbf{y}(\tilde{u}, \tilde{v}) = (a \sinh \tilde{v} \cos \tilde{u}, a \sinh \tilde{v} \sin \tilde{u}, -a\tilde{u})$$

parametrizasyonunu verir. Bu nedenle katenoidin eşlenik yüzeyi helikoiddir (Brilleslyper *et al.* 2012).

İki eşlenik minimal yüzey, $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$z = (\cos t)\mathbf{x} + (\sin t)\mathbf{y}$$

parametrizasyonu ile tek parametrelili minimal yüzeyler ailesi aracılığıyla birleştirilebilir. $t = 0$ olduğu zaman $\mathbf{x}$ ile parametrize edilmiş minimal yüzeye ve $t = \frac{\pi}{2}$ olduğu zaman $\mathbf{y}$ ile parametrize edilmiş minimal yüzeye sahip olunur. $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ için ise bağlantılı yüzeyler olarak bilinen minimal yüzeylerin sürekli bir parametresi elde edilir. Bir minimal yüzey diğer bir minimal yüzeye sürekli olarak dönüştürebilir. Böylece arada olan tüm yüzeyler de minimaldir. Örnek 3.1.5’de Helikoid ve katenoidin eşlenik yüzeyler olduğu gösterilmiştir. Bunların ve bağlantılı yüzeylerin görüntüleri Şekil 3.3’te gösterilmiştir.



Şekil 3.3. Helikoid, bazı bağlantılı yüzeyler ve katenoid (Brilleslyper *et al.* 2012).

Teorem 3.1.6: $\mathbf{x}, \mathbf{y} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ eşlenik minimal yüzeylerin izotermal parametrizasyonları olsun. Bu durumda $(u_0, v_0) \in D$ için, yüzey birim normali bağlantılı yüzeyler için aynıdır (Brilleslyper *et al.* 2012).

İspat: $(u_0, v_0) \in D$ olsun. $\mathbf{n}^x$ ve $\mathbf{n}^y$, sırasıyla $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ için yüzey normalini temsil etsin. O halde eşlenik yüzeylerin tanımından $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ aynı birim normale sahiptir, çünkü

$$\mathbf{n}^x = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|} = \frac{\mathbf{y}_v \times -\mathbf{y}_u}{|\mathbf{y}_v \times -\mathbf{y}_u|} = \frac{\mathbf{y}_u \times \mathbf{y}_v}{|\mathbf{y}_u \times \mathbf{y}_v|} = \mathbf{n}^y$$

dir. Bunun bağlantılı yüzeyler için doğru olduğunu göstermek için $\mathbf{z} = (\cos t)\mathbf{x} + (\sin t)\mathbf{y}$ bağlantılı yüzeylerin parametrizasyonu olsun. Buna göre,

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_u \times \mathbf{z}_v &= (\cos t \mathbf{x}_u + \sin t \mathbf{y}_u) \times (\cos t \mathbf{x}_v + \sin t \mathbf{y}_v) \\ &= \cos^2 t (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) + \cos t \sin t (\mathbf{x}_u \times \mathbf{y}_v) + \cos t \sin t (\mathbf{y}_u \times \mathbf{x}_v) \\ &\quad + \sin^2 t (\mathbf{y}_u \times \mathbf{y}_v) \\ &= \cos^2 t (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) + \cos t \sin t (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_u) + \cos t \sin t (-\mathbf{x}_v \times \mathbf{x}_u) \\ &\quad + \sin^2 t (-\mathbf{x}_v \times \mathbf{x}_u) \\ &= \cos^2 t (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) + \cos t \sin t (0) + \cos t \sin t (0) + \sin^2 t (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) \\ &= \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \end{aligned}$$

olur.

3.2. Weierstrass Gösterimi

Bu bölümde harmonik ünivalent fonksiyonlarla minimal yüzeyler arasında önemli bir bağlantı sağlayan Weierstrass gösterimine yer verilmiştir.

Teorem 3.2.1: Eğer $\mathbf{x}$ parametrizasyonu izotermal ise, bu durumda E, I . esas formun bir katsayısı ve $\mathbf{H}$ ortalama eğrilik olmak üzere

$$\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = 2E\mathbf{H}\mathbf{n}$$

şeklinde olur (Brilleslyper *et al.* 2012).

Minimal bir yüzey için $\mathbf{H} \equiv 0$ dır. Dolayısıyla, Teorem 3.2.1 den $\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} \equiv 0$ olduğu görülür. Bu bir Laplace denklemidir ve harmonik fonksiyonlarla ilişkilidir.

Eğer $\varphi_{uu} + \varphi_{vv} = 0$ ise, $\varphi(u, v)$ reel değerli bir harmonik fonksiyondur. Bu aynı zamanda bir yüzeyin minimal olmasına yol açar. Sonuç 3.2.2, bu bölümde verilecek olan Weierstrass gösterimi kullanılarak minimal yüzeylerin açık bir şekilde tanımlanmasını sağlar.

Sonuç 3.2.2: Bir $\mathbf{x}(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$ izotermal parametrizasyonuna sahip olan bir M yüzeyinin minimal olması için gerek ve yeter şart x_1, x_2 ve x_3 'ün harmonik olmasıdır (Brilleslyper 2012).

Bu sonuca göre minimal bir yüzeye sahip olmak için gerek ve yeter şart koordinat fonksiyonlarının harmonik olmasıdır. Bu, bir yüzeyin minimal olduğunu kanıtlamanın başka bir yolunu sunar.

İspat: M minimal bir yüzey ise $\mathbf{H} = 0$ dır ve Teorem 3.2.1 den dolayı $\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = 0$ olur. Buna göre koordinat fonksiyonları harmoniktir.

x_1, x_2 ve x_3 ün harmonik olduğu kabul edilsin. O zaman $\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = 0$ olur. Yani, Teorem 3.2.1 den dolayı $2(\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u)\mathbf{H}\mathbf{n} = 0$ elde edilir. Fakat $\mathbf{n} \neq 0$ ve $E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u \neq 0$ dır. Buna göre $\mathbf{H} = 0$ olur ve M bir minimal yüzeydir.

M , $\mathbf{x}(u, v)$ izotermal parametrizasyonuna sahip olan minimal bir yüzey ve $z = u + iv$ kompleks düzlemde bir nokta olsun, dolayısıyla $\bar{z} = u - iv$ dir. u ve v , z ve $\bar{z}$ ye bağlı olarak

$$u = \frac{z + \bar{z}}{2} \text{ ve } v = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

şeklinde yazılır. M minimal yüzeyinin parametrizasyonu z ve $\bar{z}$ kompleks değişkenleri açısından

$$\mathbf{x}(z, \bar{z}) = (x_1(z, \bar{z}), x_2(z, \bar{z}), x_3(z, \bar{z}))$$

eşitliği ile ifade edilebilir.

Aşağıdaki açıklamalar, minimal yüzeyler için Weierstrass gösterimini oluşturmak amacıyla kullanılacaktır.

Düzgün bir M yüzeyi, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ve $U = (u, v)$ sırasıyla $\mathbb{R}^3$ ve $\mathbb{R}^2$ de noktalar olmak üzere küçük bir gösterim değişikliği ile $\mathbf{x} = \Phi(U)$ parametrik gösterimine sahip olsun.

$z = u + iv$ kompleks değişkenini göz önünde bulundurarak

$$2 \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = \Phi$$

işlemi ile kompleks değerli φ_k fonksiyonları oluşturulsun. Bir başka deyişle,

$$\varphi_k = 2 \frac{\partial x_k}{\partial z} = \frac{\partial x_k}{\partial u} - i \frac{\partial x_k}{\partial v}, \quad k = 1, 2, 3$$

şeklinde olsun. $(\varphi_1)^2 + (\varphi_2)^2 + (\varphi_3)^2$, Φ^2 ile gösterilsin.

$\frac{\partial f}{\partial z}$ kompleks türev operatörü uygulanırsa ve terimlerin kareleri alınırsa

$$(\varphi_k)^2 = \left(2 \frac{\partial x_k}{\partial z}\right)^2 = \left(\frac{\partial x_k}{\partial u} - i \frac{\partial x_k}{\partial v}\right)^2 = \left[\left(\frac{\partial x_k}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial x_k}{\partial v}\right)^2 - 2i \frac{\partial x_k}{\partial u} \frac{\partial x_k}{\partial v}\right]$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial u} \right)^2 = \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial x_k}{\partial u} \right)^2$$

ve benzer şekilde

$$\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial x_k}{\partial v} \right)^2$$

olur. Φ^2 , M yüzeyinin I . esas formundaki E, F ve G katsayıları cinsinden

$$\begin{aligned} \Phi^2 &= \sum_{k=1}^3 \varphi_k^2 \\ &= \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial x_k}{\partial u} \right)^2 - \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial x_k}{\partial v} \right)^2 - \sum_{k=1}^3 2i \frac{\partial x_k}{\partial u} \frac{\partial x_k}{\partial v} \\ &= (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u - \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v - 2i(\mathbf{x}_u \mathbf{x}_v)) \\ &= E - G - 2iF \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} |\Phi|^2 &= \sum_{k=1}^3 |\varphi_k|^2 \\ &= \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial x_k}{\partial u} \right)^2 + \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial x_k}{\partial v} \right)^2 \\ &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u + \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v \\ &= E + G \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Yani,

$$\sum_{k=1}^3 \varphi_k^2 = E - G - 2iF, \quad \sum_{k=1}^3 |\varphi_k|^2 = E + G \quad (3.1)$$

olur. Şimdi M yüzeyinin parametrik gösteriminin izotermal olduğu kabul edilsin. Buna göre $F = 0$, $E = G > 0$ ve buradan

$$\sum_{k=1}^3 \varphi_k(z)^2 = 0, \quad \sum_{k=1}^3 |\varphi_k(z)|^2 > 0 \quad (3.2)$$

dır. Eğer M bir minimal yüzey ise x_k koordinatları harmonik ve dolayısıyla φ_k fonksiyonları analitiktir. Bu nedenle her düzgün minimal yüzeye (3.2) deki özelliklere sahip olan üç analitik φ_k fonksiyonu karşılık gelir. Ayrıca bu süreç tersinirdir ve terside doğrudur. Bir başka deyişle, (3.2) koşulunu sağlayan her üç analitik fonksiyon bir düzgün minimal yüzey oluşturur.

Bu sonuç aşağıdaki teorem ile daha açık bir şekilde ifade edilebilir.

Teorem 3.2.3: $x = \Phi(U)$ düzgün bir minimal yüzeyin izotermal bir parametrizasyonu ve $z = u + iv$ olsun. Buna göre,

$$\varphi_k = 2 \frac{\partial x_k}{\partial z}, \quad k = 1, 2, 3$$

fonksiyonları analitiktir ve (3.2) deki özelliklere sahiptir. Tersine $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$, (3.2) deki özellikleri sağlayan basit bağlantılı bir bölgede analitik olan fonksiyonların bir üçlüsü olsun. O halde,

$$x_k = \operatorname{Re} \left\{ \int \varphi_k(z) dz \right\}, \quad k = 1, 2, 3 \quad (3.3)$$

fonksiyonları düzgün bir minimal yüzeyin izotermal bir parametrizasyonunu verir (Brilleslyper *et al.* 2012).

İspat: Bir minimal yüzeyde x_k koordinatları harmonik ve dolayısıyla φ_k fonksiyonları analitiktir. Böylece her düzgün minimal yüzeye (3.2) deki özelliklere sahip üç analitik φ_k fonksiyonu karşılık gelir. Tersine yüzeyin parametrizasyonu $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ olarak verilirse, x_k için $\varphi_k = \frac{\partial x_k}{\partial z}$ ifadesinin bulunması gerekir. Burada x_k , z ve $\bar{z}$ şeklinde iki değişkenli bir fonksiyondur. Ancak tek bir değişkene göre integrallenebilecek bir gösterim elde edilmelidir. Bunun için diferansiyelle ilgili bazı özelliklerin kullanılması gerekir. x_k , u ve v şeklinde iki değişkenli bir fonksiyon olduğundan

$$dx_k = \frac{\partial x_k}{\partial u} du + \frac{\partial x_k}{\partial v} dv \quad (3.4)$$

yazılabilir. Ayrıca, $dz = du + idv$ ve φ_k fonksiyonları analitik olduğundan

$$\begin{aligned} \varphi_k dz &= \frac{\partial x_k}{\partial z} dz = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_k}{\partial u} - i \frac{\partial x_k}{\partial v} \right) (du + idv) \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial x_k}{\partial u} du + \frac{\partial x_k}{\partial v} dv + i \left(\frac{\partial x_k}{\partial u} dv - \frac{\partial x_k}{\partial v} du \right) \right], \\ \overline{\varphi_k} d\bar{z} &= \overline{\varphi_k} d\bar{z} = \frac{\overline{\partial x_k}}{\partial \bar{z}} d\bar{z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_k}{\partial u} + i \frac{\partial x_k}{\partial v} \right) (du - idv) \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial x_k}{\partial u} du + \frac{\partial x_k}{\partial v} dv - i \left(\frac{\partial x_k}{\partial u} dv - \frac{\partial x_k}{\partial v} du \right) \right] \end{aligned}$$

olur. Buna ek olarak

$$\frac{\partial x_k}{\partial u} du + \frac{\partial x_k}{\partial v} dv = \varphi_k dz + \overline{\varphi_k} d\bar{z} = 2\operatorname{Re}\{\varphi_k dz\} \quad (3.5)$$

elde edilir. (3.4) ve (3.5) birleştirilerek

$$dx_k = 2\operatorname{Re}\{\varphi_k dz\}$$

yazılır. Bu nedenle $x_k = 2\operatorname{Re} \int \varphi_k dz + c_k$ dır. c_k sabiti eklendiğinde görüntü sabit miktarınca ötelenir ve koordinat fonksiyonu 2 ile çarpıldığında yüzey genişlediği için sabitler yüzeyin geometrik şeklini etkilemez. Dolayısıyla, koordinat fonksiyonu

$$x_k = \operatorname{Re} \int \varphi_k dz$$

şeklinde alınabilir. Bu şekilde tanımlanan $x_k = x_k(z)$ fonksiyonları bir M yüzeyinin parametrik bir gösterimini verir ve bu fonksiyonlar harmoniktir.

$$\frac{1}{2}\varphi_k = \frac{\partial x_k}{\partial z}, \quad k = 1, 2, 3$$

olduğu göz önünde bulundurulur ve (3.1) deki formüller kullanılırsa, (3.2) deki özelliklere göre $E = G > 0$ ve $F = 0$ olduğu görülür. Buna göre, M düzgün bir yüzeydir ve parametrik gösterimi izotermaldir. Sonuç olarak,

$$\mathbf{x} = \left(\operatorname{Re} \int \varphi_1(z) dz, \operatorname{Re} \int \varphi_2(z) dz, \operatorname{Re} \int \varphi_3(z) dz \right) \quad (3.6)$$

parametrizasyonu minimal bir yüzey tanımlar; yani M minimal bir yüzeydir.

Lemma 3.2.4: Herhangi bir $D \subset \mathbb{C}$ bölgesinde p analitik bir fonksiyon ve q da meromorf bir fonksiyon olmak üzere, q nun m . mertebeden kutubu olan nokta p nin en az $2m$. mertebeden bir sıfırı ise,

$$\varphi_1 = p(1 + q^2), \quad \varphi_2 = -ip(1 - q^2), \quad \varphi_3 = -2ipq \quad (3.7)$$

funksiyonları D bölgesinde analitiktir ve

$$(\varphi_1)^2 + (\varphi_2)^2 + (\varphi_3)^2 = 0 \quad (3.8)$$

dır. Tersine, $\varphi_2 = i\varphi_1$ eşitliği olmadıkça (3.8) özelliğine sahip D bölgesinde analitik olan her $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ fonksiyonlarının sıralı üçlüsü (3.7) de ki yapıya sahiptir. Bu gösterim tektir (Duren 2004).

İspat: (3.7) de ki yapıya sahip her üç fonksiyonun (3.8) özelliklerini sağladığını göstermek gerekir. p nin sıfırları üzerindeki şart φ_k fonksiyonlarının analitik olmasını garantiler. Aksine, φ_k fonksiyonları (3.8) özelliğine sahip herhangi bir analitik fonksiyon olsun. Eğer $\varphi_2 \neq i\varphi_1$ ise $2pq = i\varphi_3$ olacak şekilde

$$p = \frac{1}{2}(\varphi_1 + i\varphi_2), \quad q = \frac{i\varphi_3}{\varphi_1 + i\varphi_2} \quad (3.9)$$

tanımlanabilir. (3.7) nin diğer iki kısmını doğrulamak için (3.8) koşulu

$$(\varphi_1 + i\varphi_2)(\varphi_1 - i\varphi_2) = -\varphi_3^2$$

şeklinde yeniden yazılır ve

$$pq^2 = \frac{1}{2}(\varphi_1 - i\varphi_2)$$

olduğu görülür. Buradan,

$$p(1 + q^2) = \varphi_1, \quad i\varphi_2 = p(1 - q^2)$$

olur. (3.7) de ki denklemler (3.9) da olduğu gibi p ve q ya göre çözülebileceğinden bu gösterim tektir. Eğer $\varphi_2 = i\varphi_1$ ise o halde $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 = 0$ olur ve $\varphi_3 = 0$ dır. Bu

durumda (3.7) gösteriminin tek bir şekilde belirlenmiş $p = \varphi_1$ ve $q = 0$ gösterimine sahip olduğu görülür. Bu durumda, ilgili minimal yüzey bir yatay düzlemdir.

Teorem 3.2.5 ((p, q) Weierstrass Gösterimi): $D \subset \mathbb{C}$ bölgesinde p analitik bir fonksiyon, q meromorf bir fonksiyon ve $a \in D$ bir sabit olmak üzere p, q nun m . dereceden bir kutup noktasında en az $2m$. dereceden bir sifıra sahip olsun. Bu durumda, her düzgün minimal yüzey

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (x_1(z), x_2(z), x_3(z)) \\ &= \left(\operatorname{Re} \left\{ \int_a^z p(1 + q^2) dz \right\}, \operatorname{Re} \left\{ \int_a^z -ip(1 - q^2) dz \right\}, \operatorname{Re} \left\{ \int_a^z -2ipq dz \right\} \right) \end{aligned}$$

şeklinde bir lokal izotermal parametrik gösterime sahiptir (Brilleslyper *et al.* 2012).

Örnek 3.2.6: $p(z) = 1$, $q(z) = iz$ fonksiyonları için

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \left(\operatorname{Re} \left\{ \int_0^z (1 - z^2) dz \right\}, \operatorname{Re} \left\{ \int_0^z -i(1 + z^2) dz \right\}, \operatorname{Re} \left\{ \int_0^z 2z dz \right\} \right) \\ &= \left(\operatorname{Re} \left\{ z - \frac{1}{3}z^3 \right\}, \operatorname{Re} \left\{ -i \left(z + \frac{1}{3}z^3 \right) \right\}, \operatorname{Re} \{ z^2 \} \right) \end{aligned}$$

gösterimi elde edilir. Burada $z = u + iv$ olarak alınırsa

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(u - \frac{1}{3}u^3 + uv^2, v - \frac{1}{3}v^3 + u^2v, u^2 - v^2 \right)$$

şeklindeki Enneper yüzeyi elde edilir (Brilleslyper *et al.* 2012).

Örnek 3.2.7: $\mathbb{C} - \{0\}$ bölgesinde $p(z) = 1$ ve $q(z) = \frac{1}{z}$ olsun. $q, z_0 = 0$ da 1. dereceden bir kutup noktasına sahip olan meromorf bir fonksiyondur; ancak $p, z_0 = 0$ da 2.

dereceden bir sifıra sahip değildir. Bu Teorem 3.2.5 teki şartları bozmaz; çünkü bölge $\mathbb{C} - \{0\}$ dır. Burada p ve q fonksiyonlarının bir helikoid oluşturduğunu göstermek için (p, q) Weierstrass gösterimi kullanılsın ve $z = u + iv$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}x_1 &= \operatorname{Re} \int_1^z \left(1 + \frac{1}{z^2}\right) dz = \operatorname{Re} \left(z - \frac{1}{z}\right) = u - \frac{u}{u^2 + v^2} \\x_2 &= \operatorname{Re} \int_1^z -i \left(1 - \frac{1}{z^2}\right) dz = \operatorname{Im} \left(z + \frac{1}{z}\right) = v - \frac{v}{u^2 + v^2} \\x_3 &= \operatorname{Re} \int_1^z -2i \frac{1}{z} dz = 2\operatorname{Im}(\log z) = 2 \arg z = 2 \arctan \left(\frac{v}{u}\right)\end{aligned}$$

olmak üzere $\mathbf{x}(u, v) = (x_1, x_2, x_3)$ parametrizasyonu elde edilir.

Bu parametrizasyon helikoid için kullanılan

$$\tilde{\mathbf{x}}(\tilde{u}, \tilde{v}) = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) = (a \sinh \tilde{v} \cos \tilde{u}, a \sinh \tilde{v} \sin \tilde{u}, a\tilde{u})$$

parametrizasyonundan farklıdır. $\mathbf{x}$ in görüntüsünün bir helikoid olduğunu göstermek için $\mathbf{x}$ i $\tilde{\mathbf{x}}$ ye çevirecek bir denklem bulunmaya çalışılırsa

$$\begin{aligned}x_1^2 + x_2^2 &= (u^2 + v^2) - 2 + \frac{1}{u^2 + v^2} \\ \tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 &= a^2 \sinh^2 \tilde{v} = a^2 \left(\frac{e^{\tilde{v}} - e^{-\tilde{v}}}{2} \right)^2\end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Yukarıdaki denklemlerin sağ tarafları eşitlenir ve $a = 2$ olarak alınır

$$u^2 + v^2 = e^{2\tilde{v}}$$

olur. $x_3 = \tilde{x}_3$ olmak üzere

$$\frac{v}{u} = \tan \tilde{u}$$

olduğu görülür. Son iki denklem u ve v ye göre çözülürse

$$u = e^{\tilde{v}} \cos \tilde{u} \text{ ve } v = e^{\tilde{v}} \sin \tilde{u}$$

bulunur. Eğer u ve v , $x(u, v)$ de yerine yazılırsa helikoid için $\tilde{x}(\tilde{u}, \tilde{v})$ parametrizasyonu elde edilir (Brilleslyper *et al.* 2012).

3.3. Minimal Yüzeyler ve Harmonik Ünivalent Dönüşümler

Bir minimal yüzey incelendiğinde x parametrizasyonundaki her bir koordinat fonksiyonunun, φ_k analitik olmak üzere, $x_k = \operatorname{Re} \int \varphi_k dz$ formuna sahip olduğu bir önceki bölümde gösterilmiştir. Analitik bir fonksiyonun reel kısmı harmonik bir fonksiyon olduğundan, her bir x_k koordinat fonksiyonunun harmonik olduğu görülür. Ayrıca, $(\varphi_1)^2 + (\varphi_2)^2 + (\varphi_3)^2 = 0$ olur. Burada φ_1 ve φ_2 fonksiyonları bilinirse, φ_3 fonksiyonu belirlenebilir. Bu nedenle, minimal yüzeyler için Weierstrass gösterimini elde etmenin bir yolu, x_1 ve x_2 gibi iki harmonik fonksiyonun kullanılmasıdır. Böylece, kompleks düzlemde harmonik dönüşümler incelenerek minimal yüzeyler araştırılabilir. Bu dönüşümler, düzlemsel harmonik dönüşümler olarak bilinirler.

Bu bölümde, Bölüm 3.2 deki p ve q fonksiyonlarının yerine düzlemsel harmonik dönüşümler kullanılarak oluşturulan başka bir Weierstrass gösterimine yer verilecektir.

Düzlemsel harmonik bir dönüşüm, u ve v reel harmonik fonksiyonlar olmak üzere $f = u(x, y) + iv(x, y)$ şeklinde bir fonksiyondur. Düzlemsel harmonik dönüşümler analitik fonksiyonlardan çok daha geneldir; çünkü u ve v nin harmonik eşlenikler olması gerekmez. Aşağıda vereceğimiz teorem, düzlemsel harmonik dönüşümlerin analitik fonksiyonlarla ilişkilendirilmesini sağlar.

Teorem 3.3.1: u ve v reel harmonik fonksiyonlar olmak üzere $f = u + iv$ olsun. Eğer D basit bağlantılı bir bölge ve $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ ise o zaman $f = h + \overline{g}$ olacak şekilde h ve g analitik fonksiyonları vardır (Brilleslyper *et al.* 2012).

Örnek 3.3.2: $x = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ ve $y = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$ fonksiyonları kullanılarak, $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$

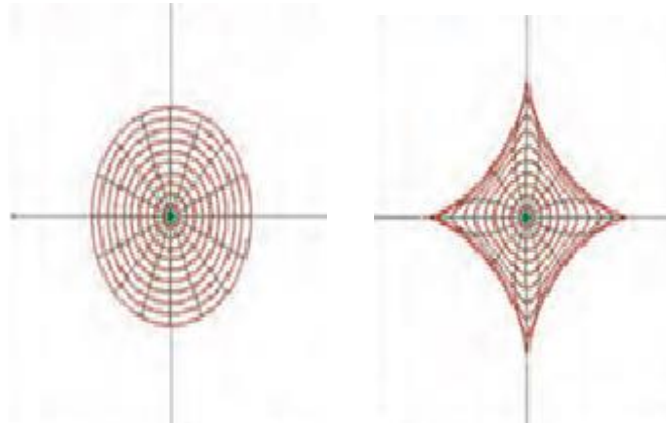
$$f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) = \left(\frac{1}{3}x^3 - xy^2 + x\right) + i\left(\frac{1}{3}y^3 - x^2y + y\right)$$

şeklinde tanımlanan f düzlemsel harmonik dönüşümü

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)} = z + \frac{1}{3}\overline{z}^3$$

olarak yazılabilir.

$\mathbb{D}$ nin f altındaki görüntüsü dört köşe noktasına sahip olan bir hiposikloittir (Brilleslyper *et al.* 2012).



Şekil 3.4. $f(z) = z + \frac{1}{3}\overline{z}^3$ harmonik fonksiyonu altında $\mathbb{D}$ nin görüntüsü (Brilleslyper *et al.* 2012).

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$$

harmonik fonksiyonu

$$f(z) = \operatorname{Re}\{h(z) + g(z)\} + i\operatorname{Im}\{h(z) - g(z)\}$$

şeklindedeyazılabilir; çünkü

$$\operatorname{Re}\{h + g\} = \frac{1}{2}[(h + g) + \overline{(h + g)}] \quad \text{ve} \quad \operatorname{Im}\{h - g\} = \frac{1}{2i}[(h - g) - \overline{(h - g)}]$$

dir. Buna göre bir önceki örnekte verilen $f(z) = z + \frac{1}{3}\overline{z}^3$ ifadesi

$$f(z) = \operatorname{Re}\left\{z + \frac{1}{3}z^3\right\} + i\operatorname{Im}\left\{z - \frac{1}{3}z^3\right\}$$

olarak yazılabilir.

Teorem 3.3.3: $f = h + \overline{g}$ in yerel ünivalent ve yön-koruyan olması için gerek ve yeter şart her $z \in \mathbb{D}$ için $|\omega(z)| = |g'(z)/h'(z)| < 1$ olmasıdır (Lewy 1936).

Belirli tiplerdeki harmonik ünivalent dönüşümlerle ilişkili olan minimal grafiği bulmak için (3.6) da belirtildiği gibi uygun Weierstrass gösteriminin oluşturulması gerekir. Bu gösterim $\Phi^2 = 0$ ve $|\Phi|^2 \neq 0$ özelliklerini sağlamalıdır. Bu gösterim oluşturulurken düzlemsel harmonik dönüşümlerin kullanılması istenmektedir. Doğal olarak,

$$x_1 = \operatorname{Re}(h + g) = \operatorname{Re} \int (h' + g')dz = \operatorname{Re} \int \varphi_1 dz$$

$$x_2 = \operatorname{Im}(h - g) = \operatorname{Re} \int -i(h' - g')dz = \operatorname{Re} \int \varphi_2 dz$$

$$x_3 = \operatorname{Re} \int \varphi_3 dz$$

şeklinde seçilir ve sonra φ_3 e göre çözülür.

Teorem 3.3.4 ((h, g) Weierstrass Gösterimi): $\mathbb{D}$ de analitik olan bir q fonksiyonu için dilatasyonu $\omega = q^2$ olan $f = h + \overline{g}$, $\mathbb{D}$ den bir $D \subset \mathbb{C}$ bölgesine yön-koruyan harmonik ünivalent bir dönüşüm ise, o zaman

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(u, v) &= (x_1, x_2, x_3) \\ &= \left(\operatorname{Re}\{h(z) + g(z)\}, \operatorname{Im}\{h(z) - g(z)\}, 2\operatorname{Im}\left\{\int_0^z \sqrt{g'(\zeta)h'(\zeta)} d\zeta\right\} \right) \end{aligned}$$

izotermal parametrizasyonu kompleks düzlem üzerine izdüşümü f olan bir minimal grafik tanımlar. Tersine, eğer bir $\mathbf{x}(u, v) = \{(u, v, F(u, v)): u + iv \in \Omega\}$ minimal grafiği yön koruyan $z = x + iy \in \mathbb{D}$ izotermal parametreleri ile parametrize edilirse taban düzlemi üzerine izdüşümü, dilatasyonu $\mathbb{D}$ den D ye analitik bir fonksiyonun karesi olan harmonik ünivalent

$$f(z) = u + iv = \operatorname{Re}\{h(z) + g(z)\} + i\operatorname{Im}\{h(z) - g(z)\}$$

fonksiyonunu tanımlar (Brilleslyper *et al.* 2012).

Özet olarak, $\omega = \frac{g'}{h'}$ dilatasyonu analitik bir fonksiyonun karesi ve her $z \in \mathbb{D}$ için $|\omega(z)| < 1$ olmak üzere $f = h + \overline{g}$, $\mathbb{D}$ üzerinde tanımlanmış harmonik ünivalent bir dönüşüm olsun. Bu durumda, Teorem 3.3.4 de verilen Weierstrass formülü kullanılarak f minimal bir grafiğe yükseltilebilir.

Örnek 3.3.5: Örnek 3.3.2 de harmonik ünivalent

$$f(z) = z + \frac{1}{3}\overline{z}^3 = \operatorname{Re}\left(z + \frac{1}{3}z^3\right) + i\operatorname{Im}\left(z - \frac{1}{3}z^3\right)$$

dönüşümü elde edildi. Dolayısıyla $h(z) = z$ ve $g(z) = \frac{1}{3}z^3$ tür. Ayrıca, $\omega(z) = z^2$ analitik bir fonksiyonun karesidir. Bu nedenle, bu harmonik dönüşüm minimal bir grafiğe yükseltilebilir.

$$x_3 = 2Im \left\{ \int_0^z \sqrt{g'(\zeta)h'(\zeta)} d\zeta \right\} = Im(z^2)$$

olur.

Bu Örnek 3.2.6 da verilen Enneper yüzeyinin, eşleniği olan bir yüzeyin

$$x = \left(Re \left\{ z + \frac{1}{3}z^3 \right\}, Im \left\{ z - \frac{1}{3}z^3 \right\}, Im\{z^2\} \right)$$

parametrizasyonunu ve dolayısıyla Enneper yüzeyini verir (Brilleslyper *et al.* 2012).

Enneper yüzeyinin $x_1 x_2$ düzlemi üzerine izdüşümü, $\mathbb{D}$ nin f harmonik dönüşümü altındaki görüntüsüdür.

Örnek 3.3.6:

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)} = Re \left[\frac{i}{2} \log \left(\frac{1+z}{1-z} \right) \right] + iIm \left[\frac{1}{2} \log \left(\frac{1+z}{1-z} \right) \right]$$

şeklinde verilen harmonik ünivalent dönüşümü göz önüne alınsın. $\omega(z) = -z^2$, analitik bir fonksiyonun karesi olduğundan bu dönüşüm minimal bir grafiğe yükseltilebilir.

$$x_3 = 2Im \int_0^z \frac{i\zeta}{1-\zeta^4} d\zeta = \frac{1}{2}Im \left\{ i \log \left(\frac{1+z^2}{1-z^2} \right) \right\}$$

bulunur. Bu, Sherk'in iki katlı periyodik minimal yüzeyinin bir parametrizasyonunu; yani

$$x = \left(\operatorname{Re} \left[\frac{i}{2} \log \left(\frac{i+z}{i-z} \right) \right], \quad \operatorname{Im} \left[\frac{1}{2} \log \left(\frac{1+z}{1-z} \right) \right], \quad \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left\{ i \log \left(\frac{1+z^2}{1-z^2} \right) \right\} \right)$$

gösterimini verir. Sherk'in iki katlı periyodik yüzeyinin $x_1 x_2$ düzlemi üzerine izdüşümü bir karedir; yani $\mathbb{D}$ nin f harmonik dönüşümü altındaki görüntüsüdür (Brilleslyper *et al.* 2012).

Aşağıdaki teorem

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

şeklinde tanımlanan yatay doğrultuda konveks olan Koebe fonksiyonu ve bununla ilgili minimal yüzey arasındaki ilişki hakkında bilgi vermektedir.

Teorem 3.3.7: f in genişlemesi $\omega = z^2$ ve

$$h(z) - g(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

olmak üzere M , izdüşümü $f = h + \bar{g} \in S_H^0$ olan $L = k(\mathbb{D})$ slit bölgesi üzerinde minimal bir yüzey olsun. Bu durumda,

$$u = \operatorname{Re} \left\{ \frac{z(z^2 - 3z + 3)}{3(1-z)^3} \right\}, \quad v = \operatorname{Im} \left\{ \frac{z}{(1-z)^2} \right\}$$

ve

$$F = \operatorname{Im} \left\{ \frac{z(2-z)}{(1-z)^2} - \frac{2z(z^2 - 3z + 3)}{3(1-z)^3} \right\}$$

olmak üzere $M = \{(u, v, F(u, v)): u + iv \in L\}$ olur (Liet *al.* 2014).

Teorem 3.3.8: k_c , (2.1) de verilen şekilde olmak üzere $c \in [0, 2]$ için

$$h_c(z) - g_c(z) = k_c(z), \quad g_c'(z) = z^2 h_c'(z)$$

eşitliğini sağlayan harmonik bir dönüşüm olan $f_c = h_c + \overline{g_c} \in S_H^0$ fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda, $f_c(\mathbb{D})$ yatay doğrultuda konveks bir bölgedir ve $c, 0$ dan 2 ye değişirken $f_c(\mathbb{D})$ strip bir dönüşümden slit bir dönüşüme dönüşür (Dorff and Muir 2014).

3.4. Harmonik Konvekse Yakın Fonksiyonlar

Bu bölümde harmonik konvekse yakın fonksiyonlarla ilgili bazı teoremlere yer verilecektir.

Teorem 3.4.1: h ve g fonksiyonları, $|h'(0)| > |g'(0)|$ olmak üzere $\mathbb{D}$ de analitik ve her $\epsilon, |\epsilon| = 1$ için $h + \epsilon g$ konvekse yakın bir fonksiyon ise, bu durumda $f = h + \overline{g}$ fonksiyonu $\mathbb{D}$ de konvekse yakındır (Clunie and Sheil-Small 1984).

Teorem 3.4.2: $f = h + \overline{g}$, her $z \in \mathbb{D}$ ve herhangi bir $\gamma \in \mathbb{R}$ için $Re(e^{i\gamma} h'(z)) > |g'(z)|$ olacak şekilde $\mathbb{D}$ de harmonik olsun. Bu durumda f , $\mathbb{D}$ de ünivalent, yön-koruyan ve konvekse yakındır (Ponnusamy *et al.* 2014).

1980 de Mocanu tarafından her $z \in \Omega$ için $Re(h'(z)) > |g'(z)|$ olacak şekilde konveks bir Ω bölgesinde $f = h + \overline{g}$ harmonik bir dönüşüm ise, o zaman f in Ω bölgesinde ünivalent ve yön-koruyan olduğunu kanıtlanmış ve aşağıdaki teoremle genelleştirilmiştir.

Teorem 3.4.3: $G \in C^1(\mathbb{D})$, $G(\mathbb{D})$ konveks bir bölge ve $\mathbb{D}$ de $J_G(z) > 0$ olacak şekilde ünivalent olsun. $F \in C^1(\mathbb{D})$ ve

$$I(F, G) = \begin{vmatrix} F_z & F_{\bar{z}} \\ G_z & G_{\bar{z}} \end{vmatrix}$$

olmak üzere her $z \in \mathbb{D}$ için

$$ReI(F, \bar{G}) > |I(F, G)|$$

olsun. O zaman F , $\mathbb{D}$ de yön-koruyan ve ünivalenttir (Mocanu 1981).

Bu teorem kullanılarak, ünivalent olduğu kanıtlanabilen birçok fonksiyonun aynı zamanda $\mathbb{D}$ de konvekse yakın olduğu da belirlenebilir.

$-\log(1 - z)$ konveks fonksiyonuna göre $\mathbb{D}$ de konvekse yakın fonksiyonların ailesinin çalışılmasına yol açan teorem aşağıda verilmiştir.

Teorem 3.4.4: f ve g , $h(0) = g(0) = 0$ ve $h'(0) = 1$ olacak şekilde $\mathbb{D}$ de analitik fonksiyonlar olmak üzere $f = h + \bar{g}$ ve ayrıca G , $\mathbb{D}$ de ünivalent, analitik ve konveks olsun. Eğer f , her $z \in \mathbb{D}$ ve herhangi bir $\theta \in \mathbb{R}$ için

$$Re \left(e^{i\theta} \frac{h'(z)}{G'(z)} \right) > \left| \frac{g'(z)}{G'(z)} \right| \quad (3.10)$$

eşitsizliğini sağlarsa o zaman f , $\mathbb{D}$ de yön-koruyan, harmonik, ünivalent ve konvekse yakındır (Ponnusamy and Kaliraj 2012).

Kompleks değerli harmonik fonksiyonların sınıfı $\mathcal{H}$ olmak üzere, $G(z) = -\log(1 - z)$ seçilirse

$$\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{H} : Re\{(1 - z)f_z\} > |(1 - z)f_{\bar{z}}(z)|, z \in \mathbb{D}\}$$

ailesi elde edilir. Teorem 3.4.4 e göre, $\mathcal{F}$ ailesindeki fonksiyonlar $\mathbb{D}$ de konvekse yakındır.

Aşağıdaki teorem, Teorem 3.4.4 ün bir sonucudur.

Teorem 3.4.5: $f = h + \bar{g} \in \mathcal{H}$ fonksiyonu

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(n+1)a_{n+1} - na_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |(n+1)b_{n+1} - nb_n| \leq 1 - |b_1|, \quad (a_1 = 1) \quad (3.11)$$

koşulunu sağlasın. O zaman $f \in \mathcal{F}$ olur. Özel olarak f , $\mathbb{D}$ de harmonik konvekse yakındır (Ponnusamy *et al.* 2014).

Aşağıdaki sonuçta, Teorem 3.4.5 in geliştirilmiş şekli verilmiştir.

Sonuç 3.4.6: $f = h + \bar{g} \in \mathcal{H}$, (3.11) koşulunu sağlasın. O zaman,

$$\mathcal{F}_1 = \{f \in \mathcal{H} : \{(1-z)h'(z) - 1\} < 1 - |(1-z)g'(z)|, z \in \mathbb{D}\}$$

olmak üzere $f \in \mathcal{F}_1$ ve $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}$ olur (Ponnusamy *et al.* 2014).

Teorem 3.4.4 te

$$G(z) = (1/2) \log((1+z)/(1-z))$$

olarak alınırsa bu

$$\mathcal{F}_2 = \{f \in \mathcal{H} : \operatorname{Re}\{(1-z^2)f_z\} > |(1-z^2)f_{\bar{z}}(z)|, z \in \mathbb{D}\}$$

ailesini oluşturur. Teorem 3.4.4 e göre, $\mathcal{F}_2$ deki fonksiyonlar harmonik ve $\mathbb{D}$ de konvekse yakındır.

Bununla birlikte, Teorem 3.4.4. e göre, $\mathcal{F}_2$ deki fonksiyonların sadece konvekse yakın değil, aynı zamanda dikey doğrultuda konveks olduğu da görülür.

Teorem 3.4.7. $\mathcal{F}_2$ deki fonksiyonlar dikey doğrultuda konvektir (Ponnusamy *et al.* 2014).

Fonksiyonların $\mathcal{F}_2$ ailesinde olması için yeterli bir katsayı şartı aşağıdaki teoremden belirtilmiştir.

Teorem 3.4.8. $f = h + \bar{g} \in \mathcal{H}$ fonksiyonu

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(n+1)a_{n+1} - (n-1)a_{n-1}| + \sum_{n=1}^{\infty} |(n+1)b_{n+1} - (n-1)b_{n-1}| \leq 1 - |b_1|, \quad (a_1 = 1) \quad (3.12)$$

koşulunu sağlasın. O zaman $f \in \mathcal{F}_2$ olur. Özellikle f , $\mathbb{D}$ de dikey doğrultuda konvektir ve dolayısıyla $\mathbb{D}$ de konvekse yakındır (Ponnusamy *et al.* 2014).

3.5. Makaslama Tekniği

Analitik olmayan ünivalent harmonik dönüşüm örneklerinin bulunması kolay değildir. Clunie ve Sheil-Small tarafından verilen *makaslama tekniği* olarak adlandırılan teknik, yeni ünivalent harmonik dönüşüm örneklerinin oluşturulmasında oldukça kullanışlı bir yoldur. Bu bölümde *makaslama tekniği* ile ilgili bilgiler verilecektir.

Makaslama tekniğinin temelini oluşturan Clunie ve Sheil-Small tarafından verilen teorem aşağıdaki gibidir.

Teorem 3.5.1. $f = h + \bar{g}$, $\mathbb{D}$ de yerel ünivalent bir harmonik fonksiyon (yani her $z \in \mathbb{D}$ için $|\omega(z)| < 1$) olsun. $F = h - g$ fonksiyonunun $\mathbb{D}$ den yatay doğrultuda konveks olan bir bölgeye tanımlı analitik ünivalent bir dönüşüm olması için gerek ve yeter şart $f = h + \bar{g}$ nin $\mathbb{D}$ den yatay doğrultuda konveks olan bir bölgeye tanımlı bir ünivalent dönüşüm olmasıdır (Clunie and Sheil-Small 1984).

Örnek 3.5.2: Makaslama tekniği, $\mathbb{D}$ yi yatay doğrultuda konveks olan bir bölgeye dönüştüren bir ünivalent analitik F fonksiyonu ve her $z \in \mathbb{D}$ için $|\omega(z)| < 1$ olan ω dilatasyonu ile başlar. Daha sonra, F fonksiyonu $F = h - g$ ve ω dilatasyonu $\omega = g'/h'$ şeklinde yazılarak h ve g ye göre çözülürse ünivalent harmonik bir $f = h + \bar{g}$ fonksiyonu oluşturulur.

$f(z) = h(z) + \overline{g(z)} = z + \frac{1}{2}\bar{z}^2$ nin ünivalent ve $F(z) = z - \frac{1}{2}z^2$ analitik fonksiyonu ile ilişkili olduğu Teorem 3.5.1 kullanılarak gösterilebilir.

Analitik, ünivalent

$$F(z) = h(z) - g(z) = z + \frac{1}{2}\bar{z}^2$$

fonksiyonu $\partial\mathbb{D}$ yi, yatay doğrultuda konveks bir bölge olan bir köşe noktasına sahip bir episikloide dönüştürür. $\omega(z) = \frac{g'(z)}{h'(z)} = z$ şeklinde seçilir ve makaslama tekniği uygulanırsa

$$\begin{aligned} h'(z) - g'(z) &= 1 - z \Rightarrow h'(z) - zh'(z) = 1 - z \\ &\Rightarrow h'(z) = 1 \\ &\Rightarrow h(z) = z \end{aligned}$$

olur. $g'(z) = zh'(z) = z$ olduğundan $g(z) = \frac{1}{2}z^2$ elde edilir. h ve g normalize edilmiş fonksiyonlardır; yani $h(0) = 0$ ve $g(0) = 0$ dır. Dolayısıyla buna karşılık gelen harmonik ünivalent fonksiyon, dilatasyonu $\omega(z) = z$ olan

$$F(z) = z - \frac{1}{2}z^2 \in S$$

analitik ünivalent fonksiyonunun makaslanmasıyla elde edilen

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)} = z + \frac{1}{2}\bar{z}^2 \in S_H^0$$

fonksiyonudur.

Bu teknik *makaslama* olarak bilinir. Burada makaslama kelimesi kırmak, kesmek anlamındadır. Teorem 3.5.1 de olduğu gibi, $F = h - g$ yatay doğrultuda konveks analitik ünivalent bir fonksiyon olsun. Burada harmonik makas

$$f = h + \bar{g} = h - g + g + \bar{g} = h - g + 2\operatorname{Re}\{g\}$$

fonksiyonudur. Bu fonksiyon analitik bir fonksiyondan, analitik fonksiyona reel bir fonksiyonun eklenmesi kadar farklıdır. Geometrik olarak bu, $F(\mathbb{D})$ nin görüntüsüdür. Yani yatay doğrultuda konvektir, analitik ünivalent F fonksiyonu tarafından oluşturulur ve onu yatay şeritler halinde keser. Bu şeritler daha sonra, f fonksiyonu tarafından şekillendirilen ve aynı zamanda yatay doğrultuda konveks olan $f(\mathbb{D})$ nin görüntüsünü oluşturmak için sürekli olarak ötelenir veya ölçeklendirilir. Bu nedenle bu yöntem "makaslama" denir (Brilleslyper et al. 2012).

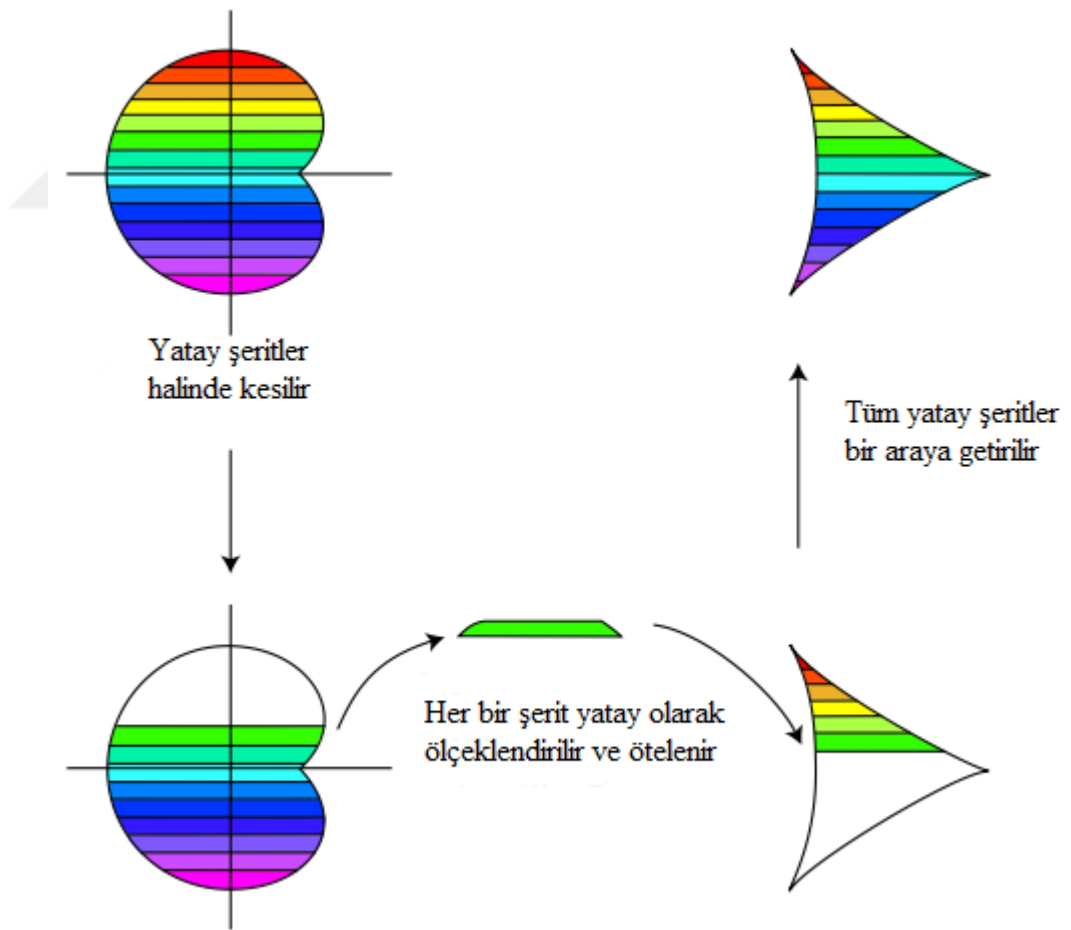
Teorem 3.5.1 de ki algoritmik yaklaşım aşağıdaki gibidir. $\mathbb{D}$ de tanımlı yatay doğrultuda konveks φ dönüşümü ve $\omega \in \mathcal{B}_0$ dilatasyonu için, $\omega(z)$ verilen şekilde olmak üzere $\varphi(z)$ nin makası

$$\begin{cases} h'(z) - g'(z) = \varphi'(z), \\ g'(z) - \omega(z)h'(z) = 0 \end{cases}$$

diferansiyel denklemlerini sağlayan $f = h + \bar{g}$ dönüşümü olarak tanımlanır. Hesaplamalar sonucunda

$$f(z) = \left\{ 2 \int_0^z \frac{\varphi'(\zeta)}{1 - \omega(\zeta)} d\zeta - \varphi(z) \right\} + iIm\{\varphi(z)\} \quad (3.13)$$

şeklinde istenilen $f = h + \bar{g}$ dönüşümü elde edilir.



Şekil 3.5. Ünivalentliği korumak için analitik bir fonksiyonu makaslama (Brilleslyper *et al.* 2012)

Örnek 3.5.3: Bu örnekte belli bir dilatasyon kullanılarak Koebe fonksiyonu makaslanacaktır. Bunun için

$$h(z) - g(z) = \frac{z}{(1-z)^2} \quad (3.14)$$

ve

$$\omega(z) = \frac{g'(z)}{h'(z)} = z$$

olsun. Makaslama tekniği uygulanarak,

$$\begin{aligned} h'(z) - g'(z) &= \frac{1+z}{(1-z)^3} \\ \Rightarrow h'(z) - zh'(z) &= \frac{1+z}{(1-z)^3} \\ \Rightarrow h'(z) &= \frac{1+z}{(1-z)^4} \end{aligned}$$

elde edilir. $h'(z)$ nin integrali alınır ve $h(0) = 0$ olacak şekilde normalize edilirse

$$h(z) = \frac{z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3}{(1-z)^3} \quad (3.15)$$

olur. Bu yöntem, $g(0) = 0$ olmak üzere normalize edilmiş $g(z)$ fonksiyonunu çözmek içinde kullanılabilir. Bunun yerine (3.14) ve (3.15) kullanılarak $g(z)$,

$$g(z) = h(z) - \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{\frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3}{(1-z)^3}$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)} = \operatorname{Re} \left(\frac{z + \frac{1}{3}z^3}{(1-z)^3} \right) + i \operatorname{Im} \left(\frac{z}{(1-z)^2} \right) \in S_H^0$$

olur. Negatif reel eksen üzerindeki kapalı yarı doğrunun ucunun $-\frac{1}{4}$ yerine $-\frac{1}{6}$ da olması haricinde $\mathbb{D}$ nin f altındaki görüntüsü, $\mathbb{D}$ nin analitik Koebe fonksiyonu altındaki görüntüsüne benzerdir. $\frac{1+z}{1-z} = w = u + iv$ dönüşümü kullanılsın. $z \in \mathbb{D}$ olduğundan $w = \frac{1+z}{1-z}$ dönüşümünün görüntüsü $\{w = u + iv \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} w = u > 0, -\infty < v < \infty\}$ sağ yarı düzlemidir. Bu durumda $z = \frac{w-1}{w+1}$ dir. Bu ifade $h(z)$ ve $g(z)$ de yerine yazılır ve düzenlenirse

$$h\left(\frac{w-1}{w+1}\right) = \frac{1}{8} \left[\frac{2}{3} w^3 + w^2 - \frac{5}{3} \right]$$

ve

$$g\left(\frac{w-1}{w+1}\right) = \frac{1}{8} \left[\frac{2}{3} w^3 - w^2 + \frac{1}{3} \right]$$

elde edilir. $f = \operatorname{Re}(h + g) + i \operatorname{Im}(h - g)$ olduğundan

$$f\left(\frac{w-1}{w+1}\right) = \frac{1}{6} \operatorname{Re}\{w^3 - 1\} + \frac{1}{4} i \operatorname{Im}(w^2 - 1)$$

bulunur. $w = u + iv$ ifadesi kullanılarak, reel ve imajiner kısımlar alınır

$$f\left(\frac{w-1}{w+1}\right) = \frac{1}{6}(u^3 - 3uv^2 - 1) + i \frac{1}{2} uv$$

olur. $uv = 0$ (ve böylece $v = 0$) alınır, o zaman imajiner kısım ortadan kalkar ve $u > 0$ olduğundan reel kısım $-\frac{1}{6}$ dan $+\infty$ a değişir. Böylece $uv = 0$ için, $f(\mathbb{D})$ nin görüntüsü reel eksen üzerindeki $-\frac{1}{6}$ ile $+\infty$ arasındaki doğru parçasını içerir. Öte yandan $uv = c \neq 0$ olursa, o zaman imajiner kısım sabittir ve reel kısım $\frac{u^3}{6} - \frac{c^2}{2u}$ şeklinde olup $-\infty$ ve $+\infty$ arasında değişir. Buna göre, herhangi bir $c \neq 0$ için $f(\mathbb{D})$, ic noktası boyunca reel eksene paralel tüm doğruları içerir. Dolayısıyla, $f(\mathbb{D})$ negatif reel eksen üzerindeki $-\frac{1}{6}$ dan $-\infty$ a kadar olan kesik hariç tüm kompleks düzlemdir (Brilleslyper et al. 2012).

Clunie ve Sheil-Small tarafından verilen makaslama teoremi Tanım 2.1.12 deki gibi tanımlanan bölgelere uygulanarak genelleştirilebilir.

Sonuç 3.5.4: $\mathbb{D}$ de yerel ünivalent olan $f = h + \bar{g}$ harmonik fonksiyonunun $\mathbb{D}$ den φ yönünde konveks bir bölgeye ünivalent bir dönüşüm olması için gerek ve yeter şart $h - e^{-2i\varphi}g$ nin $\mathbb{D}$ den φ yönünde konveks bir bölgeye analitik ünivalent bir dönüşüm olmasıdır (Brilleslyper et al. 2012).

Örnek 3.5.5: $\frac{z}{1-z}$ analitik sağ yarı-düzlem fonksiyonu $\mathbb{D}$ yi konveks bir bölgeye (yani her φ yönünde konveks olan bir bölgeye) dönüştürmektedir. Bu nedenle, imajiner eksen ($\varphi = \frac{\pi}{2}$) yönünde konvektir. Burada $\varphi = \frac{\pi}{2}$ olmak üzere Sonuç 3.5.4, $\frac{z}{1-z}$ ye uygulansın. $\varphi = \frac{\pi}{2}$ olmak üzere $h(z) - g(z)$ nin yerine $h(z) - e^{-2i\varphi}g(z) = h(z) + g(z)$ ye eşit olan $F(z) = \frac{z}{1-z}$ fonksiyonu ele alınsın.

$$h(z) + g(z) = \frac{z}{1-z}$$

ve

$$\omega(z) = \frac{g'(z)}{h'(z)} = -z$$

olarak seçilsin. Örnek 3.5.2 ve Örnek 3.5.3 te olduğu gibi h ve g hesaplanırsa

$$\begin{aligned} h(z) &= \frac{z - \frac{1}{2}z^2}{(1-z)^2} \\ g(z) &= -\frac{\frac{1}{2}z^2}{(1-z)^2} \end{aligned} \quad (3.16)$$

bulunur. Dolayısıyla harmonik fonksiyon

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)} = \operatorname{Re} \left(\frac{z}{1-z} \right) + i \operatorname{Im} \left(\frac{z}{(1-z)^2} \right) \in S_H^0$$

şeklindedir. Bu fonksiyon bir harmonik sağ yarı düzlem dönüşümüdür (Brilleslyper *et al.* 2012).

Örnek 3.5.6: $\mathbb{D}$ yi reel eksen yönünde konveks bir yatay şerit üzerine dönüştüren analitik fonksiyon

$$h(z) - g(z) = \frac{1}{2} \log \frac{(1+z)}{(1-z)} \quad (3.17)$$

ve dilatasyonu

$$\omega(z) = \frac{g'(z)}{h'(z)} = -z^2$$

olsun. Makaslama tekniği uygulanarak,

$$\begin{aligned} h'(z) - g'(z) &= \frac{1}{1-z^2} \Rightarrow h'(z) + z^2 h'(z) = \frac{1}{1-z^2} \\ \Rightarrow h'(z) &= \frac{1}{1-z^4} = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{1+z} + \frac{1}{1-z} + \frac{i}{i+z} + \frac{i}{i-z} \right] \end{aligned}$$

elde edilir. $h'(z)$ nin integrali alınır ve $h(0) = 0$ olacak şekilde normalize edilirse

$$h(z) = \frac{1}{4} \log \left(\frac{1+z}{1-z} \right) + \frac{i}{4} \log \left(\frac{i+z}{i-z} \right) \quad (3.18)$$

olur. $g(0) = 0$ olmak üzere normalize edilmiş $g(z)$ fonksiyonunu bulmak için bu metod kullanılabilir ya da (3.17) ve (3.18) kullanılarak $g(z)$ bulunabilir. Her iki durumda da

$$g(z) = -\frac{1}{4} \log \left(\frac{1+z}{1-z} \right) + \frac{i}{4} \log \left(\frac{i+z}{i-z} \right)$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$f(z) = h(z) + \overline{g(\bar{z})} = \operatorname{Re} \left[\frac{i}{2} \log \left(\frac{i+z}{i-z} \right) \right] + i \operatorname{Im} \left[\frac{1}{2} \log \left(\frac{1+z}{1-z} \right) \right] \in S_H^0$$

olur. $f(\mathbb{D})$ nin görüntüsünü bulmak için

$$\begin{aligned} f(z) &= \left[-\frac{1}{2} \arg \left(\frac{i+z}{i-z} \right) \right] + i \left[\frac{1}{2} \arg \left(\frac{1+z}{1-z} \right) \right] \\ &= u + iv \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. $z = e^{i\theta} \in \partial\mathbb{D}$ olsun. Bu durumda

$$\frac{i+z}{i-z} = \left(\frac{i+e^{i\theta}}{i-e^{i\theta}} \right) \left(\frac{-i-e^{-i\theta}}{-i-e^{-i\theta}} \right) = \frac{1-i(e^{i\theta}+e^{-i\theta})-1}{1+i(e^{i\theta}+e^{-i\theta})+1} = -i \frac{\cos \theta}{1-\sin \theta}$$

dır. Böylece

$$u = -\frac{1}{2} \arg \left(\frac{i+z}{i-z} \right) \Big|_{z=e^{i\theta}} = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & \cos \theta > 0 \text{ ise} \\ -\frac{\pi}{4} & \cos \theta < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

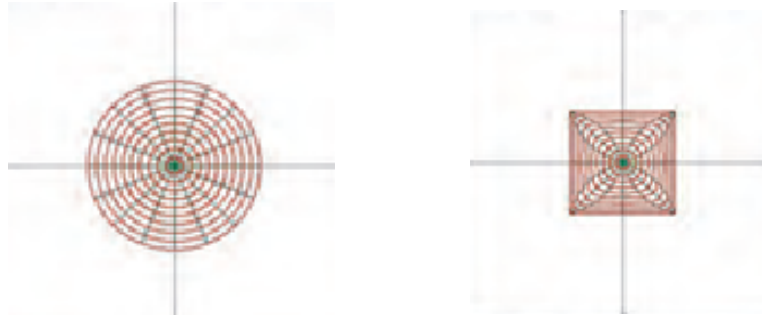
olur. Aynı şekilde

$$v = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & \sin \theta > 0 \text{ ise} \\ -\frac{\pi}{4} & \sin \theta < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olduğu gösterilebilir. Burada $z = e^{i\theta} \in \partial\mathbb{D}$,

$$u + iv = \begin{cases} z_1 = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + i\frac{\pi}{4}, & \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ ise} \\ z_3 = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\frac{\pi}{4} + i\frac{\pi}{4} & \theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \text{ ise} \\ z_5 = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} e^{i\frac{5\pi}{4}} = -\frac{\pi}{4} - i\frac{\pi}{4} & \theta \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \text{ ise} \\ z_7 = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} e^{i\frac{7\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - i\frac{\pi}{4} & \theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \text{ ise} \end{cases}$$

ye dönüşür. Sonuç olarak bu harmonik fonksiyon, $\mathbb{D}$ yi köşe noktaları z_1, z_3, z_5 ve z_7 olan ve bir kare tarafından sınırlanan bölgenin içine dönüştürür (Brilleslyper *et al.* 2012).



Şekil 3.6. $f(z) = \operatorname{Re} \left[\frac{i}{2} \log \left(\frac{1+z}{1-z} \right) \right] + i \operatorname{Im} \left[\frac{1}{2} \log \left(\frac{1+z}{1-z} \right) \right]$ altında $\mathbb{D}$ nin görüntüsü (Brilleslyper *et al.* 2012).

3.6. Dilatasyon Özellikleri

Bu bölümde dilatasyonun öneminden dolayı bazı özellikleri incelenecektir.

Analitik bir fonksiyonun, türevinin sıfırdan farklı olduğu bir noktada sonsuz küçük çemberleri sonsuz küçük çemberlere dönüştürdüğü bilinmektedir. Ancak harmonik fonksiyonlar için bu geçerli değildir.

Burada ilk olarak geometrik dilatasyon D_f ve analitik (veya ikinci kompleks) dilatasyon $\omega(z)$ kavramları açıklanacaktır.

$f = h + \bar{g}$ harmonik fonksiyon olmak üzere f nin diferansiyeli $df = f_z dz + f_{\bar{z}} d\bar{z}$ olsun. Bu durumda,

$$|df| = |f_z dz + f_{\bar{z}} d\bar{z}| = |h'(z)dz + \overline{g'(z)}d\bar{z}|$$

olur. Diferensiyel sınırlandırılır ve dz küçük ise $d\bar{z}$ ninde küçük ve $d\bar{z}$ nin yaklaşık olarak dz ye eşit olması durumu kullanılırsa alt ve üst sınırlar incelendiğinde

$$(|h'(z)| - |g'(z)|)|dz| \leq |df| \leq (|h'(z)| + |g'(z)|)|dz|$$

elde edilir. Yön- koruyan harmonik fonksiyonlar için, sol taraf daima pozitiftir. Üst ve alt sınırların oranı

$$D_f = \frac{|h'| + |g'|}{|h'| - |g'|}$$

şeklinde tanımlanan D_f , geometrik dilatasyonu verir. Bu, maksimum $|df|$ nin minimum $|df|$ ye oranı olduğundan z_0 noktasında D_f hesaplanırsa, fonksiyon tarafından deforme olan sonsuz küçük çemberin en çok ve en az deformasyonu arasındaki oranı temsil eden bir sayı bulunur. Buna göre, fonksiyon sonsuz küçük bir çemberi sonsuz küçük bir elipse dönüştürürse bu durumda geometrik dilatasyon elipsin büyük ekseninin küçük eksenine oranını verir.

Geometrik dilatasyon fonksiyon hakkında yararlı bilgiler verirken $|h'(z)|$ ve $|g'(z)|$ alındığında bazı bilgiler kaybolur. Bunun yerine, f fonksiyonunun analitik olmayan kısmına karşı analitik kısmınının incelemek genellikle yararlıdır. f nin ikinci kompleks dilatasyonu

$$\omega_f(z) = \frac{\overline{f_z(z)}}{f_z(z)} = \frac{g'(z)}{h'(z)}$$

şeklinde tanımlanır. Bu son eşitlikteki tanımlama sadece harmonik fonksiyonlar için anlamlıdır. f fonksiyonu belli olduğunda alt indisi gösterilmez ve dilatasyon sadece ω ile belirtilir. İkinci kompleks dilatasyon, f nin analitik dilatasyonu olarak da adlandırılır; çünkü $\omega(z)$ fonksiyonunun analitik olması için gerek ve yeter şart $f(z)$ nin harmonik olmasıdır.

Burada dilatasyonu tekil iç fonksiyon olan harmonik ünivalent dönüşümleri inceleyelim. $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ analitik bir fonksiyon olsun ve radyal limiti

$$f^*(e^{i\theta}) = \lim_{r \rightarrow 1, r < 1} f(re^{i\theta})$$

ile gösterilsin.

Tanım 3.6.1 (Tekil İç Fonksiyon): $\partial\mathbb{D}$ üzerindeki Lebesgue ölçüsüne göre hemen hemen her yerde $|f^*(e^{i\theta})| = 1$ ise sınırlı analitik f fonksiyonuna iç fonksiyon denir. Eğer f in $\mathbb{D}$ de sıfırı yoksa, o zaman f tekil iç fonksiyon olarak adlandırılır. (Brilleslyper *et al.* 2012).

$f(z) = e^{\frac{z+1}{z-1}}$ fonksiyonu, bir tekil iç fonksiyon örneğidir.

Dilatasyonları tekil iç fonksiyonlar olan harmonik dönüşümlerin örneklerini oluşturmak oldukça zordur. Dilatasyonu tekil iç bir fonksiyon olan harmonik bir dönüşüm örneği

bulmanın bir yolu makaslama tekniğini kullanmaktır. Ancak, çoğu zaman $f = h + \bar{g}$ için kapalı bir form bulmak mümkün değildir. Örneğin $h(z) - g(z) = z$ ve dilatasyonu $\omega(z) = e^{\frac{z+1}{z-1}}$ olsun. Buna göre makaslama tekniğinden

$$h(z) = \int \frac{1}{1 - e^{\frac{z+1}{z-1}}} dz$$

dir. İntegral kapalı formda değildir ve dolayısıyla $f = h + \bar{g}$ için belli bir gösterim bulunamaz. İntegralleri h ve g ye göre hesaplamaya olanak sağlayan makaslama tekniğinin kullanıldığı örnek verilmeden önce aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 3.6.2: $f(0) = 0$ ve $f'(0) \neq 0$ olmak üzere f , $\mathbb{D}$ de analitik bir fonksiyon ve

$$\varphi(z) = \frac{z}{(1 + ze^{i\theta})(1 + ze^{-i\theta})}, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

olsun. Eğer, her $z \in \mathbb{D}$ için

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{\varphi(z)} \right\} > 0$$

ise bu durumda f reel eksen doğrultusunda konvektir (Pommerenke 1963).

Örnek 3.6.3:

$$\omega(z) = e^{\frac{z+1}{z-1}}$$

olmak üzere

$$h(z) - g(z) = \frac{z}{1-z} + \frac{1}{2} e^{\frac{z+1}{z-1}}$$

analitik fonksiyonunun makaslanması ele alınsın. Buna göre

$$h'(z) - g'(z) = \frac{1}{(1-z)^2} \left[1 - e^{\frac{z+1}{z-1}} \right]$$

olur. Teorem 3.6.2 de $\theta = \pi$ alınırsa

$$\operatorname{Re} \left[1 - e^{\frac{z+1}{z-1}} \right] > 0$$

dır; çünkü $\left| e^{\frac{z+1}{z-1}} \right| < 1$ dir. Sonuç olarak, $h - g$ reel eksen doğrultusunda konvektir.

$\omega(z) = e^{\frac{z+1}{z-1}}$ ile $h - g$ makaslanır ve normalize edilirse

$$h(z) = \int \frac{1}{(1-z)^2} dz = \frac{z}{1-z}$$

bulunur ve g için çözülürse

$$g(z) = -\frac{1}{2} e^{\frac{z+1}{z-1}}$$

elde edilir (Brilleslyper *et al.* 2012).

Dilatasyonu tekil iç fonksiyonlar olan harmonik dönüşümler bulmak için diğer bir teknik, Clunie ve Sheil-Small tarafından verilen aşağıdaki teoremi kullanmayı gerektirir.

Teorem 3.6.4: $f = h + \bar{g}$, $\mathbb{D}$ de yerel ünivalent olsun ve $h + \epsilon g$ nin herhangi bir $|\epsilon| < 1$ için konveks olduğunu varsayalım. Buna göre f ünivalenttir (Clunie and Sheil-Small 1984).

Teorem 3.6.4 harmonik bir fonksiyonun analitik olduğunu göstermenin bir yolunu verir. Bu tekniği geliştirmek için teoremden $\epsilon = 0$ alınsın. Bu, eğer h analitik konveks ve $|\omega(z)| < 1$ olmak üzere ω analitik ise o zaman $f = h + \bar{g}$ nin bir harmonik ünivalent dönüşüm olduğu anlamına gelir. Bir f fonksiyonunun konveks olduğunu belirlemek için aşağıdaki teorem kullanılır.

Teorem 3.6.5: $f(0) = 0$ ve $f'(0) = 1$ olmak üzere f , $\mathbb{D}$ de analitik bir fonksiyon olsun. Bu durumda, f in ünivalent olması ve $\mathbb{D}$ yi konveks bir bölgeye dönüştürmesi için gerek ve yeter şart her $z \in \mathbb{D}$ için

$$\operatorname{Re} \left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right]$$

olmasıdır (Duren 1983).

Aşağıdaki örnekte, dilatasyonu bir tekil iç fonksiyon olan harmonik ünivalent bir fonksiyon oluşturmak için bu teoremin nasıl kullanılacağı gösterilmiştir.

Örnek 3.6.6:

$$\omega(z) = \frac{g'(z)}{h'(z)} = e^{\frac{z+1}{z-1}}$$

olmak üzere

$$h(z) = z - \frac{1}{4}z^2$$

olsun. h ın konveks olduğunu göstermek için Teorem 3.6.5 i kullanalım.

$$T(z) = 1 + \frac{zh''(z)}{h'(z)} = 1 + \frac{-\frac{1}{2}z}{1 - \frac{1}{2}z} = \frac{1-z}{1 - \frac{1}{2}z}$$

olsun. Bu bir Möbius dönüşümüdür. Möbius dönüşümlerinin dönüşüm özelliklerinden T nin $\mathbb{D}$ yi $\left|z - \frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}$ e (yani merkezi $\frac{2}{3}$ de olan $\frac{2}{3}$ yarıçaplı çembere) dönüştürdüğü görülür. Burada $Re\{T(z)\} > 0$ ve h konvektir.

g için çözümlerse,

$$g(z) = \int h'(z) \omega(z) dz = \int \left(1 - \frac{1}{2}z\right) e^{\frac{z+1}{z-1}} dz = -\frac{1}{4}(z-1)^2 e^{\frac{z+1}{z-1}}$$

olur. Dolayısıyla,

$$f(z) = h(z) + \overline{g(\bar{z})} = z - \frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{4}(\bar{z}-1)^2 e^{\frac{\bar{z}+1}{\bar{z}-1}}$$

dir (Brilleslyper *et al.* 2012).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Bu bölümde, yapılan araştırmalar sonucunda elde edilen bazı gözlemlere yer verilmiştir.

4.1. Harmonik Konvekse Yakın Fonksiyonlar ve Minimal Yüzeyler İle İlgili Sonuçlar

$c \neq 0, -1, -2, \dots$ olmak üzere a, b ve c kompleks sayıları için

$$F(a, b; c; z) = {}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a, n)(b, n)}{(c, n)(1, n)} z^n$$

serisi tarafından tanımlanan Gauss hipergeometrik fonksiyonu $|z| < 1$ de analitiktir. Burada $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ için $(a, n) = a(a+1)(a+2)\dots(a+n)$ ve $a \neq 0$ için $(a, 0) = 1$ şeklindedir. Burada, $\Gamma(a)$, gama fonksiyonu olmak üzere, $\text{Re } a > 0$ ve $\text{Re } b > 0$ için

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

şeklinde tanımlanan $B(a, b)$ beta fonksiyonu ve ayrıca

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a, n)(b, n)}{(c, n)(1, n)} = \begin{cases} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} & c+1 = a+b \text{ ise} \\ 0 & c+1 > a+b \text{ ise} \\ \infty & c+1 < a+b \text{ ise} \end{cases}$$

ile verilen Stirling formülü kullanılacaktır.

Teorem 4.1.1: $a > 0$, $b > 0$ veya $b = \bar{a}$, $\operatorname{Re} a > 0$ olmak üzere $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ olsun.
 $a, b, m \in \mathbb{N}$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$

$$ab \leq 1 \text{ ve } |\alpha|(2B(a, b) - 1) \leq 1, \quad (4.1)$$

$$ab \geq \max\left\{1, \frac{a+b}{2}\right\} \text{ ve } |\alpha| \leq 2B(a, b) - 1, \quad (4.2)$$

koşullarından herhangi biri ile ilişkili olsun. Buna göre,

$$f(z) = zF(a, b; a + b; z) + \frac{\alpha z^{m+1}}{m+1} \{F(a, b; a + b; z)\} * \{F(2, m+1; m+2; z)\} \quad (4.3)$$

ile verilen f harmonik fonksiyonu, $\mathcal{F}_1$ sınıfına aittir (ve dolayısıyla f , $-\log(1-z)$ ye göre $\mathbb{D}$ de konvekse yakındır.) Ayrıca, $f(z)$ nin dilatasyonu αz^m dir (Ponnusamy *et al.* 2014).

İspat: $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ olsun. Burada,

$$A_n = \frac{(a, n-1)(b, n-1)}{(a+b, n-1)(1, n-1)} \quad n \geq 1$$

Ve

$$C_n = A_n \frac{(2, n-1)(m+1, n-1)}{(m+2, n-1)(1, n-1)} \quad n \geq 1$$

olmak üzere

$$h(z) = zF(a, b; a + b; z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n z^n$$

ve

$$g(z) = \frac{\alpha z^{m+1}}{m+1} \{F(a, b; a + b; z)\} * \{F(2, m+1; m+2; z)\} = \frac{\alpha z^m}{m+1} \sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n$$

dir. Burada $*$ kuvvet serisinin klasik Hadamard çarpımını (konvülyasyonunu) gösterir.

Buradan her $n \geq 1$ için $A_1 = 1 = C_1$, $A_n > 0$ ve $C_n > 0$, olduğu görülür.

$B_1 = B_2 = \dots = B_m = 0$ ve $n \geq m+1$ için $B_n = C_{n-m}$ olmak üzere $f(z)$ fonksiyonu

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n z^n + \frac{\bar{\alpha}}{m+1} \sum_{n=m+1}^{\infty} B_n \bar{z}^n$$

biçimini alır. Ayrıca, bazı hesaplamalar sonucunda

$$X(n) = (n-1)(1-ab) + a + b - 2ab$$

olmak üzere

$$nA_n - (n+1)A_{n+1} = \frac{A_n}{n(a+b+n-1)} X(n) \quad n \geq 1$$

elde edilir. Benzer şekilde, $n \geq m+1$ için

$$Y(n) = (n-m-1)(1-ab) + a + b - 2ab$$

olmak üzere

$$nB_n - (n+1)B_{n+1} = \frac{nB_n}{(n-m)^2(a+b+n-m-1)} Y(n)$$

olduğu görülür. Sonuç 3.4.6 yı (3.11) ile birlikte uygulayabilmek için,

$$T = T_1 + (|\alpha|/(m+1))T_2$$

şeklinde yazılması uygundur. Burada $B_1 = B_2 = \dots = B_m = 0$ olmak üzere

$$T_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |(n+1)A_{n+1} - nA_n| \text{ ve } T_2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(n+1)B_{n+1} - nB_n|$$

şeklinde olur. Sonuç 3.4.6 dan $T \leq 1$ ise $f \in \mathcal{F}_1$ (ve dolayısıyla $f, -\log(1-z)$ ye göre konvekse yakın) olur. İspatı tamamlamak için, teoremdeki hipotezler altında $T \leq 1$ olduğunu göstermek yeterlidir.

Hipotez (4.1) altında $T \leq 1$ olduğunu göstermek için, $1 - ab \geq 0$ olsun. O zaman

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{1}{a} + a \geq 2$$

olur ve dolayısıyla

$$a + b - 2ab \geq 0$$

dır. Bu gözleme ve (4.1) e göre her $n \geq 1$ için $X(n) \geq X(1) \geq 0$ dir. Benzer şekilde $n \geq m+1$ için $Y(n) \geq Y(m+1) \geq 0$ dir. Buna göre T_1 ,

$$\begin{aligned}
T_1 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k (nA_n - (n+1)A_{n+1}) \\
&= 1 - \lim_{k \rightarrow \infty} (k+1)A_{k+1} \\
&= 1 - \lim_{k \rightarrow \infty} \left(k \frac{(a,k)(b,k)}{(a+b,k)(1,k)} + \frac{(a,k)(b,k)}{(a+b,k)(1,k)} \right) \\
&= 1 - \frac{ab}{a+b} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(a+1, k-1)(b+1, k-1)}{(a+b+1, k-1)(1, k-1)} - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(a,k)(b,k)}{(a+b,k)(1,k)}
\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Böylece, Stirling formülüne göre

$$T_1 = 1 - \frac{ab}{a+b} \frac{\Gamma(a+b+1)}{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)} = 1 - \frac{1}{B(a,b)}, \quad (4.4)$$

elde edilir. $B_1 = B_2 = \dots = B_m = 0$ ve her $n \geq 2$ için $Y(n) \geq 0$ iken

$$\begin{aligned}
T_2 &= |(m+1)B_{m+1} - mB_m| + \sum_{n=m+1}^{\infty} |(n+1)B_{n+1} - nB_n| \\
&= (m+1) + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=m+1}^k (nB_n - (n+1)B_{n+1}) \\
&= (m+1) + \lim_{k \rightarrow \infty} ((m+1) - (k+1)B_{k+1}) \\
&= 2(m+1) - \lim_{k \rightarrow \infty} (k+1)B_{k+1}
\end{aligned}$$

olur. Sağ limiti hesaplayabilmek için $(k+1)B_{k+1}$ ifadesi

$$\begin{aligned}
(k+1)B_{k+1} &= (k-m) \frac{(a, k-m)(b, k-m)}{(a+b, k-m)(1, k-m)} \frac{(2, k-m)(m+1, k-m)}{(m+2, k-m)(1, k-m)} \\
&\quad + (m+1) \frac{(a, k-m)(b, k-m)}{(a+b, k-m)(1, k-m)} \frac{(2, k-m)(m+1, k-m)}{(m+2, k-m)(1, k-m)}
\end{aligned}$$

olacak şekilde yeniden yazılır. Stirling formülü yukarıdaki gibi uygulanırsa

$$T_2 = 2(m+1) - \frac{m+1}{B(a,b)}, \quad (4.5)$$

elde edilir. (4.4) ve (4.5) in birleşiminden

$$T = 1 + 2|\alpha| - \frac{1+|\alpha|}{B(a,b)}$$

yazılır. Hipotez (4.1) altında $T \leq 1$ olduğu açıkça görülür ve sonuç olarak $f \in \mathcal{F}_1$ dir

Hipotez (4.2) nin sağlandığı varsayılın. O zaman $ab \geq 1$ ve $2ab \geq a+b$ olur. Böylece her $n \geq 1$ için $X(n) \leq X(1) \leq 0$ olur. Benzer şekilde, her $n \geq m+1$ için $Y(n) \leq Y(m+1) \leq 0$ olur. Sonuçta, T toplamı

$$\begin{aligned} T &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k ((n+1)A_{n+1} - nA_n) + \frac{|\alpha|}{m+1} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=m}^k ((n+1)B_{n+1} - nB_n) \\ &= \left(\frac{1}{B(a,b)} - 1 \right) + \frac{|\alpha|}{B(a,b)} \end{aligned}$$

şeklini alır. Böylece $T \leq 1$ sağlanır. Dolayısıyla (4.2) şartı ve yukarıdaki bağıntı altında $f \in \mathcal{F}_1$ olduğu görülür. Sonuç olarak $h(z)$ ve $g(z)$ nin kuvvet serisi gösterimlerinden

$$g'(z) = \frac{\alpha}{m+1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a, n-1)(b, n-1)}{(a+b, n-1)(1, n-1)} \frac{(2, n-1)(m+1, n-1)}{(m+2, n-1)(1, n-1)} (n+m)z^{n+m-1}$$

olduğu görülür. $(a, n)(a+n) = a(a+1, n)$ olduğundan son seriyi

$$g'(z) = \alpha z^m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a, n-1)(b, n-1)}{(a+b, n-1)(1, n-1)} n z^{n-1} = \alpha z^m h'(z)$$

olarak yeniden yazabiliriz. Böylece $f(z)$ nin dilatasyonu

$$\omega(z) = \frac{g'(z)}{h'(z)} = \alpha z^m$$

şeklinde olur.

Sonuç 4.1.2: Teorem 4.1.1. in a, b, m ve α üzerindeki hipotezleri kabul edilsin. Buna ek olarak, $m = 2k$ ise, o zaman

$$f(z) = zF(a, b; a+b; z) = \frac{\alpha z^{2k+1}}{2k+1} \{F(a, b; a+b; z) * F(2, 2k+1; 2k+2; z)\}$$

ve

$$t(z) = 2Im \left\{ \frac{\sqrt{\alpha} z^{k+1}}{k+1} [F(a, b; a+b; z) * F(2, k+1; k+2; z)] \right\} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

olmak üzere $(Re(f(z)), Im(f(z)), t(z))$ gösterimi, izdüşümü $f(z)$ olan minimal bir yüzey tanımlar (Ponnusamy *et al.* 2014).

İspat: Teorem 4.1.1, $f(z)$ nin $\mathbb{D}$ de ünivalent olduğunu gösterir. $f(z)$ nin tanımından, ikinci kompleks dilatasyonu analitik bir fonksiyonun karesi olan

$$\omega(z) = q^2(z) = \alpha z^{2k}$$

fonksiyonu elde edilir. Bu nedenle, Teorem 3.3.4 de verilen Weierstrass gösteriminden yararlanılarak f fonksiyonu minimal bir yüzeye yükseltilebilir. $h(z)$ nin kuvvet serisi gösterimi göz önüne alınırsa $t(z)$,

$$t(z) = 2Im \left\{ \frac{\sqrt{\alpha} z^{k+1}}{k+1} [F(a, b; a+b; z) * F(2, k+1; k+2; z)] \right\} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

şeklini alır. Böylece ispat tamamlanır.

$a, b > 0$ olması durumunda Teorem 4.1.1 aşağıdaki biçimde yeniden düzenlenebilir.

Sonuç 4.1.3. $a > 0, b > 0, m \in \mathbb{N}$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ aşağıdaki

$$\begin{aligned} a \in (0, \infty), \quad b \in \left(0, \frac{1}{a}\right] \text{ ve } |\alpha|(2B(a, b) - 1) &\leq 1 \\ a \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right), \quad b \in \left[\frac{a}{2a-1}, \infty\right) \text{ ve } |\alpha| &\leq 2B(a, b) - 1 \end{aligned}$$

koşullardan herhangi birini sağlasın. O zaman (4.3) deki gibi tanımlanan $f(z)$ harmonik fonksiyonu $\mathbb{D}$ de konvekse yakındır (Ponnusamy *et al.* 2014).

Örnek 4.1.4: Sonuç 4.1.2. ve 4.1.3. te $a = 1$ ve $b = 1$ alınırsa, aşağıdaki sonuçlara ulaşılır.

Eğer $m \in \mathbb{N}$ ve $\alpha \in \mathbb{C}, 0 < |\alpha| \leq 1$ alınırsa o zaman

$$f(z) = zF(1, 1; 2; z) + \frac{\alpha z^m}{m+1} \int_0^z F(2, m+1; m+2; t) dt$$

fonksiyonu $\mathcal{F}_1$ sınıfına aittir.

$$F(a+1, b+1; c+1; z) = \frac{c}{ab} F'(a, b; c; z)$$

türev formülü kullanılarak, yukarıdaki integral hesaplanabilir ve sonuç olarak

$$f(z) = -\log(1-z) + \frac{\overline{\alpha z^m}}{m} (F(1, m; m+1; z) - 1)$$

fonksiyonunun $\mathcal{F}_1$ sınıfına ait olduğu sonucuna ulaşılır. Özel olarak , $m = 6$ için

$$f(z) = \begin{cases} -\log(1-z) - \frac{\overline{\alpha(z + \log(1-z))}}{1} & m = 1 \text{ ise} \\ -\log(1-z) - \frac{\overline{\left(\frac{\alpha}{2}\right)(2z + z^2 + 2\log(1-z))}}{2} & m = 2 \text{ ise} \\ -\log(1-z) - \frac{\overline{\left(\frac{\alpha}{6}\right)(6z + 3z^2 + 2z^3 + 6\log(1-z))}}{6} & m = 3 \text{ ise} \\ -\log(1-z) - \frac{\overline{\left(\frac{\alpha}{12}\right)(12z + 6z^2 + 4z^3 + 3z^4 + 12\log(1-z))}}{12} & m = 4 \text{ ise} \end{cases} \quad (4.6)$$

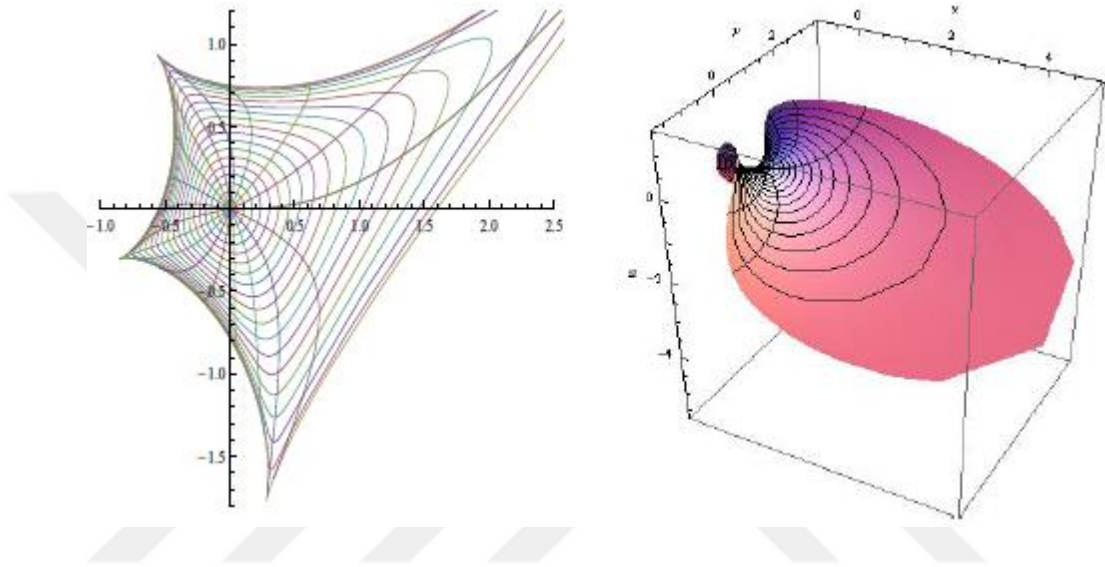
ve

$$f(z) = -\log(1-z) - \frac{\overline{\left(\frac{\alpha}{60}\right)(60z + 30z^2 + 20z^3 + 15z^4 + 12z^5 + 10z^6 + 60\log(1-z))}}{60}$$

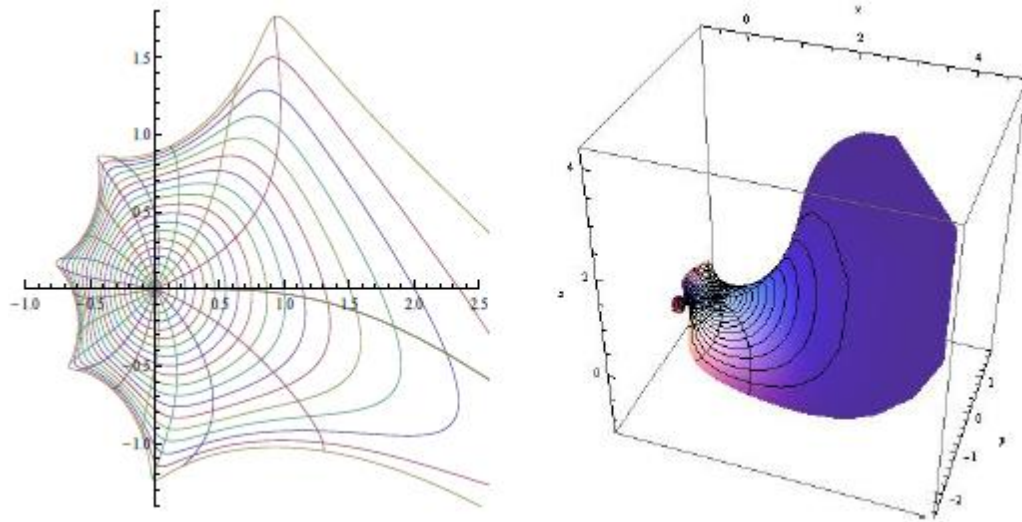
alınsın. Özellikle, $m = 2, 4, 6$ olduğunda, yukarıdaki harmonik dönüşümler,

$$t(z) = \begin{cases} -2Im\{\sqrt{\alpha}(z + \log(1-z))\} & m = 2 \text{ ise} \\ -Im\{\sqrt{\alpha}(2z + z^2 + 2\log(1-z))\} & m = 4 \text{ ise} \\ -(1/3)Im\{\sqrt{\alpha}(6z + 3z^2 + 2z^3 + 6\log(1-z))\} & m = 6 \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere $\mathbb{R}^3$ te koordinatları $(\text{Re}(f(z)), \text{Im}(f(z)), t(z))$ formülü ile verilen minimal yüzeye yükseltilebilir. m, α nın belirli değerleri için (4.6) da verilen $f(z)$ fonksiyonu altında $r \rightarrow 1$ iken $|z| < r$ diskinin görüntüsü ve buna karşılık gelen minimal yüzeyler Şekil 4.1’de gösterilmiştir (Ponnusamy *et al.* 2014).

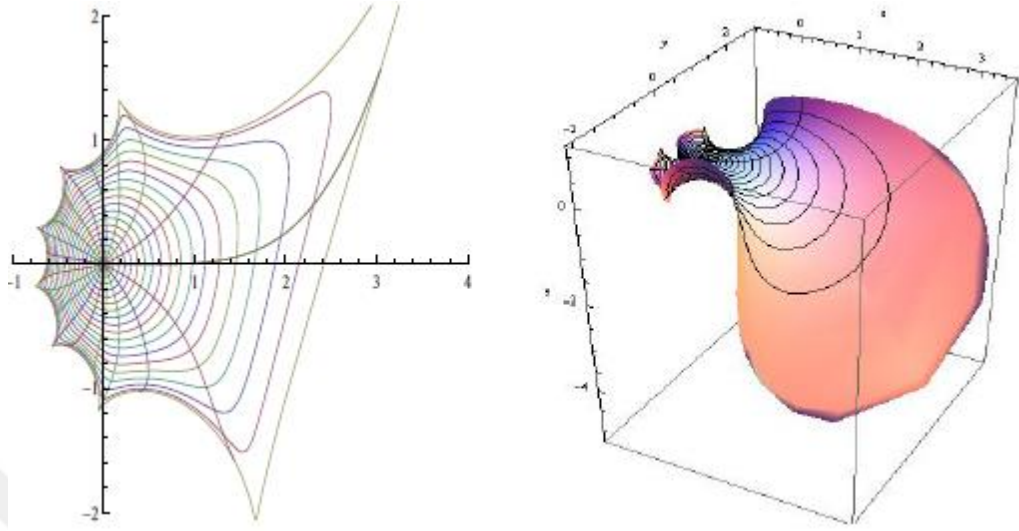


(a) $m = 2$ ve $\alpha = -i$



(b) $m = 4$ ve $\alpha = 0.75i$

Şekil 4.1. m ve α nin belirli değerlerine karşılık gelen minimal yüzeyler ve $f(z)$ görüntüleri (Ponnusamy *et al.* 2014) (devam)



(c) $m = 6$ ve $\alpha = -\frac{(1-i)}{\sqrt{2}}$

Şekil 4.1. m ve α nin belirli değerlerine karşılık gelen minimal yüzeyler ve $f(z)$ görüntüleri (Ponnusamy *et al.* 2014).

Teorem 4.1.5: $a > 0, b > 0$ veya $b = \bar{a}$, $\operatorname{Re} a > 0$ olmak üzere $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ olsun. $a, b, m \in \mathbb{N}$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ nin

$$ab \leq \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{a+b}{3} \right\} \text{ ve } |\alpha|(B(a, b) - 1) \leq 1 \quad (4.7)$$

$$ab \geq \max \left\{ \frac{1}{2}, \frac{a+b}{3} \right\} \text{ ve } |\alpha| \leq B(a, b) - 1, \quad (4.8)$$

koşullarından herhangi biriyle ilişkili olduğu varsayılın. Buna göre,

$$f(z) = zF(a, b; a + b; z^2) + \frac{\alpha z^{m+1}}{m+1} \{F(a, b; a + b; z^2) * F(2, m+1; m+2; z)\} \quad (4.9)$$

ile verilen f harmonik fonksiyonu $\mathcal{F}_2$ sınıfına aittir (ve bu nedenle f , dikey doğrultuda konvektir). Ayrıca, $f(z)$ nin dilatasyonu αz^m dir (Ponnusamy *et al.* 2014).

İspat: Teorem 4.1.1 in ispatında olduğu gibi $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ olsun. Burada

$$A_{2n-1} = \frac{(a, n-1)(b, n-1)}{(a+b, n-1)(1, n-1)}, \quad n \geq 1$$

ve

$$C_{2n-1} = A_{2n-1} \frac{(2, 2n-2)(m+1, 2n-2)}{(m+2, 2n-2)(1, 2n-2)}, \quad n \geq 1$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{\alpha z^{m+1}}{m+1} \{F(a, b; a+b; z^2) * F(2, m+1; m+2; z)\} \\ &= \frac{\alpha z^m}{m+1} \sum_{n=1}^{\infty} C_{2n-1} z^{2n-1} \end{aligned}$$

ve

$$h(z) = zF(a, b; a+b; z^2) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n-1} z^{2n-1}$$

şeklindedir. Burada

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n-1} z^{2n-1} + \overline{\frac{\alpha}{m+1} \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n+m-1} z^{2n+m-1}}$$

olacak şekilde $C_{2n-1} = B_{2n+m-1}$ alınırsa bazı hesaplamalar sonucunda,

$$X(n) = (n-1)(1-2ab) + a + b - 3ab$$

olmak üzere

$$(2n-1)A_{2n-1} - (2n+1)A_{2n+1} = \frac{A_{2n-1}}{n(a+b+n-1)}X(n) \quad n \geq 1$$

ifadesi elde edilir ve (4.7) varsayımı ile $X(n) \geq 0$ sağlanır. Benzer şekilde $n \geq 1$ için

$$(2n+m-1)B_{2n+m-1} - (2n+m+1)B_{2n+m+1} = \frac{(2n+m-1)B_{2n+m-1}}{n(2n-1)(a+b+n-1)}X(n)$$

olur. Yine, $B_1 = B_2 = \dots = B_m = 0$ iken

$$T_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |(n+1)A_{n+1} - (n-1)A_{n-1}| \text{ ve } T_2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(n+1)B_{n+1} - (n-1)B_{n-1}|$$

olmak üzere $T = T_1 + (|\alpha|/(m+1))T_2$ olsun.

Teorem 3.4.8 göz önüne alınırsa, $T \leq 1$ olduğunu göstermek yeterlidir. Teorem 4.1.1 in ispatından sonra, T_1 ve T_2 serileri hesaplanabilir ve

$$T = 1 - \frac{2}{B(a,b)} + 2|\alpha| - \frac{2|\alpha|}{B(a,b)}$$

olduğu görülür.

(4.7) hipotezi altında $T \leq 1$ ve dolayısıyla $f \in \mathcal{F}_2$ dir. Benzer şekilde, (4.8) hipotezi sağlandığında, $X(n) \leq 0$ olacak şekilde, T ifadesi

$$T = \frac{2}{B(a, b)} - 1 + \frac{2|\alpha|}{B(a, b)}$$

ye dönüşür. Dolayısıyla $T \leq 1$ olduğu, (4.8) ve yukarıdaki bağıntıdan görülür. Son olarak, $h(z)$ ve $g(z)$ nin kuvvet serileri gösteriminden,

$$g'(z) = \frac{\alpha}{m+1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a, n-1)(b, n-1)}{(a+b, n-1)(1, n-1)} \frac{(2, 2n-2)(m+1, 2n-2)}{(m+2, 2n-2)(1, 2n-2)} (2n+m-1) z^{2n+m-2}$$

ifadesi elde edilir. $(a, n)(a+n) = a(a+1, n)$ olduğu için son seri

$$g'(z) = \alpha z^m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a, n-1)(b, n-1)}{(a+b, n-1)(1, n-1)} (2n-1) z^{2n-2} = \alpha z^m h'(z)$$

olarak yeniden yazılabilir. Bu nedenle $f(z)$ nin dilatasyonu

$$\omega(z) = \frac{g'(z)}{h'(z)} = \alpha z^m$$

şeklindedir.

Sonuç 4.1.6: a, b, m ve α değerleri Teorem 4.1.1. deki hipotezleri sağlasın. Ayrıca, $m = 2k$ olsun. O zaman

$$f(z) = zF(a, b; a+b; z^2) = \frac{\alpha z^{2k+1}}{2k+1} \{F(a, b; a+b; z^2) * F(2, 2k+1; 2k+2; z)\}$$

ve

$$t(z) = 2Im \left\{ \frac{\sqrt{\alpha} z^{k+1}}{k+1} [F(a, b; a+b; z^2) * F(2, k+1; k+2; z)] \right\} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

olmak üzere $(Re(f(z)), Im(f(z)), t(z))$ gösterimi, izdüşümü $f(z)$ olan bir minimal yüzey tanımlar (Ponnusamy *et al.* 2014).

İspat. Sonuç, Teorem 4.1.5 ve $\mathbb{R}^3$ te (u, v, t) koordinatları

$$u = Re(f(z)), \quad v = Im(f(z)), \quad t(z) = 2Im \left\{ \int_0^z q(\zeta) h'(\zeta) d\zeta \right\}$$

şeklinde olan minimal yüzeyin Weierstrass gösteriminden gelir. $h(z)$ nin kuvvet serisi gösterimi göz önüne alınırsa, $t(z)$ nin

$$t(z) = 2Im \left\{ \frac{\sqrt{\alpha} z^{k+1}}{k+1} [F(a, b; a+b; z^2) * F(2, k+1; k+2; z)] \right\} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

şeklini aldığı görülür. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.4.7 den, (4.9) da ki $f(z)$ fonksiyonunun sadece $\mathbb{D}$ de konvekse yakın değil, aynı zamanda $\mathbb{D}$ de dikey doğrultuda konveks olduğu görülür.

$$\begin{aligned} \phi(z) &= h(z) + g(z) \\ &= zF(a, b; a+b; z^2) + \frac{\alpha z^{m+1}}{m+1} \{F(a, b; a+b; z^2) * F(2, m+1; m+2; z)\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $f(z)$ nin konform ön makaslamaasının, $\mathbb{D}$ de dikey doğrultuda konveks ve ünivalent olduğu görülür.

Sonuç 4.1.7:

$$b \in \begin{cases} \left(0, \frac{1}{2a}\right] & a \in \left(0, \frac{1}{2}\right] \cup [1, \infty) \text{ ise} \\ \left(0, \frac{a}{3a-1}\right] & a \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \text{ ise} \end{cases}$$

olacak şekilde $a > 0$, $b > 0$ olsun ve $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha|(B(a, b) - 1) \leq 1$ şartını sağlasın. O zaman (4.9) te tanımlanan $f(z)$ fonksiyonu $\mathcal{F}_2$ sınıfına aittir (Ponnusamy *et al.* 2014).

İspat. Sonucu ispatlamak için yukarıdaki koşulların (4.7) yi sağladığını kanıtlamak yeterlidir. $0 < b \leq \left(\frac{1}{2a}\right)$ olduğu zaman $ab \leq \frac{1}{2}$ dir. Eğer $0 < a < \frac{1}{3}$ olursa, o zaman $3a - 1 < 0$ ve dolayısıyla $3ab < a + b$ olur. $a \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right] \cup [1, \infty)$ ise

$$b \leq \frac{1}{2a} \leq \frac{a}{3a-1},$$

elde edilir. Bu ifade tekrar $3ab < a + b$ olduğu anlamına gelir. $a = 1/3$ iken $3ab \leq a + b$ eşitsizliği sağlanır. $a \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ ise

$$b \leq \frac{a}{3a-1} \leq \frac{1}{2a},$$

dır. Bu sonuçların birleştirilmesi ile istenilen sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.8.

$$b \in \begin{cases} \left[\frac{a}{3a-1}, \infty\right) & a \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right] \cup [1, \infty) \text{ ise} \\ \left[\frac{1}{2a}, \infty\right) & a \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \text{ ise} \end{cases}$$

olacak şekilde $a > 0$, $b > 0$ olsun ve $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| \leq B(a, b) - 1$ şartını sağlasın. O zaman (4.9) da tanımlanan $f(z)$ fonksiyonu $\mathcal{F}_2$ sınıfına aittir (Ponnusamy *et al.* 2014).

İspat:

$$ab \geq \max \left\{ \frac{1}{2}, \frac{a+b}{3} \right\}$$

koşulu

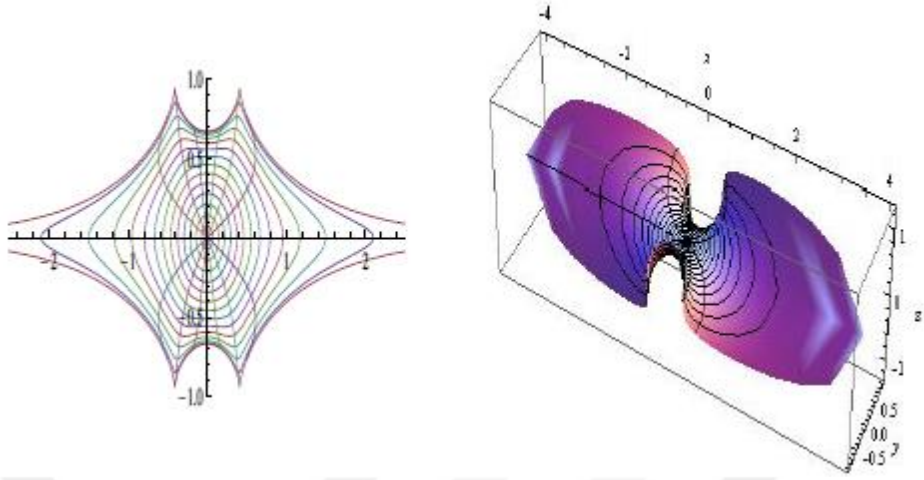
$$b \geq \max \left\{ \frac{1}{2a}, \frac{a}{3a-1} \right\} = \begin{cases} \frac{a}{3a-1} & (a-1)(a-1/2) \geq 0 \text{ ise} \\ \frac{1}{2a} & (a-1)(a-1/2) \leq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak yeniden yazılabilir. a pozitif olduğu için, $a > 1/3$ ise $\frac{a}{3a-1} > 0$ dır. Sonuç, yukarıdaki eşitsizlik ve (4.8) den bulunur.

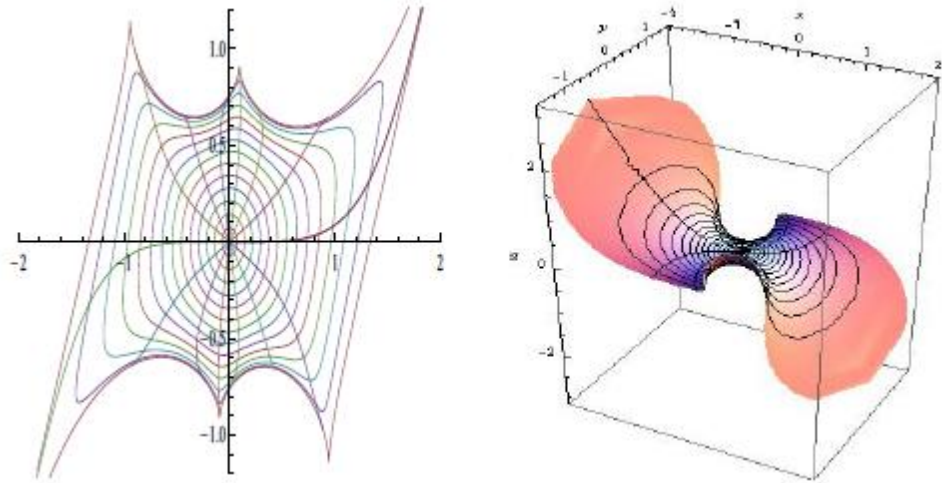
Örnek 4.1.9: Eğer $b \in (0, 1/2)$, $m \in \mathbb{N}$ ve $0 < |\alpha| \leq b/(1-b)$ olacak şekilde $\alpha \in \mathbb{C}$ ise, o zaman

$$f(z) = zF(1, b; 1+b; z^2) = \frac{\alpha z^{2m+1}}{m+1} \{F(1, b; 1+b; z^2) * F(2, m+1; m+2; z)\}$$

fonksiyonu $\mathcal{F}_2$ sınıfına aittir ve bu nedenle f , $\mathbb{D}$ de konvekse yakındır. a, b, m, α nın belirli değerleri için (4.9) da verilen $f(z)$ fonksiyonu altında $r \rightarrow 1$ iken $|z| < r$ diskinin görüntüsü ve buna karşılık gelen minimal yüzeyler şekil 4.2. (a) - (e) de gösterilmiştir. $\mathcal{F}_2$ sınıfında bulunan fonksiyonlar dikey doğrultuda konvektir. Şekil 4.2 (a) - (e) de verilen harmonik dönüşümlerin görüntüleri, bunlara karşılık gelen konform ön makaslamaları ile birlikte Şekil 4.3. (a) - (e) da gösterilmiştir (Ponnusamy *et al.* 2014).

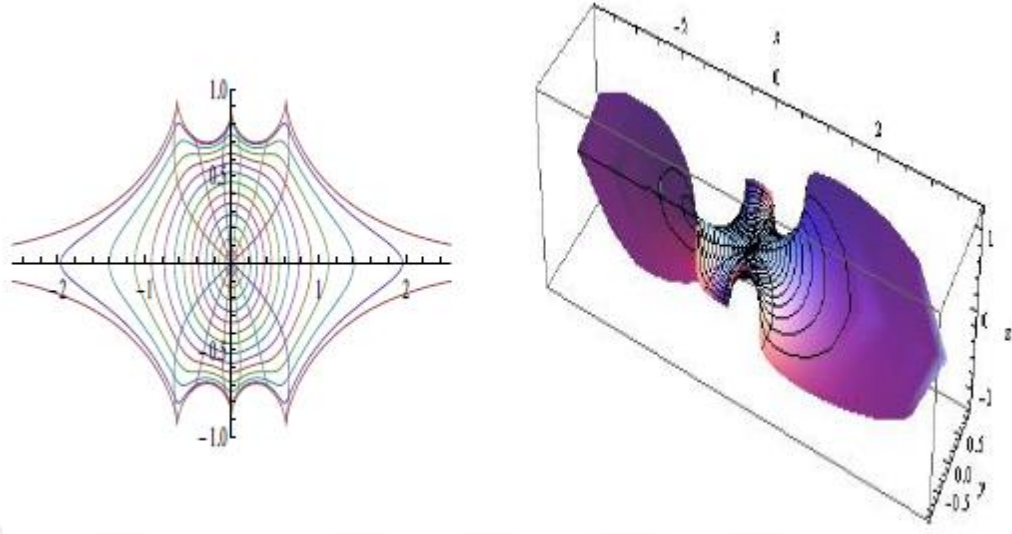


(a) $a = 1, b = 0.5, m = 4$ ve $\alpha = 1$

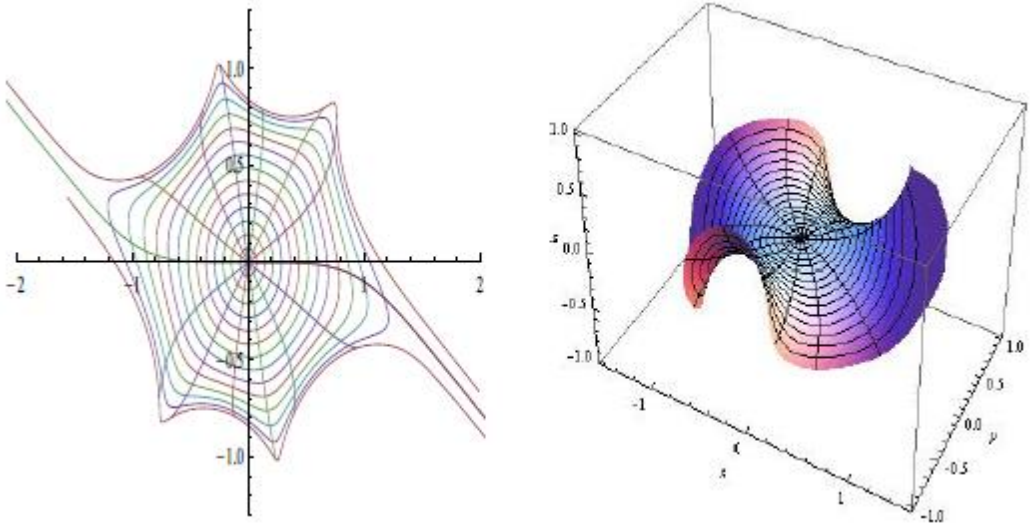


(b) $a = 1, b = 0.5, m = 4$ ve $\alpha = -\frac{(1+i)}{\sqrt{2}}$

Şekil 4.2. $f(z)$ nin görüntüsü ve a, b, m ve α nın belirtilen değerlerine karşılık gelen minimal yüzeyler (Ponnusamy *et al.* 2014) (devam)

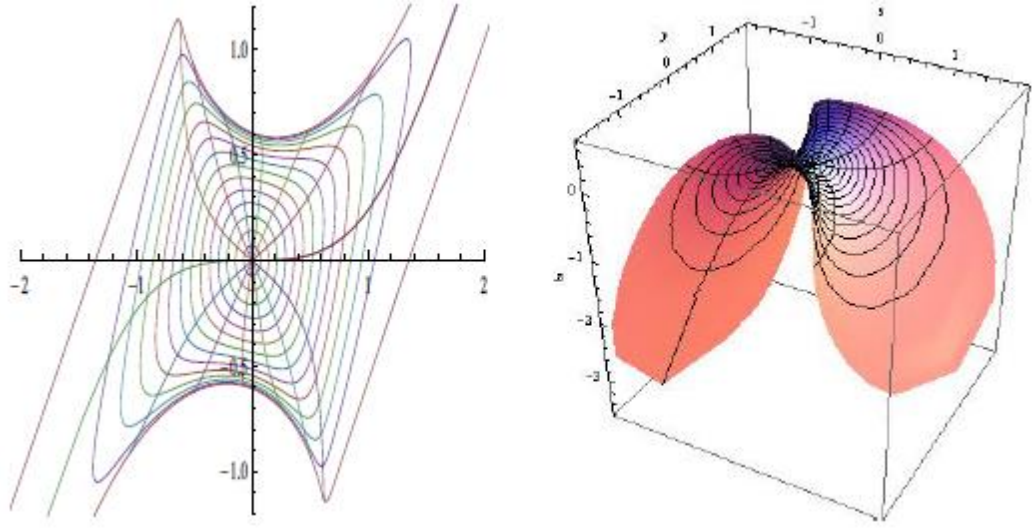


(c) $a = 1$, $b = 0.5$, $m = 6$ ve $\alpha = 1$



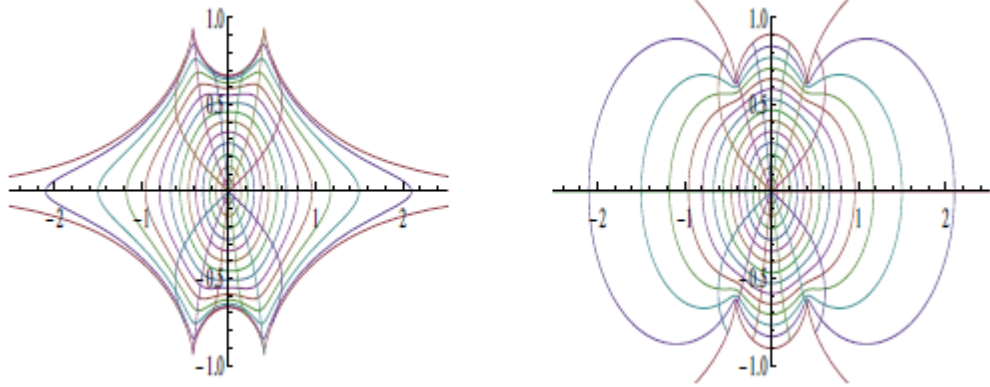
(d) $a = 1$, $b = \frac{1}{7}$, $m = 4$ ve $\alpha = \frac{i}{7}$

Şekil 4.2. $f(z)$ nin görüntüsü ve a , b , m ve α nın belirtilen değerlerine karşılık gelen minimal yüzeyler (Ponnusamy *et al.* 2014) (devam)



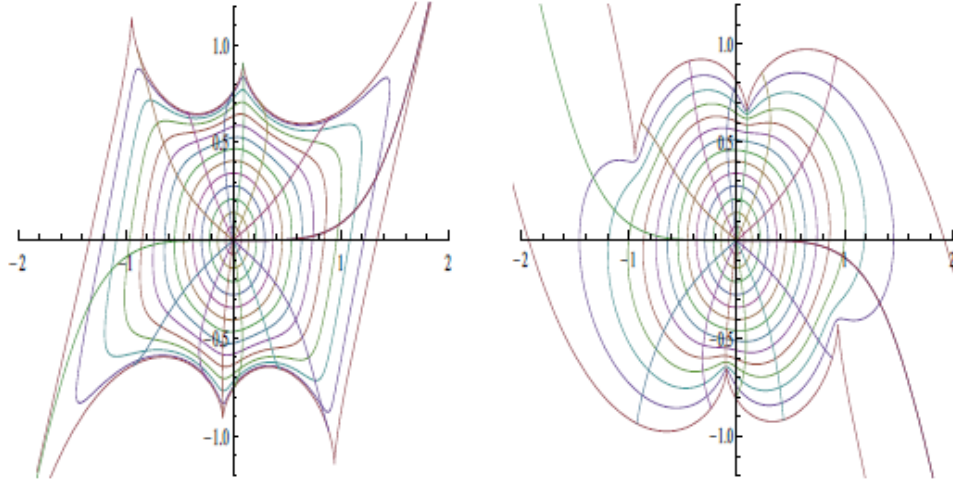
$$(e) \ a = \frac{3}{4}, \ b = \frac{2}{3}, \ m = 2 \text{ ve } \alpha = -\frac{0.871(1+i)}{\sqrt{2}}$$

Şekil 4.2. $f(z)$ nin görüntüsü ve a, b, m ve α nın belirtilen değerlerine karşılık gelen minimal yüzeyler (Ponnusamy *et al.* 2014).

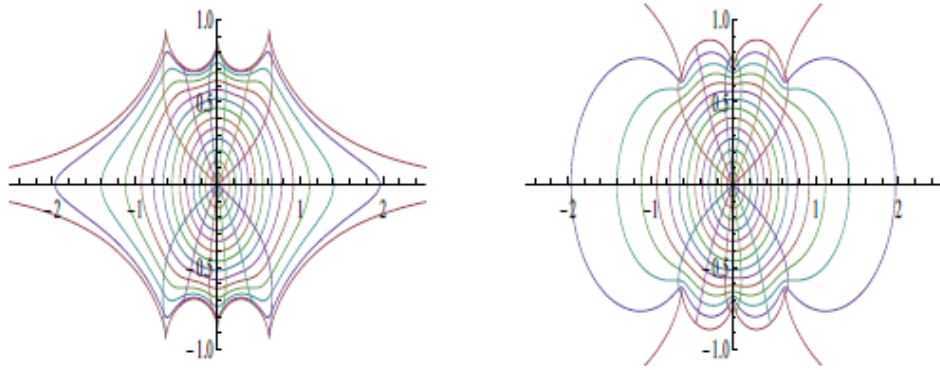


$$(a) \ a = 1, b = 0.5, \ m = 4 \text{ ve } \alpha = 1$$

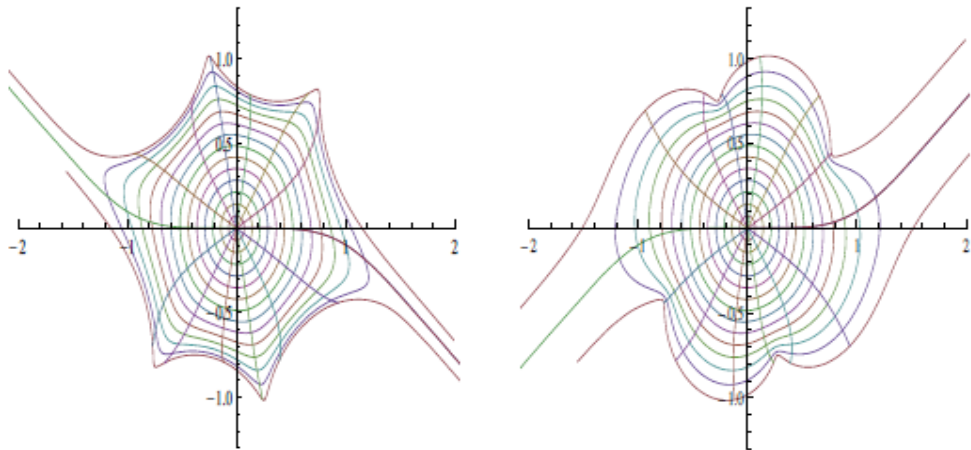
Şekil 4.3. $f(z)$ nin görüntüsü ve a, b, m ve α nın belirtilen değerlerine karşılık gelen konform ön makaslamaların görüntüleri (Ponnusamy *et al.* 2014)



(b) $a = 1$, $b = 0.5$, $m = 4$ ve $\alpha = -\frac{(1+i)}{\sqrt{2}}$

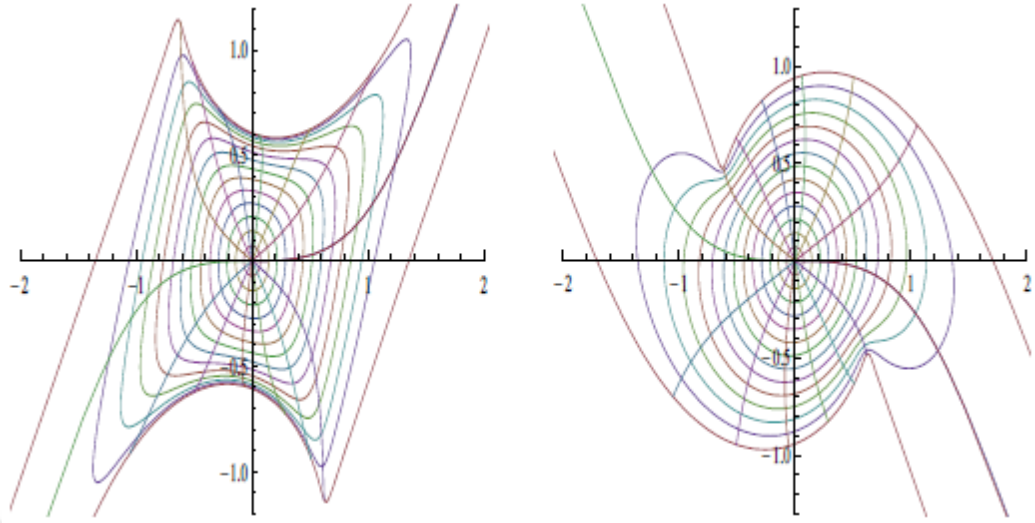


(c) $a = 1$, $b = 0.5$, $m = 6$ ve $\alpha = 1$



(d) $a = 1$, $b = \frac{1}{7}$, $m = 4$ ve $\alpha = \frac{i}{7}$

Şekil 4.3. $f(z)$ nin görüntüsü ve a , b , m ve α nın belirtilen değerlerine karşılık gelen konform ön makaslamaların görüntüleri (Ponnusamy *et al.* 2014) (devam)



$$(e) \ a = \frac{3}{4}, \ b = \frac{2}{3}, \ m = 2 \text{ ve } \alpha = -\frac{0.871(1+i)}{\sqrt{2}}$$

Şekil 4.3. $f(z)$ nin görüntüsü ve a, b, m ve α nın belirtilen değerlerine karşılık gelen konform ön makaslamaların görüntüleri (Ponnusamy *et al.* 2014) (devam)

4.2. Ünivalent Harmonik Dönüşümler ve Minimal Yüzeylere Yükseltilmesi

$q = 0$ için $(q)_0 = 1$ ve $q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ için,

$$(q)_k = q(q+1) \cdots (q+k-1) = \frac{\Gamma(q+k)}{\Gamma(q)}$$

Pochhammer sembolü olmak üzere $|x| < 1, |y| < 1$ için

$$F_1(\alpha; \beta_1, \beta_2; \gamma; x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{k+l} (\beta_1)_k (\beta_2)_l}{k! l! (\gamma)_{k+l}} x^k y^l$$

serisi ile tanımlanan F_1 Appell hipergeometrik fonksiyonu, $Re \gamma > Re \alpha > 0$ olmak üzere tek boyutlu Euler tipi olarak,

$$F_1(\alpha; \beta_1, \beta_2; \gamma; x, y) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma - \alpha)} \int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}}{(1-xt)^{\beta_1}(1-yt)^{\beta_2}} dt$$

integrali şeklinde yazılabilir.

Bu bölümde $\mathbb{D}$ birim diskinden kendisi üzerine $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ analitik olan dönüşümlerin sınıfı $\mathcal{B}$ ile gösterilsin. Özel olarak $\mathcal{B}_0 = \{\omega \in \mathcal{B}: \omega(0) = 0\}$ ve $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ olsun.

4.2.1. $\omega(z) = z \frac{z+a}{1+az}$ dilatasyonu ile oluşturulan harmonik dönüşüm

Bu bölüm boyunca, aşağıdaki örneklerde ve Teorem 4.2.1.4 te amaç, $-1 \leq a < 1$ olmak üzere $\omega = z \frac{z+a}{1+az}$ dilatasyonu ile birlikte yatay doğrultuda konveks dönüşümlerin bir ailesini oluşturmaktır. $a = 1$ ve $a = 0$ için $\omega(z)$, sırasıyla z ve z^2 ye dönüşür.

Örnek 4.2.1.1. $\varphi(z) = z$ özdeşlik dönüşümünü ele alalım. O zaman (3.13) de makaslama yapımı,

$$F_a(z) = \operatorname{Re}\{-z + (1-a)\log(1+z) - (1+a)\log(1-z)\} + i\operatorname{Im}\{z\}$$

harmonik dönüşümlerini meydana getirir (Jiang *et al.* 2015).

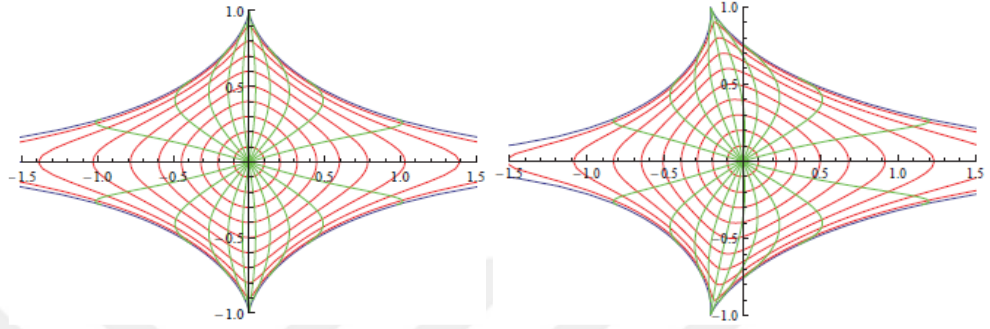
$-1 \leq a \leq 1$ için F_a altındaki $\mathbb{D}$ birim diskinin görüntüleri Şekil 4.4 te gösterilmiştir. F_0 ve F_1 altındaki $\mathbb{D}$ görüntüleri, sırasıyla Şekil 4.4 te gösterilmiştir. Ayrıca, $F_a(z)$ ve $F_{-a}(z)$ görüntüleri

$$\operatorname{Re}\{F_{-a}(-z)\} = \operatorname{Re}\{z + (1+a)\log(1-z) - (1-a)\log(1+z)\} = -\operatorname{Re}\{F_a(z)\}$$

ve

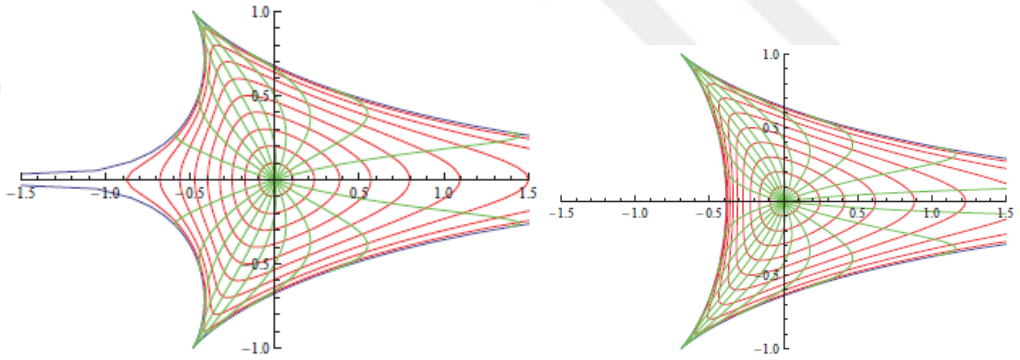
$$\operatorname{Im}\{F_{-a}(-z)\} = \operatorname{Im}\{-z\} = -\operatorname{Im}\{F_a(z)\}$$

olduğundan imajiner eksene göre simetriktir.



(a) $a = 0$

(b) $a = 0.3$



(c) $a = 0.7$

(d) $a = 1$

Şekil 4.4. $\omega = z \frac{z+a}{1+az}$ iken özdeşlik dönüşümünün makaslamaşı (Jiang *et al.* 2015).

Örnek 4.2.1.2. $\mathbb{D}$ yi, $|\operatorname{Im}\{w\}| < \frac{\pi}{4}$ yatay şeridine dönüştüren $\varphi(z) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+z}{1-z} \right)$ strip dönüşümü ele alınsın. Bu durumda (3.13) ten yatay doğrultuda konveks olan

$$F_{0,a}(z) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1+a}{2} \frac{z}{1-z} + \frac{1-a}{2} \frac{z}{1+z} \right\} + i \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+z}{1-z} \right) \right\}$$

dönüşümleri elde edilir. $-1 \leq a \leq 1$ için $F_{0,a}$ altında birim diskin görüntüleri Şekil 4.5 de gösterilmiştir. Özel olarak, $F_{0,0}(\mathbb{D})$ ve $F_{0,1}(\mathbb{D})$ görüntüleri sırasıyla Şekil 4.5 (a) ve (d) de gösterilmiştir. Ayrıca, $F_{0,a}(z)$ ve $F_{0,-a}(z)$ görüntüleri imajiner eksene göre simetriktir.

$$F_{0,a}(e^{i\theta}) = \begin{cases} -\frac{a}{2} + i\frac{\pi}{4} & 0 < \theta < \pi \text{ için} \\ -\frac{a}{2} - i\frac{\pi}{4} & \pi < \theta < 2\pi \text{ için} \end{cases}$$

ifadesi ele alınsın. Bu durumda $F_{0,a}(z)$, üst ve alt yarım daireleri sırasıyla $(-\frac{a}{2}, \frac{\pi}{4})$ ve $(-\frac{a}{2}, -\frac{\pi}{4})$ tek noktalarına bürer. $F_{0,a}(z)$, $-1 < a < 1$ için $\mathbb{D}$ birim diskini

$$\{w \in \mathbb{C} : |Im\{w\}| < \frac{\pi}{4}\}$$

şeridinin tümü üzerine dönüştürür (Jiang *et al.* 2015)

$-\infty < Re\{F_{0,a}(z)\} < +\infty$ olduğunu göstermek için $z = x + iy$ iken, $z \in (-1,1)$ için,

$$-\infty < Re\left\{\frac{1+a}{2} \frac{z}{1-z} + \frac{1-a}{2} \frac{z}{1+z}\right\} < +\infty$$

olduğunun ispatlaması gerekir.

$$U(x) = \frac{1+a}{2} \frac{x}{1-x} + \frac{1-a}{2} \frac{x}{1+x}$$

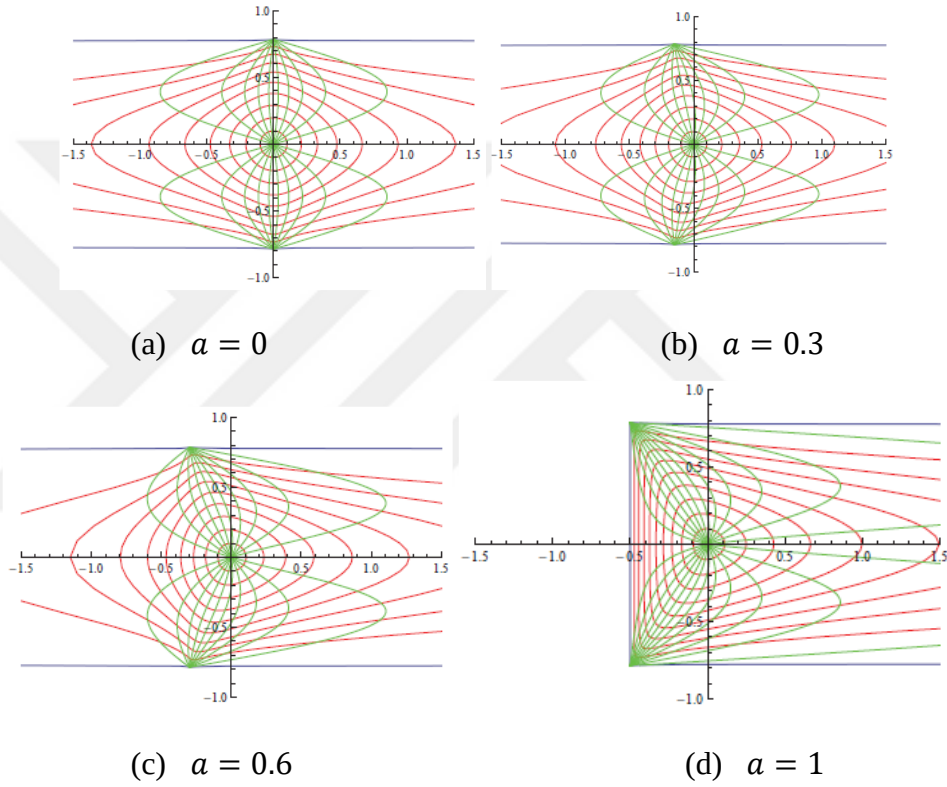
fonksiyonunu ele alınsın ve $U(x)$ fonksiyonunun $x \in (-1,1)$ aralığında sürekli olduğu göz önünde bulundursun. Sabit bir a değeri için

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} U(x) = -\infty \text{ ve } \lim_{x \rightarrow 1^-} U(x) = +\infty$$

olduğu görülür. Ek olarak, $a = -1$ ve $a = 1$ durumları için, $F_{0,a}(z)$, birim disk sırasıyla

$$\left\{w: \operatorname{Re}\{w\} < \frac{1}{2}, |\operatorname{Im}\{w\}| < \frac{\pi}{4}\right\} \text{ ve } \left\{w: \operatorname{Re}\{w\} > -\frac{1}{2}, |\operatorname{Im}\{w\}| < \frac{\pi}{4}\right\}$$

yarı şeritlerine dönüştürür. Böylece ispat tamamlanır.

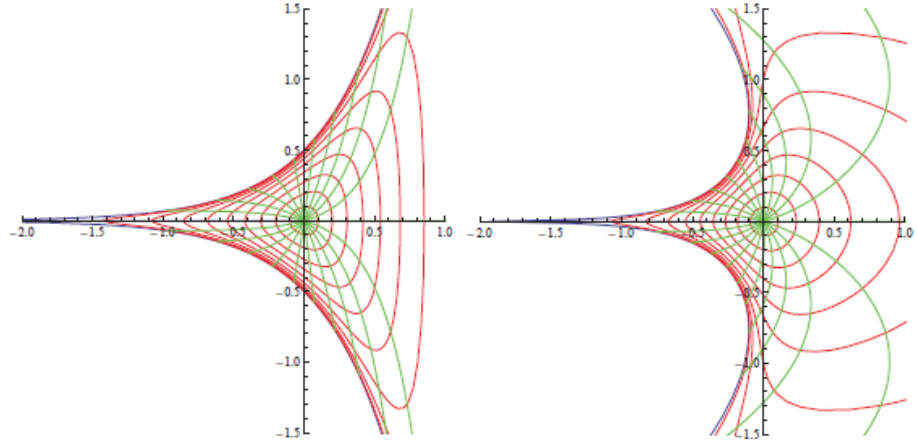
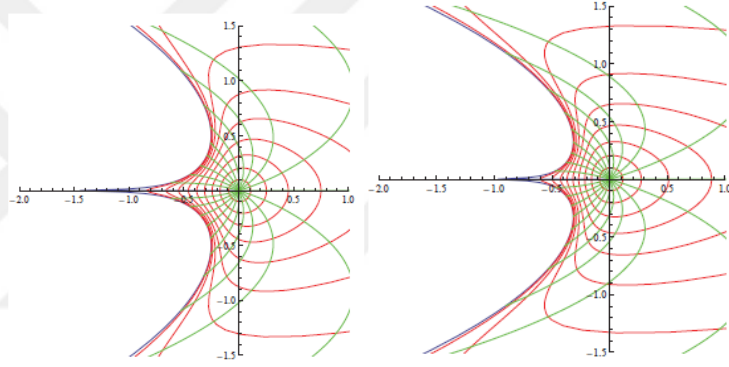
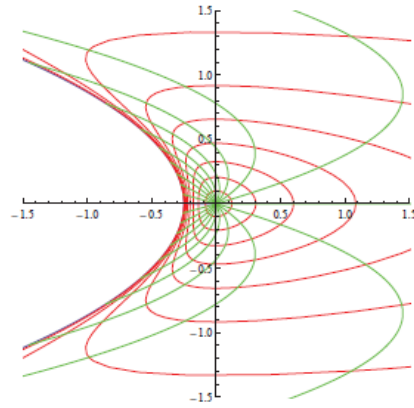


Şekil 4.5. $\omega = z \frac{z+a}{1+az}$ deki a nın belirli değerleri için strip dönüşümünün makaslaması (Jiang *et al.* 2015).

Örnek 4.2.1.3. $\varphi(z) = \frac{z}{1-z}$ yarı düzlem dönüşümü ele alınırsa, o zaman (3.13) teki makas yapımı

$$F_{1,a}(z) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1-a}{4} \log \left(\frac{1+z}{1-z} \right) + \frac{1+a}{2} \frac{z}{(1-z)^2} \right\} + i \operatorname{Im} \left\{ \frac{z}{1-z} \right\}$$

harmonik dönüşümlerini üretir (bkz. Şekil 4.6) (Jiang *et al.* 2015).

(a) $a = -1$ (b) $a = -0.4$ (c) $a = 0$ (d) $a = 0.4$ (e) $a = 1$

Şekil 4.6. $\omega = z \frac{z+a}{1+az}$ deki a nın belirli değerleri için yarı düzlem dönüşümünün makaslamaşı (Jiang *et al.* 2015)

Burada

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Re}\{F_{1,a}(re^{-i\theta})\} \\
&= \frac{1}{8} \left\{ \frac{4(a+1)r((r^2+1)\cos\theta - 2r)}{(r^2 - 2r\cos\theta + 1)^2} \right. \\
&\quad \left. + (a-1)(\log(r^2 - 2r\cos\theta + 1) - \log(r^2 + 2r\cos\theta + 1)) \right\} \\
&= \operatorname{Re}\{F_{1,a}(re^{i\theta})\}
\end{aligned}$$

ve

$$\operatorname{Im}\{F_{1,a}(re^{-i\theta})\} = -\frac{r\sin\theta}{r^2 - 2r\cos\theta + 1} = -\operatorname{Im}\{F_{1,a}(re^{i\theta})\}$$

dir. Bu ifadeler $F_{1,a}(\mathbb{D})$ görüntü kümesinin reel eksene göre simetrik olduğunu gösterir.

$$\begin{aligned}
F_{1,a}(e^{i\theta}) &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{1-a}{4} \log \left(\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} \right) + \frac{1+a}{2} \frac{e^{i\theta}}{(1-e^{i\theta})^2} \right\} + i \operatorname{Im} \left\{ \frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} \right\} \\
&= \frac{1-a}{8} \log \left(\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} \right) - \frac{1+a}{4} \frac{1}{1-\cos\theta} + i \frac{1}{2} \cot \frac{\theta}{2} \\
&= u + iv
\end{aligned}$$

olduğundan

$$u = \frac{1-a}{8} \log(4v^2) - \frac{1+a}{8} (4v^2 + 1)$$

dır. Özel olarak, $F_{1,1}(e^{i\theta})$, $v^2 = -u + \left(\frac{1}{4}\right)$ parabolüdür.

Teorem 4.2.1.4. $c \in [0,2]$ ve $a \in [-1,1]$ için, $k_c(z)$, (2.1) de verilen şekilde olmak üzere

$$H_{c,a}(z) - G_{c,a}(z) = k_c(z) \text{ ve } \omega_a(z) = z \frac{z+a}{1+az} \quad (4.10)$$

olacak şekilde $F_{c,a} = H_{c,a} + \overline{G_{c,a}} \in S_H^0$ olsun. O zaman $F_{c,a}(\mathbb{D})$ yatay doğrultuda konvektir ve c , 0 dan 2 ye değişirken, $F_{c,a}(\mathbb{D})$ bir strip dönüşümünden bir slit dönüşümüne dönüşür (Jiang *et al.* 2015).

İspat: Teorem 3.5.1 e göre, $F_{c,a}(\mathbb{D})$ yatay doğrultuda konvektir. İspat boyunca, $c \in (0,2] \setminus \{1\}$ olduğunu kabul etmek yeterlidir .(4.10) a göre

$$H'_{c,a}(z) - G'_{c,a}(z) = \frac{1}{(1+z)(1-z)} \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^c \text{ ve } G'_{c,a}(z) = z \frac{z+a}{1+az} H'_{c,a}(z)$$

elde edilir. Bu iki denklem çözülürse

$$\begin{aligned} H'_{c,a}(z) &= \frac{1+az}{(1+z)^2(1-z)^2} \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^c \\ &= \left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z} \right) + \frac{1+a}{4} \frac{1}{(1-z)^2} + \frac{1-a}{4} \frac{1}{(1+z)^2} \right\} \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^c \end{aligned}$$

olur. İntegral alınırsa

$$H_{c,a}(z) = \frac{(1-2c^2+ac) + 2c(1-ac)z + (ac-1)z^2}{4c(1-c^2)(1-z^2)} \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^c - \frac{1+ac-2c^2}{4c(1-c^2)}$$

ifadesi elde edilir ve böylece

$$\begin{aligned} G_{c,a}(z) &= h_{c,a}(z) - k_c(z) \\ &= \frac{(1-2c^2+ac) + 2c(1-ac)z + (ac-1)z^2}{4c(1-c^2)(1-z^2)} \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^c - \frac{1+ac-2c^2}{4c(1-c^2)} \\ &\quad - \frac{1}{2c} \left(\left(\frac{1+z}{1-z} \right)^c - 1 \right) \end{aligned}$$

bulunur. $F_{c,a}$ dönüşümünün özelliklerini incelemek için,

$$w = \frac{1+z}{1-z}$$

yi kullanarak değişken değiştirmesi yapılabilir. $z = \frac{w-1}{w+1}$ olmak üzere bu yer değiştirme

$$H_{c,a}(z) = \frac{1}{8} \left(\frac{a+1}{c+1} w^{c+1} + \frac{2}{c} w^c - \frac{a-1}{c-1} w^{c-1} - \frac{2(1+ac-2c^2)}{c(1-c^2)} \right)$$

ve

$$G_{c,a}(z) = \frac{1}{8} \left(\frac{a+1}{c+1} w^{c+1} - \frac{2}{c} w^c - \frac{a-1}{c-1} w^{c-1} + \frac{2(1-ac)}{c(1-c^2)} \right)$$

ifadelerini verir. Buda

$$\begin{aligned} F_{c,a}(z) = Re \left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{a+1}{c+1} w^{c+1} - \frac{a-1}{c-1} w^{c-1} + \frac{2(c-a)}{1-c^2} \right) \right\} \\ + iIm \left\{ \frac{1}{2c} (w^c - 1) \right\} \end{aligned} \quad (4.11)$$

olduğunu gösterir. $x > 0$, $y \in \mathbb{R}$ için $w = x + iy$ yazılırsa, Örnek 4.2.1.2 den, $F_{0,a}$ nın $\mathbb{D}$ yi

$$\left\{ \zeta \in \mathbb{C} : |Im \zeta| < \frac{\pi}{4} \right\}$$

şeridine dönüştürdüğü görülür. $c = 2$, (4.11) de yerine koyulursa, o zaman

$$\begin{aligned} F_{2,a}(z) &= Re \left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{1+a}{3} w^3 + (1-a)w - \frac{2(2-a)}{3} \right) \right\} + iIm \left\{ \frac{1}{4} (w^2 - 1) \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1+a}{3} (x^3 - 3xy^2) + (1-a)x - \frac{2(2-a)}{3} \right) + i \frac{1}{2} xy, \quad x > 0 \end{aligned}$$

olur. Birim çember üzerindeki her $z \neq 1$ noktası $x = 0$ ve $F_{2,a}(z) = -\frac{(2-a)}{6}$ olacak şekilde imajiner eksen üzerinde bir w noktasına taşınır. $k(z)$ harmonik Koebe fonksiyonu örneğinde olduğu gibi $F_{2,a}$ nın $\mathbb{D}$ birim diskini,

$$\left(-\infty, -\frac{(2-a)}{6}\right)$$

reel aralığı hariç tüm kompleks düzlem üzerine dönüştürdüğü görülür.

$a = 0$ olduğunda, $\omega_a(z)$, z^2 olur ve dolayısıyla Teorem 4.2.1.4, Teorem 3.3.4 e göre minimal yüzeye yükseltilebilen Teorem 3.3.8 e indirgenir. Eğer $a = -1$ ve $a = 1$ ise o zaman $\omega_a(z)$ sırasıyla $-z$ ve z olur ve dolayısıyla Teorem 4.2.1.4, Teorem 3.3.8 in genelleştirilmesidir.

4.2.2. Makaslama yapımı ve minimal yüzeyler

Bu bölümde Teorem 3.5.1, Teorem 3.3.4 deki gibi tanımlanan minimal yüzeyler ailesine yükseltile, görüntü kümesi yatay doğrultuda konveks olan harmonik ünivalent dönüşümlerin ailesini oluşturmak için kullanılmaktadır.

2004 te Greiner,

$$h_{0,n}(z) - g_{0,n}(z) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+z}{1-z} \right)$$

makaslama ve $\omega(z) = z^n$ dilatasyonu ile yatay şeritteki harmonik dönüşümleri yapılandırdı. Makaslama yapımı, $n = 2m + 1$ için

$$f_{0,n}(z) = \operatorname{Re}\{h_{0,n}(z) + g_{0,n}(z)\} + i\operatorname{Im}\{h_{0,n}(z) - g_{0,n}(z)\}$$

$$= Re \left\{ \frac{1}{n} \left(\frac{z}{1-z} - i \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \csc \frac{2k\pi}{n} \log \left(\frac{1 - ze^{-i\frac{2k\pi}{n}}}{1 - ze^{i\frac{2k\pi}{n}}} \right) \right) \right\} + iIm \left\{ \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+z}{1-z} \right) \right\}$$

olacak şekilde tanımlanan $f_{0,n}(z)$ harmonik dönüşümünü oluşturur. Ayrıca, eğer $n = 2m$ ($m \in \mathbb{N}$) ise Teorem 3.3.4 aracılığıyla, $f_{0,n}(\mathbb{D})$,

$$u = Re \left\{ \frac{1}{n} \left(\frac{2z}{1-z^2} - i \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \csc \frac{2k\pi}{n} \log \left(\frac{1 - ze^{-i\frac{2k\pi}{n}}}{1 - ze^{i\frac{2k\pi}{n}}} \right) \right) \right\}$$

$$v = Im \left\{ \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+z}{1-z} \right) \right\}$$

ve

$$F(u, v) = Im \left\{ \frac{1}{n} \left(\frac{z}{1-z} + \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} z}{1+z} - i \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} (-1)^k \csc \frac{2k\pi}{n} \log \left(\frac{1 - ze^{-i\frac{2k\pi}{n}}}{1 - ze^{i\frac{2k\pi}{n}}} \right) \right) \right\}$$

olacak şekilde $M_{0,n}(u, v) = (u, v, F(u, v))$ minimal yüzeyine yükseltilebilir.

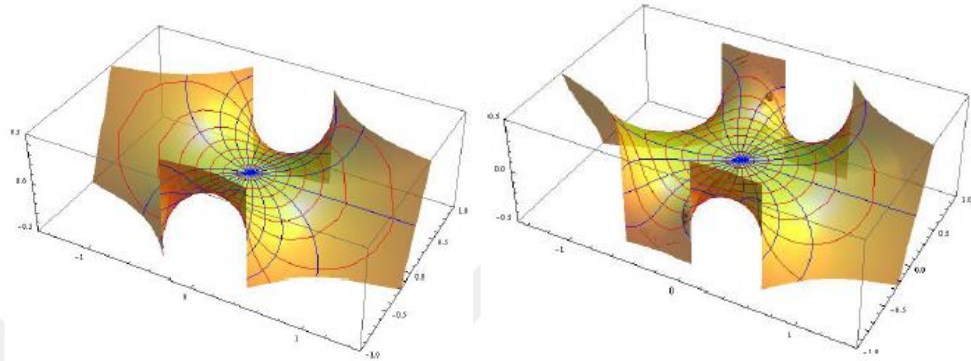
$\omega(z) = z$, için, $f_{0,1}(z)$ ifadesi

$$f_{0,1}(z) = Re \left\{ \frac{z}{1-z} \right\} + iIm \left\{ \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+z}{1-z} \right) \right\}$$

şeklinde sadeleştirilebilir. O zaman $\omega(z) = z^2$ için $f_{0,2}(z)$ ifadesi

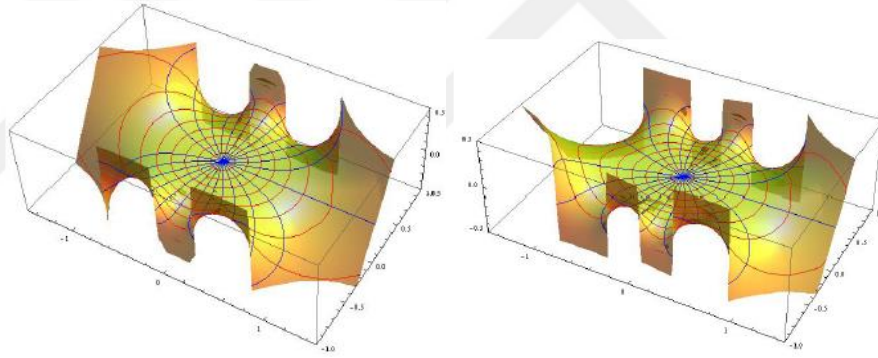
$$f_{0,2}(z) = Re \left\{ \frac{z}{1-z^2} \right\} + iIm \left\{ \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+z}{1-z} \right) \right\}$$

ile verilir. Şekil 4.7 de $n = 4,6,8,10,12,14$ iken $\omega(z) = z^n$ olmak üzere $f_{0,n}(z)$ harmonik dönüşümlerinin şerit bölgeler üzerindeki minimal yüzeyleri örneklendirilmiştir.



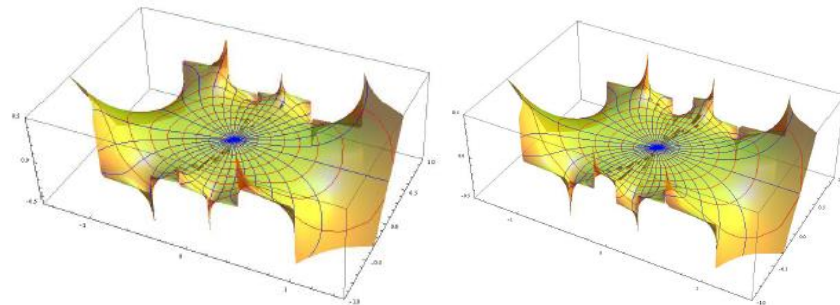
(a) $c = 0, n = 4$

(b) $c = 0, n = 6$



(c) $c = 0, n = 8$

(d) $c = 0, n = 10$



(e) $c = 0, n = 12$

(f) $c = 0, n = 14$

Şekil 4.7. $f_{0,n}(\mathbb{D})$ nin $c = 0, n = 4,6,8,10,12,14$ değerleri için minimum yüzeylere yükseltilmesi (Jiang et al. 2015).

Teorem 4.2.2.1:

$$h_{1,n}(z) - g_{1,n}(z) = \frac{z}{1-z} \text{ ve } \omega(z) = \frac{g'_{1,n}(z)}{h'_{1,n}(z)} = z^n (n \in \mathbb{N}) \quad (4.12)$$

olmak üzere $f_{1,n} = h_{1,n} + \overline{g_{1,n}} \in S_H^0$ olsun.

$n = 2m + 1$ ($m \in \mathbb{N}$) ise

$$f_{1,n}(z) = Re \left\{ \frac{1}{n} \left(\frac{-z}{1-z} + \frac{z(2-z)}{(1-z)^2} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{n^2-1}{6} \log(1-z) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \csc^2 \frac{k\pi}{n} \log \left(1 - 2z \cos \frac{2k\pi}{n} + z^2 \right) \right) \right\} \\ + iIm \left\{ \frac{z}{1-z} \right\}$$

olur. $n = 2m$ ($m \in \mathbb{N}$) ise, o zaman $f_{1,n}(\mathbb{D})$

$$u = Re \left\{ \frac{1}{n} \left(\frac{-z}{1-z} + \frac{z(2-z)}{(1-z)^2} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{n^2-1}{6} \log(1-z) + \frac{1}{2} \log(1+z) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \csc^2 \frac{k\pi}{n} \log \left(1 - 2z \cos \frac{2k\pi}{n} + z^2 \right) \right) \right\} \quad (4.13)$$

$$v = \operatorname{Im} \left\{ \frac{z}{1-z} \right\}$$

ve

$$F(u, v) = \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{n} \left(\frac{z}{1-z} + \frac{z(2-z)}{(1-z)^2} + \frac{n^2+1}{6} \log(1-z) + \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2} \log(1+z) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} (-1)^k \csc^2 \frac{k\pi}{n} \log \left(1 - 2z \cos \frac{2k\pi}{n} + z^2 \right) \right) \right\}$$

olmak üzere $M_{1,n}(u, v) = (u, v, F(u, v))$ minimal yüzeylerine yükseltilir (Jiang *et al.* 2015).

İspat: Varsayım gereği ve (4.12) ye göre

$$h'_{1,n}(z) - g'_{1,n}(z) = \frac{1}{(1-z)^2} \text{ ve } g'_{1,n}(z) = z^n h'_{1,n}(z)$$

şeklinde olur. Bu iki denklem çözülerek sırasıyla,

- i. $n = 2m + 1$ ($m \in \mathbb{N}$) iken $z = 1$ de 3. dereceden bir kutpu ve diğer n .ci dereceden birim köklerinde basit kutupları olan,
- ii. $n = 2m$ ($m \in \mathbb{N}$) iken $z = 1$ de 3.dereceden bir kutpu, $z = -1$ de ve n .ci dereceden birim köklerinde basit kutupları olan

$$h'_{1,n}(z) = \frac{1}{(1-z)^2(1-z^n)} \quad (4.14)$$

ifadesi elde edilir. Bu gözlemlere göre, $h'_{1,n}(z)$ basit kesirlere ayrılabilir. $h'_{1,n}(z)$ basit kesirlerine ayrıldıktan sonra n nin tek değerleri için

$$\begin{aligned} h'_{1,n}(z) &= \frac{1}{(1-z)^2(1-z^n)} \\ &= \frac{\kappa_1}{1-z} + \frac{\kappa_2}{(1-z)^2} + \frac{\kappa_3}{(1-z)^3} + \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\alpha_k}{1-ze^{-i\frac{2k\pi}{n}}} + \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\beta_k}{1-ze^{i\frac{2k\pi}{n}}} \end{aligned}$$

elde edilir ve sabitler, rezidü teoremi kullanılarak

$$\kappa_1 = \frac{n^2-1}{12n}, \kappa_2 = \frac{n-1}{2n}, \kappa_3 = \frac{1}{n}, \alpha_k = \frac{1}{n\left(1-e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^2}, \beta_k = \frac{1}{n\left(1-e^{-i\frac{2k\pi}{n}}\right)^2}$$

şeklinde bulunur. Önceki ifadenin integrali alınırsa, n nin tek değerleri için

$$\begin{aligned} h_{1,n}(z) &= \frac{n-1}{2n} \frac{z}{1-z} + \frac{1}{2n} \frac{z(2-z)}{(1-z)^2} - \frac{n^2-1}{12n} \log(1-z) \\ &\quad + \frac{1}{4n} \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \csc^2 \frac{k\pi}{n} \log\left(1-2z \cos \frac{2k\pi}{n} + z^2\right) \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. n değerinin çift olması durumunda, (4.14) de basit kesirler yardımıyla

$$\begin{aligned} h'_{1,n}(z) &= \frac{1}{(1-z)^2(1-z^n)} \\ &= \frac{\lambda_1}{1-z} + \frac{\lambda_2}{(1-z)^2} + \frac{\lambda_3}{(1-z)^3} + \frac{\lambda_4}{1+z} + \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \frac{\gamma_k}{1-ze^{-i\frac{2k\pi}{n}}} + \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \frac{\delta_k}{1-ze^{i\frac{2k\pi}{n}}} \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Yine, rezidü teoremi kullanılarak

$$\lambda_1 = \frac{n^2 - 1}{12n}, \lambda_2 = \frac{n - 1}{2n}, \lambda_3 = \frac{1}{n}, \lambda_4 = \frac{1}{4n},$$

$$\gamma_k = \frac{1}{n \left(1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^2}, \delta_k = \frac{1}{n \left(1 - e^{-i\frac{2k\pi}{n}}\right)^2}$$

eşitlikleri bulunur ve

$$h_{1,n}(z) = \frac{n-1}{2n} \frac{z}{1-z} + \frac{1}{2n} \frac{z(2-z)}{(1-z)^2} - \frac{n^2-1}{12n} \log(1-z) + \frac{1}{4n} \log(1+z)$$

$$+ \frac{1}{4n} \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \csc^2 \frac{k\pi}{n} \log \left(1 - 2z \cos \frac{2k\pi}{n} + z^2\right)$$

ifadesi elde edilir. Her iki durumda da, $g_{1,n}(z)$ fonksiyonuna karşılık gelen ifade yukarıdaki iki durum ve (4.12) deki ilk bağıntı kullanılarak hesaplanır. Son olarak, istenen $f_{1,n}(z)$ harmonik dönüşümü,

$$f_{1,n}(z) = u + iv = \operatorname{Re}\{h_{1,n}(z) + g_{1,n}(z)\} + i\operatorname{Im}\{h_{1,n}(z) - g_{1,n}(z)\}$$

olarak yazılır. Sonuç olarak, n nin tek değerleri için $f_{1,n}(z)$,

$$f_{1,n}(z) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{n} \left(\frac{-z}{1-z} + \frac{z(2-z)}{(1-z)^2} \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{n^2-1}{6} \log(1-z) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \csc^2 \frac{k\pi}{n} \log \left(1 - 2z \cos \frac{2k\pi}{n} + z^2\right) \right) \right\}$$

$$+ i\operatorname{Im} \left\{ \frac{z}{1-z} \right\}$$

şeklinde yazılabilir ve $f_{1,n}(z)$, n nin çift değerleri için u , (4.13) de verilen şekilde ve $v(x, y) = \operatorname{Im} \left\{ \frac{z}{1-z} \right\}$ olmak üzere $f_{1,n}(z) = u + iv$ biçimini alır. Teorem 3.3.4 e göre $f_{1,n}(\mathbb{D})$, n nin çift değerleri için u , (4.13) de verilen şekilde,

$$v = v(x, y) = \text{Im} \left\{ \frac{z}{1-z} \right\}$$

ve

$$\begin{aligned} F(u, v) &= 2\text{Im} \left\{ \int_0^z \sqrt{\omega_n(\zeta)} h'_{1,n}(\zeta) d\zeta \right\} = 2\text{Im} \left\{ \int_0^z \frac{\zeta^{\frac{n}{2}}}{(1-\zeta)^2(1-\zeta^n)} d\zeta \right\} \\ &= \text{Im} \left\{ -\frac{1}{n} \frac{z}{(1-z)} + \frac{1}{n} \frac{z(2-z)}{(1-z)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2n} \log(1+z) \right. \\ &\quad \left. + \frac{n^2+1}{6n} \log(1-z) + \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} (-1)^k \csc^2 \frac{k\pi}{n} \log \left(1 - 2z \cos \frac{2k\pi}{n} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + z^2 \right) \right\} \end{aligned}$$

olmak üzere $M_{1,n}(u, v) = (u, v, F(u, v))$ minimal yüzeylerine yükseltilebilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.2.2.1 de $\omega(z) = z$ ise, o zaman $f_{1,1}(z)$ ifadesi $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ ve $l(z) = \frac{z}{1-z}$ olmak üzere

$$f_{1,1}(z) = \text{Re}\{k(z)\} + i\text{Im}\{l(z)\}$$

şeklinde sadeleştirilebilir. Burada $f_{1,1}(z)$

$$L(z) = \text{Re}\{l(z)\} + i\text{Im}\{k(z)\}$$

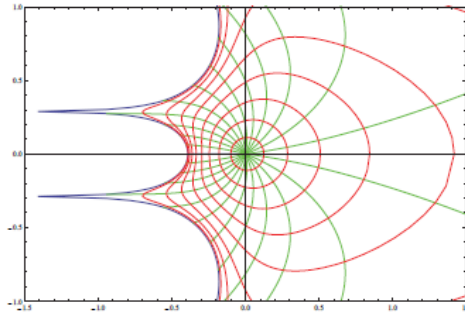
şeklinde tanımlanan $L(z)$ harmonik yarı düzlem dönüşümü ile karşılaştırılabilir. $\omega(z) = z^2$ için $f_{1,2}(z)$ ifadesi

$$f_{1,2}(z) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2} \frac{z}{(1-z)^2} + \frac{1}{4} \log \left(\frac{1+z}{1-z} \right) \right\} + i \operatorname{Im} \left\{ \frac{z}{1-z} \right\}$$

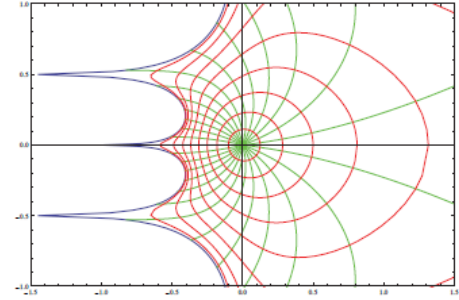
ile verilir.

Şekil 4.8 de, $c = 1$ ve $n = 3, 4, 5, 6$ iken $\mathbb{D}$ birim diskinin $f_{1,n}(z)$ harmonik dönüşümleri dalga düzlemleri üzerine çizilmiştir.

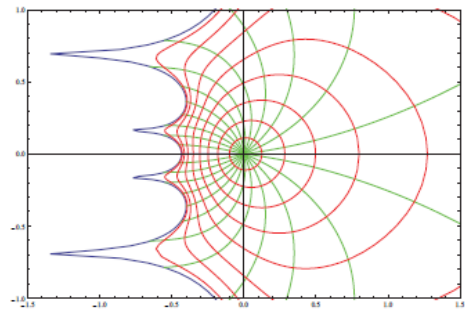
Şekil 4.9 da $n = 4, 6, 8, 10, 12, 14$ için $\omega(z) = z^n$ dilatasyonu ile $f_{1,n}(z)$ harmonik dönüşümlerinin minimal yüzeyleri dalga düzlemleri üzerine çizilmiştir.



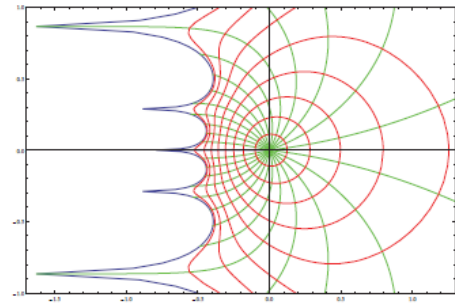
(a) $n = 3$



(b) $n = 4$

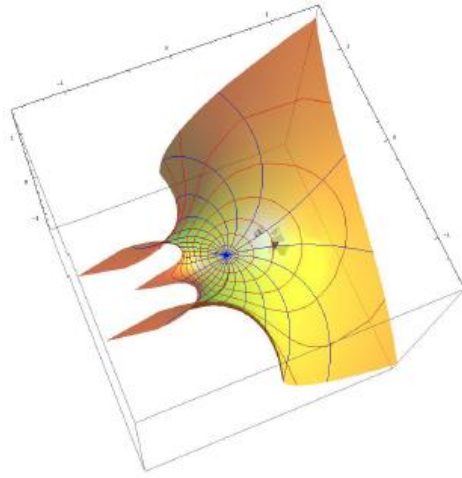
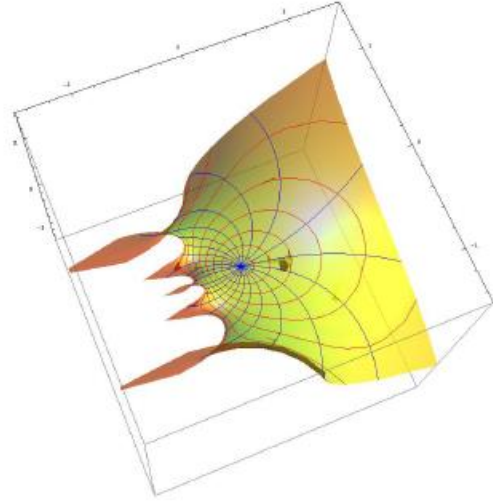
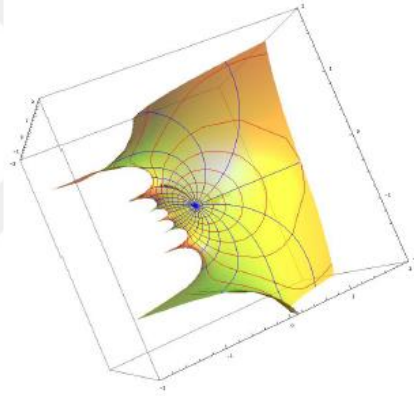
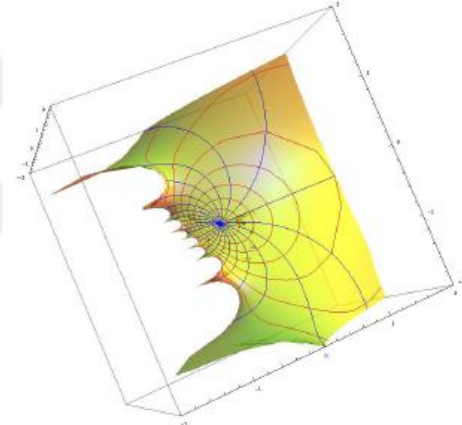
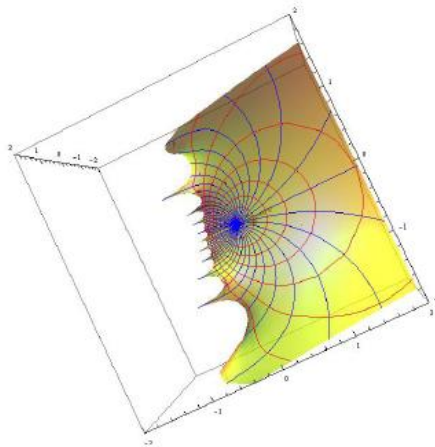
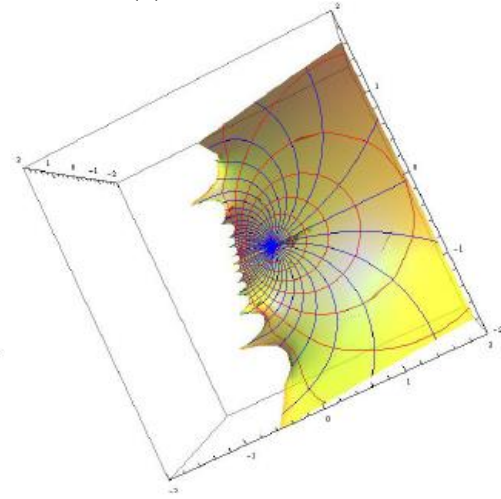


(c) $n = 5$



(d) $n = 6$

Şekil 4.8. $n = 3, 4, 5, 6$ değerleri için $f_{1,n}(\mathbb{D})$ nin dalga düzlemleri (Jiang *et al.* 2015).

(a) $c = 1, n = 4$ (b) $c = 1, n = 6$ (c) $c = 1, n = 8$ (d) $c = 1, n = 10$ (e) $c = 1, n = 12$ (f) $c = 1, n = 14$

Şekil 4.9. $f_{1,n}(\mathbb{D})$ nin $c = 1, n = 4, 6, 8, 10, 12, 14$ değerleri için minimal yüzeylere yükseltilmesi (Jiang *et al.* 2015)

Teorem 4.2.2.2. $n \in \mathbb{N}$ için

$$h_{2,n}(z) - g_{2,n}(z) = \frac{z}{(1-z)^2} \text{ ve } \omega_n(z) = \frac{g'_{0,n}(z)}{h'_{0,n}(z)} = z^n \quad (4.15)$$

olacak şekilde $f_{2,n} = h_{2,n} + \overline{g_{2,n}} \in S_H^0$ olsun. $n = 2m + 1$ ($m \in \mathbb{N}$) ise o zaman $f_{2,n}(z)$,

$$\begin{aligned} f_{2,n}(z) = Re \left\{ \frac{-z}{(1-z)^2} + \frac{(n-1)(n-2)}{3n} \frac{z}{1-z} + \frac{n-2}{n} \frac{z(2-z)}{(1-z)^2} \right. \\ \left. + \frac{4}{3n} \frac{z(z^2 - 3z + 3)}{(1-z)^3} + \frac{i}{2n} \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \cot \frac{k\pi}{n} \csc^2 \frac{k\pi}{n} \log \left(\frac{1 - ze^{-i\frac{2k\pi}{n}}}{1 - ze^{i\frac{2k\pi}{n}}} \right) \right\} \\ + iIm \left\{ \frac{z}{(1-z)^2} \right\} \end{aligned}$$

olacak şekilde verilebilir. $n = 2m$ ($m \in \mathbb{N}$) ise, o zaman $f_{2,n}(\mathbb{D})$

$$\begin{aligned} u = Re \left\{ \frac{-z}{(1-z)^2} + \frac{(n-1)(n-2)}{3n} \frac{z}{1-z} + \frac{n-2}{n} \frac{z(2-z)}{(1-z)^2} \right. \\ \left. + \frac{4}{3n} \frac{z(z^2 - 3z + 3)}{(1-z)^3} \right. \\ \left. + \frac{i}{2n} \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \cot \frac{k\pi}{n} \csc^2 \frac{k\pi}{n} \log \left(\frac{1 - ze^{-i\frac{2k\pi}{n}}}{1 - ze^{i\frac{2k\pi}{n}}} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$v = Im \left\{ \frac{z}{(1-z)^2} \right\}$$

ve

$$F(u, v) = \operatorname{Im} \left\{ \frac{4 - n^2}{6n} \left(\frac{z}{1 - z} \right) - \frac{2z(2 - z)}{n(1 - z)^2} + \frac{4}{3n} \frac{z(z^2 - 3z + 3)}{(1 - z)^3} \right. \\ \left. + \frac{i}{2n} \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} (-1)^k \cot \frac{k\pi}{n} \csc^2 \frac{k\pi}{n} \log \left(\frac{1 - ze^{-i\frac{2k\pi}{n}}}{1 - ze^{i\frac{2k\pi}{n}}} \right) \right\}$$

olmak üzere $M_{2,n}(u, v) = (u, v, F(u, v))$ minimal yüzeylerine yükseltilebilir. (Jiang *et al.* 2015).

İspat: (4.15) kullanılarak

$$h'_{2,n}(z) - g'_{2,n}(z) = \frac{1 + z}{(1 - z)^3} \text{ ve } g'_{2,n}(z) = z^n h'_{2,n}(z)$$

ifadesi elde edilir. Bu iki denklem çözülerek

$$h'_{2,n}(z) = \frac{1 + z}{(1 - z)^3(1 - z^n)}$$

bulunur. Şimdi $n = 2m + 1$ ($m \in \mathbb{N}$) durumu göz önünde bulundurulsun. $h'_{2,n}(z)$, $z = 1$ de 4. dereceden bir kutuba ve diğer n . dereceden birim köklerinde basit kutuplara sahip olduğundan, $h'_{2,n}(z)$ basit kesirlere ayrılabilir

$$h'_{2,n}(z) = \frac{\lambda_1}{1 - z} + \frac{\lambda_2}{(1 - z)^2} + \frac{\lambda_3}{(1 - z)^3} + \frac{\lambda_4}{(1 - z)^4} + \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{A_k}{1 - ze^{-i\frac{2k\pi}{n}}} + \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{B_k}{1 - ze^{i\frac{2k\pi}{n}}}$$

şeklinde gösterilebilir. Rezidü teoremi kullanılarak

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \frac{(n-1)(n-2)}{6n}, \quad \lambda_3 = \frac{n-2}{n}, \quad \lambda_4 = \frac{2}{n}$$

ve

$$A_k = \frac{1}{n} \frac{\left(1 + e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)}{\left(1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^3}$$

$$B_k = \frac{1}{n} \frac{\left(1 + e^{-i\frac{2k\pi}{n}}\right)}{\left(1 - e^{-i\frac{2k\pi}{n}}\right)^3}$$

olduğu görülür. Bu değerler kullanılarak

$$\begin{aligned} h'_{2,n}(z) &= \frac{(n-1)(n-2)}{6n} \frac{1}{(1-z)^2} + \frac{n-2}{n} \frac{1}{(1-z)^3} + \frac{2}{n} \frac{1}{(1-z)^4} \\ &+ \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\left(1 + e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)}{\left(1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^3} \frac{1}{\left(1 - ze^{-i\frac{2k\pi}{n}}\right)} \right. \\ &\left. + \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\left(1 + e^{-i\frac{2k\pi}{n}}\right)}{\left(1 - e^{-i\frac{2k\pi}{n}}\right)^3} \frac{1}{\left(1 - ze^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)} \right) \end{aligned}$$

ifadesine ulaşılır. 0 dan z ye integral alınırsa

$$\begin{aligned} h_{2,n}(z) &= \frac{(n-1)(n-2)}{6n} \frac{z}{1-z} + \frac{(n-2)}{2n} \frac{z(z-2)}{(1-z)^2} + \frac{2}{3n} \frac{z(z^2-3z+3)}{(1-z)^3} \\ &+ \frac{i}{4n} \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \cot \frac{k\pi}{n} \csc^2 \frac{k\pi}{n} \log \left(\frac{1 - ze^{-i\frac{2k\pi}{n}}}{1 - ze^{i\frac{2k\pi}{n}}} \right) \end{aligned}$$

şeklinde olur ve bunun bir sonucu olarak, $g_{2,n}(z)$, (4.15) deki ilk bağıntı kullanılarak yazılabilir. Daha sonra, n nin tek değerleri için istenen $f_{2,n} \in S_H^0$ harmonik dönüşümü,

$$\begin{aligned}
f_{2,n}(z) = Re \left\{ \frac{-z}{(1-z)^2} + \frac{(n-1)(n-2)}{3n} \frac{z}{1-z} + \frac{(n-2)}{n} \frac{z(2-z)}{(1-z)^2} \right. \\
\left. + \frac{4}{3n} \frac{z(z^2-3z+3)}{(1-z)^3} + \frac{i}{2n} \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \cot \frac{k\pi}{n} \csc^2 \frac{k\pi}{n} \log \left(\frac{1 - ze^{-i\frac{2k\pi}{n}}}{1 - ze^{i\frac{2k\pi}{n}}} \right) \right\} \\
+ iIm \left\{ \frac{z}{(1-z)^2} \right\}
\end{aligned}$$

ile gösterilir. n nin çift değerleri için, u , (4.16) da verilen şekilde ve $v = Im \left\{ \frac{z}{(1-z)^2} \right\}$ olmak üzere $f_{2,n}(z) = u + iv$ dir. Teorem 3.3.4 e göre $n = 2m$ ($m \in \mathbb{N}$) için, u , (4.16) da verilen şekilde ve $v = Im \left\{ \frac{z}{(1-z)^2} \right\}$ olmak üzere $f_{2,n}(\mathbb{D})$, $M_{2,n}(u, v) = (u, v, F(u, v))$ minimal yüzeyine yükseltilebilir. Burada $F(u, v)$,

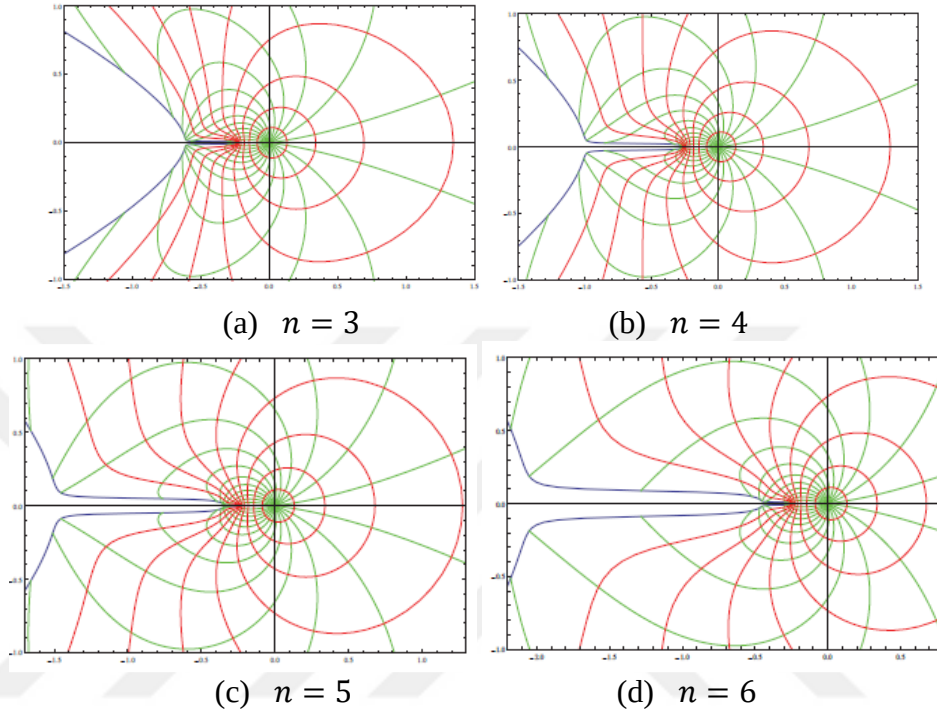
$$\begin{aligned}
F(u, v) &= 2Im \left\{ \int_0^z \sqrt{\omega_n(\zeta)} h'_{1,n}(\zeta) d\zeta \right\} = 2Im \left\{ \int_0^z \frac{(1+\zeta)\zeta^n}{(1-\zeta)^3(1-\zeta^n)} d\zeta \right\} \\
&= Im \left\{ \frac{4-n^2}{6n} \left(\frac{z}{1-z} \right) - \frac{2}{n} \frac{z(2-z)}{(1-z)^2} + \frac{4}{3n} \frac{z(z^2-3z+3)}{(1-z)^3} \right. \\
&\quad \left. + \frac{i}{2n} \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^k \cot \frac{k\pi}{n} \csc^2 \frac{k\pi}{n} \log \left(\frac{1 - ze^{-i\frac{2k\pi}{n}}}{1 - ze^{i\frac{2k\pi}{n}}} \right) \right\}
\end{aligned}$$

şeklindedir. Böylece ispat tamamlanır.

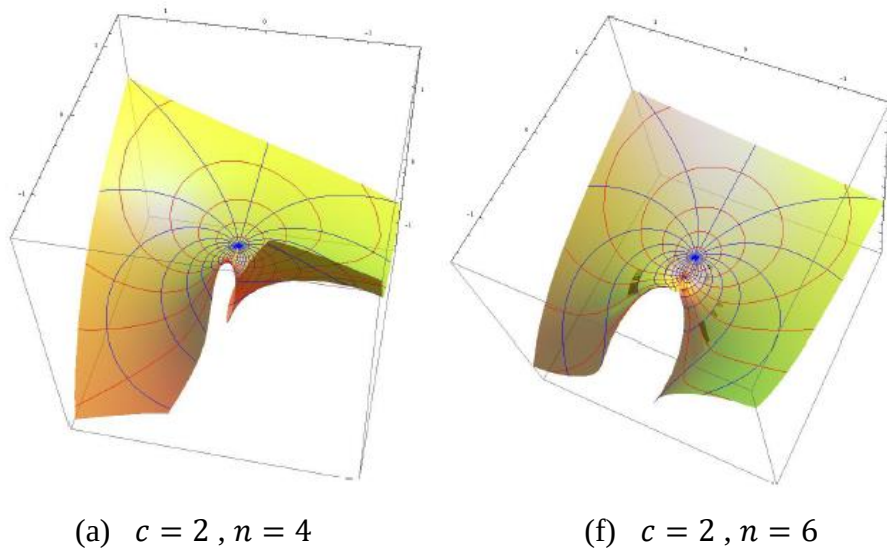
Teorem 4.2.2.2. de $\omega(z) = z$ için, elde edilen $f_{2,1}(z)$ fonksiyonu, harmonik Koebe fonksiyonudur.

Şekil 4.10 de, $c = 2$ ve $n = 3, 4, 5, 6$ için $\mathbb{D}$ birim diskinin $f_{2,n}(z)$ harmonik dönüşümleri split bölgeleri üzerinde gösterilmiştir.

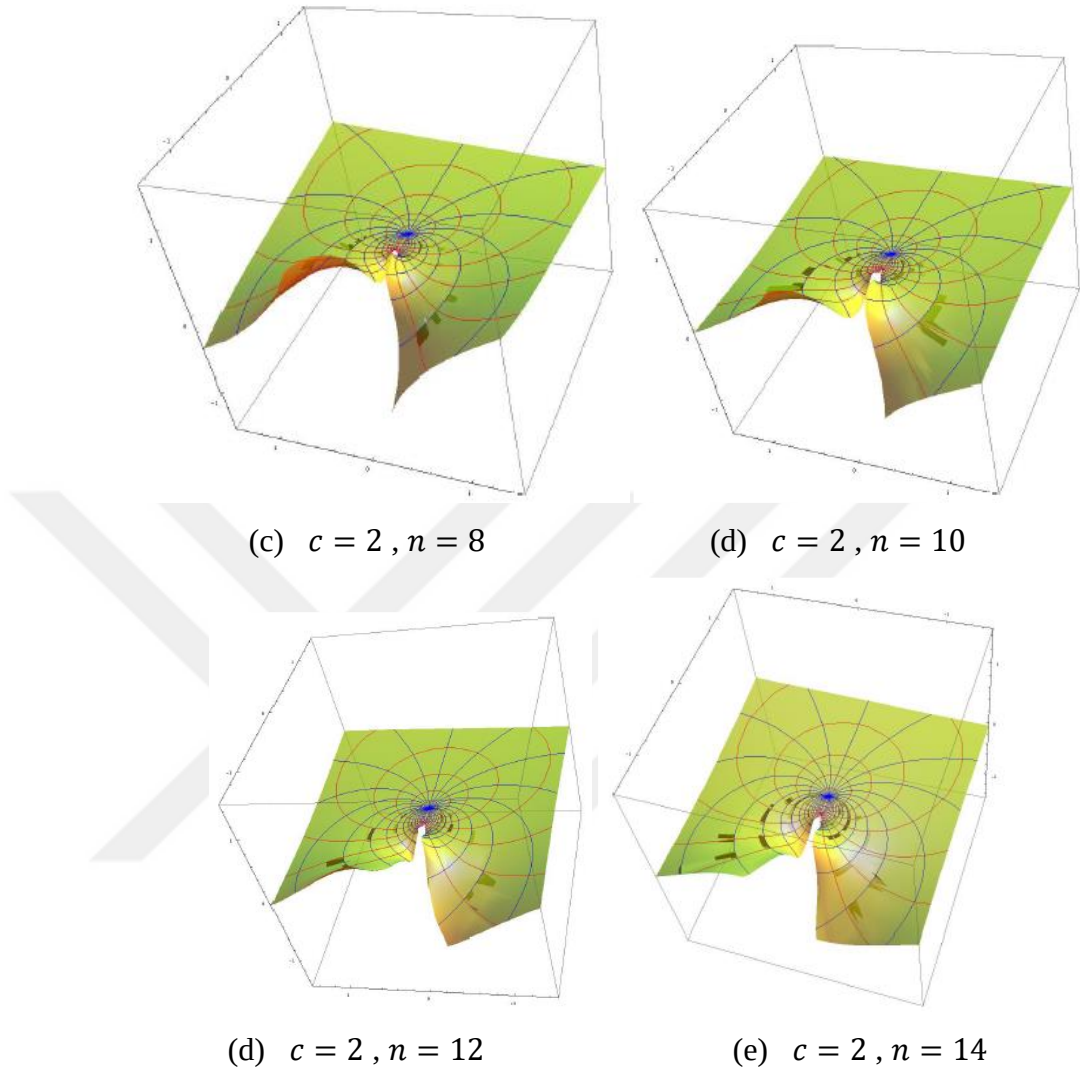
Şekil 4.11 de $n = 4, 6, 8, 10, 12, 14$ için $\omega(z) = z^n$ dilatasyonu ile $f_{2,n}(z)$ harmonik dönüşümlerinin minimal yüzeyleri, split bölgeleri üzerinde gösterilmiştir.



Şekil 4.10. $n = 3, 4, 5, 6$ değerleri için $f_{2,n}(\mathbb{D})$ nin slit görüntüleri (Jiang et al. 2015)



Şekil 4.11. $f_{2,n}(\mathbb{D})$ nin, $c = 2, n = 4, 6, 8, 10, 12, 14$ değerleri için minimal yüzeylere yükseltilmesi (Jiang et al. 2015)



Şekil 4.11. $f_{2,n}(\mathbb{D})$ nin, $c = 2, n = 4, 6, 8, 10, 12, 14$ değerleri için minimal yüzeylere yükseltilmesi (Jiang *et al.* 2015) (devam)

Teorem 4.2.2.3. $c \in [0, 2]$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $k_c(z)$, (2.1) de ki gibi olmak üzere

$$h_{c,n}(z) - g_{c,n}(z) = k_{c,n}(z) \text{ ve } g'_{c,n}(z) = z^n h'_{c,n}(z) \quad (4.17)$$

denklemlerini sağlayan $f_{c,n} = h_{c,n} + \overline{g_{c,n}} \in S_H^0$ harmonik fonksiyonu ele alınsın. O zaman $f_{c,n}(\mathbb{D})$ yatay doğrultuda konvektir ve $c, 0$ dan 2 ye değişirken, $f_{c,n}(\mathbb{D})$ bir strip dönüşümden bir dalga düzlemine ve sonra bir slit dönüşümüne dönüşür. Özellikle n , bir çift pozitif tamsayı olduğunda, $f_{c,n}(\mathbb{D})$ minimal yüzeylere yükselir (Jiang *et al.* 2015).

İspat: Her $c \in [0,2]$ için, $k_c \in S$ ve $k_c(\mathbb{D})$, yatay doğrultuda konveks bir bölgedir. Böylece, Teorem 3.5.1 den dolayı $f_{c,n}(\mathbb{D})$, yatay doğrultuda konveks bir bölgedir. $f_{c,n}$ fonksiyonunun dönüşüm özellikleri incelenirse (4.17) de ki iki denklem çözülerek,

$$h'_{c,n}(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^c \frac{1}{(1-z^2)(1-z^n)} \quad (4.18)$$

bulunur. $n = 2m + 1$ ($m \in \mathbb{N}$) olması durumunda $h'_{c,n}(z)$,

$$h'_{c,n}(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^c \left[\frac{1}{4} \left(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z} \right) + \frac{1}{2n} \frac{1}{(1-z)^2} + \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{(1 - e^{i\frac{4k\pi}{n}})(1 - ze^{-i\frac{2k\pi}{n}})} + \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{(1 - e^{-i\frac{4k\pi}{n}})(1 - ze^{i\frac{2k\pi}{n}})} \right) \right]$$

olarak yeniden yazılabilir. Son eşitliğin 0 dan z ye integrali alınır ve sonra elde edilen ifade dikkatli bir şekilde analiz edilirse,

$$N_1 = \frac{1}{4c} + \frac{1}{4n(1+c)} + \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{2^c e^{i\frac{2k\pi}{n}} F_1 \left(1-c; -c, 1; 2-c; \frac{1}{2}, \frac{1}{1-e^{i\frac{2k\pi}{n}}} \right)}{n(1-c) \left(1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}} \right) \left(1 - e^{i\frac{4k\pi}{n}} \right)} - \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{2^c F_1 \left(1-c; -c, 1; 2-c; \frac{1}{2}, \frac{1}{1-e^{-i\frac{2k\pi}{n}}} \right)}{n(1-c) \left(1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}} \right) \left(1 - e^{-i\frac{4k\pi}{n}} \right)}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
h_{c,n}(z) = & \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^c \left[\frac{1}{4c} + \frac{1+z}{4n(1+c)(1-z)} \right. \\
& + \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{2^c(1-z)e^{i\frac{2k\pi}{n}} F_1 \left(1-c; -c, 1; 2-c; \frac{1-z}{2}, \frac{1-z}{1-e^{i\frac{2k\pi}{n}}} \right)}{n(1-c)(1+z)^c \left(1-e^{i\frac{2k\pi}{n}} \right) \left(1-e^{i\frac{4k\pi}{n}} \right)} \\
& \left. - \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{2^c(1-z) F_1 \left(1-c; -c, 1; 2-c; \frac{1-z}{2}, \frac{1-z}{1-e^{-i\frac{2k\pi}{n}}} \right)}{n(1-c)(1+z)^c \left(1-e^{i\frac{2k\pi}{n}} \right) \left(1-e^{-i\frac{4k\pi}{n}} \right)} \right] - N_1
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$f = u + iv = h + \overline{g} \text{ ve } h - g = k_c$$

ise,

$$f = \operatorname{Re}\{h + g\} + i\operatorname{Im}\{h - g\} = \operatorname{Re}\{2h(z) - k_c\} + i\operatorname{Im}\{k_c\}$$

şeklinde yazılabileceği gözlemlenir. (4.17) ve bu ifadenin bir sonucu olarak n nin tek değerleri için ortaya çıkan $f_{c,n}(z)$ harmonik dönüşümü,

$$f_{c,n}(z) = \operatorname{Re}\{2h_{c,n}(z) - k_c(z)\} + i\operatorname{Im}\{k_c(z)\}$$

$$\begin{aligned}
&= Re \left\{ \frac{1}{2c} - 2N_1 \right. \\
&\quad + \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^c \left[\frac{1+z}{2n(1+c)(1-z)} \right. \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{2^{c-1}(1-z)e^{i\frac{2k\pi}{n}} F_1 \left(1-c; -c, 1; 2-c; \frac{1-z}{2}, \frac{1-z}{1-e^{i\frac{2k\pi}{n}}} \right)}{n(1-c)(1+z)^c \left(1-e^{i\frac{2k\pi}{n}} \right) \left(1-e^{i\frac{4k\pi}{n}} \right)} \\
&\quad \left. - \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{2^{c-1}(1-z) F_1 \left(1-c; -c, 1; 2-c; \frac{1-z}{2}, \frac{1-z}{1-e^{-i\frac{2k\pi}{n}}} \right)}{n(1-c)(1+z)^c \left(1-e^{i\frac{2k\pi}{n}} \right) \left(1-e^{-i\frac{4k\pi}{n}} \right)} \right] \\
&\quad \left. + iIm \left\{ \frac{1}{2c} \left[\left(\frac{1+z}{1-z} \right)^c - 1 \right] \right\} \right\}
\end{aligned}$$

biçimindedir. Benzer şekilde, eğer $n = 2m$ ($m \in \mathbb{N}$) ise, o zaman (4.18) den

$$\begin{aligned}
h'_{c,n}(z) &= \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^c \left[\frac{1}{4} \left(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z} \right) + \frac{1}{2n} \left(\frac{1}{(1-z)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \frac{1}{\left(1-e^{i\frac{4k\pi}{n}} \right) \left(1-ze^{-i\frac{2k\pi}{n}} \right)} + \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \frac{1}{\left(1-e^{-i\frac{4k\pi}{n}} \right) \left(1-ze^{i\frac{2k\pi}{n}} \right)} \right) \right]
\end{aligned}$$

olduğu görülür ve böylece bu ifadenin 0 dan z ye integrali alınırsa

$$N_2 = \frac{1}{4c} + \frac{c}{2n(1-c^2)} + \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \frac{2^c e^{i\frac{2k\pi}{n}} F_1\left(1-c; -c, 1; 2-c; \frac{1}{2}, \frac{1}{1-e^{i\frac{2k\pi}{n}}}\right)}{n(1-c) \left(1-e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^2 \left(1+e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)} \\ - \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \frac{2^c F_1\left(1-c; -c, 1; 2-c; \frac{1}{2}, \frac{-e^{i\frac{2k\pi}{n}}}{1-e^{-i\frac{2k\pi}{n}}}\right)}{n(1-c) \left(1-e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right) \left(1-e^{-i\frac{4k\pi}{n}}\right)}$$

iken

$$h_{c,n}(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^c \left[\frac{1}{4c} + \frac{1+z}{4n(1+c)(1-z)} - \frac{1-z}{4n(1-c)(1+z)} \right. \\ + \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \frac{2^c (1-z) e^{i\frac{2k\pi}{n}} F_1\left(1-c; -c, 1; 2-c; \frac{1-z}{2}, \frac{1-z}{1-e^{i\frac{2k\pi}{n}}}\right)}{n(1-c)(1+z)^c \left(1-e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right) \left(1-e^{i\frac{4k\pi}{n}}\right)} \\ \left. - \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \frac{2^c (1-z) F_1\left(1-c; -c, 1; 2-c; \frac{1-z}{2}, \frac{1-z}{1-e^{-i\frac{2k\pi}{n}}}\right)}{n(1-c)(1+z)^c \left(1-e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right) \left(1-e^{-i\frac{4k\pi}{n}}\right)} \right] - N_2$$

olduğu görülür. Yine, n nin tek değerler alması durumunda yapılan gözlemler kullanılarak, n nin çift değerleri için $f_{c,n}(z)$ harmonik dönüşümü, sırasıyla

$$\begin{aligned}
u = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2c} - 2N_2 \right. \\
+ \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^c \left[\frac{1+z}{2n(1+c)(1-z)} - \frac{1-z}{2n(1-c)(1+z)} \right. \\
+ \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \frac{2^{c-1}(1-z)e^{i\frac{2k\pi}{n}} F_1 \left(1-c; -c, 1; 2-c; \frac{1-z}{2}, \frac{1-z}{1-e^{i\frac{2k\pi}{n}}} \right)}{n(1-c)(1+z)^c \left(1-e^{i\frac{2k\pi}{n}} \right)^2 \left(1+e^{i\frac{2k\pi}{n}} \right)} \\
\left. + \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \frac{2^{c-1}(1-z) F_1 \left(1-c; -c, 1; 2-c; \frac{1-z}{2}, -\frac{e^{i\frac{2k\pi}{n}}(1-z)}{1-e^{i\frac{2k\pi}{n}}} \right)}{n(1-c)(1+z)^c \left(-1+e^{i\frac{2k\pi}{n}} \right) \left(1-e^{-i\frac{4k\pi}{n}} \right)} \right] \left. \right\}
\end{aligned}$$

ve

$$v = \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{2c} \left[\left(\frac{1+z}{1-z} \right)^c - 1 \right] \right\}$$

biçiminde olmak üzere

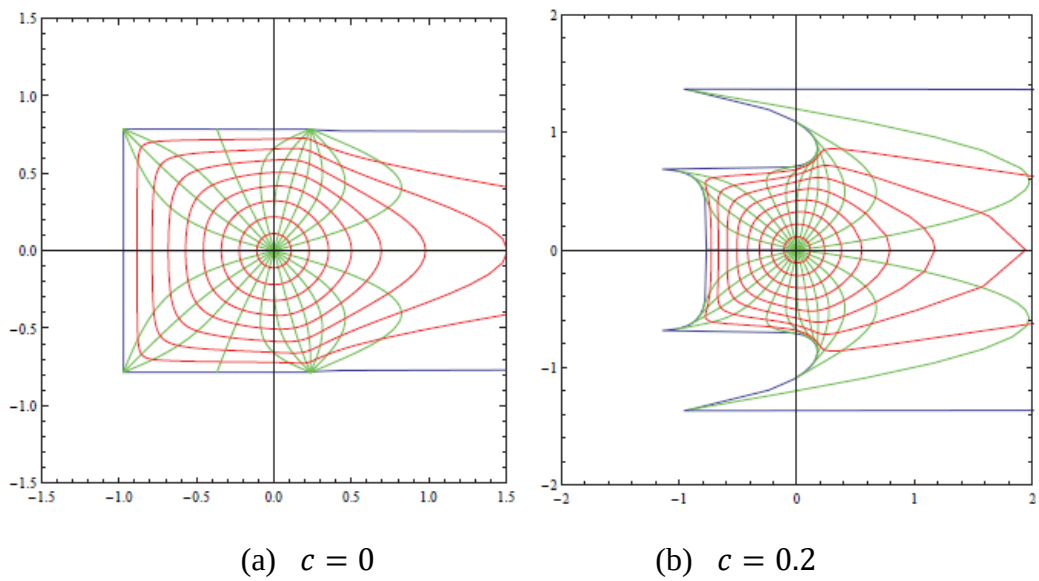
$$f_{c,n}(z) = \operatorname{Re}\{2h_{c,n}(z) - k_c(z)\} + i\operatorname{Im}\{k_c(z)\} = u + iv$$

şeklinde yazılır. Teorem 3.3.4 e göre u ve v yukarıdaki gibi ve

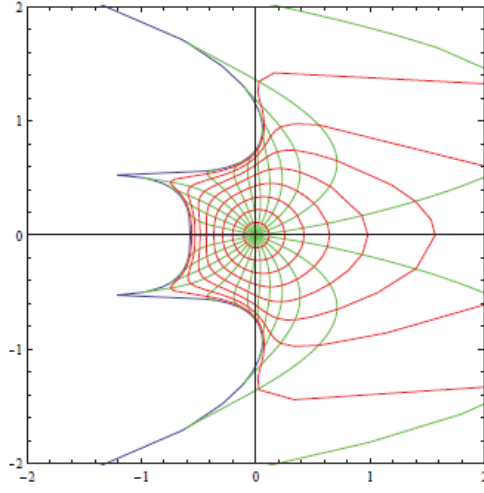
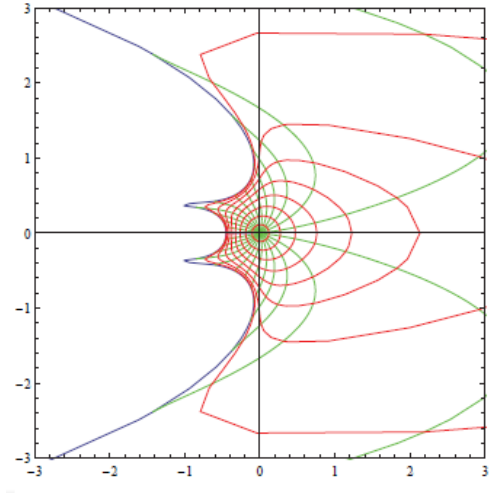
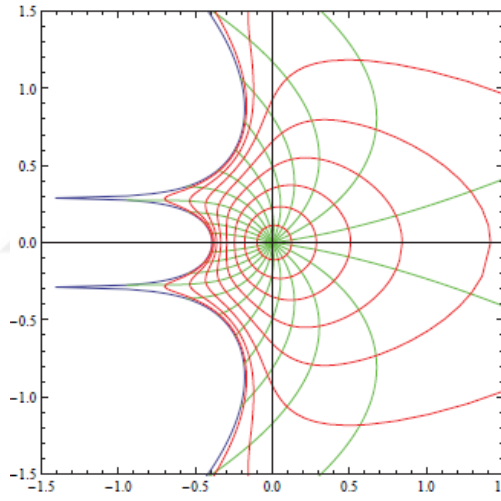
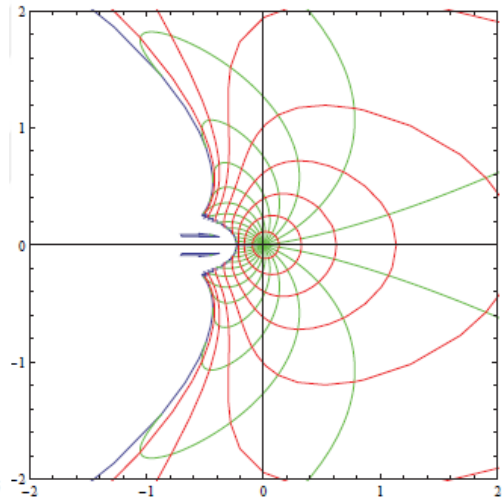
$$\begin{aligned}
F(u, v) = \operatorname{Im} \left\{ \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^c \left[\frac{(1+i^n)(1+z)}{2n(1+c)(1-z)} \right. \right. \\
+ \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \frac{(-1)^k 2^{c-1} (1-z) e^{i \frac{2k\pi}{n}} F_1 \left(1-c; -c, 1; 2-c; \frac{1-z}{2}, \frac{1-z}{1-e^{i \frac{2k\pi}{n}}} \right)}{n(1-c)(1+z)^c \left(1-e^{i \frac{2k\pi}{n}} \right)^2 \left(1+e^{i \frac{2k\pi}{n}} \right)} \\
\left. \left. - \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \frac{2^{c-1} (1-z) F_1 \left(1-c; -c, 1; 2-c; \frac{1-z}{2}, -\frac{e^{i \frac{2k\pi}{n}} (1-z)}{1-e^{i \frac{2k\pi}{n}}} \right)}{n(1-c)(1+z)^c \left(1-e^{i \frac{2k\pi}{n}} \right) \left(1-e^{-i \frac{4k\pi}{n}} \right)} \right] \right\}
\end{aligned}$$

şeklinde olmak üzere n nin çift değerleri için, $f_{c,n}(\mathbb{D})$ harmonik dönüşümleri $M_{c,n}(u, v) = (u, v, F(u, v))$ minimal yüzeylerine yükselir.

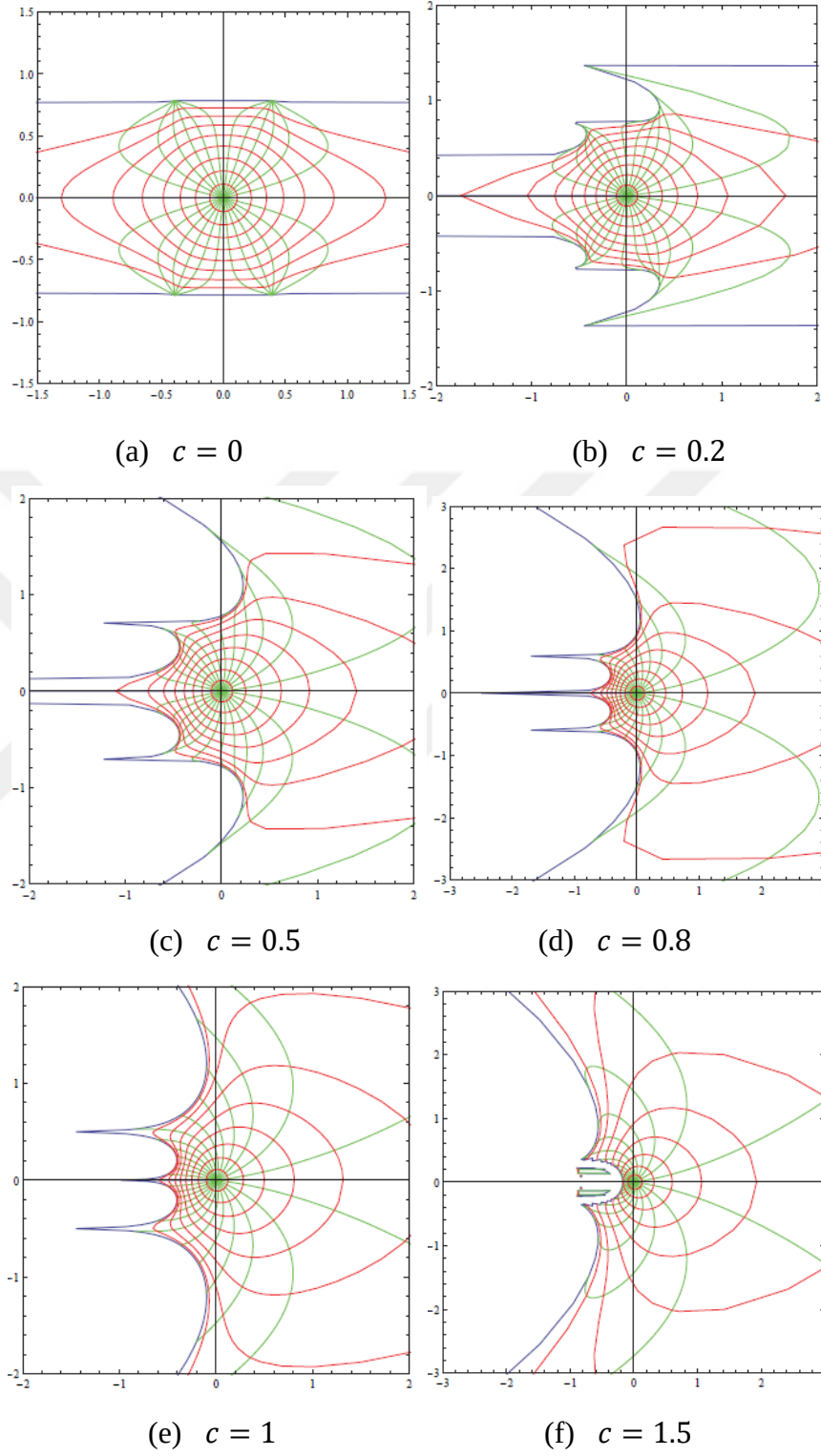
Şekil 4.12 ve Şekil 4.13, $c \in [0, 2]$ nin çeşitli değerleri için $f_{c,n}(z)$ nin grafikleridir ve $f_c(\mathbb{D})$ nin, $c \in [1, 2]$ nin çeşitli değerleri için şerit bölgesinden dalga düzlemine dönüştüğü görülür.



Şekil 4.12. $c \in [0, 2]$ nin belirli değerleri için $f_{c,3}(\mathbb{D})$ nin görüntüleri (Jiang *et al.* 2015)

(c) $c = 0.5$ (d) $c = 0.8$ (e) $c = 1$ (f) $c = 1.5$

Şekil 4.12. $c \in [0,2]$ nin belirli değerleri için $f_{c,3}(\mathbb{D})$ nin görüntüleri (Jiang *et al.* 2015) (devam)



Şekil 4.13. $c \in [0,2]$ nin belirli değerleri için $f_{c,4}(\mathbb{D})$ nin görüntüleri (Jiang *et al.* 2015)

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu tezde, ilk olarak minimal yüzeylerin kompleks parametrelerle ifade edilişini anlamak için bazı temel tanım ve teoremler hatırlatılmıştır. Minimal yüzeyler tanıtıldıktan sonra minimal yüzeylerin izotermal parametrizasyonları ve minimal yüzey örnekleri verilmiştir. Minimal yüzeylerle harmonik ünivalent fonksiyonlar arasındaki ilişki incelenmiştir. Weierstrass gösteriminin farklı şekillerine yer verilmiştir. Makaslama tekniği anlatıldıktan sonra bu yöntem kullanılarak oluşturulan harmonik ünivalent fonksiyon örnekleri gösterilmiştir. Harmonik fonksiyonların geometrik görünüşleri ve dilatasyon özellikleri verilmiştir.

Araştırma bulgularının ilk bölümünde, analitik kısmı özel tipte olan bazı fonksiyonların C_H^0 sınıfına ait olması için gerekli olan şartlar ve bu fonksiyonların minimal yüzeylere yükseltilmesi incelenmiştir. İkinci bölümünde ise dilatasyon değişirken birim diski yatay doğrultuda konveks bir bölgeye dönüştüren, yön-koruyan harmonik dönüşümlerin makaslama tekniği kullanılarak oluşturulması ve bu harmonik fonksiyonlara karşılık gelen minimal yüzeylerin elde edilişi incelenmiştir.

KAYNAKLAR

- Alağaç, B., 2012. Minimal Yüzeylerin Log-Harmonik Fonksiyonlarla Karakterizasyonu. Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Brilleslyper, M. A., Dorff, M. J., Mc Dougall J.M., Rolf, J. S., Schaubroeck L.E., Stankewitz R.L. and Stephenson K., 2012. Explorations in Complex Analysis. The Mathematical Association of America, 373 p, United States of America
- Clunie J. G. And Sheil-Small T.,1984.Harmonic Univalent Functions. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser.A.I.,**9**, 3-25
- Conway, J. B., 1973. Functions Of One Complex Variable. Springer – Verlag New York Inc , 313 p.
- Dorff, M.,2001. Convolutions of Planar Harmonic Convex Mappings. Comp. Vari. Theo. Appl., **45**, 263-271.
- Dorff M. and Muir S., 2014. A Family of Minimal Surfaces And Univalent Planar Harmonic Mappings. Abstr. Appl. Anal., Art. ID 476061, 8 p.
- Duren,P.,1983. Univalent Functions (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 382 p, Springer-Verlag ,NewYork, Berlin, Heidelberg, Tokyo.
- Duren, P.,2004. Harmonic Mapping in the Plane. Cambridge University Press, 212 p, Cambridge, UK.
- Greiner,P. 2004. Geometric Properties of Harmonic Shears.Comput. Methods Funct. Theory, **4**(1), 77-96.
- Hacısalıhoğlu, H.,1983. Diferensiyel Geometri. Gazi Üniversitesi Basın Yayın Yüksekokulu Basımevi,894 s, Ankara.
- Hengartner,W. and Schober, G.,1970. On Schlicht Mappings to Domains Convex in One Direction Comment. Math. Helv. **45**, 303-314. JiangY.,Liu Z.andPonnusamyS., 2015. Univalent Harmonic Mappings and Lift To The Minimal Surfaces.<https://arxiv.org/abs/1508.00199>(02.02.2019).
- Lewy H., 1936. On the Nonvanishing of the Jacobian in Certain One-To-One Mappings. Bull. Amer.Math. Soc.,**42** ,689-692 Li, L.,Ponnusamy, S. and Vuorinen, M.,2014. Chapter in Current Topics in Pure and Computational Complex Analysis. The Minimal Surfaces Over the Slanted Half-Planes , Vertical Strips and Single Slit, Eds. Joshi, S.,Dorff M. and Lahri I. Trends in Mathematics , Birkhauser. arxiv:1204.2890v1, 47-61
- Olver, F.W.J.,Lozier, D.W., Boisvert R.F. and Clark,2010. C.W.,NIST Handbook of Mathematical Functions. Cambridge University Press, 950 p.
- Osserman, R., 1986. A Survey of Minimal Surfaces. 2nd ed., Dover Publications, Ino, New York .
- Ökten, M., 2011. Minimal Yüzeylerin Harmonik Fonksiyonlarla Karakterizasyonu. Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- P. Do Carmo, M.,Çeviren Korkmaz B.,2012. Diferansiyel Geometri:Eğriler ve Yüzeyler. Türkiye Bilimler Akademisi, 587 s, Ankara.
- P. T. Mocanu, 1981. Sufficient Conditions Of Univalence For Complex Functions in The Class C_1 , Anal. Numér. Théor. Approx.,**10**, 75-79.

- Pommerenke, C., 1963. On Starlike and Close-to-Convex Functions. *Proc. London Math. Soc.*(3) **13**, 290-304.
- Ponnusamy, S., and Sairam Kaliraj A., 2012. On Harmonic Close-to-convex Functions. *Comput. Methods Funct. Theory* 12, no. 2, 669-685.
- Ponnusamy, S., Yamamoto, H. and Yanagihara, H., 2013. Variability Regions For Certain Families Of Harmonic Univalent Mappings. *Complex Var. Elliptic Equ.* 58(1), 23-34.
- Ponnusamy, S., Quach T. and Rasila A., 2014. Harmonic Shears Of Slit and Polygonal Mappings. *Appl. Math. Comput.*, 233, 588-598.
- Ponnusamy, S., Rasila, A. and Kaliraj A. S., 2014. Harmonic Close-To-Convex Functions And Minimal Surfaces . *Complex Var. Elliptic Equ.* 59, 986-1002.
- Robertson, M. S., 1936. Analytic Functions Starlike in One Direction. *Am. J. Math.* **58**, 465-472.
- Royster W. C. And Ziegler M., 1976. Univalent Functions Convex in One Direction *Publ. Math. Debrecen*, **23**, 339-345.

ÖZGEÇMİŞ

Şaban Demirtaş 1985 yılında Kayseri’de doğdu. İlkokul, ortaokul ve lise tahsilini Kayseri’de tamamladı. 2006 yılında Afyon Kocatepe Üniversitesi Matematik Bölümüne girmeye hak kazandı. 2010 yılında bu bölümden mezun oldu. 2011 yılında Erciyes Üniversitesi’nde Pedagojik Formasyon eğitimini tamamladı. 2014 yılında Atatürk Üniversitesi’nde Yüksek Lisans öğrenimine başladı.

2012-2014 yılları arası Hınıs İmam-Hatip Lisesi’nde öğretmen olarak görev yaptı. 2014 yılından beri Iğdır Milli Eğitim Vakfı Anadolu Lisesi’nde öğretmen olarak görev yapmaktadır.