

T.C.
AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS PROGRAMI
2023-YL-071

DÜZLEMSEL ÇİZGELER

Arif Atalay ÖZDEMİR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Adnan MELEKOĞLU

AYDIN-2023

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmam boyunca yardımını esirgemeyen danışman hocam Sayın Prof. Dr. Adnan MELEKOĞLU'na (Aydın Adnan Menderes Üniversitesi, Matematik Bölümü), babam Rıza ÖZDEMİR'e, annem Seval ÖZDEMİR'e ve tez çalışmam boyunca bana manevi olarak yardımcı olan Seda GÜNEL'e sonsuz teşekkür ederim.

Arif Atalay ÖZDEMİR

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	i
TEŞEKKÜR	ii
İÇİNDEKİLER.....	iii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	v
ŞEKİLLER DİZİNİ	vi
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	viii
ÖZET	ix
ABSTRACT	x
1. GİRİŞ.....	1
2. KAYNAK ÖZETLERİ	6
2.1. Çizgeler.....	6
2.2. Düzlemsel Çizgeler	15
3. MATERYAL VE YÖNTEM	29
3.1. Kompakt Yüzeyler Üzerinde Çizgeler.....	29
3.2. Platonik ve g –Platonik Çizgeler.....	32
3.2.1. Platonik Çizgeler	36
3.3. Platonik Çizge Aileleri	40
3.3.1. Accola-Maclahlan Çizgesi.....	41
3.3.2.1. Tip Wiman Çizgesi	42
3.3.2.2. Tip Wiman Çizgesi	43
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	46
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	47

6. KAYNAKLAR	48
BİLİMSEL ETİK BEYANI	49
ÖZGEÇMİŞ.....	50



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$V(G)$	: Bir çizgenin köşe kümesi.
$E(G)$	: Bir çizgenin kenar kümesi.
$d_g(v)$	: Bir v köşesinin derecesi.
K_n	: Köşe sayısı n olan tam çizge.
C_n	: Köşe sayısı n olan döngü çizge.
$K_{m,n}$	: İki parçalı tam çizge.
$cr(G)$	: Kesişme sabiti.
$t(G)$	: Bir çizgenin kalınlığı.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1. Bir düzlemsel çizge.....	1
Şekil 1.2. Bir düzlem çizgesi.....	1
Şekil 1.3. Tor yüzeyi üzerinde $K_{3,3}$ çizgesi.....	2
Şekil 1.4. 1 -platonik bir çizge	4
Şekil 2.1. Beş köşeli bir çizge	7
Şekil 2.2. Regüler çizgeler	8
Şekil 2.3. İlmek ve paralel kenarlar.....	9
Şekil 2.4. Basit çizge	9
Şekil 2.5. Tam çizgeler	10
Şekil 2.6. Bir çizge	11
Şekil 2.7 C_3 , C_4 , C_5 ve C_6 döngüleri.....	12
Şekil 2.8. Sırasıyla bağlantılı G_1 çizgesi ve bağlantılı olmayan G_2 çizgesi.	12
Şekil 2.9. Bir ağaç örneği	13
Şekil 2.10. İki parçalı bir çizgenin iki farklı çizimi	13
Şekil 2.11. $K_{2,2}$ iki parçalı tam çizgesi.....	14
Şekil 2.12. İki izomorf çizge	14
Şekil 2.13. Düzlem çizgeleri	15
Şekil 2.14. Düzlem çizgesi ve düzlemsel çizge.....	15
Şekil 2.15. Düzlemsel olmayan çizgeler Denklemini buraya yazın.	16
Şekil 2.16. $K_{3,3}$ çizgesinin herhangi bir düzlem çizimi	17
Şekil 2.17. K_5 çizgesi.....	18
Şekil 2.18. be kenarının içeride kaldığı durum.....	18

Şekil 2.19. $K5$ ve $K3,3$ çizgeleri	19
Şekil 2.20. G çizgesi ve yüzleri	20
Şekil 2.21. Bir küpün çizge ile temsili	21
Şekil 2.22. $K5$ tam çizgesi.....	23
Şekil 2.23. $K3,3$ iki parçalı tam çizgesi.....	25
Şekil 2.24. Homeomorf iki çizge	25
Şekil 2.25. Kuratowski Teoreminin uygulaması	26
Şekil 2.26. Dual çizge	27
Şekil 3.1. Tor yüzeyi üzerinde $K5$ çizgesi.....	29
Şekil 3.2. Tor yüzeyi çizimi.....	30
Şekil 3.3. Platonik Çizgeler.....	34
Şekil 3.4. Tor yüzeyi üzerinde $G1$ çizgesi	37
Şekil 3.5. Tor yüzeyi üzerinde $G2$ çizgesi	38
Şekil 3.6. Tor yüzeyi üzerinde $G3$ çizgesi	38
Şekil 3.7. Tor yüzeyi üzerinde $H1$ çizgesi	39
Şekil 3.8. Tor yüzeyi üzerinde $H2$ çizgesi	39
Şekil 3.9. Tor yüzeyi üzerinde $H2$ çizgesinin duali	40
Şekil 3.10. Cinsi 2 olan Accola-Maclahlan çizgesi.....	42
Şekil 3.11. Cinsi 2 olan 1. Tip Wiman çizgesi.	43
Şekil 3.12. Cinsi 2 olan 2. Tip Wiman çizgesi	44

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 3.1. İlk 20 Tam Çizge ve Cinsleri.....	31
Çizelge 3.2. Platonik Çizgeler.....	33
Çizelge 3.1. Bazı Özel Platonik Çizgeler.....	45



ÖZET

DÜZLEMSEL ÇİZGELER

Özdemir A. A. Aydın Adnan Menderes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Programı, Yüksek Lisans Tezi, Aydın, 2023.

Amaç: Bu tez çalışması düzlemsel çizgeler ve onların kompakt yüzeyler üzerindeki çizgelere genelleştirilmiş olan çizgeleri incelemek amacı ile yapılmıştır.

Materyal ve Yöntem: Düzlemsel çizgeler, kenarları birbirini kesmeden bir düzlem üzerine çizilebilen çizgelerdir. Çizgelerin düzlemselliği Kuratowski Teoremi ile karakterize edilir. Düzlemsel olmayan çizgeler ise cinsi 0 'dan büyük olan yüzeyler üzerine kenarları kesişmeden çizilebilirler. Burada yüzeyin cinsi Euler-Poincare Formülü yardımıyla belirlenir.

Bulgular: Bu çalışmada ağırlıklı olarak, köşelerinin dereceleri ve yüzlerini sınırlayan kenarların sayısı aynı olan çizgeler incelenmiştir. Böyle bir çizgeye g - platonik çizge denir.

Sonuç: Cinsi 0 ve 1 'den büyük olan g -platonik çizgelerin sonlu olduğu, 1 -platonik çizgelerin ise sonsuz olduğu bilinmektedir. Bu çalışmada tor yüzeyleri üzerine üç farklı tipte sonsuz 1 -platonik çizge yerleştirilebileceği gösterilmiştir. Ayrıca her $g > 1$ için cinsi g ve üç farklı yüzey üzerinde bulunan beş g -platonik çizge ailesi tanıtılmıştır.

Anahtar kelimeler: Bir Çizgenin Cinsi, Çizge, Düzlemsel Çizge, Platonik Çizge.

ABSTRACT

PLANAR GRAPHS

Özdemir A. A. Aydın Adnan Menderes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences, Mathematics Program, Master Thesis, Aydın, 2023.

Objective: This research was carried out in order to investigate the planar graphs and their generalizations to those on compact surfaces.

Material and Methods: Planar graphs are graphs that can be drawn on a plane without any edge crossings. Planarity of graphs are characterized by Kuratowski's theorem. Nonplanar graphs can be drawn on surfaces of genus greater than 0 with no edge crossings. Here the genus of the surfaces is determined by the Euler-Poincare formula.

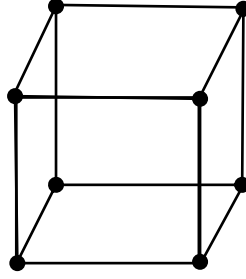
Results: In this thesis, mainly the graphs with the same vertex degree and the faces valency have been investigated. Such a graph is called g -platonic.

Conclusion: It is known that the number of g -platonic graphs of genus 0 and greater than 1 is finite, and that of genus 1 is infinite. In this thesis, it has been shown that three different types of 1-platonic graphs can be embedded on tori. Also, for every $g > 1$, five g -platonic graph family, which are contained by three different surfaces, have been introduced.

Key Words: Genus of a Graph. Graph, Planar Graph, Platonic Graph.

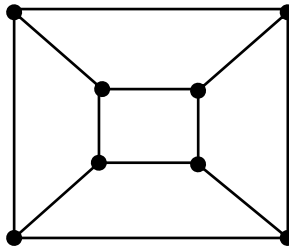
1. GİRİŞ

Düzlemsel çizgeler, kenarları birbirini kesmemek kaydıyla düzlem üzerine çizilebilen çizgelerdir.



Şekil 1.1. Bir düzlemsel çizge.

Örneğin, Şekil 1.1 ile verilen ve 8 köşesi ile 12 kenarı bulunan çizge, Şekil 1.2 de görüldüğü gibi bir düzlem üzerine kenarları kesişmeyecek biçimde çizilebilir. Böyle bir çizgeye düzlem çizgesi denir.



Şekil 1.2. Bir düzlem çizgesi

Herhangi bir düzlem çizgesi düzlemi her biri bir diske homeomorf olan bölgelere ayırır ve bu bölgelerin her birine çizgenin bir yüzü denir. Çizgenin, köşe, kenar ve yüzlerinin sayısı sırasıyla v , e ve f olmak üzere, Euler formülü olarak bilinen,

$$v + f - e = 2$$

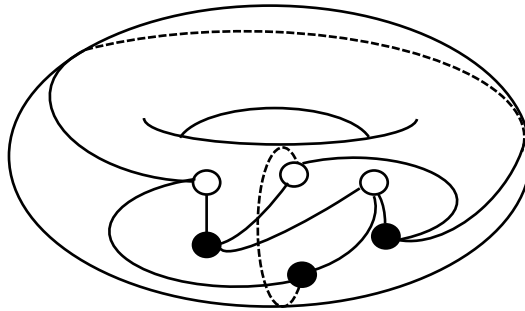
eşitliği geçerlidir. Düzlemsel çizgelerle ilgili problemlerin birçoğunun çözümünde Euler formülü kullanılır.

K_5 tam çizgesi ve $K_{3,3}$ iki parçalı tam çizgesi düzlemsel değildir. Bu çizgelerden herhangi birine homeomorf bir alt çizgesi olan çizgeler düzlemsel değildir, diğer çizgeler ise düzlemseldir. Verilen bir çizgenin düzlemsel olup olmadığı Kuratowski Teoremi olarak bilinen bu kriter yardımıyla saptanır.

Düzlemsel çizgeler günlük hayatta karşılaşılan bazı problemlerin çözümünde de model olarak kullanılmaktadır. Örneğin, devre kartları üzerine yerleştirilen kablolar yalıtılmazlar ve bu sebeple bunlarının birbirine temas etmemesi gerekmektedir. Dolayısıyla devre elemanları köşeler, kablolar da kenarlar olarak ele alınırsa, her devre kartı bir düzlemsel çizge ile temsil edilebilir. Bu kartların tasarım sürecinde, kullanılacak olan devre elemanları ve bunlar arasındaki bağlantıyı sağlayan kabloların sayıları için bazı üst sınırlar mevcuttur. Bu üst sınırlar belirlenirken düzlemsel çizgelerle ilgili bazı formül ve eşitsizliklerden yararlanılmaktadır.

Benzer şekilde, üç tesisat probleminin çözümünün mevcut olmadığı, probleme karşılık gelen $K_{3,3}$ iki parçalı tam çizgesini düzlemsel olmadığı gerçeği dikkate alınarak gösterilmiştir.

Düzlemsel olmayan çizgeler ise bir tor yüzeyi veya cinsi 1'den büyük olan bir yüzey üzerine kenarları birbirini kesmeyecek şekilde çizilebilir. Örneğin düzlemsel olmadığı bilinen $K_{3,3}$ iki parçalı tam çizgesinin bir tor yüzeyi üzerine çizimi aşağıdaki şekilde gösterilmektedir.



Şekil 1.3. Tor yüzeyi üzerinde $K_{3,3}$ çizgesi

Düzlemsel çizgeler gibi, düzlemsel olmayan çizgeler de kendileri ile aynı cinse sahip olan yüzeyler üzerine yerleştirildiklerinde, bu yüzeyleri yüz adı verilen ve her biri bir diske homeomorf olan bölgelere ayırırlar. Ancak bu durumda Euler formülü yerine Euler-Poincare formülü olarak bilinen

$$v + f - e = 2 - 2g$$

formülü geçerlidir. Burada g , çizgenin ve dolayısıyla çizgeyi üzerinde bulunduran yüzeyin cinsidir.

$$S^2 = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

birim küre olmak üzere, $\Pi(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right)$ olarak tanımlanan ve stereografik izdüşüm olarak adlandırılan

$$\Pi: S^2 - \{(0,0,1)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

fonksiyonu yardımı ile küre üzerindeki bir çizge düzlem üzerine, düzlem üzerindeki bir çizge de

$$\Pi^{-1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 - \{(0,0,1)\}$$

fonksiyonu yardımı ile küre üzerine yerleştirilebilir. Burada Π^{-1} fonksiyonu

$$\Pi^{-1}(u, v) = \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right)$$

olarak tanımlanır. Kürenin cinsinin 0 olduğu dikkate alınırsa, Euler-Poincare formülünün,

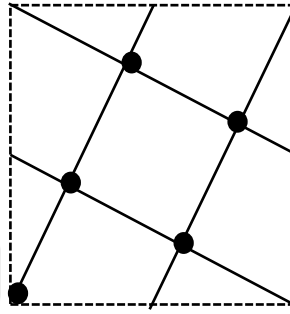
$$g = 0$$

durumunda Euler formülünü verdiği görülür.

Düzlemsel, bağlantılı ve regüler bir çizgenin her bir yüzünü sınırlayan kenarların sayısı eşit ise bu çizgeye platonik çizge denir. Aynı özelliklere sahip ama cinsi $g > 0$ olan bir çizgeye ise g -platonik çizge denir. Dolayısıyla platonik çizgeler 0 -platonik çizgelerdir. Özel olarak Şekil 1.1 de verilen ve küpten elde edilen çizge ve diğer platonik cisimlerden elde edilen çizgeler 0 -platonik çizgelerdir. Ayrıca, döngü çizgeler de 0 -platonik çizgelerdir.

Eğer g -platonik bir G çizgesi d -regüler ve G çizgesinin her bir yüzü n tane kenar ile sınırlı ise G çizgesi $\{d, n\}$ tipindedir denir.

Örneğin düzlemsel olmadığı bilinen ve tor yüzeyi üzerine aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi yerleştirilen K_5 tam çizgesinin her köşesinin derecesi 4 ve her bir yüzü 4 kenar ile sınırlıdır. Dolayısıyla bu çizge 1-platoniktir ve $\{4, 4\}$ tipindedir.



Şekil 1.4. 1-platonik bir çizge

Bu tez çalışmasının ikinci bölümünde çizge ve düzlemsel çizge kavramları kısaca tanıtılmıştır. Bu kavramlar hakkında detaylı bilgiler (Bondy ve Murty, 2008), (Diestel, 2017) ve (West, 2001) kaynaklarında yer almaktadır.

Üçüncü bölümde ise cinsi 0, 1 ve 1'den büyük platonik çizgeler incelenmiştir. Cinsi 0 ve döngü olmayan platonik çizgelerin sayısının 5 olduğu ve bunların 5 platonik cisme karşılık geldiği bilinmektedir. Cinsi 1 olan bir platonik çizge; $\{3, 6\}$, $\{6, 3\}$ veya $\{4, 4\}$ tipindedir, (Trudeau, 1993). Bu kısıtlamalara rağmen sonsuz 1-platonik çizge mevcuttur. Üçüncü bölümde; aynı tor yüzeyi üzerinde her k pozitif tamsayısı için bir G_k 1-platonik çizgesini yerleştirebileceği görsel olarak açıklanmıştır. Dolayısıyla aynı tor yüzeyi üzerinde sonsuz 1-platonik çizgenin mevcut olabileceği gösterilmiştir.

Cinsi $g > 1$ ve $\{d, n\}$ tipinde bir platonik çizgenin köşe sayısı

$$v = \frac{4n(g-1)}{(n-2)(d-2)-4}$$

formülü yardımıyla belirlenir. Ayrıca köşe sayısı en fazla

$$v = 28(g - 1)$$

olabilir ve bu üst sınıra $d = 3$ ve $n = 7$ olduğunda ulaşılır. (Truedau, 1993).

Her $g > 1$ için g -platonik bir çizgenin köşelerinin sayısı en fazla $28(g - 1)$ olacağı için g -platonik çizgelerin de sayısının sonlu olduğu görülür.

Cinsi 0 ve 1'den büyük olan g -platonik çizgelerin sayılarının sonlu olması; cinsi 0 olan kürede ve cinsi 1'den büyük olan yüzeylerin yerel olarak izometrik olduğu hiperbolik düzlemde benzer çokgenlerin özdeş olmalarından kaynaklanır. Öklid düzleminde ise benzer oldukları halde özdeş olmayan sonsuz çokgen mevcut olabilir. Tor yüzeyleri yerel olarak Öklid düzlemine izometrik oldukları için üzerlerinde tipleri aynı olan sonsuz 1-platonik çizge bulundurabilirler.

Üçüncü bölümde ayrıca her $g > 1$ için cinsleri g ve tipleri,

$$\{4, 2g + 2\}, \{2g + 2, 2g + 2\}, \{2g + 1, 4g + 2\}, \{4, 4g\}, \{4g, 4g\}$$

olan beş farklı çizge tanıtılmıştır. Bu çizgeleri üzerlerinde bulunduran yüzeyler; Accola-Maclahlan ve Wiman yüzeyleri olarak bilinen ve otomorfizma grupları hakkında birçok kayda değer çalışmalar yapılmış olan Riennman yüzeyleridir, (Accola, 1968), (Kulkarni, 1991), (Maclahlan, 1969).

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Bu bölümde çizgeler ve düzlemsel çizgeler hakkında temel bilgilere yer verilmiştir.

2.1. Çizgeler

Tanım 2.1.1. $V \neq \emptyset$ sonlu bir küme ve E, V kümesinin elemanlarının oluşturduğu sıralı olmayan ikililerden meydana gelen bir küme olmak üzere $G = (V, E)$ ikilisine bir çizge adı verilir. Burada V kümesinin elemanlarına köşeler ve bazı durumlarda boş olan E kümesinin elemanlarına da kenarlar adı verilir.

Bir G çizgesinin köşe kümesi için $V(G)$ ve kenar kümesi için $E(G)$ notasyonu kullanılacaktır.

Bir çizge, köşeleri noktalarla, kenarları da bu noktaları birleştiren çizgilerle temsil edilerek görsel hale getirilebilir.

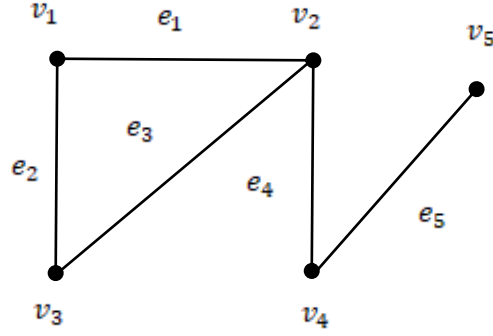
$G = (V, E)$ bir çizge ve $v_1, v_2 \in V(G)$ olmak üzere, v_1 ve v_2 köşelerini birleştiren kenar

$$e = (v_1, v_2) \text{ veya } e = (v_2, v_1) \text{ olarak gösterilecektir.}$$

Örnek 2.1. Köşe kümesi $V = \{ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$ ve kenar kümesi

$$E = \{ e_1 = (v_1, v_2), e_2 = (v_1, v_3), e_3 = (v_2, v_3), e_4 = (v_2, v_4), e_5 = (v_4, v_5) \}$$

olan G çizgesi Şekil 2.1 ile gösterilmiştir.



Şekil 2.1. Beş köşeli bir çizge

Tanım 2.1.2. Bir G çizgesinin v_1 ve v_2 köşeleri arasında bir e kenarı varsa bu köşelere komşu köşeler denir. Bu durumda e kenarı v_1 ve v_2 köşeleri ile bitişiktir denir. Aynı köşe ile bitişik olan kenarlara da komşu kenarlar denir.

Örneğin Şekil 2.1 ile verilen çizgede v_1 ve v_4 köşeleri komşu değildir komşu değildir ama v_2 ve v_4 köşeleri komşudur. e_1 kenarı v_1 ve v_2 köşeleri ile bitişiktir. Fakat diğer köşeler ile bitişik değildir.

Tanım 2.1.3. Bir $G = (V, E)$ çizgesinin herhangi bir v köşesine bitişik olan kenarların sayısına v köşesinin derecesi denir. v köşesinin derecesi $d_G(v)$ veya $d(v)$ notasyonu ile gösterilir.

Örneğin Şekil 2.1 ile verilen çizge için $d(v_1) = 2$, $d(v_2) = 3$, $d(v_3) = 2$, $d(v_4) = 2$ ve $d(v_5) = 1$ dir.

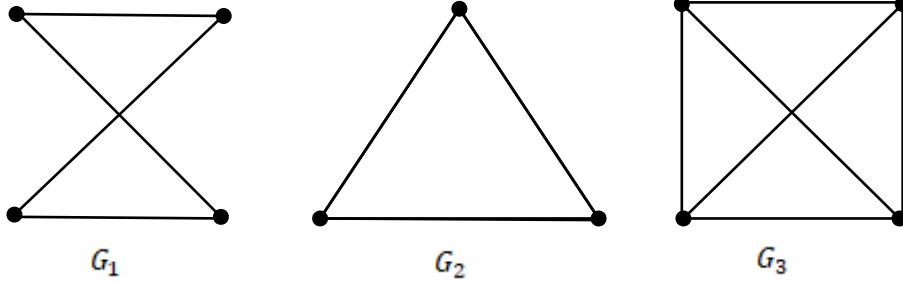
Teorem 2.1. Köşeleri $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ olan bir $G = (V, E)$ çizgesi için

$$\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2|E|$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: Her bir kenar iki köşe ile bitişik olduğundan, dereceler toplamı kenar sayısının iki katına eşit olur.

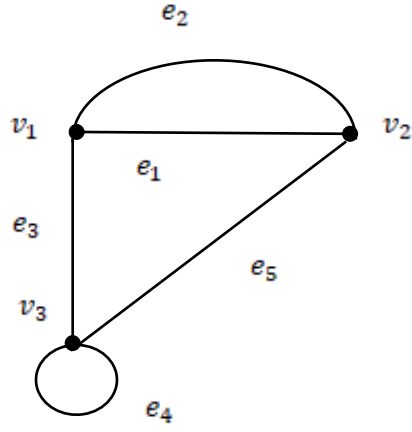
Tanım 2.1.4. Bir çizgenin bütün köşelerinin derecesi eşit ise bu çizgeye regüler çizge denir. Bütün köşelerinin derecesi k olan regüler çizgeye özel olarak k -regüler çizge denir.



Şekil 2.2. Regüler çizgeler

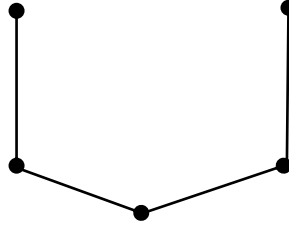
Şekil 2.2 ile verilen G_1 ve G_2 çizgeleri 2-regüler, G_3 çizgesi 3-regülerdir.

Tanım 2.1.5. Bir çizgede bir kenarın her iki ucu da aynı köşe ile bitişik ise bu kenara ilmek denir. Bir çizgenin farklı iki köşesini birleştiren birden fazla kenar bulunuyorsa bu kenarlara paralel kenar denir.



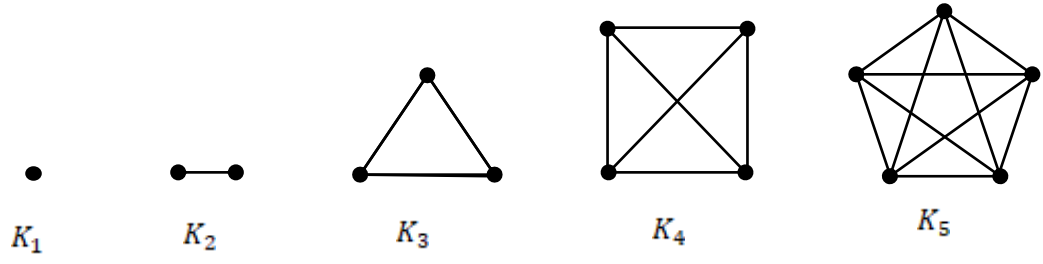
Şekil 2.3. İlmek ve paralel kenarlar

Tanım 2.1.6. Bir çizge ilmek veya paralel kenarlar bulundurmuyorsa, bu çizgeye basit çizge denir. Paralel kenarlar içeren çizgeye ise çoklu çizge denir.



Şekil 2.4. Basit çizge

Tanım 2.1.7. Bir basit çizgenin herhangi iki köşesi arasında bir kenar bulunuyorsa bu çizgeye tam çizge denir. Köşe sayısı n olan tam çizge K_n notasyonu ile gösterilir.

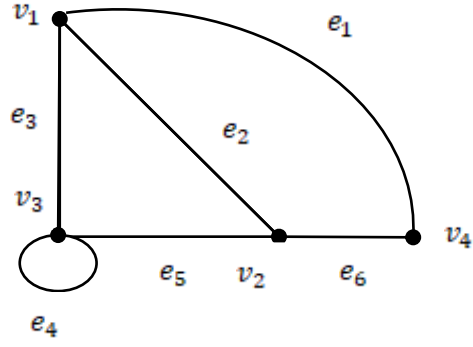


Şekil 2.5. Tam çizgeler

Tanım 2.1.8 Bir çizgede ardışık köşe ve kenarlardan oluşan

$$W = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_{k-1} e_k v_k$$

biçimindeki bir diziye yürüme denir. Eğer W yürümesindeki $e_1, e_2, \dots, e_k$ kenarları birbirinden farklıysa W 'ye bir gezi denir. Eğer W yürümesindeki $v_0, v_1, \dots, v_k$ köşeleri de birbirinden farklıysa W 'ye bir patika denir.



Şekil 2.6. Bir çizge

Örneğin Şekil 2.6’de;

$$W_1 = v_1 e_3 v_3 e_4 v_3 e_5 v_2$$

bir yürüme,

$$W_2 = v_1 e_3 v_3 e_5 v_2 e_6 v_4$$

bir gezi,

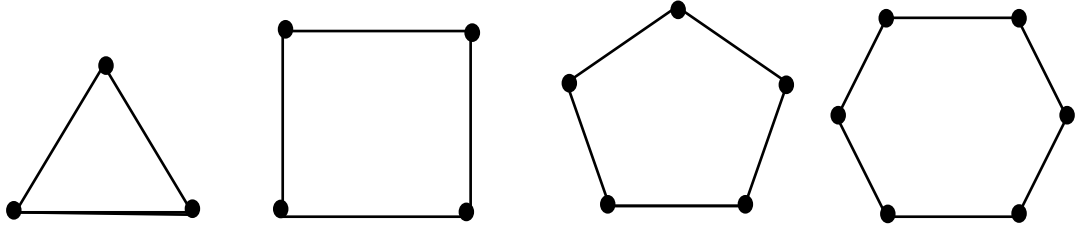
$$W_3 = v_1 e_3 v_3 e_5 v_2 e_6 v_4$$

bir patikadır.

Tanımdan anlaşılacağı üzere, her patika aynı zamanda bir gezidir. Dolayısıyla yukarıdaki örnekte W_1 yürümesi aynı zamanda bir gezidir fakat patika değildir. W_2 ise hem gezi hem de patikadır.

Tanım 2.1.9. Başlangıç ve bitiş noktası aynı olan patikaya döngü denir. n tane köşesi olan döngü C_n notasyonu ile gösterilir.

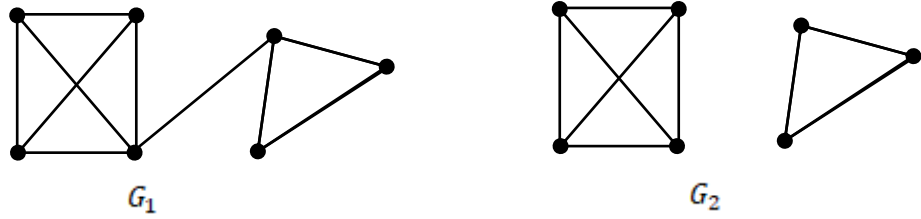
Şekil 2.7 de C_3 , C_4 , C_5 ve C_6 döngüleri verilmektedir.



Şekil 2.7 C_3 , C_4 , C_5 ve C_6 döngüleri

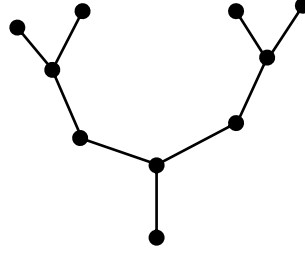
Tanım 2.1.10 Eğer bir G çizgesinin herhangi iki kenarını birleştiren bir patika varsa, G çizgesi bağlantılıdır denir.

Şekil 2.8 ile verilen G_1 çizgesi bağlantılı bir çizgedir fakat G_2 çizgesi bağlantılı değildir.



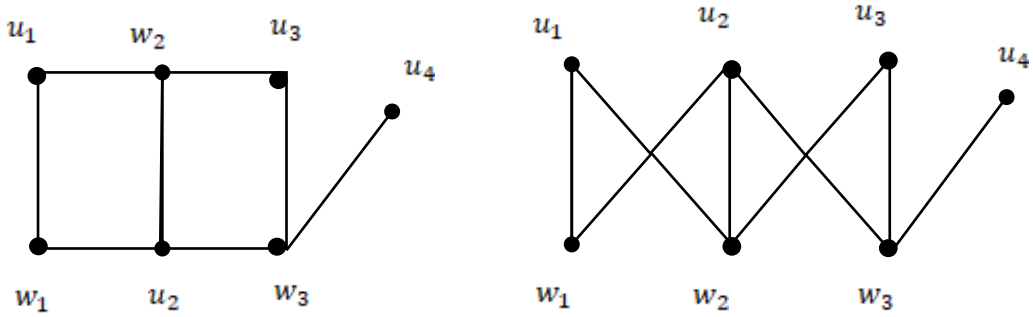
Şekil 2.8. Sırasıyla bağlantılı G_1 çizgesi ve bağlantılı olmayan G_2 çizgesi.

Tanım 2.1.11 Hiçbir döngü içermeyen bağlantılı bir çizgeye ağaç çizge veya kısaca ağaç denir.



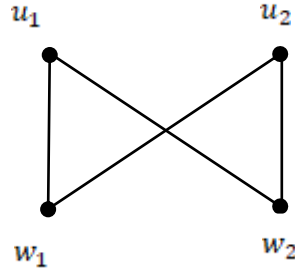
Şekil 2.9. Bir ağaç örneği

Tanım 2.1.12 $G = (V, E)$ çizgesi verilsin. Eğer $U \cap W = \emptyset$ ve $U \cup W = V$ olacak şekilde V kümesinin boştan farklı U ve W alt kümeleri mevcut ve G çizgesinin her kenarı U ve W kümelerine ait köşeleri birleştiriyorsa G çizgesine iki parçalı çizge denir.



Şekil 2.10. İki parçalı bir çizgenin iki farklı çizimi

Tanım 2.1.13 Eğer G iki parçalı bir basit çizge ve U kümesindeki her köşe W kümesindeki her köşe ile komşu ise G çizgesine iki parçalı tam çizge denir. Ayrık köşe kümeleri m ve n elemanlı olan iki parçalı tam çizge $K_{m,n}$ notasyonu ile gösterilir.



Şekil 2.11. $K_{2,2}$ iki parçalı tam çizgesi

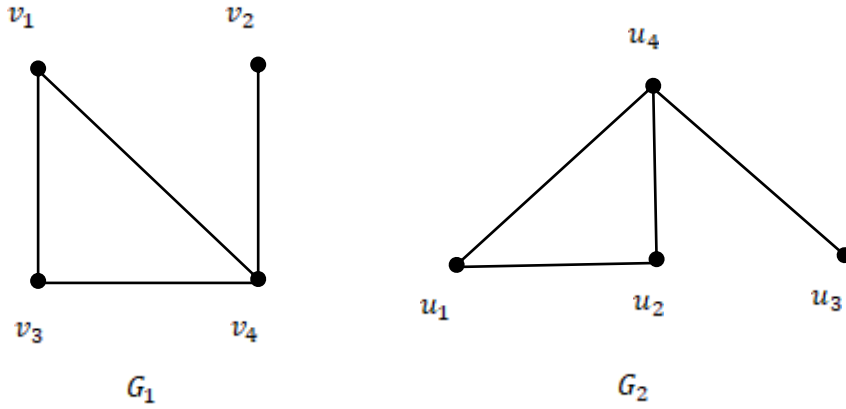
Tanım 2.1.14 $G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ çizgeleri verilsin. Eğer,

her $(v_i, v_j) \in E_1$ için $(\theta(v_i), \theta(v_j)) \in E_2$ özelliğine sahip olan birebir ve örten

bir

$\theta: G_1 \rightarrow G_2$

fonksiyonu varsa G_1 ve G_2 çizgeleri izomorftur denir ve bu durum $G_1 \cong G_2$ notasyonu ile gösterilir. θ fonksiyonuna da G_1 ve G_2 çizgeleri arasında bir izomorfizma denir.



Şekil 2.12. İki izomorf çizge

Şekil 2.12 de verilen iki çizge birbirine izomorftur. Bunlar arasında

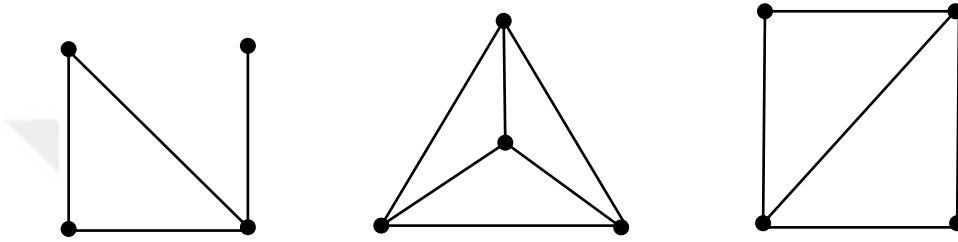
$\theta: V_1 \rightarrow V_2$

izomorfizma aşağıda verilmiştir.

$$\theta(v_1) = u_2, \theta(v_2) = u_3, \theta(v_3) = u_1, \theta(v_4) = u_4.$$

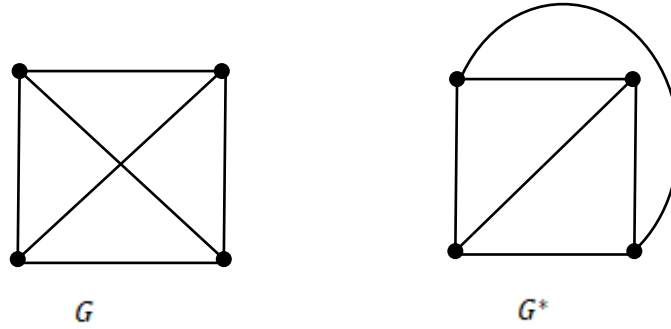
2.2. Düzlemsel Çizgeler

Tanım 2.2.1 Düzlemde kenarları birbiri ile kesişmeden çizilebilen bir G çizgesine düzlemsel çizge denir. Eğer G çizgesi kenarları kesişmeden çizilmiş ise G çizgesine düzlem çizgesi denir.



Şekil 2.13. Düzlem çizgeleri

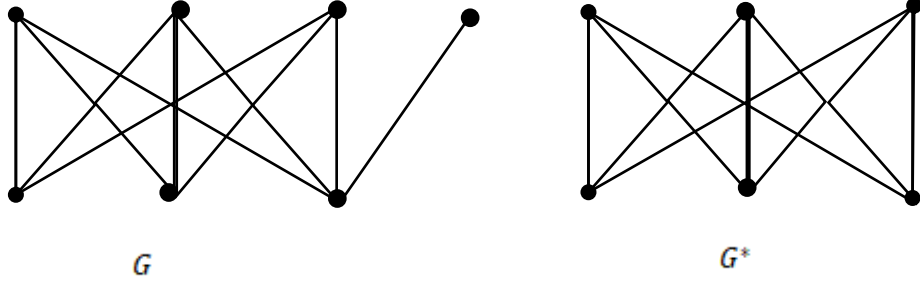
Şekil 2.13 ile verilen çizgelerin tamamı düzlem çizgedir. Şekil 2.14 ile verilen G çizgesi düzlemsel çizgedir, G^* çizgesi ise bir düzlem çizgesidir.



Şekil 2.14. Düzlem çizgesi ve düzlemsel çizge

Örnek 2.2.1 Patika ve döngü çizgelerin düzlemsel olduğu açıktır.

Düzlemsel bir çizgenin her alt çizgesi de düzlemseldir. Benzer şekilde G düzlemsel olmayan bir çizge ve G çizgesi bir H çizgesinin alt çizgesi ise H çizgesi de düzlemsel değildir.



Şekil 2.15. Düzlemsel olmayan çizgeler Denklemi buraya yazın.

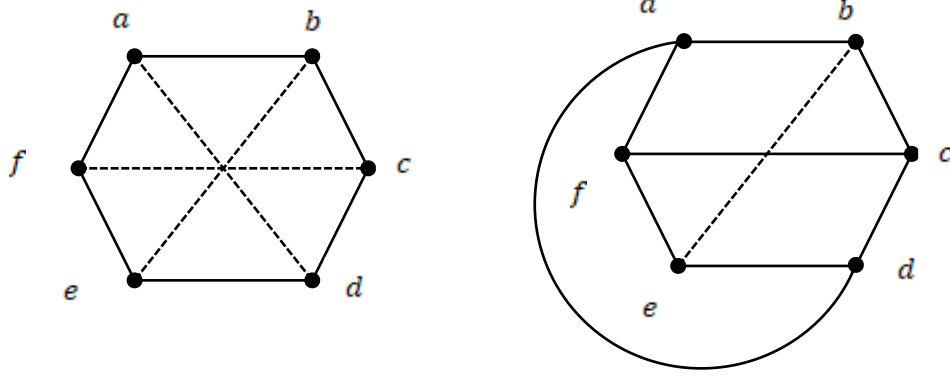
Şekil 2.15 ile verilen G çizgesi $K_{3,3}$ çizgesine izomorftur. Daha sonra görüleceği gibi $K_{3,3}$ çizgesi düzlemsel değildir. Dolayısıyla Şekil 2.15 ile verilen G^* çizgesi G çizgesini alt çizge olarak içerdiği için düzlemsel değildir.

Teorem 2.2 K_5 ve $K_{3,3}$ çizgeleri düzlemsel değildir.

İspat: İlk olarak $K_{3,3}$ çizgesinin düzlemsel olduğunu varsayalım. $K_{3,3}$, 6 uzunluğundaki

$$a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow f \rightarrow a$$

döngüsüne sahip olduğu için herhangi bir düzlem çizimi Şekil 2.16 da olduğu gibi bu döngüyü bir altıgen olarak içermelidir.



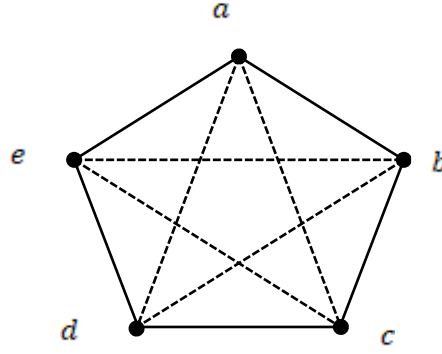
Şekil 2.16. $K_{3,3}$ çizgesinin herhangi bir düzlem çizimi

Şimdi, cf kenarı ya tamamen altıgenin içinde ya da tamamen altıgenin dışında yer almak zorundadır. cf kenarının altıgenin içinde olduğu duruma bakalım. (Diğer durum benzer şekilde görülebilir) ad kenarı, cf kenarını kesmemesi gerektiği için altıgenin dışında olmak zorundadır; durum Şekil 2.16 ile verildiği gibidir. Öyleyse be kenarını çizmek ya cf ya da ad kenarı ile kesişim sağlayacağından mümkün değildir. O halde başlangıçtaki kabulümüz yanlıştır. $K_{3,3}$ çizgesi düzlemsel değildir.

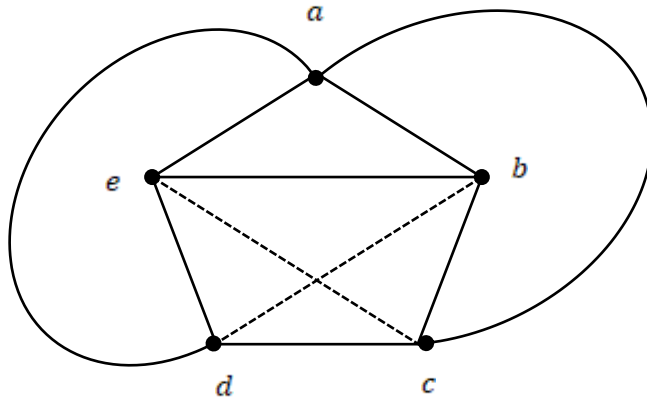
Şimdi de K_5 çizgesinin düzlemsel olduğunu varsayalım. K_5 çizgesinin 5 uzunluğunda

$$a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow a$$

döngüsü olduğu için herhangi bir düzlem çizimi Şekil 2.17 de gösterildiği gibi bu beşgen döngüyü içermesi gerekir.



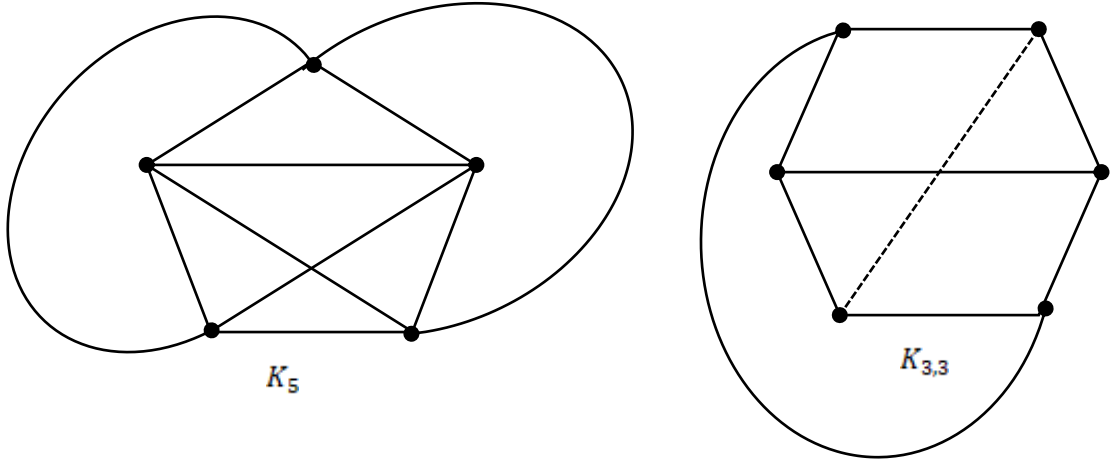
Şekil 2.17. K_5 çizgesi



Şekil 2.18. be kenarının içeride kaldığı durum

Şimdi, be kenarı ya tam olarak beşgenin içinde ya da tam olarak dışında olmak zorundadır. be kenarının beşgenin içinde olduğu duruma bakalım. (Diğer durum da benzer) ac ve ad kenarları be kenarını kesmediği için her ikisi de beşgenin dışında olmalıdır. Durum Şekil 2.18 de görüldüğü gibidir. Ancak ce kenarı ad kenarını kesemez, benzer şekilde bd kenarı beşgenin içinde olur. Bundan dolayı ce ve bd kenarı kesişmek durumunda kalır. Bu da düzlemselliği bozar.

K_5 ve $K_{3,3}$ düzlemsel olmadığı için, bu çizgeleri düzlemde çizmeye çalışırsak en az iki kenarı birbirini kesmek zorunda kalacaktır. Fakat kesişim sayısını iki ile sınırlı tutabiliriz. Daha fazla kenarın kesişmesine gerek duyulmaz.



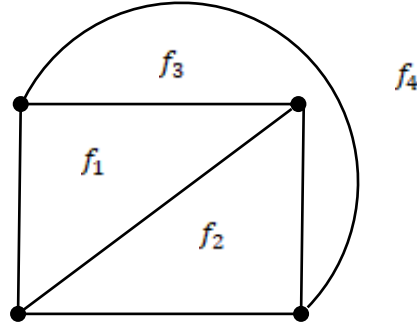
Şekil 2.19. K_5 ve $K_{3,3}$ çizgeleri

Daha genel olarak kesişme sayısı için aşağıdaki şu tanımı verebiliriz.

Tanım 2.2.2 Bir G çizgesinin düzlem üzerine çizildiği zaman iki kenarının oluşturabileceği en az kesişim sayısına kesişme sabiti denir. Kesişme sabiti $cr(G)$ notasyonu ile gösterilir.

Örneğin bir düzlemsel çizgenin kesişme sabiti 0 iken, $cr(K_5) = cr(K_{3,3}) = 1$ olur.

Tanım 2.2.3 Bir G düzlem çizgesi düzlemi bölgelere ayırır ve bu bölgelere G çizgesinin yüzleri denir.



Şekil 2.20. G çizgesi ve yüzleri

Yukarıdaki şekilde verilen çizgenin 4 yüzü vardır. Bunlardan f_4 yüzüne çizgenin dış yüzü denir.

Teorem 2.3 (Euler Formülü) Bağlantılı ve düzlemsel bir G çizgesinin köşelerinin sayısı n , kenar sayısı da m olsun. Ayrıca, çizge düzlemde kenarları birbiriyle kesişmeyecek şekilde çizildiğinde düzlemde belirlediği bölgelerin sayısı da f olsun. Bu durumda

$$n - m + f = 2$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: İspat, G çizgesinin kenar sayısı üzerinden tümevarım yöntemi kullanılarak yapılabilir. Eğer $m = 0$ ise yani G çizgesinin hiç kenarı yoksa çizge bağlantılı olduğundan çizgenin tek köşesi olacaktır ve düzlemde belirttiği bölge sayısı da bir olur. Bu durumda eşitlik geçerlidir.

Bağlantılı ve $m - 1$ kenarlı düzlemsel çizgeler için eşitliğin geçerli olduğunu kabul edelim. Eğer G bir ağaç ise $m = n - 1$ ve $f = 1$ olur. Bu durumda

$$n - m + f = (m + 1) - m + 1 = 2$$

olduğundan eşitlik geçerlidir.

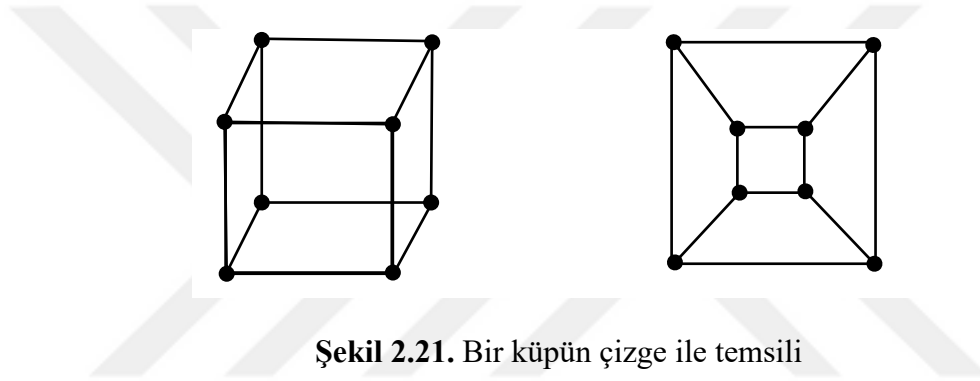
Eğer G bir ağaç değilse, çizge bağlantılı olduğundan bir döngü bulunduruyor demektir. Bu döngünün herhangi bir kenarını e ile gösterecek olursak, G çizgesinden e kenarının silinmesiyle elde edilen $G - e$ çizgesinin $m - 1$ tane kenarı vardır ve düzlemde

kenarları kesişmeyecek şekilde çizildiğinde $f - 1$ tane bölge temsil eder. O zaman tümevarım hipotezinden,

$n - (m - 1) + (f - 1) = 2$ eşitliği geçerli olmalıdır. Bu eşitlik sadeleştirilecek olursa m kenarlı, düzlemsel ve bağlantılı G çizgesi için $n - m + f = 2$ eşitliğinin geçerli olduğu elde edilir.

Bu teorem konveks bir çokyüzlünün köşe, kenar ve yüz sayısını ilişkilendirdiği için sıklıkla “Euler’in çokyüzlü formülü” olarak isimlendirilir. Örneğin bir küp için,

$$n = 8 \quad m = 12, \quad f = 6 \quad \text{ve} \quad n - m + f = 8 - 12 + 6 = 2 \quad \text{olur.}$$



Şekil 2.21. Bir küpün çizge ile temsili

Çokyüzlüler ve Euler formülü arasındaki genel ilişkiyi görmek için, küpü çevreleyen küre üzerine küpün izdüşümünü alalım ve sonrasında küpün düzlem üzerine izdüşümünü elde etmek için stereografik izdüşüm yöntemini kullanalım. Ortaya çıkacak olan çizge her bir yüzün bir çokgen ile sınırlandığı 3- bağlantılı bir çizge olacaktır. (Böyle çizgeler çokyüzlü çizge olarak adlandırılır.) Böyle çizgeler için Euler formülünü yeniden ifade edebiliriz.

Sonuç 2.1 G çokyüzlü bir çizge olsun. O halde

$$n - m + f = 2$$

geçerlidir.

Bağılantılı olmayan bir çizgenin bağlantılı olan her bir maksimal alt çizgesine çizgenin bileşeni denir.

Yukarıdaki notu da dikkate alacak olursak, Euler formülünü kolaylıkla bağlantılı olmayan çizgeler için de düzenleyebiliriz.

Sonuç 2.2 n köşeli, m kenarlı, f yüzlü ve k bileşenli bir G çizgesi verilsin. O halde

$$n - m + f = k + 1$$

elde edilir.

İspat: İspat, Euler formülü her bileşene ayrı ayrı uygulanarak ve dış yüz sadece bir kez dikkate alınarak yapılabilir.

Sonuç 2.3 G çizgesi $n(n \geq 3)$ köşeli, m kenarlı, bağlantılı, basit bir düzlemsel çizge olsun. Bu durumda

$$m \leq 3n - 6$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: G düzlemsel çizgesi düzlemde kenarları kesişmeyecek şekilde çizildiğinde düzlemde belirlediği bölgelerin sayısı f olsun. Bir bölge oluşturmak için en az 3 kenar gerekli olduğundan

$3f \leq m$ olmalıdır. Ancak, her kenar farklı iki bölgenin sınırı olduğundan iki kez sayılmış olur. Bu nedenle $\frac{3f}{2} \leq m$ olmak zorundadır. Çizge bağlantılı ve düzlemsel olduğundan Teorem 2.3 geçerlidir. O halde,

$$n - m + f = 2 \Rightarrow n - m + \frac{2m}{3} \geq 2 \Rightarrow n - \frac{m}{3} \geq 2 \Rightarrow 3n - 6 \geq m$$

eşitsizliği doğru olur.

Sonuç 2.4 G çizgesi $n(n \geq 3)$ köşeli, m kenarlı, uzunluğu 3 olan döngü içermeyen (üçgen bulundurmayan) bağlantılı, basit bir düzlemsel çizge olsun. Bu durumda,

$$m \leq 2n - 4$$

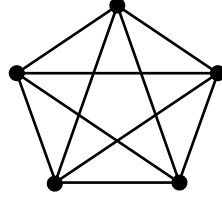
İspat: Bu ispat da yukarıdaki ispata benzer şekilde yapılabilir. $3f \leq m$ eşitsizliği yerine,

$$4f \leq 2m$$

eşitsizliğini kullanarak ispatı yapabiliriz.

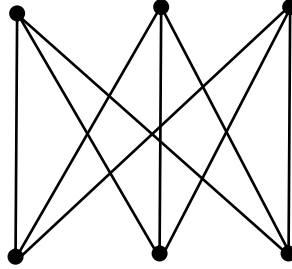
Yukarıdaki sonuçlar kullanılarak K_5 ve $K_{3,3}$ çizgelerinin düzlemsel olmadığı tekrar ispatlanabilir.

İspat: K_5 tam çizgesi, 5 köşeli ve 10 kenarlı bir çizgedir. Eğer K_5 tam çizgesi düzlemsel olsaydı Sonuç 2.3 gereğince $m \leq 3n - 6$ eşitsizliğini sağlardı. Ancak $10 \not\leq 3 \cdot 5 - 6 = 9$ olduğundan K_5 tam çizgesi düzlemsel değildir.



Şekil 2.22. K_5 tam çizgesi

$K_{3,3}$ iki parçalı tam çizgesi, 6 köşeli ve 9 kenarlı bir çizgedir. $K_{3,3}$ çizgesi uzunluğu 3 olan bir döngü içermez. O halde eğer $K_{3,3}$ çizgesi düzlemsel olsaydı Sonuç 2.4 gereği $m \leq 2n - 4$ eşitsizliği geçerli olurdu. Fakat $9 \not\leq 2 \cdot 6 - 4 = 8$ olduğundan $K_{3,3}$ iki parçalı tam çizgesi düzlemsel değildir.



Şekil 2.23. $K_{3,3}$ iki parçalı tam çizgesi

Teorem 2.4 Her düzlemsel çizgenin derecesi en fazla beş olan bir köşesi vardır.

İspat: Köşelerinin sayısı n ve kenarlarının sayısı m olan bir $G = (V, E)$ düzlemsel çizgesi verilsin. Eğer $n \leq 6$ ise köşelerinin derecesi en fazla beş olabileceğinden teorem doğrudur.

$n \geq 7$ olmak üzere $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ olsun. Çizgenin tüm köşelerinin derecelerinin 6 ya da daha fazla olduğu kabul edilsin. Bu durumda Teorem 2.1 gereğince G çizgesinin tüm köşelerinin derecelerinin toplamı, kenar sayısının iki katına eşit olacağından,

$$\begin{aligned} 2|E| &= \sum_{v \in V} \deg(v) \\ &= \deg(v_1) + \dots + \deg(v_n) \\ &\geq 6 + 6 + \dots + 6 = 6n \end{aligned}$$

yani $2m \geq 6n$ elde edilir. Bu eşitsizlik ise Sonuç 2.3 ile çelişeceğinden G çizgesinin en az bir köşesinin derecesi 5 ya da daha küçük olmalıdır.

Tanım 2.2.4 Bir G düzlemsel çizgesini oluşturmak için birleştirilmesi gereken düzlemsel çizgelerin olası en küçük değerine G çizgesinin kalınlığı denir ve $t(G)$ notasyonu ile gösterilir.

Örneğin düzlemsel bir çizgenin kalınlığı 1 iken, K_5 ve $K_{3,3}$ çizgelerinin kalınlığı 2 olur.

Euler formülü yardımıyla bir çizgenin kalınlığına dair bir alt sınır elde edilebilmektedir. Alt sınırı ifade ederken sırasıyla $\lfloor x \rfloor$ (taban) ve $\lceil x \rceil$ (tavan) notasyonları kullanılacaktır. $\lfloor x \rfloor$ notasyonu x 'ten büyük olmayan en büyük tam sayı, $\lceil x \rceil$ notasyonu ise x 'ten küçük olmayan en küçük tam sayı ifade edecektir. Örnek verecek olursak,

$$\lfloor 2 \rfloor = \lceil 2 \rceil = 2; \lfloor e \rfloor = 2, \lceil e \rceil = 3$$

Teorem 2.5. G basit çizgesinin $n(n \geq 3)$ köşesi ve m kenarı olsun. Bu durumda G çizgesinin kalınlığı $t(G)$,

$$t(G) \geq m/(3n - 6)$$

ve

$$t(G) \geq \lfloor (m + 3n - 7)/(3n - 6) \rfloor$$

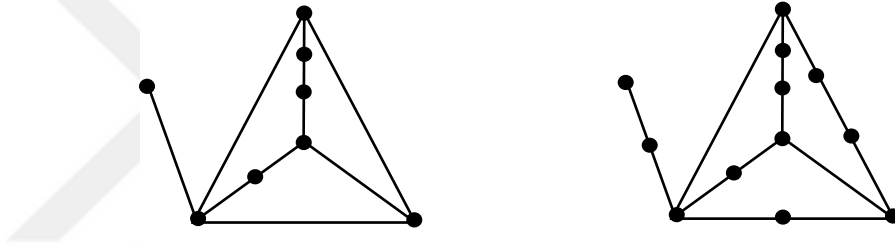
eşitsizliklerini sağlar.

İspat: İlk eşitsizlik Sonuç 2.3'ün bir sonucudur. Buradaki parantezler kalınlığın bir tam sayı olması gerektiği için vardır. İkinci eşitsizlik ise a ve b pozitif tam sayılar olmak üzere,

$$\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a + b - 1}{b} \right\rfloor$$

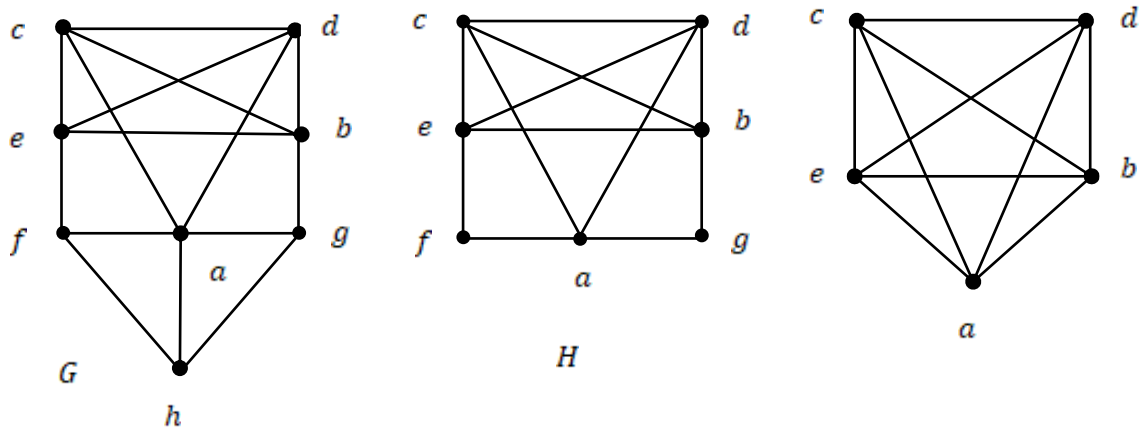
eşitliği ilk eşitsizlik ile birleştirilerek kolayca elde edilir.

Tanım 2.2.6 İki çizge verildiğinde bu çizgelerden birine derecesi 2 olan yeni köşeler eklenerek ya da derecesi 2 olan köşeler silinerek diğer çizgeye izomorf hale getirilebiliyorsa bu çizgelere homeomorf çizgeler denir. Ancak burada derecesi 2 olan köşeler silinirken bu köşelerin bağlı olduğu kenarlar silinmeyip birbirine yapıştırılmaktadır.



Şekil 2.24. Homeomorf iki çizge

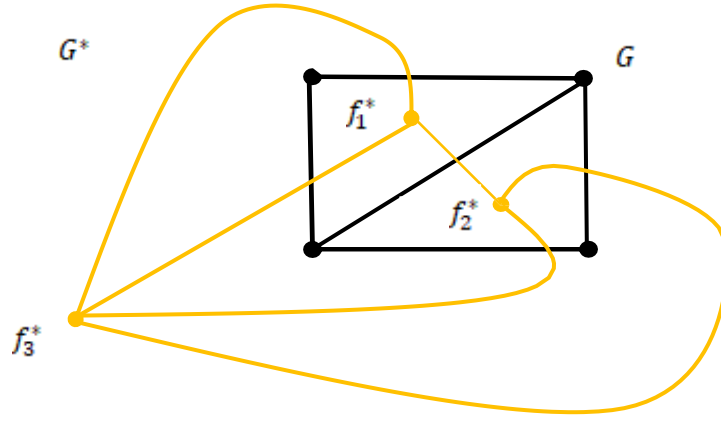
Teorem 2.6 (Kuratowski Teoremi) Bir çizgenin düzlemsel olabilmesi için gerek ve yeter şart $K_{3,3}$ ya da K_5 çizgelerine homeomorf bir alt çizge bulundurmamasıdır.



Şekil 2.25. Kuratowski Teoreminin uygulaması

Şekil 2.25 ile verilen G çizgesi düzlemsel bir çizge olamaz. G çizgesinin h ile adlandırılan köşesi ve bu köşesine bağlı kenarlar silinerek elde edilen alt çizge H ile gösterilecek olursa, H alt çizgesi ile K_5 tam çizgesi homeomorf olur. Gerçekten de H çizgesinin derecesi iki olan f ve g köşeleri silinecek olursa geriye kalan tüm köşelerin derecesinin 4 olduğu 5 köşeli, K_5 tam çizgesine izomorf olan bir alt çizge elde edilir.

Tanım 2.2.7 G bir düzlem çizgesi olsun. G çizgesinin duali olan G^* çizgesi şöyle tanımlanır. G çizgesinin her f yüzüne karşılık G^* çizgesinin bir f^* köşesi ve G çizgesinin her e kenarına karşılık G^* çizgesinin bir e^* kenarı vardır öyle ki eğer e kenarı f ve g yüzlerinin ortak sınırı üzerinde ise e^* kenarı f^* ve g^* köşelerini birleştirir. (Eğer e bir köprü ise e^* bir ilmek olacaktır.)



Şekil 2.26. Dual çizge

Önerme 2.1 G , n köşesi, m kenarı ve f yüzü olan bağlantılı bir düzlemsel çizge olsun. Eğer G çizgesinin duali olan G^* çizgesinin n^* köşesi, m^* kenarı ve f^* yüzü mevcut ise

$$n^* = f, m^* = m \text{ ve } f^* = n$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: G^* çizgesini, G çizgesinin her bölgesine bir köşesi gelecek şekilde tanımladığımızdan $n^* = f$ olur. G^* çizgesinin kenarları G çizgesinin her kenarını bir kez kesen eğrilerle tanımlandığı için $m^* = m$ olmalıdır. Son olarak G ve G^* çizgeleri düzlemsel çizgeler olduğundan Euler formülünü sağlamak zorundadır. Yani,

$$n + f = m + 2 \text{ ve } n^* + f^* = m^* + 2$$

olmalıdır. n^* ve m^* değerlerini ikinci denklemde yerine yazacak olursak

$$f + f^* = m + 2 \Rightarrow f^* = m - f + 2 = n$$

elde edilir.

Teorem 2.7 G bağlantılı bir düzlemsel çizge ise G^{**} ve G çizgeleri izomorftur.

İspat: G çizgesinden G^* çizgesini elde edebileceğimizi dual çizge tanımından biliyoruz. Aynı şekilde bu işlemi tersine çevirebileceğimiz sonucuna da hemen varırız. Yani G^* çizgesinden G çizgesini elde ederiz. Örneğin Şekil 2.26'da G çizgesi G^* çizgesinin

izomorfudur. Sadece G^* çizgesinin bir yüzünün G çizgesinin bir köşesinden fazlasını içermeyeceğini kontrol etmek zorundayız. (en az bir tane kesin içeriyor) Fakat bu n^{**} , G^{**} çizgesinin köşe sayısı olmak üzere

$$n^{**} = f^* = n$$

ilişkisinden hemen çıkmaktadır. Yani G^{**} ile G birbirine izomorftur.



3. MATERİYAL VE YÖNTEM

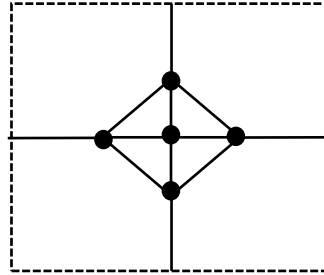
3.1. Kompakt Yüzeyler Üzerinde Çizgeler

Düzlemsel bir çizgenin stereografik izdüşüm yardımıyla kenarları birbirini kesmeden küre üzerine de çizilebildiği biliniyor. Dolayısıyla düzlemsel olmayan çizgeler küre yüzeyi üzerine kenarları kesişmeden çizilemezler ama tor yüzeyi veya cinsi birden büyük olan yüzeyler üzerine çizilebilirler.

Herhangi bir G çizgesi kenarları kesişmeden birden fazla yüzey üzerine yerleştirilebilir. Bu yüzeylerin cinslerinin minimumu g ise G çizgesinin cinsi g olarak tanımlanır.

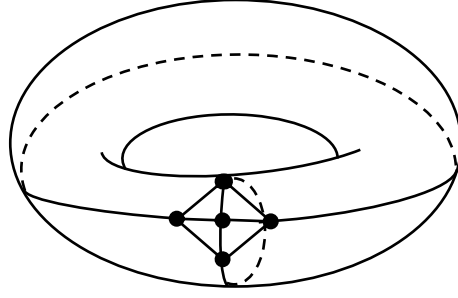
O halde kürenin cinsi 0 olduğu için bütün düzlemsel çizgelerin cinsi 0 olur.

Düzlemsel olmadığı bilinen K_5 çizgesi aşağıdaki şekilde de görüldüğü gibi bir tor yüzeyi üzerine kenarları kesişmeden çizilebilir. Dolayısıyla K_5 çizgesinin cinsi 1 dir.



Şekil 3.1. Tor yüzeyi üzerinde K_5 çizgesi

Şekil 3.1 ile verilen karenin karşılıklı kenarları birleştirilirse aşağıdaki şekil elde edilir.



Şekil 3.2. Tor yüzeyi çizimi

Düzlem çizgelerinde olduğu gibi, cinsi g olan bir G çizgesi cinsi g olan bir S_g yüzeyi üzerine kenarları kesişmeden çizilebilir. Böylece S_g/G , S_g yüzeyinin her biri düzlemde bir açık diske homeomorf olan alt kümelerden oluşan bir aile oluşturur. Bu ailede yer alan her bir küme G çizgesinin bir yüzüdür. Dolayısıyla Euler formülü cinsi g olan çizgeler için de genelleştirilmiştir ve bu formül Euler-Poincare Formülü olarak adlandırılır. Aşağıda teorem olarak da verilen bu formülün ispatı Euler formülünün ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 3.1 (Euler-Poincare Formülü) Bağlantılı ve cinsi g olan bir G çizgesinin köşe, kenar ve yüzlerinin sayısı sırasıyla v , e ve f olsun. Bu durumda

$$v - e + f = 2 - 2g$$

eşitliği geçerlidir.

Teorem 3.2 Bağlantılı ve cinsi g olan bir G çizgesinin en az 3 köşesi mevcut ise

$$g \geq \frac{1}{6}e - \frac{1}{2}(v - 2)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: G çizgesinin köşe, kenar ve yüzlerinin sayısı sırasıyla v , e ve f olsun. G bağlantılı olduğundan $v - e + f = 2 - 2g$ eşitliği sağlanır. Bu eşitlikte düzenleme yapılırsa $f = 2 - 2g - v + e$

elde edilir. Buradan $3f = 6 - 6g - 3v + 3e$ elde edilir. Euler Formülünün sonuçları gereğince $3f \leq 2e$ olduğu biliniyor ve bu eşitsizlik $3f = 6 - 6g - 3v + 3e$ ifadesinde kullanılırsa

$$6 - 6g - 3v + 3e \leq 2e$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik tekrar düzenlenirse $-6g \leq -e + 3v - 6$ bulunur. Elde edilen son eşitsizliğin her iki tarafı da $-\frac{1}{6}$ ile çarpılırsa $g \geq \frac{1}{6}e - \frac{1}{2}(v - 2)$ elde edilir.

Teorem 3.3 G bir çizge, $H \subset G$ ve bunların cinsleri g_G ve g_H ise $g_H \leq g_G$ dir.

İspat: $g_H > g_G$ olduğu varsayalım. Bu durumda cinsi g_G olan bir yüzey üzerine G çizgesi kenarları kesişmeden çizilebilir ama H çizgesi çizilemez. Bu ise $H \subset G$ olması ile çelişir. O halde $g_H \leq g_G$ dir.

Aşağıda verilen teorem kullanılarak tam çizgelerin cinsleri belirlenebilir. Bu teorem (Ringel and Youngs, 1968) tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 3.4 Her $v \geq 3$ için K_v tam çizgesinin cinsi $g = \left\lfloor \frac{(v-3)(v-4)}{12} \right\rfloor$ elde edilir.

Teorem 3.4 ile verilen formül kullanılarak köşe sayısı yirmiye kadar olan tam çizgelerin cinsleri Çizelge 1 de verilmiştir.

Çizelge 3.1. İlk 20 Tam Çizge ve Cinsleri

v	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$g(K_v)$	0	0	0	0	1	1	1	2	3	4	5	6	8	10	11	13	16	18	20	23

Sonuç 3.1 Bağlantılı ve cinsi g olan bir G çizgesinin en az 3 köşesi mevcut ise,

$$g \leq \left\lfloor \frac{(v-3)(v-4)}{12} \right\rfloor$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: G çizgesi, K_v tam çizgesinin bir alt çizgesi olduğundan, Teorem 3.3 gereğince G çizgesinin cinsi K_v çizgesinin cinsinden küçük veya eşit olur.

Sonuç 3.2 Bağlantılı ve cinsi g olan bir G çizgesinin en az 3 köşesi mevcut ise,

$$\left\lceil \frac{1}{6}e - \frac{1}{2}(v-2) \right\rceil \leq g \leq \left\lceil \frac{(v-3)(v-4)}{12} \right\rceil$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: Teorem 3.3 ve Teorem 3.4 yardımıyla kolayca elde edilir.

Böylece Euler-Poincare Formülü kullanılarak bir çizgenin cinsinin alabileceği maksimum ve minimum değerler, çizgenin köşe ve kenar cinsinden belirlenebilmektedir.

3.2. Platonik ve g –Platonik Çizgeler

Tanım 3.1.1 Düzlemsel, bağlantılı ve regüler bir G çizgesinin her bir yüzü aynı sayıda kenar ile sınırlı ise G çizgesine platonik çizge denir.

Bu kısımda ve daha sonra, verilen bir platonik çizgenin köşelerinin derecesi d , yüzlerini sınırlayan kenarların sayısı ise n notasyonu ile gösterilecektir. Bu özelliklere sahip olan bir çizgenin tipi $\{d, n\}$ olarak tanımlanacaktır.

Örneğin her $k \geq 3$ için C_k döngü çizgesi platoniktir ve $\{2, k\}$ tipindedir.

Bu bölümde sıkça kullanılacak olan aşağıdaki teorem, verilen çizgenin tipi dikkate alınarak kolayca ispat edilebilir.

Teorem 3.5 Düzlemsel, bağlantılı ve $\{d, n\}$ tipinde bir G çizgesinin kenar sayısı e , köşe sayısı v ve yüz sayısı f olsun. Bu durumda $e = dv/2$ ve $f = dv/n$ dir.

Teorem 3.6 Döngü çizgilerin dışında sadece beş platonik çizge mevcuttur.

İspat: G d -regüler ve döngü olmayan bir platonik çizge olsun. Ayrıca G çizgesinin her bir yüzü $n \geq 3$ tane kenar ile sınırlı olsun. G döngü olmadığı için $d \geq 3$ olmalıdır.

Teorem 3.5 ile verilen durumda $e = dv/2$ ve $f = dv/n$ değerleri Euler formülünde kullanılırsa

$$v + dv/n - dv/2 = 2$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafı $2n$ ile çarpılırsa

$$v(2n + 2d - nd) = 4n$$

bulunur. Burada v ile n pozitif olduğundan,

$$2n + 2d - nd > 0$$

ve dolayısıyla,

$$nd - 2n - 2d < 0$$

olmalıdır. Elde edilen son eşitsizliğin her iki tarafına 4 eklenirse

$$(n - 2)(d - 2) < 4$$

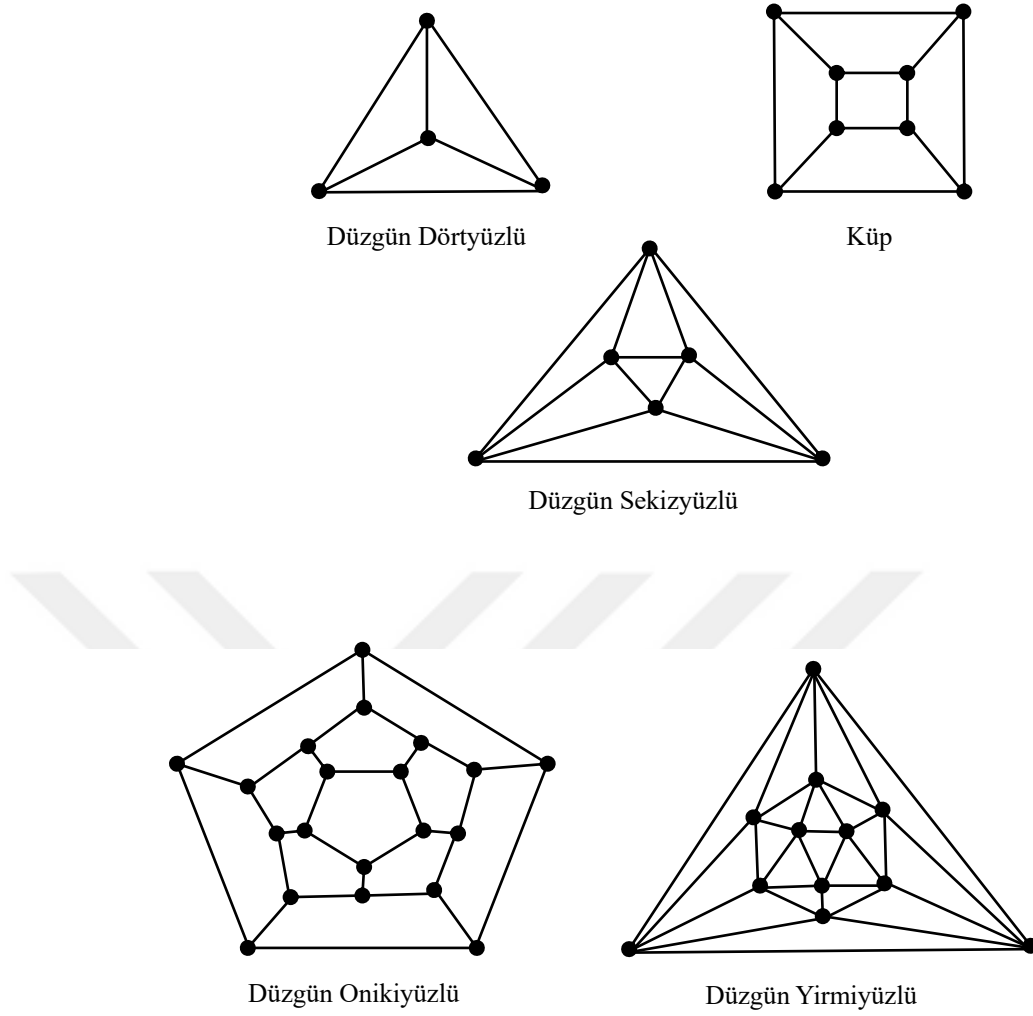
eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin n ve d cinsinden beş farklı çözümü mevcuttur.

Elde edilen çizgeler beş platonik cisme karşılık gelirler ve bunlarla ilgili detaylar Çizelge 2 de verilmektedir.

Çizelge 3.2. Platonik Çizgeler

d	n	v	e	f	Platonik Cisim
3	3	4	6	4	Düzgün Dörtüzlü
3	4	8	12	6	Küp
3	5	20	30	12	Düzgün Onikiyüzlü
4	3	6	12	8	Düzgün Sekizyüzlü
5	3	12	30	20	Düzgün Yirmiyüzlü

Çizelge 3.2 de yer alan platonik çizgeler aşağıdaki şekilde düzlem çizgesi olarak verilmektedir.



Şekil 3.3. Platonik Çizgeler

Düzlemsel olmayan çizgeler cinsi 0 dan büyük olan yüzeylerin üzerine kenarları kesişmeden yerleştirilerek düzlemsellik kavramı genelleştirildi. Bu kısımda ise g –platonik çizge kavramı tanıtılacak ve platonik çizge kavramı genelleştirilecektir.

Tanım 3.1.2. Bağlantılı, regüler ve cinsi $g > 1$ olan bir G çizgesinin her bir yüzü aynı sayıda kenar ile sınırlı ise G çizgesine g –platonik çizge denir.

Örneğin K_5 çizgesi 1 –platoniktir. Ayrıca, döngü olan ve olmayan platonik çizgelerin 0 –platonik çizgeler olduğu açıktır. Döngü olmayanların tipleri ise Çizelge 2 nin ilk iki sütunundan $\{3,3\}$, $\{3,4\}$, $\{4,3\}$, $\{3,5\}$ ve $\{5,3\}$ olarak bulunur. Herhangi bir C_k döngü çizgesi $\{2, k\}$ tipindedir ve bunların sonlu olmadıkları açıktır.

1 –platonik çizgelerin sonlu olmadıkları daha sonra örnekler verilerek gösterilecektir.

Teorem 3.7 (Trudeau, 1993) Her $g > 1$ için g –platonik çizgelerin sayısı sonludur.

İspat: $g > 1$ ve $G, \{d, n\}$ tipinde bir g –platonik çizge olsun. G çizgesinin kenar, köşe ve yüzlerinin sayısı sırasıyla e, v , ve f ise

$$e = dv/2$$

ve

$$f = dv/n$$

dir. Ayrıca Euler- Poincare Formülü gereğince $v + f - e = 2 - 2g$ eşitliği geçerlidir. Buradan

$$v + dv/n - dv/2 = 2 - 2g$$

$$2nv + 2dv - ndv = 4n - 4ng$$

$$v(2n + 2d - nd) = (4 - 4g)n$$

$$v = \frac{(4g - 4)n}{nd - 2n - 2d}$$

elde edilir. Burada v ve $(4g - 4)n$ pozitif olduğundan,

$$nd - 2n - 2d = (n - 2)(d - 2) > 0$$

olmalıdır. Ayrıca $d \geq 3$ ve $n \geq 3$ olduğu dikkate alınır, $(n - 2)(d - 2) > 4$ eşitsizliğini sağlayacak olan n ve d sayıları için aşağıdaki durumlar söz konusudur.

$$(1) \quad n = 3.$$

Bu durumda $(n - 2)(d - 2) > 4$ eşitsizliği $d - 2 > 4$ haline gelir ve her $d \geq 7$ tam sayısı eşitsizliğin bir çözümüdür. Ayrıca $n = 3$ için $v = \frac{12(g-1)}{d-6}$ eşitliği dikkate alınır, G çizgesinin köşelerinin sayısı en fazla $12(g - 1)$ olabileceği ve bu maksimum değere $d = 7$ olduğunda ulaşılabileceği görülür.

$$(2) \quad n = 4.$$

Bu durumda her $d \geq 5$ tam sayısı $(n-2)(d-2) > 4$ eşitsizliği için bir çözüm olur. Ayrıca $n = 4$ için G çizgelerinin köşe sayısı en fazla $8(g-1)$ olabilir ve bu maksimum değere $d = 5$ olduğunda ulaşılabilir.

(3) $n = 5$.

Bu durumda her $d \geq 4$ tam sayısı $(n-2)(d-2) > 4$ eşitsizliği için bir çözüm olur ve G çizgesinin köşelerinin sayısı en fazla $10(g-1)$ olabilir.

(4) $n = 6$.

Bu durumda her $d \geq 4$ tam sayısı $(n-2)(d-2) > 4$ eşitsizliği için bir çözüm olur ve G çizgesinin köşelerinin sayısı en fazla $6(g-1)$ olabilir.

(5) $n \geq 7$.

Bu durumda her $d \geq 3$ tam sayısı $(n-2)(d-2) > 4$ eşitsizliği için bir çözümdür. G çizgesinin köşelerinin sayısı en fazla $28(g-1)$ olabilir. Bu maksimum değere $n = 7$ ve $d = 3$ olduğunda ulaşılır.

Böylece her $g > 1$ için cinsi g olan bir çizgenin köşe sayısı en fazla $28(g-1)$ olabilir. Köşe sayısı $28(g-1)$ veya daha az olan çizgelerin sayısı sonlu olduğu için teorem ispatlanmış olur.

3.2.1. Platonik Çizgeler

Teorem 3.8 (Trudeau, 1993) 1-platonik bir çizge $\{4,4\}$, $\{3,6\}$ veya $\{6,3\}$ tipindedir.

İspat: G , $\{d,n\}$ tipinde ve 1-platonik çizge olsun. G çizgesinin kenar, köşe ve yüzlerinin sayısı sırasıyla e , v ve f ise, $e = dv/2$ ve $f = dv/n$ olur. Ayrıca Euler-Poincare Formülü gereğince

$$v + f - e = 2 - 2g$$

olmalıdır. Buradan

$$v + dv/n - dv/2 = 2 - 2g = 0$$

$$2nv + 2dv - ndv = 0$$

$$v(2n + 2d - nd) = 0$$

elde edilir. v pozitif bir tam sayı olduğundan,

$$2n + 2d - nd = -(2n + 2d - nd) = nd - 2n - 2d = 0$$

olur.

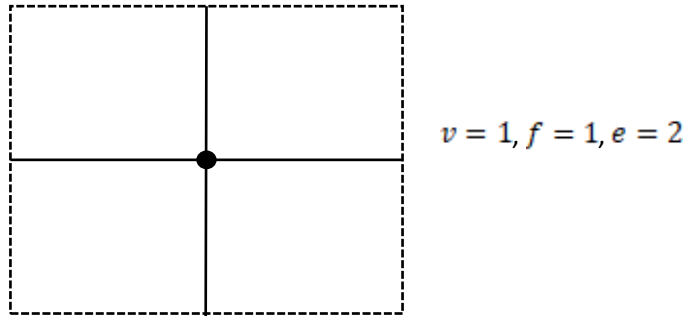
$$nd - 2n - 2d = (n - 2)(d - 2) - 4$$

olduğundan,

$$(n - 2)(d - 2) = 4$$

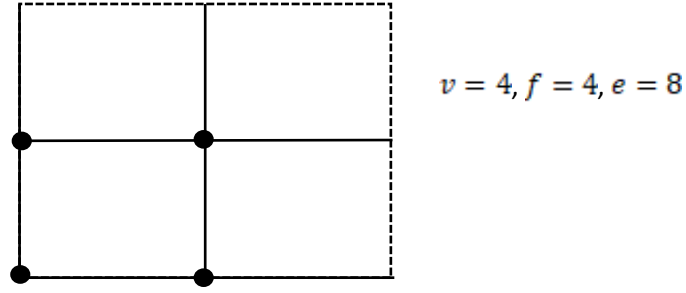
olmalıdır. Bu denklemin $d = n = 4$, $d = 3$, $n = 6$ ve $d = 6$, $n = 3$ olarak üç farklı çözümü olduğundan, G çizgesi $\{4,4\}$, $\{3,6\}$ veya $\{6,3\}$ tipindedir.

Verilen bir tor yüzeyi üzerine tipi aynı olan birden fazla 1 -platonik çizge yerleştirmek mümkündür. Örneğin Şekil 3.4 ile verilen karenin karşılıklı kenarları birleştirilerek elde edilen tor yüzeyi üzerine; 1 köşesi, 1 yüzü ve 2 kenarı bulunan G_1 çizgesi yerleştirilmiştir.



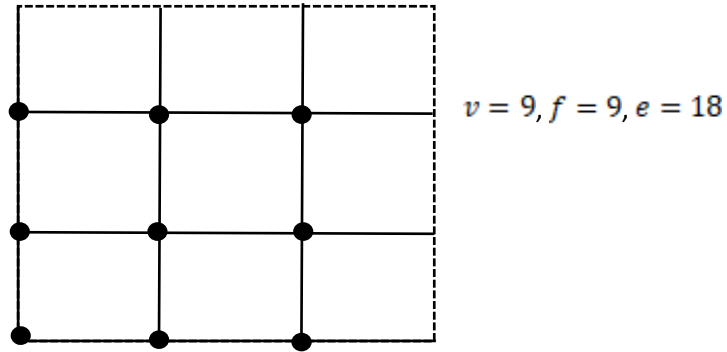
Şekil 3.4. Tor yüzeyi üzerinde G_1 çizgesi

Aynı tor yüzeyi üzerine; 4 köşesi, 4 yüzü ve 8 kenarı bulunan ve G_2 olarak adlandırılan bir başka çizge daha yerleştirilebilir, Şekil 3.5.



Şekil 3.5. Tor yüzeyi üzerinde G_2 çizgesi

Yine aynı tor yüzeyi üzerine, 9 köşesi, 9 yüzü ve 18 kenarı bulunan G_3 çizgesi yerleştirilebilir. Şekil 3.6.

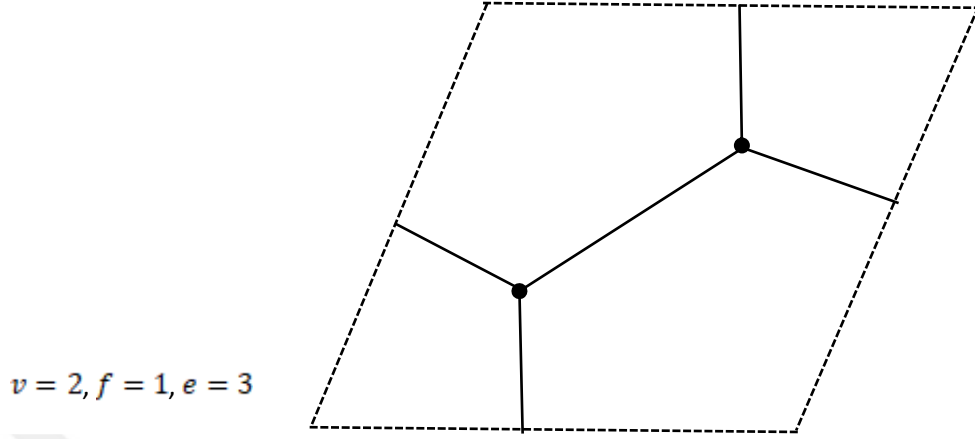


Şekil 3.6. Tor yüzeyi üzerinde G_3 çizgesi

Bu adımlar tekrarlanarak her n pozitif tam sayısına karşılık aynı tor yüzeyi üzerine; n^2 köşesi, n^2 yüzü ve $2n^2$ kenarı bulunan bir G_n çizgesi çizilebilir. Dolayısıyla verilen tor yüzeyi üzerine $\{4,4\}$ tipinde sonsuz çizge yerleştirmek mümkündür.

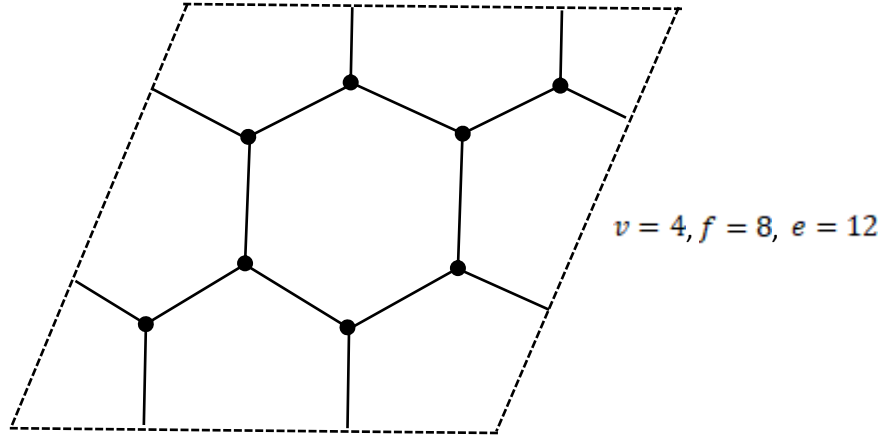
Benzer adımlar tekrarlanarak aynı tor yüzeyi üzerine $\{3,6\}$ ve $\{6,3\}$ tiplerinde de sonsuz çizgenin yerleştirilebileceği görülebilir. Örneğin Şekil 3.7 ile verilen eşkenar

dörtgenin karşılıklı kenarları birleştirilerek elde edilen tor yüzeyi üzerine; 2 köşesi, 1 yüzü ve 3 kenarı bulunan H_1 çizgesi yerleştirilmiştir.



Şekil 3.7. Tor yüzeyi üzerinde H_1 çizgesi

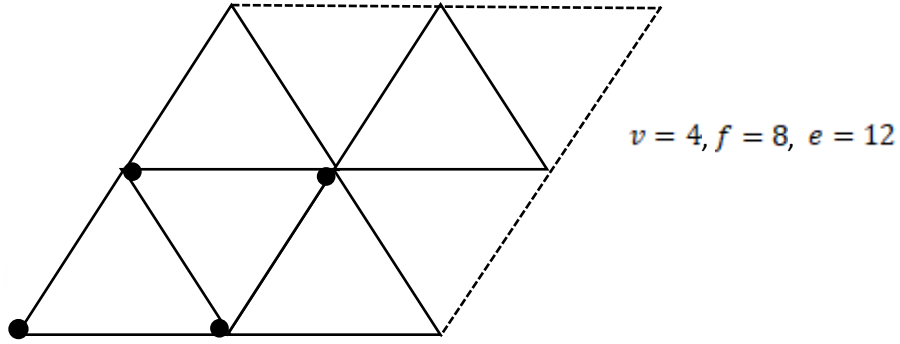
Aynı tor yüzeyi üzerine; 8 köşesi, 4 yüzü ve 12 kenarı bulunan H_2 çizgesi yerleştirilmiştir, Şekil 3.8.



Şekil 3.8. Tor yüzeyi üzerinde H_2 çizgesi

Böylece n . adımda aynı tor yüzeyi üzerine; $2n^2$ köşesi, n^2 yüzü ve $3n^2$ kenarı bulunan bir H_n çizgesi yerleştirilmiş olur. Dolayısıyla verilen tor yüzeyi üzerine $\{3,6\}$ tipinde sonsuz çizge yerleştirmek mümkündür.

$\{6,3\}$ tipindeki çizgeler $\{3,6\}$ tipindeki çizgelerin duali oldukları için aynı tor yüzeyi üzerine $\{6,3\}$ tipinde sonsuz çizgenin çizilebileceği kolayca görülebilir. Örneğin H_2 çizgesinin duali olan çizge Şekil 3.9 ile verilmiştir.



Şekil 3.9. Tor yüzeyi üzerinde H_2 çizgesinin duali

Sonuç 3.1 $\{4,4\}$, $\{3,6\}$ ve $\{6,3\}$ tipinde sonsuz 1-platonik çizge mevcuttur.

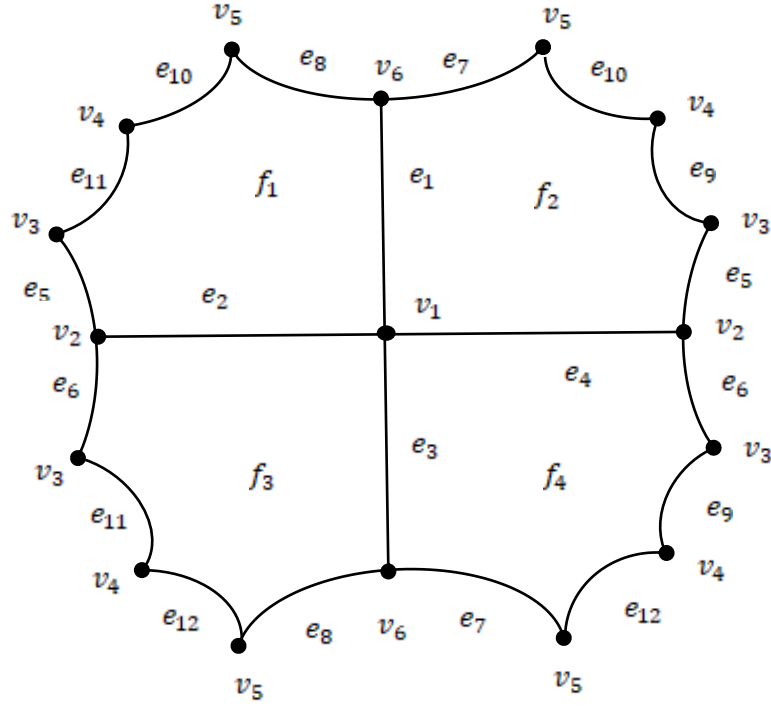
3.3. Platonik Çizge Aileleri

Eğer $g > 1$ ise cinsi g olan çizgelerin sayısının sonlu olduğu daha önce görülmüştü. Bu kısımda her $g > 1$ için cinsi g olan Rirmann yüzeyleri üzerinde bulunan ve birbirine izomorf olmayan bazı çizgeler tanıtılacaktır. Söz konusu çizgelerle ilgili özet bilgiler Çizelge 3 ile verilmiştir. Bu çizgelerin duallerine Çizelge 3'te yer verilmemiştir. Çizelgenin her satırında d ile n ve v ile f yer değiştirilerek ilgili çizgenin duali hakkında aynı bilgiler elde edilebilir.

3.3.1. Accola-Maclahlan Çizgesi

Her $g > 1$ için cinsi g olan ve Accola-Maclahlan yüzeyi olarak adlandırılan bir yüzey mevcuttur. Konform otomorfizmalarının sayısı $8(g + 1)$ olan bu yüzey üzerine cinsi g olan ve $\{4, 2g + 2\}$ tipinde bir çizge yerleştirilebilir. Accola-Maclahlan Çizgesi olarak adlandırılan bu çizgenin 4 yüzü, $2g + 2$ köşesi ve $4g + 4$ kenarı bulunur. Yüzeyin $8(g + 1)$ otomorfizmasının tamamı çizgenin de otomorfizmasıdır.

Aşağıdaki şekilde, cinsi 2 olan Accola-Maclahlan çizgesi yer almaktadır. Yukarıda verilen genel bilgilerden de anlaşılacağı üzere, bu çizgenin 4 yüzü, 6 köşesi ve 12 kenarı bulunmaktadır. Şekilde yer alan 12 kenarlı hiperbolik çokgenin isimleri aynı olan kenarları birleştirilerek cinsi 2 olan Accola-Maclahlan yüzeyi elde edilir. Çokgenin kenarlarının çizgenin de kenarları olduğuna, ayrıca çizgenin e_1, e_2, e_3 ve e_4 kenarlarının çokgenin içinde kaldığına dikkat edin.



Şekil 3.10. Cinsi 2 olan Accola-Maclahlan çizgesi.

Aynı yüzey üzerinde $\{2g + 2, 2g + 2\}$ tipinde ve $4(g + 1)$ otomorfizması bulunan ikinci bir çizge daha bulunur. Bu çizgenin ise 2 yüzü, 2 köşesi ve $2g + 2$ kenarı vardır. Yüzeyin otomorfizmalarından $4(g + 1)$ tanesi köşeleri köşelere götürmediği için bu çizgenin otomorfizması değildir.

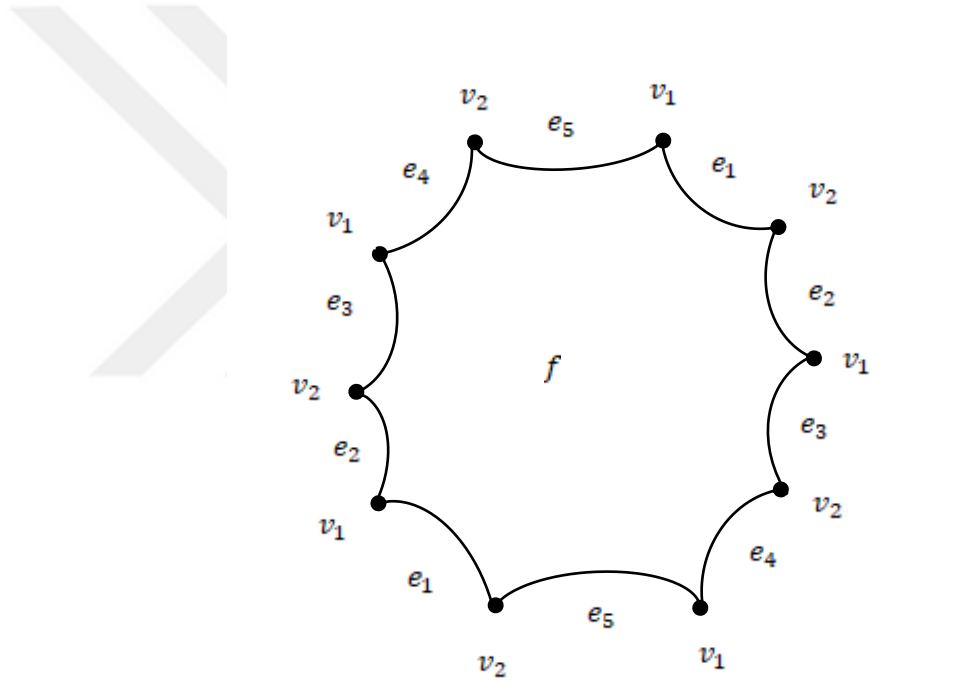
Accola-Maclahlan yüzeyleri ve üzerinde bulunan çizgeler hakkında daha ayrıntılı bilgiler; (Accola, 1968), (MacLahlan, 1969) ve (Melekoğlu ve Singerman) kaynaklarında yer almaktadır.

3.3.2.1. Tip Wiman Çizgesi

Her $g > 1$ için cinsi g olan ve 1. Tip Wiman Yüzeyi olarak adlandırılan bir yüzey mevcuttur.

$4g + 2$ konform otomorfizmaya sahip olan bu yüzey üzerinde $\{2g + 1, 4g + 2\}$ tipinde bir çizge bulunur. 1. Tip Wiman Çizgesi olarak adlandırılan bu çizgenin 1 yüzü, 2 köşesi ve $2g + 1$ kenarı bulunur. Çizgenin tüm kenarları aynı iki köşeyi birleştirdikleri için paraleldir.

Aşağıda şekilde verilen 10 kenarlı hiperbolik çokgenin karşılıklı kenarları birleştirilerek cinsi 2 olan 1. Tip Wiman Yüzeyi elde edilir. Bu çokgen 1. Tip Wiman çizgesinin yüzü olmaktadır. Ayrıca çizgenin 5 kenar ve 2 köşesinin çokgenin kenar ve köşelerinden nasıl elde edildiği şekilde görülmektedir.



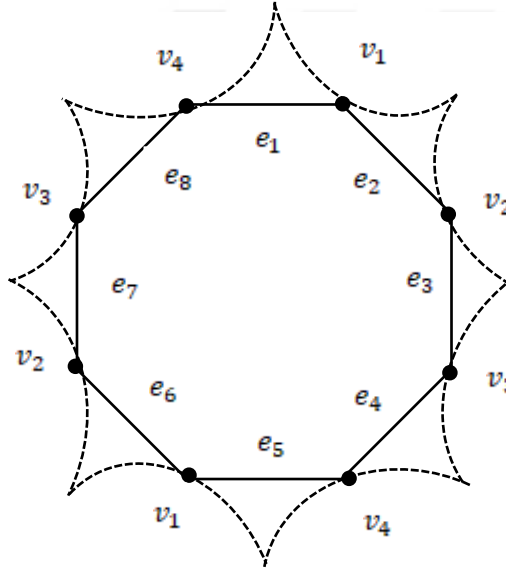
Şekil 3.11. Cinsi 2 olan 1. Tip Wiman çizgesi.

3.3.2.2. Tip Wiman Çizgesi

Her $g > 1$ için cinsi g olan ve $8g$ konform otomorfizmaya sahip olan bir kompakt Riemann yüzeyi mevcuttur. Bu yüzey 2. Tip Wiman Yüzeyi olarak adlandırılır ve üzerine

$\{4,4g\}$ tipinde ve cinsi g olan bir çizge yerleştirilebilir. 2. Tip Wiman Çizgesi olarak adlandırılan bu çizgenin 2 yüzü, $2g$ köşesi ve $4g$ kenarı bulunur. Yüzeyin $8g$ otomorfizmasının tamamı da çizgenin otomorfizmasıdır.

Aşağıdaki şekilde verilen hiperbolik sekizgenin karşılıklı kenarları birleştirilerek cinsi 2 olan 2. Tip Wiman Yüzeyi elde edilir. Şekilde görüldüğü gibi, yüzey üzerine 2 yüzü, 4 köşesi ve 8 kenarı bulunan 2. Tip Wiman çizgesi yerleştirilmiştir. Bu çizgenin yüzlerinden biri kolayca görülürken, diğeri mevcut yüzün dışında kalan üçgenlerin bir araya gelmesiyle ortaya çıkar.



Şekil 3.12. Cinsi 2 olan 2. Tip Wiman çizgesi

Aynı yüzey üzerinde $\{4g, 4g\}$ tipinde ve $4g$ otomorfizması mevcut olan ikinci bir çizge da bulunur. Bu çizgenin ise 1 yüzü, 1 köşesi ve $2g$ kenarı vardır.

Çizelge 3.1. Bazı Özel Platonik Çizgeler

d	n	v	e	f	İlgili Yüzey
4	$2g + 2$	$2g + 2$	$4g + 4$	4	Accola-Machlachan Yüzeyi
$2g + 2$	$2g + 2$	2	$2g + 2$	2	Accola-Machlachan Yüzeyi
$2g + 1$	$4g + 2$	2	$2g + 1$	1	1. Tip Wiman Yüzeyi
4	$4g$	$2g$	$4g$	2	2. Tip Wiman Yüzeyi
$4g$	$4g$	1	$2g$	1	2. Tip Wiman Yüzeyi

2. Tip Wiman yüzeyleri ve çizgeleri hakkında daha ayrıntılı bilgiler için; (Kulkarni, 1991) ve (Melekoğlu ve Singerman 2016) kaynaklarına başvurulabilir.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu tez çalışmasında ilk olarak düzlemsel çizgelerle ilgili temel kavramlar kısaca tanıtılmıştır. Daha sonra ağırlıklı olarak cinsi g , köşelerinin dereceleri ve yüzlerini sınırlayan kenarların sayısı aynı olan ve g -platonik olarak adlandırılan çizgeler incelenmiştir. Döngüler dışında 0 -platonik çizgelerin sayısı 5 'tir. Aynı özelliklere sahip ve cinsi birden büyük olan yüzeyler üzerindeki çizgelerin de sayısı sonludur. Tor yüzeyleri üzerinde ise sonsuz 1 - platonik çizge mevcuttur. Bu çalışmada tor yüzeyleri üzerine üç farklı tipte sonsuz 1 - platonik çizge yerleştirilebileceği gösterilmiştir. Ayrıca her $g > 1$ için cinsi g ve üç farklı yüzey üzerinde bulunan beş g -platonik çizge ailesi tanıtılmıştır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Döngüler dışında 0-platonik çizgelerin sayısı 5'tir ve bunlar düzgün çokyüzlülere karşılık gelir. Aynı özelliklere sahip ve cinsi birden büyük olan platonik çizgelerin de sayısı sonludur. Tor yüzeyleri üzerinde ise sonsuz 1- platonik çizge mevcuttur. Bu çalışmada tor yüzeyleri üzerine üç farklı tipte sayılabilir sonsuz 1- platonik çizge yerleştirilebileceği gösterilmiştir. Ayrıca her $g > 1$ için cinsi g ve üç farklı yüzey üzerinde bulunan beş g -platonik çizge ailesi tanıtılmıştır. Bu çizge ailelerini üzerinde bulunduran yüzeyler, Accola-Maclachlan ve Wiman yüzeyleridir. Daha yapılacak çalışmalarda, g -platonik çizgeler üzerine (Melekoğlu ve Singerman, 2016) tarafından yapılan çalışmalar, otomorfizma grupları kenarları üzerinde geçişli olan g -platonik çizgelere genişletilebilir.

6. KAYNAKLAR

- Accola, R.D.M. (1968). On the number of automorphisms of a closed Riemann surface. *Transactions of the American Mathematical Society*, 131, 398-408.
- Bondy, J.A., Murty, U.S.R. (2008). *Graph theory*. Springer.
- Diestel, R. (2017). *Graph theory*, Springer.
- Kulkarni, R.S. (1991). A note on Wiman and Accola-Maclachlan surfaces. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica*, 16, 83-94.
- Maclachlan, C. (1969). A bound for the number of automorphisms of a compact Riemann surface. *Journal of the London Mathematical Society*, 44, 265-272.
- Melekoğlu, A. (2018). Mirrors of reflections of regular maps. *Ars Mathematica Contemporanea*, 15(2), 347–354. doi:10.26493/1855-3974.1459.11d
- Melekoğlu, A., Singerman, D. (2016). The structure of mirrors on regular maps on Platonic surfaces. *Geometriae Dedicata*, 181, 239-256. doi:10.1007/s10711-015-0122-4
- Ringel, G., Youngs, J.W.T. (1968). Solution of the Heawood map coloring problem. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, 60(2), 438-445.
- Trudeau, R.J. (1993). *Introduction to graph theory*, Dover.
- West, D.B. (2001). *Introduction to graph theory*, Prentice Hall.

T.C.
AYDIN ADNAN MENDERES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİLİMSEL ETİK BEYANI

‘Düzlemsel Çizgeler’ başlıklı Yüksek Lisans tezindeki bütün bilgileri etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada, bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiz atıf yaptığımı bildiririm. İfade ettiklerimin aksi ortaya çıktığında ise her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim.

Arif Atalay ÖZDEMİR

15.06.2023

ÖZGEÇMİŞ

Soyadı, Adı : Özdemir, Arif Atalay

Yabancı Dil : İngilizce

EĞİTİM

Derece	Kurum	Mezuniyet tarihi (Yıl)
Lisans	Aydın Adnan Menderes Üniversitesi	2020
Pedagojik Formasyon	Aydın Adnan Menderes Üniversitesi	2020

İŞ DENEYİMİ

Yıl	Yer/Kurum	Unvan
2021	Doğru Statü Eğitim Kurumları	Matematik Öğretmeni