T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DAĞILIMLI MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN AÇIK VE KAPALI YÖNTEMLER

Mehmet KOCABIYIK

Danışman
Prof. Dr. Mevlüde YAKIT ONGUN

II. Danışman
Dr. Öğr. Üyesi İlkem TURHAN ÇETİNKAYA

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
ISPARTA - 2023

© 2023 [Mehmet KOCABIYIK]

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ	viii
SİMGELER DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ÖZETLERİ	3
3. KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER	7
3.1. Bazı Temel Kavramlar	7
3.1.1. Gamma fonksiyonu	7
3.1.2. Beta fonksiyonu	9
3.1.3. Mittag-Leffler fonksiyonu	10
3.2. Kesirli Türev ve İntegral	11
3.2.1. Grünwald-Letnikov kesirli türevi ve integrali	11
3.2.2. Riemann-Liouville kesirli türevi ve integrali	13
3.2.3. Caputo kesirli türevi	15
3.2.4. Kesirli türevlere ait birkaç temel özellik	16
3.2.5. Kesirli mertebeden türevlerin laplace ve ters laplace dönüşümü	18
3.3. Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemler	19
3.3.1. Tek terimli ve çok terimli kesirli diferansiyel denklemler	21
4. AÇIK VE KAPALI SAYISAL YAKLAŞIM YÖNTEMLERİ VE KARARLILIK ANALİZİ	23
4.1. Euler Yöntemi	24
4.2. Runge-Kutta Metotları	27
4.3. Theta Metodu	30
4.4. Standard Olmayan Sonlu Fark Şeması	32
4.5. Ayrıklaştırılmış Bir Sistemin Kararlılık Analizi	35
5. DAĞILIMLI MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER	37
5.1. Dağılımlı Mertebeden Diferansiyel Denklemler	38
5.2. Dağılımlı Mertebeden Diferansiyel Denklemlerin Analitik Çözümü	41
5.3. Dağılımlı Mertebeden Diferansiyel Denklemlerin Sayısal Çözümü	44
5.3.1. İntegral operatörünün sayısal integrasyonu	45
5.3.2. Çok Terimli Kesirli Türevin Yaklaşık Çözümü	46
6. DAĞILIMLI MERTEBEDEN BAZI MODELLERİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ İÇİN AÇIK VE KAPALI YÖNTEMLER	47
6.1. Dağılımlı Mertebeden $SVIR$ Epidemik Modeli	48
6.1.1. Ayrıklaştırılmış $SVIR$ epidemik modelinin kararlılık analizi	51
6.1.2. $SVIR$ epidemik modelinin nümerik simülasyonu	54
6.2. Dağılımlı Mertebeden Hanta Virüs Modeli	58
6.2.1. Ayrıklaştırılmış Hanta virüs modelinin kararlılık analizi	59
6.2.2. Hanta virüs modelinin nümerik simülasyonu	62
7. SONUÇ VE ÖNERİLER	68
KAYNAKLAR	69
ÖZGEÇMİŞ	79

ÖZET

Doktora Tezi

DAĞILIMLI MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN AÇIK VE KAPALI YÖNTEMLER

Mehmet KOCABIYIK

Süleyman Demirel Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mevlüde YAKIT ONGUN

II. Danışman: Dr. Öğr. Üyesi İlkem TURHAN ÇETİNKAYA

Bu doktora tez çalışmasında iki farklı biyolojik model için açık ve kapalı yöntemler ile sayısal analiz yapılmıştır.

Tez çalışması yedi ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde konu hakkında bir giriş bölümü yer almaktadır. Bu bölümde diferansiyel denklemlerin tarihsel gelişimi hakkında bilgi verilmiştir. İkinci bölümde tez çalışmasında kullanılacak dağılımlı mertebeden diferansiyel denklemler için kaynak özetleri yer almaktadır.

Tezin üçüncü bölümde ise öncelikle konu ile ilgili bilinmesi gereken temel kavram ve fonksiyonlar verilmektedir. Sonrasında ise yine bu bölümde kesirli mertebeden diferansiyel denklemler hakkında temel bilgi ve tanımlar bulunmaktadır.

Dördüncü bölümde nümerik çözümler için açık ve kapalı yöntemler olan Euler, Runge-Kutta, Theta ve Standard olmayan sonlu fark yöntemi tanıtılmıştır. Ek olarak yine dördüncü bölümde ayrıklaştırma ve kararlılık analizi için gerekli tanım ve teoremlere değinilmiştir.

Tezin beşinci bölümünde ise dağılımlı mertebeden diferansiyel denklem sistemlerinin Caputo tarafından ifade edilen tanımı ve analitik çözümü yer almaktadır. Dağılımlı mertebeden diferansiyel denklemlerin kullanıldığı araştırmalar da yine bu bölümde belirtilmiştir.

Altıncı bölümde tez çalışmasında araştırılan iki farklı model Aşılama (SVIR) modeli ve Hanta virüs modeli için öncelikle modellerin dağılımlı mertebeden diferansiyel denklem ile tanımları yapılmıştır. Sonrasında önceki bölümde tanımlanan açık ve kapalı yöntemler ile modellere ait denklem sistemlerinin sayısal analizleri yapılmıştır. Bu analizden sonra denge noktaları belirlenmiş ve denge noktalarının kararlılık analizleri elde edilmiştir. Son olarak yine bu bölümde kararlılık analizleri yapılmış denklem sistemlerine ait simülasyonlar verilmiştir.

Yedinci ve son bölümde ise sonuç ve önerilere yer verilmiştir. Yapılan çalışma doğrultusunda çalışılan dağılımlı mertebeden diferansiyel denklemlerin hem adi mertebeden hem de kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerde kullanımının uygun olduğu görülmüştür. Yoğunluk fonksiyonunun seçimi ile bu tip denklemlerin çözümü sayesinde hem adi mertebeden hem de kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümü elde

edilebileceği ve çözümlerin tutarlı olduğu gösterilmiştir. Denge noktası analizinde ise yine dağılımlı mertebeden diferansiyel denklemlerin yoğunluk fonksiyonu ile kullanılabileceği ifade edilmiştir. Böylece literatüre sayısal çözüm ve kararlılık analizi konusunda katkı sağlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Dağılımlı mertebeden diferansiyel denklemler, Nümerik analiz, SVIR, Hanta virüs model.

2023, 81 sayfa

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

EXPLICIT AND IMPLICIT METHODS FOR DISTRIBUTED ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

Mehmet KOCABIYIK

Süleyman Demirel University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Mevlüde YAKIT ONGUN

Co-Supervisor: Assist. Prof. Dr. İlkem TURHAN ÇETİNKAYA

In this thesis, numerical analysis has been performed with explicit and implicit methods for two different biological models.

The thesis contains seven main sections. The first section introduces the topic and gives information about the historical development process of differential equations. In the second section, there are reference summaries for distributed order differential equations to be used in the thesis.

In the third section of the thesis, primarily the basic terminologies and functions related to the subject are given. Afterwards, basic information and definitions about fractional order differential equations are also provided.

In the fourth section, explicit and implicit methods for numerical solutions; Euler, Runge-Kutta, Theta and Nonstandard finite difference methods are introduced. Additionally, fundamental theorems and definitions for discretization and stability analysis are mentioned.

The fifth section of the thesis, the definition and analytical solution of distributed order differential equations expressed by Caputo is given. The researches in which distributed order differential equation is used are also stated in this section.

In the sixth section, two different models namely the vaccination (SVIR) model and Hanta virus model are investigated. The section begins with the definition of distributed order differential equations for models. Subsequentially, with the explicit and implicit methods described in the previous section numerical analysis of the equation systems of models has been made. In addition, equilibrium points have been determined and stability analysis of equilibrium points have been obtained. At last, simulations of systems of equations with stability analyzes are given.

In the seventh and last section, conclusions and recommendations are given. As a result of the study, it has been seen that the distributed order differential equations, which is examined, are suitable for both in ordinary and fractional order differential equations. It has been shown that by choosing the density function and solving such equations, it is possible to obtain consistent solutions in such differential equations. In the equilibrium point analysis, it is stated that the differential equations of distributed order can be used

with density function. Thus, a contribution has been made to the literature on numerical solutions and stability analysis.

Keywords: Distributed order differantial equations, Numerical analysis, SVIR, Hanta virus model.

2023, 81 pages

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasında yapılan araştırma için öncelikle bana tüm aşamalarda destek olan, karşılaştığım bütün zorluklarda tecrübesi, bilgisi ve yönetim kabiliyeti ile beni en doğru şekilde yönlediren çok kıymetli danışman hocam Prof. Dr. Mevlüde YAKIT ONGUN'a ve tüm ailesine, aynı zamanda oldukça kıymetli bilgilerini bana ileten değerli II. danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi İlkem TURHAN ÇETİNKAYA'ya gösterdikleri çaba ve gayret için teşekkürlerimi sunarım.

Tezimin gerçekleşmesi sürecinde bana 2211 nolu Yurt İçi Lisansüstü Burs programı kapsamında maddi destek sağlayan TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Tezimin her sürecinde bana olan güven ve desteklerini hiçbir zaman eksik etmeyen aileme sonsuz saygı ve sevgimi sunarım.

Mehmet KOCABIYIK
ISPARTA, 2023

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 3.1. Gamma fonksiyonunun grafiği 7
Şekil 3.2. Beta fonksiyonunun grafiği 9
Şekil 6.1. $v(\alpha) = 1$ için $SVIR$ sistemine ait NSFD ile çözüm simülasyonu 55
Şekil 6.2. Farklı $v(\alpha)$ ifadeleri için $S(t)$ fonksiyonunun NSFD ile çözüm grafikleri 56
Şekil 6.3. Farklı $v(\alpha)$ ifadeleri için $V(t)$ fonksiyonunun NSFD ile çözüm grafikleri 57
Şekil 6.4. Farklı $v(\alpha)$ ifadeleri için $I(t)$ fonksiyonunun NSFD ile çözüm grafikleri 57
Şekil 6.5. Farklı $v(\alpha)$ ifadeleri için $R(t)$ fonksiyonunun NSFD ile çözüm grafikleri 57
Şekil 6.6. $u(\alpha) = 1$ iken dağılımlı mertebeden sistemin çözümü 65
Şekil 6.7. Kesirli mertebeden Hanta virüs sisteminin çözümü 65
Şekil 6.8. Farklı $u(\alpha)$ değerleri için $M_s(t)$ ve $M_i(t)$ fonksiyonları grafikleri 66
Şekil 6.9. Farklı h değerleri için $M_s(t)$ ve $M_i(t)$ fonksiyonları grafikleri 66
Şekil 6.10. Farklı $u(\alpha)$ değerleri için faz portresi grafikleri 67

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa

Çizelge 6.1. Açık ve kapalı yöntemlerin yakınsaklık analizi..... 56
Çizelge 6.2. Farklı α değerleri için CPU zamanları ($\nu(\alpha) = \alpha,\ h = 0.01$)..... 56
Çizelge 6.3. Hanta virüs sistemine ait mutlak hata değerleri ve CPU zamanları. 67

SİMGELER DİZİNİ

$\Gamma(n)$ Gamma Fonksiyonu
$B(m,n)$ Beta Fonksiyonu
$E_{\alpha}(z)$ Bir Parametreli Mittag-Leffler Fonksiyonu
$E_{\alpha,\beta}(z)$ İki Parametreli Mittag-Leffler Fonksiyonu
$D_{*}^{\alpha}f(t)$ Riemann-Liouville Kesirli Türevi
${}_{c}D_{*}^{\alpha}f(t)$ Caputo Kesirli Türevi
${}_{a}D_{t}^{p}f(t)$ Grünwald-Letnikov Kesirli Türevi
${}_{a}D_{t}^{-p}f(t)$ Grünwald-Letnikov Kesirli İntegrali
$D_{*}^{-\alpha}, I^{\alpha}f(t)$ Riemann-Liouville Kesirli İntegrali
$D_{t}^{w(\alpha)}f(t)$ Dağılımlı Mertebeden Diferansiyel Denklem için İntegral Operatörü

1. GİRİŞ

Diferansiyel denklemler, matematikte fonksiyon veya fonksiyonların, bir veya daha fazla değişkene göre türevlerini ilişkilendiren denklemlerdir. Diferansiyel denklemlerin önemi ise birçok bilim dalında matematiksel modelleme amacı ile kullanılmasından kaynaklanmaktadır. Bu bilim dallarına Fizik, Kimya, Biyoloji, İstatistik, Ekonomi ve Mühendislik gibi birçok örnek verilebilir.

Diferansiyel denklemler ile ilgili çalışmalar ilk olarak 17. yüzyılın ortalarında yani integral hesabı keşfinden hemen sonrasında Newton ve Leibnitz'in yaptığı çalışmalar ile başlamıştır. Bu tez çalışmasının ana amacı olan dağılımlı mertebeden diferansiyel denklemlerin analitik ve nümerik çözümleri için önemli bir yer kaplayan kesirli mertebeden diferansiyel denklemler ile ilgili çalışmalar ise bu dönem yoğun olarak çalışılmamıştır. Ancak bu dönemde sadece Leibnitz az da olsa $\frac{1}{2}$ inci mertebeden türevlerin varlığını ve anlamını kavrama üzerinde araştırmalarda bulunmuştur.

Bu dönem sonrasında matematikte gelişen yöntem ve teknikler ile kesirli türev ve kesirli integrasyon alanında çalışmalar artmış ve ilk olarak Liouville 1832-1837 yılları arasındaki çalışmaları ile bu alanda ön plana çıkmıştır. Sonrasında ise Riemann'ın 1847 de kaleme aldığı çalışmasının 1876 da yani ölümünden 10 sene sonra yayınlanması ile bu konu hakkında popülarite artmıştır.

Bu araştırma ve bulgular ile daha çok ilgi gören kesirli mertebeden diferansiyel denklemler konusu hakkında çalışmalar Grünwald-Letnikov (1967-68) ve Caputo (1967) tarafından devam ettirilmiştir. Bu kısım hakkında daha çok tarihsel gelişim için Miller ve Ross (1993), Podlubny (1998) ve Samko vd. (1993) kaynaklarına bakılabilir.

Bu tip yani kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin üzerinde durulmasının asıl nedeni ise ana konu olan dağılımlı mertebeden diferansiyel denklemlerin aslında Diethelm ve Ford'un (2009) çalışmasında belirttiği gibi tek mertebeden ve çok terimli kesirli diferansiyel denklemlerin bir nevi doğal olarak genelleştirilmiş halleri olmasıdır.

Dağılımlı mertebeden diferansiyel denklemler fikri ve tanımı ilk olarak Caputo tarafından 1969 yılında ortaya çıkarılmış ve yine Caputo tarafından 1995 yılında geliştirilmiştir. Sonrasında ise Bagley ve Torvik (2000a) bu konu hakkında çalışmalarda bulunarak

konunun önemini biraz daha arttırmıştır. Böylece matematiksel fizik, mühendislik ve birçok bilim dalında modellemeler de dağılımlı mertebe diferansiyel denklemler kullanılmıştır (Hartley ve Lorenzo, 1999; Caputo, 1969; Caputo, 1995; Bagley ve Torvik, 2000a; Bagley ve Torvik, 2000b).

Farklı alanlarda yapılan bu çalışmalardan sonra ise son 20 yılda kesirli ve dağılımlı mertebeden diferansiyel denklemlerin analitik ve nümerik çözümleri oldukça ilgi görmekte ve üzerinde çalışılmaktadır. Dağılımlı mertebeden ile ilgili çalışılan konu ve araştırmalar hakkında daha detaylı bilgiler ise bir sonraki bölüm olan kaynak özetleri kısmında verilmiştir.

Bu doktora tez çalışmasında dağılımlı mertebeden diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerinin araştırılmasının asıl amacı ise bu tip diferansiyel denklemlerin hem kesirli tip diferansiyel denklemlerin bir bakıma genel hali olması hem de birçok bilim dalında modelleme kısmında oldukça kullanılır olması sebebi ile çözümlerinin elde edilmesinin gerekliliği olarak belirlenmiştir.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Giriş kısmında değinildiği gibi dağılımlı mertebeden diferansiyel denklemler yada diğer bir ifade ile dağılımlı mertebeden kesirli mertebeden diferansiyel denklemler Caputo'nun (1969) çalışmaları ile ortaya çıkmıştır. Bu çalışmadan sonra Caputo yine bu alanda 1995 yılındaki çalışmaları ile bu konuya katkıda bulunmuştur. İlk çalışmasında Caputo bu tip diferansiyel denklemin tanımı hakkında bilgi vermiş ikinci çalışmasında ise bu tip diferansiyel denklemlerin anlamının ve öneminin kavranması ile ilgili konulara değinmiştir.

Sonrasında 1999 yılında Hartley ve Lorenzo kesirli mertebeden diferansiyel denklem sistemleri için sürekli dağılımlı mertebeden denklemleri kullanmıştır. Bagley ve Torvik (2000a) çalışmalarında ise dağılımlı mertebeden diferansiyel denklemlerin varlığını ve çözümünü iki part halinde ele almıştır. Caputo (2001) kaynağında ise dielektrik indüksiyon ve difüzyon denklemlerinin modellenmesinde dağılımlı mertebeden diferansiyel denklemleri tanıtmış ve açıklamalarda bulunmuştur.

Lorenzo ve Hartley (2002) bu tip diferansiyel denklemlerin kesirli türev operatörleri hakkında çalışmada bulunmuşlardır. Yine dağılımlı mertebe diferansiyel denklemler için önemli yer kaplayan kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin analizi ile ilgili ise bu alanda ileride de değinilecek birçok araştırması olan Diethelm ve Ford (2002a) kaynağına bakılabilir. Diethelm ve Ford'un 2002 yılındaki bir diğer çalışması ise dağılımlı mertebeden kesirli diferansiyel denklemler içerisinde oldukça ilgi gören Bagley-Torvik denklemleri ve bunların nümerik yollarla çözümü olmuştur. Diethelm ve Ford çalışmalarında çözüm yöntemi olarak Podlubny yaklaşımını kullanmışlardır. Ek olarak kesirli lineer çok adımlı ve Adams metodu ile de çözümü ulaşmaya çalışmışlardır.

Bir diğer önemli konu olan lineer çok terimli kesirli diferansiyel denklem ve denklem sistemlerinin çözümü ile ilgili Edwards vd. (2002) çalışmalarında Bagley-Torvik tipi denklemin çözümü ile ilgili bilgi vermiştir. Edwards vd. ayrıklaştırma için yamuk yöntemi kullanmışlardır.

Biraz daha yakın zamanlarda ise bu tip diferansiyel denklemlerin nümerik ve analitik çözümleri ile ilgili araştırmalar ön plana çıkmıştır. Bu çalışmaların en önemlilerinden

Diethelm ve Ford'un (2004, 2009) çalışmaları, bu tip diferansiyel denklemlerin çözümlerini nümerik yolla hata analizini de içeren bir şekilde ortaya koymuştur. Aynı zamanda Diethelm ve Ford (2004) çalışmasında uygun başlangıç koşulları belirlemenin önemi, varlık-teklik ve yakınsaklık-kararlılık konuları ile ilgili de bilgi vermiştir.

Diethelm ve Ford (2009) çalışmasında dağılımlı mertebeden diferansiyel denklemlerin çok terimli kesirli diferansiyel denklem haline gelmesinde dolayı bu kaynakta ise çok terimli kesirli diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri ile ilgili çalışma yapmıştır. Bu çalışmada nümerik yöntem olarak Adams metodu kullanılmıştır.

Sokolov vd. 2004 yılındaki makalesinde ise dağılımlı mertebeden kesirli kinetikler üzerinde durmuşlardır. Connolly'nin (2004) çalışmasını ise bir doktora tez çalışması olarak yayınlanmış ve hem kesirli hem de dağılımlı mertebeden diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri konusunu ele almıştır. Bu çalışmada konu ile ilgili temel bilgiler ve makalelerin kısa özetleri yer almaktadır. Çalışmada tek terimli denklemler, çok terimli denklemler, kareleştirme formülü ve Adams metodu ile ilgili bilgilerin yanı sıra ayrıklaştırma konusuna da değinilmiştir.

Diethelm ve Luchko (2004) çalışmasında lineer çok terimli kesirli diferansiyel denklemin başlangıç değer problemlerine ait nümerik çözümleri elde etmişlerdir. Makalede Bagley-Torvik kesirli denklemide ele almışlardır bunu yanında homojen ve homojen olmayan tipteki denklemlerin çözümünü araştırmışlardır.

Atanackovic vd. (2007) çalışmarında ise lineer olmayan dağılımlı mertbeden kesirli diferansiyel denklemlerin varlık ve tekliğine ait araştırmalarda bulunmuşlardır. Model olarak ise viskoelastik denklemleri ve sistem kimliği teorisine ait denklemleri ele almışlardır.

Astrom ve Murray (2008) çalışmasında ise lineer olmayan sistemlerin karmaşıklığını daha kolay açıklamak ve tanımlamak için dağılımlı mertebe operatörünü kullanmıştır.

Najafi vd. (2011) çalışmasında dağılımlı mertebeden diferansiyel denklemler için kararlılık analizi kısmına değinmiş ve karakteristik fonksiyon, eylemsizlik konsepti gibi konular ile ilgili bilgilere yer vermiştir. Noroozi vd. (2012) ise dağılımlı mertebeden kesirli hibrid denklemlerinin çözümleri ile ilgili çalışmalar yapmıştır.

Refahi vd. (2012), dağılımlı mertebeden kesirli diferansiyel lineer denklem sistemlerinin analitik çözümleri üzerinde durmuştur. Dağılımlı mertebeden diferansiyel denklemlerde kararlılık analizi ile ilgili çalışmalar ise son yıllarda önem kazanmış ve Aminikhah vd. (2013) ve Aminikhah vd. (2015) tarafından da çalışmalar yapılmıştır.

Ford ve Morgado (2012) yayınlarında dağılımlı mertebeden sınır değer problemleri ile ilgili bazı araştırmalarda bulunmuşlardır. Bu çalışmalarında Caputo tipi başlangıç koşulları kullanmışlar ve denklemin varlık-teklik çözümü ile de ilgilenmişlerdir.

Yine diğer birkaç çalışmada ise, Katsikadelis (2014) nümerik çözümler için çoğu kaynakta olduğu gibi çok terimli kesirli diferansiyel denklemleri ve ayrıklaştırma için de yamuk yöntemini kullanmıştır. Ford vd. (2014) dağılımlı mertebeden kesirli diferansiyel difüzyon denklemleri için nümerik metodları kullanmıştır.

Gao vd. (2015) ise yüksek mertebeden fark şemalarını bu tip diferansiyel denklemler için kullanmıştır. Morgado ve Rebelo (2015) çalışmalarında dağılımlı mertebeden reaksiyon difüzyon denklemlerine ait nümerik çözümler üzerinde durmuşlardır. Bu çalışmada nümerik şema oluşturma, kararlılık, yakınsaklık ve ek olarak zaman ve uzay kavramına göre ayrıklaştırma konuları üzerinde araştırmalarda bulunmuşlardır.

Mashayekhi ve Razzaghi (2016) da ise dağılımlı mertebeden hibrid fonksiyonlarının nümerik çözümleri araştırılmıştır. Çalışmada Riemann-Liouville kesirli integral operatörü yardımı ile ifadenin cebirsel denkleme dönüştürülmesi sonrasında ise Newtons Iterative yöntemi ile çözüme ulaşılması amaçlanmıştır. Ek olarak çalışmada Bernoulli polinomu ve Gauss-Legendre nümerik integrasyonu kullanılmıştır.

Li ve Wu (2016) ise dağılımlı mertebeden difüzyon denklemlerinin nümerik yollarla çözümü konusunda çalışmış ve klasik nümerik kareleştirme (diagonal) metodu kullanmıştır. Bunun yanında çalışmalarında diğer kaynaklardan farklı olarak Kernel metodu kullanmışlardır.

Zahra ve Van Daale (2017) çalışmalarında kesirli mertebeden Bagley-Torvik denklemlerinin çözümü için ayrık spline metodu kullanmışlardır. Ek olarak bu çalışmada standart olmayan Grünwald-Letnikov metodu ve farklı halleride ele alınmıştır. Mashoof vd. (2018) kaynağında ise dağılımlı mertebeden Hilfer-Prabhakar denklemlerinin kararlılık analizi konusu üzerinde çalışma yapılmıştır.

Abbaszadeh (2019) ise bu konu hakkında farklı bir çalışma yaparak Riesz uzayında dağılımlı mertebeden difüzyon denklemleri için hata tahmini yapmıştır. Bu tahmin için sonlu fark şemasını kullanmıştır. Yine bu dönemdeki bir diğer çalışmada Yuttanan ve Razzaghi (2019) dağılımlı mertebeden kesirli diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri için Legendre dalgacıkları yaklaşımı kullanmış ve çözüme ulaşmışlardır. Nümerik anlamdaki bir diğer çalışmada ise Moghaddam vd. (2019) dağılımlı mertebeden kesirli ve kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümünü elde etmişlerdir. Bu çözüm için yazarlar ayrıklaştırma algoritması olarak Du Fort-Frankel metotunu kullanmışlardır.

Zaky ve Machado (2020)'de ise çok boyutlu spektral Tau metotunu dağılımlı mertebeden kesirli difüzyon denklemlerin çözümünü elde etmek için kullanmışlardır. Kumar vd. (2020) ise yine bir nümerik yaklaşım olan dalgacık yaklaşım şeması ile dağılımlı mertebeden kesirli diferansiyel denklemlerin çözümüne ulaşmışlardır.

Son yıllarda ise nümerik yaklaşım ile dağılımlı mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümü ile ilgili çalışmalar oldukça artmıştır. Bunlardan bazıları ise şu şekildedir.

Maleknejad vd. (2021), Müntz–Legendre dalgacık yaklaşımını kullanarak dağılımlı mertebeden kesirli diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerini elde etmişlerdir. Yuttanan vd. (2021) ise bu tip diferansiyel denklemlerin çözümü için kesirli mertebeden genelleştirilmiş Taylor dalgacıklarına dayalı bir sayısal yöntem geliştirmiş ve çözümü bu yöntem ile elde etmişlerdir. Diğer bir çalışmada Rahimkhani ve Ordokhani (2021) dağılımlı mertebeden kesirli optimal kontrol problemlerinin sayısal olarak incelemesini Bernstein dalgacıkları aracılığı ile elde etmişlerdir.

3. KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER

3.1. Bazı Temel Kavramlar

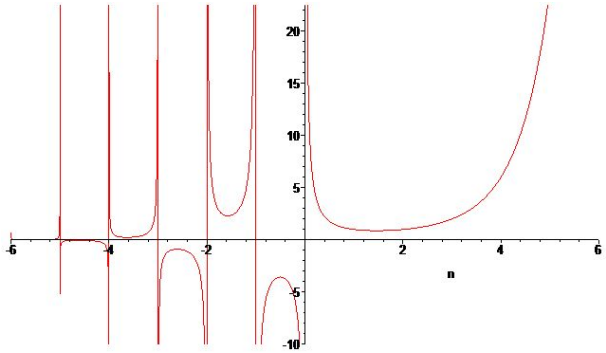
Sadece Matematik alanında değil Mühendislik, Fizik, Kimya, Biyoloji, Tıp gibi birçok bilim dalında ve alanında karşılaşılan problemlerin çözümü için probleme ait denklemi matematiksel ifadelerle formüle etmek, en az bu problemin çözümü kadar önemli bir yere sahiptir. Bu formüle etme işleminin yapıldığı diferansiyel denklemde eğer aranan fonksiyonun türevi kesirli mertebeden ise bu tip diferansiyel denklemlere kesirli mertebeden diferansiyel denklemler denir. Bu bölümde dağılımlı mertebe diferansiyel denklemlerin çözümü ve analizi kısmında oldukça fazla karşımıza çıkacak olan kesirli mertebeden diferansiyel denklemler için bazı temel tanım ve kavramlara yer verilecektir.

3.1.1. Gamma fonksiyonu

Gamma fonksiyonu $\Gamma(n)$ şeklinde gösterilir. Kesirli mertebeden türev ve integral hesaplamaları ile oldukça ilişkilidir. Bir bakıma da faktöriyel fonksiyonunun genişletilmiş hali olarak ifade edilir. Gamma fonksiyonu negatif değerlerde tanımlı değildir. Bu sebeple $\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ şeklinde tanım ve değer kümesine sahiptir. Euler Gamma fonksiyonu yada II. tip Euler integrali olarak da adlandırılan bu fonksiyon,

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt \tag{3.1.1}$$

biçiminde tanımlanır. Burada $z \in \mathbb{C} - \{0,-1,-2,...\}$ olarak seçilirse $\Gamma(z)$ fonksiyonu yakınsaktır (Podlubny, 1998).



Şekil 3.1. Gamma fonksiyonunun grafiği

Aynı zamanda bu eşitlik ile $\int_0^\infty t^n e^{-t} dt = n!$ olması sebebiyle Gamma (Γ) fonksiyonu bir faktöriyel fonksiyon olarak da ele alınır. Genelleştirilmiş integral yardımı ile,

$$n! = \int_0^\infty t^n e^{-t} dt = \int_0^\infty t^{(n+1)-1} e^{-t} dt = \Gamma(n+1) \tag{3.1.2}$$

dır. Sonuç olarak $\Gamma(n+1) = n!$ olarak elde edilir. Gamma fonksiyonuna ait birkaç özellik aşağıda verilmiştir:

i) $\Gamma(1) = 1$.

ii) $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\Gamma(n+1) = n!$.

iii) $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$.

iv) $Re(z) > 0$ olmak üzere $\Gamma(z)$ ile tanımlanan fonksiyon $\Gamma(z) = \int_0^1 \left(ln(\frac{1}{t})\right)^{(z-1)} dt$ denklemi ile birbirine eşittir.

v) $z \in \mathbb{C} - \{0, -1, -2, ...\}$ olmak üzere $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ eşitliği sağlanmaktadır.

vi) $z \in \mathbb{C} - \{0, 1, 2, ...\}$ olmak üzere $\Gamma(-z+1) = -z\Gamma(-z)$ eşitliği sağlanmaktadır.

vii) $Re(z) > 0$ olmak üzere Gamma fonksiyonu $\Gamma(z)$,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k!k^z}{z(z+1)(z+2)...(z+k)}$$

limitine eşittir. Aynı zamanda bu gösterime Gamma fonksiyonunun limit hali denir. Ayrıca Gamma fonksiyonu için bu limit hali yada gösterimi,

$$\frac{1}{z} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(1+(1/k)^z)}{1+(z/k)}$$

şeklinde tanımlanan Euler'in sonlu çarpım ifadesine eşittir.

viii) $Re(z) > 0$ olmak üzere Gamma fonksiyonunun bir diğer ifadesi,

$$\Gamma(z) = \frac{1}{ze^{\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} (1+z/k)e^{-z/k}}$$

şeklindedir. Bu ifadeye Gamma fonksiyonunun Weierstrass tanımı denir. Tanımdaki γ sabitine Euler-Masceroni veya Euler sabiti denir.

ix) Gamma fonksiyonunun sonucu tanımdan dolayı hiçbir zaman sıfır olamaz.

x) Gamma fonksiyonu her $z \in \mathbb{C} - \{0, -1, -2, ...\}$ için analitik bir fonksiyondur.

xi) z kompleks sayısı tamsayıdan farklı seçilirse Gamma fonksiyonuna ait yansıma formülü aşağıdaki şekildedir:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{sin(\pi z)} \text{ ve } \Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{zsin(\pi z)}.$$

xii) $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\Gamma(\tfrac{n}{2}) = \tfrac{(n-2)!!\sqrt{\pi}}{2^{(n-1)/2}}$$

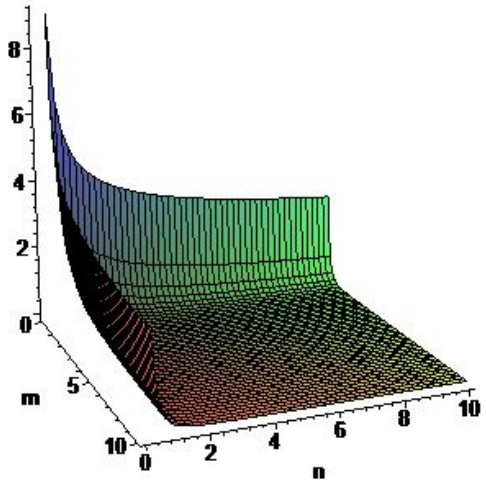
şeklinde ifade edilebilen özel bir forma sahiptir. Bu denklemde ifade edilen $n!!$ çift katlı faktöriyeli ifade etmektedir (Podlubny, 1998; Weilbeer, 2005).

3.1.2. Beta fonksiyonu

Gamma fonksiyonu yerine bazı durumlarda kullanılan Beta fonksiyonu, iki değişkenli olup $Re(m) > 0,\ Re(n) < 0$ olmak üzere

$$B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx \tag{3.1.3}$$

şeklinde tanımlanır (Podlubny, 1998).



Şekil 3.2. Beta fonksiyonunun grafiği

Ayrıca $B(m,n) = B(n,m)$ eşitliği sağlanır ve buradan Beta fonksiyonu simetri özelliğine sahip olmuş olur. İspat için Laplace dönüşümü yardımı ile Beta fonksiyonu ve Gamma fonksiyonu arasındaki ilişki,

$$B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} = B(n,m) \tag{3.1.4}$$

biçiminde ifade edilir.

Beta fonksiyonu için birkaç özellik şu şekilde verilebilir:

i) $B(m,n) = B(n,m)$,

ii) $B(m,n) = B(m+1,n) + B(m,n+1)$,

iii) $B(m,n+1) = \frac{n}{m}B(m+1,n) = \frac{m}{m+n}B(m,n)$,

(Podlubny, 1998).

3.1.3. Mittag-Leffler fonksiyonu

Kesirli mertebeden diferansiyel denklemler için oldukça önemli bir yere sahip olan diğer bir fonksiyon da Mittag-Leffler fonksiyonudur. İlk defa 1903 yılında Mittag-Leffler tarafından ifade edilmiş ve üstel fonksiyonların bir çeşit genelleştirilmesi olan bu fonksiyon, $\alpha > 0$ olmak üzere

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(ak+1)} \tag{3.1.5}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Laplace dönüşüm tekniği ile Humbert ve Agarwa (1953) tarafından tanımlanan iki parametreli Mittag-Leffler fonksiyonu ise aşağıdaki şekildedir;

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}. \tag{3.1.6}$$

İki parametreli Mittag-Leffler tanımı ile ilgili önemli bir örnek ise e^x fonksiyonudur. Çünkü (3.1.6) denkleminden de açıkça görülebileceği gibi

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = E_{(1,1)}(x)$$

şeklinde ifade edilebilir. Yine bu tanım kullanılarak parametrelerin bazı özel değerleri için farklı üstel fonksiyonlar bulununabilir. Örneğin,

$$E_{(1,2)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^z-1}{z}$$

$$E_{(1,3)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)!} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+2)!} = \frac{e^z-z-1}{z^2}$$

.

.

.

$$E_{(1,m)}(z) = \frac{1}{z^{m-1}}\left[e^z - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{z^k}{(k)!}\right]$$

şeklinde genelleştirilebilir. Bu örneklere ek olarak Mittag-Leffler fonksiyon tanımı ile bazı hiperbolik fonksiyonlarda tanımlanabilir.

Bu fonksiyonlar,

$$E_{(2,1)}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = coshz$$

ve

$$E_{(2,2)}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{sinhz}{z}$$

olarak elde edilebilir (Podlubny, 1998).

Mittag-Leffler fonksiyonuna ait birkaç farklı özellik aşağıda verilmiştir:

i) $|z| < 1$ olmak üzere Mittag-Leffler fonksiyonu ile,

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(t^{\alpha} z) dt = \frac{1}{z-1}$$

denkleminde verilen eşitlik sağlamaktadır.

ii) $|z| < 1$ olmak üzere $E_{\alpha}(z^{\alpha})$ Mittag-Leffler fonksiyonu için Laplace dönüşümü,

$$\int_0^{\infty} e^{-zt} E_{\alpha}(z^{\alpha}) dt = \frac{1}{z - z^{1-\alpha}}$$

denklemini ile tanımlanır.

iii) Her z kompleks sayısı için tanımlanan bir parametreli Mittag-Leffler fonksiyonu yakınsaktır (Weilbeer, 2005).

3.2. Kesirli Türev ve İntegral

Literatürde kesirli türeve ait birçok tanım mevcut olmakla birlikte bunların birçoğu Riemann-Liouville kesirli türevi ile ilişkilidir. Kesirli türev ve integral hakkında daha detaylı araştırma için Oldham (1974), Samko vd. (1993), Miller ve Ross (1993), Kilbas vd. (2006) , Diethelm (2010), Enkür (2012), Arslan (2013), Küçük (2014) ve Terzioğlu (2019) kaynaklarına bakılabilir. Bu türev ve integrallerin bazıları aşağıdaki verilen alt bölümlerde kısaca ele alınmıştır.

3.2.1. Grünwald-Letnikov kesirli türevi ve integrali

Bu kısımda Grünwald-Letnikov kesirli türev ve integralinin tanımı için gerekli bazı temel bilgilere kısaca yer verilmiştir. Öncelikle bu tanımlar için $y = f(t)$ sürekli fonksiyonunu ele alalım.

Bu durumda $f(t)$ fonksiyonunun birinci türevi,

$$f'(t) = \frac{df}{dt} = \lim_{h\to 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h} \tag{3.2.1}$$

şeklindedir. Eğer bu fonksiyona ikinci kez türev uygulanırsa,

$$f''(t) = \frac{d^2 f}{dt^2} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(t) - f'(t-h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2} \tag{3.2.2}$$

şeklinde ikinci türev elde edilir. Benzer işlemlerle üçüncü kez türev uygulanırsa bu iki denklem yardımı ile üçüncü mertebeden türev,

$$f'''(t) = \frac{d^3 f}{dt^3} = \lim_{h\to 0} \frac{f(t) - 3f(t-h) + 3f(t-2h) - f(t-3h)}{h^3} \tag{3.2.3}$$

şeklinde bulunur. Aynı işlemler devam ettirilirse $f(t)$ fonksiyonu için n. mertebeden türevine ait genel formül,

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^n f}{dt^n} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(t-kh) \tag{3.2.4}$$

olarak elde edilir. Burada $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!}$ biçiminde tanımlanan Binom katsayılarıdır. O halde bu tanımlar yardımı ile, $f^{(z)}(t)$ fonksiyonu $[a,t]$ kapalı aralığında sürekli ve $z = 1,2,3,...,n+1$ için türevleri var olsun. $n < p < n+1$ olmak şartıyla n bir tamsayı olsun. Bu durumda $f(t)$ fonksiyonu için $p > 0$ olmak üzere p. mertebeden Grünwald-Letnikov kesirli türevi ;

$${}_aD_t^p f(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+n+1)} \int_a^t (t-u)^{n-p} f^{(n+1)}(u)du \tag{3.2.5}$$

veya

$${}_aD_t^p f(t) = \lim_{x\to\infty} h^{-\alpha} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{p}{i} f(t-ih) \tag{3.2.6}$$

şeklinde tanımlanabilir (Podlubny, 1998).

Bu tez çalışmasında kullanılacak olan ayrıklaştırmalar için bir diğer önemli tanım yaklaşık Grünwald-Letnikov türev formülüdür. Bu formül (3.2.6) denkleminde gerekli düzenlemelerin yapılmasıyla,

$$D_t^\alpha f(t) = \sum_{i=0}^{n} q_i^\alpha f(t_{n-r}), \quad n = 1,2,3,\ldots \tag{3.2.7}$$

denklemi bulunur ki burada yeterince küçük h için $i = 1,2,3,\ldots$ olmak üzere $q_i^\alpha = \left(1 - \frac{1+\alpha}{i}\right) q_{i-1}^\alpha,\ q_0^\alpha = h^{-\alpha}$ dır (Dorciak, 1994).

$f(t)$ fonksiyonu için p katlı Grünwald-Letnikov kesirli integrali ise;

$$ {}_aD_t^{-p} f(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{p+k}}{\Gamma(p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+n+1)} \int_a^t (t-u)^{n+p} f^{(n+1)}(u) du \quad (3.2.8) $$

şeklinde ifade edilir (Podlubny, 1998). Grünwald-Letnikov kesirli türevine ait bazı özellikler aşağıdaki teoremler ile ifade edilebilir.

Teorem 3.2.1. ${}_aD_t^p$ kesirli mertebeden türevi ve $\frac{d^n}{dt^n}$ tamsayı mertebeden türevi ifade etsin. $f^l(a) = 0,\ (l = 0,1,2,...,n-1)$ olmak üzere kesirli mertebeden türev ile tamsayı mertebeden türev arasındaki bağıntı

$$ \frac{d^n}{dt^n}({}_aD_t^p f(t)) = {}_a D_t^p (\frac{d^n f(t)}{dt^n}) = ({}_aD_t^{p+n} f(t)). $$

şeklindedir (Podlubny, 1998).

Bu teorem ile kesirli mertebeden ile tamsayı mertebeden türev operatörlerinin değişmeli olduğunu söyleyebiliriz. Bunun yanında kesirli türev operatörlerinin kendi arasında da değişmeli olduğu bilinmektedir. Buna ait teorem de aşağıda ifade edilmiştir.

Teorem 3.2.2. $n < p < n+1,\ m < q < m+1$ olmak şartıyla n ve m birer tamsayı olsun. $f^l(a) = 0,\ (l = 0,1,2,...,r-1)$ ve $r = max(n,m)$ biçiminde ise p ve q kesirli türevlerin mertebeleri olmak üzere bu türevler arasındaki bağıntı

$$ {}_aD_t^q({}_aD_t^p f(t)) = {}_a D_t^p({}_aD_t^q f(t)) = ({}_aD_t^{p+q} f(t)). $$

şeklindedir (Podlubny, 1998).

3.2.2. Riemann-Liouville kesirli türevi ve integrali

Grünwald-Letnikov kesirli türev ve integralinin tanımında ifade edilen fonksiyona ait türevler ve genelleştirmeler burada da kullanımıştır. (3.2.4) denklemi kullanılarak, $f(t)$ fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığında integrallenebilir ve $n-1 < \alpha \leq n \quad (n \in \mathbb{N}^+)$ olmak üzere α mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi,

$$ D_*^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_\alpha^t \frac{f(u)}{(t-u)^{\alpha-n+1}} du \quad (3.2.9) $$

şeklinde tanımlanmıştır (Samko, 1993; Miller ve Ross, 1993; Podlubny, 1998).

$f(t)$ fonksiyonu $(0,\infty)$ aralığında parçalı sürekli ve integrallenebilir olsun. Bu durumda α mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali;

$$D_*^{-\alpha} f(t) = I^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} f(u) du, \;\; u > 0, \;\; \alpha > 0 \qquad (3.2.10)$$

şeklindedir (Podlubny, 1998).

Riemann-Liouville kesirli integral ve türevine ait birkaç özellik aşağıda verilmiştir:

i) Tanımlanan Riemann-Liouville kesirli integralinde $f(t)$ sürekli fonksiyon ise

$$D_*^{-\alpha}(D_*^{-\beta} f(t)) = D_*^{-\alpha-\beta} f(t)$$

eşitliği sağlanır. Bunu gerçekleştirmek için,

$D_*^{-\alpha}(D_*^{-\beta} f(t)) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-u)^{\beta-1} D_*^{-\alpha} f(u) du$

$= \frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-u)^{\beta-1} du \int_0^t (u-\rho)^{\alpha-1} f(\rho) d\rho$

$= \frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)} \int_0^t f(\rho) d\rho \int_\rho^t (t-u)^{\beta-1} (u-\rho)^{\alpha-1} du$

$= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t (t-\rho)^{\alpha+\beta-1} f(\rho) d\rho$

$= D_*^{-\alpha-\beta} f(t)$

işlemleri yapılır. Ayrıca burada α veβ parametrelerinin yeri değiştirilebilir ve bu özellik

$$D_*^{-\beta}(D_*^{-\alpha} f(t)) = D_*^{-\alpha-\beta} f(t)$$

şeklinde de yazılabilir.

ii) Riemann-Liouville kesirli türev ve integral tanımlarına göre

$$D_*^{\alpha}(D_*^{-\alpha} f(t)) = f(t)$$

eşitliğinin sağlanması bu tip kesirli türev için önemli bir özelliktir. Bu eşitliğin sağlanması demek aynı mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevinin, Riemann-Liouville kesirli integralinin bir sol tersi olduğunu göstermektedir. Bu özelliğin genel hali ise $f(t)$ sürekli fonksiyon ve $0 \leq \beta \leq \alpha$ olmak üzere

$$D_*^{\alpha}(D_*^{-\beta} f(t)) = D_*^{\alpha-\beta} f(t)$$

şeklindedir.

iii) Riemann-Liouville kesirli türevi için $f(t)$ integrallenebilir bir fonksiyon ve $0 \leq l-1 \leq \alpha \leq l$ ve $0 \leq l-1 \leq \beta \leq l$ olsun.

Bu durumda

$$D_*^{-\alpha}(D_*^{\beta}f(t)) = D_*^{\beta-\alpha}f(t) - \sum_{i=1}^{l}[D_*^{\beta-i}f(t)]_{k=*}\frac{(k-*)^{\alpha-i}}{\Gamma(\alpha-i+1)}$$

eşitliği sağlanır.

iv) D_*^{α} kesirli mertebeden Riemann-Liouville türevi ve $\frac{d^n}{dt^n}$ tamsayı mertebeden türevi ifade etsin. $f^l(a) = 0,\ (l = 0,1,2,...,n-1)$ olmak üzere Riemann-Liouville kesirli mertebeden türev ile tamsayı mertebeden türev arasındaki bağıntı

$$\frac{d^n}{dt^n}(D_*^{\alpha}f(t)) = D_*^{\alpha}(\frac{d^nf(t)}{dt^n}) = (D_*^{\alpha+n}f(t)).$$

şeklindedir (Podlubny, 1998).

3.2.3. Caputo kesirli türevi

Riemann-Liouville kesirli türev tanımı bir problemin fiziksel özelliklerinin belirtilmesinde oldukça kullanışlıdır. Ancak gelişen uygulamalar ve matematiksel modelleme alanlarının fazlalaşması formülize edilmiş bazı tip diferansiyel denklemlerde başlangıç koşullarının kullanılması gerekliliğini ortaya çıkarmıştır. Bu nedenle bazı matematiksel denklemlerde başlangıç koşullarını kullanmaya elverişli kesirli türev ifadelerine ihtiyaç vardır. Yani modellemelerdeki problemlerin fiziksel olarak yorumlanması başlangıç koşullarına bağlı olmalıdır. Bu sebeplede başlangıç koşullarını içeren kesirli türev ihtiyaç duyulmuş ve Caputo türevi tanımlanmıştır.

$f(t)$ fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığında integrallenebilir ve $n-1 < \alpha \leq n \quad (n \in \mathbb{N}^+)$ olmak üzere α mertebeden Caputo kesirli türevi,

$$ {}_cD_*^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{\alpha}^{t}\frac{f^{(n)}(u)}{(t-u)^{\alpha-n+1}}du \tag{3.2.11}$$

şeklinde tanımlanır (Podlubny, 1998).

Caputo ve Riemann-Liouville türevleri arasındaki ilişki ise şu şekilde ifade edilebilir:

$$ {}_cD_*^{\alpha}f(t) = D_*^{\alpha}(f(t) - T_{m-1}[f;t_0]).$$

Burada ifade edilen eşitlik ${}_cD_*^{\alpha}f(t) = D_*^{\alpha}(f(t) - f(t_0))$ eşitliğinden gelmektedir. Eşitlikteki $T_{m-1}[f;t_0]$ ifadesi f fonksiyonunun t_0 noktasındaki $(m-1)$. dereceden Taylor polinomudur ve

$$T_{m-1}[f;t_0](t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} f^{(k)}(t_0)$$

şeklinde tanımlanır. Bir diğer ilişki ise Grünwald-Letnikov ve Riemann-Liouville türevleri arasındadır ve uygun koşullarda

$$ {}_aD_t^p f(t) = D_*^\alpha f(t)$$

eşitliği sağlanmaktadır.

Kesirli mertebeden diferansiyel denlemlerde Caputo türevi kullanılırsa bu genellikle Cauchy tipi başlangıç koşulları içeren denklemler olur ve

$$ {}_cD_*^\alpha f(t) = f(t, y(t)),\ y(t_0) = y_0$$

şeklinde ifade edilir. Eğer bu tarz denklemlerde Riemann-Liouville kesirli türevi kullanlırsa yine bir başlangıç koşulu elde edilebilir ama bunun fiziksel olarak bir anlamı yoktur. Bu sebeple de matematiksel modelleme uygulamalarında kullanımı tercih edilmemektedir (Ongun vd., 2013; Garrappa vd., 2019).

3.2.4. Kesirli türevlere ait birkaç temel özellik

Bu alt bölümde kesirli türevlere ait bazı temel özellikler ifade edilmiştir (Podlubny,1998; Bologna, 2004).

1) Birleşme Özelliği

$k, l \in \mathbb{R}$ ve $x, y \in \mathbb{N}$ olmak üzere

i) $n = 0, 1, ..., x-1$ için $f^{(n)}(a) = 0$ olduğunda

$$\frac{d^x}{dt^x}({}_aD_t^l f(t)) = {}_a D_t^l(\frac{d^x f(t)}{dt^x}) = {}_a D_t^{l+x} f(t).$$

ii) $k < 0$ ve l keyfi seçilmiş olmak üzere

$$ {}_aD_t^l({}_aD_t^k f(t)) = {}_a D_t^{k+l} f(t).$$

iii) $k > 0$ l keyfi bir sayı olmak üzere $0 \leq y < k < y+1$, $0 \leq x < l < x+1$ ve $max(x, y) = q$ olsun. $n = 0, 1, ..., q-1$ için $f^{(n)}(a) = 0$ olduğunda

$$ {}_aD_t^l({}_aD_t^k f(t)) = {}_a D_t^k({}_aD_t^l f(t)) = {}_a D_t^{k+l} f(t).$$

2) Lineerlik Özelliği

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$ {}_aD_t^p(\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha \ {}_aD_t^p f(t) + \beta \ {}_aD_t^p g(t) $$

kesirli türevinin lineerlik özelliği vardır.

İspat: Grünwald-Letnikov kesirli türevi ele alınırsa;

$$ {}_aD_t^p(\alpha f(t) + \beta g(t)) = \lim_{x\to\infty} h^{-\alpha} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{p}{i} ((\alpha f(t-ih) + \beta g(t-ih))) $$

$$ = \alpha \lim_{x\to\infty} h^{-\alpha} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{p}{i} f(t-ih) $$

$$ + \beta \lim_{x\to\infty} h^{-\alpha} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{p}{i} g(t-ih) $$

$$ = \alpha \ {}_aD_t^p f(t) + \beta \ {}_aD_t^p g(t). $$

Benzer işlemllerle aynı ispat Riemann-Liouville kesirli türevi ile de yapılabilir (Podlubny, 1998).

3) Leibnitz Kuralı

Grünwald-Letnikov kesirli türevi için Leibnitz kuralı, $f(t)$ sürekli bir fonksiyon ve $g(t)$ aynı aralıkta türevlenebilir fonksiyon olmak üzere $f(t)g(t)$ çarpımı için kesirli türev

$$ {}_aD_t^p(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} C(p,k) {}_aD_t^{p-k} f(t) {}_aD_t^k g(t). $$

şeklinde ifade edilir (Bologna, 2004).

4) Ardışık Türev Özelliği

${}_aD_t^p$ Grünwald-Letnikov kesirli türevi ve $p = p_1 + p_2 + ... + p_n$ biçiminde olsun. Bu durumda ardışık türev özelliği

$$ {}_aD_t^p f(t) = {}_a D_t^{(p_1+p_2+...+p_n)} f(t) = {}_a D_t^{(p_1)} {}_aD_t^{(p_2)} ... {}_aD_t^{(p_n)} f(t). $$

şeklindedir (Podlubny, 1998).

3.2.5. Kesirli mertebeden türevlerin laplace ve ters laplace dönüşümü

Lineer kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin analitik çözümünü elde etmek için en etkili çözüm yöntemi Laplace dönüşümüdür. Reel sayılarda tanımlı adi diferansiyel denklemleri kompleks düzlemdeki cebirsel denklemlere dönüşümü için yine Laplace dönüşümü kullanılabilir ve çözümler daha rahat hesaplanabilir. Sonrasında elde edilen cebirsel denklem çözümünün ters Laplace dönüşümü ile adi diferansiyel denkleme ait çözüm elde edilebilir.

Ayrıca n. mertebeden bir lineer diferansiyel denklemin eşit olduğu fonksiyon sürekli olarak bulunmuş ise burada diferansiyel denklemin çözümü yapılabilir. Ancak bu fonksiyon süreksiz olarak bulunmuş ise sadece Laplace dönüşümü ile çözülür. Bu sebeplerden dolayı dağılımlı mertebeden diferansiyel denklemlerin analitik çözümü için de Laplace dönüşümü kullanılması gerekmektedir. Bu sebeple bu bölümde Laplace ve ters Laplace dönüşümüne ait temel bilgiler verilmiştir.

f fonksiyonu üstel tipte bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonunun Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = F(s) \tag{3.2.12}$$

biçimindedir. Bu tanımda ki F fonksiyonunun ters Laplace dönüşümü ise

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) \tag{3.2.13}$$

şeklindedir.

Kesirli mertebeden türevlerde kullanılacak olan Laplace dönüşümüne ait bazı özellikler aşağıda ifade edilmiştir. Burada Caputo, Riemann-Liouville ve Grünwald-Letnikov kesirli türevleri için bazı özellikler verilmiştir.

1) ${}_aD_t^p$ Grünwald-Letnikov kesirli türevi olmak üzere
$\mathcal{L}\{{}_aD_t^p f(t)\} = s^p F(s) - \sum_{k=0}^{p-1} s^{(p-k-1)} f^{(k)}(0), \quad p \in \mathbb{N}$ eşitliği sağlanır.

2) $\mathcal{L}\{D_*^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{p-1} s^{(p-k-1)} D^{(p-k+\alpha)} f(0), \quad p-1 < \alpha \leq p$ eşitliği D_*^α Riemann-Liouville kesirli türevi için gerçekleşir.

3) ${}_cD_*^\alpha$ Caputo kesirli türevi olmak üzere

$\mathcal{L}\{{}_cD_*^{\alpha} f(t)\} = s^{\alpha}F(s) - \sum_{k=0}^{p-1} s^{(\alpha-k-1)} f(0),\ \ p-1 < \alpha \leq p$ eşitliği sağlanır.

4) $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^p-a}\} = \sum_{i=1}^{q} a^{i-1} E_t(ip-1, a^q) = e(t),\ \ p = 1/q.$

5) $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s-a}\} = E_t(0,a) = e^{at}.$

6) $\mathcal{L}^{-1}\{F(s).G(s)\} = f(s) * g(s).$

(Miller ve Ross, 1993)

3.3. Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemler

Bu alt bölümde verilecek olan bilgilerin daha detaylı araştırılması istenirse Podlubny (1998), Benghorbal (2004) ve Weilbeer (2005) kaynaklarına bakılabilir.

En basit tabir ile bir veya daha fazla değişkene ait kesirli türevleri içeren diferansiyel denklemlere kesirli mertebeden diferansiyel denklemler denir. Kesirli mertebeden diferansiyel denklemler; adi kesirli diferansiyel denklemler ve kısmi kesirli diferansiyel denklemler olarak iki gruba ayrılır. Bir diğer gruplandırma ise lineer yada lineer olmama durumuna göredir.

Genel formu,

$$a_n(t)D^{a_n}y(t) + a_{n-1}(t)D^{a_{n-1}}y(t) + \ldots + a_0(t)y(t) = f(t)$$

şeklindeki kesirli mertebeden diferansiyel denklemlere lineer kesirli mertebeden diferansiyel denklem denir. Buradaki D^{a_n} kesirli diferansiyel operatörüdür ve lineerdir (Podlubny, 1998; Benghorbal, 2004). Bu bilgiler doğrultusunda, kesirli mertebeden diferansiyel denklemler farklı şekillerde de sınıflandırılabilir. Bunlardan ilki adi veya kısmi diferansiyel denklem sınıflandırmasıdır.

i) Kesirli mertebeden adi diferansiyel denklemler,

$D^{1/4}y(t) + 5y^3(t) = 3,$ Homojen olmayan kesirli mertebeden adi diferansiyel denklem

$D^{3/2}y(x) + 4D^{1/2}y(x) = 0,$ Homojen kesirli mertebeden adi diferansiyel denklem

ii) Kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemler,

$D^{1/2}y(u,t) = a^3\frac{\partial y(u,t)}{\partial u},$ Homojen olmayan kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklem

$D^{2/3}y(u,t) = 0,$ Homojen olmayan kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklem

şeklinde örnekler verilebilir. Bir diğer sınıflandırma ise tanımda da ifade edildiği gibi lineer veya lineer olmama şeklindedir. Lineer kesirli diferansiyel denklemlerde iki

özellik dikkat çekmektedir:

1) Bağımlı değişken olan y ve buna ait kesirli türevleri birinci dereceden olmalıdır.

2) Her terimin katsayısı yalnız t bağımsız değişkenine bağlı olmalıdır (Benghorbal, 2004).

Bu bilgiler doğrultusunda örnek olarak

$D^{2/5}y(t)+y(t)=sint$ Homojen olmayan lineer kesirli diferansiyel denklem,

$y(t)D^{1/3}y(t)+D^{1/2}y(t)=0$ Homojen Lineer olmayan kesirli diferansiyel denklem, verilebilir.

Kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerde en yüksek mertebeden türeve denklemin mertebesi denir. Örnek verilecek olursa;

$$y^2(t)D^{3/2}y(t)+D^{1/2}y(t)=3t-2$$

denklemi 3/2 inci mertebeden lineer olmayan adi kesirli diferansiyel denklemdir (Benghorbal, 2004).

Tanım 3.3.1. $0<p_1<p_2<...<p_n$ ve başlangıç koşulları, $y^{(m)}(a)=y_m$, $m=1,2,...[p_n]-1$ olsun. Bu halde

$$D^{p_n}y(t)+\sum_{j=1}^{n-1}a_{n-j}(t)D^{p_{n-i}}y(t)+a_0(t)y(t)=f(t) \tag{3.3.1}$$

şeklindeki kesirli diferansiyel denklemin çözümü başlangıç değer problemi olarak isimlendirilir (Benghorbal, 2004). Tanımlanan bu başlangıç değer problemi dikkate alındığında aşağıdaki soruların cevapları önemlidir.

1) Başlangıç değer probleminin bir çözümü var mıdır ?

2) Eğer başlangıç değer probleminin çözümü varsa bu çözüm tek bir tane midir ?

Bu sorular için genel kesirli diferansiyel denklemleri ve koşullarını

$$D^{p_n}y(t)=f(t,y),\ y^{(m)}(a)=y_m,\ m=1,2,...[p_n]-1. \tag{3.3.2}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda çözümün varlığı ve tekliği ile ilgili aşağıdaki iki teorem ifade edilebilir. Bu teoremlerin ispatlarına burada yer verilmeyecektir.

Teorem 3.3.1. Eğer $f(t)\in L_1(a,b)$, ve $a_{n-j},\ j=1,2,3,...,n$, $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli fonksiyonlar ise denklem (3.3.1) ve (3.3.2) ile ifade edilen başlangıç-değer probleminin tek bir $y(t)\in L_1(a,b)$ çözümü vardır (Benghorbal, 2004).

Teorem 3.3.2. K, R^2 nin bir alt kümesi ve $f(t,y)$ fonksiyonuda y değişkenine göre Lipschitz koşulunu yani

$$|f(t,y)-f(t,z)| \leq A|y-z| : \ |f(t,y)| \leq M < \infty, \ \forall (t,y) \in K \tag{3.3.3}$$

eşitsizliğini sağlayan sürekli bir fonksiyon olsun. Bu halde $H \subset K$ bölgesinde (3.3.2) başlangıç değer probleminin bir tek ve sürekli $y(t)$ çözümü vardır (Benghorbal, 2004).

3.3.1. Tek terimli ve çok terimli kesirli diferansiyel denklemler

Son dönemlerde kesirli diferansiyel denklemlerin ve integral operatörlerinin matematiksel modellemede kullanımı oldukça ilgi gören bir alan olmuştur. Standart modeller için farklı kesirli mertebeden denklemler önerilmiş ve bu denklemlerin nümerik yöntemler ile çözümü ve çözüme ait yorumlar elde edilmeye çalışılmıştır.
Literatürde yer alan çoğu çalışmada tek terimli denklemler kullanılmıştır. Ancak çok terimli denklemlerin tanımı ve dağılımlı mertebeden denklemlerin çözümünde kullanılması bu alana ilgiyi arttırmıştır. Öncelikle bu bölümde tek terimli kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin genel formu verilecek ve sonrasında bu tip denklemlerin nümerik çözümü ile ilgili yapılan çalışmalar hakkında bilgi verilecektir. Daha sonra ise dağılımlı mertebeden diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerinde oldukça fazla kullanılan çok terimli kesirli diferansiyel denklemlerin gelişimi, genel formu, analitik çözümü ve nümerik çözümü ile ilgili çalışma ve bilgilere yer verilecektir.
Tek terimli kesirli diferansiyel denklemlerin genel formu;

$$D^{\alpha}y(t) = f(t,y(t)), \quad 0 < \alpha < m, \quad y(k)(0) = y_0(k), \quad k = 0,1,2,..,m-1 \tag{3.3.4}$$

şeklinde ifade edilir. $f(t,y(t))$ fonksiyonu birçok alanda lineer olarak yani $f(t,y(t)) = \gamma y(t) + g(t)$ biçimindedir (Connolly, 2004). Bu tip denklemlerin nümerik çözümleri ile ilgili çalışmalara bakıldığında ise Diethelm (1997) çalışmasında temel olarak kapalı yamuk kareleştirme metotunu (Implicit trapezoidal quadrature formula) kullanmıştır.

Bir diğer araştırmada ise Diethelm vd. (2002c) çalışmasında Adams Moulton yöntemi ile elde ettikleri algoritma yardımıyla çözüme ulaşmışlardır. Diethelm ve Luchko (2004) yayınında ise çözüm için Mittag-Leffler fonksiyonunu kullanmışlardır.

Çok terimli kesirli diferansiyel denklemlerin, araştırmalarda verilen modelin fiziksel davranışını bilme ve yorumlama amacı ile kullanılması bu tip denklemleri oldukça önemli bir konuma getirmektedir. Bu özelliklere sahip en önemli iki tanesi Bagley Torvik denklemi (Bagley ve Torvik,1984) ve Basset denklemi (Mainardi, 1997) olarak dikkat çekmektedir. Bu tip denklemlerin genel hali ise,

$$\sum_{i=0}^{n} b_i D^{\alpha_i} y(t) = g(t), \quad b_i \in \mathbb{R}, \quad \alpha_i \geq 0 \tag{3.3.5}$$

şeklinde ifade edileblir (Edwards,2002).
Miller ve Ross (1993) çalışmalarında bu tip çok terimli kesirli diferansiyel denklemlerinin analitik çözümünün hesaplanmasında kullanılacak formu,

$$[D^{nv} + \alpha_1 D^{(n-1)v} + \ldots + \alpha_{n-1} D^{v} + \alpha_n D^{0}] y(t) =, \quad v = 1/q, \quad q \in \mathbb{N} \tag{3.3.6}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Diethelm ve Ford (2001; 2002c) çalışmalarında ise bu tip denklemlerin nümerik çözümleri için algoritma geliştirmişlerdir. Hem lineer hem de lineer olmayan kesirli mertebe sistemler için bir çözüm ortaya koymuşlardır.

Diethelm ve Luchko (2004) de ise lineer çok terimli denklemlerin yaklaşık çözümleri için bir algoritma geliştirilmiştir. Bu algoritma için de Lubich (1986) kaynağından faydalanmışlardır. Ancak bu metotta ağırlık fonksiyonunun hesabı için oldukça fazla bilgisayar hesabı gerekmektedir.

Çok terimli kesirli diferansiyel denklem çözümü için denklem önce tek terimli hale getirilip, sonrasında tek terimli kısımda verilen algoritmalardan biri veya o kısımda kullanılabilecek farklı bir çözüm yöntemi ile sonuca ulaşılabilir (Connolly, 2004).

4. AÇIK VE KAPALI SAYISAL YAKLAŞIM YÖNTEMLERİ VE KARARLILIK ANALİZİ

Sayısal yaklaşım yöntemlerine başlamadan önce bu bölümde verilecek tanımlara ait kısa bilgiler aşağıda ifade edilmiştir. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon ve $y_0 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y),\ y(0) = y_0$$

başlangıç değer problemini ele alalım.

Sürekli formda verilen bu tipteki diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri araştırılacaktır. Sayısal çözümler aranırken, diferansiyel denklem ayrık hale getirilecektir. Bu sebeple aşağıdaki tanım ve kavramlar ayrıklaştırma analizi için oldukça gereklidir.

Tanım 4.1. $y(t)$ bağımlı ve t bağımsız değişken olarak kabul edilirse t ve $y(t)$ nin farklı mertebeden ileri farklarını içeren denklem türlerine fark denklemleri denir (Oturanç vd., 2012).

Tanım 4.2. $[0,\infty)$ aralığında $t_n = nh,\ n = 0,1,2,3,...$ ve verilen başlangıç değer probleminde t_n noktasındaki $y(t_n)$ çözümünü bir yaklaşık çözümü y_n olmak üzere

$$\phi(h, y_n, y_{n+1}, y_{n+2}, ..., y_{n+m}) = 0,\ m \in \mathbb{N}$$

fark denkleminin başlangıç koşullarının uygun seçilmesiyle bu koşullar altındaki çözümü $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ dir (Kama, 2009).

Tanımlanan bu fark denkleminde t_{n+m} zamanındaki y_{n+m} yaklaşımını bulmak için $y_{n+i},\ i = 0,1,2,...,m$ iterasyonlarının yapılması gereklidir.

i) Eğer burada $m = 1$ alınırsa kullanılacak sayısal metoda tek adımlı metot, $m > 1$ alınırsa çok adımlı veya $m-$ adımlı metot denir. Çok adımlı metot ile ilgili daha detaylı bilgi için Galeone ve Garrappa (2006) ve Garrappa (2009) kaynaklarına bakılabilir.

ii) Eğer fark denkleminde ifade edilen y_{n+m} ifadesi

$y_{n+m} = \phi(h, y_n, y_{n+1}, y_{n+2}, ..., y_{n+m-1}) = 0$ şeklinde ise kullanılacak metoda açık (explicit) formda, diğer durumlarda ise kapalı (implicit) formda denir (Kama, 2009).

4.1. Euler Yöntemi

Bu sayısal yaklaşım yöntemi aslında Runge-Kutta metotlarından biri olup sıkça karşılaşılan bir yöntemdir. Tanımlanacak bütün yöntemler için $u^{'} = f(t,u),\ 0 < t \leq k,\ u(0) = u_0$ başlangıç değer problemini ele alalım. Burada $f(t,u),\ \{0 < t \leq k\}$ bölgesinde tanımlı reel değerli bir fonksiyon ve u_0 bir reel sayıdır.

$[0,k]$ aralığında $\{t_n = nh,\ n = 0,1,...,N;\ h = k/N\}$ ifadesi ve başlangıç değer problemi ile $t = t_i$ için elde edilen türev;

$$u^{'}(t_n) = f(t_n, u(t_n)) \tag{4.1.1}$$

biçiminde olur. (4.1.1) denkleminde verilen türev ifadesi sayısal türev formülü ile değiştirilirse,

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{h} = f(t_n, u_n) - \frac{h}{2}u^{''}(\delta_n),\ \delta_n \in (t_n, t_{n+1}) \tag{4.1.2}$$

eşitliği elde edilir. Kolaylık olması açısından $u(t_n) = u_n$ olarak ifade edilecektir. (4.1.2) denkleminde kalan terim ihmal edilirse,

$$u_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n),\ n = 0,1,...,N-1,\ u(0) = u_0 \tag{4.1.3}$$

nümerik şeması bulunur. Elde edilen bu formüle de Açık Euler metodu (İleri-Euler) denir.

Ek olarak tanımlanan bu metodun hatası ile ilgili bilgi vermek istenirse öncelikle aşağıdaki iki şartın sağlandığını varsayalım:
i) $f(t,u)$ fonksiyonu t'ye göre L sabitiyle Lipschitz şartını sağlıyor,
ii) $|u^{''}| \leq M < \infty,\ 0 \leq t \leq k.$

Bu durumda $p_n = y_n - u_n,\ (n = 0,1,...,N)$ değerine elde edilen yaklaşık çözümün hatası denir. Elde edilen bu hata için aşağıdaki teorem ifade edilebilir (Amirali ve Amirali, 2018).

Teorem 4.1. Açık Euler motodunun hatası p_n için,

$$|p_n| = |y_n - u_n| \leq \frac{hM}{2L}(e^{Lt_n} - 1), \ \ (n = 0, 1, ..., N),$$

(Amirali ve Amirali, 2018).

İspat: $t_n \leq k$ ve verilen teorem ile Açık Euler metodunun global hatasının $O(h)$ olduğu görülmektedir. Elde edilen (4.1.2) ve (4.1.3) denklemlerinden hata için,

$$p_{n+1} = p_n + h[f(t_n, y_n) - f(t_n, u_n)] + z_n, \ p_0 = 0, \ n = 0, 1, ..., N \tag{4.1.4}$$

problemi bulunur. Burada $z_n = -\frac{h}{2}u''(\delta_n)$ ve $ii)$ şartına göre $|z_n| \leq Mh^2/2$ olduğu görülür. Lipschitz şartı ve (4.1.4) denklemi dikkate alınırsa,

$$|p_{n+1}| \leq (1 + hL)|p_n| + |z_n|$$

eşitsizliği bulunur. Buradan

$$|p_n| \leq (1 + hL)^n |p_0| + \sum_{i=0}^{n-1} |z_i|(1 + hL)^{n-i-1}$$

bulunur. $1 + v \leq e^v, \ (v \geq 0)$ eşitsiziği yardımı ile

$$(1 + hL)^i \leq e^{Lih} = e^{Lt_i}$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade ve $p_0 = 0$ olduğundan

$$|p_n| = |y_n - u_n| \leq \frac{hM}{2L}(e^{Lt_n} - 1), \ \ (n = 0, 1, ..., N).$$

eşitsizliği bulunur (Amirali ve Amirali, 2018).

Bulunan bu Açık Euler yöntemi kullanım açısından oldukça pratik olmakla birlikte u_n değerleri de kolaca bulunabilmektedir. Ancak sayısal yöntemlerde olması gereken en önemli özelliklerden biri, bir sayısal yaklaşım yönteminin kararlığa sahip olmalası gerektiğidir. Bir başka ifadeyle oluşabilecek veri yada yuvarlama hatalarında yaklaşık çözüm kesin çözüme uzak olmamalıdır. Bu açıdan düşünülürse Kapalı tipli Euler yönteminin daha avantajlı olacağı ilerleyen açıklamalarda yer alacaktır.
(4.1.1) denklemi ile verilen

$$u'(t_n) = f(t_n, u(t_n))$$

eşitliğinde türev değerleri geri fark türev formülü ile değiştirilirse,

$$\frac{u_n - u_{n-1}}{h} = f(t_n, u_n) + \frac{h}{2}u''(\delta_n),$$

eşitliği bulunur ve bu eşitlik ile

$$u_n = u_{n-1} + hf(t_n, u_n),\ n = 1,2,...,N,\ u(0) = u_0 \tag{4.1.5}$$

şeklinde nümerik şema elde edilir. Bu yönteme de Kapalı Euler metodu (Geri-Euler) denir. Nümerik yöntemlerin kararlılığı açısından ise Kapalı Euler yöntemi, Açık Euler metotuna göre daha güvenlidir (Amirali ve Amirali, 2018).
Bir başka bakış açısı için (4.1.1) başlangıç değer problemi $[t_n, t_{n+1}]$ aralığında integrallenirse,

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{h} = \frac{1}{h}\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, u(t))dt$$

denklemi bulunur. Burada eşitliğin sağ tarafında yer alan integrale sayısal integral alma yöntemlerinden biri olan Yamuk kuralı uygulanırsa,

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{h} = \frac{1}{2}[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1})] - \frac{h^2}{12}\frac{d^2}{dx^2}f(\delta_n, u(\delta_n))$$

denklemi bulunur. Bu eşitlik ile başlangıç değer problemine karşılık gelen Yamuk metodu,

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1})],\ n = 0,1,...,N-1,\ u(0) = u_0, \tag{4.1.6}$$

biçiminde bulunur. Yamuk metodu da kapalı bir sayısal yaklaşım yöntemidir. Bu metodun açık metota göre avantajları şunlardır:

i) Bu metot global $O(h^2)$ kesinliğine sahip olup, açık Euler metotta ise bu kesinlik $O(h)$ dır,

ii) Metotun kararlılık alanı açık metoda göre daha geniştir.

Kararlılıkların karşılaştırılması için aşağıdaki örneği verebiliriz.

Örnek 4.1. $u'(x) + \lambda u(x) = 0,\ x > 0,\ \lambda > 0$ ve $u_0 = a$ problemi için Açık Euler, Yamuk ve Kapalı Euler metodlarının kararlılığını inceleyelim.

Örnekte verilen başlangıç değer probleminin analitik çözümü $u(x) = ae^{-\lambda x},\ x > 0$ şeklindedir ve $|u(x)| \leq |a|,\ x > 0$ olduğundan tüm $x > 0$ değerleri için başlangıç şartına göre problemde verilen denklem asimptotik kararlıdır. Burada başlangıç değeri a yerine yaklaşık a^* değerinin olduğunu düşünelim ve $\delta_0 = a - a^*$ olsun.

İlk olarak Açık Euler metotunu ele alırsak, başlangıç değeri a^* olan Euler şemasının çözümü u_n^* olsun. Bu halde $w_n = u_n - u_n^*$ hatası,

$$w_{n+1} = w_n - h\lambda w_n,\ n = 0, 1, ...,\ w_0 = \delta_0$$

probleminin çözümü olmalıdır. Buradan $w_n = (1 - h\lambda)^n \delta_0$ olarak elde edilir. Burada hatanın artmaması için $|1 - h\lambda| \leq 1$ veya bir diğer ifadeyle $h \leq 2/\lambda$ şartının sağlanması gerekmektedir. Bu durumda Açık Euler yöntemi şarta bağlı kararlı olup, yeteri kadar küçük olmayan h değerleri için kararsızdır.
İkinci olarak Yamuk metodu için hata,

$$w_{n+1} = w_n - h/2\lambda(w_n + w_{n+1}),\ n = 0, 1, ...,\ w_0 = \delta_0$$

denkleminin çözümü ile $w_n = (\frac{1-\lambda h/2}{1+\lambda h/2})^n \delta_0$ şeklinde bulunur. Burada $\lambda > 0$ olduğundan $|\frac{1-\lambda h/2}{1+\lambda h/2}| < 1$ olacaktır yani Yamuk metodu mutlak kararlı olacaktır.
Son olarak Kapalı Euler metodunun hatası için;

$$w_n = w_{n-1} - h\lambda w_n,\ n = 0, 1, ...,\ w_0 = \delta_0$$

denklemi çözülmelidir. Bu denklemin çözümü ile $w_n = \frac{1}{1+\lambda h} w_{n-1} = (\frac{1}{1+\lambda h})^n w_0$ şeklinde bulunur. Buradan $|w_n| = (\frac{1}{1+\lambda h})^n |\delta_0| \leq |\delta_0|$ olur. Dolayısıyla Kapalı metot için çözüm mutlak kararlıdır (Amirali ve Amirali, 2018).

4.2. Runge-Kutta Metotları

Runge-Kutta metodunda amaç daha yüksek kesinliğe sahip yaklaşım formülleri geliştirmektir. Çünkü gösterdiğimiz üzere Euler metodunda kesinlik düşük olup $O(h)$ biçimindedir. Bu metot için yine $u' = f(t,u),\ 0 < t \leq k,\ u(0) = u_0$ başlangıç değer problemini ele alalım. Burada $\{t_n = nh,\ n = 0, 1, ..., N;\ h = k/N\}$ yaklaşımı için aşağıdaki

fark problemini verelim:

$$l_h u_n = \frac{u_{n+1} - u_n}{h} - (P_1 K_1 + P_2 K_2 + ... P_s K_s) = 0,\ n = 0, 1, ..., N-1,\ u(0) = u_0 \quad (4.2.1)$$

ve burada

$$K_1 = f(t_n, u_n),\ K_2 = f(t_n + a_1 h, u_n + a_1 h K_1), ...,\ K_s = f(t_n + a_{s-1} h, u_n + a_{s-1} h K_{s-1}), \quad (4.2.2)$$

ve $P_1, ..., P_s;\ a_1, ..., a_{s-1}$ parametrelerdir. Bu parametrelerin seçimi oluşturulacak fark şemasında istenen kesinliğe göre değişmektedir. Özel olarak, eğer (4.2.1) denkleminde $s = 1,\ P_1 = 1$ ise verilen şema Euler şemasına dönüşür ve uygun yaklaşımın hata mertebesi $O(h)$ şeklinde olur (Amirali ve Amirali, 2018). Eğer burada $s = 2$ durumu ele alınırsa bu parametrelere bağlı yaklaşım hatasının mertebesinin $O(h^2)$ olduğunu göstermek istenirse $f(t,u)$ fonksiyonunun her iki değişkene göre de kısmi türeve sahip ve sürekli olduğunu kabul edilir. O halde başlangıç değer probleminin çözümü için Taylor açılımı yapılırsa,

$$u(t_{n+1}) = u(t_n) + h u'(t_n) + \frac{h^2}{2} u''(t_n) + \frac{h^3}{6} u'''(t_n^*),\ t_n^* \in (t_n, t_{n+1}) \quad (4.2.3)$$

olur. Bu açılım ve (4.2.1) denklemi birlikte ele alınırsa,

$$l_h u_n = \frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{h} - (P_1 K_1 + P_2 K_2) \quad (4.2.4)$$

$$= u'(t_n) + \frac{h}{2} u''(t_n) + O(h^2) - P_1 f(t_n, u(t_n)) - P_2 f(t_n + a_1 h, u(t_n) + a_1 h f(t_n, u(t_n)))$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$f(t_n + a_1 h, u(t_n) + a_1 h f(t_n, u(t_n))) = f(t_n, u(t_n)) + a_1 h \frac{\partial f}{\partial t}(t_n, u(t_n))$$

$$+ a_1 h f(t_n, u(t_n)) \frac{\partial f}{\partial u}(t_n, u(t_n)) + O(h^2)$$

ve

$$u''(t_n) = \frac{\partial f}{\partial t}(t_n, u(t_n) + \frac{\partial f}{\partial u}(t_n, u(t_n)) u'(t_n)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t}(t_n, u(t_n) + f(t_n, u(t_n)) \frac{\partial f}{\partial u}(t_n, u(t_n))$$

olduğundan (4.2.4) denklemi ile

$$l_h u_n = u^{'}(t_n)(P_1+P_2)f(t_n,u(t_n)) + hu^{''}(t_n)(1/2-a_1P_2) + O(h^2) \tag{4.2.5}$$

eşitliği elde edilir. (4.2.5) yardımıyla $s=2$ için $P_1+P_2=1,\ a_1P_2=1/2$ koşulları altında (4.2.1) denkleminde verilen yaklaşım şemasının hata mertebesinin $O(h^2)$ olduğu görülmektedir.

Burada bulunan $P_1+P_2=1,\ a_1P_2=1/2$ koşullarının sonsuz çözümü vardır ancak bazı özel değerleri için yeni metotlar verilebilir. İlk olarak $a_1=1,\ P_1=P_2=1/2$ alınırsa bu durumda (4.2.1) ile tanımlanan şema aşağıdaki gibi olur:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}[f(t_n,u_n) + f(t_n+h, u_n+hf(t_n,u_n))],\ n=0,1,...,N-1,\ u(0)=u_0. \tag{4.2.6}$$

Elde edilen (4.2.6) denklemine Düzeltilmiş (Modified) Euler metodu denir. Bir diğer seçim işleminde $a_1=1/2,\ P_1=0,\ P_2=1$ olarak seçilirse Orta nokta (Midpoint) metodu elde edilir bu metotta şema ise,

$$u_{n+1} = u_n + hf(t_n+h/2, u_n+h/2f(t_n,u_n)),\ n=0,1,...,N-1,\ u(0)=u_0. \tag{4.2.7}$$

biçiminde bulunur. Son olarak $a_1=2/3,\ P_1=1/4,\ P_2=3/4$ seçilmesi ile elde edilen şema,

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{4}[f(t_n,u_n) + 3f(t_n+2/3h, u_n+2/3hf(t_n,u_n))],\ n=0,1,...,N-1,\ u(0)=u_0. \tag{4.2.8}$$

şeklindedir. Bu elde edilen şemanın literatürde kullanılan ismi ise Heun metodudur. İfade edilen bu metodların her biri ikinci dereceden kesinliğe ve $O(h^2)$ yaklaşım hatalarına sahiptir. Benzer yolla daha yüksek kesinliğe sahip Runge-Kutta metotları oluşturulabilir. Bu tez çalışmasında da $s=4$ için 4. mertebeden Runge-Kutta formülü kullanılmıştır. Bu formüle ait şema ise aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$u(0)=u_0,\ K_1=f(t_n,u_n),\ K_2=f(t_n+h/4, u_n+h/4K_1),$$

$$K_3=f(t_n+h/2, u_n+h/2K_2),\ K_4=f(t_n+h, u_n+hK_1-2hK_2+2hK_3)$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{6}(K_1 + 4K_3 + K_4),\ n = 0, 1, ..., N-1.$$

Runge-Kutta metodunda gerekli şartlar altında hatanın mertebesinin $O(h^4)$ şeklinde olduğu görülmektedir (Amirali ve Amirali, 2018).

Örnek 4.2. $u'(x) = \frac{e^x}{2u}$ ve $u_0 = 1$ problemi için Açık Euler, Kapalı Euler, Düzeltilmiş Euler ve Açık Runge-Kutta yöntemleri yardımıyla $u(0.5)$ değerini bulup analitik çözüm ile karşılaştıralım.

Bu durumda ilk olarak Açık Euler yöntemi ile çözüm yapılırsa çözüm 1.2500 olarak elde edilmektedir. Kapalı Euler yönteminde ise çözüm 1.3137 şeklindedir. Düzeltilmiş Euler yöntemi kullanıldığında çözüm 1.2898 olarak bulunur. Son olarak 4. mertebeden Runge-Kutta metodu kullanılırsa çözüm 1.2840 şeklindedir.

Denklemin analitik çözümü $u(x) = e^{x/2}$ olup $u(0.5) = 1.2840$ olduğu görülmektedir. Bulunan çözümler ve analitik çözüm karşılaştırıldığında en iyi sonucun beklenildiği üzere 4. mertebeden Runge-Kutta formülü ile bulunduğu görülmüştür.

4.3. Theta Metodu

Bir bakıma Euler yöntemlerinin genel hali olan Theta metodu için yine $\theta \in [0,1]$, $u' = f(t,u),\ 0 < t \leq k,\ u(0) = u_0$ başlangıç değer problemini ele alırsak tek adımlı Theta metodu,

$$u_{n+1} = u_n + h[f((1-\theta)u_n + \theta u_{n+1})],\ n = 0, 1, ..., N-1,\ u(0) = u_0 \tag{4.3.1}$$

şeklinde olup iki adımlı Theta metodu ise

$$u_{n+1} = u_n + h[(1-\theta)f(u_n) + \theta f(u_{n+1})],\ n = 0, 1, ..., N-1,\ u(0) = u_0 \tag{4.3.2}$$

biçiminde tanımlanır. Burada görüldüğü üzere θ' nın bazı özel durumları için önceki bölümlerde tanımlanan metotlar elde edilebilir. Örneğin,

$\theta = 0$ alınırsa Açık Euler yöntemi,

$$u_{n+1} = u_n + hf(u_n) \tag{4.3.3}$$

$\theta = 1$ alınırsa Kapalı Euler yöntemi,

$$u_{n+1} = u_n + hf(u_{n+1}) \tag{4.3.4}$$

ve $\theta = 1/2$ ile de Yamuk yöntemi,

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}[f(u_n) + f(u_{n+1})] \tag{4.3.5}$$

elde edilebileceği görülmektedir (Kama, 2009; Er, 2016).
Bu ifadelerden anlaşılacağı üzere tanımı verilen standard Theta metodunun $\theta = 0$ için açık, $\theta \neq 0$ için ise kapalı bir metot olduğu görülmektedir.

Tanımlanan tek adımlı ve iki adımlı Theta metotları arasındaki ilişkiyi içeren bilgiler aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 4.3.1.

i) y_n dizisinin iki adımlı Theta metotunu sağladığı kabul edilirse bu durumda $u_n = y_n - h\theta f(y_n)$ ifadesini sağlayan u_n dizisi tek adımlı Theta metotunu sağlar.

ii) u_n dizisi denklem (4.3.1) ile tanımlanan tek adımlı metotunu sağlasın bu halde $y_n = (1-\theta)u_n + \theta u_{n+1}$ eşitliğini gerçekleştiren y_n dizisi de denklem (4.3.2) ile tanılanan iki adımlı Theta metotunu sağlar (Er, 2016).

İspat: İspat için tanımlanan tek adımlı ve iki adımlı Theta metodlarını sağlayan y_n ve u_n dizilerini formülleri sağladığını kabul ederek metodlarda yerlerine yazalım. Bu halde,

$$y_{n+1} = y_n + h[(1-\theta)f(y_n) + \theta f(y_{n+1})] \tag{4.3.6}$$

$$u_{n+1} = u_n + h[f((1-\theta)u_n + \theta u_{n+1})] \tag{4.3.7}$$

denklemleri elde edilir. Öncelikle y_n dizisinin iki adımlı Theta metotunu sağladığı kabul edildiğinden teorem de ifade edilen u_n dizisi

$$u_n = y_n - h\theta f(y_n) \tag{4.3.8}$$

eşitliğini sağlar. Denklem (4.3.6) nın yeniden düzenlenmesi ve (4.3.8) denkleminin kullanılmasıyla

$$u_{n+1} = y_{n+1} + h(1-\theta)f(y_n) = y_n + hf(y_n) - h\theta f(y_n) \tag{4.3.9}$$

eşitliği bulunur. Denklem (4.3.8) nın sağ kısmındaki ifadenin denklem (4.3.9) da yerine yazılmasıyla bu denklem

$$u_{n+1} = u_n + hf(y_n) \tag{4.3.10}$$

halini alır. Elde edilen Denklem (4.3.10) de her iki taraf $(1-\theta)$ ile çarpılır ve (4.3.8) denklemi kullanılırsa

$$h(1-\theta)f(y_n) = u_{n+1} - y_n \tag{4.3.11}$$

eşitliği bulunur ki burada y_n ve u_n terimlerinin kendi arasında yer değiştirilmesiyle u_n dizisininin tek adımlı Theta metotunu sağladığı görülür.
Diğer taraftan u_n dizisininin tek adımlı Theta metotunu sağladığı kabul edilirse denklem (4.3.8) ile

$$y_n = \theta u_{n+1} + (1-\theta)u_n = v_n + \theta(u_{n+1} - u_n) \tag{4.3.12}$$

denklemi elde edilir. u_n dizisininin tek adımlı Theta metotunu sağladığı bilindiğinden bu tanım yardımı ile

$$u_{n+1} - u_n = hf[\theta u_{n+1} + (1-\theta)u_n] \tag{4.3.13}$$

eşitliği bulunur. Denklem (4.3.12) ve denklem (4.3.13) de bulunan ifadelerin kullanılması ve gerekli düzenlemeler ile

$$u_n = y_n - h\theta f(y_n) \tag{4.3.14}$$

eşitliği bulunur ki bu da ispatın tamamlandığını ifade eder (Kama, 2009; Er, 2016).

4.4. Standard Olmayan Sonlu Fark Şeması

Runge-Kutta, Theta metodu ve Lineer çok adımlı metotlar da yeterince küçük h adım aralığının belirlenmesi ile ayrık dinamik denklem sistemleri için kullanılabilir yaklaşımlar elde edilebilmektedir. Ancak bu yaklaşımlar önceki bölümlerde de belirtildiği gibi bazı kısıtlamalara sahiptirler. Bu sebeple bu kısıtlamaların en aza indirgenebilmesi amacı ile bu tez çalışmasında standard olmayan bir yaklaşım kullanılmıştır.
Ayrıklaştırma için kullanılacak şema olarak standart olmayan sonlu fark (Nonstandard finite difference-NSFD) seçilmiş ve bu metot Mickens (1994) tarafından hem adi hem

de kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılmak üzere tanımlanmıştır. Mickens bu yöntemde kullandığı şemalar yardımı ile klasik sayısal çözüm yöntemlerinde karşılaşılan kararsızlıkları ortadan kaldırmıştır. Oluşturduğu şemada uygun denominatör (payda) fonksiyonu belirlenmesi sayesinde oluşabilecek negatif sonuç durumunu ve kararsızlık ifadelerinin etkisiz hale getirilebileceğini göstermiştir. Böylece diğer yöntemlerin aksine bu metotta bazı kısıtlamalar ortadan kalkmaktadır.

NSFD yöntemini ifade etmek için, γ : *parametre* olmak üzere $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} = K(t,y,\gamma)$ biçimindeki adi diferansiyel denklemi ele alalım. Bu denklemin NSFD şeması için ilk önce sol taraftaki türev y_n, $y(t_n)$ ifadesinin bir yaklaşımı olmak üzere;

$$t \to t_n, \;\; K(y) \to K(y_n), \quad y(t) \to y(t_n), \quad \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} \to \frac{y_{n+1}-y_n}{\varphi(h,\gamma)} \tag{4.4.1}$$

şeklinde ayrık olarak yazlır. Sonrasında lineer olmayan terimler yerine lokal olmayan ayrık gösterimler $K(t,y_n,y_{n-1},...,\gamma)$ şeklinde ifade edilirse (4.4.1) denklemindeki ifade,

$$\frac{y_{n+1}-y_n}{\varphi(h,\gamma)} = K(t,y_n,y_{(n-1)},...,\gamma) \tag{4.4.2}$$

şeklinde ayrık formda yazılabilir.

Bu şemada $\varphi(h,\gamma)$ denominatör fonksiyonudur ve h adım aralığı ile denge noktası yardımı ile bulunacak olan p değişkenine bağlıdır. $\varphi(h,\gamma) = \frac{1-e^{-ph}}{p}$ şeklinde seçilebilir. Diğer yandan denominatör fonksiyonları uygun koşulların seçimi ile keyfi olabilir. Bu seçim işlemi yapılırken üzerinde durulması gereken en önemli konu orjinal sürekli denklem ile ayrık biçimde ifade edilen denklemin çözümlerinin birbirleri ile dinamik olarak uygun olmasıdır.

Denominatör fonksiyonunun seçiminin nasıl olacağı ile ilgili olarak Mickens'in (2007) kaynağı incelenebilir. Ayrıca Mickens (1989), Mickens (1994), Mickens (2000), Mickens (2002), Meerschaert ve Tadjeran (2004) ve Mickens (2007) kaynaklarıda bu yöntemle ilgili detaylı bilgilere sahiptir.

$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} = K(t,y,\gamma)$ biçiminde tanımlanan diferansiyel denkleminin sağ tarafındaki lineer olmayan terimler için problemin tipine göre, $K(t,y_n,y_{(n-1)},...,\gamma)$ gösteriminden farklı lokal olmayan ayrık terimler almak mümkündür. Örnek olarak

$$y^2 \approx y_{n-1}y_n,\; y_ny_{n+1},\; y_n\frac{y_{n-1}+y_{n+1}}{2},\; y_{n-1}y_{n+1},$$

$$y^3 \approx \frac{y_n + y_{n+1}}{2} y_n^2,\ y_n^2 y_{n+1},\ y_{n-1} y_n y_{n+1},\ \frac{y_{n-1}^2 y_{n+1}^2}{y_n}$$

kullanımlarından biri seçilebilir.

Standard olmayan sonlu fark yönteminin kesirli mertebeden diferansiyel denklemlere uygulanması için $D_t^p y(t) = K(t, y(t))$ denklemini ele alırsak, bu denklemin sağ tarafına ayrıklaştırma yapılıp, sol tarafına ise Grünwald-Letnikov türevi uygulanırsa, $0 < p < 1$ olmak üzere,

$$\frac{1}{\varphi(h,\gamma)} \sum_{i=0}^{n} w_j^p (y_{n-i} - y_0) = K(t, y_n, y_{(n-1)}, ..., \gamma) \tag{4.4.3}$$

elde edilir. Burada denominatör fonksiyonun seçimi ve uygunluk koşuluna bağlı alınması ile ilgili daha detaylı bilgi için Ongun vd. (2013) kaynağına bakılabilir. Ayrıca Standard olmayan sonlu fark yönteminin uygulanması sırasında dikkkate alınması gereken kurallar Mickens (1994) de aşağıdaki şekilde oluşturulmuştur.

Bu kurallar;

− Diferansiyel denklemin mertebesi ile ayrık türevlerin mertebesi aynı olmalıdır.

− Lineer olmayan terimler ile karşılaşılırsa bu terimler yerine lokal olmayan terimler yerleştirilmelidir.

− Sonlu fark denklemlerinin çözümünde tamamen diferansiyel denklemlerin çözümüne benzemeyen çözümler olmamalıdır.

− Diferansiyel denklemin veya sistemin özel çözümleri aynı zamanda sonlu fark modelinin de ayrık biçimdeki çözümleri olmalıdır.

− Ayrık türevlerdeki payda fonksiyonu diğer kullanımlardan farklı olarak adım uzunluğuna bağlı şekilde daha karmaşık terimler kullanılarak elde edilmelidir. Bu kurallara ek olarak birinci mertebeden adi diferansiyel denklemlerin Standard olmayan sonlu fark yönteminde kullanılacak payda fonksiyonunun bulunması esnasında gerekli kurallar aşağıdaki biçimde ifade edilebilir.

− Euler yöntemi kullanılarak birinci mertebeden türevli ifadeler sonlu fark modeli yardımı ile ifade edilir.

− h adım uzunluğu Taylor açılımı yardımı ile bulunur.

− Buluna bu h'a bağlı fonksiyon denominatör fonksiyonu olarak isimlendirilir ve üstel, trigonometik, vb. formlarda olabilir.

− Örneğin, eğer ayrıklaştırılan denklem $1 + ah,\ (a \neq 0)$ şeklinde ifade edilebilirse, denkleme ait payda fonksiyonu $\frac{e^{ah}-1}{a}$ biçiminde seçilebilir (Mickens, 1994).

4.5. Ayrıklaştırılmış Bir Sistemin Kararlılık Analizi

Tanım 4.5.1. $\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}} = F(v)$ diferansiyel denklemi için yaklaşık çözüm $v(t_k)$ olarak ifade edilsin. Bu çözüm için h adım aralığına göre genel sayısal şema:

$$G_h(v_k) = Q_h(F; v_k), v_k \approx v(t_k), t_k = t_0 + kh \tag{4.5.1}$$

biçimindedir. Burada $G_h(v_k) \approx \left(\frac{dv_1}{\mathrm{dt}}, \frac{dv_2}{\mathrm{dt}}, \ldots, \frac{dv_n}{\mathrm{dt}}\right)^T$ ve $Q_h(F; v_k)$ ise yaklaşık çözümdür (Elaydi, 1999; Dimitrov ve Kojouharov, 2008; Garrappa, 2010).

Lemma 4.5.1. D noktası (4.5.1) sistemi için denge noktası olsun. Bu durumda D ile ifade edilen denge noktası, Jacobian matrisi yardımı ile elde edilecek olan tüm öz değerlerinin mutlak değerlerinin 1'den küçük olması durumunda lokal asimptotik kararlıdır. Aksi durumda elde edilen öz değerleriden en az birinin dahi mutlak değerce 1'den küçük olmaması durumunda D denge noktası kararsızdır (Dimitrov ve Kojouharov, 2007; Dimitrov ve Kojouharov, 2008).

Kararlılık analizi için özdeğerlerin hesaplanması esnasında bazı karmaşık işlemlerle karşılaşıldığından, özdeğerlerin hesaplanması genellikle kolay olmamaktadır. Bu sebeple öz değerler için karakteristik denklemin katsayıları kullanılabillir. Yani kararlılık koşulu karakteristik denklemin katsayıları ile belirlenebilir. Bu koşul için Jury testi, karakteristik denklemin katsayıları kullanılarak uygulanır. Jury testi için $a_n > 0$ karakteristik polinomun katsayıları olmak üzere

$$P(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

dır. Buradan,

$$s_{2,i} = det\begin{pmatrix} a_0 & a_{n-i} \\ a_n & a_i \end{pmatrix}, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

$$s_{3,i} = det\begin{pmatrix} s_{2,0} & s_{2,n-1-i} \\ s_{2,n-1} & s_{2,i} \end{pmatrix}, \quad i = 0, 1, \ldots, n-2.$$

...

$$s_{n,i} = det \begin{pmatrix} s_{n-1,0} & s_{n-1,3-i} \\ s_{n-1,3} & s_{n-1,i} \end{pmatrix}, \quad i = 0,1,2.$$

ifadeleri tanımlansın. Jury testinin tanımına göre kararlılık için yani bütün öz değerlerin mutlak değerlerinin 1'den küçük olması durumu aşağıdaki koşulların sağlanması ile mümkündür (Dorciak, 1994);

i) $P(1) > 0$,
ii) $(-1)^n P(-1) > 0$,
iii) $|a_0| < a_n$,
iv) $|s_{i,0}| > |s_{i,n+1-i}|, \quad i = 2,3,\ldots,n-1.$

Lemma 4.5.2. Karakteristik denklem $P(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0, \ (a_2 = 1)$ şeklinde alınırsa kararlılık için:

i) $1 + a_1 + a_0 > 0$,
ii) $1 - a_1 + a_0 > 0$,
iii) $|a_0| < 1$,

ifadeleri sağlanmalıdır (Dorciak, 1994).

Lemma 4.5.3. Karakteristik denklem $P(\lambda) = \lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0, \ (a_4 = 1)$ biçiminde seçilirse kararlılık için:

i) $1 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 > 0$,
ii) $1 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0 > 0$,
iii) $|a_0| < 1$,
iv) $|s_{2,0}| > |s_{2,3}|$,
v) $|s_{3,0}| > |s_{3,2}|$,

ifadelerinin sağlanması gereklidir (Dorciak, 1994).

5. DAĞILIMLI MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Dağılımlı mertebeden diferansiyel modelleme yerel (local) olmayan özelliklerinden dolayı, karmaşık dinamik sistemleri tanımlamak için adi ve kesirli mertebe türevli modellerinden daha güçlü araçlardır. Dağılımlı mertebeden diferansiyel denklemlerin orijinal konsepti, Caputo'nun enerji tüketen elastodinamik sistemler üzerinde durduğu ufuk açıcı çalışma ile başlamıştır. Bu çalışmada, paralel bir kesirli mertebeden türev dizisi kullanılarak viskoelastik gerilim-gerinim kurucu yasalarının bir çeşit genellemesi yapılmıştır (Caputo, 1967).

Birkaç yıl sonra, Caputo orijinal önermeyi dağılımlı mertebeden türev kavramına dönüştürmüş ve ayrıca dağılımlı mertebeden türevlerin kullanıldığı diferansiyel denklemlerin olası çözümlerini araştırmıştır. Bu çalışmalardan sonra dağılımlı mertebeden diferansiyel denklemlerinin özellikleri ve çözüm teknikleri üzerinde detaylı incelemeler yapılmaya başlanmıştır. Bunlara örnek olarak Bagley ve Torvik (2000a), Hartley ve Lorenzo (2002), Caputo (2001) ve Caputo (2003) çalışmaları verilebilir.

Dağılımlı mertebeden diferansiyel denklemlere olan ilgi, bu çalışmalar sayesinde sadece matematik anabilim dalında değil, mühendislik ve fiziğin çeşitli dallarında da artmaya başlamıştır. Sonrasında bu konula ilgili birçok çalışma yapılmış ve bu çalışmalarda teorik ve uygulamalı matematik, analitik ve sayısal yöntemler, viskoelastisite, taşıma süreçleri ve kontrol teorisi dahil ancak bunlarla sınırlı olmamak üzere çeşitli alanlar kapsanmıştır (Ding vd., 2021).

Kaynak özetleri kısımında belirtildiği gibi dağılımlı mertebeden diferansiyel denklemlerin birçok bilim dalında kullanılması ile son dönemlerde bu tip denklemlerin nümerik çözümlerinin de yoğunlukla çalışılmasına sebep olmuştur. Analitik çözümü ise aşağıda da belirtileceği gibi Caputo tarafından ifade edilmiştir. Ek olarak analitik çözümler ilgili çalışmalar yine bu kısımda yer almaktadır. Dağılımlı mertebeden diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri ilgili çalışmalar ise son kısımda verilmiştir.

Bu tez çalışmasında ise dağılımlı mertebeden türev ve integral ifadeleri biyolojik

vb. matematiksel modelleme sistemleri için kullanılmıştır. Sonrasında bu sistemlerin nümerik çözümleri araştırılarak literatüre dağılımlı mertebeden denklemlerin bu alanlarda da kullanılarak bir katkı sağlayacağı görülmüştür. Bu tip türeve sahip modellerin bulunan nümerik çözümleri ve metotların kararlılık analizi, modellerin adi ve kesirli mertebeden türeve sahip durumlardaki çözümlerle karşılaştırılmıştır. Karşılaştırmalar neticesinde bu tip modellemelerde dağılımlı mertebeden türev ve integralin kullanımının oldukça makul sonuçlar verdiği görülmüştür. Böylece literatürde yer alan hem adi hem de kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerle ifade edilen modellemeler yerine bu tip dağılımlı mertebeden diferansiyel denklemlerin kullanımı ile önemli ölçüde işlem ve zaman tasarrufu sağlanmıştır.

5.1. Dağılımlı Mertebeden Diferansiyel Denklemler

Caputo tarafından tanımlanan dağılımlı mertebeden diferansiyel denklemler için Caputo öncelikle aşağıdaki integral operatörünü tanımlamıştır (Caputo, 1995). Bu operatör;

$$D_t^{w(\alpha)} f(t) := \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} w(\alpha) D_t^{\alpha} f(t) d\alpha \tag{5.1.1}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada $D_t^{\alpha} f(t)$ kesirli türev fonksiyonudur. Önemli olan bir diğer fonksiyon $w(\alpha)$ ise $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\alpha \in [\gamma_1, \gamma_2]$ mertebeden dağılımlı mertebeden diferansiyel denklemin yoğunluk fonksiyonudur. Tanımlanan dağılımlı mertebe operatörü yardımı ile dağılımlı mertebeden diferansiyel denklemler,

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \int_0^1 w_i(\alpha) D_t^{i-\alpha} x(t) d\alpha + \sum_{j=0}^{N} b_j x^j(t) = f(t) \tag{5.1.2}$$

şeklinde tanımlanır. Bu tip diferansiyel denklemlerin adi ve kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin genel bir hali olduğunun söylenmesinin nedeni yoğunluk fonksiyonu seçiminin öneminden kaynaklanmaktadır.
Bu durum şu şekilde iki başlık altında ifade edilebilir:

i) $w_i(\alpha) = 0$ seçilirse bu tip denklem adi diferansiyel denklemin genel hali olur,

ii) $w_i(\alpha)$ nın $[\gamma_1, \gamma_2]$ aralığında sadece ayrık değerler aldığı kabul edilirse bu tip denklemin kesirli mertebeden diferansiyel denklem halini aldığı görülür,

(Hartley ve Lorenzo, 2002)

Ayrıca verilen tanımlarda Caputo türev ve integralinin Riemann-Liouville yerine kullanıldığı sıklıkla görülmektedir. Bunun sebebi ise Caputo türev ve integralinin, başlangıç koşullarının kullanımındaki elverişlilikten dolayıdır.

Kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin farklı alanlarda kullanımı oldukça yaygın hale geldikten sonra dağılımlı mertebe denklem içeren farklı tip denklemlere ve denklem sistemlerine olan ilgi de artmıştır. Farklı uygulama alanlarında örneğin; viskoelastik, sistem kimliği teorisi, kesirli hibrid, reaksiyon-difüzyon vb. konularda bu tip denklemler kullanılmıştır.

İşlem kolaylığı açısından çoğu kaynakta dağılımlı mertebeden denklemlerin genel hali olarak

$$\int_0^k G(r, D_*^r v(t))dr = f(t), \;\; m \geq 0 \tag{5.1.3}$$

ifadesi kullanılmıştır. Dağılımlı mertebeden diferansiyel denklemlerin kullanıldığı ve potansiyel kullanım alanlarını içeren kaynaklar Bagley ve Torvik (2000b), Caputo (2001), Hartley ve Lorenzo (2002), Caputo (2003), Sokolov vd. (2004), Umarov Gorenflo (2005), ve Atanackovic (2005) olarak ifade edilebilir.
Bu tip denklemlerin lineer formu,

$$\int_0^k w(r) D_*^r v(t)dr = f(t) \tag{5.1.4}$$

ve lineer olmayan denklemdeki formu,

$$\int_0^k w(r) F(D_*^r v(t))dr = f(t, v(t)) \tag{5.1.5}$$

şeklinde ifade edilir. Literatür araştırması yapıldığında lineer halinin kullanımın daha yaygın olduğu görülmüştür.
Önceki bölümlerde de ifade edildiği gibi dağılımlı mertebe diferansiyel denklemler tek terimli ve çok terimli diferansiyel denklemlerin genel halidir.
Tek terimli denklemler,

$$D_*^r v(t)dr = f(t, v(t)), \;\; r \geq 0$$

ve çok terimli denklemler ise

$$\sum_{j=1}^{m} \gamma_j D_*^r v(t) = f(t, v(t)), \;\; 0 < r_1 < r_2 < ... < r_m.$$

şeklinde ifade edilir. Yukarıda vurgulandığı üzere Caputo kesirli türevinin kullanımı daha uygundur. Bunun sebebi ise başlangıç koşullarına karşılık gelen çözümün elde edilmesinde sağladığı kolaylıktan kaynaklanmaktadır. Başlangıç koşulları da $\frac{d^m u(0)}{dt^m} = \eta_m, \;\; m = 0, 1, ..., k-1$ şeklinde tanımlanabilir (Caputo, 1995; Diethelm ve Ford, 2009). Dağılımlı mertebeden adi diferansiyel denklemlerin yanı sıra bu tip denklemlerin kısmi türevli hali ile de ilgili çalışmalar yapılmaktadır. Bu çalışmalarda genel olarak dağılımlı mertebeden kısmi diferansiyel denklemler,

$$D_t^{w(\alpha)} u(x,t) := \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) \tag{5.1.6}$$

biçiminde ifade edilmektedir. Burada $w(\alpha)$, $\alpha \in [0,2]$ mertebesindeki yoğunluk fonksiyonunu göstermektedir. $supp(w(\alpha)) = \{\alpha \in [0,2] : w(\alpha) \neq 0\}$ şeklinde bir küme tanımlanırsa, $\alpha_1 := inf\{\alpha | \alpha \in supp(w(\alpha))\}$ ve $\alpha_2 := sup\{\alpha | \alpha \in supp(w(\alpha))\}$ ise aşağıdaki denklem tipleri tanımlanabilir:

i) Zamana bağlı dağılımlı difüzyon dalga denklemi: $0 < \alpha_1 \leq 1 < \alpha_2 \leq 2$;
ii) Zamana bağlı dağılımlı difüzyon denklemi: $\alpha_2 \leq 1$;
iii) Zamana bağlı dağılımlı dalga denklemi: $\alpha_1 > 1$ (Atanackovic vd., 2009).

Dağılımlı mertebeden kısmi diferansiyel denklemler için yukarıdaki denklem tiplerindeki bazı çalışmalar şu şekilde ifade edilebilir: Zamana bağlı dağılımlı difüzyon dalga denklemi için Atanackovic vd. (2009) denklemin varlığını ve çözümünü araştırmışlardır. Zamana bağlı dağılımlı difüzyon denklemi ile ilgili ise Mainardi vd. (2007) çalışmıştır. Bu çalışmada yazarlar denklemin farklı yönlerini ele almış ve Cauchy problemi, Non-Markovian süreci gibi konularda araştırma yapmışlardır. Dağılımlı mertebeden dalga denklemleri ilgili çalışmalar ise Atanackovic vd. (2011) tarafından yapılmıştır. Atanackovic vd. (2011) bu çalışmalarında zamana bağlı Laplace dönüşümünü çözüm için kullanmışlardır.

5.2. Dağılımlı Mertebeden Diferansiyel Denklemlerin Analitik Çözümü

Caputo (1995) çalışmasında dağılımlı mertebeden denklemler için temel bazı analizlere yer vermiştir. Analitik çözümün de elde edildiği bu çalışmada dağılımlı mertebeden diferansiyel denklem,

$$\int_{\alpha}^{\beta} w(z) D_{*}^{m+z} v(t) dz = f(t) \tag{5.2.1}$$

formundadır. Analizin anlaşılır olması için bu formda $0 < \alpha < \beta < 1$ ve $m \in \mathbb{N}$ olarak seçilmiştir. Bu koşullar ve Laplace dönüşümünün kullanılması ile ve çözüm için tüm Laplace dönüşümlerinin olduğunu varsayılarak çözüm,

$$v(t) = (f * \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{(.)^m \int_{\alpha}^{\beta} w(z)(.)^z dz}])(t) + \sum_{n=0}^{m} t^n \frac{v^{(n)}(0)}{n!}. \tag{5.2.2}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $*$ standart konvolüsyon işlemidir ve uygun f, g fonksiyonları ile

$$(f * g)(t) = \int_{0}^{t} f(t-v) g(v) dv$$

biçiminde tanımlanır. Çözümdeki $\mathcal{L}^{-1}$ ters Laplace fonksiyonudur. Gerektiğinde Laplace değişkeni ise s ile gösterilecektir. Bulunan (5.2.2) çözümünün sağ tarafındaki $f(t)$ fonksiyonunun, Caputo tipi başlangıç koşullarına ve türevlerin dağılımına bağlı olduğu açıkça görülmektedir.

Benzer analiz (5.1.4) ile verilen denklem için de yapabilir. Şimdi burada bazı varsayımlar altında çözümler ve çözümlerin tekliği konusu ele alınsın.

$m \in \mathbb{N}$ kabul edilirse w, f ve v çözümü için bu varsayımlar;

i) w fonksiyonu $[0,m]$ aralığında integrallenebilir ve $Re(s) > 0$ için $\int_0^m w(r) s^r dr \neq 0$,
ii) $f \in L^1[0,\infty]$,
iii) Her $t \in [0,\infty]$ ve $r \in [0,m]$ için $D_{*}^{r} v(t) < M$ olsun.

(5.1.4) denklemine Laplace dönüşümünün uygulanması ile,

$$\mathcal{L}[\int_0^m w(r)D_*^r v(.)dr](s) = \mathcal{L}[f](s) \tag{5.2.3}$$

denklemi elde edilir. Varsayımlar ile sol taraftaki integrasyon sırası değiştirilir ve ters Laplace dönüşümü aşağıdaki sırayla uygulanırsa,

$$\int_0^m w(r)\mathcal{L}[D_*^r v](s)dr = \mathcal{L}[f](s) \tag{5.2.4}$$

denklemi bulunur. (5.2.4) denkleminde düzenlemelere devam edilirse,

$$\int_0^m w(r)(s^r\mathcal{L}[v](s) - v(0)s^{r-1})dr - \sum_{j=1}^{m-1}\int_j^m w(r)v^{(j)}(0)s^{r-j-1}dr = \mathcal{L}[f](s) \tag{5.2.5}$$

elde edilir. Ters Laplace dönüşümü ile de son olarak bu ifade,

$$v(t) = v(0) + (f * \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{\int_0^m w(z)(.)^z dz}])(t) + \sum_{j=1}^{m-1} v^j(0)\mathcal{L}^{-1}[\frac{\int_j^m w(r)(.)^{r-j-1}dr}{\int_0^m (.)^r w(r)dr}](t). \tag{5.2.6}$$

halini alır ve (5.1.4) denklemi için bir analitik çözüm elde edilmiş olur. Burada elde edilen (5.2.6) denklemi de bize dağılımlı mertebeden diferansiyel denklemler için varlık ve teklik teoremini ifade etmemizi sağlar (Caputo, 1995; Diethelm ve Ford, 2009).

Teorem 5.2.1. w, f ve v için

i) w fonksiyonu $[0,m]$ aralığında integrallenebilir ve $Re(s) > 0$ için $\int_0^m w(r)s^r dr \neq 0$,

ii) $f \in L^1[0,\infty]$,

iii) Her $t \in [0,\infty]$ ve $r \in [0,m]$ için $D_*^r v(t) < M$ olsun.

varsayımları sağlandığında

$$\int_0^k w(r)D_*^r v(t)dr = f(t)$$

ile verilen dağılımlı mertebeden diferansiyel denklemin tek çözümü

$$v(t) = v(0) + (f * \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{\int_0^m w(z)(.)^z dz}])(t) + \sum_{j=1}^{m-1} v^j(0)\mathcal{L}^{-1}[\frac{\int_j^m w(r)(.)^{r-j-1}dr}{\int_0^m (.)^r w(r)dr}](t).$$

şeklinde bulunan denklemdir (Diethelm ve Luchko, 2004; Diethelm ve Ford, 2009).

Not : Eğer burada Caputo kesirli türev yerine Riemann Liouville kesirli türevi kullanılsa idi (5.2.6) ile bulunan çözümdeki tüm başlangıç koşulları elemanları 0 olan küme ailesi olmalıydı (Caputo, 1995; Diethelm ve Ford, 2009).

Analitik çözümlerle ilgili diğer çalışmalardan bazıları ise şu şekildedir:
Lorenzo ve Hartley (2002) dağılımlı mertebeden diferansiyel denklemlerin analitik çözümünü özellikle $\mathbb{R}^+$ üzerinde elde etmişlerdir. Lorenzo ve Hartley bu çalışmada dağılımlı mertebe operatörü ile çözüme ulaşmıştır. Diğer yaygın çözüm yöntemleri ise Fourier metodu ve Mittag-Leffler fonksiyonlarının kullanımı olmuştur (Luchko, 2009; Luchko, 2010). Luchko (2010) çalışmasında çözümün varlığını göstermek için değişken ayrımında Fourier yöntemi kullanmıştır. Belirli koşullar altında, formal çözümün, bazı ek koşullar altında klasik bir çözüm olduğunu ortaya çıkan genelleştirilme ile denklem için başlangıç-sınır-değer probleminin genelleştirilmiş bir çözümü olduğu gösterilmiştir.

Diğer yandan Laplace metotunu seri yaklaşımları ile kombine edilmesiyle Laguerre polinomları Stojanovic (2012) tarafından lineer ve lineer olmayan dağılımlı mertebeden diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerinde kullanılmıştır. Bu makalede yazar tek terimli ve iki terimli kesirli diferansiyel denklemler ile çalışmış ve bu tip denklemlerin dağılımlı mertebeden diferansiyel denklemlere genişletilebileceğini göstermiştir.

Bu çalışmalarda genellikle Caputo türevini içeren dağılımlı mertebeden diferansiyel denklemlerin analitik çözümü ele alınmıştır. Ancak Laplace dönüşümünü Riemann-Liouville türevinde de kullanmanın mümkün olduğu bilindiğinden Diethelm ve Ford (2005) bununla ilgili çalışmışlardır. Beklenildiği üzere Caputo türevi ile Riemann-Liouville türevi arasındaki fark başlangıç koşullarını oluşturan terimlerde ortaya çıkmaktadır.

Bu tarz farklılıkların görüldüğü bir diğer çalışmada Mainardi vd. (2007), zamana bağlı dağılımlı difüzyon denklemlerinde Laplace kullanımı sayesinde denklemlerin asimptotik davranışlarını ele almıştır.

5.3. Dağılımlı Mertebeden Diferansiyel Denklemlerin Sayısal Çözümü

Bazı özel tip dağılımlı mertebeden diferansiyel denklemlerin analitik çözümleri mümkün olsa da daha kompleks fiziksel sistemlerin ifadesinde bu tip denklemlerin oldukça fazla kullanılması nümerik metodların gerekliliğine yol açmıştır. Temel gözlemlerden yola çıkarak ilk olarak Diethelm ve Ford (2001) çok terimli dağılımlı mertebeden diferansiyel denklemler için bir nümerik metot önermiştir. Bu çalışmanın detayları bu bölümün ilerleyen kısımlarında ifade edilmiştir. Sonrasında bu çalışma yardımıyla diğer nümerik metodlar geliştirilmiştir. Bu çalışmalardan bazıları ve kullanılan yöntemler şu şekildedir: Diethelm ve Ford (2002) çözüm yöntemi olarak Podlubny'nin yaklaşımını ve Adams metodu kullanmışlardır. Katsikadelis (2014) nümerik çözümler için çok terimli kesirli diferansiyel denklemleri ve ayrıklaştırma için de yamuk yöntemini kullanmıştır. Li ve Wu (2016) ise dağılımlı mertebeden difüzyon denklemlerinin nümerik yollarla çözümü için klasik nümerik kareleştirme ve Kernel metodu kullanmışlardır. Kumar vd. (2020) ise dalgacık yaklaşım şeması ile sayısal çözümüne ulaşmışlardır. Son senelerde ise Maleknejad vd. (2021), Müntz–Legendre dalgacık yaklaşımını, Yuttanan vd. (2021) Taylor dalgacıklarını, Rahimkhani ve Ordokhani (2021) ise Bernstein dalgacıkları kullanarak farklı dağılımlı mertebeden diferansiyel denklemler için nümerik çözümleri elde etmişlerdir.

Dağılımlı mertebeden diferansiyel denklemlerin adi, kısmi veya kesirli türevli olma durumlarına göre dağılımlı metebeden türevin yaklaşım karakterine dikkat etmek gerekmektedir. Dağılımlı mertebeden türeve ait yaklaşım belirlendikten sonra sayısal çözüm için tamsayı mertebeli denklemler için geliştirilen klasik prosedürler izlenir. Burada klasik tamsayılı mertebeden diferansiyel denklemlerin değerlendirilmesi ile dağılımlı mertebeden diferansiyel denklemler arasındaki temel fark, dağılımlı mertebe türevinin sayısal yaklaşımında yatmaktadır. Genel olarak dağılımlı mertebe türevlerine sayısal olarak yaklaşım iki aşamalı olarak gerçekleştirilir:

Adım 1 (İntegral operatörünün sayısal entegrasyonu): Dağılımlı mertebe türevi, α mertebeden kesirli sürekli dağılımlıdır. Adım 1'de, dağılımlı mertebeden türevi çok terimli sabit mertebeden bir kesirli türev halinde ayrıklaştırmak için sayısal bir integral alma yöntemi kullanılır.

Adım 2 (Çok terimli kesirli türevin yaklaşık çözümü): Adım 1'deki Dağılımlı mertebe türevin çok terimli bir kesirli türeve dönüştürülmesinin ardından, çok terimli türev içindeki her bir sabit mertebeden kesirli türevinin değerlendirilmesi için farklı sayısal yöntemler kullanılır.

Yukarıda verilen her iki adım için, aşağıda verilen dağılımlı mertebe türev örneğini göz önünde bulundurarak, süreç daha pratik bir şekilde sunulabilir:

$$\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} w(\alpha) D_t^{\alpha} f(t) d\alpha \tag{5.3.1}$$

Adım 1 (İntegral yaklaşımı):

$$\approx \sum_{i=0}^{k} W_i w(\alpha_i) D_t^{\alpha_i} f(t)$$

Adım 2 ($D_t^{\alpha_i} f(t)$ türev yaklaşımı):

$$\approx \sum_{i=0}^{k} W_i w(\alpha_i) \Upsilon(\alpha_i, t)$$

Burada W_i nümerik integrasyondan elde edilen ağırlık terimidir ve $\Upsilon(\alpha_i, t)$ ise sabit mertebeden türevin $D_t^{\alpha_i} f(t)$ üzerindeki nümerik yaklaşımıdır. Özetle, birinci adımda, integralin bir yaklaşımı hesaplanır genellikle kareleştirme yöntemi ile bu yaklaşım yapılır. İkinci adımda, kalan sabit mertebeden kesirli türevleri farklı türde sayısal yöntemler kullanılarak yaklaşık olarak hesaplanır.

Bu iki aşamalı yaklaşım stratejisine dayanarak, bu bölüm iki bölüme ayrılmıştır: ilk olarak adım 1'in uygulanması için en popüler kareleme kuralları hakkında, ikinci olarak ise adım 2'nin uygulanması için çeşitli sayısal yöntemler hakkında bilgilere ve çalışmalara yer verilmiştir (Diethelm ve Ford, 2001; Ding vd., 2021).

5.3.1. İntegral operatörünün sayısal integrasyonu

Bölüm (5.3) de vurgulandığı üzere, dağılımlı mertebe türevler ile tamsayı mertebeden türevler arasındaki temel fark, mertebe üzerinde ek bir integrasyonun varlığıdır. İntegral formu çok terimli forma dönüştürmek için, araştırmacılar tarafından genellikle iki ortak kareleştirme kuralı kullanılmıştır. Bunlardan ilki Gauss Legendre kareleştirme kuralı olup ikincisi ise Newton-Cotes kareleştirme kuralıdır. Gauss–Legendre kareleştirme

kurallarına dayanarak, dağılımlı mertebe türev yaklaşımı aşağıdaki çok terimli form kullanılarak bulunabilir:

$$\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} w(\alpha) D_t^{\alpha} f(t) d\alpha = \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} g(\alpha,t) d\alpha = \sum_{i=0}^{k} W_i^G w(\alpha_i) g^G(\alpha_i^G,t) + R^G, \qquad (5.3.2)$$

burada W_i^G, dağılımlı mertebeden integrasyon için seçilen α_i^G Gauss noktalarına ait ağırlıktır. Gauss-Legendre kareleştirme şemalarının oldukça doğru sonuçlar elde ettiği bilinmesine rağmen, integral kesirli türevlerden oluştuğunda sayısal yakınsama ve kesme hatasının analizi zorlaşır. Gauss-Legendre kareleştirmesinde ortaya çıkan bu dezavantajlarının üstesinden gelmek için Newton-Cotes şeması düşünülmüştür. Newton-Cotes kareleştirme şeması, uç noktalardaki fonksiyon değerlerinin dahil edilip edilmediğine bağlı olarak kapalı ve açık yaklaşımlara ayrılabilir.

Kapalı yaklaşımı takiben, dağılımlı mertebe türevler için kullanılan farklı kareleştirme kuralları arasında yamuk kuralı (Diethelm ve Ford, 2009; Abbaszadeh ve Dehghan, 2017; Bu vd., 2020), Simpson kuralı (Abbaszadeh ve Dehghan, 2017; Li ve Rui, 2018; Bu vd., 2020) ve Boole kuralı (Aminikhah vd., 2017) bulunur.

Tüm bu şemalar aynı zamanda farklı yakınsama sıralarıyla da ilişkilidir. Açık Newton-Cotes yaklaşımını takiben, orta nokta kuralı yaygın olarak kullanılmaktadır (Hu vd., 2016; Li vd., 2017; Hu vd., 2018). Newton-Cotes yaklaşımını kullanırken Adım 1'in sonundaki kesme hatası, sadece klasik sonuçları takip eder. Daha detaylı olarak açıklamak gerekirse, kesme hataları yamuk kuralı ve orta nokta kuralı için $O(h^2)$, Simpson kuralı için $O(h^4)$ ve Boole kuralı için $O(h^6)$'dır. Farklı yaklaşımları seçme esnekliği ve hata analizi kolaylığı göz önüne alındığında, Newton-Cotes yöntemi Adım 1 yaklaşımındaki Gauss yaklaşımına göre daha tercih edilirdir (Ding vd., 2021).

5.3.2. Çok Terimli Kesirli Türevin Yaklaşık Çözümü

(5.3.1) denkleminin açıklama kısmından da görüleceği üzere, ikinci adım, çok terimli kesirli türev içindeki tamsayı mertebeli kesirli türevlerin sayısal yaklaşımını içerir. Bu yaklaşım, tamsayı mertebeli türevler için mevcut teknikleri doğrudan takip eder. Tamsayı mertebeli türevlerin yakınsama durumları için sayısal yöntemler üzerine literatür daha kapsamlıdır. Örneğin bu kısım için Adams metodu, geri fark şeması, kesirli çok adımlı metodlar gibi yöntemler seçilebilir (Diethelm ve Ford, 2009; Ding vd., 2021).

6. DAĞILIMLI MERTEBEDEN BAZI MODELLERİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ İÇİN AÇIK VE KAPALI YÖNTEMLER

Bu bölümde iki farklı biyolojik model dağılımlı mertebeden diferansiyel denklemler ile ifade edilmiş ve sonrasında bu diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri araştırılmıştır. İlk olarak bir aşılama modeli olan $SVIR$ (Susceptible, Vaccinated, Infectious, Recovered) modeli seçilmiş ve sayısal çözümleri açık ve kapalı yöntemlerle yapılmıştır. Bulaşıcı hastalıkların ortadan kaldırılması için aşılamanın oldukça önemli olduğu aşikardır. $SVIR$ modelinde de diğer epidemik modellerden farklı olarak V terimi ile aşılamanın gelişimi ve etkisi incelenebilmektedir. Bu modelin seçilme amacı günümüzde oldukça önemli hale gelen aşılama ve aşılama periyotlarının belirlenmesi olmuştur. Bu periyotların belirlenmesi her bir denklem tipi için olduka güç olduğundan kesirli ve adi diferansiyel denklemlerin bir bakıma genel hali olan dağılımlı mertebeden diferansiyel denklemler kullanılarak bu zorluğun en aza indirgenmesi sağlanmıştır. Tabi bu çözümler için kullanılan en önemli fonksiyon dağılımlı mertebeden diferansiyel denklemlerin tanımında yer alan yoğunluk fonksiyonu olmuştur. NSFD ayrıklaştırma yöntemi ile elde edilen sayısal çözümler hem bu konu ile çalışılmış önceki nümerik yaklaşımlar ile hem de Matlab paket programı yardımı ile elde edilmiş diğer açık ve kapalı yöntemlerle karşılaştırılmıştır (Kocabıyık vd.,2021).

İkinci olarak ise bulaşıcı olan Hanta virüs sistemine ait bir model ele alınmıştır. Ölümcül virüslerin insanlar üzerindeki etkisinin önceden bilinmesi ya da diğer bir tabirle önceden tahmin edilmesi oldukça önemlidir. Farklı koşullarda ve durumlara virüslerin etkileri değişkenlik gösterdiğinden bu çalışmada virüs modeli dağılımlı mertebeden diferansiyel denklemler ile ifade edilmiştir. Böylece tek bir denklem ile farklı koşullar altında çözümlere ulaşmanın mümkün olduğu gösterilmiştir. $SVIR$ modelin de olduğu gibi NSFD şeması ile sayısal çözüm elde edilmiş, açık ve kapalı yöntemlerden elde edilen sonuçların karşılaştırmaları Matlab paket programı yardımı ile yapılmıştır. Bu kısımda ek olarak önceden bu denklem tipine ait kesirli mertebeden türevli durumunun analitik çözümü ile dağılımlı mertebeden durumunun bulunduğu sayısal çözümlerin karşılaştırılması da yer almaktadır.

6.1. Dağılımlı Mertebeden $SVIR$ Epidemik Modeli

Aşılama kızamık, tetanoz, tüberküloz, ... gibi birçok hastalığın hızlı ve etkili bir biçimde kontrol altına alınması için kullanılan en önemli araçlardandır. Bu sebeplerden dolayı da çözümün farklı durumlarda ve farklı etkiler altında davranışlarını belirlemek gereklidir.

Kermack ve Mckendrick (1927) tarafından bulaşıcı hastalıklara ait modelleme oluşturulmuştur. Bu modellemede ilk total popülasyon SIR yani duyarlı,enfekte ve iyileşmiş bireyler şeklinde ele alınmış ve sonrasında bu gibi modellemeler farklı epidemik sistemler için kullanılmıştır. Örneğin, çoklu epidemik modeller için basit aşı modelleri kurulmuş ve çözümü araştırılmıştır (Kribs ve Velasco; 2000). Diğer bir çalışmada ise gribin bulaşma evresinde oluşan dinamikleri ve davranışları aşılama modeli ile belirlenmiştir (Alexander vd., 2004). Liu vd. (2008) ise makalesinde diğer çalışmalardan farklı olarak modellemesine aşı davranışlarını da ekleyerek modelini oluşturmuştur. Oluşturulan bu tip $SVIR$ modelinin tanımından sonra çözümü ve analizi ile ilgili de çeşitli araştırmalar yapılmıştır. Li vd. (2011) araştırmasında aşılama modellerine başka bir yönden yaklaşarak kararlılık analizi ile ilgili bilgilere yer vermiştir.

Bu bölümde çözüme ulaşılması amaçlanan denklem sistemi için, aşı davranışları yada bir diğer ifade ile aşı dinamiklerine ait Liu vd. (2008) tarafından oluşturulmuş kesirli mertebeden aşılama modelinin dağılımlı mertebeden hali aşağıdaki biçimde yeniden kurulmuştur:

$$
\begin{aligned}
D_t^{v(\alpha)} S(t) &= a - aS(t) - bS(t)I(t) - cS(t) \\
D_t^{v(\alpha)} V(t) &= cS(t) - dV(t)I(t) - eV(t) - aV(t) \\
D_t^{v(\alpha)} I(t) &= bS(t)I(t) + dV(t)I(t) - fI(t) - aI(t) \\
D_t^{v(\alpha)} R(t) &= eV(t) + fI(t) - aR(t).
\end{aligned}
\tag{6.1.1}
$$

Burada,

$S(t)$: Duyarlı bireyler için zamana bağlı yoğunluk fonksiyonu,

$V(t)$: Aşılama sürecinde başlayan aşılar için zamana bağlı yoğunluk fonksiyonunu,

$I(t)$: Enfekte olan bireyler için zamana bağlı yoğunluk fonksiyonu,

$R(t)$: İyileşen bireyler için yoğunluk fonksiyonu olarak sembolize edilmiştir.

Sistem içerisinde bulunan sabitlerden; a popülasyondaki bireylerin iyileşme ve doğal ölüm oranı şeklinde, b ise enfekte ve duyarlı bireylerin birbiri arasındaki geçiş katsayısı olarak tanımlanır. c ile ifade edilmiş parametre ise duyarlı bireyler için aşılama sürecine geçilmeye başlama oranı olarak ifade edilmiştir. Aşılanan kişilerin bağışıklık kazanmadan önce enfekte bireylerle temas ettiği durumlarda hastalığa ait bulaşma oranı d sabiti ile gösterilmiştir. Aşılanan kişilerden iyileşip $R(t)$ popülasyonuna geçme oranı e iken, enfekte olan bireylerde iyileşme oranı ise f parametresi ile tanımlanmıştır.

Verilen tanım ve bilgiler yardımıyla, (6.1.1) denklemi ile tanımlanan dağılımlı mertebeden diferansiyel denklem sisteminin yaklaşık çözümlerinin elde edilmesi amacıyla önceki bölümlerde tanımı verilen ve ayrıklaştırma sürecinde gerekli olan NSFD yöntemi ile dağılımlı mertebeden türevler için yaklaşık Grünwald-Letnikov türev ifadesi kullanılmıştır. Daha sonra dağılımlı mertebeden diferansiyel denklemlerin sayısal çözümünde karşılaşılan kareleştirme formülüne ayrıklaştırma sürecinde yer verilmiştir. Bu bilgiler ve tanımları kullanılarak (6.1.1) diferansiyel denklem sisteminin ayrıklaştırılmış ilk hali:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{Z} \frac{v(\alpha_k)}{Z} \sum_{i=0}^{n+1} p_i^{\alpha_k} S_{n+1-i} &= a - aS_{n+1} - bS_{n+1}I_n - cS_{n+1} \\
\sum_{k=1}^{Z} \frac{v(\alpha_k)}{Z} \sum_{i=0}^{n+1} p_i^{\alpha_k} . V_{n+1-i} &= cS_n - dV_{n+1}I_n - eV_{n+1} - aV_{n+1} \\
\sum_{k=1}^{Z} \frac{v(\alpha_k)}{Z} \sum_{i=0}^{n+1} p_i^{\alpha_k} I_{n+1-i} &= bS_nI_{n+1} + dV_nI_{n+1} - fI_{n+1} - aI_{n+1} \\
\sum_{k=1}^{Z} \frac{v(\alpha_k)}{Z} \sum_{i=0}^{n+1} p_i^{\alpha_k} R_{n+1-i} &= eV_n + fI_n - aR_{n+1}
\end{aligned} \tag{6.1.2}$$

şeklindedir. Burada, $j = 1,2,3,4$ ve $0 < \alpha_k < 1$ $icin$ $\mathrm{p}_0^{\alpha_k} = (\varphi_j(h))^{-\alpha_k}$ dir. NSFD yöntemi tanımında ifade edilen denominatör fonksiyonları, bu ayrıklaştırma da aşağıdaki şekilde seçilmiştir:

$$\varphi_1(h)=\frac{e^{(a+c)h}-1}{a+c},\varphi_2(h)=\frac{e^{(a+e)h}-1}{a+e},$$
$$\varphi_3(h)=\frac{e^{(a+f)h}-1}{a+f},\varphi_4(h)=\frac{e^{ah}-1}{a}.$$

Burada

$\sum_{i=0}^{n+1} p_i^{\alpha_k} S_{n+1-i} = p_0^{\alpha_k} S_{n+1} + \sum_{i=1}^{n+1} p_i^{\alpha_k} S_{n+1-i} = (\varphi_1(h))^{-\alpha_k} S_{n+1} + \sum_{i=1}^{n+1} p_i^{\alpha_k} S_{n+1-i},$

$\sum_{i=0}^{n+1} p_i^{\alpha_k} V_{n+1-i} = p_0^{\alpha_k} V_{n+1} + \sum_{i=1}^{n+1} p_i^{\alpha_k} V_{n+1-i} = (\varphi_2(h))^{-\alpha_k} V_{n+1} + \sum_{i=1}^{n+1} p_i^{\alpha_k} V_{n+1-i},$

$\sum_{i=0}^{n+1} p_i^{\alpha_k} I_{n+1-i} = p_0^{\alpha_k} I_{n+1} + \sum_{i=1}^{n+1} p_i^{\alpha_k} I_{n+1-i} = (\varphi_3(h))^{-\alpha_k} I_{n+1} + \sum_{i=1}^{n+1} p_i^{\alpha_k} I_{n+1-i},$

$\sum_{i=0}^{n+1} p_i^{\alpha_k} R_{n+1-i} = p_0^{\alpha_k} R_{n+1} + \sum_{i=1}^{n+1} p_i^{\alpha_k} R_{n+1-i} = (\varphi_4(h))^{-\alpha_k} R_{n+1} + \sum_{i=1}^{n+1} p_i^{\alpha_k} R_{n+1-i},$

şeklinde ifade edilen düzenlemeler her bir denklem için yapıldıktan sonra (6.1.2) diferansiyel denklem sisteminde elde edilen denklemlerin kullanılması ve yalnız bırakma işlemi ile denklemin NSFD yaklaşımı ile ayrıklaştırılmış son hali,

$$S_{n+1}=\frac{a-H(p_1^{\alpha_k}S_n+\sum_{i=2}^{n+1}p_i^{\alpha_k}S_{n+1-i})}{((U_1)^{-\alpha_k}+a+c+bI_n)},$$

$$V_{n+1}=\frac{cS_n-H.(p_1^{\alpha_k}V_n+\sum_{i=2}^{n+1}p_i^{\alpha_k}V_{n+1-i})}{((U_2)^{-\alpha_k}+a+e+d\ I_n)},$$
$$I_{n+1}=\frac{-H(p_1^{\alpha_k}I_n+\sum_{i=2}^{n+1}p_i^{\alpha_k}I_{n+1-i})}{((U_3)^{-\alpha_k}+a+f-bS_n-dV_n)}, \tag{6.1.3}$$
$$R_{n+1}=\frac{eV_n+fI_n-H(p_1^{\alpha_k}R_n+\sum_{i=2}^{n+1}p_i^{\alpha_k}R_{n+1-i})}{((U_4)^{-\alpha_k}+a)}$$

şeklinde olacaktır. Burada, $j=1,2,3,4$ için $\sum_{k=1}^{Z}\frac{\nu(\alpha_k)}{Z}=H$ ve $\sum_{k=1}^{Z}\frac{\nu(\alpha_k)}{Z}(\varphi_j(h))^{-\alpha_k}=U_j$ olarak kullanılmıştır.

Teorem 6.1. Ayrıklaştırılmış (6.1.3) denklem sisteminde pozitif parametrelerin seçilmesi, pozitif başlangıç koşulları ve aşağıda ifade edilen özelliklerin sağlanması durumunda pozitif çözümlerin elde edilmesi garanti edilmiş olur.

i) $a > H(p_1^{\alpha_k}S_n+\sum_{i=2}^{n+1}p_i^{\alpha_k}S_{n+1-i})$

ii) $cS_n > H(p_1^{\alpha_k}V_n+\sum_{i=2}^{n+1}p_i^{\alpha_k}V_{n+1-i})$

iii) $(U_3)^{-\alpha_k} + a + f < bS_n + dV_n$

iv) $eV_n + fI_n > H(p_1^{\alpha_k} R_n + \sum_{i=2}^{n+1} p_i^{\alpha_k} R_{n+1-i})$

İspat

Pozitif parametreler ve pozitif başlangıç koşulları seçimlerine ilave olarak $\frac{a-H(p_1^{\alpha_k} S_n + \sum_{i=2}^{n+1} p_i^{\alpha_k} S_{n+1-i})}{((U_1)^{-\alpha_k}+a+c+bI_n)} > 0$ olması için $a > H(p_1^{\alpha_k} S_n + \sum_{i=2}^{n+1} p_i^{\alpha_k} S_{n+1-i})$ koşulu gerçekleşmelidir. V_{n+1} teriminin pozitifliği için ise $cS_n > H(p_1^{\alpha_k} V_n + \sum_{i=2}^{n+1} p_i^{\alpha_k} V_{n+1-i})$ ifadesi sağlanmalıdır. Elde edilen I_{n+1} ve R_{n+1} terimlerinin pozitif olması için ise $(U_3)^{-\alpha_k} + a + f < bS_n + dV_n$ ve $eV_n + fI_n > H(p_1^{\alpha_k} R_n + \sum_{i=2}^{n+1} p_i^{\alpha_k} R_{n+1-i})$ ifadeleri sağlanırsa pozitif parametreler ve pozitif başlangıç koşulları ile çözümler pozitif olarak elde edilecektir.

6.1.1. Ayrıklaştırılmış $SVIR$ epidemik modelinin kararlılık analizi

Bu bölümde öncelikle ayrıklaştırılmış modelin kararlılık analizi için denge noktası ve ardından analiz kısmında lazım olacak olan J Jacobian matrisi ele alınacaktır.
Kararlılık analizini araştıracağımız denge noktasını bulmak için,

$$\frac{a-H(p_1^{\alpha_k} S_n + \sum_{i=2}^{n+1} p_i^{\alpha_k} S_{n+1-i})}{((U_1)^{-\alpha_k}+a+c+bI_n)} = S_n \tag{6.1.4}$$

$$\frac{cS_n - H(p_1^{\alpha_k} V_n + \sum_{i=2}^{n+1} p_i^{\alpha_k} V_{n+1-i})}{((U_2)^{-\alpha_k}+a+e+d\ I_n)} = V_n \tag{6.1.5}$$

$$\frac{-H(p_1^{\alpha_k} I_n + \sum_{i=2}^{n+1} p_i^{\alpha_k} I_{n+1-i})}{((U_3)^{-\alpha_k}+a+f-bS_n-dV_n)} = I_n \tag{6.1.6}$$

$$\frac{eV_n + fI_n - H(p_1^{\alpha_k} R_n + \sum_{i=2}^{n+1} p_i^{\alpha_k} R_{n+1-i})}{((U_4)^{-\alpha_k}+a)} = R_n \tag{6.1.7}$$

denklem sisteminin çözümü gereklidir. Öncelikle (6.1.6) denkleminin çözümünün ancak $I_n = 0$ durumunda sağlanacağı aşikardır. Bulunan bu bilgi ile (6.1.4) denklemi için gerekli düzenlemeler yapılırsa $S_n = \frac{a}{((U_1)^{-\alpha_k}+a+c+H\sum_{i=1}^{n+1} p_i^{\alpha_k})}$ biçiminde bulunur. (6.1.5) denklemi ise bulunan bu iki ifadenin yerine yazılmasıyla $V_n = \frac{c\frac{a}{((U_1)^{-\alpha_k}+a+c+H\sum_{i=1}^{n+1} p_i^{\alpha_k})}}{((U_2)^{-\alpha_k}+a+e+H\sum_{i=1}^{n+1} p_i^{\alpha_k})}$ halini alır. Son olarak (6.1.7) denklemindeki düzenlemeler ile $R_n = \frac{\frac{eac((U_1)^{-\alpha_k}+a+c+H\sum_{i=1}^{n+1} p_i^{\alpha_k})}{((U_2)^{-\alpha_k}+a+e+H\sum_{i=1}^{n+1} p_i^{\alpha_k})}}{((U_4)^{-\alpha_k}+a+H\sum_{i=1}^{n+1} p_i^{\alpha_k})}$ olarak bulunur.

Bu durumda (6.1.3) sistemine ait denge noktası $D(S,V,I,R)$;

$S = \frac{a}{\left((U_1)^{-\alpha_k}+a+c+H\sum_{i=1}^{n+1} p_i^{\alpha_k}\right)}$,

$V = \frac{c\frac{a}{\left((U_1)^{-\alpha_k}+a+c+H\sum_{i=1}^{n+1} p_i^{\alpha_k}\right)}}{\left((U_2)^{-\alpha_k}+a+e+H\sum_{i=1}^{n+1} p_i^{\alpha_k}\right)}$,

$I = 0$,

$R = \frac{\frac{eac((U_1)^{-\alpha_k}+a+c+H\sum_{i=1}^{n+1} p_i^{\alpha_k})}{((U_2)^{-\alpha_k}+a+e+H\sum_{i=1}^{n+1} p_i^{\alpha_k})}}{((U_4)^{-\alpha_k}+a+H\sum_{i=1}^{n+1} p_i^{\alpha_k})}$)

olarak hesaplanır.

(6.1.3) ayrıklaştırılmış sistemi için J Jacobian matrisi:

$$J_D(S,V,I,R) = \begin{pmatrix} j_{11} & 0 & j_{13} & 0 \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} & 0 \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} & 0 \\ 0 & j_{42} & j_{43} & j_{44} \end{pmatrix}$$

biçimindedir ki burada

$j_{11} = \frac{-Hp_1^{\alpha_k}}{\left((U_1)^{-\alpha_k}+a+c+bI_n\right)}$, $j_{13} = -b\left(\frac{a-H\left(p_1^{\alpha_k}S_n+\sum_{i=2}^{n+1} p_i^{\alpha_k}S_{n+1-i}\right)}{\left((U_1)^{-\alpha_k}+a+c+bI_n\right)^2}\right)$,

$j_{21} = \frac{c}{((U_2)^{-\alpha_k}+a+e+dI_n)}$, $j_{22} = \frac{-Hp_1^{\alpha_k}}{((U_2)^{-\alpha_k}+a+e+dI_n)}$,

$j_{23} = -d\left(\frac{cS_n-H\left(p_1^{\alpha_k}V_n+\sum_{i=2}^{n+1} p_i^{\alpha_k}V_{n+1-i}\right)}{\left((U_2)^{-\alpha_k}+a+e+dI_n\right)^2}\right)$,

$j_{31} = b\left(\frac{-H\left(p_1^{\alpha_k}I_n+\sum_{i=2}^{n+1} p_i^{\alpha_k}I_{n+1-i}\right)}{\left((U_3)^{-\alpha_k}+a+f-bS_n-dV_n\right)^2}\right)$, $j_{32} = d\left(\frac{-H\left(p_1^{\alpha_k}I_n+\sum_{i=2}^{n+1} p_i^{\alpha_k}I_{n+1-i}\right)}{\left((U_3)^{-\alpha_k}+a+f-bS_n-d.V_n\right)^2}\right)$,

$j_{33} = \frac{-Hp_1^{\alpha_k}}{((U_3)^{-\alpha_k}+a+f-bS_n-dV_n)}$, $j_{42} = \frac{e}{((U_4)^{-\alpha_k}+a)}$, $j_{43} = \frac{f}{((U_4)^{-\alpha_k}+a)}$, $j_{44} = \frac{-Hp_1^{\alpha_k}}{((U_4)^{-\alpha_k}+a)}$,

olacak şekilde Jacobian matrisi elemanları bulunur.

Bu tarz epidemik modellerde nüfusun durumunun kontrol edilmesi amacıyla sınır koşulları ve bunların belirlenmesi oldukça önemlidir. R_0 olarak ifade edilen ve temel üreme sayısı olarak da bilinen sayının bulunması kararlılık için bu sebeple önemlidir. R_0 sayısının bulunması için Jacobian matrisi $J = P - S$ biçiminde iki matris farkı olarak yazılır. Daha sonra bulunan bu matrisler kullanılarak PS^{-1} matrisi yazılır ve bu matrisin determinantı hesaplanırsa (6.1.1) denklem sistemi için ait temel üreme sayısı;

$$R_0 = \frac{acd(a+e)}{c(a+f)+a(-b+f+a)}$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 6.2. $R_0 > 1$ için, (6.1.3) denklem sistemine ait D denge noktası aşağıdaki koşulların sağlanması durumunda lokal asimptotik kararlıdır, aksi halde kararsızdır.

i) $\left|-Hp_1^{\alpha_k}\right| < |\left((U_1)^{-\alpha_k}+a+c\right)|$

ii) $\left|-Hp_1^{\alpha_k}\right| < |((U_2)^{-\alpha_k}+a+e)|$

iii) $\left|-Hp_1^{\alpha_k}\right| < |((U_3)^{-\alpha_k}+a+f-b\frac{a}{((U_1)^{-\alpha_k}+a+c+H\sum_{i=1}^{n+1}p_i^{\alpha_k})}-d\frac{c\frac{a}{((U_1)^{-\alpha_k}+a+c+H.\sum_{i=1}^{n+1}p_i^{\alpha_k})}}{((U_2)^{-\alpha_k}+a+e+H\sum_{i=1}^{n+1}p_i^{\alpha_k})})|$

iv) $\left|-Hp_1^{\alpha_k}\right| < |((U_4)^{-\alpha_k}+a)|$

İspat

Elde edilen $D(S,V,I,R)$ denge noktası Jacobian matrisinde yerine yazılırsa;

$$J_D(S,V,I,R)=\begin{pmatrix} j_{11} & 0 & j_{13} & 0 \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} & 0 \\ 0 & 0 & j_{33} & 0 \\ 0 & j_{42} & j_{43} & j_{44} \end{pmatrix}$$

$$j_{11}=\frac{-Hp_1^{\alpha_k}}{\left((U_1)^{-\alpha_k}+a+c\right)},\ j_{13}=-b\left(\frac{a-H\left(p_1^{\alpha_k}\frac{a}{((U_1)^{-\alpha_k}+a+c+H\sum_{i=1}^{n+1}p_i^{\alpha_k})}\right)}{\left((U_1)^{-\alpha_k}+a+c\right)^2}\right),$$

$$j_{21}=\frac{c}{((U_2)^{-\alpha_k}+a+e)},\ j_{22}=\frac{-Hp_1^{\alpha_k}}{((U_2)^{-\alpha_k}+a+e)},$$

$$j_{23}=-d\left(\frac{c\frac{a}{((U_1)^{-\alpha_k}+a+c+H\sum_{i=1}^{n+1}p_i^{\alpha_k})}-H\left(p_1^{\alpha_k}\frac{c\frac{a}{((U_1)^{-\alpha_k}+a+c+H\sum_{i=1}^{n+1}p_i^{\alpha_k})}}{((U_2)^{-\alpha_k}+a+e+H\sum_{i=1}^{n+1}p_i^{\alpha_k})}\right)}{\left((U_2)^{-\alpha_k}+a+e\right)^2}\right),$$

$$j_{33}=\frac{-Hp_1^{\alpha_k}}{((U_3)^{-\alpha_k}+a+f-b\frac{a}{((U_1)^{-\alpha_k}+a+c+H\sum_{i=1}^{n+1}p_i^{\alpha_k})}-d\frac{c.\frac{a}{((U_1)^{-\alpha_k}+a+c+H\sum_{i=1}^{n+1}p_i^{\alpha_k})}}{((U_2)^{-\alpha_k}+a+e+H\sum_{i=1}^{n+1}p_i^{\alpha_k})})},$$

$$j_{42}=\frac{e}{((U_4)^{-\alpha_k}+a)},\ j_{43}=\frac{f}{((U_4)^{-\alpha_k}+a)},\ j_{44}=\frac{-Hp_1^{\alpha_k}}{((U_4)^{-\alpha_k}+a)},$$

şeklinde bulunur. Bulunan bu matris için $|J-\lambda I|=0$ determinantının kullanılması ile öz değerler

$$\lambda_1=\frac{-Hp_1^{\alpha_k}}{\left((U_1)^{-\alpha_k}+a+c\right)},$$

$$\lambda_2=\frac{-Hp_1^{\alpha_k}}{((U_2)^{-\alpha_k}+a+e)},$$

$$\lambda_3=\frac{-Hp_1^{\alpha_k}}{((U_3)^{-\alpha_k}+a+f-b\frac{a}{((U_1)^{-\alpha_k}+a+c+H\sum_{i=1}^{n+1}p_i^{\alpha_k})}-d\frac{c\frac{a}{((U_1)^{-\alpha_k}+a+c+H\sum_{i=1}^{n+1}p_i^{\alpha_k})}}{((U_2)^{-\alpha_k}+a+e+H\sum_{i=1}^{n+1}p_i^{\alpha_k})})},$$

$$\lambda_4=\frac{-Hp_1^{\alpha_k}}{((U_4)^{-\alpha_k}+a)},$$

olarak bulunur. Burada dikkat edilirse λ_3 dışındaki diğer tüm öz değerler için pozitif değerler kullanıldığında sonuçlarının negatif olduğu aşikar bir biçimde görülmektedir. λ_3 için ise R_0 temel üreme ifadesi 1'den büyük olarak seçilirse yani $acd(a+e) > c(a+f)+a(-b+f+a)$ alınırsa, bu durumda λ_3 ifadesinin paydası pozitif olmak zorunda kalır ve pay kısmının negatif olmasından kaynaklı negatif olarak bulunur.

Bütün λ değerlerinin mutlak değerlerinin 1'den küçük olması için payda kısımlarının pay kısımlarından mutlak değerce daha büyük olması gerekliliğinden dolayı belirtilen $(i)-(iv)$ ifadeleri sağlanırsa D denge noktasının lokal asimptotik kararlı olduğu görülür.

6.1.2. *SVIR* epidemik modelinin nümerik simülasyonu

Bu bölümde ayrıklaştırılmış (6.1.3) denklem sistemi için elde edilen nümerik analizlere ait grafikler verilmiştir. Bu grafiklerde ve bulunan D denge noktası için kararlılık analizinde aşağıda ifade edilen parametre değerleri kullanılmıştır. Öncelikle başlangıç değerleri $S(0) = 0.4,\quad V(0) = 0.4,\quad I(0) = 0.2$ ve $R(0) = 0.1$ olarak alınmış ve parametreler ise $a = 1$, $b = 15$, $c = 15$, $d = 10$, $e = 4$ ve $f = 2$ şeklinde seçilmiştir (Ahmad vd. 2019). Bu seçimler ile $R_0 = 22,272727 > 1$ olarak bulunmuştur.

(6.1.3) ayrıklaştırılmış denklem sisteminde bu parametre ve başlangıç koşullarının kullanılması ve yoğunluk fonksiyonunun $v(\alpha)$ =1, $h = 0.8$ ve $\alpha = 0.4$, seçilmesiyle sisteme ait çözüm simülasyonları Şekil (6.1)'de verilmiştir. Daha sonra farklı $v(\alpha)$ ifadeleri için sistema ait tüm fonksiyon grafikleri Şekil (6.1)- (6.5)' de gösterilmiştir.

D denge noktasının Jacobian matrisinde yerine yazılmasıyla sistemin karakteristik denklemi

$$P(\lambda) = \lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

biçiminde olup buradaki katsayılar $a_3 = 0.012887$, $a_2 = 0.272094.10^{-4}$, $a_1 = 0.114651.10^{-7}$ ve $a_0 = 0.103291.10^{-11}$ olarak elde edilir. Dördüncü bölüm Lemma (4.5.3)'de ifade edilen Jury testine göre

i) 1+a_3+a_2+a_1+a_0=1.012191 > 0,

ii) 1-a_3+a_2-a_1+a_0=0.987139 > 0,

iii) $|a_0| = 0.103291.10^{-11} < 1$,

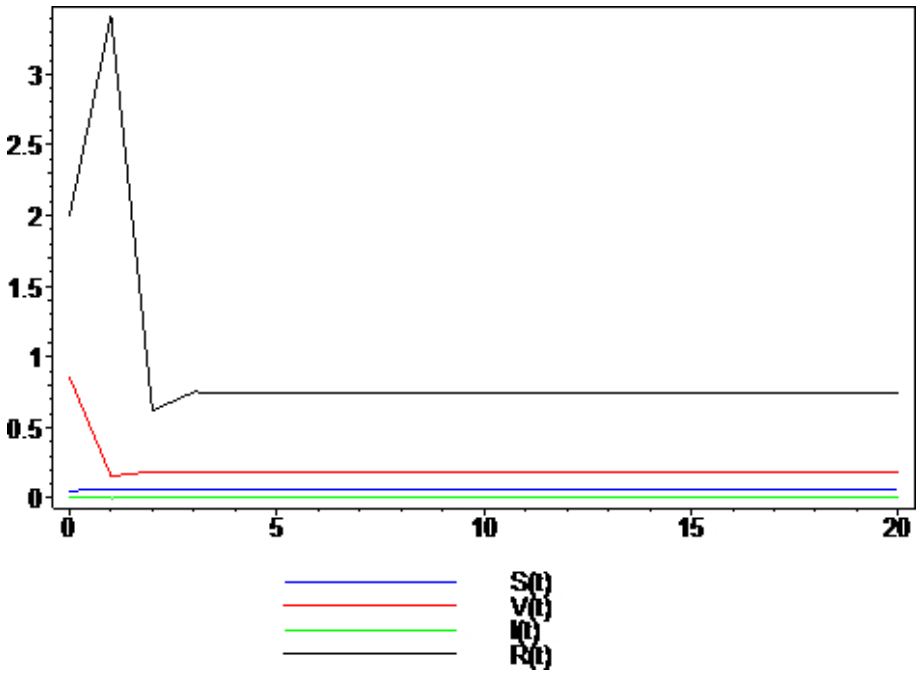
iv) $|s_{2,0}| = 1 > |s_{2,3}| = 0.114651.10^{-7}$,

v) $|s_{3,0}| = 1 > |s_{3,2}| = 0.272093.10^{-4}$,

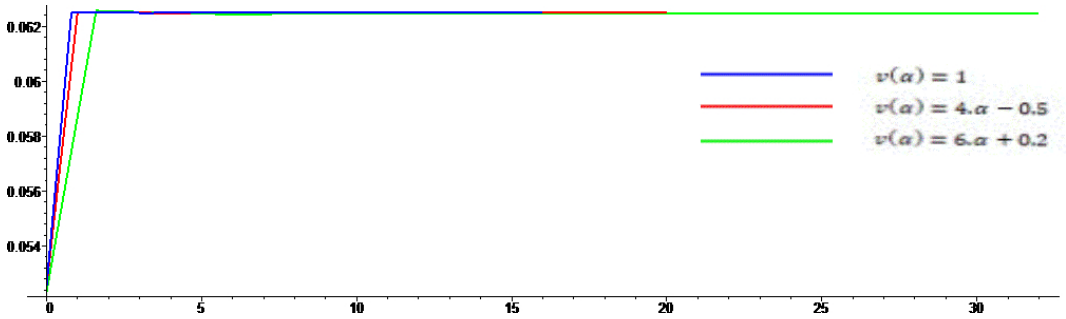
elde edilir. Bu durumda tüm öz değerler için $|\lambda| < 1$ sağlanması nedeniyle D lokal asimptotik kararlı bir denge noktasıdır. Karakteristik denklem bu nokta için çözülürse

$$\lambda_1 = -0.00012, \quad \lambda_2 = -0.010369, \quad \lambda_3 = -0.000399, \quad \lambda_4 = -0.001993$$

şeklinde elde edilir, yine buradan da D denge noktasının lokal asimptotik kararlı olduğu görülür.



Şekil 6.1. $v(\alpha) = 1$ için $SVIR$ sistemine ait NSFD ile çözüm simülasyonu



Şekil 6.2. Farklı $v(\alpha)$ ifadeleri için $S(t)$ fonksiyonunun NSFD ile çözüm grafikleri

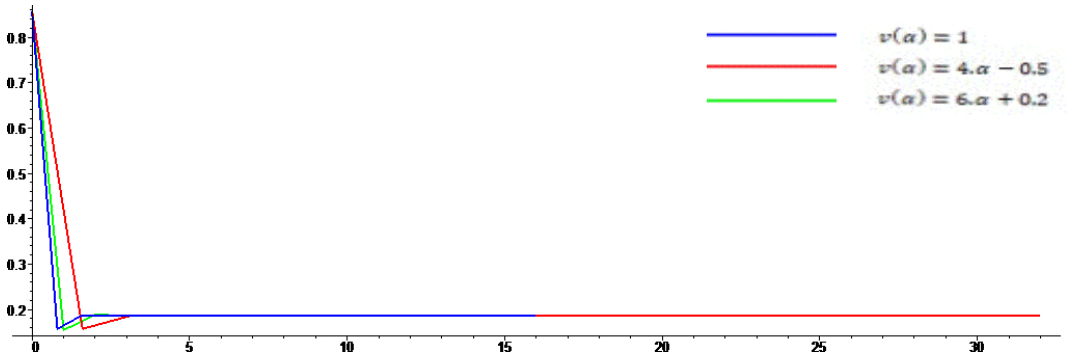
Çizelge (6.1) de, farklı zaman adımı boyutunun yani h değerlerinin Açık Euler, Kapalı Euler, Theta metodu, Runge-Kutta yöntemi ve NSFD yöntemi üzerindeki etkisi gösterilmiştir. Burada, daha büyük adım boyutu için NSFD ayrıklaştırmasının klasik yöntemlerden daha etkili olduğu açıkça görülmektedir. Çizelge (6.2) de, beş sayısal yöntem için CPU sürelerini ait çizelge verilmiştir. Kendi aralarında değerlendirilen sayısal yöntemlerin çok da farklı olmadığını söyleyebiliriz. Burada, sistemin dinamiklerini göstermek için MATLAB paket programı kullanarak sayısal hesaplamalar yapılmıştır.

h	Açık Euler	Kapalı Euler	Theta Metodu ($\theta = 0.6$)	Runge-Kutta (4th)	NSFD
0.0001	Yakınsak	Yakınsak	Yakınsak	Yakınsak	Yakınsak
0.001	Yakınsak	Yakınsak	Yakınsak	Yakınsak	Yakınsak
0.01	Yakınsak	Yakınsak	Yakınsak	Yakınsak	Yakınsak
0.1	Iraksak	Yakınsak	Yakınsak	Yakınsak	Yakınsak
1	Iraksak	Iraksak	Iraksak	Yakınsak	Yakınsak
10	Iraksak	Iraksak	Iraksak	Iraksak	Yakınsak
100	Iraksak	Iraksak	Iraksak	Iraksak	Yakınsak

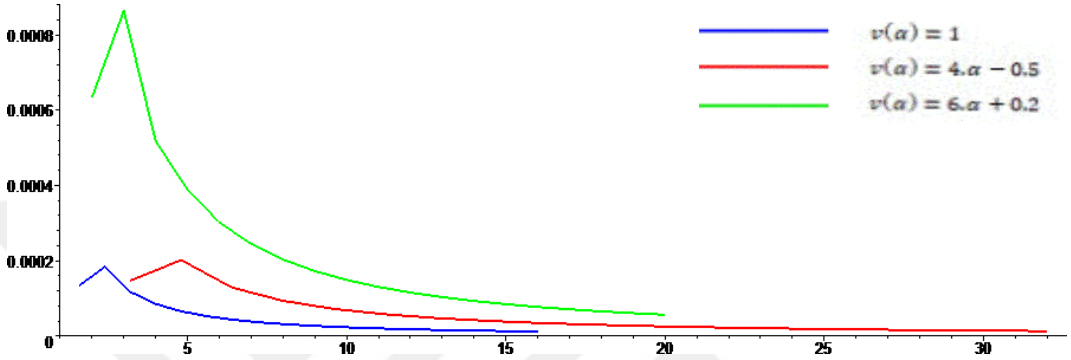
Çizelge 6.1. Açık ve kapalı yöntemlerin yakınsaklık analizi

α	Açık Euler	Kapalı Euler	Theta Metodu ($\theta = 0.6$)	Runge-Kutta (4th)	NSFD
$\alpha = 0.1$	0.6918	0.7013	0.7021	0.9258	0.7213
$\alpha = 0.7$	0.7113	0.7115	0.7218	0.9568	0.7417
$\alpha = 1$	0.7229	0.7318	0.7517	1.1015	0.8015
$\alpha = 1.2$	0.7518	0.7745	0.7818	1.0891	0.8123

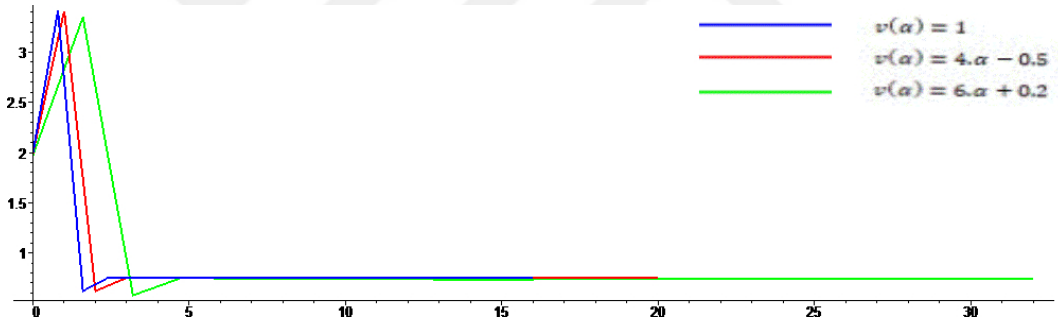
Çizelge 6.2. Farklı α değerleri için CPU zamanları ($v(\alpha) = \alpha,\ h = 0.01$)



Şekil 6.3. Farklı $v(\alpha)$ ifadeleri için $V(t)$ fonksiyonunun NSFD ile çözüm grafikleri



Şekil 6.4. Farklı $v(\alpha)$ ifadeleri için $I(t)$ fonksiyonunun NSFD ile çözüm grafikleri



Şekil 6.5. Farklı $v(\alpha)$ ifadeleri için $R(t)$ fonksiyonunun NSFD ile çözüm grafikleri

Elde edilen bilgiler, grafikler ve veriler ile dağılımlı mertebeden diferansiyel denklemlerin bu tarz epidemik olan modellerde kullanılmasının oldukça faydalı ve önemli olduğu görülmüştür. Çünkü dağılımlı mertebeden denklemlerin içerdiği yoğunluk fonksiyonu yani $v(\alpha)$ değeri ile yorum ve analiz kısmında tek bir denklem sayesinde birden fazla denklem tipine ait yorum esnekliği geliştirildiği görülmüştür.

6.2. Dağılımlı Mertebeden Hanta Virüs Modeli

Hanta virüsü fareler üzerinden insanlara bulaşan ve insanlar üzerinde ölümcül etkileri olan bir RNA virüsüdür. Hanta virüsüne ait ilk modelleme Abramson ve Kenkre (2002) tarafından ortaya konmuştur. Bu çalışmada Abramson ve Kenkre, Hanta virüs sistemine ait denklemi oluşturmuş ve virüsün etkisi üzerine analizlerde bulunmuşlardır. Sonrasında, Abramson vd. (2003) ise Hanta virüs salgısı esnasında oluşabilecek dalgalanmalar üzerine çalışmıştır. Hanta virüs ve etkileri ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır. Örneğin, Chen and Clemence (2006) adi mertebeden virüs sitemine ait nümerik çözümleri elde etmişlerdir. Allen vd. (2006), Hanta virüsü sitemine ait iki yeni model oluşturmuşlardır. Rida vd. (2012) ise Hanta virüs siteminin kesirli mertebeden halini incelemişlerdir.

Bu sisteme ait farklı metotlar ile de çözümler araştırılmıştır. Hem adi hem de kesirli mertebeden Hanta virüs sistemine ait analitik çözümü Lie simetri metotu yardımı ile Ongun ve Kocabıyık (2017) elde etmişlerdir. Hanta virüsünün tarihsel gelişimi ve daha farklı çalışmalar için Ruan ve Jianhong (2009), Karadem ve Ongun (2016), Kocabıyık ve Ongun (2018) ve Ongun ve Arslan (2018) kaynaklarına bakılabilir.
Bu bölümde Abramson ve Kenkre (2002) tarafından ifade edilmiş olan Hanta virüs sitemine ait adi mertebeden diferansiyel denklem sistemi öncelikle dağılımlı mertebeden türeve sahip biçimde ifade edilmiştir. Bu durumda elde edilen yeni diferansiyel denklem;

$$D_t^{u(\alpha)} M_s = b(M_s + M_i) - cM_s - \frac{M_s(M_s + M_i)}{K} - aM_sM_i$$

$$D_t^{u(\alpha)} M_i = -cM_i - \frac{M_i(M_s + M_i)}{K} + aM_sM_i \tag{6.2.1}$$

şeklinde olacaktır. Epidemik olan bu sistemde;
M_s : Hastalığa maruz kalmayan fare popülasyonunu,
M_i : Hastalığa maruz kalan fare popülasyonunu,
a: Hastalığa ait bulaşma oranını,
b: Popülasyona ait doğum oranını,
c: Popülasyona ait ölüm oranını,
K: Hastalığın çevre etkisi altında taşıma kapasitesini ifade etmektedir.

(6.2.1) denklemi ile tanımlanan Hanta virüs modeline ait dağılımlı mertebeden diferansiyel denklem sisteminin ayrıklaştırılması Bölüm 6.1'de olduğu gibi Standard olmayan sonlu fark yöntemi, yaklaşık Grünwald-Letnikov formülü ve klasik quadrature formülü kullanılarak yapılmıştır. (6.2.1) ile ifade edilen dağılımlı mertebeden diferansiyel denklem sistemi verilen bu tanımlar yardımı ile ayrıklaştırılırsa,

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{u(\alpha_k)}{N} \sum_{i=0}^{n+1} q_i^{\alpha_k} {M^s}_{n+1-i} = b\ \left({M^s}_n + {M^i}_n\right) - c{M^s}_n - \frac{{M^s}_{n+1}\ \left({M^s}_n + {M^i}_n\right)}{K} - a\,{M^s}_{n+1}{M^i}_n \tag{6.2.2}$$

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{u(\alpha_k)}{N} \sum_{i=0}^{n+1} q_i^{\alpha_k} {M^i}_{n+1-i} = -cM_n^i - \frac{M_{n+1}^i (M_n^i + M_n^s)}{K} + aM_{n+1}^i M_n^s \tag{6.2.3}$$

halini alır. Ayrıklaştırılmış bu sistemde $i = 1,2$ ve $0 < \alpha_k < 1\ icin\ \mathrm{q}_0^{\alpha_k} = (\theta_i(h))^{-\alpha_k}$ dir. NSFD şeması için ise denominatör fonksiyonları;

$$\theta_1(h) = \frac{1 - e^{(c-b)h}}{b-c},\ \ \theta_2(h) = \frac{1 - e^{-ch}}{c},$$

şeklinde seçilmiştir.

(6.2.2) ve (6.2.3) denklemleri ile verilen ayrıklaştırılmış sistemin sol tarafındaki bir teriminin açılması ve $i = 1,2$ için $\sum_{k=1}^{N} \frac{u(\alpha_k)}{N} = G$ ve $\sum_{k=1}^{N} \frac{u(\alpha_k)}{N}\ \theta_i(h) = P_i$ kısaltmalarının kullanılması ile (6.2.1) sisteminin açık NSFD yaklaşımı ile ayrıklaştırılmış son hali,

$${M^s}_{n+1} = \frac{\mathrm{b}\ {M^i}_n + (b-c){M^s}_n - G\ \sum_{i=1}^{n+1} q_i^{\alpha_k} {M^s}_{n+1-i}}{((P_1)^{-\alpha_k} + \frac{({M^s}_n + {M^i}_n)}{K} + a{M^i}_n)} \tag{6.2.4}$$

$${M^i}_{n+1} = \frac{-cM_n^i - G\ \sum_{i=1}^{n+1} q_i^{\alpha_k} {M^i}_{n+1-i}}{((P_2)^{-\alpha_k} + \frac{({M^s}_n + {M^i}_n)}{K} - aM_n^s)} \tag{6.2.5}$$

şeklinde olur.

6.2.1. Ayrıklaştırılmış Hanta virüs modelinin kararlılık analizi

Ayrıklaştırılmış sistemin kararlılık analizinin yapılması için bu analizin yapılabileceği denge noktası gereklidir. Sisteme ait denge noktasının bulunabilmesi için ise

$${M^s}_n = \frac{\mathrm{b}\ {M^i}_n + (b-c){M^s}_n - G\ \sum_{i=1}^{n+1} q_i^{\alpha_k} {M^s}_n}{((P_1)^{-\alpha_k} + \frac{({M^s}_n + {M^i}_n)}{K} + a{M^i}_n)},$$

$$M^i{}_n = \frac{-c\ M^i{}_n - G\ \sum_{i=1}^{n+1} q_i^{\alpha_k} M^i{}_n}{((P_2)^{-\alpha_k} + \frac{(M^s{}_n + M^i{}_n)}{K} - aM^s{}_n)}$$

denklemlerinin çözümü gereklidir. Bu çözüm için iki farklı durum söz konusudur.

i) $M^s{}_n = 0$ olarak seçilirse sisteme ait ilk denge noktası $E_1 = (M^s{}_n,\ M^i{}_n) = (0,0)$ şeklinde bulunur.

ii) $M^s{}_n \neq 0$ olarak kabul edilirse bu durumda denge noktası;

$$E_2\ = (M^s{}_n,\ M^i{}_n) = (K\ (b - c - \mathrm{G}\ \sum_{i=1}^{n+1} q_i^{\alpha_k} - (P_1)^{-\alpha_k}), 0)$$

olarak bulunur. Bulunan bu denge noktalarının analizi için ayrıklaştırılmış sistemin $J(M_s, M_i)$ Jacobian matrisi:

$$J(M_s, M_i) = \begin{pmatrix} \frac{(b-c) - G\ \sum_{i=1}^{n+1} q_i^{\alpha_k}}{\left((P_1)^{-\alpha_k} + \frac{(M^s{}_n + M^i{}_n)}{K} + aM^i{}_n\right)} - \frac{\mathrm{b}\ M^i{}_n + (b-c)M^s{}_n - G\ \sum_{i=1}^{n+1} q_i^{\alpha_k} M^s{}_n}{\left((P_1)^{-\alpha_k} + \frac{(M^s{}_n + M^i{}_n)}{K} + aM^i{}_n\right)^2 K} & j_{12} \\ \frac{(-c\ M^i{}_n - G\ \sum_{i=1}^{n+1} q_i^{\alpha_k} M^i{}_n)(\frac{1}{K} - a)}{((P_2)^{-\alpha_k} + \frac{(M^s{}_n + M^i{}_n)}{K} - aM^s{}_n)^2} & j_{22} \end{pmatrix}$$

şeklinde olur. Burada

$$j_{12} = \frac{b}{\left((P_1)^{-\alpha_k} + \frac{(M^s{}_n + M^i{}_n)}{K} + aM^i{}_n\right)} - \frac{(\frac{1}{K} + a))\mathrm{b}\ M^i{}_n + (b-c)M^s{}_n - G\ \sum_{i=1}^{n+1} q_i^{\alpha_k} M^s{}_n}{\left((P_1)^{-\alpha_k} + \frac{(M^s{}_n + M^i{}_n)}{K} + aM^i{}_n\right)^2},$$

$$j_{22} = \frac{(-c - G\sum_{i=1}^{n+1} q_i^{\alpha_k})}{((P_2)^{-\alpha_k} + \frac{(M^s{}_n + M^i{}_n)}{K} - aM^s{}_n)} - \frac{(-c\ M^i{}_n - G\ \sum_{i=1}^{n+1} q_i^{\alpha_k} M^i{}_n)(\frac{1}{K})}{((P_2)^{-\alpha_k} + \frac{(M^s{}_n + M^i{}_n)}{K} - aM^s{}_n)^2}$$ olarak elde edilir.

Teorem 6.3. E_1 denge noktasının lokal asimptotik kararlı olması için

i) $\left|(b-c) - G\ \sum_{i=1}^{n+1} q_i^{\alpha_k}\right| < |\left((P_1)^{-\alpha_k}\right)|$

ii) $\left|-c - G\ \sum_{i=1}^{n+1} q_i^{\alpha_k}\right| < |\left((P_2)^{-\alpha_k}\right)|$

koşullarının sağlanması gereklidir.

İspat

E_1 denge noktası $J(M_s, M_i)$ Jacobian matrisinde yerine yazılırsa;

$$\begin{pmatrix} \frac{(b-c) - G\ \sum_{i=1}^{n+1} q_i^{\alpha_k}}{\left((P_1)^{-\alpha_k}\right)} & \frac{\mathrm{b}}{\left((P_1)^{-\alpha_k}\right)} \\ 0 & \frac{-c\ - G\ \sum_{i=1}^{n+1} q_i^{\alpha_k}}{((P_2)^{-\alpha_k})} \end{pmatrix}$$

ifadesi bulunur. Elde edilen bu Jacobian matrisinde $|J - \lambda I| = 0$ determinantı kullanılırsa öz değerler

$$\lambda_1=\frac{(b-c)-G\sum_{i=1}^{n+1}q_i^{\alpha_k}}{\left((P_1)^{-\alpha_k}\right)},$$

$$\lambda_2=\frac{-c\ -G\sum_{i=1}^{n+1}q_i^{\alpha_k}}{\left((P_2)^{-\alpha_k}\right)},$$

şeklinde bulunur. Önceki bölümde belirtilen kararlı olma şartı nedeniyle öz değerlerin mutlak değerlerinin 1'den küçük olması gerekir. Bu halde;

$$\left|\frac{(b-c)-G\sum_{i=1}^{n+1}q_i^{\alpha_k}}{\left((P_1)^{-\alpha_k}\right)}\right|<1,$$

$$\left|\frac{-c\ -G\sum_{i=1}^{n+1}q_i^{\alpha_k}}{\left((P_2)^{-\alpha_k}\right)}\right|<1$$

olmalıdır. Bu durumda kararlılık için gerekli düzenlemeler yapılırsa $\left|(b-c)-G\sum_{i=1}^{n+1}q_i^{\alpha_k}\right| < \left|\left((P_1)^{-\alpha_k}\right)\right|$ ve $\left|-c-G\sum_{i=1}^{n+1}q_i^{\alpha_k}\right| < \left|\left((P_2)^{-\alpha_k}\right)\right|$ şartlarının sağlanması durumunda E_1 denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

Teorem 6.4. E_2 denge noktası, aşağıdaki koşulların sağlanması durumunda lokal asimptotik kararlıdır.

i) $\left|\frac{(P_1)^{-\alpha_k}}{b-c\ -G\sum_{i=1}^{n+1}q_i^{\alpha_k}}\right|<1,$
ii) $\left|-c\ -G\sum_{i=1}^{n+1}q_i^{\alpha_k}\right|<\left|((P_2)^{-\alpha_k}+(1-aK)\ (b-c-G\sum_{i=1}^{n+1}q_i^{\alpha_k}-(P_1)^{-\alpha_k}))\right|.$

İspat

E_2 denge noktası $J(M_s,M_i)$ Jacobian matrisinde yerine yazılırsa;

$$\begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{pmatrix}$$

matrisi aşağıdaki terimler ile ifade edilebilir:

$$j_{11}=\frac{(b-c)-G\sum_{i=1}^{n+1}q_i^{\alpha_k}}{\left((P_1)^{-\alpha_k}+\ (b-c-G\sum_{i=1}^{n+1}q_i^{\alpha_k}-(P_1)^{-\alpha_k})\right)}$$

$$-\frac{(b-c)(K\ (b-c-G\sum_{i=1}^{n+1}q_i^{\alpha_k}-(P_1)^{-\alpha_k}))-G\sum_{i=1}^{n+1}q_i^{\alpha_k}(K\ (b-c-G\sum_{i=1}^{n+1}q_i^{\alpha_k}-(P_1)^{-\alpha_k}))}{\left((P_1)^{-\alpha_k}+\ (b-c-G\sum_{i=1}^{n+1}q_i^{\alpha_k}-(P_1)^{-\alpha_k})\right)^2K},$$

$$j_{12} = \frac{\text{b}}{\left((P_1)^{-\alpha_k}+(b-c-G\ \sum_{i=1}^{n+1} q_i^{\alpha_k}-(P_1)^{-\alpha_k}),\right)}$$

$$-\frac{((b-c)(K\ (b-c-G\ \sum_{i=1}^{n+1} q_i^{\alpha_k}-(P_1)^{-\alpha_k}))-G\ \sum_{i=1}^{n+1} q_i^{\alpha_k}(K\ (b-c-G\ \sum_{i=1}^{n+1} q_i^{\alpha_k}-(P_1)^{-\alpha_k})))(\frac{1}{K}+a)}{\left((P_1)^{-\alpha_k}+(b-c-G\ \sum_{i=1}^{n+1} q_i^{\alpha_k}-(P_1)^{-\alpha_k})\right)^2},$$

$$j_{21} = 0,$$

$$j_{22} = \frac{-c\ -G\ \sum_{i=1}^{n+1} q_i^{\alpha_k}}{((P_2)^{-\alpha_k}+\ (b-c-G\ \sum_{i=1}^{n+1} q_i^{\alpha_k}-(P_1)^{-\alpha_k})-a(K\ (b-c-G\ \sum_{i=1}^{n+1} q_i^{\alpha_k}-(P_1)^{-\alpha_k})))}\ .$$

Elde edilen bu Jacobian matrisinde $|J-\lambda I| = 0$ determinantı kullanılırsa öz değerler

$$\lambda_1 = \frac{(P_1)^{-\alpha_k}}{b-c\ -G\ \sum_{i=1}^{n+1} q_i^{\alpha_k}},$$

$$\lambda_2 = \frac{-c\ -G\ \sum_{i=1}^{n+1} q_i^{\alpha_k}}{((P_2)^{-\alpha_k}+(1-aK)\ (b-c-G\ \sum_{i=1}^{n+1} q_i^{\alpha_k}-(P_1)^{-\alpha_k}))},$$

şeklinde bulunur. Belirtilen yakınsak olma şartı ile $|\lambda_1| < 1$ ve $|\lambda_2| < 1$ olmalıdır. Bu durumda gerekli işlemler ile E_2 denge noktasının lokal asimptotik kararlılığı için $i)$ ve $ii)$ şartlarının sağlanması gerektiği görülmektedir.

6.2.2. Hanta virüs modelinin nümerik simülasyonu

Bu bölümde öncelikle ayrıklaştırılmış sistemden elde edilen denge noktalarının kararlılık analizleri incelenecektir. Bunun için ayrıklaştırılmış sistemdeki sabitler Ongun ve Kocabıyık (2017) makalesindeki koşullar kullanılarak $a = 0.1,\ b = 1,\ c = 0.5$ ve $K = 20$ olarak seçilmiş, başlangıç koşulları ise $M_s(0) = 25$ ve $M_i(0) = 15$ olarak alınmıştır. E_1 denge noktasının kararlılığı için ifade edilen Teorem (6.3) de gerekli sabitlerin yerine yazılmasıyla

$$\left|(b-c)-G\sum_{i=1}^{n+1} q_i^{\alpha_k}\right| = 0.499 > \left|\left((P_1)^{-\alpha_k}\right)\right| = 0.0015,$$

$$\left|-c-G\sum_{i=1}^{n+1} q_i^{\alpha_k}\right| = 0.501 > \left|\left((P_2)^{-\alpha_k}\right)\right| = 0.0015$$

olduğu ve bu sabitler ile ifade edilen özelliklerin sağlanmadığı görülmüştür. Bu halde E_1 denge noktası kararsızdır.

Jury testi yardımı ile kararlılık incelenmek istenirse, E_1 denge noktasının Jacobian matrisinde yerine yazılmasıyla sistemin karakteristik denklemi

$$P(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

biçiminde olup buradaki katsayılar $a_1 = 1.2615, a_0 = -99476.6615$ olarak elde edilir. Jury testine göre

i) $1 + a_1 + a_0 = -99474.4036 < 0,$
ii) $1 - a_1 + a_0 = -99476.92686 < 0,$
iii) $|a_0| = -99476.6615 < 1,$

olup bu kriterlerden sadece *iii*) sağlanmaktadır. Bu halde E_1 denge noktasının kararsız olduğu söylenebilir. Karakteristik denklemin çözümü ile

$$\lambda_1 = 314.7690, \;\; \lambda_2 = -316.0306$$

şeklinde elde edilmiş olup tüm öz değerlerin mutlak değerleri 1'den küçük değildir.

E_2 denge noktasının kararlılığı için Teorem (6.4) de ifade edilen koşullarda sabitlerin ve başlangıç koşullarının yerine yazılması ile bu ifadeler

$$\left|\frac{(P_1)^{-\alpha_k}}{b-c\ -G\ \sum_{i=1}^{n+1} q_i^{\alpha_k}}\right| = 0.003 < 1,$$

$$\left|-c\ -G\ \sum_{i=1}^{n+1} q_i^{\alpha_k}\right| = 0.501 < \left|((P_2)^{-\alpha_k} + (1-aK)\ (b-c-G\ \sum_{i=1}^{n+1} q_i^{\alpha_k} - (P_1)^{-\alpha_k}))\right| = 2.663$$

şeklinde olup Teorem (6.4) şartları sağlanmaktadır yani E_2 denge noktası bu şartlar altında lokal asimptotik kararlıdır. Jacobian matrisinde noktanın ve parametrelerin yerine yazılmasıyla sistemin karakteristik denklemi

$$P(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

biçiminde olup buradaki katsayılar $a_1 = 0.0701, a_0 = -0.0221$ olarak elde edilir. Jury testine göre

i) $1 + a_1 + a_0 = 1.0480 > 0$,

ii) $1 - a_1 + a_0 = 0.9078 > 0$,

iii) $|a_0| = 0.0221 < 1$

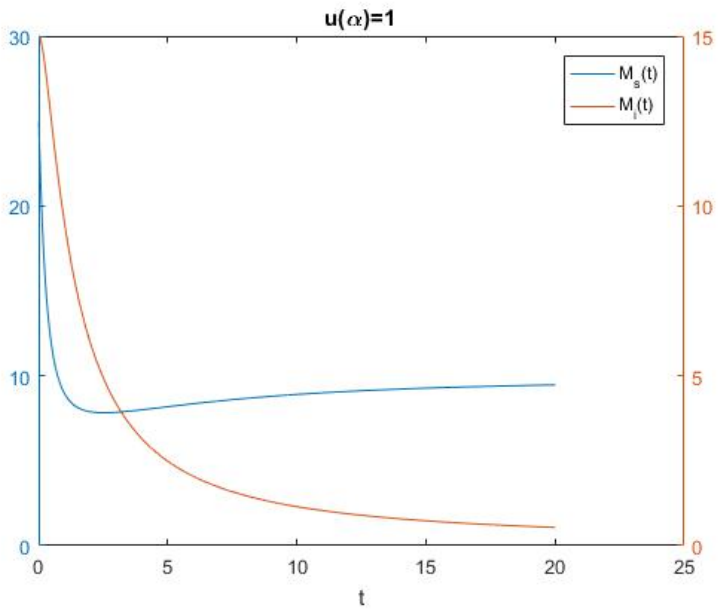
ifadeleri sağlanır. Bu durumda tüm λ'lar için $|\lambda| < 1$ sağlandığından E_2 kararlı bir denge noktasıdır. Ek olarak yine karakteristik denklemin çözümü ile

$$\lambda_1 = -0.1879, \;\; \lambda_2 = 0.1177$$

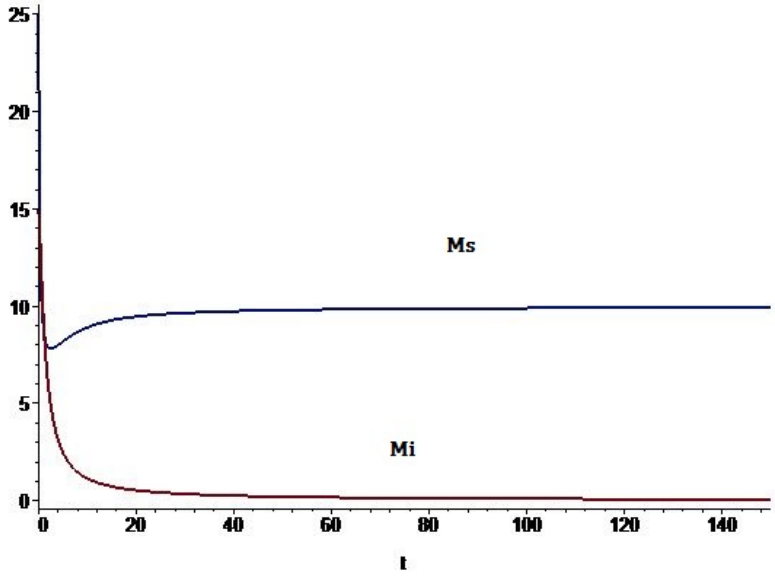
şeklinde elde edilmiş olup tüm öz değerlerin mutlak değerlerinin 1'den küçük olduğuda görülebilmektedir.

Yapılan bu kararlılık analizlerinden sonra yine bu kısımda elde edilen veriler yardımı ile simülasyonlara yer verilmiştir. Şekil (6.6)-(6.7) 'de dağılımlı mertebeden kurulan sistemdeki yoğunluk fonksiyonu $u(\alpha) = 1$, $(h = 0.01, \alpha = 0.1)$ olarak seçilmiş ve sistem kesirli hali ile karşılaştırılmıştır, bu duruma ait simülasyon grafikleri verilmiştir.

Ongun ve Kocabıyık (2017) makalesinde elde edilen kesirli mertebeden Hanta virüs sistemine ait analitik çözüm ile Şekil (6.6) da bulunan grafik karşılaştırıldığında çözümlerin oldukça benzer olduğu görülmüştür. Bu nedenle oluşturulan simülasyona göre dağılımlı mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümü ile aynı zamanda kesirli mertebeden denklemlerin çözümüne de ulaşılabileceği görülmüştür.

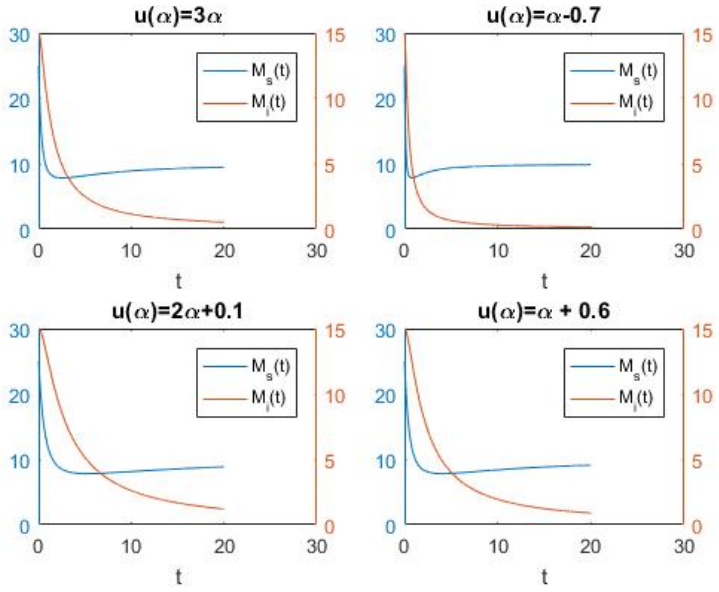


Şekil 6.6. $u(\alpha) = 1$ iken dağılımlı mertebeden sistemin çözümü

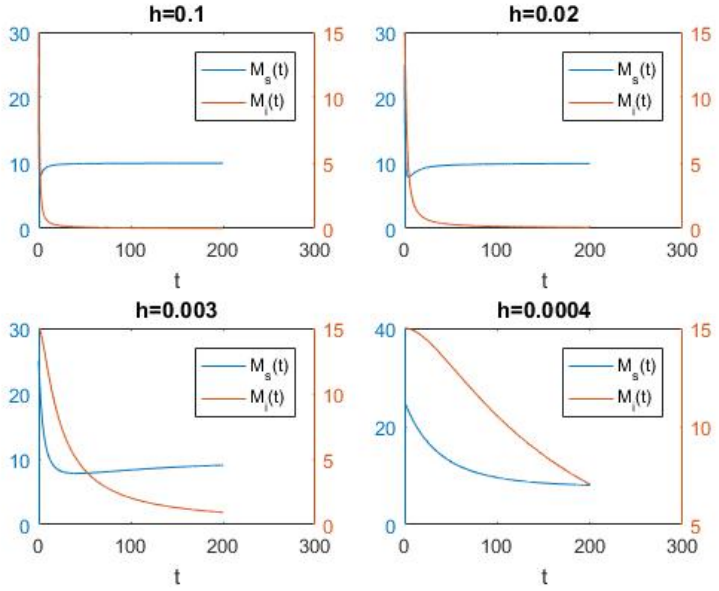


Şekil 6.7. Kesirli mertebeden Hanta virüs sisteminin çözümü

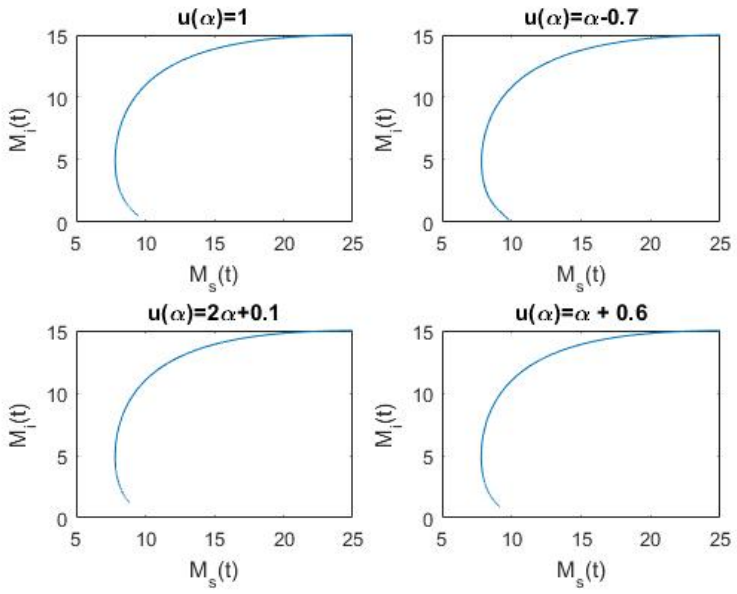
Şekil (6.8) de ise farklı $u(\alpha)$ değerleri kullanılarak ayrıklaştırılmış sistemdeki M_s ve M_i terimlerine ait çözümler arasındaki ilişki gösterilmiştir. Şekil (6.9) da ise h adım aralığının farklı seçilimi ile çözümler üzerindeki etkisi ifade edilmiştir. Şekil (6.10) da ise yine farklı $u(\alpha)$ değerleri kullanılarak ayrıklaştırılmış sisteme ait faz portrelerine yer verilmiştir.



Şekil 6.8. Farklı $u(\alpha)$ değerleri için $M_s(t)$ ve $M_i(t)$ fonksiyonları grafikleri



Şekil 6.9. Farklı h değerleri için $M_s(t)$ ve $M_i(t)$ fonksiyonları grafikleri



Şekil 6.10. Farklı $u(\alpha)$ değerleri için faz portresi grafikleri

Çizelge (6.3) de, $u(\alpha) = 1$, $(h = 0.01, \alpha = 0.1)$ ile artan N adım sayısının çeşitli değerleri için mutlak hatalar ve CPU süreleri gösterilmiştir. Mutlak hata değerlerini bulmak için Ongun ve Kocabıyık (2017) tarafından Lie simetri yöntemi kullanılarak elde edilen analitik çözümler kullanılmıştır. Elde edilen sonuçlar kabul edilebilir görünmektedir.

N	$\lvert M_s^{Lie} - M_s^{NSFD}\rvert$	M_s için CPU (sn)	$\lvert M_i^{Lie} - M_i^{NSFD}\rvert$	M_s için CPU (sn)
5000	2.8942E-04	0.6935	2.8943E-04	0.6947
10000	1.9148E-04	0.6407	1.9158E-04	0.6537
15000	1.3900E-04	0.6361	1.3901E-04	0.6458
20000	1.0875E-04	0.6165	1.0876E-04	0.6053
25000	8.9252E-05	0.6640	8.9352E-05	0.6780
30000	7.5667E-05	0.6127	7.5668E-05	0.6235
35000	6.5668E-05	0.6180	6.5669E-05	0.6192

Çizelge 6.3. Hanta virüs sistemine ait mutlak hata değerleri ve CPU zamanları

Gerekli ayrıklaştırmalar ve düzenlemeler yapıldığında dağılımlı mertebeden diferansiyel denklemlerin bu tip virüs sistemleri için kullanımının uygun olduğu elde edilen analizler ve grafikler yardımı ile görülmüştür. Yoğunluk fonksiyonunun seçimi ile de farklı etkilerin virüs sistemi üzerindeki etkisi oldukça rahat görülebilmektedir. Aynı zamanda Şekil (6.6)-(6.7) de ifade edildiği gibi yoğunluk fonksiyonunun uygun seçilmesi ile kesirli mertebeden sisteme ait çözümler de bulunabilmektedir.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, son yıllarda bir çok farklı bilim dalında ilgi gören ve çalışılan dağılımlı mertebeden diferansiyel denklemlerin kullanıldığı iki farklı biyolojik model ele alınmıştır. Çalışılan bu modellerde bazı sayısal yöntemler ile çözümleri araştırılmıştır. Bu yöntemler temel olarak açık ve kapalı olarak seçilmiştir. Kullanılan yöntemler arasında Açık Euler, Kapalı Euler, Runge-Kutta, Theta ve NSFD yöntemleri yer almaktadır. Bu yöntemlerin yanı sıra analitik çözümler ile NSFD ayrıklaştırma yöntemi ile elde ettiğimiz sayısal çözümler karşılaştırılmış ve çözümlerin oldukça tutarlı olduğu görülmüştür. NSFD yönteminin hem analitik çözüme benzerliği hem de diğer açık ve kapalı yöntemlerle karşılaştırıldığında üstünlüğü sebebiyle kullanımı bu tip denklemlerde oldukça uygun olduğu görülmüştür.

Tez çalışmasında yapılan analiz ile ilgili daha detaylı bilgi verilmek istenirse öncelikle farklı biyolojik modellerin dağılımlı merteden denklem sistemleri ile ifadesi verilmiş sonrasında ise verilen bu denklem sistemlerinin nümerik analizi araştırılmıştır. Biyolojik model olarak aşılamaya ait SVIR modeli ve Hanta virüs modeli ele alınmıştır. Öncelikle iki model içinde dağılımlı mertebeden diferansiyel denklem sistemi kurulmuştur. Daha sonrasında kurulan bu modellerin ayrıklaştırılması Standard olmayan sonlu fark şemaları ile elde edilmiştir. Bu analizden sonra ayrıklaştırılmış sisteme ait denge noktaları bulunmuş ve denge noktalarının kararlılık analizi araştırılmıştır.

Yapılan bu çalışmalarda, ilk olarak SVIR aşılama modeli için çözümler elde edilmiştir. Sonrasında denge noktasına ait teorem ve analiz yapılmıştır. Son bölümde ise elde edilen verilere ait nümerik hesaplama ve simülasyonlara yer verilmiştir. Buradan görülmüştür ki dağılımlı mertebeden diferansiyel denklemlerin içerisinde yer alan yoğunluk fonksiyonu ile birden fazla denklem sistemi hakkında yorum kabiliyeti geliştirilebilmektedir. Nümerik simülasyonlar ile de bu yorumların adi ve kesirli mertebeden hallerinin çözümü ile benzer sonuçlar verdiği görülmektedir. Bunun yanı sıra yine dağılımlı mertebeden diferansiyel denklemlerin kullanımı ile kararlılık analizinin de yapılabildiği ve sonuçların oldukça güven verici olduğu görülmüştür.

Ayrıca farklı açık ve kapalı yöntemler ile NSFD yönteminin yakınsaklık durumları karşılaştırılmış ve sonuçlara göre NSFD yönteminin diğer yöntemlere göre daha iyi sonuç verdiği görülmüştür.

Tez çalışmasında ele aldığımız bir diğer model olan Hanta virüs modelinde ise aynı şekilde dağılımlı mertebeden diferansiyel denklemler ile model ifade edilmiş ve sonrasında sistemin ayrıklaştırması yapılmıştır. Burada ilk yapılan denklem sisteminden farklı olarak modele ait Lie simetri metodu kullanılarak önceden elde edilmiş analitik çözüm ile burada elde ettiğimiz çözümler karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırmada bulunan mutlak hatanın oldukça kabul edilebilir olduğu görülmüştür. En son olarak da yine bu sisteme ait analitik çözüm ile karşılaştırılmak üzere nümerik simülasyonlara ve kararlılık analizine yer verilmiştir. Sonuçların tutarlı olduğu bu grafikler yardımı ile de görülebilmektedir.

Elde edilen bu bilgiler neticesinde dağılımlı mertebeden diferansiyel denklemlerinin bu ve buna benzer epidemik modellerde oldukça kullanılabilir olduğu görülmüştür. Barındırdığı yoğunluk fonksiyonu ile dağılımlı mertebeden diferansiyel denklemler ile birden fazla denklem sistemi hakkında yorum yapılabilmektedir. Bu nedenle farklı denklem sistemleri kullanıp işlem karmaşası oluşturmak yerine bu tip denklemlerin kullanılması daha uygun görülmektedir.

KAYNAKLAR

Abbaszadeh, M., Dehghan, M., 2017. An Improved Meshless Method for Solving Two-Dimensional Distributed Order Time-Fractional Diffusion-Wave Equation with Error Estimate. Numerical Algorithms, 75, 173–211.

Abbaszadeh, M., 2019. Error Estimate of Second-Order Finite Difference Scheme for Solving the Riesz Space Distributed Order Diffusion Equation. Applied Mathematics Letters, 88, 179-185.

Abramson G., Kenkre V.M., 2002. Spatio-Temporal Patterns in the Hantavirus Infected. Physcial Rewiew E, 66, 011912.

Abramson, G., Kenkre, V. M., Yates, T. L., Parmenter, R. R., 2003. Traveling Waves of Infection in the Hantavirus Epidemics. Bulletin of Mathematical Biology, 65(3), 519-534.

Ahmad, A., Javeed, N., Farman, M., Ahmad, M. O., Hafeez, A., Raza, A., 2019. Dynamical Behavior of Fractional Order SVIR Epidemic Model. International Journal of Analysis and Applications, 17(2), 260-274.

Alexander, M. E., Bowman, C., Moghadas, S. M., Summers, R., Gumel, A. B., Sahai, B. M., 2004. A Vaccination Model for Transmission Dynamics of Influenza. SIAM Journal on Applied Dynamical Systems, 3(4), 503-524.

Allen, L. JS., Robert K. M., Colleen B. J., 2006. Mathematical Models for Hantavirus Infection in Rodents. Bulletin of Mathematical Biology, 68.3, 511-524.

Aminikhah, H., Refahi Sheikhani, A., Rezazadeh, H., 2013. Stability Analysis of Distributed Order Fractional Chen System. The Scientific World Journal, 2013.

Aminikhah, H., Sheikhani, A. R., Rezazadeh, H., 2015. Stability Analysis of Linear Distributed Order System with Multiple Time Delays. UPB Science Bull, 77(2), 207-218.

Aminikhah, H., Sheikhani, A.H.R., Houlari, T., Rezazadeh, H., 2017. Numerical Solution of the Distributed Order Fractional Bagley-Torvik equation. IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica, 6(3), 760-765.

Amirali, G., Amirali, I., 2018. Nümerik Analiz, Seçkin Yayıncılık, Ankara, Turkey, September

Arslan, D., 2013. Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklem Sistemlerinin Sayısal Çözümü. Süleyman Demirel Üniversitesi, Yüksek Lisans Tezi, 67s, Isparta.

Astrom, K. J., Murray, R. M., 2008. Feedback systems. In An introduction for Scientists and Engineers. Princeton University Press, USA.

Atanackovic, T.M., Budincevic, M., Pilipovic, S., 2005. On a Distributed Order Oscillator. Journal of Physics A: Mathematical and General, 38(30), 6703.

Atanacković, T. M., Oparnica, L., Pilipović, S., 2007. On a Nonlinear Distributed Order Fractional Differential Equation. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 328(1), 590-608.

Atanackovic, T.M., Pilipovic, S., Zorica, D., 2009. Time distributed Order Diffusion-Wave Equation. I. Volterra-type equation. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 465 (2106), 1869-1891.

Atanackovic, T.M., Pilipovic, S., Zorica, D., 2011. Distributed Order Fractional Wave Equation on a Finite Domain Stress Relaxation in a Rod. International Journal of Engineering Science, 49(2), 175-190.

Bagley, R. L., Torvik, P. J., 2000,a. On the Existence of the Order Domain and the Solution of Distributed Order Equations-Part I. International Journal of Applied Mathematics, 2(7), 865-882.

Bagley, R. L., Torvik, P. J., 2000,b. On the Existence of the Order Domain and the Solution of Distributed Order Equations-Part II. International Journal of Applied Mathematics, 2(8), 965-988.

Benghorbal, M.M., 2004. Power Series Solutions of Fractional Differential Equations and Symbolic Derivatives and Integrals. Faculty of Graduate Studies The University of Western Ontario, PhD thesis, Canada.

Bologna, M., 2004. Short Introduction to Fractional Calculus. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 2, 41-54.

Bu, W., Ji, L., Tang, Y., Zhou, J., 2020. Space-time Finite Element Method for the Distributed Order Time Fractional Reaction Diffusion Equations. Applied Numerical Mathematics, 152, 446–465.

Caputo, M.,1967. Linear Models of Dissipation whose Q is Almost Frequency Independent—II. Geophysical Journal International, 13(5), 529-539.

Caputo, M., 1969. Elasticita e Dissipazione. Zanichelli.

Caputo, M., 1995. Mean Fractional-order Derivatives Differential Equations and Filters. Annali dell'Universita di Ferrara, 41(1), 73-84.

Caputo, M., 2001. Distributed Order Differential Equations Modelling Dielectric Induction and Diffusion. Fractional Calculus Applied Analysis, 4, 421-442.

Caputo, M., 2003. Diffusion with Space Memory Modelled with Distributed Order Space Fractional Differential Equations. Annals of Geophysics, 46, 223-234.

Chen, M., Clemence, D. P., 2006. Analysis of and Numerical Schemes for a Mouse Population Model in Hantavirus Epidemics. Journal of Difference Equations and Applications, 12(9), 887-899.

Connolly, J. A., 2004. The Numerical Solution of Fractional and Distributed Order

Differential Equations. University of Liverpool, PhD thesis, 176p, United Kingdom.

Diethelm, K. 1997. An Algorithm for the Numerical Solution of Differential Equations of Fractional Order. Electronic transactions on numerical analysis, 5(1), 1-6.

Diethelm, K., Ford, N. J., 2001. The Numerical Solution of Linear and Nonlinear Fractional Differential Equations Involving Fractional Derivatives of Several Orders, Numerical Analysis Report 379, Manchester Centre for Computational Mathematics.

Diethelm, K., Ford, N. J., 2002,a. Analysis of Fractional Differential Equations. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 265(2), 229-248.

Diethelm, K., Ford, J., 2002,b. Numerical Solution of the Bagley-Torvik Equation. BIT Numerical Mathematics, 42(3), 490-507.

Diethelm, K., Ford, N. J., 2004. Multi-order Fractional Differential Equations and Their Numerical Solution. Applied Mathematics and Computation, 154(3), 621-640.

Diethelm, K., Luchko, Y., 2004. Numerical Solution of Linear Multi-term Initial Value Problems of Fractional Order. Journal Computational Analysis Applied, 6(3), 243-263.

Diethelm, K., Ford, N.J., 2005. Numerical Solution Methods for Distributed Order Differential Equations. Institute of Mathematics Informatics, Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, Bulgaria.

Diethelm, K., Ford, N. J., 2009. Numerical Analysis for Distributed Order Differential Equations. Journal of Computational and Applied Mathematics, 225(1), 96-104.

Diethelm, K., 2010. The Analysis of Fractional Differential Equations. Lecture Notes in Mathematics, 2004, Berlin.

Dimitrov, D. T., Kojouharov, H. V., 2007. Nonstandard Numerical Methods for a Class of Predator Prey Models with Predator Interference. Electronic Journal of Differential Equations (EJDE) electronic only, 67-75.

Dimitrov, D. T., Kojouharov, H. V., 2008. Nonstandard Finite Difference Methods for Predator Prey Models with General Functional Response. Mathematics and Computers in Simulation, 78(1), 1-11.

Ding, W., Patnaik, S., Sidhardh, S., Semperlotti, F., 2021. Applications of Distributed Order Fractional Operators: A Review. Entropy, 23(1), 110.

Dorciak, L., 1994. Numerical Models for Simulation the Fractional Order Control Systems. UEF-04-94, The Academy of Sciences, Institute of Experimental Physic, Kosiice, Slovak Republic

Edwards, J. T., Ford, N. J., Simpson, A. C., 2002. The Numerical Solution of Linear

Multi-term Fractional Differential Equations: Systems of Equations. Journal of Computational and Applied Mathematics, 148(2), 401-418.

Elaydi, S.N., 1999. Oscillation Theory. An Introduction to Difference Equations, 296-314.

Enkür, E., 2012. Kesirli Türevlere Sahip Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları. Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 59s, Elazığ.

Er, F.,2016. Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemler için Standard olmayan Theta metodu. Süleyman Demirel Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 74s, Isparta.

Ford, N. J., Morgado, M. L., 2012. Distributed Order Equations as Boundary Value Problems. Computers and Mathematics with Applications, 64(10), 2973-2981.

Ford, N. J., Morgado, M. L., Rebelo, M., 2014. A Numerical Method for the Distributed Order Time-fractional Diffusion Equation. In ICFDA'14 International Conference on Fractional Differentiation and Its ApplicationS, 1-6.

Galeone, L., Garrappa, R., 2006. On Multistep Methods for Differential Equations of Fractional Order. Mediterranean Journal of Mathematics, 3(4), 565-580.

Gao, G. H., Sun, H. W., Sun, Z. Z., 2015. Some high-order difference schemes for the distributed-order differential equations. Journal of Computational Physics, 298, 337-359.

Garrappa, R., Kaslik, E., Popolizio, M., 2019. Evaluation of Fractional Integrals and Derivatives of Elementary Functions: Overview and Tutorial. Mathematics, 7(5), 407.

Garrappa, R., 2009. On Some Explicit Adams Multistep Methods for Fractional Differential Equations, Journal of Computational and Applied Mathematics, 229, 392-399.

Garrappa, R.. 2010. On Linear Stability of Predictor-Corrector Algorithms For Fractional Differential Equations, International Journal of Computer Mathematics, 87(10), 2281-2290.

Hartley, T. T., Lorenzo, C. F., 2002. Variable Order and Distributed Order Fractional Operators. Nonlinear dynamics, 29, 57-98.

Humbert, P., Agarwa, R.P.l, 1953. Sur La Fonction De Mittag-Leffler Et Quelquesunes De Ses Generalisations. Bulletin des Sciences Mathematiques, 77(10), 180-185.

Hu, X., Liu, F., Turner, I., Anh, V., 2016. An Implicit Numerical Method of a New Time Distributed Order and Two-sided Space-fractional Advection-dispersion Equation. Numerical Algorithms, 72, 393–407.

Hu, J., Wang, J., Nie, Y.,2018. Numerical Algorithms for Multidimensional Time-

fractional Wave Equation of Distributed Order with a Nonlinear Source term. Advances in Difference Equations, 2018(1), 1-30.

Kama, P., 2009. Nonstandart Finite Difference Models in Dynamical Systems. University of Pretoria, Pretoria.

Karadem, Z.G., Ongun, M.Y., 2016. Logistic Differential Equation Obtained from Hanta-virus Model. Suleyman Demirel University Journal of Science (e-Journal), 11(1), 82-91.

Katsikadelis, J. T.,2014. Numerical Solution of Distributed Order Fractional Differential Equations. Journal of Computational Physics, 259, 11-22.

Kermark, M., Mckendrick, A., 1927. Contributions to the Mathematical Theory of Epidemics. Bulletin of mathematical biology, 53(1-2), 33-55.

Kilbas, A.A., Srivastava, H.M., Trujillo J. J, 2006. Theory and Applications of Differantial Equations. North Holland Mathematics Studies, 204.

Kocabıyık, M., Ongun, M. Y., 2018. Hanta Virüs Modelinden Elde Edilen Fisher-Kolmogorov Denkleminin Lie Simetri Analizi. Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 22(2), 754-759.

Kocabıyık, M., Özdoğan, N., Ongun, M. Y., 2020. Nonstandard Finite Difference Scheme for a Computer Virus Model. Journal of Innovative Science and Engineering (JISE), 4(2), 96-108.

Kocabıyık, M., Ongun, M. Y., Çetinkaya, İ. T., 2021. Standart Olmayan Sonlu Fark Metodu ile Dağılımlı Mertebeden SVIR Modelinin Nümerik Analizi. Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 23(2), 577-591.

Kribs-Zaleta, C. M., Velasco-Hernández, J. X., 2000. A Simple Vaccination Model with Multiple Endemic States. Mathematical Biosciences, 164(2), 183-201.

Kumar, Y., Singh, S., Srivastava, N., Singh, A., Singh, V. K., 2020. Wavelet Approximation Scheme for Distributed Order Fractional Differential Equations. Computers and Mathematics with Applications, 80(8), 1985-2017.

Küçük, D.,G., 2014. Kesirli Mertebeden Kısmi Diferansiyel Cebirsel Denklemlerin Farklı Metotlarla Nümerik Çözümü. Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 94s, Erzurum.

Leibnitz, G. W., 1695. A Letter from Hanover. Mathematics Schriften, 1849, 301-302.

Li, J., Yang, Y., Zhou, Y., 2011. Global Stability of an Epidemic Model with Latent Stage and Vaccination. Nonlinear Analysis: Real World Applications ,12(4), 2163-2173.

Li, X. Y., Wu, B. Y., 2016. A Numerical Method for Solving Distributed Order Diffusion Equations. Applied Mathematics Letters, 53, 92-99.

Li, J., Liu, F., Feng, L., Turner, I., 2017. A Novel Finite Volume Method for the Riesz Space Distributed Order Diffusion Equation. Computers mathematics with applications, 74(4), 772-783.

Li, X., Rui, H., 2018. Two Temporal Second-order H1-Galerkin Mixed Finite Element Schemes for Distributed Order Fractional Sub-diffusion Equations. Numerical Algorithms, 79, 1107–1130.

Liu, X., Takeuchi, Y., Iwami, S., 2008. SVIR Epidemic Models with Vaccination Strategies. Journal of Theoretical Biology, 253(1), 1-11.

Lubich, C. 1986. Discretized Fractional Calculus. SIAM Journal Mathematical Analysis, 17 (3), 704–719.

Luchko, Y., 2009. Boundary Value Problems for the Generalized Time-fractional Diffusion Equation of Distributed Order. Fractional Calculus Applied Analysis, 12, 409–422.

Luchko, Y., 2010. Some Uniqueness and Existence Results for the Initial-boundary-value Problems for the Generalized Time-fractional Diffusion Equation. Computational Mathematical Applied, 59, 1766–1772.

Mainardi, F. 1997. Some Basic Problems in Continuum and Statistical Mechanics. Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics, Springer, Berlin, 291–348.

Mainardi, F., Mura, A., Pagnini, G., Gorenflo, R., 2007. Some Aspects of Fractional Diffusion Equations of Single and Distributed Order. Applied Mathematical Computational, 187, 295–305.

Maleknejad, K., Rashidinia, J., Eftekhari, T., 2021. Numerical Solutions of Distributed Order Fractional Differential Equations in the Time Domain Using the Müntz–Legendre Wavelets Approach. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 37(1), 707-731.

Mashayekhi, S., Razzaghi, M., 2016. Numerical Solution of Distributed Order Fractional Differential Equations by Hybrid Functions. Journal of Computational Physics, 315, 169-181.

Mashoof, M., Sheikhani, A. R., Naja, H. S., 2018. Stability Analysis of Distributed Order Hilfer-Prabhakar Differential Equations. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 47(2), 299-315.

Meerschaert, M. M., Tadjeran, C., 2004. Finite Difference Approximations for Fractional Advection Dispersion Flow Equations. Journal of Computational and Applied Mathematics, 172(1), 65-77.

Mickens, R. E., 1989. Exact solutions to a Finite-difference Model of a Nonlinear Reaction-advection Equation: Implications for Numerical Analysis. Numerical

Methods for Partial Differential Equations, 5(4), 313-325.

Mickens, R. E., 1994. Nonstandard Finite Difference Models of Differential Equations. World Scientific, Singapore.

Mickens, R. E., 2000. Applications of Nonstandard Finite Difference Schemes. World Scientific, Singapore.

Mickens, R. E., 2002. Nonstandard Finite Difference Schemes for Differential Equations. Journal of Difference Equations and Applications, 8(9), 823-847.

Mickens, R. E., 2007. Calculation of Denominator Functions for Nonstandard Finite Difference Schemes for Differential Equations Satisfying a Positivity Condition. Numerical Methods for Partial Differential Equations: An International Journal, 23(3), 672-691.

Miller, K.S., Ross, B., 1993. An Introduction to The Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. A Wiley-Interscience Publication, John Wiley and Sons Inc, New York.

Moghaddam, B. P., Machado, J. T., Morgado, M. L., 2019. Numerical Approach for a Class of Distributed Order Time Fractional Partial Differential Equations. Applied Numerical Mathematics, 136, 152-162.

Morgado, M. L., Rebelo, M., 2015. Numerical Approximation of Distributed Order Reaction–diffusion Equations. Journal of Computational and Applied Mathematics, 275, 216-227.

Najafi, H. S., Sheikhani, A. R., Ansari, A., 2011. Stability Analysis of Distributed Order Fractional Differential Equations. In Abstract and Applied Analysis, 2011, Hindawi.

Noroozi, H., Ansari, A., Dahaghin, M. S., 2012. Existence Results for the Distributed Order Fractional Hybrid Differential Equations. In Abstract and Applied Analysis, 2012, Hindawi.

Oldham, K.B., Spanier, J., 1974. The Fractional Calculus. Academic Press, New York, London.

Ongun, M.Y., Arslan, D., Garrappa, R., 2013. Nonstandard Finite Difference Scemes for fractional order Brusselator System. Advances in Difference equations, 2013, 1-13.

Ongun, M.Y., Kocabıyık, M., 2017. Lie Symmetry Analysis of the Hanta-epidemic Systems. Journal of Mathematics and Computer Science-JMCS. 17(2), 332-344.

Ongun, M. Y., Arslan, D., 2018. Explicit and Implicit Schemes for Fractional orders Hantavirus Model. Iranian Journal Of Numerical Analysis And Optimization, 8(2), 75–93.

Oturanç, G., Kurnaz, A., Kiriş, M. E., Keskin, Y., 2012. Sayısal Analiz, ISBN 975-28856-8-3, 384s, Konya.

Podlubny, I.,1998. Fractional Differential Equations: an Introduction to Fractional Derivatives. Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications, 198, Elsevier.

Rahimkhani, P., Ordokhani, Y., 2021. Numerical Investigation of Distributed Order Fractional Optimal Control Problems via Bernstein Wavelets. Optimal Control Applications and Methods, 42(1), 355-373.

Refahi S., A., Saberi N., H., Ansari, A., Mehrdoust, F., 2012. Analytic Study on Linear System of Distributed Order Fractional Differential Equations. Le Matematiche, 67, 313.

Rida, S. Z., El Radi, A. A., Arafa, A., Khalil, M., 2012. The Effect of the Environmental Parameter on the Hantavirus Infection through a Fractional Order SI Model. International Journal of Basic and Applied Sciences, 1(2), 88-99.

Ruan, S., Jianhong, W., 2009. Modeling spatial Spread of Communicable Diseases Involving Animal Hosts. Spatial ecology, 293-316.

Samko, S. G., Kilbas, A. A., Marichev, O. I.,1993. Fractional Integrals and Derivatives. Switzerland: Gordon and Breach Science Publishers, 1993, Yverdon.

Sokolov, I. M., Chechkin, A. V., Klafter, J., 2004. Distributed Order Fractional Kinetics. arXiv preprint cond-mat/0401146.

Stojanovic, M., 2012. Fractional Relaxation Equations of Distributed Order. Nonlinear Analysis Real World Applied, 13, 939–946.

Terzioğlu, B., 2019. Kesirli Diferansiyel Denklemler için Başlangıç Değer Problemlerinin Nümerik Çözümleri. Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 70s, Muğla.

Yuttanan, B., Razzaghi, M., 2019. Legendre Wavelets Approach for Numerical Solutions of Distributed Order Fractional Differential Equations. Applied Mathematical Modelling, 70, 350-364.

Yuttanan, B., Razzaghi, M., Vo, T. N., 2021. A Numerical Method Based on Fractional-order Generalized Taylor Wavelets for Solving Distributed Order Fractional Partial Differential Equations. Applied Numerical Mathematics, 160, 349-367.

Weilbeer, M., 2005. Efficient Numerical Methods for Fractional Differential Equations and Their Analytical Background, US.

Zahra, W. K., Van Daele, M., 2017. Discrete Spline Methods for Solving Two point Fractional Bagley–Torvik Equation. Applied Mathematics and Computation, 296, 42-56.

Zaky, M. A., Machado, J. T., 2020. Multi-dimensional Spectral Tau Methods for Distributed Order Fractional Diffusion Equations. Computers and Mathematics with Applications, 79(2), 476-488.