

T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

BİGEOMETRİK ANALİZDE LAPLACE İNTEGRAL DÖNÜŞÜMÜ VE
UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS

Sinem KAYMAK

TEMMUZ-2023
GÜMÜŞHANE



T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

BİGEOMETRİK ANALİZDE LAPLACE İNTEGRAL DÖNÜŞÜMÜ VE
UYGULAMALARI

LAPLACE INTEGRAL TRANSFORM AND IT'S APPLICATIONS IN
BIGEOMETRIC CALCULUS

YÜKSEK LİSANS

Sinem KAYMAK

TEMMUZ-2023
GÜMÜŞHANE



T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

BİGEOMETRİK ANALİZDE LAPLACE İNTEGRAL DÖNÜŞÜMÜ VE
UYGULAMALARI

LAPLACE INTEGRAL TRANSFORM AND IT'S APPLICATIONS IN
BIGEOMETRIC CALCULUS

YÜKSEK LİSANS

Sinem KAYMAK

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Numan YALÇIN

TEMMUZ-2023
GÜMÜŞHANE

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlamış olduğum “**Bigeometrik Analizde Laplace İntegral Dönüşümü ve Uygulamaları**” isimli bu tezimin, tamamen kendi çalışmam olduğunu, her alıntıya kaynak gösterdiğimi, alıntı yaptığım tüm çalışmaları kaynakçada belirttiğimi ve Gümüşhane Üniversitesi’nin lisanslı kullanıcısı olduğu intihal yazılım programı ile Lisansüstü Eğitim Enstitüsü’nün belirlediği kıstaslara uygun olarak raporladığımı taahhüt ederim. Tezimin kâğıt ve elektronik kopyalarının Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü arşivinde saklanmasına izin verdiğimi onaylarım.

Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği’nin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

06/07/2023

.....
Sinem KAYMAK

TEŞEKKÜR

Tezin her aşamasında sağladığı katkılarla bana yol gösteren değerli danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Numan YALÇIN’a, bilgi ve tecrübelerinden istifade ettiğim Dr. Öğr. Üyesi Mutlu DEDETÜRK'e tüm içtenliğimle teşekkürü bir borç bilirim.

Yüksek lisans eğitimim sürecinde benden desteklerini esirgemeyen aileme minnettarım.

Sinem KAYMAK
GÜMÜŞHANE – 2023

ÖZET

Bu tez çalışmasında, klasik analizin integral dönüşüm metotlarından biri olan Laplace integral dönüşümünün temel tanım ve teoremlerinden yararlanılarak, Newtonyen olmayan analizlerden biri olan bigeometrik analizde Laplace integral dönüşümünden bahsedilmiştir. Öncelikli olarak Newtonyen olmayan analizlerin temelini oluşturan üstel aritmetik verilmiştir. Klasik analizde olduğu gibi bigeometrik analizde de limit, süreklilik, türev ve integral kavramlarının tanımları verilmiştir. Ardından, bigeometrik analizde bigeometrik Laplace integral dönüşümünün tanımı yapılmıştır. Sonra, bigeometrik Laplace integral dönüşümünün bazı temel kavramları ve teoremleri verilmiştir. Bunun için bigeometrik analizde yer alan bigeometrik türev, bigeometrik belirsiz integralin ve bigeometrik belirli integralin tanımları ve bunların özellikleri kullanılmıştır. Ayrıca, bigeometrik Laplace integral dönüşümünün özellikleri incelenmiş ve bigeometrik Laplace integral dönüşümü yardımıyla bazı bigeometrik lineer diferansiyel denklemlerin çözümleri araştırılmıştır. Yapılan bu çalışmalar örneklerle desteklenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bigeometrik analiz, Bigeometrik türev, Bigeometrik integral
Bigeometrik Laplace integral dönüşümü.

SUMMARY

In this thesis, the Laplace integral transform in bigeometric analysis, which is one of the non-Newtonian analysis, is introduced by making use of the basic definitions and theorems of the Laplace integral transform, which is one of the integral transform methods of classical analysis. First of all, exponential arithmetic, which forms the basis of non-Newtonian analysis, is given. As in classical analysis, definitions of the concepts of limit, continuity, derivative and integral are given in bigeometric analysis. Afterwards, the definition of bigeometric Laplace integral transform in bigeometric analysis is made. Then, some basic concepts and theorems of the bigeometric Laplace integral transform are given. For this purpose, the definitions of bigeometric derivative, bigeometric indefinite integral and bigeometric definite integral in bigeometric analysis and the properties of these are used. In addition, the properties of the bigeometric Laplace integral transform are examined and the solutions of some bigeometric linear differential equations are investigated with the help of the bigeometric Laplace integral transform. These studies are supported by examples.

Keywords: Bigeometric analysis, Bigeometric derivative, Bigeometric integral, Bigeometric Laplace integral transform.

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	III
BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI.....	IV
TEŞEKKÜR.....	V
ÖZET.....	VI
SUMMARY	VII
İÇİNDEKİLER	VIII
TABLolar DİZİNİ	IX
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	X
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	1
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	3
2.1. Newtonyen (Klasik) Analizde Bazı Temel Kavramlar	3
2.2. Newtonyen Olmayan (Non-Newtonyen) Analizde Bazı Temel Kavramlar	8
2.3. Geometrik (Çarpımsal) Analizde Bazı Temel Kavramlar.....	10
2.4. Bigeometrik Analizde Bazı Temel Kavramlar.....	18
3. BİGEOMETRİK ANALİZDE LAPLACE İNTEGRAL DÖNÜŞÜMÜ	34
3.1. Bigeometrik Türevin Bigeometrik Laplace Dönüşümü.....	50
3.2. Bigeometrik Laplace Dönüşümünün Bigeometrik Lineer Diferansiyel Denklemlere Uygulanması	53
4. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME.....	56
KAYNAKÇA.....	57
ÖZGEÇMİŞ	62

TABLÖLAR DİZİNİ

Tablo 1. Bazı fonksiyonların bigeometrik türevleri.....	24
Tablo 2. Bazı fonksiyonların bigeometrik belirsiz integralleri	28
Tablo 3. Bazı fonksiyonların bigeometrik Laplace integral dönüşümleri.....	38



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. Bir klasik fonksiyonun bigeometrik karşılığının BG Laplace integral dönüşümü	40
Şekil 2. Bir bigeometrik fonksiyonun klasik karşılığının klasik Laplace integral dönüşümü	40



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}_{\exp}$	: Üstel reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_{\exp}^+$	: Üstel pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_{\exp}^-$	: Üstel negatif reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_{\exp}^{+,0}$	: Üstel negatif olmayan reel sayılar
$\mathbb{R}_{\exp}^{-,0}$	: Üstel pozitif olmayan reel sayılar
$\mathbb{Z}_{\exp}$	: Üstel tam sayılar
$\mathbb{Z}_{\exp}^{+,0}$	: Üstel negatif olmayan tam sayılar
$\mathbb{Z}_{\exp}^{-,0}$	: Üstel pozitif olmayan tam sayılar
$\oplus$	: Üstel toplama işlemi
$\ominus$	: Üstel çıkarma işlemi
$\odot$	: Üstel çarpma işlemi
$\oslash$	: Üstel bölme işlemi
$ t _*$	: Geometrik mutlak değer
$\sqrt{t}_*$	: Geometrik karekök
$\lim_{t \rightarrow a}^* f(t)$	: Geometrik limit
$f^*(t)$	: $f(t)$ nin birinci mertebeden geometrik türevi
$* \int f(t) dt$	: Geometrik belirsiz integral
$* \int_u^v f(t) dt$	: Geometrik belirli integral
$\mathcal{L}_m\{f(t)\}$	: $f(t)$ nin geometrik Laplace integral dönüşümü
$\pi \lim_{t \rightarrow a} f(t)$	: Bigeometrik limit
$f(a^{bg+})$	: Bigeometrik sağ limit
$f(a^{bg-})$	: Bigeometrik sol limit
$f^\pi(t)$	: $f(t)$ nin birinci mertebeden bigeometrik türevi
$\pi \int f(t) dt^\pi$	: Bigeometrik belirsiz integral
$\pi \int_a^b f(t) dt^\pi$	: Bigeometrik belirli integral
$\mathcal{L}_{BG}\{f(t)\}$	: $f(t)$ nin bigeometrik Laplace integral dönüşümü
$\mathcal{L}_{BG}^{-1}\{f(t)\}$	: $f(t)$ nin bigeometrik ters Laplace integral dönüşümü
BG	: Bigeometrik
BGLİD	: Bigeometrik Laplace integral dönüşümü

1. GİRİŞ

İntegral dönüşümün tarihi, 1780' lerde Laplace' ın ve 1822' de Joseph Fourier' in iki ayrı integral dönüşümü üzerine yapılan çalışmalarına kadar uzanmaktadır. Fakat sembolik dönüşüm fikrini ilk olarak ortaya çıkaran G. W. Leibniz (1646-1716) dir. Daha sonra bu dönüşüm üzerine çalışmalar yapan J. L. Lagrange (1736-1813) ve P. S. Laplace (1749-1827) dir.

İntegral dönüşümler, kuantum fiziğinde, makine mühendisliğinde ve diğer bilim dallarında çok sayıda uygulamaya sahiptir. Ayrıca, teorik ve uygulamalı matematikte hiç şüphesiz en yararlı ve etkili yöntemlerden biridir. Bu dönüşüm, diferansiyel denklemlerin çözümünde büyük kolaylık sağladığı gibi, fiziğin matematiksel metotlarında da kullanılan bir dönüşümdür. Ayrıca, integral dönüşümler kimya, mimarlık ve diğer sosyal bilimlerde çeşitli modelleri değerlendirmek için kullanılır (Qureshi ve Yusuf, 2019). Son yıllarda Laplace dönüşümü (Jumarie, 2009; Kumar, 2014; Kazem, 2013), Fourier dönüşümü (Namias, 1980; Chen, vd., 2007), Hankel dönüşümü (Jiang ve Xu, 2009), Mellin dönüşümü (Gorenflo vd., 2000), Z-dönüşümü (Debnath ve Bhatta, 2014), Dalgacık dönüşümü (Yang, 2011) gibi farklı integral dönüşümler ortaya çıkmıştır. Elzaki dönüşümü (Neamaty, vd., 2016; Jena ve Chakraverty, 2019), Mahgoub dönüşümü (Taha vd., 2017), Aboodh dönüşümü (Aboodh, 2013), Mohand dönüşümü (Aggarwal ve Chauhan, 2019), Sumudu dönüşümü (Kılıçman ve Gadain, 2010; Jena ve Chakraverty, 2019), Hermite dönüşümü (Mao ve Shen, 2017) farklı fiziksel modellerin çözümü için kullanılmıştır.

Farklı aritmetik işlemler yardımıyla klasik analizden farklı olan yeni analizler tanımlanmıştır. Amerikalı bilim insanı Michael Grossman ve Robert Katz 1967' den 1970' e kadar olan dönemde Non-Newtonian analizleri tanımlamışlardır. Temmuz 1967' de *klasik analiz*, *geometrik analiz*, *harmonik analiz* ve *kuadratik analizi* ve daha sonra Ağustos 1970' de *bigeometrik analiz*, *anageometrik analiz*, *biharmonik analiz*, *anaharmonik analiz*, *bikuadratik analiz* ve *anakuadratik analizleri* tanımlamışlardır. Bu yeni analizleri klasik analizden ayırmak için hepsine birden “Newtonyen olmayan” sıfatını kullanmışlardır.

Non-Newtonyen analizler içindeki en popüler olanları geometrik (çarpımsal) analiz, bigeometrik analiz ve anageometrik analizdir. Literatürde ilk iki analizin birçok uygulamaları mevcuttur. Geometrik ve bigeometrik analizlerin bilim, mühendislik ve matematik gibi birçok alanlarda uygulamaları vardır. Örneğin; faiz oranları, ekonomide

esneklik (elastikiyet) teorisi, kanın viskozitesi, görüntü işleme, yapay zeka, bilgisayar bilimi, biyoloji, diferansiyel denklemler ve olasılık teorisi olarak ifade edilebilir (Bashirov vd., 2011; Filip vd., 2014; Córdova-Lepe, 2006). Ayrıca, Rybaczuk ve Stopel, geometrik analiz aracılığıyla malzeme biliminde fraktal büyümeyi araştırdı (Rybaczuk ve Stopel, 2000). Bashirov ve arkadaşları geometrik analizin bazı temel kavramlarını tanımlamış ve uygulamaları vermiştir (Bashirov vd., 2008). Florack ve Assen, biyomedikal görüntü analizinde geometrik analizi kullanmıştır (Florack ve Assen, 2012). Çakmak ve Başar, geometrik analizde iki katlı integralleri çalıştı (Çakmak ve Başar, 2014). Kadak ve Özlük, geometrik analizde adi diferansiyel denklemler için Runge-Kutta yöntemini genelleştirdiler (Kadak ve Özlük, 2014). Córdova-Lepe, geometrik analiz yardımıyla ekonomide esneklik teorisini çalıştı (Córdova-Lepe, 2015). Yalçın ve arkadaşları geometrik analizde lineer diferansiyel denklemler üzerine çalışmalar yaptı (Yalçın, 2016; Yalçın ve Çelik, 2018; Yalçın vd., 2016; Yalçın, 2019; Yalçın, 2021; Yalçın ve Dedetürk, 2021; Yalçın ve Dedetürk, 2022).

Bu çalışmada, klasik analizden bilinen Laplace integral dönüşümünden yararlanılarak bigeometrik analizde bigeometrik Laplace integral dönüşümünün tanımı yapıp özellikleri verilmiştir. Ayrıca, bu dönüşüm yardımıyla bazı bigeometrik diferansiyel denklemlerin çözümü bulunmuştur. Yapılan bu çalışmalar sayısal örneklerle desteklenmiştir.

Bu tez çalışması dört bölümden oluşur. Birinci bölüm giriş bölümüdür. İkinci bölüm genel bilgiler bölümü olup burada kuramsal bilgiler verilmiştir. Newtonyen ve newtonyen olmayan analizlerin bazı temel kavramlarından bahsedilmiştir. Bunlardan geometrik ve bigeometrik analizin temel tanım ve teoremleri verilmiştir. Üçüncü bölümde bu tezin temelini oluşturan bigeometrik Laplace integral dönüşümünün tanımı yapılmıştır. Ayrıca bigeometrik Laplace integral dönüşümünün lineerlik, birinci öteleme, ikinci öteleme, ölçek değişimi ve bigeometrik konvolüsyon özellikleri verilmiş ve dönüşümün varlığı ispatlanmıştır. Daha sonra bigeometrik türevin bigeometrik Laplace dönüşümü verilerek bigeometrik ters Laplace dönüşümü tanımlanmıştır. Bu bilgiler ışığında bu yeni dönüşümün bigeometrik lineer diferansiyel denklemlere uygulaması yapılmış bu çalışmalar örneklerle desteklenmiştir. Dördüncü bölüm sonuç bölümü olup bu bölümde klasik analize alternatif olarak gösterilen geometrik ve bigeometrik analizin birçok problemin çözümünü kolaylaştırdığı ve bilime farklı bir bakış açısı getirdiği saptanmıştır.

2. GENEL BİLGİLER

Bu başlık altında, tezin diğer bölümlerinde kullanılacak olan newtonyen (klasik) ve newtonyen olmayan (non-newtonian) analizlerdeki bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Ayrıca, newtonyen olmayan analizlerden geometrik ve bigeometrik analize kısaca değinilmiştir (Grossman ve Katz, 1972; Grossman, 1983; Boruah ve Hazarika, 2018 a,b).

2.1. Newtonyen (Klasik) Analizde Bazı Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. $\delta > 0$ herhangi bir reel sayı ve $u \in \mathbb{R}$ olsun. Buna göre

$$K = \{t \in \mathbb{R}: |t - u| < \delta\} \quad (1)$$

kümesine u ' nun δ - komşuluğu denir. $K' = K \setminus \{u\}$ kümesine ise u ' nun δ - delinmiş komşuluğu denir (Kadioğlu ve Kamali, 2013).

Tanım 2.1.2. $U \subset \mathbb{R}$ ve $u \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer u nun her delinmiş komşuluğu U nun en az bir elemanını içeriyorsa $u \in \mathbb{R}$ ya U kümesinin bir yığılma noktası denir. U kümesinin tüm yığılma noktalarından meydana gelen kümeye U nun yığılma noktalarının kümesi denir ve U' ile gösterilir (Kadioğlu ve Kamali, 2013).

Tanım 2.1.3. (Limit) $U \subset \mathbb{R}$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve u , U nun bir yığılma noktası olsun. Buna göre her $\varepsilon > 0$ için $0 < |t - u| < \delta$ olduğunda $|f(t) - L| < \varepsilon$ olacak biçimde $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ varsa t, u ya yaklaşıırken $f(t)$ fonksiyonunun limiti L dir denir ve

$$\lim_{t \rightarrow u} f(t) = L \quad (2)$$

biçiminde gösterilir (Kadioğlu ve Kamali, 2013).

Tanım 2.1.4. (Tek Taraflı Limit) Reel değerli bir f fonksiyonunun bir u noktasındaki sağ ve sol limitleri, $\varepsilon > 0$ olmak üzere

$$f(u^+) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(u + \varepsilon), \text{ sağ limit} \quad (3)$$

$$f(u^-) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(u - \varepsilon), \text{ sol limit} \quad (4)$$

ifadeleri ile tanımlanır (Altın, 2011).

Eğer f fonksiyonunun u noktasında limiti varsa aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$\lim_{t \rightarrow u} f(t) = f(u^+) = f(u^-). \quad (5)$$

Tanım 2.1.5. (Süreklilik) $U \subset \mathbb{R}$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $u \in U$ olsun. Buna göre $\varepsilon > 0$ sayısı için $|t - u| < \delta$ olduğunda $|f(t) - f(u)| < \varepsilon$ olacak biçimde $\delta = \delta(\varepsilon, u) > 0$ varsa, f fonksiyonu u noktasında süreklidir denir (Kadioğlu ve Kamali, 2013).

u , U nun bir yığılma noktası olduğunda limit tanımlanabileceğinden bu durumda süreklilik şu şekilde tanımlanır: $U \subset \mathbb{R}$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $u \in U$ olsun. Şayet,

$$\lim_{t \rightarrow u} f(t) = f(u) \quad (6)$$

şeklinde oluyor ise f fonksiyonu u noktasında süreklidir denir (Kadioğlu ve Kamali, 2013).

Tanım 2.1.6. (Düzgün Süreksizlik Noktası) Bir f fonksiyonunun bir t_0 noktasındaki sağ ve sol limitleri sonlu değerler olup t_0 noktasında sürekli değilse, t_0 noktasına f fonksiyonunun bir düzgün süreksizlik noktası denir (Altın, 2011).

Tanım 2.1.7. (Parçalı Sürekli Fonksiyon) Bir $[a, b]$ aralığında sonlu sayıda düzgün süreksizlik noktası dışında sürekli olan bir fonksiyona o aralıkta parçalı süreklidir denir (Altın, 2011).

Tanım 2.1.8. (Türev). $U \subset \mathbb{R}$, $u \in U$ ve f fonksiyonu U da tanımlı bir fonksiyon olsun. Şayet

$$\lim_{t \rightarrow u} \frac{f(t) - f(u)}{t - u} \quad (7)$$

limiti mevcut ise, f fonksiyonu t noktasında türevlenebilir denir (Kadioğlu ve Kamali, 2013).

Tanım 2.1.9. $f(t)$ fonksiyonu tanımlı iken

$$F'(t) = f(t) \quad (8)$$

eşitliğini sağlayan bir F fonksiyonu varsa bu F fonksiyonuna f nin bir terstürevidir denir (Kadioğlu ve Kamali, 2013).

Tanım 2.1.10. (Belirsiz İntegral) $f(t)$ bir fonksiyon olsun. Şayet $F'(t) = f(t)$ ise $F(t) + c$ ye $y = f(t)$ fonksiyonunun belirsiz integrali denir aşağıdaki gibi gösterilir;

$$\int f(t)dt = F(t) + c \quad (9)$$

Burada c ye integrasyon sabiti denir (Kadioğlu ve Kamali, 2013).

Tanım 2.1.11. (Belirli İntegral) $f(t)$ tanımlı olduğu $[u, v]$ aralığında parçalı sürekli olsun. Bu taktirde,

$$\int_u^v f(t) dt \quad (10)$$

biçiminde tanımlanan integrale $f(t)$ nin $t = u$ dan $t = v$ ye belirli integrali denir (Kadioğlu ve Kamali, 2013).

Teorem 2.1.1. (İntegral Hesabın Birinci Temel Teoremi) $f: [u, v] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyon ve $F: [u, v] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$F(t) = \int_a^t f(x) dx \quad (11)$$

olarak tanımlansın. Böylece, F fonksiyonu türevlenebilirdir ve aşağıdaki biçimde yazılır (Kadioğlu ve Kamali, 2013).

$$F'(t) = f(t) \quad (12)$$

Teorem 2.1.2. (İntegral Hesabın İkinci Temel Teoremi): $f, [u, v]$ üzerinde integrallenebilen bir fonksiyon olsun. Her $t \in (u, v)$ için $F'(t) = f(t)$ olacak biçimde sürekli bir $F: [u, v] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu varsa,

$$\int_u^v f(t)dt = F(v) - F(u) \quad (13)$$

dır. Bu eşitliğe Newton – Leibniz formülü adı verilir (Kadioğlu ve Kamali, 2013).

Teorem 2.1.3. (Rolle Teoremi): $f: [u, v] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve $\forall t \in (u, v)$ noktasında türevlenebilir olsun. Şayet $f(u) = f(v)$ ise, (u, v) aralığında $f'(w) = 0$ olacak şekilde en az bir w noktası vardır (Balcı, 2012).

Teorem 2.1.4. (Ortalama Değer Teoremi): $f: [u, v] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve $\forall t \in (u, v)$ noktasında türevlenebilir olsun. Böylece, (u, v) aralığında

$$f'(t_0) = \frac{f(v)-f(u)}{v-u} \quad (14)$$

olacak şekilde en az bir t_0 noktası vardır (Balcı, 2012).

Teorem 2.1.5. (Genelleştirilmiş Ortalama Değer Teoremi): $f, h: [u, v] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları sürekli ve $\forall t \in (u, v)$ noktasında türevlenebilir olsun. Böylece, (u, v) aralığında

$$\frac{f'(t_0)}{h'(t_0)} = \frac{f(v)-f(u)}{h(v)-h(u)} \quad (15)$$

olacak şekilde en az bir t_0 noktası vardır (Balcı, 2012).

Tanım 2.1.12. t bağımsız değişkeni, y bağımlı değişkenin bir fonksiyonu ve $y = f(t)$ olmak üzere

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (16)$$

şeklindeki bir bağıntıya n . mertebeden bir adi diferansiyel denklem denir (Çağlıyan vd., 2013).

Yukarıdaki denklem $y^{(n)}$ ye göre çözülürse

$$y^{(n)} = g(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (17)$$

elde edilir. Bu ise n . mertebeden bir adi diferansiyel denklemin açık formda yazılmış şeklidir (Çağlıyan vd., 2013).

Tanım 2.1.13. (Laplace Dönüşümü). f , $[0, \infty)$ aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer $\int_0^\infty e^{-st} \cdot f(t)dt$ integrali mevcut (veya yakınsak) ise, s nin bir fonksiyonu olan

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot f(t)dt \quad (18)$$

ye f nin Laplace dönüşümü denir. f fonksiyonun Laplace dönüşümü

$$L\{f(t)\} = F(s) \text{ veya } L\{f\} = F \quad (19)$$

biçiminde gösterilir (Çağlıyan vd., 2013).

Teorem 2.1.6. Laplace dönüşümü için aşağıdaki özellikler yazılabilir (Çağlıyan vd., 2013);

(i) Laplace dönüşümü lineerdir. Yani, c_1, c_2 keyfi sabitler ve f_1, f_2 de Laplace dönüşümü mevcut iki fonksiyon ise, aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$L\{c_1 f_1 + c_2 f_2\} = c_1 L\{f_1\} + c_2 L\{f_2\}$$

(ii) $L\{f(t)\} = F(s)$ ise $L\{e^{at} f(t)\} = F(s - a)$.

(iii) $L\{f(t)\} = F(s)$ ise $L\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$.

(iv) $L\{f(t)\} = F(s)$ ise $L\{(-1)^n t^n f(t)\} = \frac{d^n F(s)}{ds^n}$.

(v) $L\{f(t)\} = F(s)$ ve $G(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < a \\ f(t - a), & t > a \end{cases}$ ise $L\{G(t)\} = e^{-as} F(s)$.

Tanım 2.1.14. Bir $F(s)$ fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer

$$L\{f(t)\} = F(s) \quad (20)$$

olacak biçiminde bir $f(t)$ fonksiyonu var ise, f ye F nin ters Laplace dönüşümü denir. F nin ters Laplace dönüşümü

$$f = L^{-1}\{F\} \text{ veya } f(t) = L^{-1}\{F(s)\} \quad (21)$$

biçiminde gösterilir (Çağlıyan vd., 2013).

2.2. Newtonyen Olmayan (Non-Newtonyen) Analizde Bazı Temel Kavramlar

Newtonyen olmayan analizlerin temelini oluşturan üstel aritmetik ile ilgili temel tanım ve kavramlar literatürde birden fazla kaynakta verilmiştir (Türkmen ve Başar, 2012; Çakmak ve Başar, 2012; Boruah ve Hazarika, 2018 a,b)

Tanım 2.2.1. Üstel sayı kümeleri aşağıdaki gibi tanımlanır:

- Üstel reel sayılar kümesi:

$$\mathbb{R}_{\text{exp}} = \{e^t \mid t \in \mathbb{R}\}, \quad (22)$$

- Üstel pozitif reel sayılar kümesi:

$$\mathbb{R}_{\text{exp}}^+ = \{e^t \mid t \in \mathbb{R}, t > 0\} = (1, \infty), \quad (23)$$

- Üstel negatif reel sayılar kümesi:

$$\mathbb{R}_{\text{exp}}^- = \{e^t \mid t \in \mathbb{R}, t < 0\} = (0, 1), \quad (24)$$

- Üstel tam sayılar kümesi:

$$\mathbb{Z}_{\text{exp}} = \{e^t \mid t \in \mathbb{Z}\}, \quad (25)$$

- Üstel negatif olmayan reel sayılar kümesi:

$$\mathbb{R}_{\text{exp}}^{+,0} = \{e^t \mid t \geq 0\}, \quad (26)$$

- Üstel pozitif olmayan reel sayılar kümesi:

$$\mathbb{R}_{\text{exp}}^{-,0} = \{e^t \mid t \leq 0\}, \quad (27)$$

- Üstel negatif olmayan tam sayılar kümesi:

$$\mathbb{Z}_{\text{exp}}^{+,0} = \{e^t \mid t \in \mathbb{Z}, t \geq 0\}, \quad (28)$$

- Üstel pozitif olmayan tam sayılar kümesi:

$$\mathbb{Z}_{\exp}^{-,0} = \{e^t \mid t \in \mathbb{Z}, t \leq 0\}. \quad (29)$$

Tanım 2.2.2. Üstel toplama, üstel çıkarma, üstel çarpma ve üstel bölme işlemleri $\forall p, r \in \mathbb{R}_{\exp}$ olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlanır (Çakmak ve Başar, 2012) :

a) Üstel toplama işlemi:

$$p \oplus r = \exp\{\ln(p) + \ln(r)\} = e^{\ln(p)+\ln(r)} = p \cdot r, \quad (30)$$

b) Üstel çıkarma işlemi:

$$p \ominus r = \exp\{\ln(p) - \ln(r)\} = e^{\ln(p)-\ln(r)} = \frac{p}{r}, \quad (31)$$

c) Üstel çarpma işlemi:

$$p \odot r = \exp\{\ln(p) \cdot \ln(r)\} = e^{\ln(p) \cdot \ln(r)} = p^{\ln(r)}, \quad (32)$$

d) Üstel bölme işlemi:

$$p \oslash r = \exp\left\{\frac{\ln(p)}{\ln(r)}\right\} = e^{\frac{\ln(p)}{\ln(r)}} = p^{\frac{1}{\ln(r)}}, \quad (r \neq 1). \quad (33)$$

Tanım 2.2.2.' den aşağıdaki işlemlerin geçerli olduğu görülür:

$$\triangleright e^p \oplus e^r = e^{p+r}, \forall p, r \in \mathbb{R} \quad (34)$$

$$\triangleright e^p \ominus e^r = e^{p-r}, \forall p, r \in \mathbb{R} \quad (35)$$

$$\triangleright e^p \odot e^r = e^{p \cdot r}, \forall p, r \in \mathbb{R} \quad (36)$$

$$\triangleright e^p \oslash e^r = e^{p/r}, \forall p \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (37)$$

Tanım 2.2.3. $t \in \mathbb{R}_{\exp}$ ve $p \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\mathbb{R}_{\exp}$ üzerinde geometrik (çarpımsal) üs alma

$$t^{p \odot} = \exp\{(\ln t)^p\} \quad (38)$$

şeklinde tanımlanır (Türkmen ve Başar, 2012). Bu tanıma göre

$$t^{0\odot} = e^1 = e, \quad (39)$$

$$t^{1\odot} = \exp\{\ln t\} = e^{\ln t} = t \quad (40)$$

olur. Ayrıca, verilen tanım tekrarlı çarpma işlemiyle uyumludur.

$$\begin{aligned} t \odot t &= \exp(\ln t \cdot \ln t) = \exp[(\ln t)^2] = e^{(\ln t)^2} = t^{2\odot}, \\ t \odot t \odot t &= \exp[(\ln t)^2] \odot t = \exp[\ln(\exp(\ln t)^2) \cdot \ln t] \\ t \odot t \odot t &= \exp[(\ln t)^3] = e^{(\ln t)^3} \\ t \odot t \odot t &= t^{3\odot} \end{aligned}$$

Farklı bir biçimde ifade edilirse aşağıdaki şekilde yazılır;

$$t^{2\odot} = t \odot t = \exp[(\ln t)^2] = e^{(\ln t)^2}, \quad (41)$$

$$t^{3\odot} = (t \odot t) \odot t = \exp[(\ln t)^3] = e^{(\ln t)^3}. \quad (42)$$

Lemma 2.2.1. $t \in \mathbb{R}_{\exp}$ ve $p \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki eşitlik geçerlidir (Türkmen ve Başar, 2012);

$$t^{p\odot} = t^{(\ln t)^{p-1}}. \quad (43)$$

İspat. Tanım 2.2.3.' den

$$\begin{aligned} t^{p\odot} &= \exp[(\ln t)^p] \\ t^{p\odot} &= \exp[(\ln t) \cdot (\ln t)^{p-1}] \\ t^{p\odot} &= \{\exp[(\ln t)]\}^{(\ln t)^{p-1}} \\ t^{p\odot} &= t^{(\ln t)^{p-1}} \end{aligned}$$

olduğu görülür

■

2.3. Geometrik (Çarpımsal) Analizde Bazı Temel Kavramlar

Tanım 2.3.1. Tanım kümesi reel sayılar, görüntü kümesi ise üstel reel sayılar olan bir $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\exp}$ fonksiyonuna geometrik (çarpımsal) fonksiyon denir.

Tanım 2.3.2. $t \in \mathbb{R}_{\exp}^{+,0}$ olmak üzere t sayısının geometrik (çarpımsal) karekökü $\sqrt{t}_*$ ile gösterilir ve

$$\sqrt{t}_* = e^{(\ln t)^{\frac{1}{2}}} \quad (44)$$

biçiminde tanımlanır.

$t \in \mathbb{R}_{\exp}$ sayısının geometrik r . kökü tanımlı ise aşağıdaki gibi verilir (Grossman ve Katz, 1972; Boruah ve Hazarika, 2018 a,b).

$$\sqrt[r]{t}_* = e^{(\ln t)^{\frac{1}{r}}} \quad (45)$$

Tanım 2.3.3. $|\cdot|_*: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\exp}^{+,0}$ kuralı ile verilen fonksiyon aşağıdaki biçimde tanımlanır ve bu fonksiyona geometrik mutlak değer fonksiyonu denir (Türkmen ve Başar, 2012a,b).

$$|t|_* = \exp|\ln(t)| = e^{|\ln(t)|} \quad (46)$$

Lemma 2.3.1: Geometrik mutlak değer fonksiyonu aşağıdaki eşitlikleri sağlar (Grossman ve Katz, 1972; Grossman 1983; Türkmen ve Başar, 2012a,b; Boruah ve Hazarika, 2018a,b).

$$|t|_* = \begin{cases} t, & t > 1 \\ 1, & t = 1 \\ \ominus t, & t < 1 \end{cases} \Rightarrow |t|_* = \begin{cases} t, & t > 1 \\ 1, & t = 1 \\ \frac{1}{t}, & t < 1. \end{cases} \quad (47)$$

Burada “ $\ominus t$ ” ile $t \in \mathbb{R}_{\exp}$ elemanının üstel toplama (klasik anlamda çarpma) işlemine göre tersi ifade edilmiştir.

Örneğin, $|7|_* = 7$ iken $\left|\frac{1}{9}\right|_* = 9$ olur.

Bu halde geometrik karekök ve geometrik mutlak değer tanımı gözönüne alınırsa aşağıdaki eşitlik geçerlidir (Grossman ve Katz, 1972; Boruah ve Hazarika, 2018 a,b);

$$\sqrt{t^{2\odot}}_* = |t|_* = e^{|\ln(t)|}. \quad (48)$$

Tanım 2.3.4. Eğer her $\varepsilon > 1$ için $0 < |t - t_0| < \delta$ iken $\left| \frac{f(t)}{L} \right|_* < \varepsilon$ kalacak şekilde $\delta > 0$ varsa f geometrik fonksiyonunun $t \rightarrow t_0 \in \mathbb{R}$ noktasına yaklaşırken geometrik limiti L 'dir denir ve aşağıdaki şekilde gösterilir (Bashirov vd., 2008).

$$* \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = L \quad (49)$$

Tanım 2.3.5. Eğer $* \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = f(t_0)$ ise f geometrik fonksiyonu $t = t_0 \in \mathbb{R}$ noktasında geometrik süreklidir denir (Bashirov vd., 2008).

Tanım 2.3.6. $f: U \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\exp}$ geometrik fonksiyonu verilsin. $I \subseteq U$, f fonksiyonunun tanım kümesinin içinde bir açık aralık ve $t \in I$ bu aralıkta bir nokta olsun.

Eğer $\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(t+h)}{f(t)} \right]^{\frac{1}{h}}$ limiti varsa

$$f^*(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(t+h)}{f(t)} \right]^{\frac{1}{h}} \quad (50)$$

limit değerine f fonksiyonunun t noktasındaki geometrik türevi denir.

Önerme 2.3.1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\exp}$ bir geometrik fonksiyon olsun. Geometrik türevi klasik türev yardımıyla aşağıdaki biçimde yazabiliriz (Stanley, 1999).

$$f^*(t) = \exp \left\{ \frac{d}{dt} (\ln \circ f)(t) \right\} = e^{\frac{f'(t)}{f(t)}} \quad (51)$$

Teorem 2.3.1. p ve r geometrik türeve sahip iki fonksiyon ve $k > 0$ bir sabit olsun. Bu taktirde, $(k \cdot p)$, $(p \cdot r)$, $(p + r)$, $\left(\frac{p}{r}\right)$, (p^r) fonksiyonlarının da geometrik türeve sahip olup ve bu fonksiyonların geometrik türevleri aşağıdaki şekilde verilmiştir (Bashirov vd. 2008);

- (i) $(k \cdot p)^*(t) = p^*(t)$,
- (ii) $(p \cdot r)^*(t) = p^*(t) \cdot r^*(t)$,
- (iii) $(p + r)^*(t) = p^*(t)^{\frac{p(t)}{p(t)+r(t)}} \cdot r^*(t)^{\frac{r(t)}{p(t)+r(t)}}$,
- (iv) $\left(\frac{p}{r}\right)^*(t) = \frac{p^*(t)}{r^*(t)}$,
- (v) $(p^r)^*(t) = p^*(t)^{r(t)} \cdot p(t)^{r'(t)}$.

Tanım 2.3.7. (Geometrik Kısmi Türev)

$f = f(x, y)$ iki değişkenli bir geometrik fonksiyon olsun. Buna göre f nin geometrik kısmi türevleri sırasıyla aşağıdaki gibi gösterilir (Bashirov, 2013);

$$f_x^*(x, y) = \frac{d^*}{dx^*} f(x, y) = e^{\frac{\partial}{\partial x}(\ln \circ f(x, y))}, \quad (52)$$

$$f_y^*(x, y) = \frac{d^*}{dy^*} f(x, y) = e^{\frac{\partial}{\partial y}(\ln \circ f(x, y))}. \quad (53)$$

Teorem 2.3.2. (Geometrik Zincir Kuralı)

$f = f(x, y)$ şeklinde tanımlı ve sürekli geometrik türevlere sahip olan iki değişkenli bir geometrik fonksiyon olsun. Şayet her $t \in (u, v)$ için $f(x(t), y(t))$ tanımlı olacak biçimde (u, v) aralığında $x = x(t)$ ve $y = y(t)$ fonksiyonları klasik olarak türevlenebilirse bu durumda aşağıdaki kural geçerlidir;

$$\frac{d^* f(x(t), y(t))}{dt^*} = f^*(x(t), y(t)) = f_x^*(x(t), y(t))^{x'(t)} \cdot f_y^*(x(t), y(t))^{y'(t)}. \quad (54)$$

Burada $f_x^*(x(t), y(t))$ ve $f_y^*(x(t), y(t))$ türevlerine $f(x, y)$ fonksiyonunun sırasıyla x ve y değişkenlerine göre geometrik kısmi türevi denir (Bashirov, 2013).

Tanım 2.3.8: Her $t \in (u, v)$ için $F^*(t) = f(t)$ ise $F: (u, v) \rightarrow \mathbb{R}_{\exp}$ fonksiyonuna $f: (u, v) \rightarrow \mathbb{R}_{\exp}$ fonksiyonunun bir geometrik ters türevi denir. Bu ise C pozitif keyfi sabiti ile aşağıdaki gibi yazılır (Stanley, 1999);

$$* \int f(t)^{dt} = C \cdot F(t). \quad (55)$$

Geometrik türevde olduğu gibi geometrik ters türev formülü de aşağıdaki biçimde yazılır (Stanley, 1999);

$$* \int f(t)^{dt} = e^{\int \ln f(t) dt}. \quad (56)$$

Burada f pozitif olup $\ln f(t)$ her yerde tanımlıdır.

Tanım 2.3.9. f fonksiyonu $[u, v]$ aralığında pozitif ve sürekli ise (u, v) aralığında geometrik integrallenebilir ve geometrik belirli integrali aşağıdaki gibi yazılır (Bashirov vd. 2008).

$$* \int_u^v f(t) dt = \exp\left\{\int_u^v \ln[f(t)] dt\right\} = e^{\int_u^v \ln[f(t)] dt}. \quad (57)$$

Teorem 2.3.3. p ve r , $[u, v]$ aralığında geometrik integrallenebilir, (u, v) aralığında pozitif ve sürekli olsun. Böylece, $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere $p^k, p \cdot r, \frac{p}{r}$ fonksiyonları geometrik integrallenebilirdir ve integralleri aşağıdaki biçimde hesaplanır (Bashirov vd. 2008).

- (i) $* \int_u^v ([p(t)]^k) dt = \left(* \int_u^v [p(t)] dt\right)^k$
- (ii) $* \int_u^v [p(t) \cdot r(t)] dt = \left\{* \int_u^v [p(t)] dt\right\} \cdot \left\{* \int_u^v [r(t)] dt\right\}$
- (iii) $* \int_u^v \left[\frac{p(t)}{r(t)}\right] dt = \frac{* \int_u^v [p(t)] dt}{* \int_u^v [r(t)] dt}$
- (iv) $* \int_u^v p(t) dt = \left\{* \int_u^w p(t) dt\right\} \cdot \left\{* \int_w^v p(t) dt\right\}, \quad (u \leq w \leq v).$

Teorem 2.3.4. $f(t)$ geometrik fonksiyonu $[u, v]$ aralığında geometrik sürekli ve her $t \in [u, v]$ için

$$F(t) = * \int_u^t f(x) dx \quad (58)$$

biçiminde olsun. Böylece $[u, v]$ aralığında

$$F^*(t) = f(t) \quad (59)$$

eşitliği yazılır. Bu teoreme geometrik analizin birinci temel teoremi denir (Özyapıcı, 2009).

Teorem 2.3.5. $f(t)$ geometrik fonksiyonu $[u, v]$ aralığında geometrik sürekli ve $F(t), f(t)$ fonksiyonunun bir geometrik ters türevi olsun. Bu taktirde aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$* \int_u^v f(t) dt = \frac{F(v)}{F(u)} \quad (60)$$

Bu teoreme ise geometrik analizin ikinci temel teoremi denir (Özyapıcı, 2009).

Tanım 2.3.10. (Geometrik Analizde Laplace İntegral Dönüşümü)

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\exp}$ tanımlı geometrik bir fonksiyon olmak üzere $f(t)$ nin geometrik (çarpımsal) Laplace integral dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanır (Yalcin vd., 2016),

$$\mathcal{L}_m\{f(t)\} = F_m(s) = \int_0^\infty (f(t)e^{-st})^{dt} = e^{\int_0^\infty e^{-st} \ln f(t) dt} = e^{\mathcal{L}\{\ln f(t)\}} \quad (61)$$

Bazı fonksiyonların geometrik Laplace dönüşümleri aşağıdaki verilmiştir (Yalcin vd., 2016),

- $\mathcal{L}_m\{1\} = F_m(s) = e^{\int_0^\infty \ln 1 e^{-st} dt} = 1$
- $\mathcal{L}_m\{e^t\} = e^{\int_0^\infty \ln e^t \cdot e^{-st} dt} = e^{\int_0^\infty t e^{-st} dt} = e^{\mathcal{L}(t)} = e^{\frac{1}{s^2}}$
- $\mathcal{L}_m\{e^{t^n}\} = e^{\mathcal{L}\{\ln e^{t^n}\}} = e^{\mathcal{L}\{t^n\}} = e^{\frac{n!}{s^{n+1}}}$
- $\mathcal{L}_m\{e^{e^{at}}\} = e^{\mathcal{L}\{e^{at}\}} = e^{\frac{1}{s-a}}$
- $\mathcal{L}_m\{e^{\sin at}\} = e^{\mathcal{L}\{\sin at\}} = e^{\frac{a}{s^2+a^2}}$
- $\mathcal{L}_m\{e^{\cos at}\} = e^{\mathcal{L}\{\cos at\}} = e^{\frac{s}{s^2+a^2}}$
- $\mathcal{L}_m\{e^{\sinh at}\} = e^{\mathcal{L}\{\sinh at\}} = e^{\frac{a}{s^2-a^2}}$
- $\mathcal{L}_m\{e^{\cosh at}\} = e^{\mathcal{L}\{\cosh at\}} = e^{\frac{s}{s^2-a^2}}$

Teorem 2.3.6. (Lineerlik Özelliği)

Geometrik Laplace dönüşümü lineerdir. Yani k_1, k_2 keyfi sabit üstler ve $f_1(t), f_2(t)$ de geometrik Laplace dönüşümüne sahip fonksiyonlar olmak üzere

$$\mathcal{L}_m\{f_1^{k_1}(t) \cdot f_2^{k_2}(t)\} = \mathcal{L}_m\{f_1(t)\}^{k_1} \cdot \mathcal{L}_m\{f_2(t)\}^{k_2} \quad (62)$$

şeklinde yazılır (Yalcin vd., 2016).

Teorem 2.3.7. (Birinci Öteleme Özelliği)

$f(t)$ nin geometrik Laplace dönüşümü $\mathcal{L}_m\{f(t)\} = F_m(s)$ ise birinci öteleme özelliği

$$\mathcal{L}_m\{f(t)e^{a \cdot t}\} = F_m(s - a) \quad (63)$$

biçiminde olur (Yalcin vd., 2016).

Teorem 2.3.8. (İkinci Öteleme Özelliği):

$$\mathcal{L}_m\{f(t)\} = F_m(s) \text{ ve } G(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < a \\ f(t-a) & t > a \end{cases} \quad (64)$$

ise ikinci öteleme özelliği

$$\mathcal{L}_m\{G(t)\} = F_m(s)e^{-a \cdot s} \quad (65)$$

şeklinde olur (Yalcin vd., 2016).

Teorem 2.3.9. (Ölçek Değişimi Özelliği)

$f(t)$ nin geometrik Laplace dönüşümü $\mathcal{L}_m\{f(t)\} = F_m(s)$ ise ölçek değişimi özelliği

$$\mathcal{L}_m\{f(a \cdot t)\} = F_m\left(\frac{s}{a}\right)^{\frac{1}{a}} \quad (66)$$

şeklindedir (Yalcin vd., 2016).

Teorem 2.3.10. $f(t)$ nin geometrik Laplace dönüşümü $\mathcal{L}_m\{f(t)\} = F_m(s)$ ise

$$\mathcal{L}_m\{f(t)t^n\} = \left(F_m^{*(n)}(s)\right)^{(-1)^n} \quad (67)$$

şeklinde yazılır (Yalcin vd., 2016).

Teorem 2.3.11. (Geometrik Konvolüsyon Özelliği) Şayet $\mathcal{L}_m^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ ve $\mathcal{L}_m^{-1}\{G(s)\} = g(t)$ ise konvolüsyon özelliği

$$\mathcal{L}_m^{-1}\{F_m(s)G(s)\} = \int_0^t f(x)g(t-x)^{dx} \quad (68)$$

şeklinde tanımlanır (Yalcin vd., 2016).

Tanım 2.3.11. $f(t)$ bir geometrik fonksiyon ve $\ln f(t)$ ise $[1, \infty)$ aralığında tanımlı olsun. Şayet, $t > t_0$ için

$$|f(t)|_* \leq Ke^{e^{\alpha t}} \quad (69)$$

olacak biçimde t_0 , K ve α pozitif sabitleri varsa f fonksiyonuna α –çift üstel mertebededir denir (Yalcin vd., 2016).

Teorem 2.3.12. (Geometrik Laplace Dönüşümünün Varlığı)

$f(t)$ bir geometrik fonksiyonu $t > t_0$ için α –çift üstel mertebeden ve $\ln f(t)$ ise parçalı sürekli olsun. Bu durumda $s > \alpha$ için $\mathcal{L}_m\{f(t)\}$ mevcuttur (Yalcin vd., 2016).

Teorem 2.3.13. Eğer f fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında pozitif tanımlı ve α –çift üstel mertebeden olup $\ln f(t)$ ise $[0, \infty)$ aralığında parçalı sürekli bir fonksiyon ise,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L}_m\{f(t)\} = 1 \quad (70)$$

yazılır (Yalcin vd., 2016).

Teorem 2.3.14. $f(t)$, $[0, A]$ aralığında sürekli ve α –çift üstel mertebeden olup, $f^*(t)$ fonksiyonu da $[0, A]$ aralığında parçalı sürekli olsun. Böylece, $s > \alpha$ için geometrik türevin Laplace dönüşümü;

$$\mathcal{L}_m\{f^*(t)\} = \frac{1}{f(0)} \cdot F(s)^s \quad (71)$$

biçiminde yazılır (Yalcin vd., 2016).

Teorem 2.3.15. Yukarıdaki teoremden $f(t)$ ve $f^*(t)$ üzerine yazılan şartlar sırasıyla $f^*(t)$ ve $f^{**}(t)$ üzerine yazılırsa $s > \alpha$ için $f^{**}(t)$ fonksiyonunun geometrik Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}_m\{f^{**}(t)\} = \frac{1}{f(0)^s \cdot f^*(0)} \cdot F(s)^{s^2} \quad (72)$$

biçiminde yazılır (Yalcin vd., 2016).

Sonuç 2.3.1: Yukarıdaki teoremlerden yola çıkarak n .mertebeden geometrik türevin Laplace dönüşümünü verelim. Farz edelim ki $0 \leq t \leq A$ aralığında $f(t), f^*(t), f^{**}(t), \dots, f^{*(n-1)}(t)$ fonksiyonları sürekli ve $f^{*(n)}(t)$ parçalı sürekli olsun. Bu taktirde $t \geq t_0$ için

$$|f(t)|_* \leq Ke^{e^{\alpha t}}, |f^*(t)|_* \leq Ke^{e^{\alpha t}}, \dots, |f^{*(n-1)}(t)|_* \leq Ke^{e^{\alpha t}} \quad (73)$$

olacak biçimde K, α ve t_0 sayıları var olsun. Böylece, $s > \alpha$ için $\mathcal{L}_m\{f^{*(n)}(t)\}$ geometrik Laplace dönüşümü vardır ve,

$$\mathcal{L}_m\{f^{*(n)}(t)\} = \frac{1}{f(0)s^{n-1} \cdot f^*(0)s^{n-2} \cdot f^{**}(0)s^{n-3} \cdot \dots \cdot f^{*(n-1)}(0)} \cdot F(s)s^n \quad (74)$$

formülü ile hesaplanır (Yalcin vd., 2016).

Tanım 2.3.12. Şayet $F_m(s)$, $f(t)$ sürekli fonksiyonunun geometrik Laplace dönüşümü ise, yani

$$\mathcal{L}_m\{f(t)\} = F_m(s) \quad (75)$$

ise $\mathcal{L}_m^{-1}\{F_m(s)\}$ ye $f(t)$ nin ters geometrik Laplace dönüşümü denir (Yalcin vd., 2016).

Teorem 2.3.16. Ters geometrik Laplace dönüşümü de lineerdir. Yani, k_1, k_2 keyfi sabit üstler ve $f_1(t)$, $f_2(t)$ de $\mathcal{L}_m\{f_1(t)\} = F_1$ ve $\mathcal{L}_m\{f_2(t)\} = F_2$ olacak şekilde geometrik Laplace dönüşümü olan iki sürekli fonksiyon ise bu taktirde,

$$\mathcal{L}_m^{-1}\{F_1^{k_1} \cdot F_2^{k_2}\} = \mathcal{L}_m^{-1}\{F_1\}^{k_1} \cdot \mathcal{L}_m^{-1}\{F_2\}^{k_2} \quad (76)$$

eşitliği geçerlidir (Yalcin vd., 2016).

2.4. Bigeometrik Analizde Bazı Temel Kavramlar

Bu kısımda tezin temelini oluşturan bigeometrik analiz ile ilgili bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 2.4.1. Üstel reel sayılar kümesinden üstel reel sayılar kümesine tanımlı bir $f: \mathbb{R}_{\exp} \rightarrow \mathbb{R}_{\exp}$ fonksiyonuna bigeometrik fonksiyon denir.

Tanım 2.4.2. (Bigeometrik Limit)

$f: A \subseteq \mathbb{R}_{\exp} \rightarrow \mathbb{R}_{\exp}$ tanımlı bir bigeometrik fonksiyon ve a , A kümesinin geometrik (üstel) komşuluğa göre bir yığılma noktası olsun. f nin t noktasındaki bigeometrik limiti vardır ve tek olarak $L \in \mathbb{R}_{\exp}$ sayısıdır ancak ve ancak her $\varepsilon > 1$ için $t \in (a \ominus \delta, a \oplus \delta) \setminus \{a\} = \left(\frac{a}{\delta}, a \cdot \delta\right) \setminus \{a\}$ iken $f(t) \in (L \ominus \varepsilon, L \oplus \varepsilon) = \left(\frac{L}{\varepsilon}, L \cdot \varepsilon\right)$ olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon) > 1$ sayısı vardır (Grossman ve Katz, 1972; Grossman, 1983; Boruah ve Hazarika, 2018a). Bigeometrik limit aşağıdaki şekillerden biri ile gösterilir.

$$\pi \lim_{t \rightarrow a} f(t) = L \quad (77)$$

veya

$$t \xrightarrow{\pi} a \text{ iken } f(t) \xrightarrow{\pi} L. \quad (78)$$

Tanım 2.4.3. (Bigeometrik Tek Taraflı Limit) $f: A \subseteq \mathbb{R}_{\text{exp}} \rightarrow \mathbb{R}_{\text{exp}}$ tanımlı bir bigeometrik fonksiyon ve $a \in A$ olsun. f fonksiyonunun a noktasındaki bigeometrik sağ ve sol limitleri sırasıyla $\varepsilon > 1$ olmak üzere,

$$f(a^{bg+}) = \pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} f(\varepsilon \cdot a), \quad (79)$$

$$f(a^{bg-}) = \pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} f\left(\frac{a}{\varepsilon}\right), \quad (80)$$

ifadeleri ile tanımlanır.

Eğer f fonksiyonunun a noktasında bigeometrik limiti varsa aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$\pi \lim_{t \rightarrow a} f(t) = f(a^{bg+}) = f(a^{bg-}). \quad (81)$$

Tanım 2.4.4. (Bigeometrik Süreklilik)

$f: A \subseteq \mathbb{R}_{\text{exp}} \rightarrow \mathbb{R}_{\text{exp}}$ tanımlı bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun. Her $\varepsilon > 1$ sayısı için $|t \ominus a|_* < \delta$ olduğunda $|f(t) \ominus f(a)|_* < \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 1$ sayısı varsa bu f fonksiyonuna $t = a$ noktasında bigeometrik süreklidir denir. Eğer f bigeometrik fonksiyonu a noktasında bigeometrik sürekli ise aşağıdaki biçimde yazılır;

$$\pi \lim_{t \rightarrow a} f(t) = f(a). \quad (82)$$

Tanım 2.4.5. (Bigeometrik Düzgün Süreksizlik Noktası) Bir f bigeometrik fonksiyonunun bir a noktasındaki bigeometrik sağ ve sol limitleri sonlu değerler olup a noktasında bigeometrik sürekli değilse, a noktasına f fonksiyonunun bir bigeometrik düzgün süreksizlik noktası denir.

Tanım 2.4.6. (Bigeometrik Parçalı Sürekli Fonksiyon) Bir $[a, b]$ aralığında sonlu sayıda bigeometrik düzgün süreksizlik noktası dışında bigeometrik sürekli olan bir bigeometrik fonksiyona o aralıkta bigeometrik parçalı süreklidir denir.

Tanım 2.4.7. (Bigeometrik Türev)

$f: \mathbb{R}_{\text{exp}} \rightarrow \mathbb{R}_{\text{exp}}$ tanımlı bigeometrik fonksiyon olsun. Şayet

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{[f(1+h) \cdot t]}{f(t)} \right\}^{1/h} \quad (83)$$

veya

$$\pi \lim_{h \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(h \cdot t)}{f(t)} \right\}^{1/\ln h} \quad (84)$$

limiti mevcut ise bu limit değerine f fonksiyonunun bigeometrik türevi denir ve

$$\frac{d^\pi f}{dt^\pi}(t) = f^\pi(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f[(1+h) \cdot t]}{f(t)} \right\}^{1/h} \quad (85)$$

şeklinde gösterilir (Grossman ve Katz, 1972; Grossman 1983; Boruah ve Hazarika, 2018a,b).

Önerme 2.4.1. Yukarıda verilen bigeometrik türevin limit tanımını üstel aritmetik yardımıyla,

$$\pi \lim_{\varphi \rightarrow t} [f(\varphi) \ominus f(t)] \oslash [\varphi \ominus t] = \lim_{\varphi \rightarrow t} \left[\frac{f(\varphi)}{f(t)} \right]^{1/\ln \varphi - \ln t} \quad (86)$$

biçiminde yazılabilir. Burada yazılan limit mevcut ise $f^\pi(t)$ ile gösterilir ve f nin t noktasındaki bigeometrik türevi olarak adlandırılır. Ayrıca aşağıdaki biçimde de gösterilebilir (Grossman ve Katz, 1972; Grossman, 1983; Boruah ve Hazarika, 2018a,b);

$$f^\pi(t) = \pi \lim_{h \rightarrow 1} [f(t \oplus h) \ominus f(t)] \oslash h = \pi \lim_{h \rightarrow 1} \left[\frac{f(h \cdot t)}{f(t)} \right]^{1/\ln h} \quad (87)$$

■

Önerme 2.4.2. $f^\pi(t) = \exp \left(t \cdot \frac{f'(t)}{f(t)} \right) = e^{t \cdot (\ln \circ f)'(t)}$ eşitliği geçerlidir.

İspat. Bigeometrik türevin tanımının aşağıdaki gibi olduğu biliniyor

$$f^\pi(t) = \lim_{h \rightarrow 1} \left[\frac{f(h \cdot t)}{f(t)} \right]^{1/\ln h}$$

Burada, eşitliğin sağ tarafı ele alınıp çeşitli matematiksel işlemler yapılırsa;

$$\begin{aligned}
\lim_{h \rightarrow 1} \left[\frac{f(h \cdot t)}{f(t)} \right]^{1/\ln h} &= \lim_{h \rightarrow 1} \left\{ \exp \left(\ln \left[\frac{f(h \cdot t)}{f(t)} \right]^{1/\ln h} \right) \right\} \\
\lim_{h \rightarrow 1} \left[\frac{f(h \cdot t)}{f(t)} \right]^{1/\ln h} &= \lim_{h \rightarrow 1} \left\{ \exp \left[\frac{\ln f(h \cdot t) - \ln f(t)}{\ln h} \right] \right\} \\
\lim_{h \rightarrow 1} \left[\frac{f(h \cdot t)}{f(t)} \right]^{1/\ln h} &= \exp \left\{ \lim_{h \rightarrow 1} \left[\frac{\ln f(h \cdot t) - \ln f(t)}{\ln h} \right] \right\}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada L'hospital kuralı uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
\lim_{h \rightarrow 1} \left[\frac{f(h \cdot t)}{f(t)} \right]^{1/\ln h} &= \exp \left\{ \lim_{h \rightarrow 1} \frac{\frac{d}{dh} (\ln \circ f)(h \cdot t) \cdot \frac{d}{dh} (h \cdot t)}{\frac{d}{dh} (\ln h)} \right\} \\
\lim_{h \rightarrow 1} \left[\frac{f(h \cdot t)}{f(t)} \right]^{1/\ln h} &= \exp \left\{ \lim_{h \rightarrow 1} \frac{\frac{d}{dh} (\ln \circ f)(h \cdot t) \cdot t}{\frac{1}{h}} \right\} = e^{(\ln \circ f)'(t) \cdot t}
\end{aligned}$$

elde edilir. Yani

$$f^\pi(t) = \exp \left(t \cdot \frac{f'(t)}{f(t)} \right) = e^{t \cdot (\ln \circ f)'(t)} \quad (88)$$

olarak yazılır. Bu ise bigeometrik türevin klasik türev ile ilişkisini verir (Grossman ve Katz, 1972; Grossman, 1983; Boruah ve Hazarika, 2018a,b).

■

Tanım 2.4.8. Birinci meriteden bigeometrik türev f^π olup bunun bir kez daha bigeometrik türevi alınırsa ikinci mertebeden bigeometrik türevi olur ve $f^{\pi\pi}$ ile gösterilir. Buna göre ikinci mertebeden bigeometrik türev

$$f^{\pi\pi}(t) = \frac{d^{\pi\pi} f}{dt^{\pi\pi}}(t) = \pi \lim_{h \rightarrow 1} \{ [f^\pi(t \oplus h) \ominus f^\pi(t)] \oslash h \} \quad (89)$$

şeklinde yazılır. Benzer şekilde f nin n . mertebeden bigeometrik türevi ise $f^{\pi(n)}$ ile gösterilir ve

$$f^{\pi(n)}(t) = \frac{d^{\pi(n)}f}{dt^{\pi(n)}}(t) = \pi \lim_{h \rightarrow 1} \{ [f^{\pi(n-1)}(t \oplus h) \ominus f^{\pi(n-1)}(t)] \oslash h \} \quad (90)$$

biçiminde yazılır (Güngör, 2020).

Teorem 2.4.1. $f, h: (a, b) \subset \mathbb{R}_{\exp} \rightarrow \mathbb{R}_{\exp}$ tanımlı ve bigeometrik türevlenebilir iki bigeometrik fonksiyon olsun. $k \in \mathbb{R}_{\exp}$ bir sabit olmak üzere aşağıdaki özellikler geçerlidir (Grossman ve Katz, 1972; Grossman, 1983; Boruah ve Hazarika, 2018a,b);

- (i) $(k \cdot f)^{\pi}(t) = f^{\pi}(t),$
- (ii) $(f \cdot h)^{\pi}(t) = f^{\pi}(t) \cdot h^{\pi}(t),$
- (iii) $\left(f/h\right)^{\pi}(t) = f^{\pi}(t)/h^{\pi}(t),$
- (iv) $(f + h)^{\pi} = f^{\pi}(t)^{\frac{f(t)}{f(t)+h(t)}} \cdot h^{\pi}(t)^{\frac{h(t)}{f(t)+h(t)}},$
- (v) $(f^h)^{\pi}(t) = f^{\pi}(t)^{h(t)} \cdot f(t)^{t \cdot h'(t)},$
- (vi) $(f \circ h)^{\pi}(t) = \{f^{\pi}[h(t)]\}^{h'(t)}.$

İspat.

- (i) Bigeometrik türevin tanımından,

$$(k \cdot f)^{\pi}(t) = e^{t \cdot [\ln^{\circ}(k \cdot f)]'(t)}$$

$$(k \cdot f)^{\pi}(t) = e^{t \cdot \left[\frac{(k \cdot f)'(t)}{(k \cdot f)(t)} \right]}$$

$$(k \cdot f)^{\pi}(t) = e^{t \cdot \left[\frac{k \cdot f'(t)}{k \cdot f(t)} \right]}$$

$$(k \cdot f)^{\pi}(t) = e^{t \cdot \frac{f'(t)}{f(t)}}$$

$$(k \cdot f)^{\pi}(t) = f^{\pi}(t)$$

olduğu görülür.

- (ii) Bigeometrik türevin tanımından,

$$(f \cdot h)^{\pi}(t) = e^{t \cdot [\ln^{\circ}(f \cdot g)]'(t)} = e^{t \cdot \left[\frac{(f \cdot h)'(t)}{(f \cdot h)(t)} \right]}$$

$$(f \cdot h)^{\pi}(t) = e^{t \cdot \left[\frac{f'(t) \cdot h(t) + f(t) \cdot h'(t)}{f(t) \cdot h(t)} \right]} = e^{t \cdot \left[\frac{f'(t) \cdot h(t)}{f(t) \cdot h(t)} + \frac{f(t) \cdot h'(t)}{f(t) \cdot h(t)} \right]}$$

$$(f \cdot h)^{\pi}(t) = e^{t \cdot \left[\frac{f'(t)}{f(t)} + \frac{h'(t)}{h(t)} \right]} = \left(e^{t \cdot \frac{f'(t)}{f(t)}} \right) \cdot \left(e^{t \cdot \frac{h'(t)}{h(t)}} \right)$$

$$(f \cdot h)^\pi(t) = f^\pi(t) \cdot h^\pi(t)$$

olduğu görülür.

(iii) Bigeometrik türevin tanımından,

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{h}\right)^\pi(t) &= e^{t \cdot [\ln^\circ(f/h)]'(t)} = e^{t \cdot \left[\frac{(f/h)'(t)}{(f/h)(t)}\right]} \\ \left(\frac{f}{h}\right)^\pi(t) &= e^{t \cdot \left[\frac{h(t)}{f(t)} \cdot \left(\frac{f'(t) \cdot h(t) - f(t) \cdot h'(t)}{h^2(t)}\right)\right]} \\ \left(\frac{f}{h}\right)^\pi(t) &= e^{t \cdot \left[\left(\frac{h(t)}{f(t)} \cdot \frac{f'(t) \cdot h(t)}{h^2(t)}\right) - \left(\frac{h(t)}{f(t)} \cdot \frac{f(t) \cdot h'(t)}{h^2(t)}\right)\right]} \\ \left(\frac{f}{h}\right)^\pi(t) &= e^{t \cdot \left[\left(\frac{f'(t)}{f(t)}\right) - \left(\frac{h'(t)}{h(t)}\right)\right]} \\ \left(\frac{f}{h}\right)^\pi(t) &= \left(e^{t \cdot \frac{f'(t)}{f(t)}}\right) \cdot \left(e^{-t \cdot \frac{h'(t)}{h(t)}}\right) \\ \left(\frac{f}{h}\right)^\pi(t) &= f^\pi(t) / h^\pi(t) \end{aligned}$$

olduğu görülür.

(iv) Bigeometrik türevin tanımından,

$$\begin{aligned} (f + h)^\pi &= e^{t \cdot [\ln^\circ(f+h)]'(t)} = e^{t \cdot \left[\frac{(f+h)'(t)}{(f+h)(t)}\right]} \\ (f + h)^\pi &= e^{t \cdot \left[\frac{f'(t) + h'(t)}{f(t) + h(t)}\right]} = \left(e^{t \cdot \left[\frac{f'(t)}{f(t) + h(t)}\right]}\right) \cdot \left(e^{t \cdot \left[\frac{h'(t)}{f(t) + h(t)}\right]}\right) \end{aligned}$$

yazılır. Burada eşitliğin sağ tarafındaki birinci ifadenin üssünü $f(t)$ ile ikinci ifadenin üssünü ise $h(t)$ ile çarpıp tekrar kendilerine bölersek,

$$\begin{aligned} (f + h)^\pi &= \left\{ e^{t \cdot \left(\frac{f'(t) \cdot f(t)}{[f(t) + h(t)] \cdot f(t)}\right)} \right\} \cdot \left\{ e^{t \cdot \left(\frac{h'(t) \cdot h(t)}{[f(t) + h(t)] \cdot h(t)}\right)} \right\} \\ (f + h)^\pi &= \left\{ e^{t \cdot \left[\frac{f'(t)}{f(t)}\right]} \right\}^{\frac{f(t)}{f(t) + h(t)}} \cdot \left\{ e^{t \cdot \left[\frac{h'(t)}{h(t)}\right]} \right\}^{\frac{h(t)}{f(t) + h(t)}} \\ (f + h)^\pi &= f^\pi(t)^{\frac{f(t)}{f(t) + h(t)}} \cdot h^\pi(t)^{\frac{h(t)}{f(t) + h(t)}} \end{aligned}$$

olduğu görülür.

$$\begin{aligned}
\text{(v)} \quad (f^h)^\pi(t) &= e^{t \cdot [\ln \circ (f^h)]'(t)} = e^{t \cdot [(h(t) \cdot \ln \circ f)(t)]'} \\
(f^h)^\pi(t) &= e^{t \cdot [(h'(t) \cdot (\ln \circ f)(t) + h(t) \cdot (\ln \circ f)'(t))]} \\
(f^h)^\pi(t) &= \left\{ e^{t \cdot [(h(t) \cdot (\ln \circ f)'(t))]} \right\} \cdot \left\{ e^{t \cdot [(h'(t) \cdot (\ln \circ f)(t))]} \right\} \\
(f^h)^\pi(t) &= \left\{ e^{t \cdot (\ln \circ f)'(t)} \right\}^{h(t)} \cdot \left\{ e^{(\ln \circ f)(t)} \right\}^{t \cdot h'(t)} \\
(f^h)^\pi(t) &= f^\pi(t)^{h(t)} \cdot f(t)^{t \cdot h'(t)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(vi)} \quad (f \circ h)^\pi(t) &= e^{t \cdot [\ln \circ (f \circ h)]'(t)} = e^{t \cdot \left[\frac{f'(h(t)) \cdot h'(t)}{f(h(t))} \right]} \\
(f \circ h)^\pi(t) &= \left\{ e^{t \cdot \left[\frac{f'(h(t))}{f(h(t))} \right]} \right\}^{h'(t)} \\
(f \circ h)^\pi(t) &= \{f^\pi[h(t)]\}^{h'(t)}.
\end{aligned}$$

Bazı fonksiyonların bigeometrik türevleri aşağıda verilmiştir (Boruah and Hazarika, 2018a,b);

Tablo 1. Bazı fonksiyonların bigeometrik türevleri

$\frac{d^\pi}{dt^\pi}(c) = 1$	$\frac{d^\pi}{dt^\pi}(\cos t) = e^{-t \cdot \tan t}$
$\frac{d^\pi}{dt^\pi}(e^t) = e^t$	$\frac{d^\pi}{dt^\pi}(\tan t) = e^{t \cdot \sec t \cdot \csc t}$
$\frac{d^\pi}{dt^\pi}(t^n) = e^n$	$\frac{d^\pi}{dt^\pi}(\cot t) = e^{-t \cdot \sec t \cdot \csc t}$
$\frac{d^\pi}{dt^\pi}\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{e}$	$\frac{d^\pi}{dt^\pi}(\sec t) = e^{t \cdot \tan t}$
$\frac{d^\pi}{dt^\pi}(\sin t) = e^{t \cdot \cot t}$	$\frac{d^\pi}{dt^\pi}(\csc t) = e^{-t \cdot \cot t}$

Önerme 2.4.3. $f: \mathbb{R}_{\exp} \rightarrow \mathbb{R}_{\exp}$ bigeometrik türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Bu taktirde,

$$\frac{d^\pi}{dt^\pi}[e^{f(t)}] = e^{t \cdot f'(t)} \tag{91}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat.

$$\begin{aligned}\frac{d^\pi}{dt^\pi} [e^{f(t)}] &= \frac{d^\pi}{dt^\pi} (\exp \circ f)(t) \\ \frac{d^\pi}{dt^\pi} [e^{f(t)}] &= \exp \left\{ t \cdot \frac{d(\ln \circ \exp \circ f)}{dt}(t) \right\} \\ \frac{d^\pi}{dt^\pi} [e^{f(t)}] &= \exp \left\{ t \cdot \frac{d}{dt} f(t) \right\} \\ \frac{d^\pi}{dt^\pi} [e^{f(t)}] &= e^{t \cdot f'(t)}.\end{aligned}$$

■

Tanım 2.4.9. (Bigeometrik Kısmi Türev)

$f = f(x, y)$ iki değişkenli bir bigeometrik fonksiyon olsun. Buna göre f nin bigeometrik kısmi türevleri sırasıyla aşağıdaki gibi gösterilir (Güngör, 2020);

$$f_x^\pi(x, y) = \frac{\partial^\pi}{\partial x^\pi} f(x, y) = e^{x \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\ln \circ f(x, y))} \quad (92)$$

$$f_y^\pi(x, y) = \frac{\partial^\pi}{\partial y^\pi} f(x, y) = e^{y \cdot \frac{\partial}{\partial y} (\ln \circ f(x, y))}. \quad (93)$$

Teorem 2.4.2. (Bigeometrik Zincir Kuralı)

$f = f(x, y)$ şeklinde tanımlı, bigeometrik sürekli ve bigeometrik türevlere sahip olan bir bigeometrik fonksiyon olsun. Şayet her $t \in (u, v)$ için $f(x(t), y(t))$ tanımlı olacak biçimde $(u, v) \subset \mathbb{R}_{\exp}$ aralığında $x = x(t)$ ve $y = y(t)$ fonksiyonları klasik olarak türevlenebilirse bu durumda aşağıdaki kural geçerlidir;

$$\frac{d^\pi f(x(t), y(t))}{dt^\pi} = f^\pi(x(t), y(t)) = [f_x^\pi(x(t), y(t))]^{x'(t)} \cdot [f_y^\pi(x(t), y(t))]^{y'(t)} \quad (94)$$

Burada $f_x^\pi(x(t), y(t))$ ve $f_y^\pi(x(t), y(t))$ türevlerine $f(x(t), y(t))$ fonksiyonunun sırasıyla x ve y değişkenlerine göre bigeometrik kısmi türevi denir (Eminağa, 2015).

İspat. Bigeometrik türevin tanımından,

$$f^\pi(x(t), y(t)) = \exp \left\{ t \cdot \frac{f'_x(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + f'_y(x(t), y(t)) \cdot y'(t)}{f(x(t), y(t))} \right\}$$

$$\begin{aligned}
f^\pi(x(t), y(t)) &= \exp \left\{ t \cdot \frac{f'_x(x(t), y(t)) \cdot x'(t)}{f(x(t), y(t))} + t \cdot \frac{f'_y(x(t), y(t)) \cdot y'(t)}{f(x(t), y(t))} \right\} \\
f^\pi(x(t), y(t)) &= \exp \left\{ t \cdot \frac{f'_x(x(t), y(t)) \cdot x'(t)}{f(x(t), y(t))} \right\} \cdot \exp \left\{ t \cdot \frac{f'_y(x(t), y(t)) \cdot y'(t)}{f(x(t), y(t))} \right\} \\
f^\pi(x(t), y(t)) &= [f_x^\pi(x(t), y(t))]^{x'(t)} \cdot [f_y^\pi(x(t), y(t))]^{y'(t)}
\end{aligned}$$

olduğu görülür. ■

Tanım 2.4.10. (Bigeometrik Ters türev)

$f(t)$ bigeometrik fonksiyonu tanımlı olduğunda $F^\pi(t) = f(t)$ bağıntısını sağlayan bir F bigeometrik fonksiyonu varsa bu F fonksiyonuna f nin bir bigeometrik ters türevi denir.

Teorem 2.4.3. $I = (a, b) \subset \mathbb{R}_{\exp}$ açık aralığında $F^\pi(t) = f(t)$ ise, I üzerinde f nin herbir G bigeometrik terstürevi, C bir üstel keyfi sabit olmak üzere

$$G(t) = C \cdot F(t) \tag{95}$$

biçiminde yazılır. Başla bir ifadeyle, iki bigeometrik terstürev arasındaki oran sabittir.

İspat: $f(t)$ bir bigeometrik fonksiyon ve $G(t)$ ile $F(t)$ ise $f(t)$ nin iki ters türevi olsun. Bu durumda

$$G^\pi(t) = f(t) \text{ ve } F^\pi(t) = f(t)$$

olur. Bu iki eşitlik taraf tarafa bölünürse

$$\begin{aligned}
\frac{G^\pi(t)}{F^\pi(t)} &= 1 \\
\left(\frac{G(t)}{F(t)} \right)^\pi &= 1
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu ise bir $C > 0$ sabiti için

$$\frac{G(t)}{F(t)} = C$$

olması demektir. ■

Tanım 2.4.11. (Bigeometrik Belirsiz İntegral) $F(t)$, $f(t)$ nin bir bigeometrik ters türevi olsun. Böylece $f(t)$ 'nin en genel ters türevine $f(t)$ 'nin bigeometrik belirsiz integrali denir ve aşağıdaki gibi gösterilir;

$$\pi \int f(t) dt^\pi = C \cdot F(t). \quad (96)$$

Burada C ye bigeometrik integral sabiti denir. Bu integrale π –integrali de denilebilir (Grossman ve Katz, 1972; Grossman, 1983; Boruah ve Hazarika, 2018 b).

Önerme 2.4.4. $f(t)$ 'nin bigeometrik belirsiz integrali için aşağıdaki eşitlik geçerlidir;

$$\pi \int f(t) dt^\pi = C \cdot e^{\int \frac{(\ln \circ f)(t)}{t} dt}. \quad (97)$$

İspat: $F(t)$, $f(t)$ nin bigeometrik ters türevi olsun. Bu taktirde,

$$\begin{aligned} F^\pi(t) &= f(t) \\ \exp \left\{ t \cdot \frac{d(\ln \circ F)}{dt}(t) \right\} &= f(t) \end{aligned}$$

yazılır. Burada her iki tarafın doğal logaritması alınıp düzenlenirse,

$$\begin{aligned} t \cdot \frac{d(\ln \circ F)}{dt}(t) &= (\ln \circ f)(t) \\ \frac{d(\ln \circ F)}{dt}(t) &= \frac{(\ln \circ f)(t)}{t} \end{aligned}$$

olur. Son eşitliğin her iki tarafının klasik integrali alınırsa

$$\begin{aligned} \int \frac{d(\ln \circ F)}{dt}(t) dt &= \int \frac{(\ln \circ f)(t)}{t} dt \\ (\ln \circ F)(t) + c &= \int \frac{(\ln \circ f)(t)}{t} dt \\ e^{(\ln \circ F)(t) + c} &= e^{\int \frac{(\ln \circ f)(t)}{t} dt} \\ e^{(\ln \circ F)(t)} \cdot e^c &= e^{\int \frac{(\ln \circ f)(t)}{t} dt} \end{aligned}$$

$$C \cdot F(t) = e^{\int \frac{(\ln \circ f)(t)}{t} dt}$$

elde edilir. Burada c integral sabiti ve $C = e^c$ eşit olan bir üstel sabittir. Diğer yandan

$$\pi \int f(t) dt^\pi = C \cdot F(t)$$

olduğundan,

$$\pi \int f(t) dt^\pi = C \cdot e^{\int \frac{(\ln \circ f)(t)}{t} dt}$$

eşitliği elde edilir.

Bazı fonksiyonların bigeometrik belirsiz integralleri aşağıda verilmiştir (Boruah ve Hazarika, 2018 b);

Tablo 2. Bazı fonksiyonların bigeometrik belirsiz integralleri

$\pi \int 1 dt^\pi = C$	$\pi \int e^{t \cdot \cot t} dt^\pi = C \cdot \sin t$
$\pi \int t^n dt^\pi = C \cdot e^{\frac{n \cdot \ln^2 t}{2}}$	$\pi \int e^{-t \cdot \tan t} dt^\pi = C \cdot \cos t$
$\pi \int e^n dt^\pi = C \cdot t^n$	$\pi \int e^{t \cdot \sec t \cdot \csc t} dt^\pi = C \cdot \tan t$
$\pi \int e^t dt^\pi = C \cdot e^t$	$\pi \int e^{-t \cdot \sec t \cdot \csc t} dt^\pi = C \cdot \cot t$
$\pi \int e^{t \cdot \tan t} dt^\pi = C \cdot \sec t$	$\pi \int e^{-t \cdot \cot t} dt^\pi = C \cdot \csc t$

Tanım 2.4.12. (Bigeometrik Belirli İntegral)

$[a, b] \subset \mathbb{R}_{\exp}$ aralığında bigeometrik sürekli olan bir f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında bigeometrik belirli integrali aşağıdaki biçimde tanımlanır;

$$\pi \int_a^b f(t) dt^\pi = \exp \left(\int_{t=a}^b \frac{(\ln \circ f)(t)}{t} dt \right) = e^{\int_{t=a}^b \frac{(\ln \circ f)(t)}{t} dt}. \quad (98)$$

Önerme 2.4.5. f bigeometrik fonksiyonunun bigeometrik belirli integrali için aşağıdaki eşitlik geçerlidir (Grossman ve Katz, 1972; Grossman, 1983; Boruah ve Hazarika, 2018b);

$$\pi \int_a^b f(t) dt^\pi = \exp \left(\int_{\tau=\ln(a)}^{\tau=\ln(b)} (\ln \circ f)(e^\tau) d\tau \right). \quad (99)$$

İspat.

$$\begin{aligned} \pi \int_a^b f(t) dt^\pi &= \exp \left(\int_{t=a}^b \frac{(\ln \circ f)(t)}{t} dt \right) \\ \pi \int_a^b f(t) dt^\pi &= \exp \left(\int_{t=a}^b (\ln \circ f)(t) d(\ln t) \right) \end{aligned}$$

olduğu tanımdan biliniyor. Burada $\tau = \ln t$, ($t = e^\tau$) değişken değişimi yapılırsa,

$$\begin{aligned} t = b & \text{ iken } \tau = \ln(b), \\ t = a & \text{ iken } \tau = \ln(a) \end{aligned}$$

olur. Böylece yukarıdaki tanım aşağıdaki gibi yazılır.

$$\pi \int_a^b f(t) dt^\pi = \exp \left(\int_{\tau=\ln(a)}^{\ln(b)} (\ln \circ f)(e^\tau) d\tau \right)$$

■

Teorem 2.4.4. $f(t)$, $h(t)$ fonksiyonları $[a, b] \subset \mathbb{R}_{\exp}$ aralığında bigeometrik integrallenebilir ve (a, b) aralığında ise pozitif ve bigeometrik sürekli olsun. k bir sabit olmak üzere aşağıdaki bigeometrik integral kuralları geçerlidir (Grossman ve Katz, 1972; Grossman, 1983; Boruah ve Hazarika, 2018 b);

- (i) $\pi \int_a^b f(t)^k dt^\pi = \left(\pi \int_a^b f(t) dt^\pi \right)^k,$
- (ii) $\pi \int_a^b [f(t) \cdot h(t)] dt^\pi = \left(\pi \int_a^b f(t) dt^\pi \right) \cdot \left(\pi \int_a^b h(t) dt^\pi \right),$
- (iii) $\pi \int_a^b \left[\frac{f(t)}{h(t)} \right] dt^\pi = \frac{\pi \int_a^b f(t) dt^\pi}{\pi \int_a^b h(t) dt^\pi},$
- (iv) $\pi \int_a^b f(t) dt^\pi = \left(\pi \int_a^c f(t) dt^\pi \right) \cdot \left(\pi \int_c^b f(t) dt^\pi \right).$ Burada $a < c < b$ dir.

İspat.

(i) $\pi \int_a^b f(t)^k dt^\pi = e^{\int_a^b \frac{(\ln \circ f^k)(t)}{t} dt} = e^{\int_a^b \frac{b \ln[f(t)]^k}{t} dt}$

$$\pi \int_a^b f(t)^k dt^\pi = e^{\int_a^b \frac{b k \cdot \ln[f(t)]}{t} dt} = \left(e^{\int_a^b \frac{b \ln[f(t)]}{t} dt} \right)^k$$

$$\pi \int_a^b f(t)^k dt^\pi = \left(e^{\int_a^b \frac{b (\ln \circ f)(t)}{t} dt} \right)^k$$

$$\pi \int_a^b f(t)^k dt^\pi = \left(\pi \int_a^b f(t) dt^\pi \right)^k$$

olduğu görülür.

(ii) $\int_a^b [f(t) \cdot h(t)] dt^\pi = e^{\int_a^b \frac{b \ln \circ [f(t) \cdot h(t)]}{t} dt} = e^{\int_a^b \frac{b \ln f(t) + \ln h(t)}{t} dt}$

$$\int_a^b [f(t) \cdot h(t)] dt^\pi = \left(e^{\int_a^b \frac{b \ln f(t)}{t} dt} \right) \cdot \left(e^{\int_a^b \frac{b \ln h(t)}{t} dt} \right)$$

$$\int_a^b [f(t) \cdot h(t)] dt^\pi = \left(\pi \int_a^b f(t) dt^\pi \right) \cdot \left(\pi \int_a^b h(t) dt^\pi \right)$$

olduğu görülür.

(iii) $\pi \int_a^b \left[\frac{f(t)}{h(t)} \right] dt^\pi = e^{\int_a^b \frac{b \ln \circ [f(t)/h(t)]}{t} dt} = e^{\int_a^b \left[\frac{\ln f(t) - \ln h(t)}{t} \right] dt}$

$$\pi \int_a^b \left[\frac{f(t)}{h(t)} \right] dt^\pi = e^{\int_a^b \frac{b \ln f(t)}{t} dt + \int_a^b \frac{b - \ln h(t)}{t} dt}$$

$$\begin{aligned}\pi \int_a^b \left[\frac{f(t)}{h(t)} \right] dt^\pi &= \left(e^{\int_a^b \frac{\ln f(t)}{t} dt} \right) \cdot \left(e^{\int_a^b \frac{\ln h(t)}{t} dt} \right)^{-1} \\ \pi \int_a^b \left[\frac{f(t)}{h(t)} \right] dt^\pi &= \frac{e^{\int_a^b \frac{\ln f(t)}{t} dt}}{e^{\int_a^b \frac{\ln h(t)}{t} dt}} \\ \pi \int_a^b \left[\frac{f(t)}{h(t)} \right] dt^\pi &= \frac{\left(\pi \int_a^b f(t) dt^\pi \right)}{\left(\pi \int_a^b h(t) dt^\pi \right)}\end{aligned}$$

olduğu görülür.

$$\begin{aligned}\text{(iv)} \quad \pi \int_a^b f(t) dt^\pi &= e^{\int_a^b \frac{b(\ln \circ f)(t)}{t} dt} \\ \pi \int_a^b f(t) dt^\pi &= e^{\int_a^c \frac{c(\ln \circ f)(t)}{t} dt + \int_c^b \frac{b(\ln \circ f)(t)}{t} dt} \\ \pi \int_a^b f(t) dt^\pi &= \left(e^{\int_a^c \frac{c(\ln \circ f)(t)}{t} dt} \right) \cdot \left(e^{\int_c^b \frac{b(\ln \circ f)(t)}{t} dt} \right) \\ \pi \int_a^b f(t) dt^\pi &= \left(\pi \int_a^c f(t) dt^\pi \right) \cdot \left(\pi \int_c^b f(t) dt^\pi \right)\end{aligned}$$

olduğu görülür. ■

Teorem 2.4.5. (Bigeometrik Analizin Birinci Temel Teoremi)

f pozitif tanımlı ve $[a, b] \subset \mathbb{R}_{\exp}$ aralığında bigeometrik sürekli bir fonksiyon olsun.

Ayrıca $[a, b]$ aralığındaki her t için

$$h(t) = \pi \int_a^t f(s) ds^\pi \tag{100}$$

biçiminde tanımlansın. Bu taktirde $[a, b]$ aralığı için

$$h^\pi(t) = f(t) \tag{101}$$

olur (Grossman ve Katz, 1972; Grossman, 1983)

Teorem 2.4.6. (Bigeometrik Analizin İkinci Temel Teoremi)

$f^\pi, [a, b] \subset \mathbb{R}_{\exp}$ aralığında bigeometrik sürekli bir fonksiyon olsun. Bu taktirde $f(a) \neq 1$ olmak üzere,

$$\pi \int_a^b f^\pi(t) dt^\pi = \frac{f(b)}{f(a)} \quad (102)$$

olur (Grossman ve Katz, 1972; Grossman, 1983).

Tanım 2.4.13. (Bigeometrik Diferansiyel Denklemler)

Bir bağımlı değişken, bir veya daha fazla bağımsız değişken ve bağımlı değişkenin bağımsız değişkenlere göre bigeometrik türevlerini ihtiva eden bağıntıya bigeometrik diferansiyel denklem denir.

Örneğin, y 'nin bigeometrik türevini ihtiva eden

$$\frac{d^\pi}{dt^\pi} y(t) = y^\pi(t) = f(t, y(t)) \quad (103)$$

diferansiyel denklemi, bir bigeometrik diferansiyel denklemdir (Eminağa, 2015).

Tanım 2.4.14. Bir bigeometrik diferansiyel denklemde en yüksek mertebeden bigeometrik türev içeren fonksiyonun mertebesi bigeometrik diferansiyel denklemin mertebesi; en yüksek mertebeli bigeometrik türevin kuvvetine de bigeometrik diferansiyel denklemin derecesi denir.

Örneğin, $y^{\pi\pi}(t) = 1$ denklemi ikinci mertebeden bir bigeometrik diferansiyel denklemdir.

Tanım 2.4.15. y, t' nin bilinmeyen bir bigeometrik fonksiyonu ve $F, t, y, y^\pi, y^{\pi\pi}, \dots, y^{\pi(n-1)}, y^{\pi(n)}$ gibi $(n + 2)$ değişkenli bir üstel reel değerli bigeometrik fonksiyon olmak üzere n . mertebeden

$$F(t, y, y^\pi, y^{\pi\pi}, \dots, y^{\pi(n-1)}, y^{\pi(n)}) = 1, \quad (104)$$

bigeometrik diferansiyel denklemini ele alalım (Boruah vd., 2018).

➤ f bir $I \subset \mathbb{R}_{\exp}$ aralığındaki tüm t değerleri için tanımlanmış n kez bigeometrik türevlenebilir bir bigeometrik fonksiyon olsun. Eğer $F(t, f(t), f^\pi(t), f^{\pi\pi}(t), \dots, f^{\pi(n-1)}(t), f^{\pi(n)}(t))$ tanımlanmış ve tüm $t \in I$ değerleri

için $F\left(t, f(t), f^\pi(t), f^{\pi\pi}(t), \dots, f^{\pi(n-1)}(t), f^{\pi(n)}(t)\right) = 1$ ise yani $y = f(t)$ ve bigeometrik türevleri yukarıdaki bigeometrik diferansiyel denkleminini sağlıyor ise $y = f(t)$ ' ye denklemin I aralığındaki bir açık çözümü denir.

➤ $g(t, y) = 1$ kapalı fonksiyonu, bir $I \subset \mathbb{R}_{\exp}$ aralığında yukarıdaki bigeometrik denklemini sağlarsa buna denklemin I aralığındaki bir kapalı çözümü denir.

Tanım 2.4.16. Bigeometrik lineer diferansiyel denklem aşağıdaki gibi tanımlanır

$$(y^{\pi(n)})^{\ln[a_n(t)]} \cdot (y^{\pi(n-1)})^{\ln[a_{n-1}(t)]} \cdot \dots \cdot (y^\pi)^{\ln[a_1(t)]} \cdot y^{\ln[a_0(t)]} = f(t). \quad (105)$$

Burada $f(t) \in \mathbb{R}_{\exp}$. Şayet $a_n(t)$ üsleri sabit ise yukarıdaki denkleme sabit üslü bigeometrik lineer diferansiyel denklem denir. Aksi takdirde, denkleme değişken üslü bigeometrik lineer diferansiyel denklem denir. Diğer yandan, yukarıdaki denklemde $f(t) = 1$ ise denkleme bigeometrik homojen lineer diferansiyel denklem aksi halde, bigeometrik homojen olmayan lineer diferansiyel denklem denir.

Literatürde BG lineer diferansiyel denklemin tanımı üstel aritmetik yardımıyla yapılmıştır (Güngör, 2020).

3. BİGEOMETRİK ANALİZDE LAPLACE İNTEGRAL DÖNÜŞÜMÜ

Bu başlık altında klasik analizdeki Laplace integral dönüşümü yardımıyla bigeometrik analizde Laplace integral dönüşümü tanımlanmıştır. Bu yeni dönüşüme bigeometrik Laplace integral dönüşümü (BGLİD) denir. Ayrıca bu yeni dönüşümün bazı temel özellikleri verilmiştir. Öncelikli olarak klasik analiz ile bigeometrik analiz arasındaki geçiş için bazı tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 3.1. $f(\tau)$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı klasik bir fonksiyon olsun. Bu durumda $t = e^\tau$ için

$$\tilde{f}(t) = e^{f(\ln t)} = e^{f(\tau)} \quad (106)$$

kuralı ile tanımlanan $\tilde{f}: \mathbb{R}_{\exp} \rightarrow \mathbb{R}_{\exp}$, $\tilde{f}(t)$ bigeometrik fonksiyonuna $f(\tau)$ klasik fonksiyonunun bigeometrik analizdeki karşılığı denir. Ayrıca $f(\tau)$ klasik fonksiyonuna da $\tilde{f}(t)$ bigeometrik fonksiyonunun klasik analizdeki karşılığı denir. Bu tanıma göre,

$$(\ln \circ \tilde{f})(t) = f(\ln t) = f(\tau) \quad (107)$$

olur.

Önerme 3.1. $\times$, $\mathbb{R}$ de tanımlı keyfi bir ikili işlem (toplama, çıkarma, çarpma, bölme, v.b.) ve bunun karşılığı $\mathbb{R}_{\exp}$ de tanımlı $\boxtimes$ ikili işlemi

$$a \boxtimes b = e^{\ln a \times \ln b} \quad (108)$$

ile tanımlı olsun. Bu durumda $f(\tau)$, $g(\tau)$ klasik fonksiyonları ve onların $t = e^\tau$ için verilen $\tilde{f}(t)$ ve $\tilde{g}(t)$ karşılıkları arasında

$$(\widetilde{f \times g})(t) = \tilde{f}(t) \boxtimes \tilde{g}(t) \quad (109)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat.

$$(\widetilde{f \times g})(t) = e^{(f \times g)(\tau)} = e^{f(\tau) \times g(\tau)}$$

$$\begin{aligned}(\widetilde{f \times g})(t) &= e^{\ln e^{f(\tau)} \times \ln e^{g(\tau)}} = e^{f(\tau)} \boxtimes e^{g(\tau)} \\(\widetilde{f \times g})(t) &= \tilde{f}(t) \boxtimes \tilde{g}(t)\end{aligned}$$

■

Teorem 3.1. Her bir $f(t)$ bigeometrik fonksiyonu için $\tilde{g}(t) = f(t)$ olacak şekilde bir ve yalnız bir $g(\tau)$, $t = e^\tau$ klasik fonksiyonu vardır.

İspat. $f: \mathbb{R}_{\exp} \rightarrow \mathbb{R}_{\exp}$ tanımlı $f(t)$ keyfi bir bigeometrik fonksiyon olsun. $t = e^\tau$ için

$$g(\tau) = (\ln \circ f \circ \exp)(\tau)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. $g(\tau)$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ klasik bir fonksiyondur. $f(t)$ nin $g(\tau)$ nun bigeometrik karşılığı olduğu aşağıdaki eşitlikte görülür.

$$\tilde{g}(t) = e^{g(\ln t)} = e^{(\ln \circ f \circ \exp)(\ln t)} = f(t).$$

Şimdi $g(\tau)$ nun tekliğini gösterelim. İki farklı klasik fonksiyon $g(\tau)$ ve $h(\tau)$ için

$$\tilde{g}(t) = f(t) \text{ ve } \tilde{h}(t) = f(t)$$

olduğunu kabul edelim. Bu taktirde,

$$\tilde{g}(t) = e^{g(\tau)} \text{ ve } \tilde{h}(t) = e^{h(\tau)}$$

olup bunların her ikisinde $f(t)$ ye eşit olduğundan,

$$\tilde{g}(t) = \tilde{h}(t) \Rightarrow e^{g(\tau)} = e^{h(\tau)} \Rightarrow g(\tau) = h(\tau)$$

sonucu görülür.

■

Tanım 3.2. $f: \mathbb{R}_{\exp}^+ \rightarrow \mathbb{R}_{\exp}$ bigeometrik fonksiyonu verilsin. Eğer $t > t_0$ için

$$|f(t)|_* \leq K(\alpha^{\ln t}) \tag{110}$$

olacak şekilde $t_0 \in \mathbb{R}_{\exp}^+$, $K \in \mathbb{R}_{\exp}$, $\alpha \in \mathbb{R}_{\exp}$ sabitleri varsa f fonksiyonuna α -bigeometrik üstel mertebededir denir.

Tanım 3.3. (Bigeometrik Laplace İntegral Dönüşümü)

$f: \mathbb{R}_{\exp}^+ \rightarrow \mathbb{R}_{\exp}$ tanımlı, α -bigeometrik üstel mertebeden ve bigeometrik parçalı sürekli bir fonksiyon olmak üzere $f(t)$ ' nin bigeometrik Laplace integral dönüşümü

$$\mathcal{L}_{BG}\{f(t)\} = F_{BG}(s) = \pi \int_1^\infty f(t) \odot e^{(\ominus s) \odot t} dt^\pi \quad (111)$$

biçiminde tanımlanır. Burada $F_{BG}: \mathbb{R}_{\exp} \rightarrow \mathbb{R}_{\exp}$ bir bigeometrik fonksiyondur.

Önerme 3.2. $f: \mathbb{R}_{\exp}^+ \rightarrow \mathbb{R}_{\exp}$ tanımlı bir bigeometrik fonksiyon ve $t = e^\tau$ olmak üzere $f(t)$ ' nin bigeometrik Laplace integral dönüşümü için aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$\mathcal{L}_{BG}\{f(t)\} = \exp\left\{\int_{\tau=0}^\infty (\ln \circ f)(e^\tau) \cdot s^{-\tau} \cdot d\tau\right\} \quad (112)$$

İspat.

Öncelikle

$$(\ominus s) \odot t = e^{\ln(\ominus s) \cdot \ln(t)} = e^{\ln\left(\frac{1}{s}\right) \cdot \ln(t)} = e^{-\ln(s) \cdot \ln(t)} = \left[e^{\ln(s)}\right]^{-\ln(t)} = s^{-\ln(t)} \quad (113)$$

olduğu ve buradan

$$\begin{aligned} f(t) \odot e^{(\ominus s) \odot t} &= f(t) \odot \exp((\ominus s) \odot t) \\ &= e^{(\ln \circ f)(t) \cdot (\ln \circ \exp)((\ominus s) \odot t)} \\ &= e^{(\ln \circ f)(t) \cdot ((\ominus s) \odot t)} \\ &= \left[e^{(\ln \circ f)(t)}\right]^{((\ominus s) \odot t)} \\ &= [f(t)]^{((\ominus s) \odot t)} \\ f(t) \odot e^{(\ominus s) \odot t} &= [f(t)]^{(s^{-\ln(t)})} \end{aligned}$$

yazılabileceği not edilsin. Şimdi bu eşitlik bigeometrik Laplace integral dönüşümünde kullanılırsa aşağıdaki gibi yazılır.

$$\mathcal{L}_{BG}\{f(t)\} = \pi \int_1^\infty f(t) \odot e^{(\ominus s) \odot t} dt^\pi$$

$$\mathcal{L}_{BG}\{f(t)\} = \pi \int_1^\infty f(t)^{(s^{-\ln(t)})} dt^\pi$$

Son satırdaki bigeometrik integralin klasik integralle karşılığını yazmak için

$$\pi \int_a^b h(t) dt^\pi = \exp \left\{ \int_{\tau=\ln(a)}^{\ln(b)} (\ln \circ h)(e^\tau) d\tau \right\} = \exp \left\{ \int_{\tau=\ln(a)}^{\ln(b)} \ln[h(e^\tau)] d\tau \right\}$$

formülü kullanılır. Burada $\tau = \ln t$ dir.

$$\mathcal{L}_{BG}\{f(t)\} = \exp \left\{ \int_{\tau=\ln(1)}^{\ln(\infty)} \ln[f(e^\tau)^{(s^{-\ln(e^\tau)})}] d\tau \right\}$$

$$\mathcal{L}_{BG}\{f(t)\} = \exp \left\{ \int_{\tau=0}^{\infty} \ln[f(e^\tau)^{(s^{-\tau})}] d\tau \right\}$$

$$\mathcal{L}_{BG}\{f(t)\} = \exp \left\{ \int_{\tau=0}^{\infty} (\ln \circ f)(e^\tau) \cdot s^{-\tau} \cdot d\tau \right\}$$

olduğu görülür. ■

Önerme 3.3. $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı $f(\tau)$ fonksiyonunun klasik Laplace dönüşümü $F(\sigma)$ olsun. Yani

$$\mathcal{L}\{f(\tau)\} = F(\sigma) \tag{114}$$

olsun. Bu durumda $t = e^\tau$ ve $s = e^\sigma$ olmak üzere

$$\mathcal{L}_{BG}\{(\exp \circ f \circ \ln)(t)\} = (\exp \circ F \circ \ln)(s) \tag{115}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat.

$$\mathcal{L}_{BG}\{(\exp \circ f \circ \ln)(t)\} = \exp \left\{ \int_{\tau=0}^{\infty} (\ln \circ \exp \circ f \circ \ln)(e^{\tau}) \cdot s^{-\tau} \cdot d\tau \right\}$$

$$\mathcal{L}_{BG}\{(\exp \circ f \circ \ln)(t)\} = \exp \left\{ \int_{\tau=0}^{\infty} f(\tau) \cdot s^{-\tau} \cdot d\tau \right\}$$

$$\mathcal{L}_{BG}\{(\exp \circ f \circ \ln)(t)\} = \exp \left\{ \int_{\tau=0}^{\infty} f(\tau) \cdot e^{-\tau \ln s} \cdot d\tau \right\}$$

$$\mathcal{L}_{BG}\{(\exp \circ f \circ \ln)(t)\} = \exp\{F(\ln s)\}$$

$$\mathcal{L}_{BG}\{(\exp \circ f \circ \ln)(t)\} = (\exp \circ F \circ \ln)(s).$$

■

Yukarıdaki (115) eşitliği

$$\mathcal{L}_{BG}\{e^{f(\ln t)}\} = e^{F(\ln s)} \quad (116)$$

biçiminde de ifade edilebilir. Buna göre bazı fonksiyonların bigeometrik Laplace integral dönüşümleri aşağıdaki tabloda verilmiştir;

Tablo 3. Bazı fonksiyonların bigeometrik Laplace integral dönüşümleri

$f(\tau)$	$\mathcal{L}\{f(\tau)\} = F(\sigma)$	$e^{f(\ln t)}$	$\mathcal{L}_{BG}\{e^{f(\ln t)}\} = e^{F(\ln s)}$
0	$\mathcal{L}\{0\} = 0$	1	$\mathcal{L}_{BG}\{1\} = 1$
1	$\mathcal{L}\{1\} = 1/\sigma$	e	$\mathcal{L}_{BG}\{e\} = e^{\frac{1}{\ln s}}$
$\ln a, \quad (\alpha > 0)$	$\mathcal{L}\{\ln a\} = \frac{\ln a}{\sigma}$	a	$\mathcal{L}_{BG}\{a\} = a^{\frac{1}{\ln s}}$
$e^{a\tau}, \quad (\alpha \in \mathbb{R})$	$\mathcal{L}\{e^{a\tau}\} = \frac{1}{\sigma-a}, \quad (\sigma > a)$	$e^{(t^a)}$	$\mathcal{L}_{BG}\{e^{(t^a)}\} = e^{\frac{1}{\ln(s)-a}}$
$\tau^n, \quad (n \in \mathbb{N})$	$\mathcal{L}\{\tau^n\} = \frac{n!}{\sigma^{n+1}}$	$e^{[(\ln t)^n]}$	$\mathcal{L}_{BG}\{e^{[(\ln t)^n]}\} = e^{\frac{n!}{(\ln s)^{n+1}}}$
$\cos(a\tau), \quad (\alpha \in \mathbb{R})$	$\mathcal{L}\{\cos(a\tau)\} = \frac{\sigma}{\sigma^2+a^2}$	$e^{\cos(\ln(at))}$	$\mathcal{L}_{BG}\{e^{\cos(\ln(at))}\} = e^{\frac{\ln s}{(\ln s)^2+a^2}}$
$\sin(a\tau), \quad (\alpha \in \mathbb{R})$	$\mathcal{L}\{\sin(a\tau)\} = \frac{1}{\sigma^2+a^2}$	$e^{\sin(\ln(at))}$	$\mathcal{L}_{BG}\{e^{\sin(\ln(at))}\} = e^{\frac{1}{(\ln s)^2+a^2}}$

Teorem 3.2. $f(\tau)$, klasik bir fonksiyon ve $t = e^\tau$ olsun. $f(\tau)$ ve onun bigeometrik karşılığı $\tilde{f}(t) = e^{f(\tau)}$ ile arasında aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$\mathcal{L}_{BG}\{\tilde{f}(t)\} = e^{\mathcal{L}\{f(\tau)\}}. \quad (117)$$

İspat. Bigeometrik Laplace integral dönüşümün tanımından,

$$\mathcal{L}_{BG}\{\tilde{f}(t)\} = e^{\int_{\tau=0}^{\infty} (\ln \circ \tilde{f})(e^\tau) \cdot s^{-\tau} d\tau}$$

yazılır. $s = e^\sigma$ alınır ve

$$(\ln \circ \tilde{f})(e^\tau) = \ln[\tilde{f}(e^\tau)] = \ln[\tilde{f}(t)] = \ln[e^{f(\tau)}] = f(\tau)$$

olduğu not edilirse, buradan

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{BG}\{\tilde{f}(t)\} &= e^{\int_{\tau=0}^{\infty} f(\tau) \cdot e^{-\sigma \cdot \tau} d\tau} \\ \mathcal{L}_{BG}\{\tilde{f}(t)\} &= e^{\mathcal{L}\{f(\tau)\}} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. ■

Sonuç 3.1. $f(\tau)$ fonksiyonunun bigeometrik karşılığı $t = e^\tau$ için $\tilde{f}(t)$ fonksiyonu olsun. Ayrıca

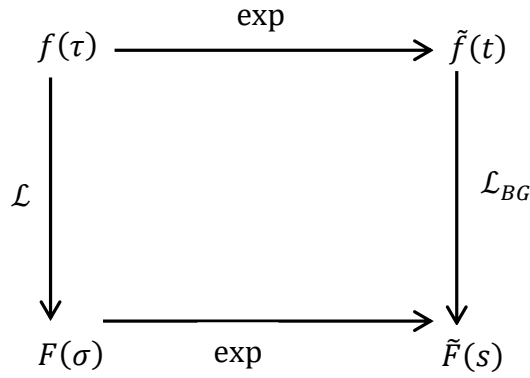
$$\mathcal{L}\{f(\tau)\} = F(\sigma) \text{ ve } \mathcal{L}_{BG}\{\tilde{f}(t)\} = G(s) \quad (118)$$

olarak verilsin. Bu durumda $s = e^\sigma$ için $F(\sigma)$ nun bigeometrik karşılığı $G(s)$ olur. Yani

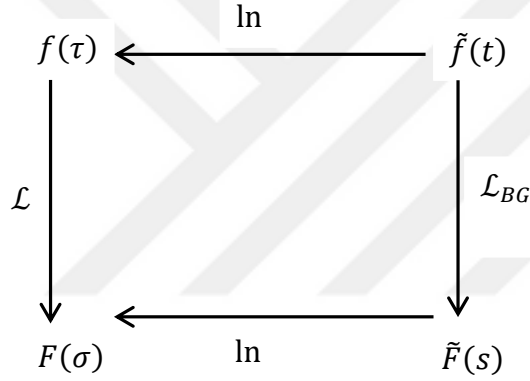
$$\mathcal{L}\{\widetilde{f(\tau)}\} = \mathcal{L}_{BG}\{\tilde{f}(t)\} \quad (119)$$

olur. ■

Ayrıca, klasik Laplace dönüşümü ile bigeometrik Laplace dönüşümü arasındaki ilişki aşağıdaki şekil yardımıyla da ifade edilebilir:



Şekil 1. Bir klasik fonksiyonun bigeometrik karşılığının BG Laplace integral dönüşümü



Şekil 2. Bir bigeometrik fonksiyonun klasik karşılığının klasik Laplace integral dönüşümü

Teorem 3.3. (Bigeometrik Laplace İntegral Dönüşümünün Varlığı)

f bigeometrik fonksiyonu $(1, \infty)$ aralığında tanımlı, $t > t_0$ için α –bigeometrik üstel mertebeden ve bigeometrik parçalı sürekli bir fonksiyon olsun. Bu taktirde $s > \alpha$ için $\mathcal{L}_{BG}\{f(t)\}$ mevcuttur.

İspat. α –bigeometrik üstel mertebeden olduğundan

$$|f(t)|_* \leq K(\alpha^{\ln t})$$

olacak şekilde $K \in \mathbb{R}_{\exp}^+$, ($K = e^k$, $k \in \mathbb{R}^+$) ve $\alpha \in \mathbb{R}_{\exp}$ vardır. $t = e^\tau$, ($\tau \in \mathbb{R}$) değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$|f(t)|_* \leq K(\alpha^{\ln t}) = e^{k \cdot \alpha^{\ln t}}$$

eşitsizliği

$$|f(e^\tau)|_* \leq e^{k \cdot \alpha^\tau}$$

biçimini alır. Burada $\ln|f(e^\tau)|_* = |\ln f(e^\tau)|$ eşitliği gözönünde bulundurularak her iki tarafın doğal logaritması alınır

$$|\ln f(e^\tau)| \leq k \cdot \alpha^\tau$$

elde edilir. $t = e^\tau$ için bigeometrik Laplace dönüşümü tanımından $s \in \mathbb{R}_{\exp}$ olmak üzere

$$\mathcal{L}_{BG}\{f(t)\} = e^{\int_{\tau=0}^{\infty} \ln f(e^\tau) \cdot s^{-\tau} d\tau}$$

şeklinde yazılabilir. Buradaki integral

$$I = \int_{\tau=0}^{\infty} \ln f(e^\tau) \cdot s^{-\tau} d\tau$$

şeklinde tanımlanırsa,

$$\mathcal{L}_{BG}\{f(t)\} = e^I$$

biçiminde olur. Şimdi integral ile ilgili aşağıdaki eşitsizlik dikkate alınır,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\tau=0}^{\infty} \ln f(e^\tau) \cdot s^{-\tau} d\tau \right| &\leq \int_{\tau=0}^{\infty} |\ln f(e^\tau)| \cdot s^{-\tau} d\tau \\ &\leq \int_{\tau=0}^{\infty} k \cdot \alpha^\tau \cdot s^{-\tau} d\tau = k \int_{\tau=0}^{\infty} \left(\frac{s}{\alpha}\right)^{-\tau} d\tau < \infty \end{aligned}$$

$s > \alpha$ için I integralinin yakınsak olduğu görülür. Yani $s > \alpha$ için $\mathcal{L}_{BG}\{f(t)\}$ mevcuttur. ■

Teorem 3.4. (Lineerlik Özelliği)

Bigeometrik Laplace integral dönüşümü bigeometrik olarak lineer bir dönüşümdür. Yani, k_1, k_2 keyfi sabit ve $f_1(t)$ ve $f_2(t)$ de bigeometrik Laplace dönüşümleri olan iki fonksiyon olsun. Bu taktirde,

$$\mathcal{L}_{BG}\{[f_1(t)]^{k_1} \cdot [f_2(t)]^{k_2}\} = \{\mathcal{L}_{BG}[f_1(t)]\}^{k_1} \cdot \{\mathcal{L}_{BG}[f_2(t)]\}^{k_2} \quad (120)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. Bigeometrik Laplace integral dönüşümü tanımından,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{BG}\{[f_1(t)]^{k_1} \cdot [f_2(t)]^{k_2}\} &= \exp \left\{ \int_0^\infty \ln([f_1(e^\tau)]^{k_1} \cdot [f_2(e^\tau)]^{k_2}) \cdot s^{-\tau} d\tau \right\} \\ &= \exp \left\{ \int_0^\infty [k_1 \cdot \ln f_1(e^\tau) + k_2 \cdot \ln f_2(e^\tau)] \cdot s^{-\tau} d\tau \right\} \\ &= \exp \left\{ k_1 \cdot \int_0^\infty \ln f_1(e^\tau) \cdot s^{-\tau} d\tau + k_2 \right. \\ &\quad \cdot \left. \int_0^\infty \ln f_2(e^\tau) \cdot s^{-\tau} d\tau \right\} \\ &= \left\{ \exp \int_0^\infty \ln f_1(e^\tau) \cdot s^{-\tau} d\tau \right\}^{k_1} \\ &\quad \cdot \left\{ \exp \int_0^\infty \ln f_2(e^\tau) \cdot s^{-\tau} d\tau \right\}^{k_2} \\ \mathcal{L}_{BG}\{[f_1(t)]^{k_1} \cdot [f_2(t)]^{k_2}\} &= \{\mathcal{L}_{BG}[f_1(t)]\}^{k_1} \cdot \{\mathcal{L}_{BG}[f_2(t)]\}^{k_2} \end{aligned}$$

olduğu görülür. ■

Teorem 3.5. (Birinci Öteleme Özelliği)

$f(t)$ fonksiyonunun bigeometrik Laplace dönüşümü $\mathcal{L}_{BG}\{f(t)\} = F_{BG}(s)$ olsun. Bu durumda, $a \in \mathbb{R}_{exp}$ için,

$$\mathcal{L}_{BG}\{f(t)^{(a^{\ln t})}\} = F_{BG}\left(\frac{s}{a}\right) \quad (121)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. Bigeometrik Laplace integral dönüşümünün tanımı kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{BG}\{f(t)^{(a^{\ln t})}\} &= \exp\left\{\int_0^\infty \ln[f(e^\tau)^{(a^{\ln e^\tau})}] \cdot s^{-\tau} d\tau\right\} \\
&= \exp\left\{\int_0^\infty \ln[f(e^\tau)]^{(a^\tau)} \cdot s^{-\tau} d\tau\right\} \\
&= \exp\left\{\int_0^\infty \ln f(e^\tau) \cdot a^\tau \cdot s^{-\tau} d\tau\right\} \\
&= \exp\left\{\int_0^\infty \ln f(e^\tau) \cdot \left(\frac{s}{a}\right)^{-\tau} d\tau\right\} \\
\mathcal{L}_{BG}\{f(t)^{(a^{\ln t})}\} &= F_{BG}\left(\frac{s}{a}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 3.6. (İkinci Öteleme Özelliği)

$$\mathcal{L}_{BG}\{f(t)\} = F_{BG}(s) \text{ ve } g(t) = \begin{cases} 1, & 1 < t < a \\ f\left(\frac{t}{a}\right), & t > a \end{cases} \quad (122)$$

ise bigeometrik ikinci öteleme özelliği,

$$\mathcal{L}_{BG}\{g(t)\} = \{F_{BG}(s)\}^{(\ominus s) \odot a} = \{F_{BG}(s)\}^{s^{-\ln a}} \quad (123)$$

biçiminde yazılır.

İspat. Bigeometrik Laplace dönüşümü tanımından

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{BG}\{g(t)\} &= \exp\left\{\int_0^\infty \ln g(e^\tau) \cdot s^{-\tau} d\tau\right\} \\
&= \exp\left\{\int_{t=1}^\infty \ln g(t) \cdot s^{-\ln t} \cdot d(\ln t)\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \exp \left\{ \underbrace{\int_1^a \ln \underbrace{g(t)}_1 \cdot s^{-\ln t} \cdot d(\ln t)}_0 + \int_a^\infty \ln \underbrace{g(t)}_{f\left(\frac{t}{a}\right)} \cdot s^{-\ln t} \cdot d(\ln t) \right\} \\
\mathcal{L}_{BG}\{g(t)\} &= \exp \left\{ \int_a^\infty \ln f\left(\frac{t}{a}\right) \cdot s^{-\ln t} \cdot d(\ln t) \right\}
\end{aligned}$$

yazılır. Burada $u = \frac{t}{a}$, ($t = a \cdot u$) değişken değişimi yapılırsa ($a > 1$)

$$\mathcal{L}_{BG}\{g(t)\} = \exp \left\{ \int_{u=1}^\infty \ln f(u) \cdot s^{-\ln(a \cdot u)} \cdot d(\ln(a \cdot u)) \right\}$$

elde edilir. Buradan

$$d(\ln(a \cdot u)) = d(\ln a + \ln u) = d(\ln a) + d(\ln u) = 0 + d(\ln u) = d(\ln u)$$

olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{BG}\{g(t)\} &= \exp \left\{ \int_{u=1}^\infty \ln f(u) \cdot s^{-(\ln a + \ln u)} \cdot d(\ln u) \right\} \\
&= \exp \left\{ \left[\int_{u=1}^\infty \ln f(u) \cdot s^{-\ln u} \cdot d(\ln u) \right] \cdot s^{-\ln a} \right\} \\
&= \left\{ \exp \left[\int_{u=1}^\infty \ln f(u) \cdot s^{-\ln u} \cdot d(\ln u) \right] \right\}^{s^{-\ln a}} \\
\mathcal{L}_{BG}\{g(t)\} &= \{F_{BG}(s)\}^{s^{-\ln a}}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. ■

Teorem 3.7. (Ölçek Değişimi Özelliği)

$f(t)$ nin bigeometrik Laplace integral dönüşümü $\mathcal{L}_{BG}\{f(t)\} = F_{BG}(s)$ olsun. Bu durumda, $a \in \mathbb{R}_{\exp}^+$ için

$$\mathcal{L}_{BG}\{f(a \odot t)\} = \{F_{BG}(s^{1/\ln a})\}^{\frac{1}{\ln a}} \quad (124)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. Üstel aritmetik işlemlerin tanımından $a \odot t = e^{\ln a \cdot \ln t} = a^{\ln t}$ olduğu kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{BG}\{f(a^{\ln t})\} &= \exp \left\{ \int_{\tau=0}^{\infty} \ln f(a^{\ln e^{\tau}}) \cdot s^{-\tau} d\tau \right\} \\ \mathcal{L}_{BG}\{f(a^{\ln t})\} &= \exp \left\{ \int_{\tau=0}^{\infty} \ln f(a^{\tau}) \cdot s^{-\tau} d\tau \right\} \end{aligned}$$

yazılır. Burada $u = a^{\tau}$, $\left(\tau = \frac{\ln u}{\ln a}\right)$ değişken değişimi yapılırsa ($a > 1$ olduğundan)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{BG}\{f(a^{\ln t})\} &= \exp \left\{ \int_{u=1}^{\infty} \ln f(u) \cdot s^{-\left(\frac{\ln u}{\ln a}\right)} \cdot d\left(\frac{\ln u}{\ln a}\right) \right\} \\ &= \exp \left\{ \int_{u=1}^{\infty} \ln f(u) \cdot (s^{1/\ln a})^{-\ln u} \cdot \frac{d(\ln u)}{\ln a} \right\} \\ &= \exp \left\{ \left[\int_{u=1}^{\infty} \ln f(u) \cdot (s^{1/\ln a})^{-\ln u} \cdot d(\ln u) \right] \cdot \frac{1}{\ln a} \right\} \\ &= \left\{ \exp \left[\int_{u=1}^{\infty} \ln f(u) \cdot (s^{1/\ln a})^{-\ln u} \cdot d(\ln u) \right] \right\}^{\frac{1}{\ln a}} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_{BG}\{f(a^{\ln t})\} = \{F_{BG}(s^{1/\ln a})\}^{\frac{1}{\ln a}}$$

elde edilir. ■

Teorem 3.8. $f(t)$ fonksiyonunun bigeometrik Laplace integral dönüşümü $\mathcal{L}_{BG}\{f(t)\} = F_{BG}(s)$ olsun. Bu durumda

$$\mathcal{L}_{BG}\{f(t)^{\ln t}\} = [F_{BG}^{\pi}(s)]^{-1} \quad (125)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat.

$$\begin{aligned}
F_{BG}^{\pi}(s) &= \frac{d^{\pi}}{ds^{\pi}} \left[\exp \left(\int_{\tau=0}^{\infty} (\ln \circ f)(e^{\tau}) \cdot s^{-\tau} \cdot d\tau \right) \right] \\
&= \exp \left[s \cdot \left(\frac{d}{ds} \int_{\tau=0}^{\infty} (\ln \circ f)(e^{\tau}) \cdot s^{-\tau} \cdot d\tau \right) \right] \\
&= \exp \left[s \cdot \left(\int_{\tau=0}^{\infty} \ln[f(e^{\tau})] \cdot (-\tau) \cdot s^{-\tau-1} \cdot d\tau \right) \right] \\
&= \exp \left\{ (-1) \cdot \int_{\tau=0}^{\infty} \ln[f(e^{\tau})]^{\tau} \cdot s^{-\tau} \cdot d\tau \right\} \\
&= \left\{ \exp \left(\int_{\tau=0}^{\infty} \ln \left[(f(e^{\tau}))^{\ln(e^{\tau})} \right] \cdot s^{-\tau} \cdot d\tau \right) \right\}^{-1} \\
&= (\mathcal{L}_{BG}\{f(t)^{\ln t}\})^{-1} \\
\mathcal{L}_{BG}\{f(t)^{\ln t}\} &= [F_{BG}^{\pi}(s)]^{-1}
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 3.9. $f(t)$ fonksiyonunun bigeometrik Laplace integral dönüşümü $\mathcal{L}_{BG}\{f(t)\} = F_{BG}(s)$ olsun. Bu durumda

$$\mathcal{L}_{BG}\{f(t)^{(\ln t)^n}\} = [F_{BG}^{\pi(n)}(s)]^{(-1)^n} \quad (126)$$

eşitliği yazılır.

İspat. İspatı tümevarımla yapalım.

$k = 1$ için, $\mathcal{L}_{BG}\{f(t)^{\ln t}\} = [F_{BG}^{\pi}(s)]^{-1}$ eşitliğinin doğruluğu Teorem 3.8' den biliniyor.

Şimdi,

$k = n$ için, $\mathcal{L}_{BG}\{f(t)^{(\ln t)^n}\} = [F_{BG}^{\pi(n)}(s)]^{(-1)^n}$ eşitliğinin doğru olduğunu kabul edelim.

$k = n + 1$ için eşitliğin geçerli olduğunu gösterelim.

$$\mathcal{L}_{BG}\{f(t)^{(\ln t)^{n+1}}\} = \mathcal{L}_{BG}\{[f(t)^{(\ln t)^n}]^{\ln t}\}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \frac{d^\pi}{ds^\pi} [\mathcal{L}_{BG}(f(t)^{(\ln t)^n})] \right\}^{-1} \\
&= \left\{ \frac{d^\pi}{ds^\pi} [F_{BG}^{\pi(n)}(s)]^{(-1)^n} \right\}^{-1} \\
&= \left\{ [F_{BG}^{\pi(n+1)}(s)]^{(-1)^n} \right\}^{-1} \\
\mathcal{L}_{BG}\{f(t)^{(\ln t)^{n+1}}\} &= [F_{BG}^{\pi(n+1)}(s)]^{(-1)^{n+1}}
\end{aligned}$$

Teorem 3.9' a göre aşağıdaki eşitliği yazabiliriz;

$$\mathcal{L}_{BG}\{f(t)^{(\ln t)^n}\} = [F_{BG}^{\pi(n)}(s)]^{(-1)^n} = \begin{cases} 1/F_{BG}^{\pi(n)}(s), & n \text{ tek sayı ise,} \\ F_{BG}^{\pi(n)}(s), & n \text{ çift sayı ise.} \end{cases} \quad (127)$$

■

Tanım 3.4. (Bigeometrik Konvolüsyon Özelliği)

$f(t)$ ve $g(t)$ bigeometrik iki fonksiyon olsun. Bu durumda $f(t)$ ile $g(t)$ nin bigeometrik konvolüsyonu

$$f(t) *^\pi g(t) = \pi \int_{x=1}^t f(x) \odot g(t \ominus x) dx^\pi \quad (128)$$

şeklinde tanımlanır. Bu tanıma göre

$$f(t) *^\pi g(t) = \pi \int_{x=1}^t [f(x)]^{(\ln \circ g)\left(\frac{t}{x}\right)} \cdot dx^\pi \quad (129)$$

eşitliği geçerlidir.

Teorem 3.10. $f(\tau)$ ve $g(\tau)$ klasik iki fonksiyon olsun. $\tilde{f}(t)$ ve $\tilde{g}(t)$, $t = e^\tau$ için $f(\tau)$ ile $g(\tau)$ fonksiyonlarının bigeometrik (analizdeki) karşılıkları olsun. Bu durumda

$$\tilde{f}(t) *^\pi \tilde{g}(t) = e^{f(\tau)*g(\tau)} \quad (130)$$

eşitliği vardır.

İspat.

$$\tilde{f}(t) *^\pi \tilde{g}(t) = \pi \int_{x=1}^t [\tilde{f}(x)]^{(\ln \circ \tilde{g})\left(\frac{t}{x}\right)} \cdot dx^\pi$$

$$\tilde{f}(t) *^{\pi} \tilde{g}(t) = \exp \left(\int_{x=1}^t \ln[\tilde{f}(x)]^{(\ln \circ \tilde{g})\left(\frac{t}{x}\right)} \cdot d(\ln x) \right)$$

eşitliği biliniyor. Burada $\omega = \ln x$ değişken değiştirmesi ile,

$$\tilde{f}(t) *^{\pi} \tilde{g}(t) = \exp \left(\int_{\omega=0}^{\ln t} \ln[\tilde{f}(e^{\omega})]^{(\ln \circ \tilde{g})\left(\frac{t}{e^{\omega}}\right)} \cdot d\omega \right)$$

yazılır ve $\tau = \ln(t)$ değişken değişimi yapılırsa

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t) *^{\pi} \tilde{g}(t) &= \exp \left\{ \int_{\omega=0}^{\tau} (\ln \circ \tilde{f})(e^{\omega}) \cdot (\ln \circ \tilde{g})\left(\frac{e^{\tau}}{e^{\omega}}\right) \cdot d\omega \right\} \\ &= \exp \left\{ \int_{\omega=0}^{\tau} (\ln \circ \tilde{f})(e^{\omega}) \cdot (\ln \circ \tilde{g})(e^{\tau-\omega}) \cdot d\omega \right\} \\ &= \exp \left\{ \int_{\omega=0}^{\tau} f(\omega) \cdot g(\tau - \omega) \right\} \\ \tilde{f}(t) *^{\pi} \tilde{g}(t) &= e^{f(\tau) * g(\tau)} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. ■

Önerme 3.4. $f(\tau)$ ve $g(\tau)$ klasik iki fonksiyonunun $t = e^{\tau}$ için bigeometrik karşılıkları $\tilde{f}(t)$, $\tilde{g}(t)$ olsun. Bu durumda

$$\mathcal{L}_{BG}\{\tilde{f}(t) *^{\pi} \tilde{g}(t)\} = e^{\mathcal{L}\{f(\tau)\}} \odot e^{\mathcal{L}\{g(\tau)\}} \quad (131)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat.

$$f(\tau) * g(\tau) = (f * g)(\tau) = (f * g)(\ln t)$$

şeklinde olup

$$\tilde{f}(t) *^{\pi} \tilde{g}(t) = e^{f(\tau) * g(\tau)} \quad (132)$$

$$\tilde{f}(t) *^{\pi} \tilde{g}(t) = e^{(f*g)(\ln t)} \quad (133)$$

eşitliklerinin geçerli olduğu biliniyor. Buna göre her iki tarafa bigeometrik Laplace integral dönüşümü uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{BG}\{\tilde{f}(t) *^{\pi} \tilde{g}(t)\} &= \mathcal{L}_{BG}\{e^{(f*g)(\ln t)}\} \\ &= \mathcal{L}_{BG}\{\widetilde{(f*g)}(t)\} \\ &= e^{\mathcal{L}\{(f*g)(\tau)\}} \\ &= e^{\mathcal{L}\{f(\tau)\} \cdot \mathcal{L}\{g(\tau)\}} \\ &= e^{\ln[\exp(\mathcal{L}\{f(\tau)\})] \cdot \ln[\exp(\mathcal{L}\{g(\tau)\})]} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_{BG}\{\tilde{f}(t) *^{\pi} \tilde{g}(t)\} = e^{\mathcal{L}\{f(\tau)\}} \odot e^{\mathcal{L}\{g(\tau)\}}$$

olduğu görülür. ■

Teorem 3.11. $f(t)$ ve $g(t)$ bigeometrik iki fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlik geçerlidir;

$$\mathcal{L}_{BG}\{f(t) *^{\pi} g(t)\} = \mathcal{L}_{BG}\{f(t)\} \odot \mathcal{L}_{BG}\{g(t)\}. \quad (134)$$

İspat:

$f(t)$ ve $g(t)$ bigeometrik fonksiyonları sırasıyla klasik $\varphi(\tau)$ ve $\gamma(\tau)$ fonksiyonlarının $t = e^{\tau}$ olacak şekilde bigeometrik karşılıkları olsun. Yani

$$\tilde{\varphi}(t) = f(t), \quad \tilde{\gamma}(t) = g(t)$$

olsun. Teorem 3.3'e göre $\varphi(\tau)$ ve $\gamma(\tau)$ fonksiyonları tek türlü belirlidir. Önerme 3.4 'ten

$$\mathcal{L}_{BG}\{\tilde{\varphi}(t) *^{\pi} \tilde{\gamma}(t)\} = e^{\mathcal{L}\{\varphi(\tau)\}} \odot e^{\mathcal{L}\{\gamma(\tau)\}}$$

eşitliği biliniyor. Ayrıca teorem 3.3' den

$$e^{\mathcal{L}\{\varphi(\tau)\}} = \mathcal{L}_{BG}\{\tilde{\varphi}(t)\}, \quad e^{\mathcal{L}\{\gamma(\tau)\}} = \mathcal{L}_{BG}\{\tilde{\gamma}(t)\}$$

eşitlikleri kullanılarak

$$\mathcal{L}_{BG}\{\tilde{\varphi}(t) *^{\pi} \tilde{\gamma}(t)\} = \mathcal{L}_{BG}\{\tilde{\varphi}(t)\} \odot \mathcal{L}_{BG}\{\tilde{\gamma}(t)\}$$

yazılır. Burada $\tilde{\varphi}(t) = f(t)$, $\tilde{\gamma}(t) = g(t)$ olduğu da dikkate alınarak

$$\mathcal{L}_{BG}\{f(t) *^{\pi} g(t)\} = \mathcal{L}_{BG}\{f(t)\} \odot \mathcal{L}_{BG}\{g(t)\}$$

olduğu görülür. ■

3.1. Bigeometrik Türevin Bigeometrik Laplace Dönüşümü

Buradaki maksatımız, belli türden bigeometrik lineer diferensiyel denklemleri bigeometrik Laplace integral dönüşümü yardımıyla çözmektir. Bu nedenle bigeometrik türevlerin bigeometrik Laplace integral dönüşümlerine gerek vardır.

Önerme 3.1.1. $f(t)$ bir bigeometrik fonksiyon olsun. Bu durumda $t = e^{\tau}$ için

$$(\ln \circ f^{\pi(n)} \circ \exp)(\tau) = (\ln \circ f \circ \exp)^{(n)}(\tau) \quad (135)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. Öncelikli olarak 1.mertebeden bigeometrik türevler için eşitliğin geçerli olduğu gösterilirse yani

$n = 1$ için,

$$f^{\pi}(t) = e^{t \cdot (\ln \circ f)'(t)}$$

olduğu biliniyor. Burada eşitliğin her iki tarafının doğal logaritması alınırsa

$$(\ln \circ f^{\pi})(t) = t \cdot (\ln \circ f)'(t)$$

$$(\ln \circ f^{\pi})(e^{\tau}) = e^{\tau} \cdot (\ln \circ f)'(e^{\tau}), \quad (t = e^{\tau})$$

$$(\ln \circ f^{\pi} \circ \exp)(\tau) = e^{\tau} \cdot (\ln \circ f)'(e^{\tau})$$

$$(\ln \circ f^{\pi} \circ \exp)(\tau) = (\ln \circ f \circ \exp)'(\tau)$$

olduğu görülür. n . mertebeden bigeometrik türev için eşitliğin geçerli olduğu kabul edilirse, yani

$$(\ln \circ f^{\pi(n)} \circ \exp)(\tau) = (\ln \circ f \circ \exp)^{(n)}(\tau)$$

yazılır. Şimdi $(n + 1)$. mertebeden bigeometrik türev için eşitliğin sağlandığını gösterelim. Bunu için öncelikli olarak

$$h(t) = f^{\pi(n)}(t)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda

$$h^{\pi}(t) = f^{\pi(n+1)}(t)$$

olur. Son eşitliğin her iki tarafının doğal logaritması alınırsa,

$$\begin{aligned} (\ln \circ f^{\pi(n+1)} \circ \exp)(\tau) &= (\ln \circ h^{\pi} \circ \exp)(\tau) = (\ln \circ h \circ \exp)'(\tau) \\ (\ln \circ f^{\pi(n+1)} \circ \exp)(\tau) &= (\ln \circ f^{\pi(n)} \circ \exp)'(\tau) = [(\ln \circ f \circ \exp)^{(n)}]'(\tau) \\ (\ln \circ f^{\pi(n+1)} \circ \exp)(\tau) &= (\ln \circ f \circ \exp)^{(n+1)}(\tau) \end{aligned}$$

olur. Böylece ispat tamamlanmıştır. ■

Sonuç 3.1.1. Önerme 3.1.1 den aşağıdaki sonuç yazılır;

$$f^{\pi(n)}(t) = e^{(\ln \circ f \circ \exp)^{(n)}(\tau)}, \quad (t = e^{\tau}) \quad (136)$$

■

Önerme 3.1.2. Birinci mertebeden bigeometrik türevin bigeometrik Laplace integral dönüşümü aşağıdaki şekilde verilir.

$$\mathcal{L}_{BG}\{f^{\pi}(t)\} = [F_{BG}(s)]^{\ln s} \cdot [f(1)]^{-1} \quad (136)$$

İspat.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{BG}\{f^{\pi}(t)\} &= e^{\mathcal{L}\{(\ln \circ f \circ \exp)'(\tau)\}} \\ &= e^{\sigma \cdot \mathcal{L}\{(\ln \circ f \circ \exp)(\tau)\} - (\ln \circ f \circ \exp)(0)} \\ &= [e^{\mathcal{L}\{(\ln \circ f \circ \exp)(\tau)\}}]^{\sigma} \cdot e^{-\ln[f(1)]} \\ &= [F_{BG}(e^{\sigma})]^{\sigma} \cdot [f(1)]^{-1} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_{BG}\{f^\pi(t)\} = [F_{BG}(s)]^{\ln s} \cdot [f(1)]^{-1}$$

olur. Burada $s = e^\sigma$ dır.

■

Teorem 3.1.1. n . mertebeden bigeometrik türevin bigeometrik Laplace integral dönüşümü aşağıdaki şekilde verilir.

$$\mathcal{L}_{BG}\{f^{\pi(n)}(t)\} = [F_{BG}(s)]^{(\ln s)^n} \cdot \left[\prod_{k=1}^n \left(f^{\pi(k-1)}(1) \right)^{(\ln s)^{n-k}} \right]^{-1} \quad (137)$$

İspat.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{BG}\{f^{\pi(n)}(t)\} &= e^{\mathcal{L}\{(\ln \circ f \circ \exp)^{(n)}(\tau)\}} \\ &= e^{[\sigma^n \cdot \mathcal{L}\{(\ln \circ f \circ \exp)(\tau)\} - \sum_{k=1}^n \sigma^{n-k} \cdot (\ln \circ f \circ \exp)^{(k-1)}(0)]} \\ &= [e^{\mathcal{L}\{(\ln \circ f \circ \exp)(\tau)\}}]^{\sigma^n} \cdot \left[\prod_{k=1}^n \left(e^{(\ln \circ f \circ \exp)^{(k-1)}(0)} \right)^{\sigma^{n-k}} \right]^{-1} \\ &= [F_{BG}(e^\sigma)]^{\sigma^n} \cdot \left[\prod_{k=1}^n \left(f^{\pi(k-1)}(e^0) \right)^{\sigma^{n-k}} \right]^{-1} \\ \mathcal{L}_{BG}\{f^{\pi(n)}(t)\} &= [F_{BG}(s)]^{(\ln s)^n} \cdot \left[\prod_{k=1}^n \left(f^{\pi(k-1)}(1) \right)^{(\ln s)^{n-k}} \right]^{-1} \end{aligned}$$

olur. Burada $s = e^\sigma$ dır.

■

Tanım 3.1.1. $F_{BG}: \mathbb{R}_{exp} \rightarrow \mathbb{R}_{exp}$ verilen bir bigeometrik fonksiyon ve $f: \mathbb{R}_{exp}^+ \rightarrow \mathbb{R}_{exp}$ tanımlı, α -bigeometrik üstel mertebeden ve bigeometrik parçalı sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$\mathcal{L}_{BG}\{f(t)\} = F_{BG}(s)$$

eşitliği sağlanıyor ise $f(t)$ bigeometrik fonksiyonuna $F_{BG}(s)$ nin bigeometrik ters Laplace integral dönüşümü denir ve aşağıdaki şekilde gösterilir;

$$f(t) = \mathcal{L}_{BG}^{-1}\{F_{BG}(s)\}. \quad (138)$$

Teorem 3.1.2. Bigeometrik ters Laplace integral dönüşümü de bigeometrik olarak lineerdir. Yani, k_1, k_2 keyfi sabitler ve $f_1(t), f_2(t)$ de $\mathcal{L}_{BG}\{f_1(t)\} = F_1$ ve $\mathcal{L}_{BG}\{f_2(t)\} = F_2$ olacak şekilde bigeometrik Laplace integral dönüşümü olan bigeometrik sürekli iki fonksiyon ise,

$$\mathcal{L}_{BG}^{-1}\{F_1^{k_1} \cdot F_2^{k_2}\} = \mathcal{L}_{BG}^{-1}\{F_1\}^{k_1} \cdot \mathcal{L}_{BG}^{-1}\{F_2\}^{k_2} \quad (139)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: $f_1(t)$ ve $f_2(t)$ bigeometrik sürekli fonksiyonlar olmak üzere,

$$F_1 = \mathcal{L}_{BG}\{f_1(t)\} \text{ ve } F_2 = \mathcal{L}_{BG}\{f_2(t)\}$$

şeklinde olup bigeometrik ters Laplace integral dönüşümünün tanımından,

$$\mathcal{L}_{BG}^{-1}\{F_1\} = f_1(t) \text{ ve } \mathcal{L}_{BG}^{-1}\{F_2\} = f_2(t)$$

yazılır. Bigeometrik Laplace integral dönüşümü bigeometrik olarak lineer olduğundan

$$\mathcal{L}_{BG}\{f_1^{k_1}(t) \cdot f_2^{k_2}(t)\} = \mathcal{L}_{BG}\{f_1(t)\}^{k_1} \cdot \mathcal{L}_{BG}\{f_2(t)\}^{k_2} = F_1^{k_1} \cdot F_2^{k_2}$$

yazılabilir. Böylece bigeometrik ters Laplace integral dönüşümünün tanımından

$$\mathcal{L}_{BG}^{-1}\{F_1^{k_1} \cdot F_2^{k_2}\} = f_1^{k_1}(t) \cdot f_2^{k_2}(t)$$

$$\mathcal{L}_{BG}^{-1}\{F_1^{k_1} \cdot F_2^{k_2}\} = \mathcal{L}_{BG}^{-1}\{F_1\}^{k_1} \cdot \mathcal{L}_{BG}^{-1}\{F_2\}^{k_2}$$

olduğu görülür. ■

3.2. Bigeometrik Laplace Dönüşümünün Bigeometrik Lineer Diferansiyel Denklemlere Uygulanması

Bu kısımda amaç bigeometrik Laplace integral dönüşümünün bigeometrik lineer diferansiyel denklemler için başlangıç-değer problemlerinin çözümünde nasıl kullanıldığını göstermektir. Bigeometrik Laplace integral dönüşümü özellikle sabit üslü

bigeometrik lineer diferensiyel denklemler için kullanışlıdır. Böyle bir denklemin her iki tarafına bigeometrik Laplace integral dönüşümü uygulanarak çözüm elde edilir.

$$\textbf{Örnek 3.2.1. } y^\pi(t) \cdot [y(t)]^3 = e^{6 \ln t + 5}, y(1) = e. \quad (140)$$

Bigeometrik başlangıç-değer problemini BG-Laplace integral dönüşümü kullanılarak çözüünüz.

Çözüm. Burada, $y: \mathbb{R}_{\exp}^+ \rightarrow \mathbb{R}_{\exp}$ bigeometrik fonksiyon ve $\mathcal{L}_{BG}\{y(t)\} = Y_{BG}(s)$ olsun. Verilen denklemin her iki tarafına bigeometrik Laplace integral dönüşümü uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{BG}\{y^\pi(t) \cdot [y(t)]^3\} &= \mathcal{L}_{BG}\{e^{6 \ln t + 5}\} \\ \mathcal{L}_{BG}\{y^\pi(t)\} \cdot \mathcal{L}_{BG}\{[y(t)]^3\} &= e^{\mathcal{L}\{6\tau + 5\}}, \quad (\tau = \ln t) \\ [Y_{BG}(s)]^{\ln s} \cdot [y(1)]^{-1} \cdot [Y_{BG}(s)]^3 &= e^{\frac{6}{\sigma^2} + \frac{5}{\sigma}}, \quad (\sigma = \ln s) \\ [Y_{BG}(s)]^{\ln s + 3} &= y(1) \cdot \left(e^{\frac{6}{\sigma^2} + \frac{5}{\sigma}}\right) \end{aligned}$$

yazılır. Burada başlangıç koşulu kullanılırsa,

$$\begin{aligned} [Y_{BG}(s)]^{\ln(s)+3} &= e \cdot e^{\frac{6}{\sigma^2} + \frac{5}{\sigma}} \\ [Y_{BG}(s)]^{\ln(s)+3} &= e^{\frac{\sigma^2 + 5\sigma + 6}{\sigma^2}} \\ [Y_{BG}(s)]^{\ln(s)+3} &= e^{\frac{\ln^2(s) + 5 \ln(s) + 6}{\ln^2(s)}} \\ Y_{BG}(s) &= e^{\frac{[\ln(s)+2] \cdot [\ln(s)+3]}{\ln^2(s)} \cdot \frac{1}{[\ln(s)+3]}} \\ Y_{BG}(s) &= e^{\frac{[\ln(s)+2]}{\ln^2(s)}} \\ Y_{BG}(s) &= e^{\frac{1}{\ln(s)}} \cdot e^{\frac{2}{\ln^2(s)}} \end{aligned}$$

yazılır. Şimdi son eşitliğin her iki tarafına bigeometrik ters Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$\mathcal{L}_{BG}^{-1}\{Y_{BG}(s)\} = \mathcal{L}_{BG}^{-1}\left\{e^{\frac{1}{\ln(s)}} \cdot e^{\frac{2}{\ln^2(s)}}\right\}$$

$$\mathcal{L}_{BG}^{-1}\{Y_{BG}(s)\} = \mathcal{L}_{BG}^{-1}\left\{e^{\frac{1}{\ln(s)}} \cdot \left[e^{\frac{1}{\ln^2(s)}}\right]^2\right\}$$

$$y(t) = \mathcal{L}_{BG}^{-1}\left\{e^{\frac{1}{\ln(s)}}\right\} \cdot \mathcal{L}_{BG}^{-1}\left\{e^{\frac{1}{\ln^2(s)}}\right\}^2$$

$$y(t) = e^1 \cdot (e^{\ln t})^2$$

$$y(t) = e \cdot t^2$$

çözümü bulunur.

$$\textbf{Örnek 3.2.2. } [y^{\pi\pi}(t)] \cdot [y(t)]^{-1} = 1, \quad y(1) = 1, \quad y^\pi(1) = e \quad (141)$$

Bigeometrik başlangıç-değer problemini BG-Laplace integral dönüşümü yardımıyla çözünüz.

Çözüm. Burada, $y: \mathbb{R}_{\exp}^+ \rightarrow \mathbb{R}_{\exp}$ bigeometrik fonksiyon ve $\mathcal{L}_{BG}\{y(t)\} = Y_{BG}(s)$ olsun. Verilen denklemin her iki tarafına bigeometrik Laplace integral dönüşümü uygulanırsa,

$$\mathcal{L}_{BG}\{y^{\pi\pi}(t) \cdot [y(t)]^{-1}\} = \mathcal{L}_{BG}\{1\}$$

$$\mathcal{L}_{BG}\{y^{\pi\pi}(t)\} \cdot \mathcal{L}_{BG}\{[y(t)]^{-1}\} = 1$$

$$[Y_{BG}(s)]^{(\ln s)^2} \cdot [y(1)]^{-\ln s} \cdot [y^\pi(1)]^{-1} \cdot [Y_{BG}(s)]^{-1} = 1$$

yazılır. Burada başlangıç koşulları kullanılırsa,

$$[Y_{BG}(s)]^{(\ln s)^2-1} \cdot e^{-1} = 1$$

$$[Y_{BG}(s)]^{(\ln s)^2-1} = e$$

$$Y_{BG}(s) = e^{\frac{1}{(\ln s)^2-1}}$$

olur. Şimdi son eşitliğin her iki tarafına bigeometrik ters Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$\mathcal{L}_{BG}^{-1}\{Y_{BG}(s)\} = \mathcal{L}_{BG}^{-1}\left\{e^{\frac{1}{(\ln s)^2-1}}\right\}$$

$$y(t) = e^{\sin(\ln t)}$$

çözümü bulunur.

4. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Bu tez çalışmasında daha önce Yalçın ve arkadaşları tarafından (Yalçın v.d., 2016) yapılan çarpımsal (geometrik) Laplace dönüşümü baz alınarak bigeometrik Laplace integral dönüşümü (BGLİD) çalışılmıştır. Bunun için newtonyen olmayan (non-newtonian) analizlerden olan geometrik ve bigeometrik analizlerden kısaca bahsedilip bu analizlerin temel tanım ve teoremleri verilmiştir.

Bu tez çalışmasında tanımlanan bigeometrik Laplace integral dönüşümü bigeometrik analizde lineer diferansiyel denklemlerin çözümünde oldukça önemli bir rol oynamaktadır. Geometrik türev ve geometrik integral için geçerli olan yöntemler bigeometrik türev ve bigeometrik integral için de geçerlidir. Daha sonra geometrik Laplace dönüşümünün tanımı ve özellikleri dikkate alınarak bigeometrik analiz için bigeometrik Laplace dönüşümünün bazı temel tanım ve teoremleri verilmiştir. Ayrıca bigeometrik Laplace dönüşümü yardımıyla bigeometrik lineer diferansiyel denklemlerin çözümleri araştırılmıştır. Yapılan bu çalışmalar bigeometrik türev ve uygulamalarının geometrik analiz ile uyumlu olduğunu göstermiştir. Bu da tıpkı geometrik analizde olduğu gibi bigeometrik analizde de türevin diğer çalışma alanları ile alakalı benzer çalışmalar yapılabileceğine dikkat çekmiştir. Böylece bigeometrik analizde farklı tip integral dönüşüm metotları üzerine çalışmalar yapılabilir.

KAYNAKÇA

- Aboodh, K. S. (2013). The New Integral Transform'Aboodh Transform. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*, 9(1), 35-43.
- Aggarwal, S. ve Chauhan, R. (2019). A comparative study of Mohand and Aboodh transforms. *International journal of research in advent Technology*, 7(1), 520-529.
- Altın, A. (2011). *Fourier analizi*. Gazi Kitabevi.
- Aniszewska, D., 2007. Multiplicative Runge-Kutta method. *Nonlinear Dynamics*, 50:265-272.
- Bal A., Yalçın, N. ve Dedetürk, M. (2022). Solutions of multiplicative integral equations via the multiplicative power series method. *Politeknik Dergisi*, 1-1.
- Balcı, M., 2012. *Matematik Analiz-1*. Sürat Üniversite Yayınları, İstanbul, Türkiye.
- Bashirov, A. E., Kurpınar, E. M. ve Özyapıcı, A. (2008). Multiplicative calculus and its applications. *Journal of mathematical analysis and applications*, 337(1), 36-48.
- Bashirov, A. E., Mısırlı, E., Tandoğdu, Y. ve Özyapıcı, A. (2011). On modeling with multiplicative differential equations. *Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities*, 26(4), 425-438.
- Boruah, K. ve Hazarika, B. (2018a). G-calculus. *TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics*, 8(1), 94-105.
- Boruah, K. ve Hazarika, B. (2018b). Bigeometric integral calculus. *TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics*, 8(2), 374-385.
- Boruah, K., Hazarika, B. ve Bashirov, A. E. (2018). Solvability of bigeometric differential equations by numerical methods. *Boletim da Sociedade Paranaense de Matematica*, 39(2), 203-222.
- Campbell, D. (1999). Multiplicative calculus and student projects. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, 9(4), 327-332.
- Chen, C. M., Liu, F., Turner, I. ve Anh, V. (2007). A Fourier method for the fractional diffusion equation describing sub-diffusion. *Journal of Computational Physics*, 227(2), 886-897
- Córdova-Lepe, F. (2006). The multiplicative derivative as a measure of elasticity in economics. *TEMAT-Theaeteto Atheniensi Mathematica*, 2(3).
- Cordova-Lepe, F., Robledo, G. ve Cabrera-Villegas, J. (2015). Population growth modeling with boom and bust patterns: the impulsive differential equation formalism. *Journal of Biological Systems*, 23(supp01), 135-149.

- Çağlıyan, M., Çelik, N. ve Doğan, S., 2013. *Adi Diferensiyel Denklemler*, Dora Yayıncılık, Bursa, Türkiye.
- Çakmak, A. F. ve Başar, F. (2012). Some new results on sequence spaces with respect to non-Newtonian calculus. *Journal of Inequalities and Applications*, 2012(1), 1-17.
- Debnath, L. ve Bhatta, D. (2014). *Integral transforms and their applications*. CRC press.
- Eminağa, B. (2015). *Bigeometric Taylor Theorem and its Application to the Numerical Solution of Bigeometric Differential Equations (Doctoral dissertation, Doktora Tezi, Eastern Mediterranean University EMU. Gazimağusa, North Cyprus, 72s)*.
- Filip, D. A. ve Piatecki, C. (2014). A non-Newtonian examination of the theory of exogenous economic growth.
- Florack, L. ve van Assen, H. (2012). Multiplicative calculus in biomedical image analysis. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 42(1), 64-75.
- Goktas, S., Yilmaz, E. ve Yar, A. C. (2022). Multiplicative derivative and its basic properties on time scales. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 45(4), 2097-2109.
- Gorenflo, R., Iskenderov, A. ve Luchko, Y. (2000). Mapping between solutions of fractional diffusion-wave equations. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 3(1), 75-86.
- Grossman, M. (1979). An introduction to non-Newtonian calculus. *International Journal of Mathematical Educational in Science and Technology*, 10(4), 525-528.
- Grossman, M. (1983). *Bigeometric calculus: a system with a scale-free derivative*. Archimedes Foundation.
- Grossman, M. ve Katz, R. (1972). *Non-Newtonian calculus*. Lee Press, Pigeon Cove, MA
- Güngör, N. ve Durmaz, H. (2020). Multiplicative Volterra integral equations and the relationship between multiplicative differential equations. *Ikonion Journal of Mathematics*, 2(2), 9-25.
- Gürefe, Y. (2009). *Çarpımsal analiz ve uygulamaları. Yüksek lisans tezi, Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İzmir*.
- Jena, R. M. ve Chakraverty, S. (2019). Analytical solution of Bagley-Torvik equations using Sumudu transformation method. *SN Applied Sciences*, 1, 1-6.
- Jena, R. M. ve Chakraverty, S. (2019). Solving time-fractional Navier–Stokes equations using homotopy perturbation Elzaki transform. *SN Applied Sciences*, 1, 1-13.
- Jiang, X. ve Xu, M. (2009). The fractional finite Hankel transform and its applications in fractal space. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 42(38), 385201.

- Jumarie, G. (2009). Laplace's transform of fractional order via the Mittag-Leffler function and modified Riemann-Liouville derivative. *Applied Mathematics Letters*, 22(11), 1659-1664.
- Kadak, U. ve Özlük, M. (2015). Generalized Runge-Kutta method with respect to the non-Newtonian calculus. In *Abstract and Applied Analysis* (Vol. 2015). Hindawi.
- Kadioğlu E. ve Kamali, M., (2013). *Genel Matematik*. Kültür Eğitim Vakfı Yayınevi, Erzurum, Türkiye.
- Kasprzak, W., Lysik, B. ve Rybaczuk, M. (2004). Measurements, dimensions, invariant models and fractals. *Ukrainian Society on Fracture Mechanics*, SPOLOM, Wroclaw-Lviv, Poland.
- Kazem, S. (2013). Exact solution of some linear fractional differential equations by Laplace transform. *International Journal of nonlinear science*, 16(1), 3-11.
- Kılıçman, A. ve Gadain, H. E. (2010). On the applications of Laplace and Sumudu transforms. *Journal of the Franklin Institute*, 347(5), 848-862.
- Kumar, S. (2014). A new analytical modelling for fractional telegraph equation via Laplace transform. *Applied Mathematical Modelling*, 38(13), 3154-3163.
- Mao, Z. ve Shen, J. (2017). Hermite spectral methods for fractional PDEs in unbounded domains. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 39(5), A1928-A1950.
- Misirli, E. ve Gurefe, Y. (2011). Multiplicative Adams Bashforth-Moulton methods. *Numerical Algorithms*, 57(4), 425-439.
- Misirli, E. ve Ozyapici, A. (2009). Exponential approximations on multiplicative calculus. In *Proc. Jangjeon Math. Soc.* 12(2), 227-236.
- Namias, V. (1980). The fractional order Fourier transform and its application to quantum mechanics. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 25(3), 241-265.
- Neamaty, A., Agheli, B. ve Darzi, R. (2016). Applications of homotopy perturbation method and Elzaki transform for solving nonlinear partial differential equations of fractional order. *J. Nonlin. Evolut. Equat. Appl*, 2015(6), 91-104.
- Özyapıcı, A., 2009. *Çarpımsal Analiz ve Uygulamaları, Doktora Tezi, Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İzmir, Türkiye.*
- Qureshi, S. ve Yusuf, A. (2019). Mathematical modeling for the impacts of deforestation on wildlife species using Caputo differential operator. *Chaos, Solitons & Fractals*, 126, 32-40.
- Rybaczuk, M. ve Stoppel, P. (2000). The fractal growth of fatigue defects in materials. *International Journal of Fracture*, 103(1), 71-94.

- Rybczuk, M. ve Cetera, A. (2001). Non-homogeneous fractal growth of fatigue defects in materials. *SAE Technical Paper* (No. 2001-01-4057).
- Stanley, D. (1999). A multiplicative calculus. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, 9(4), 310-326.
- Taha, N., Nuruddeen, R., & Sedeeg, A. (2017). Dualities between "Kamal & Mahgoub Integral Transforms" and "Some Famous Integral Transforms". *British journal of applied science & technology*, 20(3), 1-8.
- Turkmen, C., & Basar, F. (2012). Some basic results on the sets of sequences with geometric calculus, *Commun. Fac. Fci. Univ. Ank. Series A*, 1, 17-34.
- Türkmen, C. ve Başar, F. (2012). Some basic results on the sets of sequences with geometric calculus, *First International Conference on Analysis and Applied Mathematics*, 18-21 Ekim 2012, Gümüşhane.
- Yalcin, N., Celik, E. ve Gokdogan, A. (2016). Multiplicative Laplace transform and its applications. *Optik*, 127(20), 9984-9995.
- Yalçın, N. (2016). *Çarpımsal Türev ve Çarpımsal Lineer Diferensiyel Denklemler (Doctoral dissertation, Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü. Erzurum, 105s)*.
- Yalçın, N. ve Çelik, E. (2018a). The solution of multiplicative non-homogeneous linear differential equations. *J. Appl. Math. Comput*, 2(1), 27-36.
- Yalcin, N. ve Celik, E. (2018b). Solution of multiplicative homogeneous linear differential equations with constant exponentials. *New Trends in Mathematical Sciences*, 6(2), 58-67.
- Yalçın, N. ve Çelik, E. (2019). Çarpımsal Cauchy-Euler ve Legendre Diferansiyel Denklemi. *Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 9(3), 373-382.
- Yalçın, N. (2021). The solutions of multiplicative Hermite differential equation and multiplicative Hermite polynomials. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series 2*, 70(1), 9-21.
- Yalçın, N. ve Dedetürk, M. (2021). Solutions of multiplicative ordinary differential equations via the multiplicative differential transform method. *Aims Mathematics*, 6(4), 3393-3409.
- Yalçın, N. ve Kaymak, S. (2023). Bigeometric Laplace transform and its applications. 7th International Conference on Computational Mathematics and Engineering Sciences, 20-21 Mayıs 2023, Elazığ, Türkiye, s. 104.
- Yalcın, N. ve Dedetürk, M. (2023). Solutions of multiplicative linear differential equations via the multiplicative power series method., (In press).

Yang, X. J. (2011). *Local Fractional Functional Analysis & Its Applications*. Hong Kong:
Asian Academic Publisher Limited.



ÖZGEÇMİŞ

Sinem Kaymak, ilköğretim ve liseyi Gümüşhane’de ,üniversiteyi Erzurum Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde okuyarak bitirdi. Aynı zamanda Erzurum Atatürk üniversitesinde formasyon eğitimi aldı. 2021 yılında Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalında tezli yüksek lisans programına başladı. Yüksek lisans eğitimi sürecinde yapılan 1 tane uluslararası sempozyumda sunulan bildirisi ve şu an değerlendirme aşamasında olan 1 adet makalesi vardır.

Yayınlar:

Yalçın, N. ve Kaymak, S. (2023). On Bigeometric Laplace Integral Transform. *Journal of the Institute of Science and Technology*.

Yalçın, N. ve Kaymak, S. (2023). Bigeometric Laplace transform and its applications. 7th International Conference on Computational Mathematics and Engineering Sciences, 20-21 Mayıs 2023, Elazığ, Türkiye, s. 104.