T. C.
SİVAS CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HALKALARDA HOMOTÜREVLER VE İDEALLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Yeşim ŞAHİN ERDEM
20209237008

Matematik Ana Bilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Emine KOÇ SÖGÜTCÜ

SİVAS
HAZİRAN 2023

Yeşim ŞAHİN ERDEM' in hazırladığı ve **"Halkalarda Homotürevler ve İdealler"** adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **MATEMATİK ANABİLİM DALI**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı: **Doç. Dr. Emine KOÇ SÖGÜTCÜ** ....
Sivas Cumhuriyet Üniversitesi

Jüri Üyesi: **Prof. Dr. Öznur GÖLBAŞI** ....
Sivas Cumhuriyet Üniversitesi

Jüri Üyesi: **Doç. Dr. Adem ŞAHİN** ....
Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi

Bu tez, Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nevcihan GÜRSOY
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

Bu tez, Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Senatosu’nun 20.08.2014 tarihli ve 7 sayılı kararı ile kabul edilen Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Tez Yazım Kılavuzu (Yönerge)’nda belirtilen kurallara uygun olarak hazırlanmıştır.

İÇİNDEKİLER

KATKI BELİRTME VE TEŞEKKÜR

Bu tez çalışması süresince bilgi ve deneyimleri ile bana yol gösteren, kendisinden sürekli yararlandığım, tezin her aşamasında yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Doç. Dr. Emine KOÇ SÖGÜTCÜ' ye çok teşekkür ederim.

Yeşim ŞAHİN ERDEM

ÖZET

HALKALARDA HOMOTÜREVLER VE İDEALLER

Yeşim ŞAHİN ERDEM

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Emine KOÇ SÖGÜTCÜ

2023, 30+ix sayfa

Bu çalışmada homotürevler üzerine bazı sonuçlar elde edilmiştir. Başka bir ifadeyle R bir asal halka, I, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali, $h: R \rightarrow R$ bir homotürev olmak üzere aşağıda yazılı ifadelerden en az biri sağlandığında R nin bir değişmeli halka olduğu gösterilmiştir.

i) $h(I) \subset Z$, ii) $[h(I), I] = (0)$, iii) $[h(I), I] \subset Z$, iv) $[h(I), h(I)] \subset Z$ ve $h(Z) \neq (0)$
v) Her $u, v \in I$ için $[h(u), h(v)] = [u, v]$, vi) $h(I) \circ I = (0)$, vii) $h(I) \circ I \subset Z$,
viii) $h(I) \circ h(I) \subset Z$ ve $h(Z) \neq (0)$, ix) Her $u, v \in I$ için $h(u) \circ h(v) = u \circ v$,
x) Her $u, v \in I$ için $h(u)h(v) = uv$ xi) Her $u, v \in I$ için $h(u)h(v) = vu$,
xii) $h(I \circ I) = (0)$, xiii) $h(I \circ I) \subset Z$ ve $h(Z) \neq (0)$,
xiv) Her $u, v \in I$ için $h(u)h(v) = [u, v]$, xv) Her $u, v \in I$ için $h(u)h(v) = u \circ v$,
xvi) Her $u, v \in I$ için $h([u, v]) = [h(u), v]$, xvii) Her $u, v \in I$ için $h(u \circ v) = h(u) \circ v$.

Anahtar kelimeler: Asal halka, ideal, türev, homotürev.

ABSTRACT

HOMODERIVATIONS AND IDEALS IN RINGS

Yeşim ŞAHİN ERDEM
Master of Science Thesis
Department of Mathematics
Supervisor: Doç. Dr. Emine KOÇ SÖGÜTCÜ
2023, 30+ix pages

In this study, results on homoderivations were obtained. It has been shown that R is a commutative ring when at least one of the following expression are met, including R as a prime ring, I a nonzero ideal of R and $h: R \to R$ as a homoderivations: i) $h(I) \subset Z$, ii) $[h(I), I] = (0)$, iii) $[h(I), I] \subset Z$, iv) $[h(I), h(I)] \subset Z$ and $h(Z) \neq (0)$, v) $[h(u), h(v)] = [u, v]$ for all $u, v \in I$, vi) $h(I) \circ I = (0)$, vii) $h(I) \circ I \subset Z$, viii) $h(I) \circ h(I) \subset Z$ and $h(Z) \neq (0)$, ix) $h(u) \circ h(v) = u \circ v$ for all $u, v \in I$, x) $h(u)h(v) = uv$, for all $u, v \in I$, xi) $h(u)h(v) = vu$, for all $u, v \in I$, xii) $h(I \circ I) = (0)$, xiii) $h(I \circ I) \subset Z$ and $h(Z) \neq (0)$, xiv) $h(u)h(v) = [u, v]$, for all $u, v \in I$, xv) $h(u)h(v) = u \circ v$, for all $u, v \in I$, xvi) $h([u, v]) = [h(u), v]$, for all $u, v \in I$, xvii) $h(u \circ v) = h(u) \circ v$, for all $u, v \in I$.

Keywords: prime ring, ideal, derivation, homoderivation.

SİMGELER DİZİNİ

$\in$	:	Elemanı
$\forall$	:	Her
$\subset$	:	Alt küme
$\supset$	:	Kapsama
$[x, y]$	:	x, y elemanlarının komutatör çarpımı
$x \circ y$	:	x, y elemanlarının Jordan çarpımı
$\emptyset$	:	Boş küme
1_R	:	R halkasının birim elemanı

GİRİŞ

Matematik alanında son yıllarda türevler konusu pek çok matematikçi tarafından ele alınmıştır. Asal halkalar üzerinde türev tanımı literatürde ilk olarak 1957 yılında E. C. Posner tarafından yapılmıştır. E. C. Posner tarafından ele alınan bu tanım farklı türev kavramlarını ortaya çıkarmıştır. Halkada türev ve homomorfizma tanımları M. M. El Sofy Aly tarafından ele alınmış ve homotürev şeklinde yeni ve daha genel olan bir tanım verilmiştir: R bir halka, $h: R \to R$ toplamsal bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in R$ için $h(xy) = h(x)h(y) + h(x)y + xh(y)$ ise h dönüşümüne homotürev denir. Bu çalışmadan yola çıkarak pek çok matematikçi halkada türev konusu ile ilgili yapılan çalışmaları homotürev konusu için incelemişlerdir.

Literatürde SCP dönüşümler ve SCP türevler için pek çok çalışma bulunmaktadır. İlk olarak H. E. Bell ve M. N. Daif tarafından 1994 yılında SCP türev konusunu yarıasal halkanın idealinde ve 1996 yılında ise Q. Deng ve M. Ashraf tarafından ise asal halkanın üzerinde SCP endomorfizm dönüşümler için incelenmiştir. 2003 yılında M. Bresar bu çalışmayı halkanın Lie ideali için genelleştirdi. J. Ma ve X. W. Xu ise 2008 yılında SCP dönüşümler konusunu genelleştirilmiş türevler için ele almışlardır. 2013 yılında E. Koç yarıasal halkalarda SCP türevleri inlemiştir. Öte yandan, 2018 yılında E. Koç ve Ö. Gölbaşı bu koşulu yarıasal halkalar üzerinde çarpımsal genelleştirilmiş türevler için çalışmışlardır. A. Ali, M. Yasen ve M. Anwar tarafından R yarıasal bir halka ve f, R'nin sıfırdan farklı bir ideali U üzerinde SCP dönüşümü olan bir endomorfizm ise bu durumda f dönüşümünün U üzerinde kommuting dönüşüm olduğunu ispalanmıştır. 2005 yılında M. S. Samman, bir yarıasal halka üzerinde epimorfizm dönüşümler ve SCP dönüşümler konusunu ele almıştır. Araştırmacılar, operatör cebirleri, asal halkalar ve yarıasal halkalar bağlamında türevler ve SCP dönüşümleri üzerine yaygın bir şekilde çalışmışlardır. Sonraki yıllarda yukarıda verilen homotürev tanımı için bu çalışmalar ele alınmaya başlanmıştır. Bu çalışmaların ilki A. Melaibari, N. Muthana, A. Al-Kenani tarafından 2016 yılında yapılmıştır. Bu çalışmada SCP dönüşümler konusu homotürev için incelenmiştir.

M. Ashraf ve N. Rehman tarafından 2002 yılında SCP dönüşüm tanımındaki komütatör ifadesi Jordan komütatör ile yer değiştirilmiştir ve $d(x) \circ d(y) = x \circ y$

koşulu elde edilmiştir. Homotürev konusu için bu koşul şu şekilde geneleştirilmiştir: $h(x) \circ h(y) = x \circ y$.

1978 yılında I. N. Herstein tarafından R bir karakteristiği ikiden farklı bir asal halka ve d, R üzerinde bir sıfırdan farklı türev olmak üzere $d(R) \subset Z$ koşulu sağlanıyorsa R bir değişmeli halka olduğu gösterilmiştir. Bu koşul J. Bergen, I. N. Herstein ve J. W. Kerr tarafından 1981 yılında asal halkanın Lie ideali için ele alınmıştır. Ö. Gölbaşı ve E. Koç ise 2010 yılında yukarıda verilen koşulu asal halkanın $(\sigma, \tau)-$Lie ideali için incelemişlerdir.

2007 yılında M. Ashraf, A. Ali ve S. Ali tarafından şu teorem ele alınmıştır: R bir halka ve f, R nin bir genelleştirilmiş türevi olmak üzere aşağıdaki koşullardan biri sağlanırsa R bir değişmeli halkadır: (i) $f(xy) - xy \in Z$, (ii) $f(xy) + xy \in Z$, (iii) $f(xy) - yx \in Z$, (iv) $f(xy) + yx \in Z$, (v) $f(x)f(y) - xy \in Z$ (vi) $f(x)f(y) + xy \in Z$. N. Rehman, M. R. Mozumder ve A. Abbasi tarafından 2019 tarafından bu koşullar ve farklı değişmeli olma koşulları asal halka üzerinde homotürevler için incelenmiştir. E. F. Alharfie ve N. M. Muthana 2019 yılında asal halkada homotürevler için (i) $h(xy) - xy \in Z$, (ii) $h(xy) + xy \in Z$ koşullarını incelemişlerdir. Bu koşulları E. F. Alharfie ve N. M. Muthana ise 2018 yılında asal halkada homotürev için aşağıdaki gibi genelleştirmişlerdir: $(i)\ xh(y) \pm xy \in Z$, $(ii)\ xh(y) \pm yx \in Z$, $(iii)\ [h(x), y] \pm xy \in Z$, $(iv)\ [h(x), y] \pm yx \in Z$.

2016 yılında A. Melaibari, N. Muthana, A.Al-Kenani tarafından şu teorem ele alınmıştır: R bir asal halka, I, R nin sıfırdan farklı bir türevi ve $h : R \to R$ sıfırdan farklı homotürev olmak üzere her $a, b \in I$ için $h([a, b]) = 0$ ise R değişmeli halkadır. Ayrıca, R karakteristiği ikiden farklı ve h bir sıfır-güçlü değerli homotürev olmak üzere her $a, b \in I$ için $h([a, b]) \in Z$ ise R değişmeli halkadır.

Bu tez çalışmasında, yukarıda bahsedilen koşullar ile bu koşullardan yola çıkarak yeni oluşturulan değişmeli olma koşulları bir asal halkanın sıfırdan farklı ideali üzerinde homotürevler için incelenmiştir.

1. GENEL KAVRAMLAR

Tanım 1.1: Boş kümeden farklı bir G kümesi üzerinde

$$+: G \times G \to G$$

$$(a, b) \to a + b$$

işlemi tanımlansın. Buna göre

i. Her $a, b, c \in G$ için $a + (b + c) = (a + b) + c$
ii. Her $a \in G$ için $a + 0 = 0 + a = a$ olacak biçimde $0 \in G$ var
iii. Her $a \in G$ için $a + (-a) = (-a) + a = 0$ olacak biçimde $-a \in G$ var

koşulları sağlanıyorsa $(G, +)$ ikilisine bir grup denir. İşlemin önemli olmadığı durumda $(G, +)$ ikilisi yerine sadece G gösterimi kullanılabilir.

Tanım 1.2: G bir grup ve $\emptyset \neq A \subset G$ olsun. Eğer A kümesi, G kümesi üzerinde tanımlı işleme göre kendi başına bir grup oluyorsa A kümesine G grubunun bir altgrubu denir.

Tanım 1.3: Bir grubun, birimden ve kendinden farklı altgrubuna öz altgrup denir.

Tanım 1.4: $(G, +)$ ve $(S,*)$ iki grup olmak üzere bir $f: G \to S$ fonksiyonu her $x, y \in G$ için $f(x + y) = f(x) * f(y)$ koşulu sağlanıyorsa oluyorsa f fonksiyonuna bir grup homomorfizması denir.

Eğer f grup homomorfizması örten dönüşüm ise grup epimorfizması, $1 - 1$ dönüşüm ise grup monomorfizması ve $1 - 1$, örten dönüşüm ise grup izomorfizması olarak adlandırılır.

$ker f = \{a \in G | f(a) = e_S\}$ olarak tanımlanan kümeye f grup homomorfizmasının çekirdeği denir.

Teorem 1.5: (*Brauer's Trick*) Herhangi bir grup iki öz altgrubunun birleşimi olarak yazılamaz.

İspat: $(G,*)$ bir grup olmak üzere K ve H öz altgrupları için $G = H \cup K$ olarak yazılsın. Kabul edelim ki $H \subsetneq K$ ve $K \subsetneq H$ olsun. Bu durumda $a \in H - K$ ve $a \in K - H$ olacak biçimde $a, b \in G$ vardır. G grup olduğu için $a * b \in G$ dir. $G = H \cup K$ olduğundan $a * b \in H$ veya $a * b \in K$ olur. $a * b \in H$ ise H bir grup ve $a \in H$

olduğu için $a^{-1} \in H$ dır. Bu durumda $b = a^{-1} * a * b \in H$ olur. Oysa ki $b \notin H$ idi. Bu nedenle $a * b \in H$ olamaz. O halde $a * b \in K$ dır. Benzer şekilde K bir grup ve $b \in H$ olduğu için $b^{-1} \in K$ dır. Böylece $a = a * b * b^{-1} \in K$ olur. Bu ise $a \notin K$ olması ile çelişir. Çelişkilerin nedeni kabuldür. O halde $H \subset K$ veya $K \subset H$ dır. İlk olarak kabul edelim ki $K \subset H$ olsun. Bu durumda $H \cup K \subset H$ olur. Bu $G \subset H$ demektir. Yani $G = H$ olur. Bu ifade de K kümesinin öz altgrup olması ile çelişir. Tüm bu çelişkilerin nedeni başlangıçtaki kabuldür. Böylece $G = K \cup H$ olması durumda $G = H$ veya $G = K$ dır.

Tanım 1.6: R, boş olmayan bir küme ve R üzerinde toplama ve çarpma ikili işlemleri tanımlı olsun. Buna göre aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa R ye bir halka denir ve $(R, +, .)$ ile gösterilir.

i. $(R, +)$ değişmeli grup,

ii. Her $a, b, c \in R$ için $a(bc) = (ab)c$,

iii. Her $a, b, c \in R$için $a(b + c) = ab + ac$ ve $(a + b)c = ac + bc$.

Ayrıca

iv. Her $a, b \in R$ için $ab = ba$ ise R halkasına değişmeli (komütatif) halka denir.

v. Her $a \in R$ için $a.1_R = 1_R.a$ olacak şekilde $1_R \in R$ varsa R halkasına birimli halka denir.

$(R, +, \cdot)$ üçlüsü R kümesi üzerinde tanımlanan " $+$ " ve " $\cdot$ " işlemleri ile birlikte bir halkayı ifade eder. İşlemin önemli olmadığı durumlarda $(R, +, \cdot)$ yerine sadece R gösterimi kullanılabilir.

Tanım 1.7: R bir halka ve $\emptyset \neq A \subseteq R$ olsun. Eğer A kümesi, R kümesi üzerinde tanımlı işlemlere göre kendi başına bir halka oluyorsa A kümesine R halkasının bir alt halkası denir.

Tanım 1.8: $(R, +, \cdot)$ ve $(S, *, \circ)$ iki halka olmak üzere bir $f: R \to S$ fonksiyonu her $x, y \in R$ için

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$$

ve

$$f(x * y) = f(x) \circ f(y)$$

koşulları sağlıyorsa f fonksiyonuna bir halka homomorfizması denir.

Eğer f halka homomorfizması örten dönüşüm ise halka epimorfizması, $1-1$ dönüşüm ise halka monomorfizması ve $1-1$, örten dönüşüm ise halka izomorfizması olarak adlandırılır.

Özel olarak, $f: R \to R$ bir halka izomorfizması ise halka otomorfizması adını alır.

Tanım 1.9: R bir halka ve A, R halkasının boş kümeden farklı bir alt kümesi olsun.

$$C_R(A) = \{a \in R | xa = ax, \forall x \in A\}$$
$$= \{a \in R | [x, a] = 0, \forall x \in A\}$$

kümesine A kümesinin R halkasındaki merkezleştircisi denir.

Tanım 1.10: R bir halka olsun

$$Z = \{z \in R | zx = xz, \forall x \in R\}$$

kümesine R halkasının merkezi denir.

Uyarı 1.11: Bir halkanın merkezi kendisinin alt halkasıdır.

Uyarı 1.12: R bir halka, A ve B altgrupları olsun. $a \in A$ ve $b \in B$ olmak üzere ab elemanları tarafından üretilen altgrup AB dir.

Tanım 1.13: R bir halka ve I, R halkasının bir alt halkası olsun.

i. Her $r \in R$, $a \in I$ için $ra \in I$ ise I ya R halkasının sol ideali,

ii. Her $r \in R$, $a \in I$ için $ar \in I$ ise I ya R halkasının sağ ideali denir.

I, R nin hem sol, hem de sağ ideali ise I ya R halkasının bir ideali denir.

Örnek 1.14: $R = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ halkası verilsin. Bu durumda $I = \left\{\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in R \middle| a \in \mathbb{Z}\right\}$ kümesi R halkasının bir idealidir.

Tanım 1.15: R bir halka ve A ve B, R halkasının idealleri olsun. n bir pozitif tam sayı olmak üzere

$$AB = \{\textstyle\sum_{sonlu} a_i b_i \, | a_i \in A, b_i \in B\}$$

ve

$$A^n = \left\{ \sum_{sonlu} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_j} \middle| a_{i_j} \in A \right\}$$

dir.

Tanım 1.16: R bir halka ve $P \neq R$ olan R nin bir ideali olsun. A ve B, R halkasının herhangi iki ideali olmak üzere

‘‘ $AB \subseteq P$ olduğunda $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$’’

oluyor ise P idealine R halkasının asal ideali denir.

Tanım 1.17: (0) ideali asal ideal olan halkaya asal halka denir.

Örnek 1.18: $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ tamsayılar halkası bir asal halkadır.

Önerme 1.19: Bir R halkasının asal halka olması için gerek ve yeter koşul $a, b \in R$ olmak üzere $aRb = (0)$ olduğunda $a = 0$ veya $b = 0$ olmasıdır.

Tanım 1.20: R bir halka olsun. $\forall a \in R$ için $na = 0$ sağlayan n pozitif tamsayılarının en küçüğüne R halkasının karakteristiği denir ve $charR = n$ ile gösterilir.

Tanım 1.21: R bir halka ve $m \neq 0$ bir tamsayı olsun. Her $a \in R$ için $ma = 0$ olduğunda $a = 0$ oluyorsa R halkasına m- torsion free halka denir.

Uyarı 1.22: Bir $2-$ torsion free halka ise R halkasının karakteristiği ikiden farklıdır. Ancak tersi her zaman doğru olmayabilir.

Uyarı 1.23: R bir asal halka olmak üzere R halkasının karakteristiği ikiden farklı ise R halkası $2-$ torsion free bir halkadır.

İspat: R karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka olsun. Kabul edelim ki $x \in R$ için $2x = 0$ olsun. Bu durumda her $a, b \in R$ için

$$2(xab) = 0 \Rightarrow xab + xab = 0 \Rightarrow xa(b + b) = 0 \Rightarrow xa(2b) = 0$$

olur. Bu ise her $b \in R$ için $2b = 0$ elde edilir. Bu durumda halkanın karakteristiği ikiden farklı olduğu için $x = 0$ olur. Böylece R halkası bir $2-$ torsion free halkadır.

Sonuç 1.24: R bir asal halka olmak üzere $charR \neq 2$ olması ile $2-$torsion free olması aynı anlama gelir.

Tanım 1.25: R bir halka olsun. $x, y \in R$ için $xy - yx$ ifadesine x ile y elemanlarının komütatör çarpımı denir ve $[x, y]$ ile gösterilir. $xy + yx$ ifadesine ise x ile y nin Jordan çarpımı denir ve $x \circ y$ ile gösterilir.

Özellikler: $\forall x, y, z \in R$ için aşağıdaki bağıntılar sağlanır.

i. $[x + y, z] = [x, z] + [y, z]$

ii. $[x, yz] = y[x, z] + [x, y]z$

iii. $[xy, z] = x[y, z] + [x, z]y$

iv. $\big[[x, y], z\big] + \big[[y, z], x\big] + \big[[z, x], y\big] = 0$ (Jacobi özdeşliği)

v. $x \circ (yz) = (x \circ y)z - y[x, z] = y(x \circ z) + [x, y]z$

vi. $(xy) \circ z = x(y \circ z) - [x, z]y = (x \circ z)y + x[y, z]$

Tanım 1.26: R bir halka, $d: R \to R$ toplamsal bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in R$ için

i. $d(x + y) = d(x) + d(y)$

ii. $d(xy) = d(x)y + xd(y)$

koşulları sağlanıyor ise d ye R halkasında bir türev denir. (Posner,1957)

Örnek 1.27: R bir halka ve $S = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in R\right\}$ olsun. S kümesi matrisler halkası üzerinde bilinen işlemler ile bir halkadır. Bu durumda $d: S \to S$, $d\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ile tanımlı dönüşüm S kümesi üzerinde bir türevdir.

Çözüm: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in$ S olsun.

i) $d(A + B) = d\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = d\begin{pmatrix} a + c & b + d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a + c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

olur. Öte yandan

$d(A) = d\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

ve

$d(B) = d\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

olduğundan

$$d(A) + d(B) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a+c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dir. Böylece

$$d(A+B) = d(A) + d(B)$$

elde edilir. Yani d toplamsal bir dönüşümdür.

ii) $d(AB) = d\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = d\begin{pmatrix} ac & ad \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ac \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

dır. Ayrıca

$$d(A)B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ve

$$Ad(B) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ac \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$d(A)B + Ad(B) = \begin{pmatrix} 0 & ac \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dir. Böylece

$$d(AB) = d(A)B + Ad(B)$$

elde edilir. O halde d, R halkası üzerinde bir türevdir.

Tanım 1.28: R bir halka ve $a \in R$ olsun. $\forall x \in R$ için $I_a(x) = [a, x] = ax - xa$ tanımlı dönüşüm R halkasının bir türevidir. Bu dönüşüme özel olarak a tarafından belirlenmiş iç türev adı verilir.

Tanım 1.29: R bir halka, S, R nin boştan faklı bir alt kümesi ve f, R halkası üzerinde bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in R$ için

$$f(xy) = f(x)f(y)$$

koşulu sağlanıyor ise f ye S üzerinde bir homomorfizm denir.

Tanım 1.30: R bir halka, S, R nin boştan faklı bir alt kümesi ve f, R halkası üzerinde bir dönüşüm olsun. Eğer $f(S) \subset S$ koşulu sağlanıyor ise f ye S üzerinde koruyan dönüşüm denir. Eğer f dönüşümü S üzerinde koruyan dönüşüm ve her $x \in$

S için $f^{n(x)}(x) = 0$ olacak şekilde $n(x) > 1$ pozitif tam sayısı varsa f ye S üzerinde sıfır-güç değerli dönüşüm denir.

Tanım 1.31: R bir halka, $h: R \to R$ toplamsal bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in R$ için

$$h(xy) = h(x)h(y) + h(x)y + xh(y)$$

koşulu sağlanıyor ise h dönüşümüne bir homotürev denir. (M. M. El Sofy Aly, 2000)

Örnek 1.32: R bir halka, $f: R \to R$ homomorfizma olsun. Buna göre her $x \in R$ için $h(x) = f(x) - x$ dönüşümü bir homotürevdir. Ancak h dönüşümü bir türev değildir. Eğer her $x, y \in R$ için $h(x)h(y) = 0$ ise h bir türevdir.

Çözüm: $x, y \in R$ alalım.

i) $h(x + y) = f(x + y) - x - y$

$$= f(x) + f(y) - x - y$$

$$= f(x) - x + f(y) - y$$

$$= h(x) + h(y)$$

olur. Böylece $h(x + y) = h(x) + h(y)$ dir. Yani h toplamsal bir dönüşümdür.

ii) $h(xy) = f(xy) - xy$

dır. Ayrıca

$h(x)y = (f(x) - x)y = f(x)y - xy,$

$xh(y) = x(f(y) - y) = xf(y) - xy$

ve

$h(x)h(y) = (f(x) - x)(f(y) - y)$

$$= f(x)f(y) - f(x)y - xf(y) + xy + f(x)y - xy + xf(y) - xy$$

$$= f(x)f(y) - xy$$

olmak üzere

$h(x)h(y) + h(x)y + xh(y) = f(x)f(y) - f(x)y - xf(y) + xy + f(x)y - xy + xf(y) - xy = f(x)f(y) - xy$

dir. Böylece

$h(xy) = h(x)h(y) + h(x)y + xh(y)$

elde edilir. O halde h, R halkası üzerinde bir homotürevdir. Diğer taraftan

$h(xy) = f(xy) - xy$

ve

$h(x)y + xh(y) = f(x)y - xy + f(y) - xy$

olduğundan

$h(xy) \neq h(x)y + xh(y)$

elde edilir. Yani h bir türev değildir.

Ancak her $x, y \in R$ için $h(x)h(y) = 0$ ise bu ifade yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa

$h(xy) = h(x)y + xh(y)$

olur. Yani bu durumda h, R halkası üzerinde bir türevdir.

Örnek 1.33: Z tamsayılar kümesi olmak üzere $R = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in Z\right\}$ olsun. R kümesi matrisler halkası üzerinde bilinen işlemler ile bir halkadır. Bu durumda $h: R \to R,\ h(r) = -r$ ile tanımlı dönüşüm R kümesi üzerinde bir homotürevdir. Ancak h dönüşümü bir türev değildir.

Çözüm: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix} \in R$ olsun.

i) $h(A + B) = h\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix}\right) = h\begin{pmatrix} a+d & b+e \\ 0 & c+f \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a+d & b+e \\ 0 & c+f \end{pmatrix}$

olur. Öte yandan

$h(A) = h\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$

ve

$h(B) = h\begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix}$

olduğundan

$$h(A)+h(B)=-\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} a+d & b+e \\ 0 & c+f \end{pmatrix}$$

dir. Böylece

$$h(A+B)\ =h(A)\ +h(B)$$

elde edilir. Yani h toplamsal bir dönüşümdür.

ii) $h(AB)=h\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix}\right)=h\begin{pmatrix} ad & ae+bf \\ 0 & cf \end{pmatrix}$

$$=-\begin{pmatrix} ad & ae+bf \\ 0 & cf \end{pmatrix}$$

dır. Ayrıca

$$h(A)B\ =-\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} ad & ae+bf \\ 0 & cf \end{pmatrix},$$

$$Ah(B)=\ -\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} ad & ae+bf \\ 0 & cf \end{pmatrix}$$

ve

$$h(A)h(B)=-\left(-\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} ad & ae+bf \\ 0 & cf \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$h(A)h(B)+h(A)B+Ah(B)=\ -\begin{pmatrix} ad & ae+bf \\ 0 & cf \end{pmatrix}$$

dir. Böylece

$$h(AB)\ =h(A)h(B)+h(A)B+Ah(B)$$

elde edilir. O halde h, R halkası üzerinde bir homotürevdir. Diğer taraftan

$$h(A)B+Ah(B)=\ -2\begin{pmatrix} ad & ae+bf \\ 0 & cf \end{pmatrix}$$

ve

$$h(AB)=-\begin{pmatrix} ad+bc & ae+bf \\ 0 & cf \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$h(AB)\neq h(A)+h(B)$$

elde edilir. Yani h, R halkası üzerinde bir türev değildir.

Tanım 1.34: R bir halka, S, R halkasının boştan farklı bir alt kümesi ve f, R üzerinde bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall x \in S$ için $[f(x), x] = 0$ koşulu sağlanıyor ise f dönüşümüne S üzerinde kommuting (commuting) dönüşüm denir.

Tanım 1.35: R bir halka, S, R halkasının boş kümeden farklı bir alt kümesi ve f, R üzerinde bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall x \in S$ için $[f(x), x] \in Z$ koşulu sağlanıyor ise f ye S üzerinde merkezil (centralizing) dönüşüm denir.

Tanım 1.36: S, R halkasının boş kümeden farklı bir alt kümesi, $f: R \to R$ bir dönüşüm olmak üzere eğer her $x, y \in S$ için $[f(x), f(y)] = [x, y]$ oluyorsa f dönüşümüne R halkasının S üzerinde komütatifliği güçlü koruyan (strong commutativity preserving) dönüşümü veya kısaca SCP denir.

Önerme 1.37: R bir asal halka olsun. Eğer $ab, b \in Z$ ise bu durumda $b = 0$ veya $a \in Z$ dir.

İspat: $ab, b \in Z$ olsun. Bu durumda her $x \in R$ için

$$xab = abx = axb$$

olur. Buradan her $x \in R$ için

$$(ax - xa)b = 0 \tag{1.1}$$

elde edilir. (1.1) de x yerine xy , $y \in R$ alınırsa

$$0 = (axy - xya)b = axyb - xyab$$

$$= axyb - xayb + xayb - xyab$$

$$= (ax - xa)yb + x(ay - ya)b$$

olur. Bu ifadenin ikinci terimi (1.1) eşitliğinden sıfırdır. Böylece her $x \in R$ için

$$(ax - xa)Rb = (0) \tag{1.2}$$

olduğu görülür. R asal halka olduğu için (1.2) den

$b = 0$ veya $a \in Z$

bulunur.

2. HALKANIN İDEALİ ÜZERİNDE HOMOTÜREVLER

Halkalarda türev ve homomorfizma tanımları M. M. El Sofy Aly tarafından ele alınmış ve homotürev şeklinde yeni ve daha genel olan bir tanım verilmiştir. Bu tanımdan yola çıkarak halkadaki türev konusu ile ilgili değişmeli olma koşulları homotürevli halkalar için incelenmeye başlanmıştır. Bu bölümde halkada daha önce ele alınan bazı değişmeli olma koşulları ile yeni koşullar bir asal halkanın ideali üzerinde verilen homotürevler için incelenmiştir.

Lemma 2.1. [M. Ashraf, N. Rehman, 2002, Lemma1 (b)] Eğer R bir asal halka ise iki yanlı idealin merkezi ile R halkasının merkezi aynıdır. Ayrıca, eğer R nin merkezi olmayan bir sağ ideali varsa bu durumda R değişmeli halkadır.

Lemma 2.2. R bir asal halka, I, R nin sıfırdan farklı bir ideali ve $a, b \in R$ olsun. Eğer $aIb = (0)$ ise bu durumda $a = 0$ veya $b = 0$ dır.

İspat*:* Her $u \in I$ için $aub = 0$ olsun. Bu denklemde u yerine $r \in R$ olmak üzere ru yazılırsa her $u \in I, r \in R$ için

$arub = 0$

elde edilir. R asal halka olduğundan

$a = 0$ veya $ub = 0$

dir. İkinci durumda, her $u \in I$ için $ub = 0$ olur. Burada u yerine ur yazılırsa her $u \in I, r \in R$ için

$urb = 0$

elde edilir. Yani $IRb = (0)$ dir. R bir asal halka olduğundan $I = (0)$ veya $b = 0$ dır. I sıfırdan farklı bir ideal olduğundan $b = 0$ bulunur. Sonuç olarak $a = 0$ veya $b = 0$ elde edilir.

Teorem 2.3. R bir asal halka, I, R nin sıfırdan farklı bir ideali ve $h: R \to R$ sıfırdan farklı homotürevi olsun. Eğer $h(I) \subset Z$ ise bu durumda R değişmeli halkadır.

İspat. Hipotezden her $u \in I$ için

$h(u) \in Z$

dir. Yani, her $u \in I, r \in R$ için $[h(u), r] = 0$ elde edilir. Bu denklemde u yerine $v \in I$ için uv yazılırsa ve hipotez kullanılırsa

$0 = [h(uv), r]$

$=[h(u)h(v) + h(u)v + uh(v), r]$

$= [h(u), r]h(v) + h(u)[h(v), r] + h(u)[v, r] + [h(u), r]v + [u, r]h(v)$

$+u[h(v),r]$

dir. Burada hipotez kullanılırsa her $u,v \in I$ için

$h(u)[v,r] + [u,r]h(v) = 0$

elde edilir. r yerine u yazılırsa her $u,v \in I$ için

$$h(u)[u,v] = 0 \tag{2.1}$$

dir. Burada $h(u) \in Z$ olduğu kullanılırsa her $u,v \in I$ için

$h(u)R[v,u] = (0)$

bulunur. R bir asal halka olduğundan her $v \in I$ için

$$h(u) = 0 \text{ veya } [u,v] = 0 \tag{2.2}$$

olur. Burada $K = \{u \in I | h(u) = 0\}$ ve $L = \{u \in I | [v,u] = 0,\ \forall v \in I\}$ şeklinde iki küme tanımlansın. K ve L, I nın toplamsal altgruplarıdır. Ayrıca $I = K \cup L$ dir. Brauer trick kullanılırsa $K = I$ veya $L = I$ elde edilir.

Eğer $K = I$ ise her $u \in I$ için $h(u) = 0$ bulunur. Bu denklemde u yerine $r \in R$ olmak üzere ur yazılırsa ve bu ifade kullanlırsa her $u \in I, r \in R$ için

$0 = h(u)h(r) + uh(r) + h(u)r$

$=uh(r)$

elde edilir. Bu denklem soldan $h(r)$ ile çarpılırsa her $r \in R$ için

$h(r)Ih(r) = (0)$

olur. Burada Lemma 2.2 kullanılırsa her $r \in R$ için $h(r) = 0$ dir. Bu ise h homotürevinin sıfırdan farklı oluşu ile çelişir. Eğer $L = I$ ise her $u,v \in I$ için $[v,u] = 0$ elde edilir. Burada Lemma 2.1 kullanılırsa R bir değişmeli halkadır.

Not. R bir asal halka, $h: R \to R$ sıfırdan farklı I üzerinde sıfır-güç değerli bir homotürev olsun. Buna göre aşağıdaki özellikler sağlanır.

i) $h(0) = 0$,

ii) $z \in Z$ için $h(z) \in Z$ dir.

İspat.

i) h homotürev olduğundan toplamsal bir dönüşümdür. O halde $h(0) = 0$ dır.

ii) $z \in Z$ olduğundan her $u \in I$ için

$[u,z] = 0$

dır. h bir homotürev olduğundan (i) kullanılırsa

$0 = h(0) = h([u,z])$

$= h(uz - zu)$

$= h(u)h(z) + h(u)z + uh(z) - h(z)h(u) - h(z)u - zh(u)$

$= [h(u), h(z)] + [h(u), z] + [u, h(z)]$

$= [h(u) + u, h(z)]$

dir. h, I üzerinde sıfır-güç değerli dönüşüm olduğundan $u \in I$ için $h^n(u) = 0$ olan $n > 1$ bir tamsayı vardır. Bu denklemde u yerine $u - h(u) + h^2(u) + \cdots + (-1)^{n-1}h^{n-1}(u)$ yazılırsa ve h ın toplamsal dönüşüm olduğu kullanılırsa her $u \in I$ için

$0 = [h(u - h(u) + h^2(u) + \cdots + (-1)^{n-1}h^{n-1}(u)) + u - h(u) + h^2(u) + \cdots$
$+ (-1)^{n-1}h^{n-1}(u), h(z)]$

$= [h(u) - h^2(u) + h^3(u) + \cdots + (-1)^{n-2}h^{n-1}(u) + (-1)^{n-1}h^n(u)) + u -$
$h(u) + h^2(u) + \cdots + (-1)^{n-1}h^{n-1}(u), h(z)]$

dir. Burada $h^n(u) = 0$ olduğu kullanılırsa her $u \in I$ için

$[u, h(z)] = 0$

elde edilir. Yani her $u \in I$ için $[u, h(z)] = 0$ dir. Lemma 2.1 kullanılırsa $h(z) \in Z$ bulunur.

Teorem 2.4. R bir asal halka, I, R nin sıfırdan farklı bir ideali ve $h: R \to R$ sıfırdan farklı bir homotürevi olsun. Eğer aşağıdaki koşullardan biri sağlanırsa bu durumda R bir değişmeli halkadır.

i) $[h(I), I] = (0)$,

ii) $[h(I), I] \subset Z$,

iii) h, I üzerinde sıfır-güç değerli dönüşüm ve $h(Z) \neq (0)$ olmak üzere $[h(I), h(I)] \subset Z$.

İspat:

i) Hipotezden her $u, v \in I$ için

$[h(u), v] = 0$

olsun. Son denklemde v yerine $r \in R$ olmak üzere vr yazılırsa ve hipotez kullanılırsa

$0 = [h(u), vr] = [h(u), v]r + v[h(u), r]$

$= v[h(u), r]$

elde edilir. Bu ifade soldan $[h(u), r]$ ile çarpılırsa

$[h(u), r]v[h(u), r] = 0$

bulunur. Yani her $u \in I, r \in R$ için

$[h(u), r]I[h(u), r] = (0)$

dır. Burada Lemma 2.2 kullanılırsa her $u \in I$, $r \in R$ için

$[h(u), r] = 0$

olur. Dolayısıyla, $h(I) \subset Z$ dir. Teorem 2.3 kullanılırsa R bir değişmeli halkadır.

ii) Hipotezden her $u, v \in I$ için

$[h(u), v] \in Z$

dir. Bu ifade $r \in R$ ile komüte edilirse her $u, v \in I, r \in R$ için

$\big[[h(u), v], r\big] = 0$

elde edilir. Bu eşitlikte v yerine $h(u)v$ yazılırsa ve bu eşitlik kullanılırsa

$0 = \big[[h(u), h(u)v], r\big]$

$= \big[[h(u), h(u)]v + h(u)[h(u), v], r\big]$

$=[h(u)[h(u), v], r]$

$= [h(u), r][h(u), v] + h(u)\big[[h(u), v], r\big]$

$=[h(u), r][h(u), v]$

elde edilir. Son denklemde r yerine vr yazılırsa ve bu denklem kullanılırsa

$0=[h(u), vr][h(u), v]$

$=[h(u), v]r[h(u), v] + v[h(u), r][h(u), v]$

$= [h(u), v]r[h(u), v]$

bulunur. Yani her $u, v \in I$ için

$[h(u), v]R[h(u), v] = (0)$

dir. R bir asal halka olduğundan her $u, v \in I$ için

$[h(u), v] = 0$

olur. Teorem 2.4. (i) kullanılırsa R bir değişmeli halkadır.

iii) Hipotezden her $u, v \in I$ için

$[h(u), h(v)] \in Z$ ve $h(Z) \neq 0$

olsun. $h(Z) \neq 0$ olduğundan $h(z) \neq 0$ olacak şekilde bir $z \in Z$ vardır. Her $u, v \in I$ için

$[h(u), h(v)] \in Z$

olsun. Bu ifadede v yerine vz yazılırsa

$Z \ni [h(u), h(vz)] =$

$=[h(u), h(v)h(z) + h(v)z + vh(z)]$

$= [h(u), h(v)]h(z) + h(v)[h(u), h(z)] + [h(u), h(v)]z + h(v)[h(u), z] +$
$[h(u), v]h(z) + v[h(u), h(z)]$

elde edilir. Son ifadede hipotez, $z \in Z$, $h(z) \in Z$ ve Uyarı 1.11 kullanılırsa her $u, v \in I$ için

$[h(u), v]h(z) \in Z$

olur. R bir asal halka ve $h(z) \in Z$ olduğundan Önerme 1.37 kullanılırsa her $u, v \in I$ için

$[h(u), v] \in Z$ veya $h(z) = 0$

olur. $h(z) \neq 0$ olduğundan her $u, v \in I$ için

$[h(u), v] \in Z$ dir. Teorem 2.4. (ii) kullanılırsa R bir değişmeli halkadır.

Teorem 2.5. R bir asal halka, I, R nin sıfırdan farklı bir ideali ve $h: R \to R$ sıfırdan farklı I üzerinde sıfır-güç değerli bir homotürevi olsun. Eğer her $u, v \in I$ için $[h(u), h(v)] = [u, v]$ ise bu durumda R bir değişmeli halkadır. Yani h bir SCP homotürev ise bu durumda R bir değişmeli halkadır.

İspat. Hipotezden her $u, v \in I$ için

$[h(u), h(v)] = [u, v]$

sağlanır. Bu denklemde v yerine $w \in I$ olmak üzere vw yazılırsa

$0=[h(u), h(vw)] - [u, vw]$

$=[h(u), h(v)h(w) + h(v)w + vh(w)] - [u, vw]$

$= [h(u), h(v)]h(w) + h(v)[h(u), h(w)] + [h(u), h(v)]w + h(v)[h(u), w]$

$+[h(u), v]h(w) + v[h(u), h(w)] - [u, v]w - v[u, w]$

bulunur. Burada hipotez kullanılırsa

$[u, v]h(w) + h(v)[u, w] + h(v)[h(u), w] + [h(u), v]h(w) = 0$

elde edilir. Böylelikle

$[u + h(u), v]h(w) + h(v)[h(u) + u, w] = 0$

olur. h bir I üzerinde sıfır-güç değerli dönüşüm olduğundan $u \in I$ için $h^n(u) = 0$ olan $n > 1$ bir tamsayı vardır. Yukarıdaki eşitlikte u yerine $u - h(u) + h^2(u) + \cdots + (-1)^{n-1}h^{n-1}(u)$ yazılırsa ve h bir toplamsal dönüşüm olduğu kullanılırsa

$0=\big[u - h(u) + h^2(u) + \cdots + (-1)^{n-1}h^{n-1}(u) + h\big(u - h(u) + h^2(u) + \cdots +$

$(-1)^{n-1}h^{n-1}(u)\big), v\big]h(w) + h(v)\big[h\big(u - h(u) + h^2(u) + \cdots +$

$(-1)^{n-1}h^{n-1}(u)\big) + u - h(u) + h^2(u) + \cdots + (-1)^{n-1}h^{n-1}(u), w\big]$

$=[u - h(u) + h^2(u) + \cdots + (-1)^{n-1}h^{n-1}(u) + h(u) - h^2(u) + h^3(u) + \cdots +$

$(-1)^{n-2}h^{n-1}(u) + (-1)^{n-1}h^n(\mathrm{u}), v]h(w) + h(v)[h(u) - h^2(u) + h^3(u) + \cdots +$

$(-1)^{n-2}h^{n-1}(u)+(-1)^{n-1}h^{n}(\mathrm{u})+u-h(u)+h^{2}(u)+\cdots+$
$(-1)^{n-1}h^{n-1}(u),w]$

dir. Bu ifade düzenlenir ve $h^{n}(u)=0$ kullanılırsa

$[u,v]h(w)+h(v)[u,w]=0$

elde edilir. Son denklemde w yerine u yazılırsa her $u,v\in I$ için

$[u,v]h(u)=0$

bulunur. Bu eşitlikte v yerine $r\in R$ olmak üzere vr yazılırsa ve bu denklem kullanılırsa

$[u,v]rh(u)=0$

elde edilir. Yani her $u,v\in I$ için

$[u,v]Rh(u)=(0)$

dir. R bir asal halka olduğundan her $v\in I$ için

$h(u)=0$ veya $[u,v]=0$

dir. Bu ifade Teorem 2.3.'ün ispatındaki (2.2) ile aynıdır. Benzer işlemler yapılırsa R nin bir değişmeli halka olduğu elde edilir.

Teorem 2.6. R bir asal halka, I, R nin sıfırdan farklı bir ideali ve $h:R\longrightarrow R$ bir homotürevi olsun. Aşağıdaki koşullardan biri sağlanıyor ise bu durumda R bir değişmeli halkadır.

i) $h(I)\circ I=(0)$,

ii) $h(I)\circ I\subset Z$,

iii) h, I üzerinde sıfır-güç değerli dönüşüm ve $h(Z)\neq 0$ olmak üzere $h(I)\circ h(I)\subset Z$.

İspat.

i) Hipotezden, her $u,v\in I$ için

$h(u)\circ v=0$

dır. Bu denklemde v yerine $w\in I$ olmak üzere vw yazılırsa ve hipotez kullanılırsa her $u,v,w\in I$ için

$0=h(u)\circ vw$

$=(h(u)\circ v)w+v[w,h(u)]$

$=v[w,h(u)]$

elde edilir. Denklem soldan $[w,h(u)]$ ile çarpılırsa her $u,w\in I$ için

$[w,h(u)]I[w,h(u)]=0$

bulunur. Lemma 2.2. kullanılırsa her $u, w \in I$ için

$[w, h(u)] = 0$

elde edilir. Teorem 2.4. (i) kullanılırsa R bir değişmeli halkadır.

ii) Hipotezden her $u, v \in I$ için

$h(u) \circ v \in Z$

dir. Bu ifadede v yerine $w \in I$ olmak üzere vw yazılırsa

$Z \ni h(u) \circ v\mathrm{w} = (h(u) \circ v)w + v[w, h(u)]$

elde edilir. Bu ifade $r \in R$ ile komüte edilirse her $u, v, w \in I$ ve $r \in R$ için

$[(h(u) \circ v)w + v[w, h(u)], r] = 0$

olur. Burada komütatör çarpım özellikleri kullanılırsa

$[(h(u) \circ v), r]w + (h(u) \circ v)[w, r] + v\big[[w, h(u)], r\big] + [v, r][w, h(u)] = 0$

bulunur. Yukarıdaki eşitlikte hipotez kullanılırsa

$(h(u) \circ v)[w, r] + v\big[[w, h(u)], r\big] + [v, r][w, h(u)] = 0$

elde edilir. Son eşitlikte r yerine w yazılırsa

$v\big[[w, h(u)], w\big] + [v, w][w, h(u)] = 0$

olur. Son denklemde v yerine rv yazılırsa ve bu denklem kullanılırsa

$0 = rv\big[[w, h(u)], w\big] + [rv, w][w, h(u)]$

$= rv\big[[w, h(u)], w\big] + r[v, w][w, h(u)] + [r, w]v[w, h(u)]$

$= [r, w]v[w, h(u)]$

dir. Yani her $u, v, w \in I$ ve $r \in R$ için

$[r, w]v[w, h(u)] = 0$

elde edilir. Burada r yerine $h(u)$ yazılırsa

$[w, h(u)]v[w, h(u)] = 0$

olur. Yani her $u, w \in I$ için

$[w, h(u)]I[w, h(u)] = (0)$

dir. Lemma 2.2. kullanılırsa her $u, w \in I$ için $[w, h(u)] = 0$ elde edilir. Son olarak Teorem 2.4 (i) kullanılırsa R bir değişmeli halkadır.

iii) Hipotezden her $u, v \in I$ için

$h(u) \circ h(v) \in Z$

dir. $h(Z) \neq (0)$ olduğundan $h(z) \neq 0$ olacak şekilde bir $z \in Z$ vardır. Bu ifadede v yerine vz yazılırsa

$Z \ni h(u) \circ h(vz) = h(u) \circ \big(h(v)h(z) + h(v)z + vh(z)\big)$

$=\big(h(u)\circ h(v)\big)h(z)+h(v)[h(z),h(u)]+\big(h(u)\circ h(v)\big)z+h(v)[z,h(u)]+$
$(h(u)\circ v)h(z)+v[h(z),h(u)]$

olur. Burada $h(z)\in Z, z\in Z$, hipotez ve Uyarı 1.11 kullanılırsa

$(h(u)\circ v)h(z)\in Z$

elde edilir. $h(z)\in Z$ olduğundan Önerme 1.37 kullanılırsa

$(h(u)\circ v)\in Z$ veya $h(z)=0$

olur. $h(z)\neq 0$ olduğundan her $u,v\in I$ için

$h(u)\circ v\in Z$

elde edilir. Burada Teorem 2.6. (ii) kullanılırsa R bir değişmeli halkadır.

Teorem 2.7. R bir asal halka, I, R nin sıfırdan farklı bir ideali ve $h: R\to R$ sıfırdan farklı I üzerinde sıfır-güç değerli bir homotürevi ve $h(Z)\neq(0)$ olsun. Eğer her $u,v\in I$ için $h(u)\circ h(v)=u\circ v$ ise bu durumda R bir değişmeli halkadır.

İspat. Hipotezden her $u,v\in I$ için

$h(u)\circ h(v)=u\circ v$

dir. $h(Z)\neq(0)$ olduğundan $h(z)\neq 0$ olacak şekilde bir $z\in Z$ bulunur. Son denklemde v yerine vz yazılırsa

$0=h(u)\circ h(vz)-u\circ vz$

$=h(u)\circ\big(h(v)h(z)+h(v)z+vh(z)\big)-(u\circ v)z-v[z,u].$

$=\big(h(u)\circ h(v)\big)h(z)+h(v)[h(z),h(u)]+\big(h(u)\circ h(v)\big)z+h(v)[z,h(u)]+$
$(h(u)\circ v)h(z)+v[h(z),h(u)]-(u\circ v)z-v[z,u].$

elde edilir. Burada $h(z)\in Z,\ z\in Z,$ hipotez ve Uyarı 1.11 kullanılırsa

$(u\circ v)h(z)+(h(u)\circ v)h(z)=0$

olur. Buradan

$\Big(\big(u+h(u)\big)\circ v\Big)h(z)=0$

elde edilir. h dönüşümü sıfır-güç değerli olduğundan $u\in I$ için $h^n(u)=0$ olan $n>1$ tam sayısı vardır. Bu denklemde u yerine $u-h(u)+h^2(u)+\cdots+(-1)^{n-1}h^{n-1}(u)$ yazılırsa

$0=((u-h(u)+h^2(u)+\cdots+(-1)^{n-1}h^{n-1}(u)+h(u-h(u)+h^2(u)+\cdots$
$+(-1)^{n-1}h^{n-1}(u))\ \circ v)h(z)$

$=\Big(\big(u-h(u)+h^2(u)+\cdots+(-1)^{n-1}h^{n-1}(u)+h(u)-h^2(u)+h^3(u)+\cdots+$
$(-1)^{n-2}h^{n-1}(u)+(-1)^{n-1}h^n(\mathrm{u})\big)\circ v\Big)h(z)$

dir. Bu eşitlik düzenlenir ve $h^n(u) = 0$ olduğu kullanılırsa her $u, v \in I$ için

$(u \circ v)h(z) = 0$

elde edilir. Buradan $h(z) \in Z$ olduğundan her $u, v \in I$ için

$(u \circ v)Rh(z) = (0)$

bulunur. R bir asal halka olduğundan her $u, v \in I$ için

$h(z) = 0$ veya $u \circ v = 0$ (2.3)

olur. $h(z) \neq 0$ olduğundan her $u, v \in I$ için

$u \circ v = 0$

olur. Burada v yerine $r \in R$ olmak vr yazılırsa

$0 = u \circ vr = (u \circ v)r - v[u, r]$

elde edilir. $u \circ v = 0$ olduğu kullanılırsa

$v[u, r] = 0$

olur. Denklem soldan $[u, r]$ ile çarpılırsa

$[u, r]I[u, r] = (0)$

elde edilir. Lemma 2.2 kullanılırsa her $u \in I, r \in R$ için

$[u, r] = 0$

bulunur. Lemma 2.1 kullanılırsa R bir değişmeli halkadır.

Teorem 2.8. R bir asal halka ve I, R nin sıfırdan farklı bir ideali ve $h: R \longrightarrow R$ tanımlı I üzerinde sıfır-güç değerli homotürevi olsun. Eğer aşağıdaki koşullardan biri sağlanıyor ise bu durumda R bir değişmeli halkadır.

i) Her $u, v \in I$ için $h(u)h(v) = uv$,

ii) Her $u, v \in I$ için $h(u)h(v) = vu$.

İspat. i) Hipotezden her $u, v \in I$ için

$h(u)h(v) = uv$

olsun. Bu denklemde v yerine $w \in I$ olmak üzere vw yazılırsa

0= $h(u)h(vw) - uvw$

$= h(u)h(v)h(w) + h(u)h(v)w + h(u)vh(w) - uvw$

elde edilir. Hipotez kullanılırsa

$uvh(w) + h(u)vh(w) = 0$ (2.4)

bulunur. (2.4) eşitliğinde u yerine $r \in R$ olmak üzere ru yazılırsa

$0 = ruvh(w) + h(ru)vh(w)$

$= ruvh(w) + h(r)h(u)vh(w) + rh(u)vh(w) + h(r)uvh(w)$

bulunur. (2.4) eşitliği kullanılırsa

$h(r)h(u)vh(w) + h(r)uvh(w) = 0$

elde edilir. Böylece

$h(r)(h(u) + u)vh(w) = 0$

olur. h, I üzerinde sıfır-güç değerli dönüşüm olduğundan her $u \in I$ için $h^n(u) = 0$ olan $n > 1$ bir tamsayı vardır. Bu denklemde u yerine $u - h(u) + h^2(u) + \cdots + (-1)^{n-1}h^{n-1}(u)$ yazılırsa

$0 = h(r)(h(u - h(u) + h^2(u) + \cdots + (-1)^{n-1}h^{n-1}(u)) + u - h(u) + h^2(u) + \cdots$
$+(-1)^{n-1}h^{n-1}(u))\, vh(w)$

$= h(r)(\, h(u) - h^2(u) + h^3(u) + \cdots + (-1)^{n-2}h^{n-1}(u) + (-1)^{n-1}h^n(\mathrm{u}) + u -$
$h(u) + h^2(u) + \cdots + (-1)^{n-1}h^{n-1}(u))vh(w)$

dir. Bu ifade düzenlenirse her $u, v, w \in I$ ve $r \in R$ için

$h(r)uvh(w) = 0$

elde edilir. Denklemde r yerine w yazılırsa

$h(w)uvh(w) = 0$

olur. Bu eşitlik sağdan u ile çarpılırsa

$h(w)uvh(w)u = 0$

dir. Dolayısıyla her $u, w \in I$ için

$h(w)uIh(w)u = (0)$

olur. Lemma 2.2. kullanılırsa her $u, w \in I$ için

$h(w)u = 0$

olur. Bu ifade sağdan $h(w)$ ile çarpılırsa her $u, w \in I$ için

$h(w)uh(w) = 0$

elde edilir. Yani her $w \in I$ için

$h(w)Ih(w) = (0)$

olur. Tekrar Lemma 2.2. kullanılırsa her $w \in I$ için

$h(w) = 0$

olur. Teorem 2.3. kullanılırsa R bir değişmeli halkadır.

ii) Hipotezden her $u, v \in I$ için

$h(u)h(v) = vu$

dur. Bu eşitlikte v yerine $w \in I$ olmak üzere vw yazılırsa

$0 = h(u)h(vw) - vwu$

$=h(u)h(v)h(w)+h(u)h(v)w+h(u)vh(w)-vwu$

$=h(u)h(v)h(w)+h(u)h(v)w+h(u)vh(w)-vuw+vuw-vwu$

elde edilir. Hipotezden

$vuh(w)+h(u)vh(w)=-vuw+vwu$

olur. Buradan her $u,v,w\in I$ için

$$h(u)vh(w)=-vuw+vwu-vuh(w) \tag{2.5}$$

elde edilir. Yukarıda v yerine $rv, r\in R$ yazılırsa

$h(u)rvh(w)=-rvuw+rvwu-rvuh(w)$

bulunur. Bu eşitlikte (2.5) kullanılırsa her $u,v,w\in I, r\in R$ için

$h(u)rvh(w)=rh(u)vh(w)$

elde edilir. Son eşitlikte r yerine $h(w)$ yazılırsa

$h(u)h(w)vh(w)=h(w)h(u)vh(w)$

bulunur. Hipotez kullanılırsa her $u,v,w\in I$ için

$wuvh(w)=uwvh(w)$

olur. Buradan her $u,v,w\in I$ için

$[u,w]vh(w)=0$

elde edilir. Yani her $u,w\in I$ için

$[u,w]Ih(w)=(0)$

elde edilir. Lemma 2.2. kullanılırsa her $u,w\in I$ için

$[u,w]=0$ veya $h(w)=0$

olur. Bu ifade Teorem 2.3 deki (2.2) eşitliği ile aynıdır. Benzer teknikler kullanılarak ispat tamamlanır.

Teorem 2.9. R bir asal halka ve I, R nin sıfırdan farklı bir ideali ve $h: R\longrightarrow R$ bir homotürevi olsun. Eğer aşağıdaki koşullardan biri sağlanıyorsa bu durumda R bir değişmeli halkadır.

i) $h(I\circ I)=(0)$,

ii) h, I üzerinde sıfır-güç değerli dönüşüm ve $h(Z)\neq(0)$ olmak üzere $h(I\circ I)\subset Z$.

İspat.

i) Hipotezden her $u,v\in I$ için

$h(u\circ v)=0$

dır. Yukarıda v yerine vu yazılırsa

$0=h(u\circ vu)$

$=h\big((u\circ v)u+v[u,u]\big)$

$= h(u \circ v)h(u) + h(u \circ v)u + (u \circ v)h(u)$

elde edilir. Hipotez kullanılırsa her $u, v \in I$ için

$(u \circ v)h(u) = 0$ (2.6)

olur. (2.6) eşitliğinde v yerine $w \in I$ olmak üzere wv yazılırsa ve (2.6) kullanılırsa her $u, v, w \in I$ için

$0 = (u \circ wv)h(u)$

$=w(u \circ v)h(u)+[u, w]vh(u)$

$= [u, w]vh(u)$

elde edilir. Buradan her $u, w \in I$ için

$[u, w]Ih(u) = (0)$

olur. Lemma 2.2. kullanılırsa her $u, w \in I$ için

$[u, w] = 0$ veya $h(u) = 0$

bulunur. Burada Teorem 2.3. ispatındaki (2.2) eşitliğinden sonraki benzer teknikler kullanılırsa R bir değişmeli halkadır.

ii) Hipotezden her $u, v \in I$ için

$h(u \circ v) \in Z$

dır. $h(Z) \neq (0)$ olduğundan $h(z) \neq (0)$ olacak şekilde bir $z \in Z$ vardır. Yukarıdaki ifadede v yerine vz yazılırsa

$Z \ni h(u \circ vz) = h((u \circ v)z + v[z, u])$

$= h(u \circ v)h(z) + h(u \circ v)z + (u \circ v)h(z)$

bulunur. $z \in Z$, $h(z) \in Z$, hipotez ve Uyarı 1.11 kullanılırsa

$(u \circ v)h(z) \in Z$

bulunur. $h(z) \in Z$ olduğundan Önerme 1.37 kullanılırsa

$(u \circ v) \in Z$ veya $h(z) = 0$

olur. Buradan $h(z) \neq 0$ olduğundan her $u, v \in I$ için

$u \circ v \in Z$

olur. Yukarıdaki ifadede v yerine vu yazılırsa her $u, v \in I$ için

$u \circ vu = (u \circ v)u + v[u, u] = (u \circ v)u \in Z$

elde edilir. Bu ifade $r \in R$ ile komüte edilirse

$[(u \circ v)u, r] = 0$

olur. Bu ifade düzenlenir ve $u \circ v \in Z$ olduğu kullanılırsa her $u, v \in I, r \in R$ için

$0 = [(u \circ v)u, r] = [(u \circ v), r]u + (u \circ v)[u, r]$

$= (u \circ v)[u, r]$

olur. Yukarıdaki eşitlikte v yerine rv yazılır ve bu eşitlik kullanılırsa

$0 = (u \circ rv)[u, r] = r(u \circ v)[u, r] + [u, r]v[u, r]$

$= [u, r]v[u, r]$

elde edilir. Buradan her $u \in I, r \in R$ için

$[u, r]I[u, r] = (0)$

olur. Lemma 2.2. kullanılırsa her $u \in I, r \in R$ için

$[u, r] = 0$

olur. Yani $I \subset Z$ elde dilir. Sonuç olarak Lemma 2.1. kullanılırsa R bir değişmeli halkadır.

Teorem 2.10. R bir halka ve I, R nin sıfırdan farklı bir ideali, $h: R \longrightarrow R$ sıfırdan farklı I üzerinde sıfır-güç değerli bir homotürevi olsun. Eğer aşağıdaki koşullardan biri sağlanıyor ise bu durumda R bir değişmeli halkadır.

i) Her $u, v \in I$ için $h(u)h(v) = [u, v]$,

ii) Her $u, v \in I$ için $h(u)h(v) = u \circ v$.

İspat.

i) Hipotezden her $u, v \in I$ $için$

$h(u)h(v) = [u, v]$

dır. Yukarıdaki eşitlikte u yerine $w \in I$ olmak üzere uw yazılırsa

$0 = h(uw)h(v) - [uw, v]$

$= h(u)h(w)h(v) + h(u)wh(v) + uh(w)h(v) - [u, v]w - u[w, v]$

elde edilir. Burada hipotez kullanılırsa

$[u, w]h(v) + h(u)wh(v) = [u, v]w$

bulunur. Son denklemde v yerine u yazılırsa

$[u, w]h(u) + h(u)wh(u) = 0$

elde edilir. Burada hipotez kullanılırsa her $u, w \in I$ için

$$h(u)h(w)h(u) + h(u)wh(u) = 0 \qquad (2.7)$$

olur. Böylece

$h(u)(h(w) + w)h(u) = 0$

bulunur. h, I üzerinde sıfır-güç değerli homotürev olduğundan her $w \in I$ için $h^n(w) = 0$ olan $n > 1$ bir tamsayı vardır. Bu denklemde w yerine w$-h(w) + h^2(w) + \cdots + (-1)^{n-1}h^{n-1}(w)$ yazılırsa

$0 = h(u)(h(\mathrm{w} - h(w) + h^2(w) + \cdots + (-1)^{n-1}h^{n-1}(w)) + \mathrm{w} - h(w) + h^2(w)$
$+ \cdots + (-1)^{n-1}h^{n-1}(w))h(u)$
$=h(u)\left(h(\mathrm{w}) - h^2(w) + h^3(w) + \cdots + (-1)^{n-2}h^{n-1}(w) + (-1)^{n-1}h^n(w)\right) + \mathrm{w} -$
$h(w) + h^2(w) + \cdots + (-1)^{n-1}h^{n-1}(w)\Big)h(u)$
elde edilir. Bu ifade düzenlenir ve $h^n(w) = 0$ olduğu kullanılırsa her $u, w \in I$ için
$h(u)wh(u) = 0$
elde edilir. O halde her $u \in I$ için
$h(u)Ih(u) = (0)$
dır. Burada Lemma 2.2. kullanılırsa her $u \in I$ için
$h(u) = 0$
elde edilir. Teorem 2.3. kullanılırsa R bir değişmeli halkadır.
ii) Hipotezden her $u, v \in I$ için
$h(u)h(v) = u \circ v$
olur. Bu denklemde u yerine $w \in I$ olmak üzere uw yazılırsa
$0 = h(uw)h(v) - uw \circ v$
$=h(u)h(w)h(v) + h(u)wh(v) + uh(w)h(v) - u(w \circ v) + [u, v]w.$
elde edilir. Burada hipotez kullanılarak
$h(u)h(w)h(v) + h(u)wh(v) = -[u, v]w$
elde edilir. Son denklemde v yerine u yazılırsa
$h(u)h(w)h(u) + h(u)wh(u) = 0$
elde edilir. Bu denklem Teorem 2.10 daki (2.7) eşitliği ile aynıdır. Benzer işlemler tekrarlanırsa R bir değişmeli halkadır sonucu bulunur.

Teorem 2.11. R bir asal halka ve I, R nin sıfırdan farklı bir ideali, $h: R \longrightarrow R$ sıfırdan farklı I üzerinde sıfır-güç değerli homotürevi olsun. Eğer aşağıdaki koşullardan biri sağlanıyor ise bu durumda R bir değişmeli halkadır.

i) Her $u, v \in I$ için $h([u, v]) = [h(u), v]$,

ii) Her $u, v \in I$ için $h(u \circ v) = h(u) \circ v$.

İspat.

i) Hipotezden her $u, v \in I$ için
$h([u, v]) = [h(u), v]$
olur. Bu ifade düzenlenirse her $u, v \in I$ için
$[h(u), h(v)] + [h(u), v] + [u, h(v)] = [h(u), v]$

elde edilir. Buradan her $u, v \in I$ için

$[h(u), h(v)] + [u, h(v)] = 0$

bulunur. Dolayısıyla her $u, v \in I$ için

$[h(u) + u, h(v)] = 0$

olur. h, I üzerinde sıfır-güç değerli bir homotürev olduğundan her $u \in I$ için, $h^n(u) = 0$ olan $n > 1$ bir tamsayı vardır. Bu denklemde u yerine $u - h(u) + h^2(u) + \cdots + (-1)^{n-1}h^{n-1}(u)$ yazılırsa her $u, v \in I$ için

0=[$h\big(u - h(u) + h^2(u) + \cdots + (-1)^{n-1}h^{n-1}(u)\big) + u - h(u) + h^2(u) + \cdots + (-1)^{n-1}h^{n-1}(u), h(v)]$

=[$h(u) - h^2(u) + \cdots + (-1)^{n-2}h^{n-1}(u) + (-1)^{n-1}h^n(u) + u - h(u) + h^2(u) + \cdots + (-1)^{n-1}h^{n-1}(u), h(v)]$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse her $u, v \in I$ için

$[u, h(v)] = 0$

olur. Burada Teorem 2.4 (i) kullanılırsa R bir değişmeli halkadır.

ii) Hipotezden her $u, v \in I$ için

$h(u \circ v) = h(u) \circ v$

olur. Bu ifade düzenlenirse

$h(u) \circ h(v) + h(u) \circ v + u \circ h(v) = h(u) \circ v$

olur. Yani

$h(u) \circ h(v) + u \circ h(v) = 0$

elde edilir. Buradan her $u, v \in I$ için

$(h(u) + u) \circ h(v) = 0$

olur. h, I üzerinde sıfır-güç değerli bir homotürev olduğundan $h^n(u) = 0$, her $u \in I$, $n > 1$ olur. Bu denklemde u yerine $u - h(u) + h^2(u) + \cdots + (-1)^{n-1}h^{n-1}(u)$ yazılırsa her $u, v \in I$ için

0=($h\big(u - h(u) + h^2(u) + \cdots + (-1)^{n-1}h^{n-1}(u)\big) + u - h(u) + h^2(u) + \cdots + (-1)^{n-1}h^{n-1}(u)) \circ h(v)$

=($h(u) - h^2(u) + \cdots + (-1)^{n-2}h^{n-1}(u) + (-1)^{n-1}h^n(u) + u - h(u) + h^2(u) + \cdots + (-1)^{n-1}h^{n-1}(u)) \circ h(v)$

bulunur. Bu ifade düzenlenirse her $u, v \in I$ için

$u \circ h(v) = 0.$

elde edilir. Teorem 2.6. (i) kullanılırsa R bir değişmeli halkadır.

KAYNAKLAR

Alharfie, E. F. Muthana, N. M. (2018) The commutativity of prime rings with homoderivations, *Int. J. of Ad. and Appl. Sci.,* 5(5), 79–81.

Alharfie, E. F. Muthana, N. M. (2019). On homoderivations and commutatiyity of rings. *Bulletin of The International Mathematcal Virtual Institute*(9), 301-304.

Ali, A. Yasen, M., Anwar, M. (2006). Strong Commutatiyity Preserving Mappings on Semiprime Rings. *Bulletin Korean Mathematical Society, 4*(43), 711-713.

Ashraf, M., Ali, A., Ali, S. (2007). Some commutativity theorems for rings with generazlized derivations. *Southeast Asian Bull. Math.*(31), 415-421.

Ashraf, M., Rehman, N. (2002) On commutativity of rings with derivations, *Results Math.* 42(1-2): 3-8.

Bell H.E., Daif, M.N. (1981). On commutativity and strong commutativity-preserving mappings. *Canad, Math. Bull.*(37), 259-267.

Bergen, J., Herstein, I. N., Kerr, J. W. (1981). Lie ideals and derivation of rime rings. *J. f Algebra*(71), 259-267.

Bresar, M. (2003). Commuting Traces of Biadditive Mappings. *Commuting Preserving Mappings and Lie Mappings, Transactions of the American Mathematical Society, 2*(335), 525--546.

Deng, Q., Ashraf, M. (1996) On strong commutativity preserving mappings, *Results in Mathematics*, 30, 259-263.

El Sofy Aly, M. M. (2000). Rings with Some Kinds of Mappings. *Master's Thesis, Cairo University, Branch of Fayoum, Cairo, Egypt*.

Gölbaşı, Ö. , Koç, E. (2010). On -Lie Ideals with Generalized Derivation. *Bulletin of the Korean Mathematical Society, 6*(47), 121-1129.

Herstein, I. N. (1978). A Note on Derivations. *Canadian Mathematical Bulletin, 3*(21), 369-370.

Koç, E., Gölbaşı, Ö. (2018). Some Results on Ideals of Semiprime Rings with Multiplicative Generalized Derivations. *Communication in Algebra*, 1-9.

Koç, E. (2013) Some Results in semiprime rings with derivation, *Commun.Fac.Sci.Univ.Ank.Series A1*, 62(1), 11-20.

Ma, J., Xu, X. W.. (2008). Strong Commutativity-Preserving Generalized Derivations on Semiprime Rings. *Acta Mathematica Sinica, 11*(24), 1835--1842.

Melaibari, A., Muthana, N., Al-Kenani, A. (2016). Homoderivations on Rings. *Gen. Math. Notes , 1*(35), 1-8.

Rehman, N., Rahman, M. M., Abbasi, A. (2019). Homoderivations on ideals of prime and semiprime rings. *The Aligarh Bulletin of Mathematics, 1-2*(38), 77--87.

Samman, M. S. (2005). On Strong Commutativity-Preserving Maps. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*(6), 917--923.