

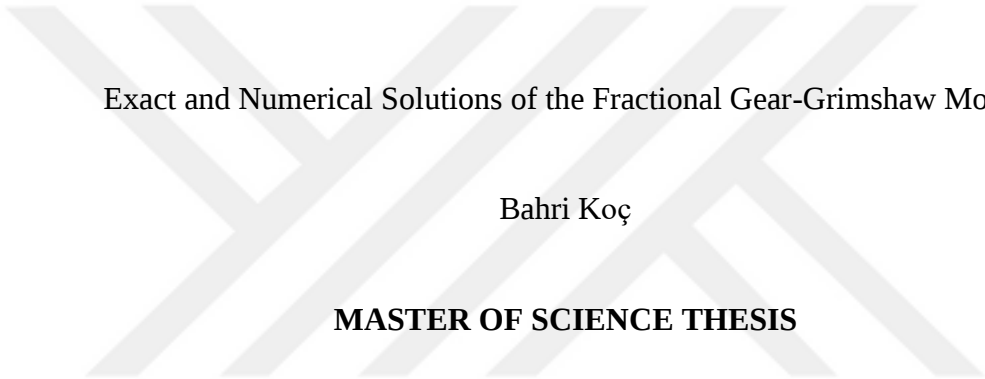
Kesirli Gear-Grimshaw Modelinin Kesin ve Nümerik Çözümleri

Bahri Koç

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı

Mayıs 2023



Exact and Numerical Solutions of the Fractional Gear-Grimshaw Model

Bahri Koç

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematics and Computer Sciences

May 2023

Kesirli Gear-Grimshaw Modelinin Kesin ve Nümerik Çözümleri

Bahri Koç

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Doç. Dr. Sait San

Mayıs 2023

ONAY

Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Bahri Koç'un YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı “Kesirli Gear-Grimshaw Modelinin Kesin ve Numerik Çözümleri” başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek oy birliği ile kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Sait San

İkinci Danışman : --

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Doç. Dr. Ömer ÜNSAL

Üye : Doç. Dr. Sait SAN

Üye : Doç. Dr. Mustafa SALTAN

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun tarih ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Hürriyet ERŞAHAN

Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Doç. Dr. Sait San danışmanlığında hazırlamış olduğum “Kesirli Gear-Grimshaw Modelinin Kesin ve Numerik Çözümleri” başlıklı YÜKSEK LİSANS tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 16/05/2023

Bahri Koç

İmza

ÖZET

Kesirli diferansiyel denklemler yani kesirli mertebeden türev içeren diferansiyel denklemler mühendislik, fizik, biyoloji gibi gerçek dünya problemlerini modelleme de olağanüstü yetenekleri nedeniyle bilim dünyasının ilgi odağı olmuştur. Şimdiye kadar kesirli türevin birçok tanımı yapılmıştır. Bunlardan bazıları şunlardır: Riemann-Liouville, Caputo, modified Riemann-Liouville, Jumarie, Hadamard, Atangana–Baleanu, Caputo–Fabrizio, Riesz kesirli operatorler.

Bu tez çalışmasında KdV denklem ailesinden olan zaman kesirsel türevli Gear-Grimshaw denklem sistemi ele alınmıştır. Bu denklem ile okyanus ve nehirlerdeki iki katmanlı sığ su dalgalarının dinamikleri modellenmiştir. Ayrıca parametrelere verilen özel değerlerle birçok sığ su dalgası modelini kapsar.

Kesirsel dönüşüm kullanılarak adi diferansiyel denkleme indirgenen Kesirsel GG denkleminin Sine-Gordon açılım yöntemi ile kesin çözümleri hiperbolik fonksiyon cinsinden elde edilmiştir. Bulunan çözümlerin bir kısmının 3-boyutlu ve düzey grafikleri çizilmiştir. Ayrıca sayısal çözüm yöntemlerinden kalanlı kuvvet serileri yöntemiyle denklemin yaklaşık çözümleri α nın üç farklı değeri için elde edilmiştir. Bulunan kesin çözümler ile yaklaşık çözümlerin farklarının mutlak değerleri de bir tablo olarak verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hareketli Dalga Çözümleri, Kesirli Türevli Denklemler, Kalanlı Kuvvet Serileri Yöntemi, Gear-Grimshaw Denklemi

SUMMARY

Fractional differential equations, i.e. differential equations containing fractional derivatives, have been the focus of attention of the scientific world due to their extraordinary abilities in modeling real world problems such as engineering, physics and biology. Many definitions of the fractional derivative have been made so far, some of them are: Riemann-Liouville, Caputo, modified Riemann-Liouville, Jumarie, Hadamard, Atangana-Baleanu, Caputo-Fabrizio, Riesz fractional operators.

In this thesis, the Gear-Grimshaw equation system with time fractional derivatives, which is from the family of KdV equations, is discussed. And with this equation, the dynamics of two - layer shallow water waves in oceans and rivers are modeled. Also covers many shallow water wave models with special values taken to parameters.

The exact solutions of the fractional GG equation, which was reduced to the ordinary differential equation by using the fractional transformation, were obtained in terms of hyperbolic functions by using the Sine-Gordon expansion method. 3D and contour graphs of some of the solutions found are drawn. In addition, approximate solutions of the equation were obtained for three different values of α by using the residual power series method, which is one of the numerical solution methods. The absolute values of the difference between the exact solutions and the approximate solutions are given as a table.

Keywords: Travelling Wave Solutions, Fractional Differential Equations, Residual Power Series Method, Gear-Grimshaw Equation

TEŞEKKÜR

Sayın Danışmanım,

Bu tez çalışması benim için büyük bir deneyim oldu ve bu başarıda sizin katkınız büyük oldu. Her zaman benimle açık bir iletişim kurarak, fikirlerimi dinleyip yorumlarınızı paylaştınız ve tezimin başarılı bir şekilde tamamlanmasına katkıda bulundunuz. Eksiklerimi ve hatalarımı göstererek, kusursuz bir çalışma sunmama yardımcı oldunuz. Bu desteğiniz sayesinde, tezimde kaliteli bir araştırma yapabilme fırsatı buldum.

Son olarak, bana olan inancınız ve desteğiniz için size minnettarım. Bu tez çalışmasını tamamlama sürecinde her zaman benim yanımda olduğunuz için teşekkür ederim.

Saygılarımla,

Bahri Koç

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	vi
SUMMARY	vii
TEŞEKKÜR	viii
İÇİNDEKİLER	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ	x
ÇİZELGELER DİZİNİ	xi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xii
1.GİRİŞ VE AMAÇ	1
2.LİTERATÜR ARAŞTIRMASI	3
3.TEMEL KAVRAMLAR	6
3.1.Kısmi Diferansiyel Denklemler	6
3.1.1.Denklemnin Mertebesi	6
3.1.2.Doğrusal ve Doğrusal Olmayan Denklemler	6
3.1.3.Bazı Lineer Kısmi Diferansiyel Denklemler	7
3.1.4.Homojen ve Homojen Olmayan KDD'ler	7
3.1.5.Solitonlar ve Kompaktonlar	8
3.1.6.Homojen Dengelenme Prensibi	9
3.1.7. Soliter Dalgalar Teorisi	9
3.2.Hareketli Dalga Çözümleri Türleri	10
3.2.1.Soliter Dalgalar ve Soliton Çözümler.....	10
3.2.2.Periyodik Çözümler.....	10
3.2.3.Kıvrımlı (Kink) Dalgalar.....	11
3.2.4.Doruklar (Peakons).....	11
3.2.5.Kompakton Çözümler	12
3.2.6.Kesirsel Türev	13
4.MATERYAL VE YÖNTEM.....	14
4.1.Sine-Gordon Açılım Metodu.....	14
4.2.Kalanlı (Residual) Kuvvet Serileri Yöntemi.....	22
5.BULGULAR VE TARTIŞMA.....	31
6.SONUÇ VE ÖNERİLER.....	32
KAYNAKLAR DİZİNİ	33

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil</u>	Sayfa
3.1. $\text{sech}^2(x-t)$ soliton çözümün grafiği	10
3.2. $\cos(x-t)$ periyodik çözümün grafiği	10
3.3. $1-\tanh(x-t)$ kıvrımlı dalga çözümün grafiği	11
3.4. $e^{-(x-t)^{\frac{1}{6}}}$ doruk çözümünün grafiği.....	12
3.5. $\cos^{1/2}(x-ct)$ kompakt ve soliton grafiğinin çözümü	12
4.1. 4.19 denleminin 3D ve yüzey grafikleri	18
4.2. 4.20 denleminin 3D ve yüzey grafikleri	19
4.3. 4.21 denleminin 3D ve yüzey grafikleri	19
4.4. 4.22 denleminin 3D ve yüzey grafikleri	20
4.5. 4.23 denleminin 3D ve yüzey grafikleri	21
4.6. 4.24 denleminin 3D ve yüzey grafikleri	21
4.7. 4.25 denleminin 3D ve yüzey grafikleri	22
4.8. 4.26 denleminin 3D ve yüzey grafikleri	22

ÇİZELGELER DİZİNİ

<u>Çizelge</u>	<u>Sayfa</u>
5.1. $\alpha=0.75$ değeri için $u(x,t)$ denklemin mutlak hataları.....	30
5.2. $\alpha=0.85$ değeri için $u(x,t)$ denklemin mutlak hataları.....	30
5.3. $\alpha=1$ değeri için $u(x,t)$ denklemin mutlak hataları.....	30
5.4. $\alpha=0.75$ değeri için $v(x,t)$ denklemin mutlak hataları.....	30
5.5. $\alpha=0.85$ değeri için $v(x,t)$ denklemin mutlak hataları.....	30
5.6. $\alpha=1$ değeri için $v(x,t)$ denklemin mutlak hataları.....	30

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

ξ	Xsi
γ	Gamma
α	Alfa
β	Beta

Kısaltmalar

mKdV	Modifiye Kadomtsev- Petviashvili
KdV	Korteweg de Vries
GG	Gear-Grimshaw
ADD	Adi Diferansiyel Denklem
KDD	Kısmi Diferansiyel Denklem
RPSM	Residual Power Series Method

1. GİRİŞ VE AMAÇ

Lineer olmayan diferansiyel denklemler, karmaşık fiziksel süreçleri tanımlamanın en etkili yolunu sunar. Bir diferansiyel denklem sisteminin her çözümü, belirli bir süreç karşılık gelir. Bu nedenle, diferansiyel denklemlerin kesin çözümlerini oluşturma yöntemleri önemli bir rol oynamaktadır.

Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler geniş bir alandır. Bu tür denklemler için kesin çözümler elde etmeye yönelik çok sayıda klasik ve güncel sonuç bulunmaktadır.

Kısmi diferansiyel denklemlerin özelliklerinin analitik çalışmaları uygulamalı matematik ve matematiksel fizikte önemli bir rol oynar. Bunların arasında, belirli çözüm sınıflarının bilgisine dayalı analitik çalışma yaygın bir ilgi görmüştür. Her kesin çözümün, belirli bir model çerçevesinde gerçek bir sürecin tam tanımı, çeşitli sayısal yöntemleri karşılaştırmak için bir model ve kullanılan modelleri geliştirmek için bir teori dahil olmak üzere birçok anlamı vardır. (Meleshko,2005)

Kısmi diferansiyel denklemler, bilim ve mühendislik modellerinin bu doğal olaylarını açıklamak için yararlı bir araç haline geldi. Bu nedenle, kısmi diferansiyel denklemleri çözmek için tüm geleneksel ve yeni geliştirilen yöntemleri ve bu yöntemlerin uygulanmasını bilmek giderek daha önemli hale gelmektedir. (Wazwaz,2010)

Lineer olmayan diferansiyel denklemlerin genel çözümleri elde edilemediğinden kesin çözümlerinin bulunması bile bilimsel açıdan çok büyük önem arz etmektedir. Bunun için geliştirilen açılım yöntemleri ise gün geçtikçe sayıları artmakta ve elde edilen çözümlerin farklılığı göze çarpmaktadır. Bu yöntemlerin birçoğu ise denkleme dalga dönüşümü uygulanmasıyla orijinal denklemin adi diferansiyel denkleme indirgenmesi esasına dayalıdır. Burada ele alınacak yardımcı denklem ve onun çözümleri ise bizi orijinal denklemin çözümlerine götürmektedir. Böylece çözümleri bulunabilen bir adi diferansiyel denklemden yola çıkarak, çözümleri daha karmaşık olan kısmi diferansiyel denklemlerin kesin çözümleri elde edilir.

Nümerik çözümler ise genel çözümlerin bulunamadığı durumlarda önemli bir rol üstlenir. Nümerik yöntemler kullanılarak yapılan iterasyonlarla analitik çözümlere yaklaşık değerler bulunur.

Son birkaç on yılda birçok yazar, tamsayı olmayan (kesirsel) türevler ve integraller, çeşitli gerçek dünya problemlerinin özelliklerinin tanımlanması için daha uygun olduğunu belirttiler. Yeni kesirli sıralı modellerin daha önce kullanılan tamsayılı sıralı modellere göre daha yeterli olduğu gösterilmiştir. Bununla birlikte birçok kesirsel türev integral tanımları literatürde verilmiştir.

Bu tez çalışmasında bir sığ su dalga modeli olan Gear–Grimshaw modelinin zaman kesirsel türevli formu ele alınacaktır. Bu modelin uygun dalga dönüşümü altında hareketli dalga çözümleri çözümleri kesin çözüm metotlarından Sine-Gordan açılım metodu kullanılarak bulunacak ve bulunan dalgaların bazılarının üç boyutlu grafikleri çizdirilecektir. Ayrıca son yıllarda popüler olan kalanlı kuvvet serileri (Residual Power Series Method) metodu kullanılarak da yaklaşık çözümler araştırılacaktır. Elde edilen nümerik çözümler ile kesin çözümler karşılaştırılarak mutlak hata değerleri tablo içinde verilecektir.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Fiziksel soliton'un keşfi John Scott Russell'a atfedilir. 1834'te Russell, bir çift at tarafından dar bir kanal boyunca çekilen bir tekneyi gözlemliyordu. Bu ilginç olayı bir çift at sırtında takip etti. Tekne aniden durduğunda, tekneden bir yay dalgası ayrıldı ve büyük bir soliter dalga yükselmiş vaziyette, y iyi tanımlanmış bir su yığını şeklinde büyük bir hızla ileri doğru yuvarlandı. Soliter dalga, kanal boyunca hareketine değişmeden devam etti. Bilim adamı, saatte yaklaşık sekiz veya dokuz mil hızla yayılırken onu at sırtında takip etti, ancak bir veya iki mil sonra onu kaybetti. Russell, önemli bir fenomeni gözlemlediğine ikna olmuştu ve öteleme dalgası adını verdiği şeyin çalışmalarına devam etmek için bahçesine deneysel bir tank inşa etti. Öteleme dalgası, bilim adamlarının doğrusal olmayan dalga yayılımını incelemek için bilgisayarları kullanmaya başladıkları 1960'lara kadar bir merak olarak görülüyordu. Matematiksel çözümlerin keşfi, 1870'lerde Boussinesq ve Rayleigh'in bağımsız olarak çalışmaları gibi doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin analizi ile başladı. Boussinesq ve Rayleigh, Russell gözlemini ve daha sonra bir laboratuvar deneyinde yeniden üretimi teorik olarak açıkladılar. Korteweg ve de Vries 1895'te sığ kanallardaki su dalgaları denklemini türetmişler ve solitonların varlığını doğrulamışlardır.

Kdv (Korteweg-de Vries) denklemleri, su dalgaları ve plazma fiziği gibi birçok farklı fiziksel sistemde ortaya çıkan, küçük amplitüdlü ve uzun dalga boyuna sahip nonlinear dalga denklemleridir. KdV denklemleri, birçok farklı matematiksel yöntem ve tekniklerle çözülebilirler. Bunlar arasında Darboux transformasyonu, Hirota metodu, bilgi-teori yöntemi, simetri yöntemleri ve diğerleri bulunur. KdV denklemleri, matematiksel fizik, hidrodinamik, optik, kuantum alan teorisi ve benzeri alanlarda geniş bir uygulama yelpazesine sahiptir.

Korteweg-de Vries denklemi aşağıdaki formda verilmiştir.

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

Burada u , bağımlı değişkeni, t ; bağımsız değişkeni, x ise uzamsal değişkendir. KDV denklemleri, 1960'larda Korteweg ve de Vries tarafından hidrodinamik problemler için önerilmiştir. KdV (Korteweg-de Vries) denklemi, matematiksel fizik, hidrodinamik, kuantum alan teorisi, optik, plazma fiziği ve benzeri alanlarda birçok uygulaması olan doğrusal olmayan dalga denklemleridir. Bazı modelleme örnekleri şunlardır:

1. Su dalgaları: KDV denklemi, su dalgalarının küçük genlikli ve uzun dalga boyuna sahip olması durumunda ortaya çıkar. Bu denklemler, dalga hareketi ve suyun davranışı hakkında önemli bilgiler sağlar.
2. Optik: KDV denklemi, optikteki solitonların davranışını açıklamak için kullanılır. Özellikle, uzun mesafelerdeki veri iletimi gibi uygulamalarda önemlidir.
3. Kuantum alan teorisi: KDV denklemleri, kuantum alan teorisi alanında kullanılan integrabilite tekniklerinde önemli bir rol oynar.
4. Plazma fiziği: KDV denklemleri, plazma fiziğindeki nonlinear dalga fenomenlerini açıklamak için kullanılır.

Modifiye KdV (mKdV) Denklemi, Korteweg-de Vries (KdV) denkleminin bir modifikasyonudur ve şu şekildedir:

$$u_t + 6u^2u_x + u_{xxx} = 0$$

Burada $u(x, t)$, bağımlı değişkeni, x , uzamsal değişken, t ise zaman değişkenidir. mKdV denklemi, KdV denkleminin bir varyasyonudur ve bazı fiziksel sistemlerde daha iyi bir model sağlar.

mKdV denklemi, uzun dalga boylarında ortaya çıkan doğrusal olmayan dalga fenomenlerini açıklamak için kullanılır. Bu denklem, birçok farklı uygulama alanında kullanılmaktadır. Örneğin, plazma fiziği, hidrodinamik, rüzgar enerjisi, hidrolik ve deniz dinamiği gibi alanlarda kullanılan mKdV denklemi, bu sistemlerdeki dalga hareketlerini açıklamak için kullanılmaktadır.

Son yıllarda yapılan çalışmalarda finans, mühendislik, kimya, fizik gibi birçok alandaki modelleme problemlerinde kesirli diferansiyel denklemlerin kullanımının

arttığını görmekteyiz. Gerçek hayat olaylarının optimum modellenmesi için farklı kesirli türevlerin tanımlandığını söyleyebiliriz. Bazı iyi bilinen kesirli türev operatörleri, Riemann-Liouville, modifiye Riemann-Liouville, Erdelyi-Kober, Atangana-Baleanu, Grünwald-Letnikov, Hadamard vb.

Klasik türevde doğrusallık özelliğini sağlayan operatörler, çarpım kuralı, zincir kuralı, bölüm kuralı, sabit türetme gibi birçok uygulamada farklılık gösterebilmektedir. Günümüzde kesirli diferansiyel denklemler birçok araştırmacının ilgi alanı olmuştur. Bu denklemlerin kesin ve sayısal çözümlerini elde etmek için tanh yöntemi, deneme denklemi yöntemi, kalanlı kuvvet serileri yöntemi, fonksiyonel değişken yöntemi, Lie simetri yaklaşımı vb. birçok yöntem geliştirilmiştir. (Wazwaz, 2006; Gurefe, vd.,2011; Zhou, vd.,2016; Tchier,2016; Körpınar,2017; Çevikel,2012; Çevikel,2014; Kaplan, vd.,2018; Gazizov& Ibragimov,1998)

Son yıllarda yapılan çalışmalarda finans, mühendislik, kimya, fizik gibi birçok alandaki modelleme problemlerinde kesirli diferansiyel denklemlerin kullanımının arttığını görmekteyiz. Sığ su dalgalarının kinematığında birleştirilmiş KdV denklemi, birleştirilmiş Boussinesq denklemi, Bona Chen denklemi ve Gear-Grimshaw (GG) model denklemlerinin optimum modellemesi için farklı kesirli türevlerin tanımlandığını söyleyebiliriz. Bu modeller üzerine yapılan çalışmaların dünya çapında kapsamlı bir şekilde ele alındığını görmekteyiz. İntegrallenebilirlik özellikleri, kesin ve sayısal çözümler yaygın olarak incelenir.

Bu tez çalışmasında pek çok keyfi parametre içerdiği için birçok sığ su dalgası modelini kapsayan Gear-Grimshaw fiziksel modeline odaklanacağız. Tam sayı mertebeden Gear-Grimshaw (GG) denklemi

$$\begin{aligned} u_t + auu_x + bu_{xxx} - \alpha_1 vv_x - \beta_1(uv)_x - \gamma_1 v_{xx} &= 0, \\ v_t + dvv_x + kv_{xxx} - \alpha_2 uu_x - \beta_2(uv)_x - \gamma_2 u_{xx} &= 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

olarak verilmiştir. Burada; u ve v 'nin bağımlı değişkenleri ve x , t sırasıyla uzamsal ve zaman koordinatları ile bağımsız değişkenleri temsil eder. Denklemdaki a , b , d , k , $\alpha_{1,2}$, $\beta_{1,2}$, $\gamma_{1,2}$ keyfi sabitlerdir.

Denklemdaki ilk terim oluşumsal etkiyi belirtirken a ve b sırasıyla doğrusal olmayan ve dağılım etkisinin parametrelerini belirtir. Bu model sayesinde, sığ katmanlı bir sıvıda enine iç yerçekimi dalgası modlarının rezonans etkileşimi incelenmiştir. Böylece bağımlı değişkenler u ve v , iki dalga modundaki dalga değişkenleridir. Klasik (tamsayı türevi) formu birçok bilim adamı tarafından incelenmiştir. 1-soliton çözümler elde edilmiş ve korunum vektörleri elde edilmiştir (Biswas&Ismail,2010). Biswas ve ark. Dalga ansatz yöntemi kullanarak topolojik çözümler elde etmişleridir. Ayrıca Lie simetri yaklaşımı yardımıyla çarpan yönteminden korunum yasaları türetilmiştir. Bir Lyapunov yöntemi kullanarak, herhangi bir pozitif integral mertebesinin Sobolev uzaylarında çözümlerin üstel kararlılığını belirlendiğini belirtilmiştir (Capistrano,2018).

Zaman kesirsel mertebeden türevli Gear-Grimshaw (GG) denklemi ise

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + auu_x + bu_{xxx} - \alpha_1 vv_x - \beta_1 (uv)_x - \gamma_1 v_{xxx} &= 0, \\ \frac{\partial^\alpha v}{\partial t^\alpha} + dvv_x + kv_{xxx} - \alpha_2 uu_x - \beta_2 (uv)_x - \gamma_2 u_{xxx} &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

olarak ifade edilebilir. Kesir türevli GG denklemi ile ilgili literatürde yapılan bir çalışma bulunmamaktadır. Bu sebeple bu tez çalışmasında kesir türevli GG denkleminin kesin ve yaklaşık çözümleri araştırılacaktır.

3. TEMEL KAVRAMLAR

3.1 Kısmi Diferansiyel Denklemler

Kısmi diferansiyel denklem (KDD), bağımlı değişkeni ve onun kısmi türevlerini içeren bir denklemdir. Adi diferansiyel denklemlerde (ADD'ler), bağımlı değişken $u=u(x)$ 'in yalnızca bir bağımsız değişken x 'e bağlı olduğu bilinmektedir. ADD'lerden farklı olarak, KDD'lerde $u=u(x,t)$ veya $u=u(x,y,t)$ gibi bağımlı değişken birden fazla bağımsız değişkene bağlı olmalıdır. $u=u(x,t)$ ise u fonksiyonu x bağımsız değişkenine ve t zaman değişkenine bağlıdır. Ancak $u=u(x,y,t)$ ise u fonksiyonu x,y uzay değişkenlerine ve t zaman değişkenine bağlıdır. KDD lere en basit örnek olarak

$$\begin{aligned} u_t &= \rho u_{xx}, \\ u_t &= \rho(u_{xx} + u_{yy}) \\ u_t &= \rho(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) \end{aligned} \quad (3.1)$$

denklemleri sırasıyla bir, iki ve üç boyutta ısı dağılımını modeller. KDD'lerin diğer bir örneği ise sırasıyla bir, iki ve üç boyutta dalga denklemleri aşağıda verilmektedir.

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \sigma^2 u_{xx}, \\ u_{tt} &= \sigma^2(u_{xx} + u_{yy}) \\ u_{tt} &= \sigma^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) \end{aligned} \quad (3.2)$$

3.1.1 Denklemin Mertebesi

Bir KDD'nin mertebesi, denklemde görünen en yüksek kısmi türevin mertebesidir. Örneğin;

$$\begin{aligned} u_t + cu_{xxx} - uu_x &= 0 \\ u_{tx} + cu_{xxxy} - uu_{xx} + u_{yyy} &= 0 \\ u_{tt} + u_{xx} - \beta u_{xxxxx} + u_x^3 &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

denklemleri sırasıyla üçüncü, dördüncü ve beşinci mertebededir.

3.1.2 Doğrusal ve Doğrusal Olmayan Denklemler

KDD'ler doğrusal ve doğrusal olmayan olarak sınıflandırılır. Aşağıdaki durumlarda kısmi diferansiyel denklem lineer olarak adlandırılır:

1. denklemde yer alan bağımlı değişkenin ve her bir kısmi türevinin kuvveti birdir ve
2. bağımlı değişkenin katsayıları ve her bir kısmi türevinin katsayıları sabit veya bağımsız değişkenlerdir. Ancak, bu koşullardan herhangi biri karşılanmazsa, denklem doğrusal olmayan olarak adlandırılır.

Örnek 3.1 Aşağıdaki KDD'leri doğrusal veya doğrusal olmayan olarak sınıflandırın:

- i. $xu_{yy} + yu_{xx} = 0$,
- ii. $uu_t + xu_x = 3$,
- iii. $u_{xx} + \sqrt{u} = 2x$,
- iv. $u_s + \frac{1}{s}u_{ss} + \frac{1}{s^2}u_{rr} = 0$. (3.4)

Çözüm 3.1

- i. u_{xx} ve u_{yy} kısmi türevlerinin her birinin kuvveti birdir. Ayrıca kısmi türevlerin katsayıları sırasıyla x ve y bağımsız değişkenleridir. Bu nedenle, KDD doğrusaldır.
- ii. Her kısmi türevinin kuvveti bir olmasına rağmen, u_t 'nin katsayısı olarak u bağımlı değişkeni vardır. Bu nedenle doğrusal değildir.
- iii. $\sqrt{u}$ terimi nedeniyle denklem doğrusal değildir.
- iv. Denklem doğrusaldır çünkü gerekli iki koşulu sağlar.

3.1.3 Bazı Lineer Kısmi Diferansiyel Denklemler

Daha önce belirtildiği gibi, doğrusal kısmi diferansiyel denklemler, difüzyon denklemi ve dalga denklemi gibi bilimsel uygulamaların birçok alanında ortaya çıkar. Önemli fiziksel olayları modelleyen bazılarını aşağıda verilmiştir.

1. Tek boyutlu uzayda ısı denklemi şu şekilde verilir:

$$u_t = ru_{xx} \quad (3.5)$$

2. Tek boyutlu uzayda dalga denklemi şu şekilde verilir:

$$u_{tt} = k^2 u_{xx} \quad (3.6)$$

3. Laplace denklemi şu şekilde verilir:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (3.7)$$

4. Klein-Gordon denklem ile verilir:

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2} u_{tt} = \rho^2 u \quad (3.8)$$

5. Doğrusal Schrödinger denklemi şu şekilde verilir:

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2} u_{tt} = \rho^2 u \quad (3.8)$$

3.1.4 Homojen ve Homojen Olmayan KDD'ler

Kısmi diferansiyel denklemler de homojen veya homojen olmayan olarak sınıflandırılır. Herhangi bir mertebeden bir kısmi diferansiyel denklem, PDE'nin her terimi u bağımlı değişkeni veya onun türevlerinden birini içeriyorsa homojen, aksi halde homojen olmayan PDE olarak adlandırılır.

Örnek 3.2 Aşağıdaki kısmi diferansiyel denklemleri homojen veya homojen olmayan olarak sınıflandırın:

- i. $u_t = ku_{xx}$
- ii. $u_x = u_{tt} + t$
- iii. $u_{xx} + u_{yy} = 0$
- iv. $u_x + u_y = u + 3$ (3.9)

Çözüm 3.2

- i. Denklemin terimleri yalnızca u'nun kısmi türevlerini içerir, dolayısıyla homojen bir PDE'dir.
- ii. Denklem homojen olmayan bir PDE'dir, çünkü bir terim t bağımsız değişkenini içerir.
- iii. Denklem homojen bir KDD'dir.

iv. Denklem homojen olmayan bir KDD'dir.

3.1.5 Solitonlar ve Kompaktonlar

1834'te John Scott Russell, soliter dalgaları gözlemleyen ilk kişi oldu. Edinburgh-Glasgow kanalında şekil değiştirmeden yavaşça hareket eden büyük bir su çıkıntısı gözlemledi. Gözlemlediği ve "büyük öteleme dalgası" olarak adlandırdığı su kabarcığı, su kanalı boyunca uzun bir süre boyunca şeklini koruyarak yol alıyordu. Olağanüstü keşif, Russell'ı gözlemini vurgulamak için fiziksel laboratuvar deneyleri yapmaya ve bu tek dalgaları incelemeye motive etti. Ayrıca

$$c^2 = g(h + a) \quad (3.10)$$

Denklemini deneysel olarak elde etmiştir. Buradaki c , tek dalga hızı, a ise su yüzeyinin üzerindeki maksimum genlik, h ise sonlu derinlik ve g yerçekimi ivmesidir. Soliter dalgalar bu nedenle yerçekimi dalgaları olarak adlandırılır.

Soliter dalgaların etkileşimini ve başlangıç durumlarının tekrarını araştırdılar (Zabusky & Kruskal, 1965). Soliter dalgaların KdV denklemi boyunca doğrusal olmayan etkileşime girdiğini keşfettiler. Ayrıca, dalgalar şeklini ve genliğini koruyarak bu etkileşimden ortaya çıkmıştır. Soliter dalgaların kimliklerini koruduğu ve karakterinin parçacık benzeri davranışa benzediği şeklindeki dikkate değer keşfinden dolayı, bu tekil dalgalara özel olarak soliton ismi vermişlerdir (Zabusky & Kruskal, 1965). Soliton kavramını incelemek için dünya çapında çeşitli bilimsel alanlarda aktif araştırma çalışmaları ortaya çıkmıştır. Solitonların zayıf doğrusal olmama (weak nonlinearity) terimi ve dağılım (dispersion) terimi arasındaki dengenin bir sonucu olarak ortaya çıktığı artık iyi bilinmektedir. Buna kısaca homojen dengelenme prensibi denir. Soliton kavramı, akışkanlar dinamiği, astrofizik, plazma fiziği ve manyeto-akustik dalgalar ve diğerleri gibi çeşitli bilimsel alanlardaki önemli rolü nedeniyle çok sayıda çalışmayı kendine çekmiştir. Solitonlar, elastik saçılma özelliğine sahip soliter dalgalardır. Solitonlar birbirleriyle çarpıştıktan sonra şekillerini ve hızlarını korurlar. Drazin ve arkadaşları [drazin], bir soliton'u, aşağıdakileri sağlayan doğrusal olmayan bir denklemin (veya bir sistemin) herhangi bir çözümü olarak tanımlamışlardır:

- Kalıcı formun soliter bir dalgasıdır.
- Yerelleştirilir, böylece bozunur veya sonsuzda bir sabite yaklaşır.
- Diğer solitonlarla güçlü bir şekilde etkileşime girebilir ve kimliğini koruyabilir.
- Doğrusal olmayan ve dağıtıcı etkiler arasındaki homojen dengelenmeden kaynaklanır.

3.1.6 Homojen Dengelenme Prensipli

$m, N, s \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
 u &\rightarrow N \\
 u^m &\rightarrow mN \\
 u' &\rightarrow N + 1 \\
 u'' &\rightarrow N + 2 \\
 u^{(s)} &\rightarrow N + s
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

N parametresini belirlemek için, genellikle yukarıda verilen şemayı kullanarak elde edilen denklemdeki en yüksek mertebeden doğrusal terimleri en yüksek mertebeden doğrusal olmayan terimlerle dengeleriz.

Soliter dalgalar, solitons, kinks, peakons, cuspons ve diğer formlar gibi çeşitli türlerde görünür. Bu türlerin her birinin kendine has özellikleri vardır.

Son zamanlarda kompaktınlar olarak adlandırılan, kompakt desteğe sahip bir soliter dalga sınıfı keşfettiler (Rosenau & Hyman, 1993). Kompaktınlar, diğer kompaktınlarla çarpıştıktan sonra aynı uyumlu şekilde yeniden ortaya çıkan olağanüstü soliton özelliğine sahip soliter dalgalar tarafından tanımlanır. Dalga dağılımı tamamen doğrusal olmadığında, bazı yeni özellikler gözlemlenebilir ve en dikkat çekici olanı ise kompaktın olarak isimlendirilen dalgaların varlığıdır. Kompaktınlar için şimdiye kadar verilen tanımların bir kısmı şöyledir:

- Kompaktınlar, sonlu dalga boyuna sahip solitonlardır;

- Kompaktonlar, kompakt desteğe sahip soliter dalgalarıdır;
- Kompaktonlar, üstel kuyruk içermeyen solitonlardır;
- Kompaktonlar, sonsuz kanatların olmaması ile karakterize edilen solitonlardır;
- Kompaktonlar sağlam soliton benzeri çözümlerdir.

Kompakton yapısının iki önemli özelliği ise;

- Standart KdV soliton'un aksine yani $z \rightarrow \infty$ iken $f(z)=0$, kompakton, üstel kuyrukların veya kanatların olmaması ile karakterize edilir yani $z \rightarrow \infty$ iken $f(z)=0$ olmayabilir.
- Genlik arttıkça genişliğin daraldığı standart KdV solitonunun aksine, kompaktonun genişliği genlikten bağımsızdır.

3.1.7 Soliter Dalgalar Teorisi

Şimdi dalgaların matematiksel teorisindeki bazı kavramların bazı tanımları verilsin. Sinüzoidal dalgalar gibi doğrusal dalgalar, solitonlardan farklıdır. Bir dalğanın fiziksel tanımı, yukarı aşağı veya ileri geri harekettir. Ayrıca dalga, enerjiyi bir yerden başka bir yere ileten bir yayılımdır. En basit dalga yayılma denklemi şu şekilde verilir:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad (3.12)$$

$u(x,t)$ dalğanın genliğini temsil eder ve c dalğanın hızıdır. Bu denklemin genel d'Alembert çözümü ise

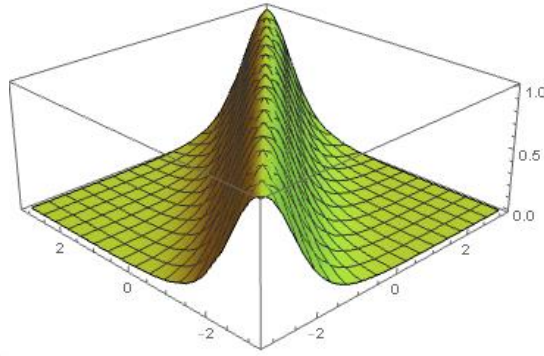
$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) \quad (3.13)$$

f ve g , sırasıyla sağa ve sola yayılan dalgaları temsil eden keyfi fonksiyonlardır. İki farklı f ve g dalgası, karakterleri değişmeden yayılır.

3.2 Hareketli Dalga Çözümleri Türleri

3.2.1 Soliter Dalgalar ve Soliton Çözümler

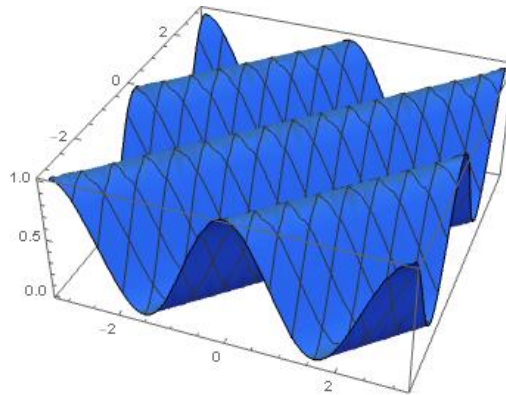
Soliter dalgalar, büyük mesafelerde asimptotik olarak sıfır, sabit hız ve şekil ile hareket eden lokalize dalgalardır. Solitonlar özel soliter dalga türleridir. Soliton çözümü, uzamsal olarak yerleştirilmiş bir çözümdür. Solitonlar, diğer solitonlarla etkileşim halindeyken kimliğini muhafaza etmesi bakımından dikkate değer bir soliton özelliğine sahiptir.



Şekil 3.1 Sonsuz kuyruğu olan $\text{sech}^2(x-t)$, $-\pi < x < \pi$, $-\pi < t < \pi$ soliton çözümünün grafiği.

3.2.2 Periyodik Çözümler

Periyodik çözümler, $\cos(x-t)$ gibi periyodik olan hareketli dalga çözümleridir. Standart dalga denklemi $u_{tt} = u_{xx}$ periyodik çözümler verir.



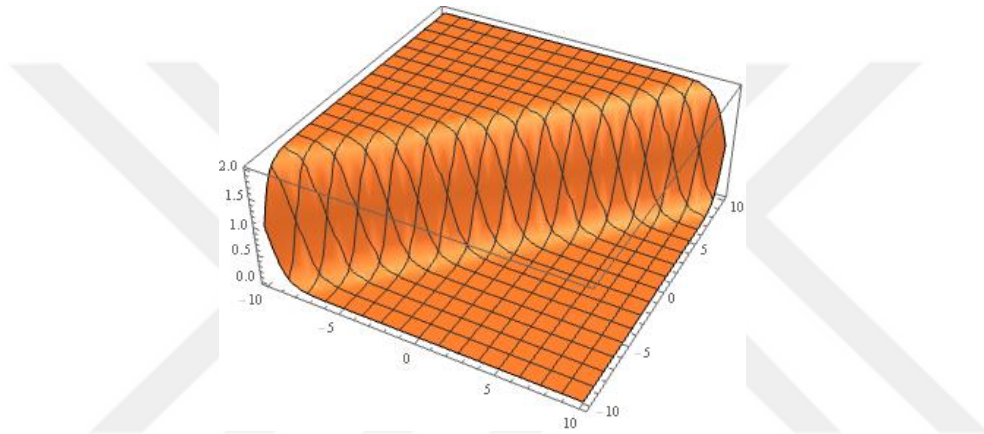
Şekil 3.2 $u(x,t)=\cos(x-t)$ periyodik çözümün grafiği $-\pi < x, t < \pi$ için.

3.2.3 Kıvrımlı (Kink) Dalgalar

Kıvrımlı dalgalar, bir asimptotik durumdan diğerine yükselen veya alçalan hareket eden dalgalardır. Kıvrılma çözümü sonsuzda bir sabite yaklaşır.

$$u_t + uu_x = vu_{xx} \quad (3.14)$$

v akma direnci katsayısı olmak üzere standart Burger's denklemini $v=1/2$ için $u(x,t)=1-\tanh(x-t)$ kıvrımlı dalga çözümüne sahiptir.

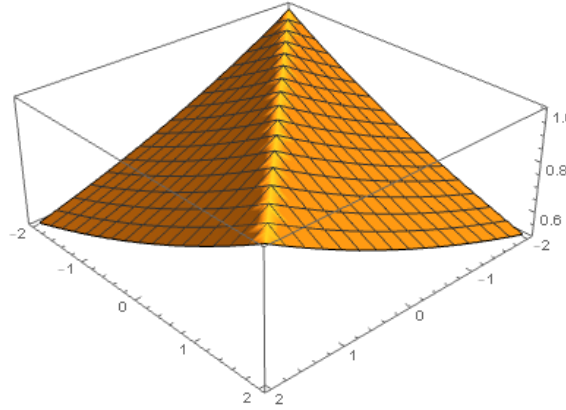


Şekil 3.3 $u(x,t)= 1-\tanh(x-t)$ kıvrımlı dalga çözümü grafiği $-10 < x, t < 10$ için.

3.2.4 Doruklar (Peakons)

Tepe noktaları, doruğa çıkmış soliter dalga çözümleridir. Bu durumda, ilerleyen dalga çözümleri, tepesinin bir köşesindeki bir tepe noktası dışında düzgündür. Tepe noktaları, $u(x,t)$ çözümünün birinci türevinde sonlu bir sıçramaya sahip olacak şekilde uzamsal türevin işaret değiştirdiği noktalardır. Bu, zirvelerin x türevinde süreksizliklere sahip olduğu, ancak her iki tek taraflı türevin de var olduğu ve yalnızca bir işaretle farklılık gösterdiği anlamına gelir(Wazwaz, 2006). Doruk çözümler, etkileşimden sonra şekillerini ve hızlarını koruyan solitonlardır. Tepe noktaları araştırılmış ve periyodik tepe noktaları ve üstel azalmaya sahip tepe noktaları olarak sınıflandırılmıştır(Wazwaz, 2006; Parkes & Vakhnenko, 2005). Varsayımsal olarak doruk çözümler şu şekilde temsil edilebileceğidir:

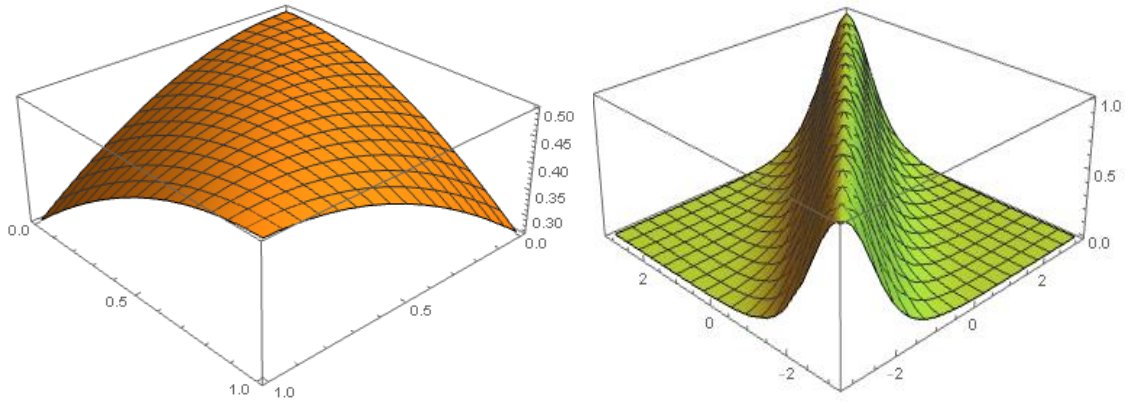
$$u(x,t) = e^{-(|x-ct|)^{\frac{1}{n}}}, \quad n > 1. \quad (3.15)$$



Şekil 3.4: $c=1$ ve $n=6$ için $u(x,t)$ doruk çözümü $u(x,t)=e^{-(|x-t|)^{\frac{1}{6}}}$

3.2.5 Kompakton Çözümler

Kompakton, kompakt uzamsal desteğe sahip yeni bir soliton sınıfıdır, öyle ki her bir kompakton sonlu bir çekirdeğe hapsedilmiş bir solitondur. Kompaktonlar, diğer kompaktonlarla çarpıştıktan sonra aynı uyumlu şekilde yeniden ortaya çıkan olağanüstü soliton özelliğine sahip soliter dalgalar tarafından tanımlanır (Rosenau & Hyman, 1993). Bu parçacık gibi dalgalar, soliton çarpışmasına benzer elastik çarpışma sergiler. Bir kompaktonun, doğrusal olmayan dağılımın onu sonlu bir çekirdekle sınırladığı, bu nedenle üstel kanatların yok olduğu, kompakt bir desteğe sahip tek bir dalga olduğu bulundu. Kompakton, üstel kanatlardan arınmış soliter bir dalgadır. Kompaktonların dikkate değer keşfi, son birkaç yılda yoğun bir araştırmaya yol açtı. Kompaktonların incelenmesi, süper deforme olmuş çekirdekler, hidrodinamik modellerde kümenin ön oluşumu, sıvı damlaların bölünmesi ve atalet füzyonu gibi birçok bilimsel süreç hakkında fikir verebilir. Kararlılık analizi, doğrusal olmama parametresinin keyfi değerleri için kararlılık koşulunun sağlandığı kompakton çözümlerinin kararlı olduğunu göstermiştir. Kompakton çözümlerinin stabilitesi hem lineer stabilite hem de Lyapunov stabilite kriterleri ile incelenmiştir. Ayrıca kompaktonlar analitik olmayan çözümlerken, klasik solitonlar analitik çözümlerdir. Kompakton çözüme örnek ise $u(x,t) = \cos^{1/2}(x-ct)$ verilebilir. Aşağıdaki grafikte $c=1$ ve $0 < x, t < 1$ için bir kompaktonu (solda) ve bir solitonun (sağda) grafikleri verilmiştir.



Kompakton

Soliton

Şekil 3.5 $c=1$ ve $0 < x, t < 1$ için $u(x,t) = \cos^{1/2}(x-ct)$

3.2.6 Kesirsel Türev

Kesirli mertebe türev ve integral hesabı doğasında var olan karmaşıklığı ve tamsayı mertebesi türev ve integralin görünüşte kendi kendine yeterliliği ve tamamen kabul edilebilir bir geometrik veya fiziksel yorumu olmaması nedeniyle mühendislikte keşfedilmemişti(Machado , 2003 ; Zeng , vd. ,2022).Bununla birlikte, mühendisliğin farklı alanlarıyla ilgili bazı doğal davranışları daha doğru bir şekilde temsil etmesine rağmen, şimdi biyomühendislik, viskoelastiklik (Heymans,20008; Esp'ndola,vd.,2008), elektronik(Krishna&Reddy,2008;Pu,vd.,2006),robotik(Lima,vd.,2007; Rosario,vd.,2006; Debnath,2003), kontrol teorisinde önemli bir araç olarak kullanılmaktadır.(Bohannan,2008; Cervera& Bañ nos,2008; Gutierrez,vd.,2010)

Kesirsel türev ve integral hesaplamalarının başarısının ana nedeni, bu yeni kesir dereceli modellerin genellikle tamsayı dereceli modellerden daha doğru olmasıdır, yani kesir dereceli modelde karşılık gelen klasik modele göre daha fazla serbestlik derecesi vardır. Konunun ilgi çekici özelliklerinden biri de kesirli türevlerin (ve integrallerin) yerel (veya noktasal) nicelikler olmamasıdır. Tüm kesirli operatörler, dikkate alınan sürecin tüm geçmişini göz önünde bulundurur, böylece doğal ve teknik olaylarda sıklıkla karşılaşılan yerel olmayan ve dağıtılmış etkileri modelleyebilir. Bu nedenle kesirli hesap,

çeşitli malzeme ve süreçlerin hafızasını ve kalıtsal özelliklerini tanımlamak için mükemmel bir araç setidir (Lazarević, vd., 2014).

Kesirsel türevin tanımı birçok araştırmacı tarafından farklı olarak yapılmıştır. Bunlardan literatürde en çok bilinenleri şunlardır: Caputo kesirsel türev operatörü (Caputo, 1967),

$${}^C D_r^\alpha \Psi(\tau) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_r^\tau (\tau-t)^{n-\alpha-1} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \Psi(t) dt. \quad (3.16)$$

Riesz kesirsel türev operatörü (Kilbas, vd., 2006),

$${}_0^R D_\tau^\alpha \Psi(\tau) = \frac{1}{2\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{d\tau}\right)^n \int_0^{\tau_0} |\tau-t|^{n-\alpha-1} \Psi(t) dt. \quad (3.17)$$

Yang ve arkadaşlarının Riemann--Liouville kesirsel türev operatörü, (Yang, vd., 2017)

$${}_{E_{\chi, \varrho}}^{RL} D_\alpha^\sigma \Psi(\tau) = \frac{d}{d\tau} \int_a^\tau E_{\chi, \varrho}((\eta_1, \varsigma_1), (\eta_2, \varsigma_2), \dots, (\eta_n, \varsigma_n)); (\tau-t)^\sigma \Psi(t) dt. \quad (3.18)$$

Riemann-Liouville kesirsel türev operatörü (Samko, vd., 1993),

$$RLD_r^\alpha \Psi(\tau) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{d\tau}\right)^n \int_r^\tau (\tau-t)^{n-\alpha-1} \Psi(t) dt. \quad (3.19)$$

4. MATERYAL VE YÖNTEM

KdV denklem sistemi, Boussinesq denklemi, Bona Chen denklemi ve Gear-Grimshaw (GG) denklemi, sığ su dalgalarının kinematik modelleri olarak ortaya çıkmıştır. Bu modeller üzerine kapsamlı çalışmalar yapıldığı görülmektedir. İntegrallenebilirlik özellikleri, kesin ve sayısal çözümler genellikle incelenmiştir. Birçok keyfi parametre içerdiği için birçok sığ su dalgası modelini içeren GG modelinin zaman kesir türevli denklemi aşağıdaki gibidir(Kivshar,vd.,1989; Triki et al,2014).

Yüksek lisans tezinin bu bölümünde bazı dalga denklemlerine $(G'/G, 1/G)$ açılım yöntemi ve modifiye edilmiş çiftli alt denklem yöntemi uygulanarak daha önce yapılan çalışmalardan farklı olan yeni analitik çözümler bulunacak ve dalga hareketleri incelenecektir. Bulunan bu çözümlerin belli zaman kesitlerinde dalga modellemeleri üç boyutlu grafiklerle verilerek dalgaların davranış ve karakteristik yapıları detaylandırılmıştır. $(G'/G, 1/G)$ açılım yöntemi uygulanarak elde edilen dalga çözümleri yöntemin gerektirdiği şekilde hiperbolik, trigonometrik ve rasyonel olarak üç farklı formda verilecektir. Modifiye edilmiş çiftli alt denklem yöntemi uygulanarak ulaşılabilecek olan kompleksiton çözümler ise kompleksiton dalgaların yapılarından kaynaklanan ayırt edici özellik olan üstel ve trigonometrik fonksiyonların birlikte çözüme dahil olması ile istenilen formda verilecektir. Bu çalışmalar neticesinde yüksek mertebeden lineer olmayan oluşum denklemlerinin analitik çözümlerini bulmada bahsi geçen tekniklerin kullanışlılığı ve etkililiğini kanıtlamak açısından literatüre katkıda bulunulacağı düşünülmektedir.

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + auu_x + bu_{xxx} - \alpha_1 vv_x - \beta_1 (uv)_x - \gamma_1 v_{xxx} = 0, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial^\alpha v}{\partial t^\alpha} + dvv_x + kv_{xxx} - \alpha_2 uu_x - \beta_2 (uv)_x - \gamma_2 u_{xxx} = 0,$$

Burada u ve v , bağımlı değişkenleri temsil ederken, x ve t sırasıyla uzamsal ve zaman koordinatlarını temsil eden bağımsız değişkenlerdir. Parametreler $a, b, k, d, \alpha_{1,2}, \beta_{1,2}, \gamma_{1,2}$ keyfi sabitlerdir. (4.1) içindeki ilk terim oluşumsal etkiyi

gösterirken, a ve b sırasıyla doğrusal olmayan ve dağılım etkisinin parametrelerini belirtir. Bu model sayesinde, sığ katmanlı bir sıvıda çapraz dahili yerçekimi dalgası modlarının rezonans etkileşimi incelenmiştir. Bu nedenle, bağımlı değişkenler u ve v iki dalga modundaki dalga değişkenleridir.

4.1 Sine-Gordon Açılım Metodu

İlk olarak, Sine-Gordon açılım yönteminin metodolojisi hakkında bazı ön bilgiler verilecektir (Baskonus, vd., 2019; Kumar, vd., 2017). Bu yöntem, literatürde iyi bilinen Sine-Gordon denklemi üzerine inşa edilmiştir. Sine-Gordon denklemi, bir boyutlu bir alan teorisindeki bir alanın davranışını açıklayan bir diferansiyel denklemdir. Bu denklem, J.H. Poincare tarafından 1893 yılında elektromanyetik dalgalara benzer matematiksel bir formülasyon olarak tanıtılmıştır. Sine-Gordon denklemi, aşağıdaki şekilde verilir:

$$u_{xx} - u_{tt} = m^2 \sin(u) \quad (4.4)$$

Burada $u=u(x,t)$ keyfi bir fonksiyon olarak tanımlanır ve m bir sabittir ve denklemdeki sinüs teriminin şiddetini kontrol eder. Daha yüksek bir m değeri, sinüs teriminin etkisini artırır ve bu da denklemin çözümlerindeki dalga davranışının daha keskin bir şekilde belirginleşmesine neden olabilir. Öte yandan, daha düşük bir m değeri, dalga davranışının daha düzgün ve yumuşak bir şekilde gerçekleşmesine neden olur. x ve t, Sine-Gordon denkleminde bağımsız değişkenlerdir. x bir boyutlu uzayda pozisyonu temsil ederken, t zamanı temsil eder. u fonksiyonu, x ve t ye bağlıdır ve denklemin çözümleri, u fonksiyonunun x ve t ye bağlı olarak nasıl değiştiğini belirler. Bu denklem genellikle dalga davranışını açıklamak için kullanılır. Denklem, u fonksiyonun belirli bir şekilde davranış göstermesini gerektirir. Denklemdeki sinüs terimi, u fonksiyonunu düzenli olarak değiştiren bir etkiye sahiptir ve bu nedenle, denklemdeki çözümler dalgaları ifade eder. Dalga dönüşümü olarak adlandırılan $\xi=kx+lt$ Lorentz dönüşümü uygulandığında $u(x,t)=U(\xi)$ olarak alındığında, (4.4) çözümü kolay hale getiren denklemi bir boyutlu forma yani adi diferansiyel denkleme indirgenir. Burada ξ olayın x koordinatını ve t zamanını birleştiren bir değişkendir. $u(x,t)=U(\xi)$ dönüşümü kullanarak

$U(\xi)$ fonksiyonun birinci türevini elde edebiliriz. $U'(\xi) = \frac{dU}{d\xi}$, U fonksiyonunu ξ 'ye bağlı türev operatörünü kullanarak $u_x = U'(\xi)k$ ve $u_t = U'(\xi)l$ denklemlerini elde ederiz. Aynı şekilde ikinci türevlerini aldığımız zaman $U''(\xi) = \frac{d^2U}{d\xi^2}$ dönüşümü yaptığımızda ve $u_{xx} = U''(\xi)k^2$ ve $u_{tt} = U''(\xi)l^2$ (4.4) denkleminde yerine koyarak $U''(\xi)k^2 - U''(\xi)l^2 = m^2 \sin^2(U(\frac{\xi}{2}))$ denklemi sadeleştirme işlemi yapılırsa aşağıdaki denklemi bulunur.

$$U'' = \frac{m^2}{k^2 - l^2} \sin^2\left(\frac{U}{2}\right) \quad (4.5)$$

(4.5) denklemi U' ile çarpılıp bir kez integre edildiğinde, daha basit bir denklem elde edilir.

$$\left[\left(\frac{U}{2}\right)'\right]^2 = \frac{m^2}{k^2 - l^2} \sin^2\left(\frac{U}{2}\right) + K \quad (4.6)$$

Burada K bir integral sabitidir. Eğer $K=0$, $\frac{U}{2} = w(\xi)$ ve $\frac{m^2}{k^2 - l^2} = \alpha^2$ alınırsa

$$w' = \alpha \sin(w) \quad (4.7)$$

elde edilir. Burada $\alpha=1$ alınırsa

$$w' = \sin(w) \quad (4.8)$$

denklemi Sine-Gordon denkleminin sadeleştirilmiş hali olur. (4.8) denkleminin çözümünden

$$\sin(w) = \sin(w(\xi)) = \frac{2pe^\xi}{p^2e^{2\xi} + 1} \Big|_{p=1} = \text{sech}(\xi) \quad (4.9)$$

$$\cos(w) = \cos(w(\xi)) = \frac{2pe^\xi - 1}{p^2e^{2\xi} + 1} \Big|_{p=1} = \tanh(\xi), \quad (4.10)$$

ifadeleri yazılabilir ve buradaki $p \neq 0$ integral sabitidir.

Polinom formundaki bir doğrusal olmayan diferansiyel denklemi kapalı formda

$$H(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \dots) = 0 \quad (4.11)$$

verilsin. Uygun dalga dönüşümü uygulandığında (4.9) denklemi

$$O(U, U', U'', U''' \dots) = 0 \quad (4.12)$$

adi diferansiyel denkleme indirgenir. Böylece, (4.10) denkleminin beklenen çözümü için aşağıdaki açılım kullanılır:

$$U(\xi) = \sum_{i=1}^n \tanh^{i-1}(\xi) [B_i \operatorname{sech}(\xi) + A_i \tanh(\xi)] + A_0 \quad (4.13)$$

(4.9) ve (4.10) denklemlerine göre, (4.13) denklemi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$U(w) = \sum_{i=1}^n \cos^{i-1}(w) [B_i \sin(w) + A_i \cos(w)] + A_0 \quad (4.14)$$

Toplam sembolündeki n değerini elde etmek için homojen dengelenme prensibi uygulanır. Denklem (4.14)'da gerekli türevler alınır ve denklem (4.12) de yerine yazılır.

Elde edilen ifade de $\sin^p \cos^q$ katsayılarının hepsinin sıfır olması için oluşturulan cebirsel Maple programı ile çözüldüğünde, bilinmeyen değerler A_i, B_i, k, l bulunur. (4.1)

denklemi kesir türevli olduğundan dalga dönüşümü $\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = -cu'$, $\frac{\partial^\alpha v}{\partial t^\alpha} = -cv'$ kesirli türev terimleri tam sayı mertebeden türevli terimlere dönüşür. İndirgenmiş sistem bir adi diferansiyel denklem sistemi olarak aşağıda verilir:

$$-cu' + auu' + bu''' - \alpha_1 vv' - \beta_1(u'v + uv') - \gamma_1 v''' = 0, \quad (4.15)$$

$$-cv' + dvv' + kv''' - \alpha_2 uu' - \beta_2(u'v + uv') - \gamma_2 u''' = 0 \quad (4.16)$$

(4.15) denkleminde yüksek mertebeden türev terimi $u^{(3)}$ ile en yüksek dereceden uu' doğrusal olmayan terim dengelendiğinde $n+3=n+n+1$ 'den $n=2$ bulunur. Benzer işlem (4.16) içinde yapılırsa burada da dengelenme sayısının $n=2$ olduğu görülür.

Böylece (4.15) ve (4.16) denklemlerinin çözümü için aşağıdaki açılım kullanılacaktır.

$$u(\xi) = A_0 + B_1 \operatorname{sech}(\xi) + B_2 \operatorname{sech}(\xi) \tanh(\xi) + A_1 \tanh(\xi) + A_2 \tanh^2(\xi), \quad (4.17)$$

$$v(\xi) = C_0 + D_1 \operatorname{sech}(\xi) + D_2 \operatorname{sech}(\xi) \tanh(\xi) + C_1 \tanh(\xi) + C_2 \tanh^2(\xi)$$

burada $u(x,t)=U(\xi)$ denklem (4.9) ve A_0, A_1, A_2, B_1, B_2 sonsuz sabitlerdir. (4.9) ve (4.10) denklemlerinde integral sabiti $p=1$ alındığında $\sin(w)=\operatorname{sech}(w)$, $\cos(w)=\tanh(w)$ olduğundan $u(\xi)$ ve $v(\xi)$ çözümleri

$$u(\xi) = A_0 + B_1 \sin(\xi) + B_2 \sin(\xi) \cos(\xi) + A_1 \cos(\xi) + A_2 \cos^2(\xi), \quad (4.18)$$

$$v(\xi) = C_0 + D_1 \sin(\xi) + D_2 \sin(\xi) \cos(\xi) + C_1 \cos(\xi) + C_2 \cos^2(\xi)$$

olarak yazılır. (4.17) denkleminde gerekli türevler hesaplanıp (4.15) ve (4.16) denklemlerinde yerine yazılmasıyla ve $[\cos(\xi), \sin(\xi)]$ fonksiyonlarının bütün kuvvetlerinin katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle aşağıdaki lineer olmayan cebirsel sistem elde edilir:

$$\cos^5(\xi): -2A_2^2a + 4A_2C_2\beta_1 + 2B_2^2a - 4B_2D_2\beta_1 + 2C_2^2\beta_1 - 2D_2^2\alpha_1 - 24A_2b + 24C_2\gamma_1,$$

$$\cos^4(\xi): -3A_1A_2a + 3A_1C_2\beta_1 + 3A_2C_1\beta_1 + 3B_1B_2a - 3B_1D_2\beta_1 - 3B_2D_1\beta_1 + 3C_1C_2\alpha_1 - 3D_1D_2\alpha_1 - 6A_1b + 6C_1\gamma_1,$$

$$\cos^4(\xi)\sin(\xi):-4A_2B_2a+4A_2D_2\beta_1+4B_2C_2\beta_1+4C_2D_2\alpha_1-24B_2b+24D_2\gamma_1,$$

$$\begin{aligned}\cos^3(\xi):-2A_0A_2a+2A_0C_2\beta_1-A_1^2a+2A_1C_1\beta_1+2A_2^2a+2A_2C_0\beta_1-4A_2C_2\beta_1+B_1^2a- \\ 2B_1D_1\beta_1-3B_2^2a+6B_2D_2\beta_1+2C_0C_2\alpha_1+C_1^2\alpha_1-2C_2^2\alpha_1-D_1^2\alpha_1+3D_2^2\alpha_1+40A_2b+2A_2c- \\ 40C_2\gamma_1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos^3(\xi)\sin(\xi):-3A_1B_2a+3A_1D_2\beta_1-3A_2B_1a+3A_2D_1\beta_1+3B_1C_2\beta_1+3B_2C_1\beta_1 \\ +3C_1D_2\alpha_1+3C_2D_1\alpha_1-6B_1b+6D_1\alpha_1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos^2(\xi):-A_0A_1a+A_0C_1\beta_1+3A_1A_2a+A_1C_0\beta_1-3A_1C_2\beta_1-3A_2C_1\beta_1-4B_1B_2a \\ +4B_1D_2\beta_1+4B_2D_1\beta_1+C_0C_1\alpha_1-3C_1C_2\alpha_1+4D_1D_2\alpha_1+8A_1b+A_1c-8C_1\gamma_1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos^2(\xi)\sin(\xi):-2A_0B_2a+2A_0D_2\beta_1-2A_1B_1a+2A_1D_1\beta_1+3A_2B_2a- \\ 3A_2D_2\beta_1+2B_1C_1\beta_1+2B_2C_0\beta_1-3B_2C_2\beta_1+2C_0D_2\alpha_1+2C_1D_1\alpha_1-3C_2D_2\alpha_1+28B_2b+2B_2c- \\ 28D_2\gamma_1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(\xi)\sin(\xi):-A_0B_1a+A_0D_1\beta_1+2A_1B_2a-2A_1D_2\beta_1+2A_2B_1a-2A_2D_1\beta_1+B_1C_0\beta_1-2B_1C_2\beta_1- \\ 2B_2C_1\beta_1+C_0D_1\alpha_1-2C_1D_2\alpha_1-2C_2D_1\alpha_1+5B_1b+B_1c-5D_1\gamma_1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(\xi):2A_0A_2a-2A_0C_2\beta_1+A_1^2a-2A_1C_1\beta_1-2A_2C_0\beta_1-B_1^2a+2B_1D_1\beta_1+B_2^2a-2B_2D_2\beta_1- \\ 2C_0C_2\alpha_1-C_1^2\alpha_1+D_1^2\alpha_1-D_2^2\alpha_1-16A_2b-2A_2c+16C_2\gamma_1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(\xi):A_0B_2a-A_0D_2\beta_1+A_1B_1a-A_1D_1\beta_1-B_1C_1\beta_1-B_2C_0\beta_1-C_0D_2\alpha_1-C_1D_1\alpha_1-5B_2b- \\ B_2c+5D_2\gamma_1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(\xi)^0:A_0A_1a-A_0C_1\beta_1-A_1C_0\beta_1+B_1B_2a-B_1D_2\beta_1-B_2D_1\beta_1-C_0C_1\beta_1-D_1D_2\beta_1-2A_1b- \\ A_1c+2C_1\beta_1.\end{aligned}$$

Lineer olmayan cebirsel sistem Maple yardımıyla çözüldüğünde denklem içinde geçen parametrelerin çözüm kümesi dört durum da verilmiştir.

Durum 1:

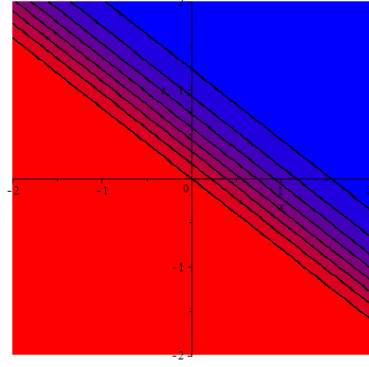
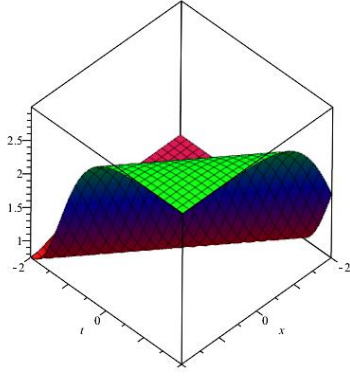
$$\begin{aligned}
B_1 = B_2 = D_1 = D_2 = \alpha_2 = \beta_1 = 0, \quad C_0 &= -\frac{7}{12} \frac{(C_2\beta_2 - 36\gamma_2)C_2}{C_2\beta_2 - 3\gamma_2}, \\
C_1 &= \frac{\sqrt{6}}{12} \frac{(C_2\beta_2 + 12\gamma_2)C_2}{C_2\beta_2 - 3\gamma_2}, \quad b = -\frac{\sqrt{6}}{12} \frac{(-\frac{\sqrt{6}}{6}C_2\beta_2 + 2C_2\beta_2 - 6A_1\gamma_2)\sqrt{6}}{C_2}, \\
c &= \beta_2\left(\frac{3 - 5\sqrt{6}}{3}\right), \quad \alpha_1 = -\frac{24}{5} \frac{(\frac{\sqrt{6}}{3} + 1)(C_2^2\beta_2^2 - 6C_2\beta_2\gamma_2 + 9\gamma_2^2)}{C_2^3(C_2\beta_2 + 12\gamma_2)}, \\
\gamma_1 &= \frac{\sqrt{6}}{30} \frac{(2\sqrt{6}C_2\beta_2 - 6\sqrt{6}\gamma_2 - C_2\beta_2 - 72\gamma_2)(C_2\beta_2 - 3\gamma_2)}{C_2^2(C_2\beta_2 + 12\gamma_2)}.
\end{aligned}$$

Bulunan bu parametreler yerine yazıldığında hareketli dalga çözümleri

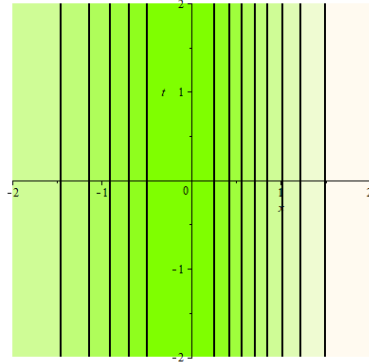
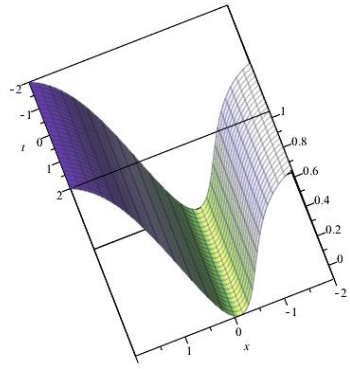
$$\begin{aligned}
u_1(x, t) &= A_0 + A_1 \tanh\left(x - \beta_2\left(\frac{3 - 5\sqrt{6}}{3}\right)\frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)}\right) \\
&\quad + A_2 \tanh^2\left(x - \beta_2\left(\frac{3 - 5\sqrt{6}}{3}\right)\frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)}\right)
\end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned}
v_1(x, t) &= -\frac{1}{12} \frac{(7C_2\beta_2 - 36\gamma_2)C_2}{C_2\beta_2 - 3\gamma_2} \\
&\quad + \frac{1}{12} \frac{\sqrt{6}(C_2\beta_2 + 12\gamma_2)}{C_2\beta_2 - 3\gamma_2} \tanh\left(x - \beta_2\left(\frac{3 - 5\sqrt{6}}{3}\right)\frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)}\right) \\
&\quad + C_2 \tanh^2\left(x - \beta_2\left(\frac{3 - 5\sqrt{6}}{3}\right)\frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)}\right)
\end{aligned} \tag{4.20}$$

olarak elde edilir.



Şekil 4.1 (4.19) çözümünün 3D ve yüzey grafikleri: $-2 < x, t < 2$,
 $c = ((5\sqrt{6}-3)/3)$, $\beta_2 = \alpha_1 = A_0 = A_1 = A_2 = 1$.



Şekil 4.2 (4.20) çözümünün 3D ve yüzey grafikleri: $-2 < x, t < 2$,
 $c = ((5\sqrt{6}-3)/3)$, $\beta_2 = \alpha_1 = A_0 = A_1 = A_2 = 1$.

Durum 2:

Elde edilen bir diğer çözüm kümesi ise

$$\beta_2 = \gamma_2 = A_0 = A_2 = B_1 = B_2 = C_1 = D_1 = D_2 = 0, \quad C_0 = C_0, \quad C_2 = C_2, \quad A_1 = A_1$$

$$k = -\frac{1}{12}C_2d, \quad \gamma_1 = -\frac{1}{12}\alpha_1, \quad a = \frac{2(3C_0 + 2C_2)C_2\alpha_1}{A_1^2}, \quad b = \frac{1}{2}C_2\beta_1, \quad c = 0.25.$$

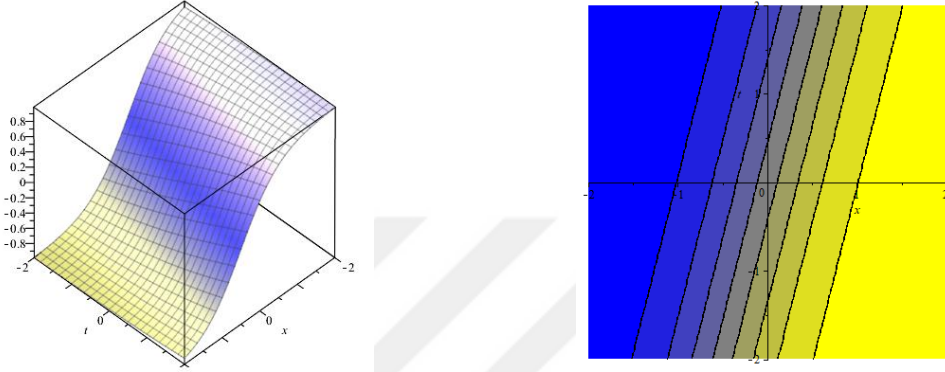
dir.

Buna göre hareketli dalga çözümleri

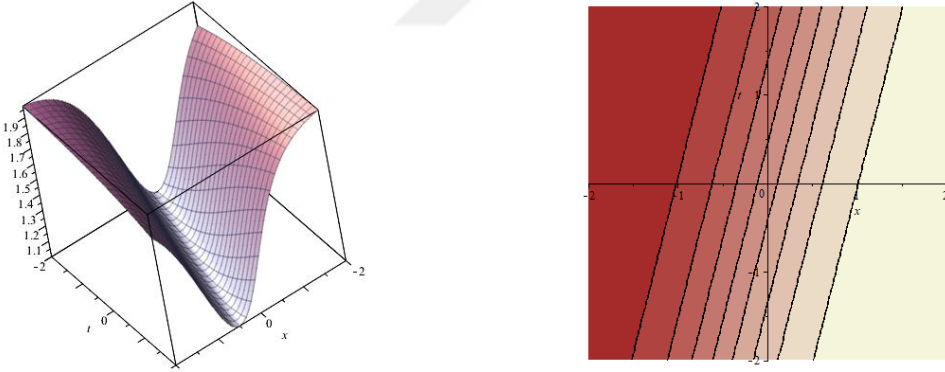
$$u_2(x, t) = A_1 \tanh\left(x - \frac{t^\alpha}{4\Gamma(1 + \alpha)}\right) \quad (4.21)$$

$$v_2(x, t) = C_0 + C_2 \tanh\left(x - \frac{t^\alpha}{4\Gamma(1 + \alpha)}\right) \quad (4.22)$$

olur. Buna göre çözümlerin 3-boyutlu ve düzey grafikleri aşağıda verilmiştir.



Şekil 4.3 (4.21) çözümünün 3D ve yüzey grafikleri: $-2 < x, t < 2$,
 $c=0.25$, $A_1=C_0=C_2=\beta_1=1$.



Şekil 4.4 (4.22) çözümünün 3D ve yüzey grafikleri: $-2 < x, t < 2$,
 $c=0.25$, $A_1=C_0=C_2=\beta_1=1$.

Durum 3:

Cebirsel sistemden elde edilen bir diğer çözüm kümesi ise

$$A_0 = -\frac{1}{80} \frac{A_1(5A_1a^2 + 8\sqrt{6}ab + \frac{16}{3}\sqrt{6}\beta_1\gamma_2)}{\beta_1\gamma_2}, \quad C_0 = \frac{8\gamma_2}{3a},$$

$$C_1 = \frac{8\sqrt{6}\gamma_2}{3a}, \quad C_2 = -8\frac{\gamma_2}{a}, \quad c = -\frac{1}{160} \frac{A_1(\frac{5}{3}A_1\sqrt{6}a^2 + 16ab - 16\beta_1\gamma_2)a\sqrt{6}}{\beta_1\gamma_2},$$

$$A_2 = B_1 = B_2 = D_1 = D_2 = A_1 = \alpha_2 = 0, \quad \alpha_1 = -\frac{3}{160} \frac{A_1(ab + 4\beta_1\gamma_2)a\sqrt{6}}{\gamma_2^2},$$

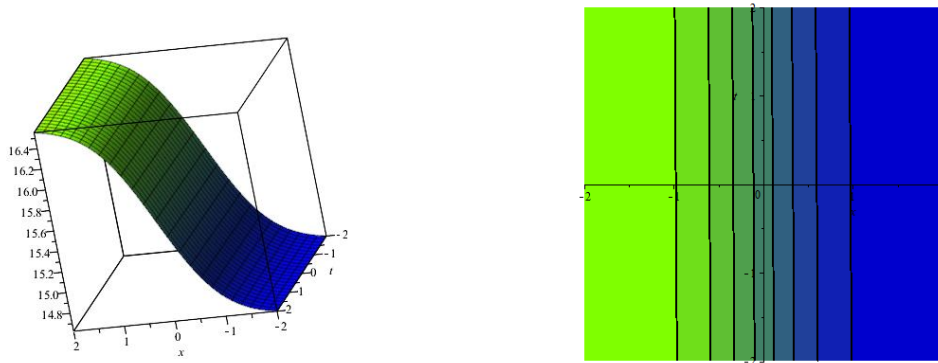
$$d = -\frac{3}{32} \frac{A_1\sqrt{6}a^2}{\gamma_2}, \quad k = -\frac{1}{16} A_1a\sqrt{6}, \quad \beta_2 = -a, \quad = -\frac{1}{160} \frac{(\frac{8A_1\gamma_2\sqrt{6}\beta_1}{a} + 2A_1\sqrt{6}b)a}{\gamma_2}$$

dir. Çözüm fonksiyonunda yerine yazılmasıyla soliter dalga çözümleri aşağıdaki formda verilir:

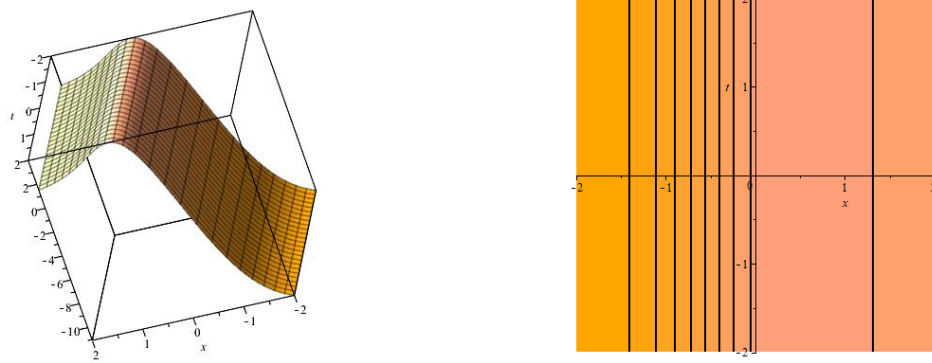
$$u_3(x, t) = -\frac{1}{80} \frac{5A_1^2a^2 + 8\sqrt{6}abA_1 + \frac{16}{3}\sqrt{6}\beta_1\gamma_2}{\beta_1\gamma_2} + A_1 \tanh(x - c \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}). \quad (4.23)$$

$$v_3(x, t) = -\frac{8\gamma_2}{3a} + \frac{8\sqrt{6}\gamma_2}{3a} \tanh(x - c \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}) + \tanh^2(x - c \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}). \quad (4.24)$$

Buna göre çözümlerin 3-boyutlu ve düzey grafikleri aşağıda verilmiştir.



Şekil 4.5 (4.23) çözümünün 3D ve yüzey grafikleri: $-2 < x, t < 2$, $c = -(1/(16)), A_1 = a = b = \beta_1 = 1$.



Şekil 4.6 (4.24) çözümünün 3D ve yüzey grafikleri: $-2 < x, t < 2$,
 $c = -(1/(16))$, $A_1 = a = b = \beta_1 = 1$.

Durum 4:

Son olarak bulunan çözüm kümesi ise

$$A_0 = B_1 = B_2 = C_1 = D_1 = D_2 = \sigma_2 = \beta_2 = 0, \quad \alpha = \frac{2(3C_0 + 2C_2)C_2\alpha_1}{A_1^2},$$

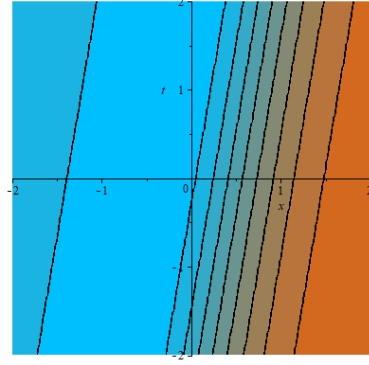
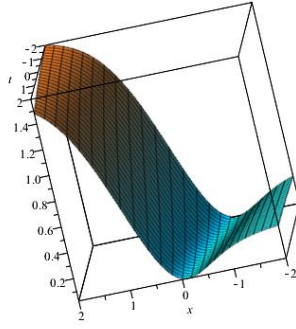
$$b = \frac{1}{2}C_2\beta_1, \quad c = -\beta_1(C_0 + C_2), \quad k = -\frac{1}{12}C_2d, \quad \sigma_1 = -\frac{1}{12}C_2\alpha_1$$

dir. Çözüm fonksiyonunda yerine yazılmasıyla soliter dalga çözümleri aşağıdaki formda verilir:

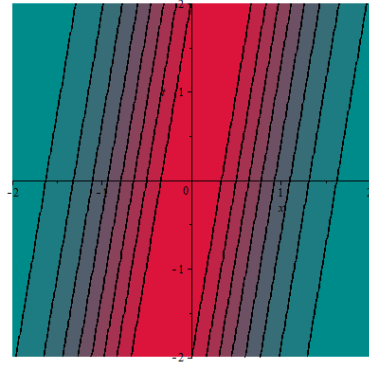
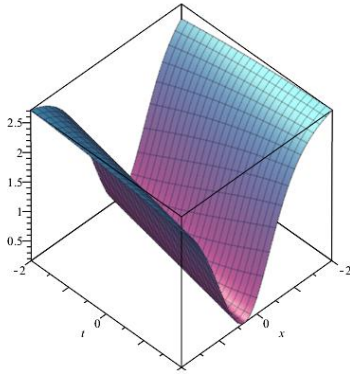
$$u_4(x, t) = \frac{1}{6} \frac{3A_1^2d - 2A_2^2d - 6A_2C_2\alpha_1}{C_2\alpha_1} + A_1 \tanh(x + \beta_1(C_0 + C_2) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)}) \quad (4.25)$$

$$+ A_2 \tanh^2(x + \beta_1(C_0 + C_2) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)})$$

$$v_4(x, t) = \frac{1}{6} \frac{3A_1^2a - 2A_2^2a - 4C_2^2\alpha_1}{C_2\alpha_1} + C_2 \tanh^2(x + \beta_1(C_0 + C_2) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)}) \quad (4.26)$$



Şekil 4.7 (4.25) çözümünün 3D ve yüzey grafikleri: $-2 < x, t < 2$,
 $c = ((\sqrt{6})/4)$, $a = A_1 = A_2 = C_2 = 1$, $d = 3\sqrt{6}$, $\alpha_1 = 2$.



Şekil 4.8 (4.26) çözümünün 3D ve yüzey grafikleri: $-2 < x, t < 2$, $c = ((\sqrt{6})/4)$,
 $a = A_1 = A_2 = C_2 = 1$, $d = 3\sqrt{6}$, $\alpha_1 = 2$

4.2 Kalanlı (Residual) Kuvvet Serileri Yöntemi

Tezin bu bölümünde kesirli GG denkleminin yaklaşık çözümleri elde edilecektir. Bunun için Kalanlı Kuvvet Serileri Yöntemine ait bazı temel tanım ve teoremler verilecektir. (Alquran, 2014; Jaradat et al, 2016) Literatürde birçok kesirli türev operatörü tanımlanmıştır. Bunlardan biri Caputo kesirli türev operatörüdür. Caputo operatörüne göre sabitin türevi sıfır olduğundan, kesirli diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini kuvvet serileri kullanarak bulmamıza olanak tanır.

Tanım 4.1 Caputo anlamında türev, $m \in \mathbb{N}$, $m-1 < \alpha < m$ için

$$D_t^\alpha u(x, t) = \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} \frac{\partial^m u(x, \tau)}{\partial \tau^m} d\tau, & m-1 < \alpha < m \\ \frac{\partial^m u(x, t)}{\partial t^m}, & \alpha = m \in N \end{cases}$$

ile verilir.

Tanım 4.2 $x=x_0$ civarındaki kesirli kuvvet seri açılım formu

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n = c_0 + c_1 (x-x_0)^\alpha + c_2 (x-x_0)^{2\alpha} + \dots$$

$$0 < n-1 < \alpha < n, \quad x \leq x_0.$$

ile verilir.

Teorem 4.1: $f(x)$ fonksiyonu $x=x_0$ noktası civarındaki kesirli kuvvet seri açılımı

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n, \quad x_0 < x < x_0 + R$$

olsun. Buradaki R ise kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapıdır. Eğer $n = 0, 1, 2, \dots$ için

$D^{n\alpha} f(x)$ $(x_0, x_0 + R)$ de sürekli ise $c_n = \frac{D^{n\alpha} f(x_0)}{\Gamma(1+n\alpha)}$ dir.

Tanım 4.3:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) (x-x_0)^n$$

kesirli kuvvet seri açılımına $x=x_0$ noktası civarında çoklu kesirli kuvvet seri açılımı denir.

Tanım 4.4: Varsayalım ki $u(x,t)$ fonksiyonu $t=t_0$ noktasında çoklu kesirli kuvvet seri açılımına

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)(t-t_0)^n, \quad x \in I, \quad t_0 < t < t_0 + R$$

sahip olsun. Eğer $D_t^{n\alpha} u(x,t)$, $I \times (t_0, t_0 + R)$ üzerinde sürekli ise $f_n(x) = \frac{D_t^{n\alpha} u(x,t_0)}{\Gamma(1+n\alpha)}$ dir.

Kesirli GG denkleminin sayısal çözümlerini bulmak için $t=0$ başlangıç koşullarına

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x) \\ v(x,0) &= g(x). \end{aligned}$$

funksiyonlarını alalım. Buna göre $t=0$ için bir kesirli kuvvet seri açılımı

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(1+n\alpha)} \\ v(x,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(1+n\alpha)}, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad x \in I, \end{aligned}$$

olur. $u(x;t)$ ve $v(x;t)$ k-ıncı kesik serileri olmak üzere aşağıdaki gibi verilir.

$$\begin{aligned} u_k(x,t) &= \sum_{n=0}^k f_n(x) \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(1+n\alpha)} \\ v_k(x,t) &= \sum_{n=0}^k g_n(x) \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(1+n\alpha)}, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad x \in I, \quad 0 \leq t < R \end{aligned}$$

$k=0$ için başlangıç koşulunu alırsak, $u(x,t)$ ve $v(x,t)$ için sıfırıncı kesirli kuvvet seri yaklaşık çözümleri aşağıdaki gibi verilir:

$$u_0(x, t) = f_0(x) = u(x; 0) = f(x),$$

$$v_0(x, t) = g_0(x) = v(x; 0) = g(x),$$

Böylece;

$$u_k(x, t) = f(x) + \sum_{n=1}^k f_n(x) \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(1 + n\alpha)},$$

$$v_k(x, t) = g(x) + \sum_{n=1}^k g_n(x) \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(1 + n\alpha)}.$$

formunda yazabiliriz. Kalanlı fonksiyonlar, Res_u , Res_v ise

$$Res_u = \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + auu_x + bu_{xxx} - \alpha_1 vv_x - \beta_1 (uv)_x - \gamma_1 v_{xxx}$$

$$Res_v = \frac{\partial^\alpha v}{\partial t^\alpha} + dvv_x + kv_{xxx} - \alpha_2 uu_x - \beta_2 (uv)_x - \gamma_2 u_{xxx}$$
(4.27)

olur.

Teorem 4.2: k-ıncı kalanlı fonksiyon $Res_k(x, t)$, aşağıdaki şartları sağlamaktadır:

- i. $Res_u(x, t) = 0, \quad Res_v(x, t) = 0.$
- ii. $\lim_{k \rightarrow \infty} Res_{u,k}(x, t) = Res_u(x, t)$ ve $\lim_{k \rightarrow \infty} Res_{v,k}(x, t) = Res_v(x, t).$
- iii. $D_t^{r\alpha} Res_{u,k}(x, 0) = D_t^{r\alpha} Res_u(x, 0) = 0$ ve
 $D_t^{r\alpha} Res_{v,k}(x, 0) = D_t^{r\alpha} Res_v(x, 0) = 0. (r = 0, 1, 2, \dots k)$

$u(x, t)$ ve $v(x, t)$ nin k-ıncı kesikli serisi (4.27) de yerine yazıldığında ve $Res_{u,k}(x, t)$ ve $Res_{v,k}(x, t)$ 'nin $D_t^{(k-1)\alpha}$ türevi hesaplandığında aşağıdaki cebirsel sistem elde edilir.

$$D_t^{(k-1)\alpha} Res_{u,k}(x, 0) = 0,$$

$$D_t^{(k-1)\alpha} Res_{v,k}(x, 0) = 0, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$
(4.28)

(4.28) sisteminin çözülmesiyle ve fonksiyonlar elde edilir. Burada değerleri ne kadar çok alınırsa gerçek çözüme o kadar yaklaşıp.

İlk olarak $k=1$ için ilk kesikli yaklaşık çözüm aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$u_1(x, t) = f(x) + f_1(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \quad (4.29)$$

$$v_1(x, t) = g(x) + g_1(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)}. \quad (4.30)$$

ve 1-inci kalanlı fonksiyonlar $u_1(x, t)$ ve $v_1(x, t)$ nin yerine yazılmasıyla aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned} Res_{u,1}(x, t) = & \frac{\partial^\alpha u_1}{\partial t^\alpha} + au_1 \frac{\partial}{\partial x} u_1 + b \frac{\partial^3}{\partial x^3} u_1 - \alpha_1 v_1 \frac{\partial}{\partial x} v_1 \\ & - \beta_1 \frac{\partial}{\partial x} (u_1 v_1) - \gamma_1 \frac{\partial^3}{\partial x^3} v_1 \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} Res_{v,1}(x, t) = & \frac{\partial^\alpha v_1}{\partial t^\alpha} + dv_1 \frac{\partial}{\partial x} v_1 + k \frac{\partial^3}{\partial x^3} v_1 - \alpha_2 u_1 \frac{\partial}{\partial x} u_1 \\ & - \beta_2 \frac{\partial}{\partial x} (u_1 v_1) - \gamma_2 \frac{\partial^3}{\partial x^3} u_1 \end{aligned} \quad (4.32)$$

(4.29) ve (4.30)'yı (4.31) ve (4.32)'ye yazıldığında aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\begin{aligned} Resu_1(x, t) = & af(x)f'(x) - \beta_1 f(x)g'(x) - \beta_1 f'(x)g(x) \\ & - \alpha_1 g(x)g'(x) + bf'''(x) \\ & - \gamma_1 g'''(x) + f_1(x) + \frac{1}{\Gamma(1 + \alpha)} (af_1(x)t^\alpha f'(x) - \beta_1 f_1(x)t^\alpha g'(x) \\ & + af(x)t^\alpha f_1'(x) - \beta_1 f(x)g_1'(x)t^\alpha - \beta_1 g(x)f_1'(x)t^\alpha - \alpha_1 g(x)g_1'(x)t^\alpha \\ & - \alpha_1 g'(x)g_1(x)t^\alpha - \beta_1 g_1(x)t^\alpha f'(x) + bf_1'''(x)t^\alpha - \gamma_1 g_1'''(x)t^\alpha) \\ & + \frac{1}{\Gamma(1 + \alpha)^2} (af_1(x)t^{2\alpha} f_1'(x) - \beta_1 f_1(x)g_1'(x)t^{2\alpha} - \beta_1 g_1(x)t^{2\alpha} f_1'(x) \\ & - \alpha_1 g_1(x)t^{2\alpha} g_1'(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Resv_1(x, t) = & dg(x)g'(x) - \beta_2 f(x)g'(x) - \beta_2 f'(x)g(x) - \alpha_2 f(x)f'(x) \\
& + kg'''(x) - \gamma_2 f'''(x) + g_1(x) + \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} (dg_1(x)t^\alpha g'(x) \\
& - \beta_2 f_1(x)t^\alpha g'(x) + dg(x)t^\alpha g'_1(x) - \beta_2 f(x)g'_1(x)t^\alpha \\
& - \beta_2 g_1(x)t^\alpha f'(x) - \beta_2 g(x)f'_1(x)t^\alpha - \alpha_2 f(x)f'_1(x)t^\alpha \\
& - \alpha_2 f'(x)f_1(x)t^\alpha + kg_1'''(x)t^\alpha - \gamma_2 f_1'''(x)t^\alpha \\
& + \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)^2} (dg_1(x)t^{2\alpha} g'_1(x) - \beta_2 f_1(x)g'_1(x)t^{2\alpha} \\
& - \beta_2 g_1(x)t^{2\alpha} f'_1(x) - \alpha_2 f_1(x)t^{2\alpha} f'_1(x))
\end{aligned} \tag{4.33}$$

$Res_{u,1}(x, 0) = 0$, $Res_{v,1}(x, 0) = 0$ olduğundan (4.33) den $f_1(x)$ ve $g_1(x)$ fonksiyonlar

$$\begin{aligned}
f_1(x) = & -af(x)f'(x) + \beta_1 f(x)g'(x) + \beta_1 f'(x)g(x) \\
& + \alpha_1 g(x)g'(x) - bf'''(x) + \gamma_1 g'''(x) \\
g_1(x) = & -dg(x)g'(x) + \beta_2 f(x)g'(x) + \beta_2 f'(x)g(x) \\
& + \alpha_2 f(x)f'(x) - kg'''(x) + \gamma_2 f'''(x)
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece, 1-inci kesikli seri yaklaşım aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
u_1(x, t) = & f(x) \\
& + (-af(x)f'(x) + \beta_1 f(x)g'(x) + \beta_1 f'(x)g(x) + \alpha_1 g(x)g'(x) \\
& - bf'''(x) + \gamma_1 g'''(x)) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_1(x, t) = & g(x) \\
& + (-dg(x)g'(x) + \beta_2 f(x)g'(x) + \beta_2 f'(x)g(x) + \alpha_2 f(x)f'(x) \\
& - kg'''(x) + \gamma_2 f'''(x)) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}
\end{aligned}$$

$k = 2$ olduğunda ikinci kesikli seri çözüm formu

$$u_2(x, t) = f(x) + f_1(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} + f_2(x) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1 + 2\alpha)} \quad (4.34)$$

$$v_2(x, t) = g(x) + g_1(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} + g_2(x) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1 + 2\alpha)}. \quad (4.35)$$

olur ve 2-inci kesikli fonksiyonlar aşağıdaki gibi verilir:

$$Res_{u,2}(x, t) = \frac{\partial^\alpha u_2}{\partial t^\alpha} + au_2 \frac{\partial}{\partial x} u_2 + b \frac{\partial^3}{\partial x^3} u_2 \quad (4.36)$$

$$- \alpha_1 v_2 \frac{\partial}{\partial x} v_2 - \beta_1 \frac{\partial}{\partial x} (u_2 v_2) - \gamma_1 \frac{\partial^3}{\partial x^3} v_2$$

$$Res_{v,2}(x, t) = \frac{\partial^\alpha v_2}{\partial t^\alpha} + dv_2 \frac{\partial}{\partial x} v_2 + k \frac{\partial^3}{\partial x^3} v_2 \quad (4.37)$$

$$- \alpha_2 u_2 \frac{\partial}{\partial x} u_2 - \beta_2 \frac{\partial}{\partial x} (u_2 v_2) - \gamma_2 \frac{\partial^3}{\partial x^3} u_2$$

(4.34) ve (4.35)'yi (4.36) ve (4.37)'ye yerine yazılmasıyla ve $D_t^\alpha Res_{u,k}(x, 0) = 0$ ve $D_t^\alpha Res_{v,k}(x, 0) = 0$ şartlarının uygulanmasıyla

$$\begin{aligned} f_2(x) = & \alpha_1 g_1(x) g'(x) + \beta_1 f_1(x) g'(x) + \beta_1 g_1(x) f'(x) \\ & - a f_1(x) f'(x) + \beta_1 f(x) g_1'(x) + \alpha_1 g(x) g_1'(x) \\ & - a f(x) f_1'(x) + \beta_1 g(x) f_1'(x) - b f_1'''(x) + \gamma_1 g_1'''(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_2(x) = & \alpha_2 f_1(x) f'(x) + \beta_2 g_1(x) f'(x) + \beta_2 f_1(x) g'(x) \\ & + \alpha_2 f(x) f'(x) + \beta_2 f(x) g_1'(x) + \beta_2 g(x) f_1'(x) \\ & - d g_1(x) g'(x) - d g(x) g_1'(x) + \gamma_2 f_1'''(x) - k g_1'''(x). \end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece, ikinci kesikli seri yaklaşık çözümleri aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned}
u_2(x, t) &= f(x) + \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} (-af(x)f'(x) + \beta_1 f(x)g'(x) + \beta_1 f'(x)g(x) \\
&\quad + \alpha_1 g(x)g'(x) - bf'''(x) + \gamma_1 g'''(x)) + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} (\alpha_1 g_1(x)g'(x) \\
&\quad + \beta_1 f_1(x)g'(x) + \beta_1 g_1(x)f'(x) - af_1(x)f'(x) + \beta_1 f(x)g'_1(x) \\
&\quad + \alpha_1 g(x)g'_1(x) - af(x)f'_1(x) + \beta_1 g(x)f'_1(x) - bf_1'''(x) + \gamma_1 g_1'''(x)) \\
v_2(x, t) &= g(x) + \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} (-dg(x)g'(x) + \beta_2 f(x)g'(x) + \beta_2 f'(x)g(x) \\
&\quad + \alpha_2 f(x)f'(x) - kg'''(x) + \gamma_2 f'''(x)) + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} (\alpha_2 f_1(x)f'(x) \\
&\quad + \beta_2 f_1(x)g'(x) + \alpha_2 f(x)f'_1(x) + \beta_2 f(x)g'_1(x) + \beta_2 g(x)f'_1(x) \\
&\quad - dg_1(x)g'(x) - dg(x)g'_1(x) + \gamma_2 f_1'''(x) - kg_1'''(x)) + \beta_2 g_1(x)f'(x)
\end{aligned}$$

Aynı prosedür $k = 3$ için uygulanırsa üçüncü kalanlı seri kuvvet çözümleri aşağıdaki formda olur:

$$u_3(x, t) = f(x) + f_1(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + f_2(x) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} + f_3(x) \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)} \quad (4.38)$$

$$v_3(x, t) = g(x) + g_1(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + g_2(x) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} + g_3(x) \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)}. \quad (4.39)$$

olur ve 3-üncü kesikli fonksiyonlar aşağıdaki gibi verilir:

$$Res_{u,3}(x, t) = \frac{\partial^\alpha u_3}{\partial t^\alpha} + au_3 \frac{\partial}{\partial x} u_3 + b \frac{\partial^3}{\partial x^3} u_3 - \alpha_1 v_3 \frac{\partial}{\partial x} v_3 \quad (4.40)$$

$$- \beta_1 \frac{\partial}{\partial x} (u_3 v_3) - \gamma_1 \frac{\partial^3}{\partial x^3} v_3$$

$$Res_{v,3}(x, t) = \frac{\partial^\alpha v_3}{\partial t^\alpha} + dv_3 \frac{\partial}{\partial x} v_3 + k \frac{\partial^3}{\partial x^3} v_3 - \alpha_2 u_3 \frac{\partial}{\partial x} u_3 \quad (4.41)$$

$$-\beta_2 \frac{\partial}{\partial x} (u_3 v_3) - \gamma_2 \frac{\partial^3}{\partial x^3} u_3$$

(4.38) ve (4.39)'yı (4.40) ve (4.41)'ye yerine yazılmasıyla ve $D_t^{2\alpha} Res_{u,k}(x, 0) = 0$ ve $D_t^{2\alpha} Res_{v,k}(x, 0) = 0$ şartların uygulanmasıyla $f_3(x)$ ve $g_3(x)$ fonksiyonlar aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} f_3(x) &= -af(x)f_2'(x) - af_2(x)f'(x) + \beta_1 g_2(x)f'(x) + \beta_1 g(x) \\ &+ \beta_1 f_2(x)g'(x) + f_2'(x)\beta_1 f(x)g_2'(x) + \alpha_1 g(x)g_2'(x) + \alpha_1 g_2(x)g'(x) \\ &+ \gamma_1 g_2'''(x) - bf_2'''(x) - \frac{\frac{4^\alpha}{\Gamma(\alpha + \frac{1}{2})} af_1(x)f_1'(x)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha)\alpha} + 2 \frac{\frac{4^\alpha}{\Gamma(\alpha + \frac{1}{2})} \beta_1 f_1(x)g_1'(x)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha)\alpha} \\ &+ 2 \frac{\frac{4^\alpha}{\Gamma(\alpha + \frac{1}{2})} \beta_1 g_1(x)f_1'(x)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha)\alpha} + 2 \frac{\frac{4^\alpha}{\Gamma(\alpha + \frac{1}{2})} \alpha_1 g_1(x)g_1'(x)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha)\alpha} \\ g_3(x) &= \beta_2 g_2(x)f'(x) + \beta_2 g_2'(x)f(x) + \alpha_2 f(x)f_2'(x) + \beta_2 f_2(x)g'(x) \\ &+ \beta_2 g(x)f_2'(x) + \alpha_2 f_2(x)f'(x) + dg(x)g_2'(x) - dg_2(x)g'(x) \\ &- kg_2'''(x) + \gamma_2 f_2'''(x) + \frac{\frac{4^\alpha}{\Gamma(\alpha + \frac{1}{2})} \alpha_2 f_1(x)f_1'(x)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha)\alpha} + \frac{\frac{4^\alpha}{\Gamma(\alpha + \frac{1}{2})} \beta_2 f_1(x)g_1'(x)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha)\alpha} \\ &- \frac{\frac{4^\alpha}{\Gamma(\alpha + \frac{1}{2})} dg_1(x)g_1'(x)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha)\alpha} + \frac{\frac{4^\alpha}{\Gamma(\alpha + \frac{1}{2})} \beta_2 g_1(x)f_1'(x)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha)\alpha} \end{aligned}$$

Son olarak $k = 4$ için aynı işlemler yapıldığında hesaplamalar oldukça karmaşık hale gelir. Elde edilen $f_4(x)$ ve $g_4(x)$ fonksiyonlar aşağıdadır:

$$\begin{aligned}
f_4(x) = & \frac{1}{\Gamma(2\alpha)\Gamma(1+\alpha)} (3\beta_1(g_1(x)f_2'(x) + f_1(x)g_2'(x)) \\
& + \frac{3}{2}\alpha_1(g_1(x)g_2'(x) + g_2(x)g_1'(x)) \\
& - \frac{3}{2}a(f_1(x)f_2'(x) + f_2(x)f_1'(x))\Gamma(3\alpha)) \\
& - a(f(x)f_3'(x) + af_3(x)f'(x)) + 2\beta_1(f(x)g_3'(x) \\
& + g(x)f_3'(x)) + \alpha_1(g(x)g_3'(x) + g_3(x)g'(x)) - bf_3'''(x) + \gamma_1g_3'''(x),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_4(x) = & \frac{1}{\Gamma(2\alpha)\Gamma(1+\alpha)} (3\beta_2(f_2(x)g_1'(x) + g_1(x)f_2'(x)) \\
& - \frac{3}{2}a(g_1g_2'(x) + g_1'(x)g_2(x)) + \frac{3}{2}\alpha_2(f_2(x)f_1'(x) + 3\alpha_2f_1(x)f_2'(x))\Gamma(3\alpha)) \\
& - d(g_3(x)g'(x) + dg(x)g_3'(x)) + \beta_2(f_3(x)g'(x) \\
& + g(x)f_3'(x)) + \beta_2(f(x)g_3'(x) + g_3(x)f'(x)) \\
& + \beta_2(g_2(x)f_1'(x) + f_1(x)g_2'(x)) - d(g_2(x)g_1'(x) + g_1(x)g_2'(x)) \\
& + \alpha_2(f_3(x)f'(x) + f(x)f_3'(x)) + \gamma_2f_3'''(x) - kg_3'''(x).
\end{aligned}$$

$$u(x, t) = \frac{-3-8\sqrt{6}}{48} + \tanh\left(x + \frac{1}{16} \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right) \text{ ve } v(x, t) = 8 + 8\sqrt{6} \tanh\left(x + \frac{1}{16} \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right) - 24 \tanh\left(\frac{1}{16} \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right)^2$$

fonksiyonlar (4.1) denkleminin birer kesin çözümüdür.

Böylece $u(x, 0) = f(x) = \frac{-3-8\sqrt{6}}{48} + \tanh(x)$ ve $v(x, 0) = g(x) = 8 +$

$8\sqrt{6} \tanh(x) - 24 \tanh(x)^2$ değerleri yukarıda bulunan dört iterasyon içerisinde yazılmasıyla uzun hesaplamaların ardından,

$u(x, t)$ ve $v(x, t)$ fonksiyonlarının mutlak hatalar, t ve α değerleri için aşağıdaki tabloda verilmiştir:

Çizelge 5.1. $\alpha=0.75$ değeri için $u(x, t)$ nın mutlak hataları

x t	0.02	0.04	0.06	0.08
1.0	1.2×10^{-6}	3.56×10^{-6}	6.07×10^{-6}	8.12×10^{-6}
2.0	2.93×10^{-7}	9.98×10^{-7}	2.18×10^{-6}	3.96×10^{-6}
3.0	3.73×10^{-8}	1.14×10^{-7}	2.31×10^{-7}	3.95×10^{-7}
4.0	5.2×10^{-9}	1.43×10^{-8}	2.86×10^{-8}	4.66×10^{-8}
5.0	2×10^{-10}	1.8×10^{-9}	2.8×10^{-9}	6.2×10^{-9}

Çizelge 5.2. $\alpha=0.85$ değeri için $u(x,t)$ nın mutlak hataları

x t	0.02	0.04	0.06	0.08
1.0	3.25×10^{-7}	1.19×10^{-6}	2.67×10^{-6}	4.88×10^{-6}
2.0	6.68×10^{-8}	2.44×10^{-7}	5.49×10^{-7}	1.01×10^{-6}
3.0	8.09×10^{-9}	3.01×10^{-8}	6.47×10^{-8}	1.14×10^{-7}
4.0	1.3×10^{-9}	4.6×10^{-9}	8.6×10^{-9}	1.54×10^{-8}
5.0	0	5×10^{-10}	8×10^{-10}	1.8×10^{-9}

Çizelge 5.3. $\alpha=1$ değeri için $u(x,t)$ nın mutlak hataları

x t	0.02	0.04	0.06	0.08
1.0	9×10^{-10}	2.41×10^{-8}	1.24×10^{-7}	3.93×10^{-7}
2.0	3×10^{-10}	4×10^{-10}	2.9×10^{-9}	8.9×10^{-9}
3.0	2×10^{-10}	9×10^{-10}	9×10^{-10}	7×10^{-10}
4.0	2×10^{-10}	2×10^{-10}	5×10^{-10}	2×10^{-10}
5.0	1×10^{-10}	5×10^{-10}	1×10^{-10}	2×10^{-10}

Çizelge 5.4. $\alpha=0.75$ değeri için $v(x,t)$ nın mutlak hataları

x t	0.02	0.04	0.06	0.08
1.0	7.25×10^{-7}	6.45×10^{-5}	1.93×10^{-5}	4.08×10^{-5}
2.0	1.66×10^{-6}	4.11×10^{-6}	6.67×10^{-6}	9.12×10^{-6}
3.0	2.63×10^{-7}	6.48×10^{-7}	1.03×10^{-6}	1.37×10^{-6}
4.0	4.1×10^{-8}	9.4×10^{-8}	1.44×10^{-7}	1.89×10^{-7}
5.0	4×10^{-9}	1.1×10^{-8}	1.8×10^{-8}	2.5×10^{-8}

Çizelge 5.5. $\alpha=0.85$ değeri için $v(x,t)$ nın mutlak hataları

x t	0.02	0.04	0.06	0.08
1.0	1.73×10^{-7}	1.88×10^{-6}	6.15×10^{-6}	1.36×10^{-5}
2.0	4.13×10^{-7}	1.13×10^{-6}	1.84×10^{-6}	2.4×10^{-6}
3.0	6.5×10^{-8}	1.87×10^{-7}	3.02×10^{-7}	3.94×10^{-7}
4.0	5×10^{-9}	2.5×10^{-8}	4.1×10^{-8}	5.2×10^{-8}
5.0	5×10^{-9}	3×10^{-9}	6×10^{-9}	5×10^{-9}

Çizelge 5.6. $\alpha=1$ değeri için $v(x,t)$ nın mutlak hataları

x t	0.02	0.04	0.06	0.08
1.0	6.9×10^{-8}	5.1×10^{-7}	1.67×10^{-6}	3.86×10^{-6}
2.0	1.3×10^{-8}	9.4×10^{-8}	2.91×10^{-7}	7×10^{-7}
3.0	5×10^{-9}	1.4×10^{-8}	4.7×10^{-8}	1.06×10^{-7}
4.0	2×10^{-9}	1×10^{-9}	9×10^{-9}	1.8×10^{-8}
5.0	2×10^{-9}	1×10^{-9}	2×10^{-9}	2×10^{-9}

5. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu tez çalışmasında zaman kesir türevli Gear-Grimshaw modeli bir sığ su dalga modeli ele alınmıştır. Ele alınan sistemin hem kesin çözümleri hem de yaklaşık çözümleri elde edilmiştir. Kesin çözümleri bulmak için Sine-Gordon açılım metodu kullanılmıştır. Metodun uygulanabilmesi için ilk olarak dalga dönüşümü ile kısmi diferansiyel denklem adi diferansiyel denkleme indirgenmiştir. Soliton çözümleri elde etmek istediğimiz için soliton oluşumunu veren homojen dengelenme prensibinden dengelenme katsayısı bulunmuştur. Yardımcı denklem olarak çokça bilinen Sine –Gordon denkleminin çözümlerinden yola çıkılarak orjinal denklemin kesin çözümleri hiperbolik fonksiyonlar olarak ifade edilmiştir. Bulunan tüm çözümler sembolik hesaplama programı ile doğrulaması yapılmış ve yine aynı ortamda 3-boyutlu ve yoğunluk grafikleri çizdirilmiştir.

Çalışmanın bir diğer ayağı ise yaklaşık çözüm üzerine olmuştur. Yaklaşık çözüm bulma yöntemlerinden Kalanlı Kuvvet Serileri Yöntemi (Residual Power Series Method) zaman kesir türevli GG denklemine uygulanmıştır. Ard arda yapılan dört iterasyon ile denklemin yaklaşık çözümleri bulunmuştur. Burada kesir türev değişkeni α nın $\alpha=0.75$, $\alpha=0.85$, $\alpha=1$ değerleri için $u(x,t)$ ve $v(x,t)$ değerleri hesaplanmıştır. Bulunan yaklaşık çözümler ve kesin çözümler karşılaştırılarak hataların mutlak değerleri bir tabloda verilmiştir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Elde edilen kesin (hareketli dalga) çözümleri, başlangıç/sınır değer problemlerinde ve sayısal çözüm yöntemlerinde başlangıç değeri olarak kullanılabilir.

Ele alınan yöntemler hem uygulama açısından hem de kolaylık açısından birçok lineer olmayan modele uygulanabilir. Bu çalışma da kullanılan yöntemlerin dışında yine birçok kesin çözüm ve sayısal çözüm bulma yöntemi bu denklemi konu alabileceğinden bu da açık bir problemidir. Denklem farklı tam çözüm metotları ile çözülerek farklı çözümler elde edilebilir.

Kesir türevli GG denklemi adi diferansiyel denkleme dönüştürüldükten sonra faz düzlemi olarak da yazılabilir ve böylece sistemin düzlemsel dinamik sistem özellikleri de araştırılacak diğer bir açık problemidir.

Bu tez de kesir mertebeden GG denkleminin kesin çözümleri üstel fonksiyonlar olarak (hiperbolik fonksiyonlar) olarak elde edilmiştir. Uygulanabilecek diğer yöntemler ile çözümler trigonometrik fonksiyon ve komplekston (hem kompleks hem üstel fonksiyon içeren) fonksiyon olarak bulunabilir.

Bu tezde elde edilen sonuçlar makale formatında hazırlanıp uluslararası SCI-Expanded kapsamındaki dergiye gönderilmiştir. doi.org/10.1142/S0219887822501729 numarası ile basılarak literatüre girmiştir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Alquran, M. (2014). Analytical solutions of fractional foam drainage equation by residual power series method. *Mathematical sciences*, 8(4), 153-160.
- Baskonus, H. M., Bulut, H., & Sulaiman, T. A. (2019). New complex hyperbolic structures to the lonngren-wave equation by using sine-gordon expansion method. *Applied Mathematics and Nonlinear Sciences*, 4(1), 129-138.
- Biswas, A., & Ismail, M. S. (2010). 1-Soliton solution of the coupled KdV equation and Gear–Grimshaw model. *Applied Mathematics and Computation*, 216(12), 3662-3670.
- Bohannan, G. W. (2008). Analog fractional order controller in temperature and motor control applications. *Journal of Vibration and Control*, 14(9-10), 1487-1498.
- Capistrano Filho, R. A., Komornik, V., & Pazoto, A. F. (2014). Stabilization of the Gear–Grimshaw system on a periodic domain. *Communications in Contemporary Mathematics*, 16(06), 1450047.
- Capistrano–Filho, R. A. (2018). Stabilization of the Gear–Grimshaw system with weak damping. *Journal of Dynamical and Control Systems*, 24, 145-166.
- Cervera, J., & Baños, A. (2008). Automatic loop shaping in QFT using CRONE structures. *Journal of Vibration and Control*, 14(9-10), 1513-1529.
- Çevikel, A. C., Bekir, A., Akar, M., & San, S. (2012). A procedure to construct exact solutions of nonlinear evolution equations. *Pramana*, 79, 337-344.
- Cevikel, A. C., Bekir, A., San, S., & Gucen, M. B. (2014). Construction of periodic and solitary wave solutions for the complex nonlinear evolution equations. *Journal of the Franklin Institute*, 351(2), 694-700.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- De Espíndola, J. J., Bavastri, C. A., & de Oliveira Lopes, E. M. (2008). Design of optimum systems of viscoelastic vibration absorbers for a given material based on the fractional calculus model. *Journal of Vibration and Control*, 14(9-10), 1607-1630.
- Debnath, L. (2003). Recent applications of fractional calculus to science and engineering. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2003(54), 3413-3442.
- Gazizov, R. K., & Ibragimov, N. H. (1998). Lie symmetry analysis of differential equations in finance. *Nonlinear Dynamics*, 17, 387-407.
- Gear, J. A., & Grimshaw, R. (1984). Weak and strong interactions between internal solitary waves. *Studies in Applied Mathematics*, 70(3), 235-258.
- Gurefe, Y., Sonmezoglu, A., & Misirli, E. (2011). Application of the trial equation method for solving some nonlinear evolution equations arising in mathematical physics. *Pramana*, 77, 1023-1029.
- Gutierrez, R. E., Rosário, J. M., & Tenreiro Machado, J. (2010). Fractional order calculus: basic concepts and engineering applications. *Mathematical problems in engineering*, 2010.
- Heymans, N. (2008). Dynamic measurements in long-memory materials: fractional calculus evaluation of approach to steady state. *Journal of Vibration and Control*, 14(9-10), 1587-1596.
- Kaplan, M., San, S., & Bekir, A. (2018). On the exact solutions and conservation laws to the Benjamin-Ono equation. *Journal of Applied Analysis and Compututation*, 8(1), 1-9.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., & Trujillo, J. J. (2006). Theory and applications of fractional differential equations (Vol. 204). elsevier.
- Kivshar, Y. S., & Malomed, B. A. (1989). Dynamics of solitons in nearly integrable systems. *Reviews of Modern Physics*, 61(4), 763.
- Körpınar, Z. (2017). The residual power series method for solving fractional Klein-Gordon equation. *Sakarya University Journal of Science*, 21(3), 285-293.
- Krishna, B. T., & Reddy, K. (2008). Active and passive realization of fractance device of order 1/2. *Active and passive electronic components*, 2008.
- Kumar, D., Hosseini, K., & Samadani, F. (2017). The sine-Gordon expansion method look for the traveling wave solutions of the Tzitzéica type equations in nonlinear optics. *Optik*, 149, 439-446.
- Lazarević, M. P., Rapaić, M. R., Šekara, T. B., Mladenov, V., & Mastorakis, N. (2014). Introduction to fractional calculus with brief historical background. *Advanced topics on applications of fractional calculus on control problems, system stability and modeling*, 3-16.
- Lima, M. F., Tenreiro Machado, J. A., & Crisóstomo, M. (2007). Experimental signal analysis of robot impacts in a fractional calculus perspective. *Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics*, 11, 1079-1085.
- Parkes, E. J., & Vakhnenko, V. O. (2005). Explicit solutions of the Camassa–Holm equation. *Chaos, Solitons & Fractals*, 26(5), 1309-1316.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Pu, Y., Yuan, X., Liao, K., Zhou, J., Zhang, N., Pu, X., & Zeng, Y. (2006, January). A recursive two-circuits series analog fractance circuit for any order fractional calculus. In *ICO20: Optical Information Processing* (Vol. 6027, pp. 509-519). SPIE.
- Rosario, J. M., Dumur, D., & Machado, J. T. (2006). Analysis of fractional-order robot axis dynamics. *IFAC Proceedings Volumes*, 39(11), 367-372.
- Rosenau, P., & Hyman, J. M. (1993). Compactons: solitons with finite wavelength. *Physical Review Letters*, 70(5), 564.
- Samko, S. G., Kilbas, A. A., & Marichev, O. I. (1993). *Fractional integrals and derivatives* (Vol. 1). Yverdon-les-Bains, Switzerland: Gordon and Breach science publishers, Yverdon.
- Tchier, F., Inc, M., Korpınar, Z. S., & Baleanu, D. (2016). Solutions of the time Fractional reaction–diffusion equations with residual power series method. *Advances in Mechanical Engineering*, 8(10), 1687814016670867.
- Tenreiro Machado, J. A. (2003). A probabilistic interpretation of the fractional-order differentiation. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 6, 73-79.
- Triki, H., Kara, A., Bhrawy, A., & Biswas, A. (2014). Soliton solution and conservation law of Gear-Grimshaw model for shallow water waves. *Acta Physica Polonica A*, 125(5), 1099-1106.
- Wazwaz, A. M. (2005). The tanh method for generalized forms of nonlinear heat conduction and Burgers–Fisher equations. *Applied Mathematics and Computation*, 169(1), 321-338.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Wazwaz, A. M. (2006). Peakons, kinks, compactons and solitary patterns solutions for family of Camassa–Holm equations by using new hyperbolic schemes. *Applied mathematics and computation*, 182(1), 412-424.
- Yang, X. J., Tenreiro Machado, J. A., & Baleanu, D. (2017). Anomalous diffusion models with general fractional derivatives within the kernels of the extended Mittag-Leffler type functions.
- Zabusky, N. J., & Kruskal, M. D. (1965). Interaction of " solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Physical review letters*, 15(6), 240.
- Zeng, Q. S., Cao, G. Y., & Zhu, X. J. (2002, November). The effect of the fractional-order controller's orders variation on the fractional-order control systems. In *Proceedings. International Conference on Machine Learning and Cybernetics* (Vol. 1, pp. 367-372). IEEE.
- Zhou, Q., Ekici, M., Sonmezoglu, A., Mirzazadeh, M., & Eslami, M. (2016). Optical solitons with Biswas–Milovic equation by extended trial equation method. *Nonlinear Dynamics*, 84, 1883-1900.