

T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

UNIT POWER LINDLEY DAĞILIMI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Öğrencinin Adı SOYADI : Hülya KARAKUŞ

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 14.07.2023

Enstitü Anabilim Dalı : İstatistik

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Fatma Zehra DOĞRU
Ortak Danışman : Doç. Dr. Fatma Gül AKGÜL

Temmuz 2023
GİRESUN

T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

UNIT POWER LINDLEY DAĞILIMI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hülya KARAKUŞ

Enstitü Anabilim Dalı : İstatistik

Bu tez .././20.. tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

..... Dr.
.....
Jüri Başkanı

..... Dr.
.....
Üye

.... Dr.
.....
Üye

..... Dr.
.....
Enstitü Müdürü

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Hülya KARAKUŞ
14/07/2023

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam sırasında kıymetli bilgi birikimleri ve tecrübeleri ile bana yol gösterici olan, çalışma konusunun temellerini atma hususunda fikirleriyle ufkumu açan, çalışma boyunca emek ve yönlendirmeleriyle beni çalışmaya teşvik eden değerli danışman hocalarım Doç. Dr. Fatma Zehra DOĞRU ve Doç. Dr. Fatma Gül AKGÜL'e sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Yüksek lisans eğitim hayatım boyunca bilgileriyle ışık tutan Giresun Üniversitesi İstatistik Bölümü değerleri hocalarına, bilgi eksikliğini yaşadığım her konuda sonsuz destekler veren, danışmanlığımı üstlenerek beni öğrencisi olmaktan dolayı gururlandıran çok kıymetli hocam Doç. Dr. Fatma Zehra DOĞRU'ya tekrar teşekkür ederim.

Tez çalışmam sırasında yardımlarını esirgemeyerek her konuda geri dönüş yapan, akademik hayatıma gerekli motivasyonu sağlayan ve kıymetli sohbetleriyle desteklerini her zaman hissettiren sevgili arkadaşlarıma çok teşekkür ederim.

Öğrenim hayatım boyunca daima yanımda olan, maddi ve manevi destekleriyle bugünlere gelmemi sağlayan canım aileme sonsuz şükran ve minnettarlığımıla...

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	I
İÇİNDEKİLER	II
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ	IV
ŞEKİLLER LİSTESİ	V
TABLOLAR LİSTESİ.....	VI
ÖZET.....	VII
SUMMARY	VIII
BÖLÜM 1. GİRİŞ.....	1
BÖLÜM 2. UNIT POWER LINDLEY DAĞILIMI.....	6
2.1. UPL Dağılımının Özellikleri.....	9
2.1.1. UPL Dağılımının Hazard Fonksiyonu	9
2.1.2. UPL Dağılımının Yüzdalık Fonksiyonu	10
2.1.3. UPL Dağılımının Beklenen Değer ve Varyansı.....	11
2.1.4. UPL Dağılımı için Çarpıklık ve Basıklık Katsayıları	12
BÖLÜM 3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	16
3.1. Parametre Tahmini.....	16
3.1.1. En Çok Olabilirlik Tahmin Yöntemi.....	16
3.1.1.1. Güven Aralığı.....	17
3.1.2. En Küçük Kareler Tahmin Yöntemi	20
3.1.3. Ağırlıklandırılmış En Küçük Kareler Tahmin Yöntemi	21
3.1.4. Cramér von Mises Tahmin Yöntemi.....	21
3.1.5. Anderson Darling Tahmin Yöntemi.....	22
3.1.6. Right Tail Anderson Darling Tahmin Yöntemi	23

BÖLÜM 4. ARAŞTIRMA BULGULARI.....	24
4.1. Simülasyon Çalışması	24
4.2. Rastgele Sayı Üretme Prosedürü.....	24
4.3. Hesaplama ile İlgili Detaylar	24
4.4. Simülasyon Sonuçları.....	26
4.5. Gerçek Veri Uygulaması.....	33
BÖLÜM 5. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	39
KAYNAKLAR	40
ÖZGEÇMİŞ	43

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

γ_1	: Çarpıklık Katsayısı
γ_2	: Basıklık Katsayısı
σ^2	: Varyans
μ	: Beklenen Değer
AD	: Anderson Darling Tahmin Yöntemi
AIC	: Akaike Bilgi Kriteri (Akaike Information Criterion)
AW	: Ortalama Aralık Uzunluğu (Average Weight)
BIC	: Bayes Bilgi Kriteri (Bayesian Information Criterion)
CP	: Kapsama Olasılığı (Coverage Probability)
CV	: Cramér von Mises Tahmin Yöntemi
cdf	: Kümülatif Dağılım Fonksiyonu (Cumulative density function)
EDC	: Etkin Belirleme Bilgi Kriteri (Efficient Determination Criterion)
KM	: Kumaraswamy Dağılımı
KS	: Kolmogrov-Simirnov Test İstatistiği
LS	: En Küçük Kareler (Least Squares)
ML	: En Çok Olabilirlik (Maximum Likelihood)
pdf	: Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu (Probability density function)
PL	: Power Lindley Dağılımı
RAD	: Right Tail Anderson Darling Tahmin Yöntemi
UL	: Unit Lindley Dağılımı
UPL	: Unit Power Lindley Dağılımı
WLS	:Ağırlıklandırılmış En Küçük Kareler (Weighted Least Squares) Tahmin Yöntemi

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1. UPL dağılımının α ve β parametrelerinin farklı değerleri için pdf davranışı	8
Şekil 2.2. UPL dağılımının α ve β parametrelerinin farklı değerleri için cdf davranışı	9
Şekil 2.3. UPL dağılımının α ve β parametrelerinin farklı değerleri için ortalama değer ve varyansı	15
Şekil 2.4. UPL dağılımının α ve β parametrelerinin farklı değerleri için çarpıklık ve basıklık katsayısı	15
Şekil 4.1. Veri setinin histogramı üzerine UPL, Kumaraswamy, Beta ve UL dağılımlarından elde edilen uydurulmuş pdf grafikleri.....	35
Şekil 4.2. UPL ve Kumaraswamy dağılımlarına ait Q-Q grafikleri.....	36
Şekil 4.3. Beta ve UL dağılımlarına ait Q-Q grafikleri.....	36
Şekil 4.4. Veri setinin histogramı üzerine UPL, Kumaraswamy, Beta ve UL dağılımlarından elde edilen uydurulmuş pdf grafikleri.....	37
Şekil 4.5. UPL ve Kumaraswamy dağılımlarına ait Q-Q grafikleri.....	38
Şekil 4.6. Beta ve UL dağılımlarına ait Q-Q grafikleri.....	38

TABLolar LİSTESİ

Tablo 2.1 UPL dağılımının α ve β parametrelerinin farklı değerleri için beklenen değer, varyans, çarpıklık ve basıklık katsayısı değerleri.....	14
Tablo 4.1. α ve β için simüle edilmiş yan ve MSE değerleri	28
Tablo 4.2. α ve β için simüle edilmiş yan ve MSE değerleri	28
Tablo 4.3. α ve β için simüle edilmiş yan ve MSE değerleri	29
Tablo 4.4. α ve β için simüle edilmiş yan ve MSE değerleri	29
Tablo 4.5. α ve β için simüle edilmiş yan ve MSE değerleri	30
Tablo 4.6. α ve β için simüle edilmiş yan ve MSE değerleri	30
Tablo 4.7. α ve β için en küçük MSE değerleri ve bu değerlere ait tahmin yöntemleri	31
Tablo 4.8. α ve β parametreleri için kapsama olasılığı (CP) ve ortalama aralık uzunluğu (AW) değerleri	32
Tablo 4.9. Veri seti-1	34
Tablo 4.10. Operasyon verileri için verilen dağılımlara ait istatistiki değerler	35
Tablo 4.11. Veri seti-2	37
Tablo 4.12. Operasyon verileri için verilen dağılımlara ait istatistiki değerler	37

UNIT POWER LINDLEY DAĞILIMI

ÖZET

Bu tez çalışmasında, unit dağılımlardan yola çıkılarak, literatürde var olan power Lindley dağılımı üzerinde uygun dönüşüm işlemleri yapılmış ve birim aralığa çekilerek Unit Power Lindley (UPL) dağılımı önerilmiştir. UPL dağılımına ait olasılık yoğunluk fonksiyonu (pdf) ve kümülatif dağılım fonksiyonu (cdf) ile birlikte dağılıma ait çeşitli özellikler incelenmiştir. UPL dağılımının parametreleri en çok olabilirlik (ML), en küçük kareler (LS), ağırlıklandırılmış en küçük kareler (WLS), cramer-von mises (CVM), anderson darling (AD) ve right-tail anderson darling (RAD) tahmin edici yöntemleri kullanılarak tahmin edilmiştir. Tahmin edicilerin performansları, farklı parametre değerleri ve farklı örneklem büyüklükleri için simülasyon çalışması ile karşılaştırılmıştır. En iyi sonuçları veren tahmin edici yönteminin ML tahmin edici yöntemi olduğu sonuca varılarak bu tahmin yöntemi gerçek veri setine uygulanmış ve birim aralığa sahip olan Kumaraswamy dağılımı (KM), Beta dağılımı ve Unit Lindley dağılımı (UL) ile karşılaştırılmıştır. Karşılaştırmalardan elde edilen sonuçlar ve grafikler doğrultusunda, tez çalışmasında önerilen UPL dağılımının performansının diğer dağılımlardan daha etkin olduğu sonucuna varılmıştır.

Anahtar kelimeler: UPL dağılımı, ML, LS, WLS, CVM, AD, RAD

UNIT POWER LINDLEY DISTRIBUTION

SUMMARY

In this thesis, appropriate transformation operations are performed on the power Lindley distribution existing in the literature on the basis of unit distributions and the Unit Power Lindley (UPL) distribution in the unit interval is proposed. Various properties of the distribution were examined together with the probability density function and cumulative distribution function of the UPL distribution. The parameters of the UPL distribution were estimated using maximum likelihood (ML), least squares (LS), weighted least squares (WLS), Cramér-von Mises (CVM), Anderson Darling (AD), and right-tailed Anderson Darling (RAD) estimator methods. The performances of the estimators were compared with the simulation study for different parameter values and different sample sizes. It was concluded that the estimator method that gave the best results was the maximum likelihood estimator method, and this estimation method was applied to the real data set and compared with Kumaraswamy distribution (KM), Beta distribution and Unit Lindley distribution (UL) with unit range. It has been concluded that the performance of the proposed UPL distribution is more effective than the other distributions in the thesis study made in line with the results and graphics obtained from the comparisons.

Keywords: UPL distribution, ML, LS, WLS, CVM, AD, RAD

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Uygulamalı istatistikte sınırlı bir olayın belirsizliği ile uğraşırken; böyle bir alanı tanımlamak için sınırlı bir alana sahip sürekli bir dağılıma ihtiyaç duyulmaktadır. Çeşitli bilgi alanlarında, oranlar gibi değişkenlerle sıklıkla karşılaşılabilir. Belirli bir özelliğin, bazı yetenek testlerinin puanları gibi farklı endeksler ve oranlar $(0, 1)$ aralığında yer almaktadır. Bu gibi durumlarda, $(0, 1)$ aralığında etki alanı ile sürekli olasılık dağılımları, olayların olasılıksal modellenmesi açısından oldukça önemlidir.

Önerilen olasılık modelleri ile gerçek veri setlerinin modellenmesi istatistiksel çıkarımlar açısından çok önemli bir konudur. Bu modelleme süreci, olasılık dağılımlarının önemine dikkat çekmekte ve birçok istatistikçi tarafından büyük ilgi görmektedir. Özellikle birim aralıktaki modelleme yaklaşımları; iyileşme oranı, ölüm oranı, eğitim ölçümleri vb. gibi belirli konularla ilgili olduklarından son zamanlarda bu dağılımlar oldukça fazla ilgi görmektedir. Bu gibi önemli konulara ait rastgele değişkenleri modellemek için $(0, 1)$ aralığında tanımlanan bir birim dağılımına ihtiyaç duyulmaktadır.

Birim dağılımlarının kullanımı, endüstride genellikle gözlemlenen oranların modellenmesinde, tıbbi uygulamalarda ve risk analizi çalışmaları için çok önemli bir yere sahiptir (Hashmi ve ark., 2022).

Literatürde kapsamlı olarak tartışılan ve yaygın olarak kullanılan Beta dağılımı birim aralıktaki tanımlanan bir dağılımdır. Bunun yanı sıra birçok dağılım önerilmiş ve alternatif olarak incelenmiş olsa da belirli bir modelin tercihi konusunda hala net bir önerme bulunmamaktadır. Beta dağılımı esas olarak esnekliği ve doğrudan parametrelerinin yorumu nedeni ile en yaygın olarak kullanılan modeldir.

Literatürde Beta dağılımının yanı sıra birim aralıkta tanımlanan birçok dağılım bulunmaktadır. Bu dağılımlara ve dağılımlar ile ilgili çalışmalara örnek olarak:

Hahn (2008), tarafından önerilen Beta dikdörtgeni dağılımı, oranlar için yeni bir regresyon modeli sunmaktadır. Beta dikdörtgeni dağılımı tıpkı Johnson S_B dağılımı (Johnson, 1949) ve Kumaraswamy dağılımı (Kumaraswamy, 1980) gibi birim aralıkta yer almakta ve diğer unit dağılımlar ile aynı amaca hizmet etmektedir. Aykırı değerleri oluşturmak için farklı veriler göz önünde bulundurularak aykırı değerlerin etkisi üzerine simülasyon çalışmaları gerçekleştirmişlerdir.

Topp ve Leone (2012), çalışmada hesaplama açısından kolayca ele alınan, sınırlı aralıkta doğru ve yararlı sonuçlar veren yeni bir dağılım önermek amacıyla Topp-Leone dağılımı önerilmiştir.

Yousof ve Korkmaz (2017), Topp-Leone Nadarajah Haghghi dağılımını önermişlerdir. Bu çalışmada sağ kalım verilerinin, güvenilirlik problemlerinin ve yorulma ömrü çalışmalarının modellenmesinde kullanılabilecek üç parametrelili bir model çalışılmıştır. Model parametrelerinin maksimum olabilirlik tahminleri elde edilmiştir. Simülasyon çalışması ile maksimum olabilirlik tahmin edicilerinin performansı standart sapmalar, yanlılık ve ortalama kare hataları açısından değerlendirilmiştir. Modelin uyumluluğu gerçek bir veri seti ile test edilmiştir. Önerilen dağılımın aynı karşılaştırma kriterleri altında iyi bilinen genelleştirilmiş dağılımlardan daha iyi uyum sağladığı sonucuna varılmıştır.

Kumar ve Dharmaja (2017), Reduced-Kies dağılımını önermişlerdir. Önerdikleri bu dağılımda Kies dağılımının, dağılımsal özellikleri tartışmışlar ve dağılımın parametrelerini ML tahmin yöntemi ile tahmin etmişlerdir. Dağılım parametrelerinin ML tahmin edicilerinin asimptotik davranışı da belirli simüle edilmiş veri kümeleri kullanılarak incelenmiştir.

Ghitany ve ark. (2018), unit inverse gauss dağılımını önermişlerdir. Bu dağılım iki parametreye sahip bir dağılımdır. Önerilen dağılımın parametrelerinin tahmini, verilerin ters Gauss dağılımına dönüştürülmesi ile elde edilir. Birim aralıktaki çoğu dağılımın aksine, önerilen dağılımın parametrelerinin moment tahmin edicileri basit ve kapalı formlarda ifade edilebilmektedir. Bu dağılımın gerçek bir veri kümesine uygulanması, birim aralıkta bilinen birçok iki parametrelili dağılımdan daha iyi uyum gösterdiği sonucunu vermiştir.

Mazucheli ve ark. (2018), (0,1) aralığındaki verileri modellemek için iki parametrelili unit weibull dağılımını önermişlerdir. Bu yeni dağılımın çeşitli dağılımsal özelliklerini incelemişlerdir. Monte-Carlo simülasyon çalışmaları yaparak unit weibull dağılımının parametrelerinin ML tahmin edicilerinin yansız ve tutarlı olduğu sonucunu ortaya koymuşlardır.

Unit Modifiye Bur III dağılımı, Hashmi ve ark. (2020) tarafından önerilmiştir. Bu çalışmada birim aralıkta üç parametrelili bir olasılık dağılımı üzerine çalışılmıştır. Yeni model, Burr III dağılımının bir genellemesidir ve farklı şekilleri ve olasılık yoğunluk fonksiyonları nedeniyle mevcut dağılımlardan daha esnektir. Önerilen dağılımla ilgili parametreler, tahmin yöntemleri kullanılarak tahmin edilmiştir. Önerilen modelin uygulanabilirliğini göstermek için simülasyon çalışması yapılmış ve iki gerçek veri kümesini üzerinde çalışma yapılmıştır.

Korkmaz ve Chesneau (2021), Unit Burr-XII dağılımını önermişlerdir. Birim aralıkta iki parametrelili yeni bir dağılım elde etmek amacıyla Burr-XII dağılımını ters üstel şema ile değiştirmişlerdir. Elde edilen yeni dağılımın istatistiksel özelliklerini incelemişlerdir. En çok olasılık (ML), en küçük kareler (LS), ağırlıklandırılmış en küçük kareler (WLS), anderson darling (AD), cramér von mises (CVM) tahmin edici yöntemleri ile parametre tahmini yapmışlardır. Önerilen dağılımın ve regresyon modelinin gerçek veri seti üzerinde uygulamaları yapılmış ve farklı unit modellere göre daha iyi modelleme yeteneklerine sahip olduğu sonucunu çıkarmışlardır.

Bunun yanı sıra son yıllarda Unit Lindley (UL) dağılımı Mazucheli ve ark. (2019) tarafından önerilmiştir. UL dağılımını uygulamada kullanacak olanlar için bu dağılımının diğer dağılımlardan farklı olarak temel avantajı, oldukça esnek, tek modlu, tek parametrelili bir dağılım olmasıdır. Mazucheli ve ark. (2019) çalışmalarında Lindley dağılımının hazard fonksiyonu, momentler, yüzdellik fonksiyon, Lorenz eğrisi gibi çeşitli karakteristik özellikleri incelemiştir. En çok olasılık ve moment tahmin edici yöntemi ile parametre tahmini yapmışlardır. Lindley dağılımının parametresinin moment tahmin edicilerini değerlendirmek amacıyla Monte-Carlo simülasyon çalışması yürütmüşlerdir.

Lindley dağılımının, teorik ve uygulama olarak yeterli olamayacağı durumlar vardır ve Lindley dağılımı tek parametreye sahip bir dağılımdır. Bu nedenle veri modellemekte yetersiz kaldığı durumlar görülmektedir. Literatürde Lindley dağılımının genelleştirilmesi yaygın olarak ele alınan bir problemdir. Bu genelleştirmeler sonucunda daha esnek özelliklere sahip power Lindley (PL) dağılımı Ghitany ve ark. (2008) tarafından önerilmiştir. Ghitany ve ark. (2008) çalışmalarında iki parametreye sahip PL dağılımını tanıtmışlar ve çeşitli dağılımsal özelliklerini incelemiştir. Parametrelerin ML tahmin edicilerinin yanlılığını ve ortalama kare hatasını, ayrıca her parametre için kapsama olasılığı ve güven aralığının genişliğini incelemek için simülasyon çalışması yürütmüşlerdir.

PL dağılımı iki parametreye sahip bir dağılımdır ve Lindley dağılımının daha esnek hali olarak önerilmektedir. Dolayısıyla, bu çalışmada, PL dağılımı birim aralıkta tanımlanarak unit power Lindley (UPL) dağılımı önerilecektir. UPL dağılımı uygulamalarda kullanıldığında (0,1) aralığında farklı veri modellemelerine oldukça esnek davranışlar sergilediği için oldukça avantajlıdır.

Tez çalışması beş ana bölümden oluşmaktadır. Tezin ilk bölümünde; unit dağılımlara neden ihtiyaç duyulduğu, unit dağılımlar ile ilgili çeşitli literatür taraması, UPL dağılımının neden/nasıl önerileceği ele alınmıştır. İkinci bölümde; UPL dağılımının elde edilişi, olasılık yoğunluk fonksiyonu (pdf) ve kümülatif dağılım fonksiyonunun (cdf) bulunması, UPL dağılımına ait hazard fonksiyonu ve yüzdellik fonksiyonu, UPL

dağılımının beklenen değer ve varyansının hesaplanması ve UPL dağılımının arpıklık ve basıklık katsayısı gibi çeşitli karakteristik özellikleri detaylı olarak incelenmiştir. Üçüncü bölüm parametre tahminine ayrılmıştır. UPL dağılımının parametrelerini tahmin etmek amacıyla ML, LS, WLS, CVM, AD ve RAD tahmin edici yöntemleri kullanılmıştır. Bu tahmin edici yöntemlerinin etkinlikleri de simülasyon çalışması ile karşılaştırılmıştır. Ayrıca, ML tahmin edici yöntemine dayalı güven aralığı tahmini yapılmıştır. Dördüncü bölümde ML tahmin edici yönteminin performansının değerlendirilebilmesi için bir simülasyon çalışması yapılmış ve farklı unit dağılımlar ile etkinliğinin karşılaştırılması amacıyla gerçek veri seti üzerinde uygulama yapılmıştır. Tez çalışmasının son bölümünde ise çalışma sonucunda elde edilen bilgilerin ve verilerin değerlendirilerek sonuçlandırılması yer almaktadır.

BÖLÜM 2. UNIT POWER LINDLEY DAĞILIMI

Lindley dağılımı ilk kez Lindley (1958) tarafından önerilmiştir. Bu dağılım, β ölçek parametrelili üstel dağılım ile şekil parametresi 2 ve ölçek parametresi β olan gamma dağılımının karması yardımıyla elde edilir. Böylece, Lindley dağılımının pdf'i aşağıdaki gibi verilir:

$$f(t; \beta) = pf_1(t; \beta) + (1 - p)f_2(t; 2, \beta).$$

Burada

$$p = \frac{\beta}{\beta+1}, \quad f_1(t; \beta) = \beta e^{-\beta t} \quad \text{ve} \quad f_2(t; 2, \beta) = \beta^2 t e^{-\beta t} \text{ 'dır.}$$

Dolayısıyla

$$f(t; \beta) = \frac{\beta^2}{\beta + 1} (1 + t) e^{-\beta t}, \quad t > 0 \text{ ve } \beta > 0 \quad (2.1)$$

şeklindedir. Eşitlik (2.1) kullanılarak cdf aşağıdaki gibi elde edilir:

$$F(t; \beta) = 1 - \left(1 + \frac{\beta t}{\beta + 1}\right) e^{-\beta t}. \quad (2.2)$$

Ghitany ve ark. (2008) Lindley dağılımının matematiksel özelliklerinin üstel tipteki dağılımlardan daha esnek olduğunu göstererek, bu dağılımın özelliklerini ve uygulamalarını, yaşam analizinde çalışmışlardır. Daha sonra daha esnek özelliklere sahip olasılık dağılımları elde etmek amacıyla Lindley dağılımının çeşitli genelleştirmeleri önerilmiştir.

Eğer T rastgele değişkeni Lindley dağılımına sahip ise $Y = T^{\frac{1}{\alpha}}$ rastgele değişkeni de PL dağılımına sahip olacaktır. Ayrıca PL dağılımı α şekil parametrelili ve β ölçek parametrelili genelleştirilmiş gamma dağılımının karması olarak elde edilebilir. Yani pdf aşağıdaki gibi yazılır:

$$f(y; \alpha, \beta) = pf_1(y; \alpha, \beta) + (1 - p)f_2(y; 2, \alpha, \beta).$$

Burada

$$p = \frac{\beta}{\beta+1}, \quad f_1(y; \alpha, \beta) = \alpha\beta y^{\alpha-1} e^{-\beta y^\alpha} \quad \text{ve} \quad f_2(y; 2, \alpha, \beta) = \alpha\beta^2 y^{2\alpha-1} e^{-\beta y^\alpha} \text{ 'dır.}$$

Dolayısıyla

$$f(y; \alpha, \beta) = \frac{\alpha\beta^2}{1 + \beta} (1 + y^\alpha) y^{\alpha-1} e^{-\beta y^\alpha}, \quad y > 0, \alpha > 0 \text{ ve } \beta > 0 \quad (2.3)$$

olarak bulunur. Buradan dağılımın cdf ise aşağıdaki gibi elde edilir:

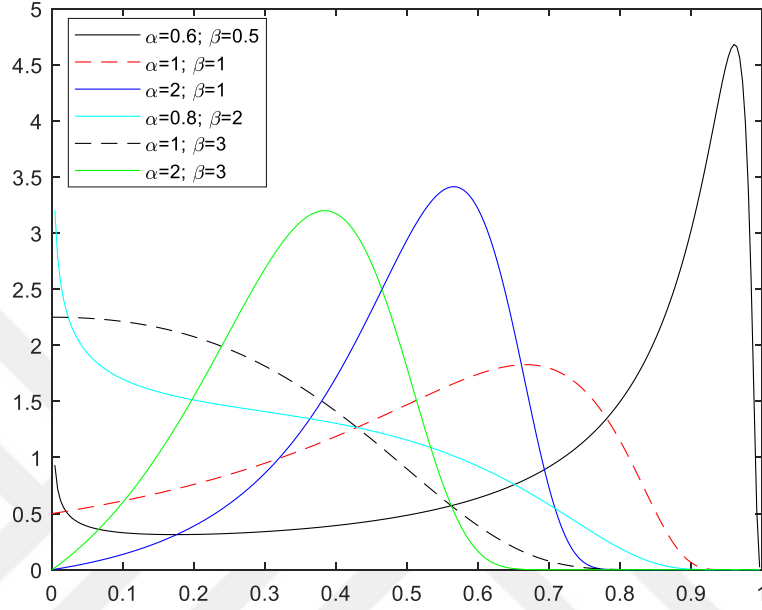
$$F(y; \alpha, \beta) = 1 - \left(1 + \frac{\beta y^\alpha}{1 + \beta}\right) e^{-\beta y^\alpha}. \quad (2.4)$$

Buradan, eğer Y rastgele değişkeni PL dağılımına sahip ise $X = \frac{Y}{Y+1}$ rastgele değişkeni de UPL dağılımına sahip olacaktır. Böylece, yukarıda verilen (2.4) denkleminde $x = \frac{y}{1+y}$ dönüşümü uygulanarak UPL dağılımına ait pdf aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{\alpha\beta^2}{1 + \beta} \left(1 + \left(\frac{x}{1-x}\right)^\alpha\right) \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha-1} e^{-\beta\left(\frac{x}{1-x}\right)^\alpha} \left(\frac{1}{(1-x)^2}\right). \quad (2.5)$$

Şekil 2.1 ile UPL dağılımının farklı α ve β parametre değerleri için pdf grafikleri çizdirilmiştir. Bu grafikte dağılım, farklı parametre değerlerine göre oldukça farklı

davranışlar sergilemektedir. Farklı parametre değerleri için çizdirilen grafiklere ayrı ayrı bakıldığında, tanımlanan aralıkta çarpıklık ve basıklık özellikleri bakımında oldukça esnek bir yapı sergilendiği görülmektedir. Ayrıca grafiğin tek tepeli olduğu görülmektedir.



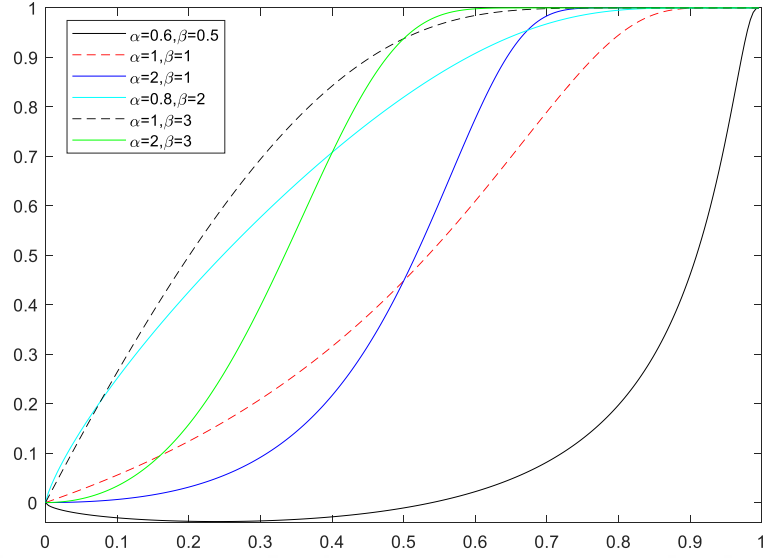
Şekil 2.1. UPL dağılımının α ve β parametrelerinin farklı değerleri için pdf davranışı

UPL dağılımının cdf ise, $\int_0^x f(s)ds = F(x)$ integral ifadesinin çözümlenmesi ile

$$F(x) = 1 - e^{-\beta\left(\frac{x}{1-x}\right)^\alpha} \left[1 + \left(\frac{1}{\beta + 1} \left(\frac{x}{1-x} \right)^\alpha \right) \right], \quad (2.6)$$

şeklinde elde edilmiştir.

Şekil 2.2 ile UPL dağılımının farklı α ve β parametre değerleri için cdf grafikleri verilmiştir.



Şekil 2.2. UPL dağılımının α ve β parametrelerinin farklı değerleri için cdf davranışı

2.1. UPL Dağılımının Özellikleri

Bu kısımda, UPL dağılımına ait hazard fonksiyonu, yüzdelik fonksiyon, beklenen değer ve varyans, çarpıklık ve basıklık katsayıları incelenecektir.

2.1.1. UPL Dağılımının Hazard Fonksiyonu

UPL dağılımının hazard fonksiyonu

$$h(x) = \frac{f(x)}{S(x)} = \frac{f(x)}{1 - F(x)}$$

şeklinde ifade edilmektedir. Burada $S(x)$ fonksiyonu UPL dağılımının yaşam fonksiyonunu ifade etmekte olup dağılım fonksiyonu $F(x)$ 'in 1'den çıkarılmasıyla bulunmaktadır:

$$S(x) = 1 - F(x) = \left(1 - \left(1 - e^{-\beta \left(\frac{x}{1-x} \right)^\alpha} \left[1 + \left(\frac{1}{\beta + 1} \left(\frac{x}{1-x} \right)^\alpha \right) \right] \right) \right)$$

$$= e^{-\beta\left(\frac{x}{1-x}\right)^\alpha} \left[1 + \left(\frac{1}{\beta+1} \left(\frac{x}{1-x} \right)^\alpha \right) \right]. \quad (2.7)$$

Buradan, UPL dağılımının hazard fonksiyonu

$$h(x) = \frac{\alpha\beta^2 x^{\alpha-1} ((1-x)^\alpha + x^\alpha)}{(\beta+1)(1-x)^{2\alpha+1} + x^\alpha(1-x)^{\alpha+1}} \quad (2.8)$$

şeklinde elde edilmiştir.

2.1.2. UPL Dağılımının Yüzelik Fonksiyonu

UPL dağılımının yüzelik (quantile) fonksiyonuna ulaşabilmek için, PL dağılımının yüzelik fonksiyonundan yararlanılmaktadır. PL dağılımına ait yüzelik fonksiyon aşağıda verilmiştir.

$$F^{-1}(u) = \left[-1 - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta} W_{-1} \left(-\frac{\beta+1}{e^{\beta+1}} (1-u) \right) \right]^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Böylece $\frac{Y}{Y+1}$ dönüşümü kullanılarak, UPL dağılımının yüzelik fonksiyonuna ulaşılabilir. Buradan $Y = F^{-1}(u) = \left[-1 - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta} W_{-1} \left(-\frac{\beta+1}{e^{\beta+1}} (1-u) \right) \right]^{\frac{1}{\alpha}}$ gibi düşünülür ise UPL dağılımına ait yüzelik fonksiyonu aşağıdaki gibi olacaktır:

$$Q(u) = F_{UPL}^{-1}(u) = \frac{F^{-1}(u)}{1+F^{-1}(u)} = \frac{\left[-1 - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta} W_{-1} \left(-\frac{\beta+1}{e^{\beta+1}} (1-u) \right) \right]^{\frac{1}{\alpha}}}{1 + \left[-1 - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta} W_{-1} \left(-\frac{\beta+1}{e^{\beta+1}} (1-u) \right) \right]^{\frac{1}{\alpha}}} \quad (2.9)$$

Burada W_{-1} ifadesi Lambert W fonksiyonunun negatif kısmını göstermektedir. Lambert W fonksiyonu;

$$f(w) = we^w = z,$$

fonksiyonunun tersi olarak tanımlanmaktadır. Burada e^w üstel fonksiyon, w ise karmaşık bir sayıyı ifade etmektedir.

$W(z)$ fonksiyonu;

$$z = W(z)e^{W(z)},$$

eşitliğini sağlayan değerleri alan bir fonksiyondur.

2.1.3. UPL Dağılımının Beklenen Değer ve Varyansı

UPL dağılımın beklenen değerine ulaşabilmek için, aşağıdaki integralin çözümünü yapılacaktır:

$$E(X) = \int_0^1 xf(x)dx.$$

Bilindiği üzere UPL dağılımına ait pdf aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$f(x; a, b) = \frac{\alpha\beta^2}{1+\beta} \left(1 + \left(\frac{x}{1-x}\right)^\alpha\right) \left(\frac{x}{1-x}\right)^{a-1} e^{-\beta\left(\frac{x}{1-x}\right)^\alpha} \left(\frac{1}{(1-x)^2}\right).$$

Beklenen değer için gerekli fonksiyon ise aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir:

$$E(X) = \int_0^1 x \left(\frac{\alpha\beta^2}{1+\beta} \left(1 + \left(\frac{x}{1-x}\right)^\alpha\right) \left(\frac{x}{1-x}\right)^{a-1} e^{-\beta\left(\frac{x}{1-x}\right)^\alpha} \left(\frac{1}{(1-x)^2}\right) \right) dx.$$

UPL dağılımın varyansının hesaplanması için;

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

ifadesinin değeri bulunmalıdır. Bunun için gerekli olan ifade ise şu şekildedir:

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 f(x) dx,$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 \left(\frac{\alpha\beta^2}{1+\beta} \left(1 + \left(\frac{x}{1-x} \right)^\alpha \right) \left(\frac{x}{1-x} \right)^{\alpha-1} e^{-\beta \left(\frac{x}{1-x} \right)^\alpha} \left(\frac{1}{(1-x)^2} \right) \right) dx.$$

eşitliğinin değeri bulunmalıdır. Burada gerekli integral işlemleri yapılmıştır ve açık bir çözüme ulaşılamamıştır. İntegrallerin çözümleri nümerik olarak MATLAB 2017b programında hesaplanmıştır.

2.1.4. UPL Dağılımı için Çarpıklık ve Basıklık Katsayıları

Çarpıklık; olasılık kuramı ve istatistik bilim dallarında bir reel değerli rastgele değişkenin olasılık dağılımının simetrik olamayışının ölçülmesidir. Çarpıklık katsayısı üçüncü standardize edilmiş moment olup γ_1 ile ifade edilmekte ve şöyle tanımlanmaktadır:

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}.$$

Burada, μ_3 üçüncü ortalama etrafındaki momenti ve σ standart sapmayı göstermektedir. Buna göre, UPL dağılımı için çarpıklık katsayısı aşağıdaki gibi elde edilecektir:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= E \left[\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \right)^3 \right] = \frac{E[X^3] - 3\mu[X^2] + 3\mu^2 E[X] - \mu^3}{\sigma^3} \\ &= \frac{E[X^3] - 3\mu([X^2] - \mu E[X]) - \mu^3}{\sigma^3} \end{aligned}$$

$$= \frac{E[X^3] - 3\mu\sigma^2 - \mu^3}{\sigma^3}.$$

Buradan $E[X^3]$ ise aşağıda yer alan integralin çözümü ile elde edilecektir:

$$E(X^3) = \int_0^1 x^3 f(x) dx.$$

$$E(X^3) = \int_0^1 x^3 \left(\frac{\alpha\beta^2}{1+\beta} \left(1 + \left(\frac{x}{1-x} \right)^\alpha \right) \left(\frac{x}{1-x} \right)^{\alpha-1} e^{-\beta \left(\frac{x}{1-x} \right)^\alpha} \left(\frac{1}{(1-x)^2} \right) \right) dx.$$

İntegralin açık bir çözümüne ulaşamadığı için çözümü nümerik olarak MATLAB 2017b programında hesaplanmıştır.

UPL dağılımı için basıklık katsayısı ise aşağıdaki gibi incelenmiştir: Basıklık; bir reel değerli rastgele değişken için olasılık dağılımının, grafik gösteriminden tanımlanarak ortaya çıkarılan bir kavram olan, sivrilik veya basıklık özelliğinin ölçümüdür. Basıklık katsayısı dördüncü standartlaştırılmış moment olup γ_2 ile ifade edilmekte ve şöyle tanımlanmaktadır:

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}.$$

Burada μ_4 dördüncü ortalama etrafındaki momenti ve σ standart sapmayı göstermektedir. Buna göre UPL dağılımı için basıklık katsayısı aşağıdaki gibi elde edilecektir:

$$\gamma_2 = E \left[\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \right)^4 \right] = \frac{E[(X - \mu)^4]}{(E(X - \mu)^2)^2}.$$

Burada $\mu = E(X)$ 'tir.

Tüm bunlar sonucunda; UPL dağılımı için beklenen değer, varyans, çarpıklık ve basıklık katsayıları, farklı şekil ve ölçek parametre değerleri için Matlab 2017b programında hesaplanmış ve Tablo 2.1’de yer alan sonuçlar elde edilmiştir.

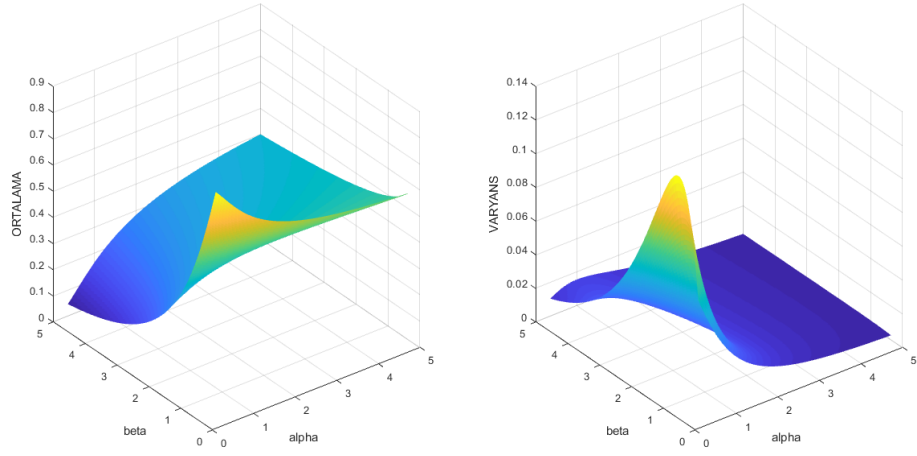
Tablo 2.1 UPL dağılımının α ve β parametrelerinin farklı değerleri için beklenen değer, varyans, çarpıklık ve basıklık katsayısı değerleri

	μ	σ^2	γ_1	γ_2
$\alpha = 0.6, \beta = 0.5$	0.7262	0.0717	-1.2457	2.7020
$\alpha = 1, \beta = 1$	0.5000	0.0482	-0.4318	1.3651
$\alpha = 2, \beta = 1$	0.4947	0.0171	-0.7773	2.0124
$\alpha = 0.8, \beta = 2$	0.3127	0.0464	0.3655	0.6968
$\alpha = 1, \beta = 3$	0.2500	0.0272	0.4716	0.8638
$\alpha = 2, \beta = 3$	0.3438	0.0142	-0.2909	1.5132

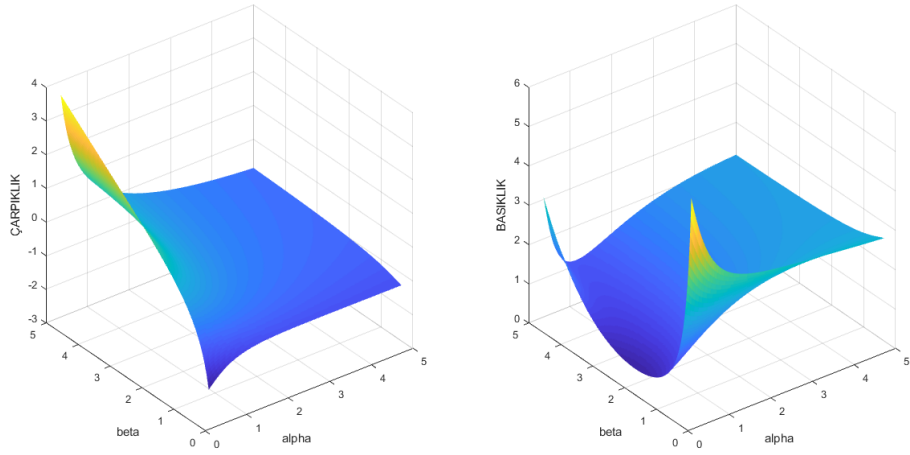
Tablo 2.1’de yer alan değerlere bakıldığında, çarpıklık katsayısı değerlerinin (γ_1) pozitif ve negatif olduğu görülmüştür. Pozitif çarpıklık katsayısı sağa çarpıklığı, negatif çarpıklık katsayısı ise sola çarpıklığı ifade etmektedir.

Bu çalışmada ele alınan UPL dağılımının basıklık katsayısı değerleri incelendiğinde, değerler arasındaki farklılık çizdirilen grafiğin kuyruklarının oldukça sivri tepeli olduğu sonucunu vermektedir. Bu da ele alınan UPL dağılımının tanım aralığı içinde oldukça esnek davranışlar sergilediğini açıklamaktadır.

α ve β parametrelerinin farklı değerleri için hem sağa çarpıklık hem de sola çarpıklık söz konusudur. Bu bilgilerin doğruluğu UPL dağılımının Şekil 2.1’de çizdirilen pdf’e ait grafiğe bakılarak yorumlanabilir. Aynı zamanda α ve β parametrelerinin farklı değerleri için beklenen değer, varyans, çarpıklık ve basıklık katsayısı değerlerine ait grafikler Matlab R2017b programı kullanılarak Şekil 2.3 ve Şekil 2.4’te verildiği gibi çizdirilmiştir.



Şekil 2.3. UPL dağılımının α ve β parametrelerinin farklı değerleri için ortalama değer ve varyansı



Şekil 2.4. UPL dağılımının α ve β parametrelerinin farklı değerleri için çarpıklık ve basıklık katsayısı

BÖLÜM 3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Parametre Tahmini

Bu bölümde, UPL dağılımının parametrelerini tahmin etmek amacıyla ML, LS, WLS, CVM, AD ve RAD tahmin edici yöntemleri kullanılacaktır.

3.1.1. En Çok Olabilirlik Tahmin Yöntemi

x_1, x_2, \dots, x_n UPL dağılımından n boyutlu rastgele bir örneklem olsun. Bu dağılıma ait olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$L(x; \alpha, \beta) = \prod_{i=1}^n \frac{\alpha \beta^2}{\beta + 1} \left(1 + \left(\frac{x_i}{1-x_i}\right)^\alpha\right) \left(\frac{x_i}{1-x_i}\right)^{\alpha-1} e^{-\beta \left(\frac{x_i}{1-x_i}\right)^\alpha} \frac{1}{(1-x_i)^2}.$$

Buradan, olabilirlik fonksiyonunun logaritması alınarak log-olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{aligned} \ell(\alpha, \beta) &= n \log(\alpha) + 2n \log(\beta) - n \log(1 + \beta) - \beta \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{1-x_i}\right)^\alpha \\ &+ \sum_{i=1}^n \log\left(1 + \left(\frac{x_i}{1-x_i}\right)^\alpha\right) - \sum_{i=1}^n \log(1-x_i)^2 + (\alpha-1) \sum_{i=1}^n \log\left(\frac{x_i}{1-x_i}\right). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Dolayısıyla, $\ell(\alpha, \beta)$ fonksiyonunun α ve β parametrelerine göre en çok olabilirlik tahmin edicileri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} \ell(\alpha, \beta) &= \frac{n}{\alpha} - \beta \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{1-x_i} \right)^\alpha \log \left(\frac{x_i}{1-x_i} \right) \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{\left(\frac{x_i}{1-x_i} \right)^\alpha \log \left(\frac{x_i}{1-x_i} \right)}{1 + \left(\frac{x_i}{1-x_i} \right)^\alpha} + \sum_{i=1}^n \log \left(\frac{x_i}{1-x_i} \right) = 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \ell(\alpha, \beta) = \frac{2n}{\beta} - \frac{n}{1+\beta} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{1-x_i} \right)^\alpha = 0. \quad (3.3)$$

Dolayısıyla, β parametresi için ML tahmin edicisi $\hat{\beta}$ aşağıdaki şekilde bulunmuştur:

$$\hat{\beta}(\alpha) = \frac{-\left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{1-x_i}\right)^\alpha - n\right) + \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{1-x_i}\right)^\alpha - n\right)^2 + 8n \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{1-x_i}\right)^\alpha}}{2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{1-x_i}\right)^\alpha}. \quad (3.4)$$

Ayrıca $\hat{\alpha}$ aşağıdaki doğrusal olmayan denklemin çözümü ile elde edilir:

$$\begin{aligned} G(\alpha) &= \frac{n}{\alpha} - \beta \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{1-x_i} \right)^\alpha \log \left(\frac{x_i}{1-x_i} \right) \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{\left(\frac{x_i}{1-x_i} \right)^\alpha \log \left(\frac{x_i}{1-x_i} \right)}{1 + \left(\frac{x_i}{1-x_i} \right)^\alpha} + \sum_{i=1}^n \log \left(\frac{x_i}{1-x_i} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Burada elde edilen eşitlikler analitik olarak bir çözüme ulaşamamaktadır. Eşitliklerin çözümü için nümerik yöntemler kullanılarak ML tahmin edicileri elde edilecektir.

3.1.1.1. Güven Aralığı

UPL dağılımına ait Fisher bilgisi matrisi aşağıdaki adımlar izlenerek hesaplanabilir. UPL dağılımı için $\theta = (\alpha, \beta)^T$ olmak üzere tek bir gözleme dayalı θ parametre vektörünün beklenen değeri Fisher bilgi matrisini verir:

$$I(\boldsymbol{\theta}) = [I_{ij}(\boldsymbol{\theta})] = E \left[-\frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \log f(x_i; \boldsymbol{\theta}) \right].$$

Burada $\log f(x_i; \boldsymbol{\theta})$, UPL dağılımının (2.5) ile verilen pdf'nin logaritmasını göstermektedir. Daha açık yazılacak olursa Fisher bilgi matrisi aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$I(\boldsymbol{\theta}) = E \left[-\frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \log f(x_i; \boldsymbol{\theta}) \right] = \begin{bmatrix} E \left(-\frac{\partial^2 \log f(x_i; \boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha^2} \right) & E \left(-\frac{\partial^2 \log f(x_i; \boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha \partial \beta} \right) \\ E \left(-\frac{\partial^2 \log f(x_i; \boldsymbol{\theta})}{\partial \beta \partial \alpha} \right) & E \left(-\frac{\partial^2 \log f(x_i; \boldsymbol{\theta})}{\partial \beta^2} \right) \end{bmatrix}.$$

Buradan Fisher bilgi matrisinde yer alan türevler aşağıdaki gibi alınır:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \log f(x_i; \boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha^2} &= -\frac{1}{\alpha^2} - \beta \left(\frac{x_i}{1-x_i} \right)^\alpha \log \left(\frac{x_i}{1-x_i} \right)^2 \\ &+ \frac{\log \left(\frac{x_i}{1-x_i} \right)^2 \left(\frac{x_i}{1-x_i} \right)^\alpha}{1 + \left(\frac{x_i}{1-x_i} \right)^\alpha} - \frac{\log \left(\frac{x_i}{1-x_i} \right)^2 \left(\frac{x_i}{1-x_i} \right)^{2\alpha}}{\left(\left(\frac{x_i}{1-x_i} \right)^\alpha + 1 \right)^2}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \log f(x_i; \boldsymbol{\theta})}{\partial \beta^2} = -\frac{2}{\beta^2} + \frac{1}{(1+\beta)^2},$$

$$\frac{\partial^2 \log f(x_i; \boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha \partial \beta} = -\left(\frac{x_i}{1-x_i} \right)^\alpha \log \left(\frac{x_i}{1-x_i} \right).$$

UPL dağılımı için Fisher bilgi matrisi hesaplanırken, yukarıda yer alan türev ifadelerinin beklenen değerlerinin kapalı bir formu elde edilemeyeceğinden gözlenmiş Fisher bilgi matrisi $I^*(\boldsymbol{\theta})$ hesaplanacaktır. Yani beklenen değer almak yerine (3.1) ile verilen UPL dağılımının log-olabilirlik $\ell(\alpha, \beta)$ fonksiyonunun ilgili parametrelere göre türevi alınarak gözlenmiş Fisher bilgi matrisi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$I^*(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{bmatrix},$$

$$I_{11} = \frac{\partial^2 \ell(\alpha, \beta)}{\partial \alpha^2} = -\frac{n}{\alpha^2} - \beta \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{1-x_i} \right)^\alpha \log \left(\frac{x_i}{1-x_i} \right)^2$$

$$+ \sum_{i=1}^n \frac{\log \left(\frac{x_i}{1-x_i} \right)^2 \left(\frac{x_i}{1-x_i} \right)^\alpha}{1 + \left(\frac{x_i}{1-x_i} \right)^\alpha} - \sum_{i=1}^n \frac{\log \left(\frac{x_i}{1-x_i} \right)^2 \left(\frac{x_i}{1-x_i} \right)^{2\alpha}}{\left(\left(\frac{x_i}{1-x_i} \right)^\alpha + 1 \right)^2},$$

$$I_{22} = \frac{\partial^2 \ell(\alpha, \beta)}{\partial \beta^2} = -\frac{2n}{\beta^2} + \frac{n}{(1+\beta)^2},$$

$$I_{12} = \frac{\partial^2 \ell(\alpha, \beta)}{\partial \alpha \partial \beta} = -\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{1-x_i} \right)^\alpha \log \left(\frac{x_i}{1-x_i} \right).$$

Bilindiği üzere ML tahmin edicisinin asimptotik dağılımı normal dağılıma yakınsar:

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \xrightarrow{D} N_2 \left(0, I^{*-1}(\boldsymbol{\theta}) \right).$$

Burada \xrightarrow{D} dağılımda yakınsamayı ifade ediyor olup $I^{*-1}(\boldsymbol{\theta})$, $I^*(\boldsymbol{\theta})$ gözlenmiş Fisher bilgi matrisinin tersine eşittir. Yani,

$$\frac{1}{n} I^{*-1}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \text{Var}(\hat{\alpha}) & \text{Cov}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \\ \text{Cov}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) & \text{Var}(\hat{\beta}) \end{pmatrix}.$$

dır. Böylece, α ve β parametrelerinin asimptotik $100(1 - \delta)\%$ güven aralıkları sırasıyla şu şekilde oluşturulur:

$$\hat{\alpha} \pm z_{\frac{\delta}{2}} \sqrt{\widehat{\text{Var}}(\hat{\alpha})},$$

$$\hat{\beta} \pm z_{\frac{\delta}{2}} \sqrt{\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta})}.$$

Burada δ anlamlılık düzeyini ve z_q ise standart normal dağılımın üst q . yüzdeliğini göstermektedir.

3.1.2. En Küçük Kareler Tahmin Yöntemi

x_1, x_2, \dots, x_n UPL dağılımından n boyutlu rastgele bir örneklem olsun. α ve β parametreleri için LS tahmin edicileri aşağıdaki eşitliğin parametrelere göre minimum yapılmasıyla elde edilir:

$$S(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n \left(F(x_{(i)}) - \frac{i}{n+1} \right)^2. \quad (3.6)$$

Burada, $x_{(i)}$, $i = 1, \dots, n$ UPL dağılımından n boyutlu rasgele bir örneklemin sıralı istatistiklerini ve $\frac{i}{n+1}$, ($i = 1, \dots, n$), $F(x_{(i)})$ nin beklenen değerini göstermektedir. (2.6)' da verilen UPL dağılımının cdf'i (3.6)'da yerine yazılıp sırasıyla α ve β parametrelerine göre türev alınır ve parametrelerin LS tahmin edicileri aşağıdaki lineer olmayan denklemlerin çözülmesi ile elde edilir:

$$\sum_{i=1}^n \left(F(x_{(i)}, \alpha, \beta) - \frac{i}{n+1} \right) \Delta_1(x_{(i)}, \alpha, \beta) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n \left(F(x_{(i)}, \alpha, \beta) - \frac{i}{n+1} \right) \Delta_2(x_{(i)}, \alpha, \beta) = 0.$$

UPL dağılımının, dağılım fonksiyonunun α parametresine göre türevi $\Delta_1(x, \alpha, \beta) = \frac{\Delta F(x)}{\Delta \alpha}$ ve β parametresine göre türevi $\Delta_2(x, \alpha, \beta) = \frac{\Delta F(x)}{\Delta \beta}$ aşağıdaki şekilde elde edilmiştir:

$$\Delta_1(x, \alpha, \beta) = \left(\frac{x}{1-x} \right)^\alpha \log \left(\frac{x}{1-x} \right) e^{-\beta \left(\frac{x}{1-x} \right)^\alpha} \left(\left(\beta + \frac{\beta}{\beta+1} \left(\frac{x}{1-x} \right)^\alpha \right) - \frac{1}{\beta+1} \right), \quad (3.7)$$

$$\Delta_2(x, \alpha, \beta) = \frac{\partial F(x)}{\partial \beta} = e^{-\beta\left(\frac{x}{1-x}\right)^\alpha} \left(\frac{x}{1-x}\right)^\alpha \left(1 + \frac{\beta}{\beta+1} \left(\frac{x}{1-x}\right)^\alpha + \frac{1}{(\beta+1)^2}\right). \quad (3.8)$$

3.1.3. Ağırlıklandırılmış En Küçük Kareler Tahmin Yöntemi

α ve β parametrelerinin WLS tahmin edicileri, aşağıdaki denklemin ilgili parametrelere göre minimize edilmesiyle elde edilmiştir.

$$W(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n w_i \left(F(x_{(i)}) - \frac{i}{n+1} \right)^2. \quad (3.9)$$

Burada $w_i = \frac{1}{v(F(x_{(i)}))} = \frac{(n+1)^2(n+2)}{i(n-i+1)}$ ($i = 1, \dots, n$) şeklindedir.

UPL dağılımına ait dağılım fonksiyonu kullanılarak α ve β parametrelerinin WLS tahmin edicileri aşağıdaki doğrusal olmayan yöntemlerin çözümü ile şu şekilde elde edilir:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(n-i+1)} \left(F(x_{(i)}, \alpha, \beta) - \frac{i}{n+1} \right) \Delta_1(x_{(i)}, \alpha, \beta) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(n-i+1)} \left(F(x_{(i)}, \alpha, \beta) - \frac{i}{n+1} \right) \Delta_2(x_{(i)}, \alpha, \beta) = 0.$$

Burada $\Delta_1(x, \alpha, \beta)$ ve $\Delta_2(x, \alpha, \beta)$ ifadeleri, sırasıyla (3.7) ve (3.8)'de bulunduğu gibidir.

3.1.4. Cramér von Mises Tahmin Yöntemi

α ve β parametrelerinin CVM tahmin edicileri aşağıdaki denklemin ilgili parametrelere göre minimize edilmesiyle elde edilmiştir:

$$C(\alpha, \beta) = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left(F(x_{(i)}) - \frac{2i-1}{2n} \right)^2. \quad (3.10)$$

Parametrelerin CVM tahmin edicileri, aşağıdaki doğrusal olmayan denklemlerin çözümü ile şu şekilde elde edilir:

$$\sum_{i=1}^n \left(F(x_{(i)}, \alpha, \beta) - \frac{2i-1}{2n} \right) \Delta_1(x_{(i)}, \alpha, \beta) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n \left(F(x_{(i)}, \alpha, \beta) - \frac{2i-1}{2n} \right) \Delta_2(x_{(i)}, \alpha, \beta) = 0.$$

Burada $\Delta_1(x, \alpha, \beta)$ ve $\Delta_2(x, \alpha, \beta)$ ifadeleri, sırasıyla (3.7) ve (3.8)'de bulunduğu gibidir.

3.1.5. Anderson Darling Tahmin Yöntemi

α ve β parametrelerinin AD tahmin edicileri aşağıdaki denklemin ilgili parametrelere göre minimize edilmesiyle elde edilmiştir:

$$A(\alpha, \beta) = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i-1) \log \left[F(x_{(i)}) \left(1 - F(x_{(i^*)}) \right) \right]. \quad (3.11)$$

Burada, $i^* = n - i + 1$ dir.

Parametrelerin AD tahmin edicileri, aşağıdaki doğrusal olmayan denklemlerin çözümü ile elde edilir:

$$\sum_{i=1}^n (2i-1) \left[\frac{\Delta_1(x_{(i)}, \alpha, \beta)}{F(x_{(i)}, \alpha, \beta)} - \frac{\Delta_1(x_{(i^*)}, \alpha, \beta)}{F(x_{(i^*)}, \alpha, \beta)} \right] = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n (2i - 1) \left[\frac{\Delta_2(x_{(i)}, \alpha, \beta)}{F(x_{(i)}, \alpha, \beta)} - \frac{\Delta_2(x_{(i^*)}, \alpha, \beta)}{F(x_{(i^*)}, \alpha, \beta)} \right] = 0.$$

Burada $\Delta_1(x, \alpha, \beta)$ ve $\Delta_2(x, \alpha, \beta)$ ifadeleri, sırasıyla (3.7) ve (3.8)'de bulunduğu gibidir.

3.1.6. Right Tail Anderson Darling Tahmin Yöntemi

α ve β parametrelerinin RAD tahmin edicileri aşağıdaki denklemin ilgili parametrelere göre minimize edilmesiyle elde edilmiştir:

$$R(\alpha, \beta) = \frac{n}{2} - 2 \sum_{i=1}^n (F(x_{(i)})) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i - 1) \log(1 - F(x_{(i^*)})). \quad (3.12)$$

Parametrelerin RAD tahmin edicileri, aşağıdaki doğrusal olmayan denklemlerin çözümü ile elde edilir:

$$-2 \sum_{i=1}^n \frac{\Delta_1(x_{(i)}, \alpha, \beta)}{F(x_{(i)}, \alpha, \beta)} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i - 1) \frac{\Delta_1(x_{(i^*)}, \alpha, \beta)}{1 - F(x_{(i^*)}, \alpha, \beta)} = 0,$$

$$-2 \sum_{i=1}^n \frac{\Delta_2(x_{(i)}, \alpha, \beta)}{F(x_{(i)}, \alpha, \beta)} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i - 1) \frac{\Delta_2(x_{(i^*)}, \alpha, \beta)}{1 - F(x_{(i^*)}, \alpha, \beta)} = 0.$$

Burada $\Delta_1(x, \alpha, \beta)$ ve $\Delta_2(x, \alpha, \beta)$ ifadeleri, sırasıyla (3.7) ve (3.8)'de bulunduğu gibidir.

BÖLÜM 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Simülasyon Çalışması

Burada önceki bölümde ele alınan ML, LS, WLS, CV, AD ve RAD tahmin yöntemlerinin performanslarını karşılaştırmak için simülasyon çalışması yapılmıştır. Bunun için tahmin edicilerin yan ve MSE değerleri her bir parametre için hesaplanmıştır. Ayrıca, ML tahmin edicileri için $100(1 - \delta)$ güven aralığı ve kapsama olasılıkları (covarage probabiltiy, CP) hesaplanmıştır.

4.2. Rastgele Sayı Üretme Prosedürü

X rastgele değişkeni α ve β parametrelili UPL dağılımına sahip olmak üzere ($X \sim UPL(\alpha, \beta)$) bu dağılımdan rastgele sayı üretme aşağıda yer alan algoritma kullanılarak gerçekleştirilebilir.

Algoritma: Bu algoritma UPL dağılımına ait ters dağılım fonksiyonu ile rastgele sayı üretme prosedürüne dayanmaktadır.

1. (0,1) aralığında düzgün dağılımdan rastgele sayı üret:

$$U_i \sim Uniform(0,1), i = 1, 2, \dots, n.$$

2. $X_i = \left[-1 - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta} W_{-1} \left(-\frac{\beta+1}{e^{\beta+1}} (1 - U_i) \right) \right]^{1/\alpha}$, $i = 1, 2, \dots$, ile verilen eşitliği kullanarak sayı üret.

4.3. Hesaplama ile İlgili Detaylar

Simülasyon çalışması için rastgele örneklem belirli α ve β parametreleri ile UPL dağılımından ($X \sim UPL(\alpha, \beta)$) yukarıda verilen rastgele sayı üretme algoritması

kullanılarak üretilmiştir. Simülasyon çalışmasının detayları aşağıdaki gibi özetlenebilir:

- Simülasyon çalışması için tekrar sayısı $N = 1000$ olarak alınmıştır.
- Simülasyon çalışması için parametre değerleri $(\alpha, \beta) = (1,1), (1,3), (2,1), (2,3), (0.8,2), (0.6,0.5)$ olarak alınmıştır. Bu parametre değerleri için Şekil 2.1’de verilen farklı şekil ve ölçek parametreleri kullanılarak çizdirilen UPL dağılım grafikleri temel alınmıştır. Çeşitli karakteristik özelliğe sahip veri setlerini modelleyebilmek için farklı α ve β değerleri kullanılmıştır.
- Simülasyon için örnek hacmi $n = 25, 50, 100, 200$ olarak alınmıştır.
- Simülasyon çalışması ve gerçek veri uygulaması MATLAB R2017b programı kullanılarak yapılmıştır.
- Elde edilen tahmin edicilerin performans karşılaştırmaları simülasyon sonucunda bulunan yan ve MSE değerleri kullanılarak yapılmıştır. Yan ve MSE değerleri için formüller aşağıda yer almaktadır:

$$Bias(\hat{\alpha}) = \bar{\alpha} - \alpha, \quad Bias(\hat{\beta}) = \bar{\beta} - \beta,$$

$$MSE(\hat{\alpha}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{\alpha}_i - \alpha)^2, \quad MSE(\hat{\beta}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{\beta}_i - \beta)^2.$$

Burada $\bar{\alpha} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{\alpha}_i$ ve $\bar{\beta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{\beta}_i$ ’dir. Ayrıca, α ve β gerçek parametre değerlerini, α_i ve β_i ise i . simülasyonda elde edilen tahmin değerlerini göstermektedir.

- ML tahmin edicileri için $100(1 - \alpha)$ güven aralığı ve CP hesaplanırken $(\alpha, \beta) = (1,1), (1,3), (2,1), (2,3), (0.8,2), (0.6,0.5)$ olarak alınmıştır. Ayrıca, anlamlılık düzeyi $\delta = 0.05$ ’dir. Güven aralıkları alt Bölüm 3.1.1.1’de verilen denklemler yardımıyla hesaplanacaktır.
- Performans karşılaştırması için tahmin edici yöntemlerinde her bir parametrenin tahmin edicisi MATLAB R2017b programında yer alan “fminsearch” fonksiyonu kullanılarak bulunmuştur.

4.4. Simülasyon Sonuçları

Farklı örneklem hacimleri ve parametre değerleri için elde edilen simülasyon sonuçları Tablo 4.1, Tablo 4.2, Tablo 4.3, Tablo 4.4, Tablo 4.5, Tablo 4.6'da verilmektedir.

Tablolardan elde edilen sonuçlara bakıldığında, örneklem boyutunun (n) arttıkça tahmin edicilerin yan değerlerinin 0'a oldukça yakın değerler aldığı ve tahmin edicilerin yan değerlerinin azalarak ihmal edilebilir düzeylere geldiği görülmektedir.

Tablo 4.1'de gerçek parametre değerleri $\alpha = 1$ ve $\beta = 1$ iken elde edilen simülasyon sonuçları verilmiştir. MSE değerlerinin örneklem sayısı (n) arttıkça azalması beklenmektedir. Simülasyon sonucunda bu beklentinin bütün tahmin ediciler için sağlanmış olduğu tabloda görülmektedir. Aynı zamanda MSE değerinin sıfıra yakınsaması tahmin edici yönteminin ihmal edilebilir hata payına sahip olduğunu ve performansının oldukça iyi olduğunu ifade etmektedir. Tüm bunlar doğrultusunda örneklem sayısındaki değişime bağlı olarak α ve β için en küçük MSE değerlerine sahip veriler koyu renk ile gösterilmekte olup AD tahmin edici yönteminin bu parametre değerleri için en etkin olduğu gözlemlenmiştir.

Tablo 4.2'de parametre değerleri $\alpha = 1$ ve $\beta = 3$ iken elde edilen simülasyon sonuçları verilmiştir. MSE değerlerine göre her iki parametre tahmini içinde ML tahmin edici yönteminin en etkin yöntem olduğu gözlemlenmiştir. ML tahmin edici yöntemi etkinlik sıralamasına göre her iki parametre tahmini için AD ve RAD tahmin edici yöntemleri takip etmektedir.

Tablo 4.3'te parametre değerleri $\alpha = 2$ ve $\beta = 1$ iken elde edilen simülasyon sonuçları verilmiştir. Her iki parametre tahmini için çoğunlukla en küçük MSE değerine sahip AD tahmin edici yönteminin performansının diğer tahmin edici yöntemlerine göre en iyi olduğu gözlemlenmiştir.

Tablo 4.4'te $\alpha = 2$ ve $\beta = 3$ iken elde edilen simülasyon sonuçları verilmiştir. α ve β parametrelerinin örneklem sayısının bütün örneklem boyutları için ML tahmin edici

yönteminde en küçük MSE değerlerine sahip olduğu ve bu yöntemin diğer tahmin edici yöntemlerine göre en etkin olduğu gözlemlenmiştir. ML tahmin edici yönteminden sonra ise α için AD tahmin edici yöntemi ve β için de RAD tahmin edici yönteminin en yüksek etkinliğe sahip olduğu sonucuna varılmaktadır.

Tablo 4.5'te $\alpha = 0.8$ ve $\beta = 2$ iken elde edilen simülasyon sonuçları verilmiştir. Tüm örneklem hacimlerinde, α ve β parametrelerinin ML tahminlerinin en küçük MSE değerlerine sahip olduğu sadece β 'nin bir değeri için AD tahmin edici yönteminin en iyi olduğu görülmüştür. Sonuç olarak bu parametre değerleri için ML tahmin edici yöntemi en etkin yöntemdir.

Tablo 4.6'da $\alpha = 0.6$ ve $\beta = 0.5$ iken elde edilen simülasyon sonuçları verilmiştir. α ve β parametrelerinin örneklem boyutunun neredeyse bütün farklı değerleri için ML tahmin edici yönteminde en küçük MSE değerlerine sahip olduğu sadece α 'nın bir değeri için RAD tahmin edici yönteminin en iyi olduğu görülmüştür. Sonuç olarak bu parametre değerleri için ML tahmin edici yöntemi en etkin yöntemdir.

Tablo 4.7'de $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\beta}$ parametrelerine göre hata kareler ortalaması en küçük olan değerler ve bu değerlerin hangi tahmin yöntemine ait olduğu özet bir şekilde yer almaktadır. ML tahmin yönteminin diğerlerine göre en etkin yöntem olduğu sonucu açıkça görülmektedir.

Tablo 4.8'de $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\beta}$ parametrelerinin ML tahmin edicileri için farklı örneklem büyüklüklerine göre CP ve AW değerleri verilmektedir. Tablodan aşağıda yer alan sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca, CP değerleri gerçek değer olan %95 düzeyine oldukça yakın bulunmuştur ve AW değerleri de beklendiği üzere örneklem sayısı arttıkça azalmaktadır.

Tablo 4.1. $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\beta}$ için simüle edilmiş yan ve MSE değerleri

		$\alpha = 1$ ve $\beta = 1$					
n		ML	LS	WLS	CV	AD	RAD
$n = 25$	$\hat{\alpha}$	0.0637 (0.0351)	-0.0031 (0.0370)	0.0066 (0.0323)	0.0597 (0.0499)	0.0148 (0.0269)	0.0353 (0.0331)
	$\hat{\beta}$	-0.0020 (0.0360)	0.0096 (0.0184)	0.0093 (0.0183)	0.0041 (0.0206)	0.0080 (0.0180)	0.0002 (0.0194)
$n = 50$	$\hat{\alpha}$	0.0266 (0.0131)	-0.0056 (0.0168)	0.0018 (0.0136)	0.0237 (0.0185)	0.0044 (0.0122)	0.0106 (0.0131)
	$\hat{\beta}$	-0.0023 (0.0164)	0.0044 (0.0086)	0.0033 (0.0083)	0.0013 (0.0090)	0.0032 (0.0084)	0.0007 (0.0090)
$n = 100$	$\hat{\alpha}$	0.0180 (0.0063)	0.0027 (0.0083)	0.0079 (0.0067)	0.0173 (0.0088)	0.0077 (0.0063)	0.0112 (0.0069)
	$\hat{\beta}$	-0.0051 (0.0086)	-0.0010 (0.0046)	-0.0017 (0.0045)	-0.0026 (0.0047)	-0.0015 (0.0045)	-0.0028 (0.0047)
$n = 200$	$\hat{\alpha}$	0.0061 (0.0027)	-0.0019 (0.0034)	0.0009 (0.0027)	0.0054 (0.0035)	0.0004 (0.0026)	0.0035 (0.0029)
	$\hat{\beta}$	0.0021 (0.0043)	0.0026 (0.0023)	0.0024 (0.0022)	0.0017 (0.0023)	0.0026 (0.0022)	0.0014 (0.0024)

*Tahminlerin MSE değerleri parantez içinde verilmiştir. En küçük MSE değerleri koyu metin ile gösterilmiştir.

Tablo 4.2. $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\beta}$ için simüle edilmiş yan ve MSE değerleri

		$\alpha = 1$ ve $\beta = 3$					
n		ML	LS	WLS	CV	AD	RAD
$n = 25$	$\hat{\alpha}$	0.0440 (0.0279)	0.0127 (0.0437)	0.0249 (0.0405)	0.0781 (0.0570)	0.0359 (0.0363)	0.0650 (0.0489)
	$\hat{\beta}$	0.0372 (0.1720)	-0.2512 (0.6312)	-0.2252 (0.5761)	-0.0482 (0.8172)	-0.1985 (0.4944)	-0.1537 (0.5275)
$n = 50$	$\hat{\alpha}$	0.0202 (0.0136)	0.0108 (0.0201)	0.0195 (0.0170)	0.0425 (0.0234)	0.0237 (0.0160)	0.0353 (0.0188)
	$\hat{\beta}$	0.0498 (0.1265)	-0.3272 (0.2788)	-0.3076 (0.2412)	-0.2399 (0.2591)	-0.2960 (0.2285)	-0.2808 (0.2210)
$n = 100$	$\hat{\alpha}$	0.0130 (0.0067)	0.0203 (0.0106)	0.0272 (0.0090)	0.0360 (0.0119)	0.0265 (0.0084)	0.0349 (0.0101)
	$\hat{\beta}$	0.0408 (0.0768)	-0.3304 (0.1980)	-0.3140 (0.1718)	-0.2884 (0.1792)	-0.3150 (0.1682)	-0.3031 (0.1618)
$n = 200$	$\hat{\alpha}$	0.0088 (0.0034)	0.0250 (0.0056)	0.0285 (0.0048)	0.0328 (0.0062)	0.0275 (0.0046)	0.0351 (0.0060)
	$\hat{\beta}$	0.0232 (0.0391)	-0.3325 (0.1537)	-0.3217 (0.1392)	-0.3119 (0.1421)	-0.3234 (0.1392)	-0.3126 (0.1324)

*Tahminlerin MSE değerleri parantez içinde verilmiştir. En küçük MSE değerleri koyu metin ile gösterilmiştir.

Tablo 4.3. $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\beta}$ için simüle edilmiş yan ve MSE değerleri

		$\alpha = 2$ ve $\beta = 1$					
n		ML	LS	WLS	CV	AD	RAD
$n = 25$	$\hat{\alpha}$	0.1007 (0.1245)	-0.0198 (0.1558)	-0.0070 (0.1333)	0.1031 (0.1930)	0.0118 (0.1037)	0.0386 (0.1192)
	$\hat{\beta}$	0.0059 (0.0356)	0.0165 (0.0192)	0.0155 (0.0185)	0.0120 (0.0221)	0.0142 (0.0185)	0.0087 (0.0199)
$n = 50$	$\hat{\alpha}$	0.0422 (0.0530)	-0.0300 (0.0591)	-0.0128 (0.0505)	0.0282 (0.0631)	-0.0058 (0.0459)	0.0078 (0.0499)
	$\hat{\beta}$	0.0062 (0.0171)	0.0112 (0.0086)	0.0100 (0.0086)	0.0082 (0.0090)	0.0099 (0.0086)	0.0072 (0.0091)
$n = 100$	$\hat{\alpha}$	0.0242 (0.0241)	-0.0088 (0.0319)	0.0024 (0.0256)	0.0203 (0.0334)	0.0018 (0.0239)	0.0080 (0.0267)
	$\hat{\beta}$	0.0010 (0.0082)	0.0042 (0.0044)	0.0032 (0.0042)	0.0026 (0.0045)	0.0034 (0.0042)	0.0022 (0.0046)
$n = 200$	$\hat{\alpha}$	0.0143 (0.0120)	-0.0052 (0.0155)	0.0018 (0.0121)	0.0092 (0.0158)	0.0008 (0.0120)	0.0088 (0.0132)
	$\hat{\beta}$	0.0004 (0.0042)	0.0012 (0.0023)	0.0011 (0.0022)	0.0004 (0.0023)	0.0013 (0.0022)	-0.0003 (0.0024)

*Tahminlerin MSE değerleri parantez içinde verilmiştir. En küçük MSE değerleri koyu metin ile gösterilmiştir.

Tablo 4.4. $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\beta}$ için simüle edilmiş yan ve MSE değerleri

		$\alpha = 2$ ve $\beta = 3$					
n		ML	LS	WLS	CV	AD	RAD
$n = 25$	$\hat{\alpha}$	0.1146 (0.1407)	0.0409 (0.1949)	0.0649 (0.1810)	0.1734 (0.2550)	0.0850 (0.1559)	0.1461 (0.2197)
	$\hat{\beta}$	0.1617 (0.3773)	-0.2791 (0.8552)	-0.2528 (0.7858)	-0.0761 (1.1870)	-0.2490 (0.4746)	-0.2040 (0.5428)
$n = 50$	$\hat{\alpha}$	0.0466 (0.0587)	0.0297 (0.0862)	0.0479 (0.0744)	0.0933 (0.1007)	0.0528 (0.0693)	0.0868 (0.0893)
	$\hat{\beta}$	0.0947 (0.1830)	-0.3232 (0.2926)	-0.3012 (0.2506)	-0.2356 (0.2762)	-0.2929 (0.2403)	-0.2687 (0.2319)
$n = 100$	$\hat{\alpha}$	0.0301 (0.0268)	0.0455 (0.0413)	0.0578 (0.0353)	0.0771 (0.0467)	0.0580 (0.0340)	0.0754 (0.0403)
	$\hat{\beta}$	0.0585 (0.0902)	-0.3169 (0.1952)	-0.3019 (0.1698)	-0.2744 (0.1778)	-0.3006 (0.1671)	-0.2881 (0.1606)
$n = 200$	$\hat{\alpha}$	0.0147 (0.0125)	0.0509 (0.0228)	0.0568 (0.0191)	0.0666 (0.0251)	0.0547 (0.0181)	0.0707 (0.0216)
	$\hat{\beta}$	0.0264 (0.0391)	-0.3267 (0.1510)	-0.3168 (0.1364)	-0.3059 (0.1396)	-0.3187 (0.1364)	-0.3067 (0.1286)

*Tahminlerin MSE değerleri parantez içinde verilmiştir. En küçük MSE değerleri koyu metin ile gösterilmiştir.

Tablo 4.5. $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\beta}$ için simüle edilmiş yan ve MSE değerleri

		$\alpha = 0.8$ ve $\beta = 2$					
n		ML	LS	WLS	CV	AD	RAD
$n = 25$	$\hat{\alpha}$	0.0509 (0.0223)	0.0304 (0.0311)	0.0375 (0.0274)	0.0853 (0.0428)	0.0446 (0.0235)	0.0627 (0.0316)
	$\hat{\beta}$	0.0661 (0.1345)	-0.1830 (0.1514)	-0.1772 (0.1387)	-0.1139 (0.1685)	-0.1700 (0.1270)	-0.1642 (0.1300)
$n = 50$	$\hat{\alpha}$	0.0256 (0.0093)	0.0296 (0.0147)	0.0347 (0.0126)	0.0561 (0.0181)	0.0365 (0.0116)	0.0480 (0.0141)
	$\hat{\beta}$	0.0452 (0.0639)	-0.1882 (0.0890)	-0.1820 (0.0817)	-0.1568 (0.0854)	-0.1792 (0.0771)	-0.1759 (0.0769)
$n = 100$	$\hat{\alpha}$	0.0109 (0.0041)	0.0272 (0.0072)	0.0309 (0.0062)	0.0402 (0.0084)	0.0306 (0.0060)	0.0372 (0.0067)
	$\hat{\beta}$	0.0217 (0.0262)	-0.1971 (0.0607)	-0.1919 (0.0564)	-0.1822 (0.0564)	-0.1916 (0.0559)	-0.1895 (0.0552)
$n = 200$	$\hat{\alpha}$	0.0068 (0.0022)	0.0281 (0.0041)	0.0303 (0.0037)	0.0345 (0.0046)	0.0299 (0.0036)	0.0354 (0.0043)
	$\hat{\beta}$	0.0098 (0.0128)	-0.2032 (0.0522)	-0.1993 (0.0495)	-0.1960 (0.0496)	-0.1993 (0.0493)	-0.1976 (0.0486)

*Tahminlerin MSE değerleri parantez içinde verilmiştir. En küçük MSE değerleri koyu metin ile gösterilmiştir.

Tablo 4.6. $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\beta}$ için simüle edilmiş yan ve MSE değerleri

		$\alpha = 0.6$ ve $\beta = 0.5$					
n		ML	LS	WLS	CV	AD	RAD
$n = 25$	$\hat{\alpha}$	0.0307 (0.0096)	-0.0863 (0.0121)	-0.0820 (0.0106)	-0.0630 (0.0091)	-0.0439 (0.0085)	-0.0609 (0.0082)
	$\hat{\beta}$	-0.0134 (0.0134)	0.1839 (0.0390)	0.1831 (0.0382)	0.1700 (0.0341)	0.1497 (0.0301)	0.1662 (0.0333)
$n = 50$	$\hat{\alpha}$	0.0125 (0.0037)	-0.0830 (0.0091)	-0.0790 (0.0080)	-0.0716 (0.0074)	-0.0696 (0.0073)	-0.0670 (0.0063)
	$\hat{\beta}$	-0.0036 (0.0068)	0.1815 (0.0358)	0.1809 (0.0353)	0.1746 (0.0333)	0.1726 (0.0333)	0.1702 (0.0320)
$n = 100$	$\hat{\alpha}$	0.0048 (0.0017)	-0.0810 (0.0076)	-0.0780 (0.0069)	-0.0753 (0.0067)	-0.0779 (0.0069)	-0.0684 (0.0056)
	$\hat{\beta}$	-0.0002 (0.0033)	0.1788 (0.0333)	0.1792 (0.0333)	0.1753 (0.0320)	0.1791 (0.0333)	0.1702 (0.0304)
$n = 200$	$\hat{\alpha}$	0.0050 (0.0009)	-0.0776 (0.0066)	-0.0756 (0.0061)	-0.0748 (0.0061)	-0.0768 (0.0063)	-0.0665 (0.0050)
	$\hat{\beta}$	-0.0035 (0.0017)	0.1748 (0.0310)	0.1754 (0.0314)	0.1724 (0.0304)	0.1763 (0.0317)	0.1667 (0.0285)

*Tahminlerin MSE değerleri parantez içinde verilmiştir. En küçük MSE değerleri koyu metin ile gösterilmiştir.

Tablo 4.7. $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\beta}$ için en küçük MSE değerleri ve bu değerlere ait tahmin yöntemleri

α	β	n	$\hat{\alpha}$		$\hat{\beta}$	
			MSE	Yöntem	MSE	Yöntem
1	1	25	0.0269	AD	0.0180	AD
		50	0.0122	AD	0.0083	WLS
		100	0.0063	ML ve AD	0.0045	AD
		200	0.0026	AD	0.0022	WLS, AD
1	3	25	0.0279	ML	0.1720	ML
		50	0.0136	ML	0.1265	ML
		100	0.0067	ML	0.0768	ML
		200	0.0034	ML	0.0391	ML
2	1	25	0.1037	AD	0.0185	WLS, AD
		50	0.0459	AD	0.0086	LS, WLS, AD
		100	0.0239	AD	0.0042	WLS, AD
		200	0.0120	ML, AD	0.0022	WLS, AD
2	3	25	0.1407	ML	0.3773	ML
		50	0.0587	ML	0.1830	ML
		100	0.0268	ML	0.0902	ML
		200	0.0125	ML	0.0391	ML
0.8	2	25	0.0223	AD	0.1270	AD
		50	0.0093	ML	0.0639	ML
		100	0.0041	ML	0.0262	ML
		200	0.0022	ML	0.0128	ML
0.6	0.5	25	0.0082	AD	0.0134	ML
		50	0.0037	ML	0.0068	ML
		100	0.0017	ML	0.0033	ML
		200	0.0009	ML	0.0017	ML

Tablo 4.8. $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\beta}$ parametreleri için kapsama olasılığı (CP) ve ortalama aralık uzunluğu (AW) değerleri

α	β	n	$\hat{\alpha}$		$\hat{\beta}$	
			CP	AW	CP	AW
1	1	25	0.9510	0.1238	0.9450	0.1422
		50	0.9510	0.0607	0.9430	0.0707
		100	0.9520	0.0299	0.9550	0.0353
		200	0.9570	0.0148	0.9480	0.0177
1	3	25	0.9350	0.1346	0.9620	0.4889
		50	0.9390	0.0648	0.9460	0.2235
		100	0.9480	0.0320	0.9470	0.1089
		200	0.9520	0.0158	0.9510	0.0533
2	1	25	0.9520	0.2492	0.9370	0.1421
		50	0.9490	0.1215	0.9470	0.0705
		100	0.9470	0.0596	0.9590	0.0353
		200	0.9510	0.0297	0.9540	0.0176
2	3	25	0.9490	0.2683	0.9620	0.4776
		50	0.9600	0.1297	0.9550	0.2244
		100	0.9530	0.0634	0.9670	0.1080
		200	0.9540	0.0315	0.9530	0.0534
0.8	2	25	0.9490	0.1062	0.9600	0.2697
		50	0.9670	0.0512	0.9570	0.1293
		100	0.9470	0.0253	0.9530	0.0638
		200	0.9530	0.0125	0.9570	0.0317
0.6	0.5	25	0.9480	0.0692	0.9110	0.0919
		50	0.9490	0.0338	0.9410	0.0464
		100	0.9420	0.0167	0.9530	0.0231
		200	0.9540	0.0083	0.9560	0.0116

4.5. Gerçek Veri Uygulaması

Bu kısımda tahmin edicilerin etkinliklerini karşılaştırmak için gerçek veri seti uygulaması verilmiştir. ML tahmin edicisi diğer tahmin edicilerle karşılaştırdığında simülasyon çalışmasında daha iyi sonuçlar vermiştir. Dolayısıyla tez çalışmasının gerçek veri uygulamasında farklı dağılımların ML tahmin edicileri, UPL dağılımının ML tahmin edicisi ile kıyaslanacaktır. Farklı dağılımlar olarak Kumaraswamy dağılımı (Kumaraswamy, 1980), Beta dağılımı (Pearson, 1895) ve UL dağılımı (Mazuchelli ve ark., 2019) kullanılacaktır.

Dağılımların performansları karşılaştırılırken çeşitli ölçüler kullanılacaktır. Öncelikli olarak bu dağılımlar için yaygın olarak kullanılan bilgi kriterlerinden, Akaike bilgi kriteri (AIC) (Akaike, 1973), Bayes bilgi kriteri (BIC) (Schwarz, 1978) ve Etkin Belirleme bilgi kriteri (EDC) (Bai ve ark., 1989) hesaplanacaktır. Bilgi kriterleri aşağıda yer alan formüller yardımıyla hesaplanmaktadır:

$$AIC = 2k - 2\ell,$$

$$BIC = k \log(n) - 2\ell,$$

$$EDC = k(0.2)\sqrt{n} - 2\ell.$$

Burada k modelde tahmin edilen parametre sayısını, n veri sayısını ve ℓ dağılım için log-olabilirlik fonksiyonunun maksimum değerini göstermektedir.

Ayrıca veri setleri için hangi dağılımın daha uygun olduğunu belirlemek için Kolmogorov Smirnov (KS) test istatistiği kullanılacaktır. KS test istatistiği aşağıda yer alan adımlar yardımıyla hesaplanır:

Adım 1. Veriyi küçükten büyüğe sırala $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$.

Adım 2. Aşağıdaki formülü kullanarak KS test istatistiğini hesapla:

$$D = \max_{i=1,2,\dots,n} \{|F_n(x) - F(x)|\}.$$

Burada $F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{x_i \leq x}$ ampirik dağılımı ve $F(x)$ ise dağılım fonksiyonunu göstermektedir.

Uygulamada iki ayrı gerçek veri seti kullanılacaktır. Veri setleri metal sanayisinde sac profilden oluşturulan çapak işlemi ile ilgilidir. İlk veri seti, delik çapı 2mm ve sac kalınlığı 3.15mm olan 50 gözlemlik çapaklara ait veri setinden oluşmaktadır. İkinci veri seti de delik çapı 9mm ve sac kalınlığı 2mm olan 50 gözlemlik çapaklara ait veri setini içermektedir. Bu iki veri seti Dasgupta (2011) tarafından extreme value dağılımı yardımıyla modellenmiştir. İlk veri seti Tablo 4.9’da verilmiştir.

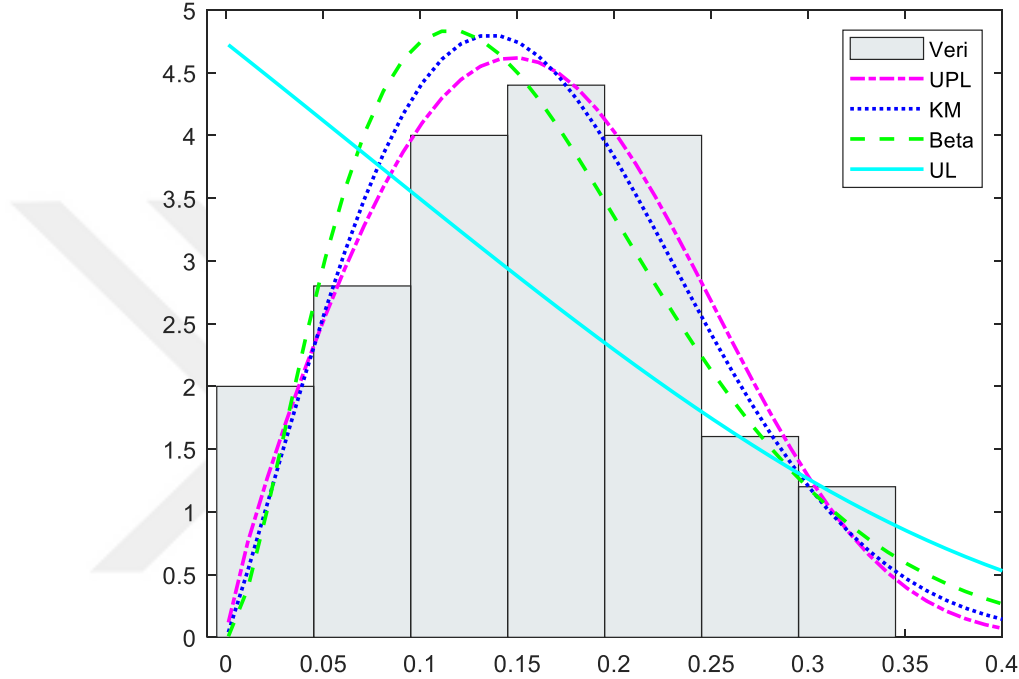
Tablo 4.9. Veri seti-1

0.04	0.02	0.06	0.12	0.14	0.08	0.22	0.12	0.08	0.26	0.24	0.04	0.14	0.16	0.08	0.26	0.32	0.28	0.14	0.16	0.24
0.22	0.12	0.18	0.24	0.32	0.16	0.14	0.08	0.16	0.24	0.16	0.32	0.18	0.24	0.22	0.16	0.12	0.24	0.06	0.02	0.18
0.22	0.14	0.06	0.04	0.14	0.26	0.18	0.16													

Tablo 4.10’da ele alınan farklı dağılımların parametreleri için ML tahminleri, KS test istatistik değerleri ve AIC, BIC ve EDC gibi bilgi kriteri değerleri verilmektedir. Tabloda verilen sonuçlara göre, Veri seti-1 için en küçük bilgi kriteri değerleri ve KS test istatistiği değeri UPL dağılımına aittir. Dolayısıyla en iyi modelleme UPL dağılımı tarafından sağlanmaktadır. Bu fikri desteklemek için ayrıca Şekil 4.1 ile veri setinin histogramı ve UPL, Kumaraswamy, Beta ve UL dağılımlarına ait uydurulmuş pdf grafikleri verilmiştir. Bu grafiğe göre de en iyi uyumu UPL dağılımı göstermektedir.

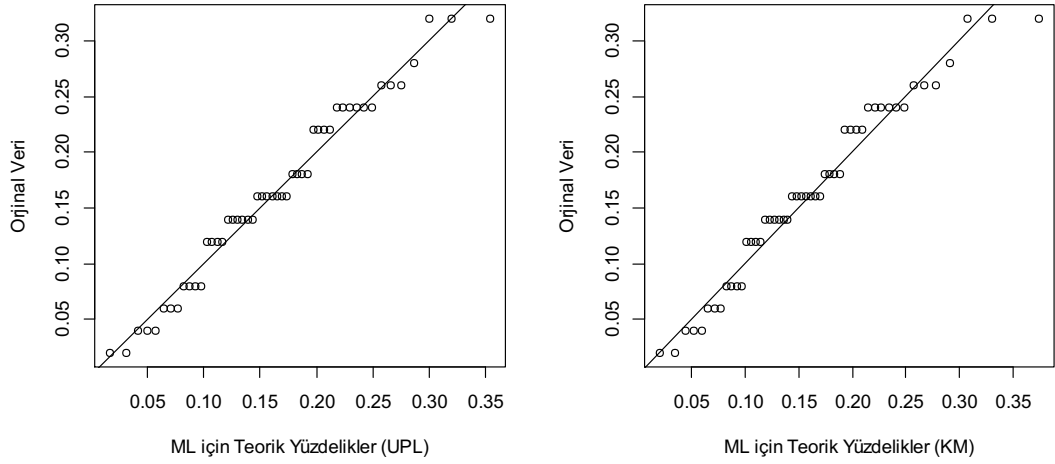
Tablo 4.10. Operasyon verileri için verilen dağılımlara ait istatistiki değerler

Dağılımlar		UPL Dağılımı	KM Dağılımı	Beta Dağılımı	UL Dağılımı
Tahmin Ediciler	$\hat{\alpha}$	1.7646	2.0774	2.6826	5.5829
	$\hat{\beta}$	14.1279	33.1374	13.8658	-
Test İstatistiği	KS	0.1084	0.6711	0.5946	0.2289
Bilgi Kriterleri	AIC	-109.8736	-108.1374	-105.2133	-93.1548
	BIC	-106.0496	-104.3133	-101.3893	-87.3307
	EDC	-111.0452	-109.3089	-106.3849	-92.3263

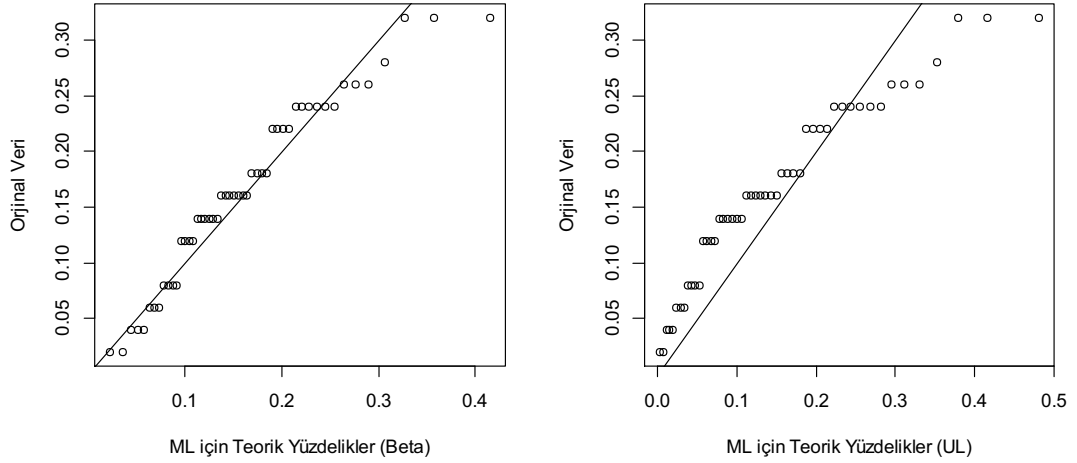


Şekil 4.1. Veri setinin histogramı üzerine UPL, Kumaraswamy, Beta ve UL dağılımlarından elde edilen uydurulmuş pdf grafikleri

Tahmin edicilerin performanslarını karşılaştırmak için kullanılacak diğer bir yöntem ise Q-Q grafikleridir. Şekil 4.2 ve Şekil 4.3'de Veri seti-1 için UPL, Kumaraswamy, Beta ve UL dağılımlarından elde edilmiş Q-Q grafikleri verilmiştir. Bu grafiklere göre Veri Seti-1 için en iyi uyumu UPL dağılımının verdiği gözlenmekle birlikte UL dağılımı diğer dağılımlara göre en az uyum gösteren dağılımdır.



Şekil 4.2. UPL ve Kumaraswamy dağılımlarına ait Q-Q grafikleri

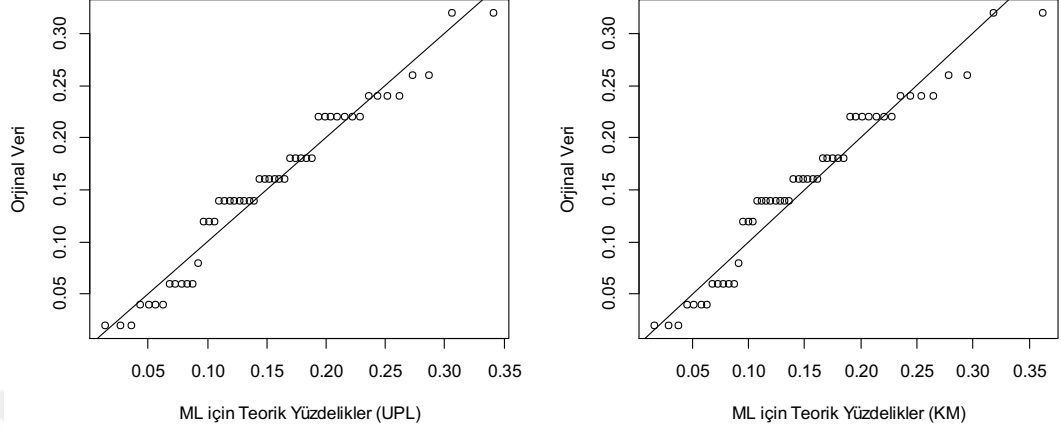


Şekil 4.3. Beta ve UL dağılımlarına ait Q-Q grafikleri

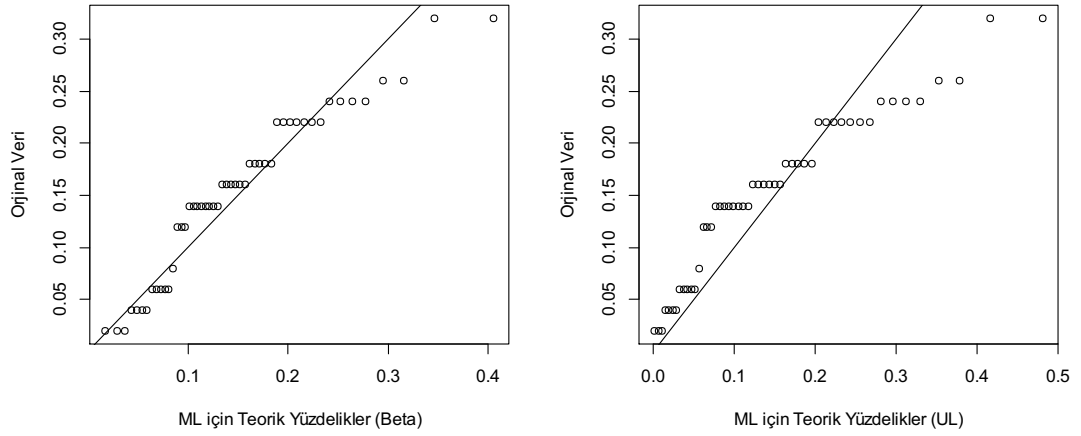
İkinci veri seti de Tablo 4.11 ile verilmiştir. Tablodan elde edilen sonuçlar ise Tablo 4.12 ile gösterilmiştir.

Tablo 4.11’de UPL, Kumaraswamy, Beta ve UL dağılımlarının ML tahminleri, KS test istatistik değeri ve AIC, BIC ve EDC gibi bilgi kriteri değerleri yer almaktadır. Tabloya göre, Veri seti-2 için en küçük bilgi kriteri değerleri ve KS test istatistiği değeri UPL dağılımından elde edilmiştir. Buradan en iyi modelin UPL dağılımı olduğu sonucuna varılır. Benzer şekilde Şekil 4.4’de veri setinin histogramı ve UPL, Kumaraswamy, Beta ve UL dağılımlarına ait uydurulmuş pdf grafikleri

uyum gösteren dağılım UPL dağılımıdır. Ek olarak UL dağılımı da diğer dağılımlara göre en az uyum gösteren dağılım olmuştur.



Şekil 4.5. UPL ve Kumaraswamy dağılımlarına ait Q-Q grafikleri



Şekil 4.6. Beta ve UL dağılımlarına ait Q-Q grafikleri

BÖLÜM 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında literatürde var olan unit dağılımlara ek olarak, Lindley dağılımının yeni bir uzantısı olan PL dağılımı kullanılarak daha esnek özelliklere sahip ve UL dağılımına alternatif olabilecek UPL dağılımı önerilmiştir. Önerilen bu dağılımın pdf ve cdf hesaplanarak dağılımın hazard fonksiyonu, yüzdellik fonksiyonu, beklenen değer ve varyansı, çarpıklık ve basıklık katsayısı gibi çeşitli karakteristik özellikleri incelenmiştir.

UPL dağılımının etkinliğini incelemek amacıyla; ML, LS, WLS, CVM, AD ve RAD tahmin yöntemleri olmak üzere altı farklı tahmin edici yöntemi kullanılmıştır. Bu tahmin yöntemlerinin performanslarını karşılaştırmak amacıyla simülasyon çalışması yapılmıştır. Simülasyon çalışması sonuçları incelendiğinde ML tahmin yönteminin LS, WLS, CVM, AD, RAD tahmin yöntemlerine göre daha iyi sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir. ML tahmin yönteminin UPL dağılımı için daha iyi sonuçlar verdiğini ispatlamak amacıyla UPL dağılımına ek olarak KM dağılımı, Beta dağılımı ve UL dağılımı için ML tahmin yöntemi gerçek veri seti üzerinde uygulanmıştır. Gerçek veri uygulamasında iki farklı veri seti kullanılmıştır. Her bir veri seti için dağılımların olasılık yoğunluk fonksiyonları ile veri setinin histogramı oluşturulmuş ve birbirleri ile uyumlu olduğu görülmüştür. Ayrıca gerçek veri seti için KS test istatistiği değerleri ve AIC, BIC, EDC gibi bilgi kriteri değerleri hesaplanmıştır. Bu değerlerin sonuçları incelendiğinde de en iyi sonuçların UPL dağılımına ait olduğu gözlenmiştir. Bununla birlikte, Q-Q grafiklerinde de en iyi uyumu yine UPL dağılımının sağladığı görülmüştür. Sonuç olarak önerilen UPL dağılımı farklı çarpıklık ve basıklık değerlerine sahip dağılımları modelleyebilmek için daha esnek özellikler gösterdiğinden oldukça avantajlıdır ve bu tez çalışması sonucunda elde edilen sonuçlar doğrultusunda UPL dağılımının kullanılması önerilmektedir.

KAYNAKLAR

- Akaike, H. 1973. Information theory and an extension of the maximum likelihood principle. Proceeding of the Second International Symposium on Information Theory, B.N. Petrov and F. Caski, Akademiai Kiado, Budapest, 267-281.
- Akgül, F. G. 2018. Comparison of the estimation methods for the parameters of exponentiated reduced kies distribution. Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 22(3): 1209-1216.
- Bai, Z. D., Krishnaiah, P. R., Zhao and L. C. (1989). On rates of convergence of efficient detection criteria in signal processing with white noise. IEEE Transactions on Information Theory, 35(2): 380-388.
- Barco, K. V. P., Mazucheli, J., and Janeiro, V. 2017. The inverse power Lindley distribution. Communications in Statistics-Simulation and Computation, 46(8): 6308-6323.
- Barndorff-Nielsen, O. E., and Jørgensen, B. 1991. Some parametric models on the simplex. Journal of multivariate analysis, 39(1): 106-116.
- Bayes, C. L., Bazán, J. L., and García, C. 2012) A new robust regression model for proportions. Bayesian Analysis, 7(4): 841-866.
- Bowman, K. O., and Shenton, L. R. 2007. The beta distribution, moment method, Karl Pearson and RA Fisher. Far East Journal of Theoretical Statistics, 23(2): 133.
- Dasgupta, R. 2011. On the distribution of burr with applications. Sankhya B, 73(1): 1-19.
- Dey, S., Mazucheli, J., and Nadarajah, S. 2018. Kumaraswamy distribution: different methods of estimation. Computational and Applied Mathematics, 37(2): 2094-2111.
- Ghitany, M. E., Al-Mutairi, D. K., Balakrishnan, N., and Al-Enezi, L. J. 2013. Power Lindley distribution and associated inference. Computational Statistics & Data Analysis, 64: 20-33.
- Ghitany, M. E., Mazucheli, J., Menezes, A. F. B., and Alqallaf, F. 2019. The unit-inverse Gaussian distribution: A new alternative to two-parameter distributions

- on the unit interval. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 48(14): 3423-3438.
- Gradshteyn, I. S., and Ryzhik, I. M. 2014. *Table of integrals, series, and products*. Academic press.
- Hahn, E. D. 2008. Mixture densities for project management activity times: A robust approach to PERT. *European Journal of operational research*, 188(2): 450-459.
- Hashmi, S., Aidi, K., Ramos, P. L., and Louzada, F. 2020. Unit modified Burr-III distribution: Estimation, characterizations and validation test. *Annals of Data Science*, 1-26.
- Johnson, N. L. 1949. Systems of frequency curves generated by methods of translation. *Biometrika*, 36(1/2): 149-176.
- Korkmaz, M. Ç., and Chesneau, C. 2021. On the unit Burr-XII distribution with the quantile regression modeling and applications. *Computational and Applied Mathematics*, 40(1): 1-26.
- Kumar, C. S. and Dharmaja, S. H. S. 2017. The exponentiated reduced Kies distribution: Properties and applications. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 46(17): 8778-8790.
- Kumaraswamy, P. 1980. A generalized probability density function for double-bounded random processes. *Journal of hydrology*, 46(1-2): 79-88.
- Mazucheli, J., Menezes, A. F. B., and Chakraborty, S. 2019. On the one parameter unit-Lindley distribution and its associated regression model for proportion data. *Journal of Applied Statistics*, 46(4): 700-714.
- Mazucheli, J., Menezes, A. F. B., and Dey, S. 2018. Improved maximum-likelihood estimators for the parameters of the unit-gamma distribution. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 47(15): 3767-3778.
- Mazucheli, J., Menezes, A. F. B., Fernandes, L. B., de Oliveira, R. P., and Ghitany, M. E. 2020. The unit-Weibull distribution as an alternative to the Kumaraswamy distribution for the modeling of quantiles conditional on covariates. *Journal of Applied Statistics*, 47(6): 954-974.
- Rennolls, K., and Wang, M. 2005. A new parameterization of Johnson's SB distribution with application to fitting forest tree diameter data. *Canadian journal of forest research*, 35(3): 575-579.

Schwarz, G. (1978). Estimating the dimension of a model. *The annals of statistics*, 461-464.

Tadikamalla, P. R. 1981. On a family of distributions obtained by the transformation of the gamma distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 13(3-4): 209-214.

Tadikamalla, P. R., and Johnson, N. L. 1982. Systems of frequency curves generated by transformations of logistic variables. *Biometrika*, 69(2): 461-465.

Topp, C. W., and Leone, F. C. 1955. A family of J-shaped frequency functions. *Journal of the American Statistical Association*, 50(269): 209-219.

Yousof, H. M., and Korkmaz, M. Ç. 2017. Topp-leone Nadarajah-haghighi distribution. *İstatistikçiler Dergisi: İstatistik ve Aktüerya*, 10(2): 119-127.



ÖZGEÇMİŞ

Hülya KARAKUŞ, 2014 yılında Giresun Atatürk Anadolu Lisesi'nden mezun oldu. 2015 yılında başladığı Atatürk Üniversitesi Endüstri Mühendisliği bölümünü 2019 yılında bitirdi. 2020 yılında Giresun Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik Anabilim dalında yüksek lisans eğitimine başladı. 2022 yılı Eylül ayında GİTEKS Konf. San. ve Tic. A.Ş. 'de üretim mühendisi olarak çalışmaya başladı ve halen bu işletmede çalışmaya devam etmektedir.