

T.C.
GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HOMOJEN OLMAYAN POISSON SÜRECİ VE
UYGULAMASI

FATMA NUR GÜL
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GEBZE
2023

T.C.
GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HOMOJEN OLMAYAN POISSON SÜRECİ
VE UYGULAMASI

FATMA NUR GÜL
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMANI
DOÇ. DR. NURİ ÇELİK

GEBZE
2023

GEBZE TECHNICAL UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

**NONHOMOGENEOUS POISSON
PROCESS AND ITS APPLICATION**

FATMA NUR GÜL
A THESIS SUBMITTED FOR THE DEGREE OF
MASTER OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

THESIS SUPERVISOR
ASSOCIATE PROF. DR. NURİ ÇELİK

GEBZE

2023



YÜKSEK LİSANS JÜRİ ONAY FORMU

GTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 25/05/2023 tarih ve 2023/30 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 08/06/2023 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Fatma Nur Gül'ün tez çalışması Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE

(TEZ DANIŞMANI)

: DOÇ. DR. NURİ ÇELİK

ÜYE

: PROF. DR. COŞKUN YAKAR

ÜYE

: DOÇ. DR. İKLİM GEDİK BALAY

ONAY

Gebze Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
...../...../..... tarih ve/..... sayılı kararı.

İMZA/MÜHÜR

ÖZET

Bir olgunun veya bir oluşumun matematiksel ifadeler kullanılarak soyut ve sadeleştirilmiş bir şekilde ifade edilmesine matematiksel model denilmektedir. İstatistiksel düzenlilik gösteren bir olgunun veya oluşumun sonuçlarının gerçekleşme olasılıklarını doğru bir şekilde tanımlayabilen model ise stokastik model olarak ifade edilmektedir. Başka bir deyişle, sistemde meydana gelen herhangi bir değişimin sonucu kestirilemiyor ve raslantısallık bir durum söz konusu ise gözlemlenen olay bir stokastiktir.

Rastsal bir değişkenin zaman içindeki değişimini ifade etmek için stokastik terimi kullanılmaktadır. Bir stokastik süreç, bir rastsal değişkenin zaman içindeki değişimini göstermektedir. Değişkenin rastsal olması ve zamana bağlı olarak değişmesi stokastik süreçleri incelerken önem arz etmektedir. Stokastik modeller, model değişkenlerinin rastsal olmasından dolayı geleceğe dönük belirsizliklerin bulunduğu durumlarda kullanılmaktadır. Bu belirsizliğin matematiksel olarak modellenmesi stokastik modelleme aracılığıyla gerçekleşmektedir.

$N(t)$, $(0, t]$ aralığında meydana gelen belli türden olayların sayısı olmak üzere $\{N(t), t \geq 0\}$ stokastik süreci bir sayma süreci olarak adlandırılır. Sayma süreçleri modelleme açısından modern bilimin geniş bir alanına hitap etmektedir. En önemli sayma süreçlerinden biri olan Poisson süreci birçok yeni probleme çözüm ve farklı bakış açısı getirmiştir. Poisson süreci, rastgele meydana gelen olayların sayıları için bir model oluşturmakla birlikte diğer yararlı stokastik süreçlerin inşa edilebileceği temel bir yapı taşıdır. Modellemede çok sık kullanılan sayma süreçlerinden biri de homojen olmayan Poisson sürecidir.

Bu çalışmada Homojen Olmayan Poisson Süreci ile Türkiye, Japonya ve Amerika'daki 2002-2021 yılları arasında meydana gelen deprem verileri kullanılarak modelleme yapılmıştır. Bu modelleme yapılırken kuvvet yasası modeli kullanılmıştır.

Bu tez beş ana bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde giriş ve literatür taraması kapsamlı bir şekilde ele alınmıştır. İkinci bölümde stokastik süreçler ve olasılıksal yapıları, stokastik süreçlerin alt türleri ve özellikleri, sayma süreçleri ve söz konusu sayma süreçlerinin teorik alt yapısı geniş bir şekilde ifade edilmiştir.

Tezin üçüncü bölümünde Poisson dağılımı ve Poisson süreçleri hakkında bilgilere yer verildikten sonra, homojen Poisson süreci (HPS) ve homojen olmayan Poisson

süreçlerinin (HOPS) karakterizasyonu, özellikleri, ortalama ve varyans gibi istatistiksel yapıları verilmiştir. Ayrıca HOPS modellemesinde kullanılan model türlerinden kısaca bahsedilmiştir. Bu tezde kullanılacak olan kuvvet yasası modelinin olabilirlik fonksiyonu, parametre tahminleri ve beklenen arıza sayısı gibi özellikleri verilmiştir.

Dördüncü bölümde uygulama olarak Türkiye, Japonya ve Amerika’da meydana gelen 5 ve üzeri deprem büyüklükleri dikkate alınarak bir önceki bölümde verilen kuvvet yasası modeli ile modelleme yapılmıştır. Bu model ile kullanılacak olan parametre tahmin değerleri hesaplandıktan sonra veri ile ilgili haftalık, aylık ve yıllık olarak gelecekteki herhangi bir zaman noktasında deprem olma olasılıkları hesaplanmıştır.

Son bölümde elde edilen sonuçlar yorumlanmış ve tartışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Stokastik Süreçler, Poisson Süreci, Homojen Olmayan Poisson Süreci, Kuvvet Yasası.

SUMMARY

A mathematical model refers to the representation of an event or phenomenon using mathematical expressions in an abstract and simplified manner. A stochastic model, on the other hand, is a model that accurately describes the probabilities of outcomes for an event or phenomenon that exhibits statistical regularity. In other words, if the outcome of any change in a system cannot be predicted and randomness is involved, the observed event is stochastic.

The term "stochastic" is used to describe the variation of a random variable over time. A stochastic process represents the change of a random variable over time. The random nature and the dependence on time are important aspects to consider when studying stochastic processes. Stochastic models are used in situations where there is uncertainty about future outcomes due to the randomness of the model variables. Mathematical modeling of this uncertainty is achieved through stochastic modeling.

The stochastic process denoted as $\{N(t), t \geq 0\}$ where $N(t)$ represents the number of certain types of events occurring in the interval $(0, t]$, is referred to as a counting process. Counting processes have broad applications in various fields of modern science. One of the most important counting processes, the Poisson process, has provided solutions and different perspectives to many new problems. While the Poisson process serves as a model for the numbers of randomly occurring events, it also serves as a fundamental building block for constructing other useful stochastic processes. Another commonly used counting process in modeling is the non-homogeneous Poisson process.

In this study, modeling was conducted using the non-homogeneous Poisson process with earthquake data from Turkey, Japan, and the United States between 2002 and 2021. The power law model was employed for this modeling process.

This thesis consists of five main sections. The first section extensively covers the introduction and literature review. The second section provides a comprehensive discussion on stochastic processes and their probabilistic structures, including subtypes and characteristics of stochastic processes, counting processes, and the theoretical foundation of these counting processes.

In the third section of the thesis, after providing information about the Poisson distribution and Poisson processes, the characterization, features, and statistical

properties such as mean and variance of homogeneous Poisson processes (HPP) and non-homogeneous Poisson processes (NHPP) are presented. Brief descriptions of the model types used in NHPP modeling are also mentioned. The likelihood function, parameter estimation, and expected number of events for the power law model to be used in this thesis are specified.

In the fourth section, as an application, modeling is performed using the power law model introduced in the previous section, considering earthquakes with magnitudes of 5 and above in Turkey, Japan, and the United States. After calculating the parameter estimation values to be used in the model, probabilities of earthquakes occurring at any future time point are calculated on a weekly, monthly, and yearly basis.

The final section interprets and discusses the results obtained in the thesis.

Keywords: Stochastic Processes, Poisson Processes, Nonhomogeneous Poisson Process, Power Law.

TEŞEKKÜR

Akademik kariyerimin ilk eseri olacak olan bu tez çalışmasında danışmanım olmayı kabul eden, yüksek lisans eğitimim boyunca bir an olsun desteğini esirgemeyen ve daima bana inanan, fikirlerinden, bilim insanı kişiliğinden ve insaniyetinden çok şey öğrendiğim, yol haritamı şekillendiren, ilham aldığım, alacağım ve birlikte çalışıyor olmaktan daima gurur ve onur duyacağım danışman hocam Doç. Dr. Nuri ÇELİK'e,

Hem lisans hem de yüksek lisans eğitimim boyunca hiçbir sorumu yanıtsız bırakmayan, akademik anlamda bilgi birikimi, tecrübesi ve öngörleriyle yolumu aydınlatan Doç. Dr. Fatma ÇALIŞKAN'a,

Tezin değerlendirilmesindeki olumlu eleştirileri ve katkılarından dolayı Prof. Dr. Coşkun YAKAR'a ve Doç. Dr. İklim GEDİK BALAY'a,

Kendileriyle bu yolculukta tanışma fırsatı bulduğum, birlikte çalışmaktan ve zaman geçirmekten her zaman keyif aldığım, desteklerini daima arkamda hissettiğim, başarılarıyla mutlu olduğum ve gurur duyduğum ve bundan sonra da duyacağım Çelik Akademi üyeleri canım arkadaşlarım Selin ÖĞÜTCÜ'ye ve Derya Nur COŞAR'a,

Çıktığım her yolda ve aldığım her kararda yanımda ve arkamda duran, sevgi ve saygılarını her zaman hissettiğim, maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen annem Alime GÜL'e ve babam Fikret GÜL'e,

İlk okul eğitimimden yüksek lisans eğitimime kadar bana rehberlik eden, tez yazım sürecimin her aşamasında akademik bilgi birikimi ile yol gösteren, bir an olsun düşmeme izin vermeyen, beni her zaman her konuda cesaretlendiren, kendime olan inancımı kaybettiğim zamanlarda bile bana benden çok inanan, azmini, başarılarını, kararlı ve sarsılmaz duruşunu her zaman örnek aldığım ve bu yolculukta en az benim kadar payı olan ablam Tuğba GÜL'e

Teşekkürü borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	v
SUMMARY	vii
TEŞEKKÜR	ix
İÇİNDEKİLER	x
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	xii
ŞEKİLLER DİZİNİ	xiii
TABLolar DİZİNİ	xiv
1. GİRİŞ	1
1.1. Tezin Amacı, Katkısı ve İçeriği	7
2. STOKASTİK SÜREÇLER	8
2.1. Stokastik Süreçlerin Karakterizasyonu	10
2.1.1. Rastgele Sürecin Momentleri	10
2.2. Çoklu Rastgele Süreçler	12
2.3. Durağanlık	13
2.4. Sayma Süreçleri	15
3. POISSON SÜRECİ	17
3.1. Poisson Süreci ve Poisson Dağılımı	17
3.1.1. Homojen Poisson Süreci	18
3.1.2. Homojen Olmayan Poisson Süreci	19
3.1.3. Homojen Olmayan Poisson Sürecinde Kullanılan Modeller	20
3.1.4. Arıza Modelleri	22
3.1.4.1. Doğrusal Arıza Modeli	23
3.1.4.2. Kuvvet Yasası Arıza Modeli	24
3.1.4.3. Üstel Arıza Modeli	25
4. UYGULAMA	26
5. SONUÇLAR ve YORUMLAR	36
KAYNAKLAR	38
ÖZGEÇMİŞ	44



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler ve</u>	<u>Açıklamalar</u>
<u>Kısaltmalar</u>	
μ_X	: Ortalama Fonksiyonu
R_x	: Otokorelasyon Fonksiyonu
C_X	: Otokovaryans Fonksiyonu
ρ_X	: Korelasyon Katsayısı
R_{XY}	: Çapraz Korelasyon Fonksiyonu
C_{XY}	: Çapraz Kovaryans Fonksiyonu
ρ_{XY}	: Çapraz Korelasyon Katsayısı
α	: Başlangıçtaki Arıza Oranı
β	: Yaşlanma Oranı
x^*	: Gözlenen Birim Zaman
N	: Süre Boyunca Gözlenen Arıza Sayısı
USGS	: United States Geological Survey
ROCOF	: Arızaların Gerçekleşme Oranı (Rate of Occurance of Failures)
TDK	: Türk Dil Kurumu
HPS	: Homojen Poisson Süreci
HOPS	: Homojen Olmayan Poisson Süreci

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil No:</u>	<u>Sayfa</u>
4.1: Türkiye için yıllara göre deprem (5 ve üzeri) sayıları	27
4.2: Japonya için yıllara göre deprem (5 ve üzeri) sayıları	28
4.3: ABD için yıllara göre deprem (5 ve üzeri) sayıları	29
4.4 Türkiye için BDAS verilerine karşılık DAS grafiği	30
4.5: Japonya için BDAS verilerine karşılık DAS grafiği	30
4.6: Amerika için BDAS verilerine karşılık DAS grafiği	31



TABLÖLAR DİZİNİ

<u>Tablo No:</u>	<u>Sayfa</u>
4.1: Türkiye Japonya ve ABD için parametre tahminleri	32
4.2: Türkiye Japonya ve Kuzey Amerika için haftalık, aylık ve yıllık beklenen arıza sayıları	33
4.3: Türkiye Japonya ve Kuzey Amerika belirli zaman aralıkları için güvenilirlik tahminleri	34



1. GİRİŞ

Dünyada zamana bağlı olarak değişen birçok toplumsal ve doğal olayların yapısında tesadüfi unsurlar bulunmaktadır. Meydana gelen olayların tesadüfi özelliği stokastik süreçler ile modellenmektedir. Stokastik süreç, zaman parametresine ve olasılık kanunlarına bağlı istatistiksel bir olgu olarak ifade edilmektedir. Kökeni Yunanca olan “stokastik” kelimesi “şans ile ilintili” anlamında kullanılmaktadır. Yine birçok yazar stokastik süreci tesadüfi süreç olarak da adlandırmaktadır [Tüzgiray, 1991].

Stokastik süreçler, günümüzde genler ile taşınan hastalıkların yayılımının tahmini, bir havalimanına inen uçak sayısı ve bir mağazaya gelen müşteri sayısının belirlenmesi, bir ülkenin buğday üretimi miktarı, aylık işsizlik sayılarının tahmini, bir şehirdeki veya bölgedeki aylık yağış miktarı veya sıcaklık değişimlerinin tahmini, bir sigorta şirketinin yıllık iflas olasılığının belirlenmesi, yeni bir ilacın kan basıncı üzerindeki etkisi gibi olayların matematiksel olarak modellenmesine yardımcı olmaktadır [Özel Kadılar, 2020]. Stokastik süreçlerin istatistik, mühendislik, tıp ve matematikte de önemli uygulamaları bulunmaktadır.

Literatürde stokastik süreçler ile ilgili yapılmış birçok çalışma mevcuttur. Stokastik süreçler üzerine ilk çalışmalar 19. yüzyılın başlarında ortaya çıkmıştır. Bu alanda çalışmaları bulunan ilk bilim insanı Bernoulli'dir (1645-1705). Olasılıklar kuramının temelini atan Bernoulli, “Bernoulli Teoremi” olarak da adlandırılan ünlü “Büyük Sayılar Kanununu” literatüre kazandırmıştır. Bu kanun, olasılık teorisinin uygulamaları için temel oluşturmuş ve Bernoulli'den sonra 1713 yılında yayınlanan “The Art of Conjecture” isimli kitapta limit teoremi şeklinde yer almıştır. De Montmort (1678-1719), De Laplace (1749-1827), Poisson (1781-1840), Chebyshev (1821-1894) ve Markov (1856-1922) olasılık teorisinde önemli çalışmalar yapmış diğer araştırmacılardan bazılarıdır.

Olasılık teorisinde stokastik kavramı ilk kez, bu teorinin kurucusu olan Bernoulli tarafından kullanılmıştır. Bernoulli'den sonra unutulmuş bu kavram ünlü olasılıkçı Bortkiewicz (1868-1913) tarafından 20. yüzyılın başlangıcında tekrar kullanılmaya başlanmıştır. Yine bu alanda Kolmogorov (1903-1987) Markov tipli süreç olarak ifade edilen stokastik süreçlerin esaslarını, Khinchin (1984-1959) ise stasyonier süreçler olarak isimlendirdiği stokastik süreçler üzerinde çalışmalar yapmıştır [Başköy, 2018].

Bartlett (1910-2002) fizik, endüstri, ekonomi, biyoloji ve tıp alanlarında stokastik süreçlerin uygulamaları üzerine bir çalışma ortaya koymuştur [Bartlett, 1953]. Cox ve Miller ayırık-sürekli zamanlı stokastik süreçler ve stokastik diferansiyel denklemler üzerine bir çalışma gerçekleştirmiştir [Cox and Miller, 1965]. Najim, Ikonen ve Daoud, stokastik süreçlerin tahmini, optimizasyonu, stokastik algoritmaların analizi hakkında çalışmalarda bulunmuştur. Bu çalışmalar, uygulamalı olasılık, istatistik, matematik, biyoloji ve tıp gibi alanlarda sayısal yaklaşımlar elde edebilmek için büyük önem taşımaktadır. Çalışmada güvenilirlik, kontrol, bakım problemleri dışında veri analizi ve modellemeye dair bilgilere de yer verilmiştir [Najim et al., 2004]. Bu alanda öne çıkan bir diğer isim de Erhan Çinlar'dır. Çinlar'ın "Introduction to Stochastic Processes" adlı kitabı birçok üniversitede hala ders kitabı olarak okutulmaktadır. Kitapta olasılıksal tanımlar, stokastik süreçler, Poisson süreci, rastsal yürüyüş ve aralık zamanlı Markov modelleri üzerine araştırmalar yapılmıştır [Çinlar, 2013]. Son yıllarda Jones ve Smith'in "Stochastic Processes An Introduction" adlı kitabında rastgele süreçler, bazı basit kumar modelleri, rastgele yürüyüşler, Markov zincirleri, doğum ve ölüm süreçleri, genel nüfus ve sürekli zaman modelleri ve ilişkili durağan süreçlerin analizlerine yer verilmiştir [Jones, 2018].

$N(t)$, $(0, t]$ aralığında meydana gelen belli bir türden olayların sayısı olmak üzere $\{N(t), t \geq 0\}$ stokastik sürecine bir sayma süreci denilmektedir. Sayma süreçleri negatif olmayan, tam değerli ve artan bir süreç olarak ifade edilmektedir ve zaman içinde gözlemlenen olayların sayılmasında kullanılmaktadır. Gece boyunca belirli saat aralıklarında uyanmak, bir galeride bir ay içinde satılan araba sayısını belirlemek ve belirli bir zaman aralığında sahip olunan çocuk sayısı sayma süreçlerinin araştırma alanlarından bazılarıdır. Yenileme, geometrik, yarı geometrik ve Poisson süreçleri birer sayma sürecidir.

Poisson süreçleri olasılıksal süreçlerde önemli bir yere sahiptir. Taşıdıkları özelliklere göre homojen, homojen olmayan, birleşik ve genel etkili Poisson süreci olarak adlandırılmaktadır. Literatürde pek çok uygulama alanına sahip olan Poisson süreçleri sismoloji, iletişim, hidroloji, meteoroloji, sigorta ve güvenilirlik gibi rastgele olayları modellemek için kullanılmaktadır.

Literatürde, Grandell "Doubly Stochastic Poisson Processes" adlı kitabında Poisson sürecinin bir genellemesi olarak ikili Poisson sürecini rastgele ölçüler cinsinden kesikli ve sürekli olarak ayrı ayrı ele almış ve stokastik açıdan incelemiştir. Ardından ortalama, varyans ve kovaryans kavramları bu konu bağlamında tekrar

açıklanmıştır. Son olarak rastsal ölçülerle ilgili teoremler ispatlarıyla birlikte verilmiş ve bu teoremlerin nasıl bir araç olarak kullanılabileceği konusunda farklı bakış açıları sunulmuştur [Grandell, 1976]. Faraci ve Pennisi, Poisson istatistikleri üzerine bozulmaları kontrol etmek için hassas deneyler yapmış, deneysel eğriler ve teorik ifadelerin arasında mükemmel bir uyum olduğunu tespit etmiştir [Faraci and Pennisi, 1982]. Serfozo, noktasal bir sürecin belirli düzgün seyrek alt süreçlere bölündüğünde, alt süreçlerin asimptotik olarak çok değişkenli Poisson süreci veya bileşik Poisson süreci olduğunu ifade etmiştir [Serfozo, 1985]. Kingman “Poisson Processes” adlı çalışmasında rastgele nokta kümeleri için stokastik modeller, genel uzaylarda Poisson süreçleri, Cox süreci, stokastik geometri, tamamen rastgele ölçümler ve Poisson dirichlet dağılımı konularını detaylı olarak incelemiştir [Kingman, 1993]. Grandell “Mixed Poisson Processes” adlı çalışmasında sigorta matematiği ve noktasal süreç teorisi birleşimine farklı bir bakış açısı getirmiştir. Yine karma Poisson süreçleri, noktasal süreçler, Markov süreci, marjinaler ve karma Poisson süreçlerinin durağan ve genel nokta süreçleri çerçevesindeki karakterizasyonları hakkında temel tanımlara değinmiştir. Son olarak karma poisson sürecinin en önemli ve zor sorularından biri olan rastgele değişkenlerin dağılımının verilerden nasıl tahmin edilebildiği üzerine bir çalışma ortaya koymuştur [Grandell, 1997]. Decreusefond ve Savy, Poisson süreçlerinin bir örneği olan ani artış gürültüsü ve kesirli Poisson süreçleri için Girsanove teoremini ispatlamış ve bu teoremi bir tahmin problemine uygulamıştır [Decreusefond and Savy, 2003]. Yiğiter “Homojen Poisson Sürecinde Değişme Noktasına İlişkin İstatistiksel Çıkarıma” adlı doktora tezinde homojen Poisson sürecinde değişme noktası sorununa değinmiş ve en çok olabilirlik yönteminden faydalanarak değişme noktasının ve parametrelerin; elde edilen tahmin edicileri, test istatistikleri ve uygulamalarını ele almıştır [Yiğiter, 2006]. Kumar, Nane ve Vellisamy, zamanla değişen Poisson süreçlerini ele almış ve bu süreci yöneten fark-diferansiyel denklemleri hakkında bilgiler vermiştir [Kumar vd., 2011]. Taddy ve Kattos, Poisson süreçleri için genel bir modelleme önermiştir. Bu modelleme yaklaşımı için homojen olmayan Poisson sürecinin yoğunluk fonksiyonunu kullanmıştır. Bu yoğunluk fonksiyonunu parametrik olmayan dirihlet işlem karışımları ve işaret dağılımı için parametrik olmayan veya yarı parametrik modelleme ile birleştirilip yeni bir model ortaya koymuştur [Taddy and Kattos, 2011]. Fierro ve Tapia, Poisson sürecinin çeşitli alt aralıklar üzerindeki homojenliğine ilişkin asimptotik olarak optimal bir hipotez geliştirmiştir. Bu hipotezi, sıfır hipotezi altında,

alt aralıklardaki yoğunluk fonksiyonunun değerleri için en çok olabilirlik tahmin edicilerinin belirlenmesi ve homojenlik testinde kullanmıştır [Fierro and Tapia, 2011].

İto “Poisson Point Processes and Their Application to Markov Processes” adlı kitabında Poisson nokta süreçleri, Poisson nokta sürecinin kesikli ve genel durumları ve dönüşümlerini ifade etmiştir [Ito, 2015]. An ve Gao, çok boyutlu bir limit teoremi üzerine çalışmış ve değişmeli olmayan bir olasılık uzayında ortak serbest Poisson dağılımlarını tanımlamıştır [An and Gao, 2015]. Asanjarani, Hautphenne ve Nazarathy “Markovian Transition Counting Processes: An Alternative to Markov Modulated Poisson Processes” adlı çalışmasında Markov modülasyonlu Poisson süreci ve Markovian geçiş sayma süreçleri arasındaki ilişkiler ile ilgili konular ele alınmıştır [Asanjarani, 2021].

En önemli sayma süreçlerinden biri de HOPS’dır. HOPS’de parametre zamanın sürekli bir fonksiyonudur. HOPS süreci, minimum düzeyle onarılan öğenin onarım sayısını ve dönemlerini kaydeden süreç olarak doğal güvenilirlik teorisinde karşımıza çıkmaktadır. Yine bu süreç bir dizi bağımsız ve aynı şekilde dağıtılmış yaşam süreleri yani negatif olmayan rastgele değişkenler ile ilgili kayıtların değerlerini ve sayısını kaydeden bir işlem dizisidir.

HOPS, zamana bağlı parametreleri olan bir Poisson sürecidir. Günlük ozon gazının ölçülmesi, gürültüye maruz kalma modeli, yazılım güvenilirlik modellerinin iyileştirilmesine yönelik yeni yaklaşımlar, farklı türlerdeki kaza sayılarının modellenmesi ve herhangi bir bölge veya şehirde meydana gelen deprem ile ilgili verilerin modellenmesi gibi günlük hayatta pek çok uygulama alanına sahiptir.

HOPS hem teorik hem de uygulama açısından hala bilim insanlarının ilgisini çekmektedir. Guida, Calabria ve Pulcini, Monte Carlo simülasyonunu kullanarak HOPS ile kontrol edilen bir sistem hakkında yalnızca birkaç verinin toplanabildiği ve çok az veya kesin n bilginin var olduğu simülasyonda bazı Bayes prosedürlerinin istatistiksel özellikleri hakkında bilgiler verip iki Bayes yöntemini analiz etmiştir [Guida vd., 1989].

Antoniadis ve Hero, HOPS ile ilişkili bir yoğunluğun rastgele olmayan bir zaman kayması parametresini tahmin etmek için geliştirilmiş bir EM (Expectation-Maximization) algoritması ortaya koymuştur [Antoniadis and Hero, 1994]. Zhao ve Xie, sınırlandırılmış ortalama değer fonksiyonlarına sahip parametrik homojen olmayan Poisson sürecini, yazılım güvenilirlik modelleri için zaman kesmeli örnekleme altında maksimum olabilirlik tahminlerini incelemiştir. Maksimum

olabilirlik tahmin edicilerinin tutarlı veya asimptotik olarak normal olması gerekmediğini ifade etmiştir [Zhao and Xie, 1996]. Deshpande ve arkadaşları, yoğunlukları bilinmeyen iki bağımsız HOPS için, yoğunlukların oranının sabit olduğu ve $(0, t]$ üzerinde arttığı hipotezini test edebilmek için bir alternatif sunmuşlardır [Deshpande vd., 1999].

Diğer taraftan, Pallerey ve Shaked, HOPS'nin dönem zamanlarının ve dönemler arası aralıklarının log-konkav yoğunluklara sahip olduğu koşulları tanımlamıştır. Ardından ayrık zamanlı sayma süreçlerini incelemiş ve bu ayrık zamanlı süreçlerin dönem zamanlarının ve dönemler arası aralıklarının log-konkav ayrık olasılık yoğunluklarına sahip olduğu koşulları belirlemiştir. Son olarak sonuçları minimum onarım ve kayıt değerleri açısından yorumlamıştır [Pallerey vd., 2000]. Garrido ve Lu, periyodik hasar yoğunluğu oranına sahip HOPS'yi, risk teorisinin hasar sayma süreçleri olarak ifade etmiştir. Çift-beta yoğunluk fonksiyonu ile gösterilen, kısa ve uzun vadeli eğilimleri olan çift periyodik bir Poisson modelini ortaya koymuştur [Garrido and Lu, 2002]. Cai ve arkadaşları, yazılım güvenilirliğinde gözlemlenen yazılım arızalarının ortalamasını analiz etmek için yazılım güvenilirliği büyüme davranışının HOPS ile ilgili kontrollü bir yazılım deneyi yapmıştır. Deneyde gözlemlenen yazılım arızalarının kümülatif sayısının ortalaması ve ilgili varyansın davranışını birlikte incelemiştir. Deneyde ampirik gözlemler ve istatistiksel hipotez testleri kullanılmıştır. Deneyde, yazılım güvenilirliği davranışının genel olarak bir HOPS'yi takip etmediği ve HOPS modeline uygun olmadığı sonucuna ulaşılmıştır [Cai vd., 2006]. Krivtsov, HOPS'de çok fazla kullanılan lineer ve kuvvet yasası modellerine bir alternatif olarak ROCOF'u (Rate of Accurence of Failures) önermiştir [Krivtsov, 2008].

Muralidharan ve çalışma arkadaşları, HOPS'nin zaman içinde toplanan arıza verilerini analiz ederek onarılabilir sistemlerin güvenilirliğini incelemek için kullanılan kuvvet yasası veya Weibull süreci ve birçok noktasal süreci genelleştiren q-Yol (q-Pathway) süreci olarak adlandırılan yeni bir süreç tanımlamıştır. Önerilen modelin teorik fizik, finansal modelleme ve ekonometrik teoriler alanında birçok uygulaması bulunmaktadır. Sürecin uygulanabilirliği veriler ve sayısal örnekler üzerinden gösterilmiştir [Muralidharan vd., 2014]. Cifuentes-Amado ve Cepeda-Cuervo, nadiren gerçekleşen olayların ilgili verilere daha gerçekçi bir şekilde uyum sağlaması için mevsimsellik faktörlerini içeren yeni bir HOPS sınıfını öne sürmüştür [Cifuenetes-Amado and Cepeda-Cuervo, 2015]. Srivastava ve Mondal, üretim

sistemlerinin güvenilirlik düşüşü göstermesi ve arazılar arasındaki ortalama sürenin özdeş olmayan bir şekilde dağılmasından dolayı, her bir bileşenin arıza modelini HOPS modelleri kullanarak analiz etmiştir ve ortalama sistem kullanılabilirliği hesaplandıktan sonra sistemin genel bakımına karar veren eşik sistem kullanılabilirliği ile karşılaştırma yapmıştır [Srivastava and Mondal, 2016]. Franciszek, Baltık Denizi suları ve limandaki kazalarla ilgili modellerin oluşturulmasında HOPS ve homojen olmayan bileşik Poisson süreçlerini kullanmıştır [Grabski, 2018]. Grabski, bir başka çalışmada bileşik Poisson sürecine ilişkin yeni teorik bulgular ortaya koymuştur. O HOPS ve buna karşılık gelen homojen olmayan bileşik Poisson sürecini, Polonya karayolu kayıtlarındaki trafik kazalarının, yaralıların ve ölümlerin sayısını modellemek için kullanmıştır. Oluşturulan modeller ile herhangi bir zaman aralığındaki kaza sayısı ve kaza sonuçlarını tahmin etmiş, tek bir kazadaki ölü sayısının ve yaralı sayısının istatistiksel dağılımı ve tek bir kazadaki ölü veya yaralı sayısının olasılık dağılımını hesaplamış ve çalışmada çeşitli uygulamalara yer vermiştir [Grabski, 2019]. Sumiati ve çalışma arkadaşları Endonezya'daki deprem olaylarının sayısını tahmin etmek için HOPS'yi ele almıştır [Simuati vd., 2019]. Bir sonraki yıl Zhang ve arkadaşları, araştırma nesnesi olan bir nükleer enerji santrali güvenlik dijital kontrol sisteminin yazılım güvenilirliğinin nicel değerlendirmesi için HOPS modelini kullanmıştır. Toplam arıza, haftalık arıza oranı, güvenilirlik ve bir sonraki arızaya kadar geçen süre gibi yazılım güvenilirlik göstergeleri için belirli formüller geliştirmiştir. Bununla birlikte geliştirilen model, yazılımın mevcut güvenilirlik seviyesini değerlendirebilir ve sonraki güvenilirlik testi sonuçlarının etkisini tahmin edebilir [Zhang vd., 2020]. Halim, Quddus ve Paman, gelecekteki herhangi bir olayı tahmin etmek için Meksika Körfezi'ndeki geçmişe ait açık deniz yangın olaylarının verilerini kullanmıştır. Veriler, yıllar arası değişimi hesaba katmak için normalleştirilmiş ve arıza oranının zamanın bir fonksiyonu olduğu HOPS varsayımının kullanılmasının performansı nasıl iyileştirdiği ve gelecekteki herhangi bir olayı daha doğru tahmin etmek için nasıl kullanılabileceğini göstermektedir [Halim vd., 2021]. Dinçer, Demir ve Yalçın, dünyada meydana gelen COVID19 güvenilirliklerini tahmin etmek ve öngörmek için bir rapor sunmuştur. Bu raporun en önemli katkısı geometrik, üstel, Weibull, gamma gibi farklı fonksiyonel şekillere sahip olan yoğunluk fonksiyonlarını dikkate alarak her ülke için ayrı ayrı verileri modellenmesini sağlamaktır. Bu amaçla vakaların kümülatif sayısı sekiz farklı şekilde HOPS ile modellenmiştir [Dincer vd., 2022].

1.1. Tezin Amacı, Katkısı ve İçeriği

Depremler, tektonik plakaların hareketi, volkanik aktiviteler nedeniyle yer kabuğundaki kaya tabakalarının hareketi veya plakaların ani kayması sebebiyle yerin titreşmesi ve sallanması olarak ifade edilir. Depremlerin olma olasılıkları zaman ve konum açısından birbirinden bağımsız olduğu varsayılarak, Poisson olasılık dağılımı ile basit bir şekilde elde edilebilmektedir. En yaygın olarak kullanılan deprem oluşum modeli Poisson dağılım modelidir.

Bu tez çalışmasında Türkiye, Japonya ve Amerika Birleşik Devletleri (ABD) 2002-2021 yılları arasında 5 ve üzeri büyüklükte meydana gelen deprem verilerinden faydalanılarak, gelecekte herhangi bir zaman noktasında bir depremin meydana gelme olasılığı tahmin edilmeye çalışılmıştır.

Bu tez kapsamında ilk bölümde giriş ve literatür taraması verilmiştir. İkinci bölümde, stokastik süreçlerin karakterizasyonu, ortalaması, varyansı, otokorelasyon fonksiyonu, otokovaryans fonksiyonu ve korelasyon katsayısı, çoklu rastgele süreçler, durağanlık, sayma süreçleri ile ilgili temel tanım ve teoremlerden bahsedilmiştir.

Üçüncü bölümde, Poisson sürecinden sonra HPS ve HOPS tanımlanmıştır. Ayrıca HOPS modellemesinde kullanılan model türlerinden ve bu teze uygulama konusu olan kuvvet yasası modeli ile ilgili istatistiksel kavramlardan bahsedilmiştir.

Tezin dördüncü bölümünde, yukarıda sözü edilen veri seti kullanılarak HOPS ile modelleme yapıp parametre tahminleri kuvvet yasasına göre elde edilmiştir.

Tezin son ve sonuç bölümü ise dördüncü bölümde ulaşılan bulguların yorumlanması ve tartışılmasına ayrılmıştır.

2. STOKASTİK SÜREÇLER

Deterministik ve stokastik süreçler olasılık teorisinde çok sık kullanılan kavramlardır. Türk Dil Kurumu (TDK) deterministik kavramını belirleyici olarak ele almaktadır. Rastgele bir sürecin gelecekteki değerleri geçmiş değerlerden net bir şekilde tahmin edilebiliyorsa rastgele süreç deterministik süreç olarak adlandırılır. Deterministik kavramı içinde rastlantısaldık bulunmamalıdır yani kesinlikle her andaki durumunu benzersiz bir şekilde belirleyen yasalara tabidir [Skorokhod, 2005]. Biyoloji alanında rekabet, türler arası etkileşim ve pH, sıcaklık, tuz ve nem gibi çevresel filtreleme alanlarında kullanılmaktadır [Dong vd., 2021].

Stokastik kavramı ise rastgele veya şans anlamına gelen Yunanca stokhastikos kelimesinden gelmektedir [Stirzaker, 2005]. Bu kavram ilk olarak Bernoulli (1654-1705) tarafından kullanılmıştır. Günümüzde temel bilimlerden doğa bilimlerine kadar farklı alanlarda karşımıza çıkmaktadır. Ayrıca zamana bağlı olasılık kurallarına göre değişen sistemleri modellemek için de kullanılmaktadır [Özel Kadılar, 2020]. Bir stokastik süreç gözlemlenebilir olan rastgele bir olayın, başlangıç anından sonraki herhangi bir anda ortaya çıkışı için matematiksel bir model oluşturmaktadır. Başka bir deyişle stokastik süreç, zaman gibi bir parametre tarafından indekslenen bir rastgele değişkenler ailesidir. Buna bir örnek göstermek gerekirse $X(t)$, t zamanında bir barajdaki suyun hacmini göstermek üzere $\{X(t): t \geq 0\}$ bir stokastik süreçtir.

Eğer T kümesi sonlu veya sayılabilir ise süreç kesikli zamanlı, T sonlu veya sayılabilir değilse süreç sürekli zamanlı stokastik süreç olarak adlandırılmaktadır [Najim, Ikonen ve Daoud, 2004]. T kümesindeki t elemanı zamanı göstermek üzere her t anında rastgele bir $X(t)$ sayısı gözlemlenmektedir. $X(t)$ olası değerler kümesine $\{X(t): t \in T\}$ 'nin durum uzayı denilmektedir [Ofosu, Hesse and Otchere, 2014].

Stokastik süreçleri birbirinden ayıran ana unsurlar, durum uzayının doğası, T indeks kümesinin durumu ve rastgele değişkenler arasındaki bağımlılık ilişkileri şeklinde sıralanmaktadır. Ayrıca süreç kesikli zamanlı ise $\{X(n): n = 0, 1, 2, \dots\}$ ya da $\{X_n: n = 0, 1, 2, \dots\}$ şeklinde gösterilmektedir. Süreç sürekli zamanlı ise $\{X(t): t \in T\}$ şeklinde ifade edilmektedir. S durum uzayının ve T indis kümesinin kesikli veya sürekli olmasına göre süreç dört grupta incelenmektedir. Bu gruplar aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

- Hem T indis kümesi hem de S durum uzayı kesikli ise rastgele süreç kesikli zamanlı kesikli durumlu olarak adlandırılmaktadır. Örnek vermek gerekirse toplamda beş yeşil ve üç beyaz top olmak üzere A ve B kutularında dörder top bulunsun. Her aşamada her iki kutudan rastgele bir top çekildikten sonra bu toplar yer değiştirsin. n . çekilişten sonra A kutusundaki beyaz topların sayısı $\{X(n)\}$ ile gösterilmek üzere sürecin indis kümesi ve durum uzayı, $S=\{1,2,3,4\}$ ve $T=\{1,2,3, \dots\}$ şeklinde gösterilmektedir.
- T indis kümesi kesikli ve S durum uzayı sürekli ise rastgele süreç kesikli zamanlı sürekli durumlu olarak ifade edilmektedir. Bu duruma örnek vermek gerekirse bir bankanın müşterilerinin rastgele bir zaman noktasında banka şubesine gelmesi olayı bu sürece uygundur. X_n , n . müşterinin şubeye geldikten sonra bankada bekleme süresini (saat olarak) göstermek üzere, sürecin indis kümesi ve durum uzayı, $S = \{n: n \geq 0\}$ ve $T = \{1,2, \dots\}$ biçiminde ifade edilmektedir.
- T indis kümesi sürekli ve S durum uzayı kesikli ise rastgele süreç sürekli zamanlı kesikli durumlu olarak adlandırılmaktadır. Örneğin; $\{X_n: n = 0,1,2, \dots\}$ bir basit rastgele yürüyüşü göstermek üzere $X(t) = X_n$ ve $n \leq t \leq n + 1$ ile rastgele süreci tanımlandığında sürecin indis kümesi ve durum uzayı; $S = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ ve $T = \{t: t \geq 0\}$ şeklinde tanımlanmaktadır.
- Hem T indis kümesi hem de S durum uzayı sürekli ise süreç sürekli zamanlı sürekli durumlu olarak adlandırılır. Örneğin; $X(t) = Y \sin(at)$, $t \geq 0$ süreci göz önüne alındığında, a bir sabit ve $Y \sim U(0,1)$ aralığında düzgün dağılıma sahip bir rastgele değişken olmak üzere sürecin indis kümesi ve durum uzayı; $S = \{x: -1 \leq x \leq 1\}$ ve $T = \{t: t \geq 0\}$ biçiminde tanımlanmaktadır.

Bir stokastik süreci analiz ederken temel amaç, sürecin örneklem fonksiyonlarının ve $X(t)$ rastgele değişkenlerinin özelliklerinin araştırılmasıdır. Süreçlerin özel

sınıflarını karakterize etmek ve örneklem fonksiyonlarının davranışlarını incelemek için $X(t)$ rastgele değişkenleri üzerine olasılıksal şartlar konulmaktadır. Dağılımlar, rastgele oluşumların olasılıklarını verdiğiinden süreci sınıflandırmada ve karakterizasyonda önemli bir rol oynamaktadır.

2.1. Stokastik Süreçlerin Karakterizasyonu

Bu alt bölümde stokastik süreçler ile ilgili bir rastlantı değişkenini karakterize eden ve temel bir özellik olan dağılım fonksiyonlarından bahsedilmiştir. Öncelikle stokastik bir sürecin sonlu boyutlu dağılım fonksiyonu birçok özelliğin incelenmesi açısından önem arz etmektedir [Özel Kadılar G., 2020]. Buna göre $\{X(t)\}_{t \in T}$ sürecinin sonlu boyutlu dağılımı, her $k \geq 1$ ve $t_1, t_2, \dots, t_k \in T$ için rastgele vektörlerin olasılık dağılımlarının toplamı $\{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_k)\}$ olarak verilmektedir [Bremaud P., 2020]. O halde $X(t)$ rastgele süreci ele alındığında sabit bir t_1 zamanı için $X(t_1) = X_1$ rastgele değişkeninin dağılım fonksiyonu

$$F_x(x_1; t_1) = P(X(t_1) \leq x_1) \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanmaktadır ve birinci mertebeden dağılımı olarak adlandırılmaktadır. Benzer şekilde t_1 ve t_2 zamanı için $X(t_1) = X_1$ ve $X(t_2) = X_2$ iki rastgele değişken olmak üzere;

$$F_x(x_1, x_2; t_1, t_2) = P(X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2) \quad (2.2)$$

fonksiyonu ikinci mertebeden dağılımı olarak tanımlanmaktadır. Genel olarak $X(t)$ rastgele sürecinin n . mertebeden dağılımı

$$F_x(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = P(X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_n) \leq x_n) \quad (2.3)$$

biçiminde ifade edilmektedir.

2.1.1. Rastgele Sürecin Momentleri

Rastgele değişkenler dağılım fonksiyonları ile nitelendirilmektedir. Fakat rastgele değişkenlerin dağılımlarının farklı olduğu durumlarda karşılaştırma yapabilmek için dağılım fonksiyonlarından ziyade onların rastgele olmayan bazı sayısal karakteristikleri ile karşılaştırma yapılmaktadır. En önemli karakteristikler ortalama (beklenen değer) ve varyanstır. Ortalama fonksiyonu zaman ilerledikçe rastgele sürecin ortalama olarak nasıl davranacağı hakkında bilgi vermektedir ve olasılık dağılımının merkezinin ya da ortasının bir ölçüsü olarak ifade edilmektedir. Dağılım fonksiyonları iki farklı grupta incelenmektedir. X kesikli bir rastgele değişken olmak üzere, $X(t)$ rastgele sürecinin beklenen değeri;

$$\mu_X(t) = E(X(t)) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i f_{X(t)}(x) \quad (2.4)$$

olarak ifade edilir. X sürekli bir rastgele değişken olmak üzere, $X(t)$ rastgele sürecinin beklenen değeri;

$$\mu_X(t) = E(X(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X(t)}(x) dx \quad (2.5)$$

olarak verilir, burada $f_{X(t)}(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonudur [Jones and Smith, 2018]. Genel olarak $X(t)$ rastgele sürecinin ortalaması $\mu_X(t) = E[X(t)]$ olarak ifade edilir [Pinsky and Karlin, 2011]. Ortalamanın dışındaki diğer karakteristikler ise otokorelasyon fonksiyonu, otokovaryans fonksiyonu ve korelasyon katsayısıdır.

Otokorelasyon fonksiyonu bir stokastik sürecin iki farklı zaman noktasındaki gözlemleri arasındaki bağlılığın veya benzerliğin bir ölçüsüdür. $\{X(t) : t \in T\}$ ve $t_1, t_2 \in T$ olmak üzere;

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] \quad (2.6)$$

olarak tanımlanır. Kovaryans fonksiyonu iki rastgele değişkenin ne derece birlikte hareket ettiklerinin bir ölçüsüdür. Hem kesikli hem de sürekli rastgele değişkenler için aynı şekilde ifade edilir. Otokovaryans fonksiyonu;

$$C_X(t_1, t_2) = Cov[X(t_1)X(t_2)] = E[(X(t_1) - \mu_X(t_1))(X(t_2) - \mu_X(t_2))] \quad (2.7)$$

olarak tanımlanır. Korelasyon ise farklı birimlerdeki değişken çiftleri arasındaki doğrusal ilişkileri karşılaştırmak için kullanılabilen boyutsuz bir niceliktir. O halde korelasyon;

$$\rho_X(t_1, t_2) = \frac{C_X(t_1, t_2)}{\sqrt{C_X(t_1, t_1)C_X(t_2, t_2)}} \quad (2.8)$$

şeklinde ifade edilir [Hogg and Craig, 1995]. Burada, $C_X(t_i, t_i)$ herhangi bir t_i anındaki varyans olarak adlandırılır. Korelasyon katsayısı, $-1 \leq \rho \leq 1$ arasında değerler almaktadır. Değişkenler arasında doğru orantılı bir ilişki varsa pozitif yönlü bir korelasyon, ters orantılı bir ilişki varsa negatif yönlü bir korelasyon vardır denir. Eğer bu iki duruma uymayan bir ilişki varsa herhangi bir korelasyon söz konusu değildir. Korelasyon katsayısı $+1$ ve -1 değerlerine yaklaştıkça değişkenler arasındaki ilişkinin kuvvetlendiği, sıfır değerine yaklaştıkça bu ilişkinin zayıfladığı anlamına gelir [Demir, 2021].

2.2. Çoklu Rastgele Süreçler

Bir önceki bölümde, tek bir rastgele değişken için olasılıksal tanımlara yer verilmiştir. Ancak herhangi bir deney yapıldığında bu deney ile ilgili birçok rastgele değişkenin aynı andaki durumunu düşünmek gerekebilir. Bu yüzden bu alt bölümde iki ya da daha fazla rastgele değişken için olasılıksal tanımlara yer verilmiştir. $\{X(t): t \in T\}$ ve $\{Y(t): t \in T\}$ iki rastgele değişken ve $t_1, t_2 \in T$ olmak üzere sürecin çapraz korelasyon fonksiyonu, çapraz kovaryans fonksiyonu ve çapraz korelasyon katsayısı sırasıyla;

$$R_{XY}(t_1, t_2) = E[X(t_1)Y(t_2)] \quad (2.9)$$

$$C_{XY}(t_1, t_2) = cov[X(t_1)Y(t_2)] = R_{XY}(t_1, t_2) - \mu_X(t_1)\mu_Y(t_2) \quad (2.10)$$

$$\rho_{XY}(t_1, t_2) = \frac{C_{XY}(t_1, t_2)}{\sqrt{C_X(t_1, t_1)C_Y(t_2, t_2)}} \quad (2.11)$$

olarak tanımlanmaktadır.

2.3. Durağanlık

Tarihsel olarak, süreç kelimesi bir sistemin zaman içerisinde gözlemlenmesini önermek için kullanılmıştır [Montgomery ve Runger, 2011]. Sabit bir zamandaki olasılık dağılımı her zaman noktası için aynı olan süreçlere durağan süreç denmektedir. Yani durağanlık kavramı istatistiksel olarak parametreleri zamana göre değişmeyen süreç olarak ifade edilir. Ortalama, varyans ve moment gibi istatistiksel parametreler durağan süreç için zamana bağlı olarak değişmemektedir.

$\{X(t) : t \in T\}$ süreci zamana bağlı olmayan bir dağılıma sahipse yani raslantı değişkenlerinin dağılım fonksiyonu zaman içinde sabit kalıyorsa $\{X(t) : t \in T\}$ süreci durağandır denir. Yani bir sürecin olasılıksal yapısı zaman ekseninin ötelenmesi altında değişmiyorsa o zaman süreç durağan olarak ifade edilmektedir [Medhi, 2002]. Durağanlık kavramına kesin anlamda durağan ve zayıf anlamda durağan olmak üzere iki önemli başlık altında bakılmaktadır. Zayıf anlamda durağan bir rastgele süreç ortalama ve diğer tüm momentlerin zamana bağlı olarak değişmediği süreçtir. Kesin anlamda durağan bir rastgele süreç ise zaman ötelenmesinin sürecin dağılımını değiştirmedeği bir süreçtir.

$t_1 < t_2 < \dots < t_n$ ve $n \geq 1$ olmak üzere, tüm $\tau > 0$ için her zaman noktasının τ kadar kaydırılması ile elde edilen $(X_{t_1+\tau}, X_{t_2+\tau}, \dots, X_{t_n+\tau})$ raslantı vektörü ile aynı dağılıma sahip ise ve her n için bu özellik sağlanıyorsa, $\{X(t), t \in T\}$ kesin anlamda durağan bir rastgele süreçtir. Başka bir ifadeyle,

$$F_X(X_{t_1+\tau}, X_{t_2+\tau}, \dots, X_{t_n+\tau}) = F_X(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}) \quad (2.12)$$

sağlanmalıdır. $t \in T$ olmak üzere, sonlu ikinci momente $E[(X(t))^2] < \infty$ sahip olan $\{X(t) : t \in T\}$ sürecinin zayıf anlamda durağan ya da kovaryans durağan olması için aşağıdaki koşullar sağlanmalıdır.

- Her $t \in T$ için $X(t)$ 'nin ilk momenti t 'den bağımsız yani $E[X(t)] = \mu$ olmalıdır.
- Her $t \in T$ için $X(t)$ 'nin varyansı yani ikinci momenti t 'den bağımsız yani $V[X(t)] = \sigma^2$ olmalıdır.
- $t_1, t_2 \in T$ olmak üzere $\{X(t) : t \in T\}$ sürecinin kovaryans fonksiyonu $R_X(t_1, t_2) = \text{Cov}(X(t_1), X(t_2))$ 'dır.

Başka bir ifadeyle kovaryans durağan süreçlerde fonksiyon yalnızca t ve s arasındaki farkın uzunluğuna bağlıdır. Kısaca kovaryans durağan bir süreçte $R_X(t_1, t_2) = R_X(t_1 - t_2)$ olmalıdır. Yine başka bir deyişle, eğer sürecin ortalaması zamana bağlı değilse yani $\mu_X(t) = \mu_X$ ise ve otokorelasyon fonksiyonu sadece $t_1 - t_2$ zaman farkına bağlıysa yani $R_X(t_1, t_2) \equiv R_X(t_1 - t_2)$ ise $X(t)$ rastgele süreci zayıf anlamda durağan bir rastgele süreç olarak ifade edilir [Castanon and Karl, 2004].

Zayıf anlamda durağanlık ve kesin anlamda durağanlık birbirini gerektirmeyen iki özelliktir. $\{X(t) : t \in T\}$ süreci kesin anlamda durağan bir süreç olsa bile zayıf anlamda durağanlık için gerekli olan ikinci momenti bulunamayabilir.

$X(t)$ ve $Y(t)$ rastgele süreçleri aşağıdaki koşulları gerçeklerse, bu süreçler ortak zayıf anlamda durağan süreçler olarak adlandırılır.

- $X(t)$ zayıf anlamda durağan bir rastgele süreç olmalı
- $Y(t)$ zayıf anlamda durağan bir rastgele süreç olmalı
- $R_{XY}(t_1, t_2) = R_{XY}(t_1 - t_2)$ 'dır.

$X(t)$, sabit ortalamalı zayıf anlamda durağan bir rastgele süreç ise $R_{XY}(t_1, t_2)$ otokorelasyon fonksiyonu sadece $t_1 - t_2$ zaman farkının bir fonksiyonudur. Kısaca $\tau = t_1 - t_2$ olmak üzere,

$$R_X(\tau) = E[X(t)X(t + \tau)] \quad (2.13)$$

olarak ifade edilir. Eğer $X(t)$ zayıf anlamda durağan bir rastgele süreç ise aşağıdaki koşulları sağlamalıdır.

- Tüm t değerleri için $E[(X(t))^2] = R_X(0)$.
- $R_X(0) \geq 0$.
- $\text{Var}[X(t)] = R_X(0) - \mu_X^2$ yani $X(t)$ rastgele sürecinin varyansı tüm t değerleri için sabittir.

2.4. Sayma Süreçleri

$N(t)$, 0 anından başlayıp t zamanı dahil olmak üzere belli bir türden meydana gelen olayların sayısı ise $\{N(t) : t \in [0, \infty)\}$ stokastik sürecine bir sayma süreci denir. Sayma süreci negatif olmayan, tam değerli ve artan bir süreç olarak değerlendirilmektedir. Zaman içinde gözlemlenen olayların sayılmasında kullanılmaktadır. Bir stokastik sürecin bir sayma süreci olarak ifade edilebilmesi için aşağıdaki koşulları sağlaması gerekmektedir.

- Her $t \geq 0$ için $N(t) \geq 0$
- Her $t \in [0, \infty)$ için $N(t) \in \{0, 1, 2, \dots\}$
- Eğer $s < t$ ise $N(s) \leq N(t)$
- $0 \leq s < t$ için $N(s, t) = N(t) - N(s)$, $(s, t]$ aralığında meydana gelen olayların sayısını gösterir

Varişları modellemek için genelde sayma süreçleri kullanılmaktadır. Bundan dolayı herhangi bir olayın gerçekleşmesi bir “variş” olarak adlandırılmaktadır. $\{X(t) : t \in [0, \infty)\}$ sürekli zamanlı bir rastgele süreç olmak üzere, her $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ için $X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ rastgele değişkenlerine $X(t)$ rastgele sürecinin artımları denmektedir. Eğer her t_n ve n değerleri için bu artışlar birbirinden bağımsız rastgele değişkenler ise $X(t)$ rastgele sürecine bağımsız artımlı rastgele süreç adı verilir [Nelson, 1995].

Eğer her $t \geq 0$ için $X(t)$ rastgele süreci bağımsız artımlı ve her $t_1, t_2, \varepsilon \geq 0$ olmak üzere $t_1 < t_2$ değerleri için $X(t_2) - X(t_1)$ rastgele değişkeni ile $X(t_2 + \varepsilon) -$

$X(t_1 + \varepsilon)$ rastgele değişkeni aynı dağılıma sahip ise $X(t)$ rastgele sürecine durağan bağımsız süreç adı verilir.

Bunlara ek olarak bir sayma süreci için $N(t_i) - N(t_{i-1})$, $(t_i, t_{i-1}]$ aralığındaki varışların sayısı olsun. Böyle bir sayma süreci için $(t_0, t_1], (t_1, t_2], \dots, (t_{n-1}, t_n]$ birbirleriyle örtüşmeyen aralıklardaki varışların sayısı bağımsız ise bağımsız artımlara sahiptir denilmektedir.



3. POISSON SÜRECİ

3.1. Poisson Süreci ve Poisson Dağılımı

Poisson dağılımı Poisson sürecinin stokastik modellemesinin temel taşı olacak kadar kapsamlıdır. X kesikli bir rastgele değişken olmak üzere, belirli bir aralık veya alanda meydana gelen deney sonuçlarının sayısını ifade eden Poisson rastgele değişkenin olasılık dağılımı,

$$P(X = n) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} \quad (3.1)$$

olarak ifade edilir. X rastgele değişkenine $\lambda > 0$ parametrelili Poisson dağılımına sahiptir denir [Roussas, 1997].

Poisson süreci, yaygın olarak kullanılan sayma süreçlerinden biridir. Kendi başına zaman içinde meydana gelen rastgele olay dizilerinin incelenmesiyle ortaya çıkmıştır [Ghahramani, 2016]. Poisson süreci, uygulamalı istatistik ve stokastik süreç teorisinde kullanılmaktadır ve teorik özellikleri çok fazla önem taşımaktadır. Örneğin, sonlu boyutlu dağılımları açıkça türetilmektedir. Ayrıca tarihsel ve matematiksel özelliklerinden dolayı da zaman içinde çeşitli alanlarda uygulamalarına sıklıkla rastlanmaktadır [Mikosch, 2006]. Poisson süreci, belirli bir zaman aralığında meydana gelen olayların sayısını saymayla ilgilenilmektedir [Sumiati vd., 2019]. Poisson sürecinin uygulama alanlarından bazıları aşağıda verilmiştir:

- Telefon santraline gelen telefon çağrılarının sayısı
- Bir kitapta yanlış basılan kelime sayısı
- Müşterilerin basit kuyruklanma sistemlerine gelişi
- Belirli bir bölgede meydana gelen depremlerin sayısı
- Bir otoyol rampasına giren otomobil sayısı
- Radyoaktif bozulma yoluyla yayılan parçacıkların sayısı

Poisson sürecinin tanımında λ oranının bir sabit olduğu varsayılır. Böyle bir Poisson süreci HPS olarak adlandırılmaktadır. λ , zamanın bir fonksiyonu olduğunda ise süreç bir HOPS olarak ifade edilmektedir.

3.1.1. Homojen Poisson Süreci

$\{N(t) : t \in [0, \infty)\}$ bir sayma süreci ve $\lambda > 0$ sabit bir sabit sayı olsun. Eğer aşağıdaki koşullar gerçekleşiyorsa süreç λ oranlı (yoğunluklu) bir Poisson süreci olarak adlandırılmaktadır.

- $N(0) = 0$
- $\{N(t) : t \in [0, \infty)\}$ bağımsız artımlara sahiptir
- Her $s < t$ için $N(t) - N(s)$ artışı $\lambda(t - s)$ beklenen değerine sahip olan Poisson dağılımına sahiptir

denir ve $P[N(t) = n] = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$ şeklinde ifade edilir. Buradan $N(t)$, λ oranlı bir poisson süreci olsun. O zaman sürecin ortalaması $E[N(t)] = \lambda t$, sürecin varyansı $var[N(t)] = \lambda t$ ve sürecin otokovaryans fonksiyonu $C_N(t_1, t_2) = \lambda \min(t_1, t_2)$ olarak hesaplanmaktadır. Poisson sürecinin n boyutlu dağılımı olan,

$$P[N(t_1) = k_1, N(t_2) = k_2, \dots, N(t_n) = k_n] \quad (3.2)$$

olasılığını elde etmek için Poisson sürecinin tanımı ve özellikleri kullanılmaktadır. Her $\lambda > 0$ ve $k = 0, 1, 2, \dots$ olmak üzere Poisson sürecinin bir boyutlu dağılımı,

$$P[N(t_1) = k_1] = \frac{(\lambda t_1)^{k_1} e^{-\lambda t_1}}{(k_1)!} \quad (3.3)$$

olarak verilir. Her $0 < t_1 < t_2$ ve $0 < k_1 < k_2$ olmak üzere Poisson sürecinin iki boyutlu dağılımı;

$$P[N(t_1) = k_1, N(t_2) = k_2] = \frac{(\lambda t_1)^{k_1}}{(k_1)!} \frac{(\lambda(t_2 - t_1))^{k_2 - k_1}}{(k_2 - k_1)!} e^{-\lambda t_2} \quad (3.4)$$

olarak ifade edilir. Her $0 < t_0 < t_1 < \dots < t_n$ ve $0 < k_1 < k_2 < \dots < k_n$, $n = 1, 2, \dots$ olmak üzere Poisson sürecinin n boyutlu dağılımı,

$$P[N(t_1) = k_1, N(t_2) = k_2, \dots, N(t_n) = k_n] = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda(t_i - t_{i-1})^{k_i - k_{i-1}}}{(k_i - k_{i-1})!} e^{-\lambda t_n} \quad (3.5)$$

şeklinde elde edilir.

3.1.2. Homojen Olmayan Poisson Süreci

Poisson sürecinde eğer durağanlık özelliği göz ardı edilirse, ortaya çıkan süreç HOPS olarak adlandırılır. HOPS zamanla değişen varış süreçlerini modellemek için kullanılmaktadır. Eğer bu süreci tam olarak tanımlamak istersek, $\lambda(t)$ t 'nin bir fonksiyonu ve $N(t)$, $(0, t]$ aralığındaki varış sayısını göstermek üzere;

$$P[N(t) = n] = \frac{\Lambda(t)^n e^{-\Lambda(t)}}{n!} \quad (3.6)$$

ile verilir. Burada $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(t) dt$ olarak verilmektedir [Nelson, 1995].

Bir HOPS de model yaygın olarak bozulmaların meydana gelme oranı $\lambda(t)$ yoğunluk fonksiyonu ile karakterize edilir. Burada bozulma depremlerin meydana gelme oranı olarak değerlendirilmektedir. Buradaki $\lambda(t)$ yoğunluk fonksiyonu ortalama değer fonksiyonu olarak da adlandırılmaktadır.

$N(t)$, $(0, t]$ aralığında meydana gelen depremlerin sayısını vermek üzere aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa $\lambda(t)$, $t \geq 0$ yoğunluk fonksiyonu ile HOPS' dir. Burada $N(0) = 0$ olduğuna dikkat edilmelidir.

$N(t)$, her $t > 0$ için $\int_0^t \lambda(t) dt$ parametrelili Poisson dağılımına sahiptir. Her $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ için $N(t_1), N(t_2) - N(t_1), \dots, N(t_m) - N(t_{m-1})$ bağımsız rastgele değişkenlerdir. $N(t)$, her $t > 0$ ve $\int_0^t \lambda(t) dt$ için,

$$E[N(t)] = \int_0^t \lambda(t)dt = \Lambda(t) \quad (3.7)$$

$$Var[N(t)] = \int_0^t \lambda(t)dt = \Lambda(t) \quad (3.8)$$

şeklinde ifade edilir.

HOPS' de herhangi bir $(t_1, t_2]$ zaman aralığında arızaların sayısı $\int_{t_1}^{t_2} \lambda(t)dt$ ortalamalı bir Poisson dağılımına sahiptir. Bu bağlamda bu aralıkta k kadar arıza olma olasılığı,

$$P[N(t_2) - N(t_1) = k] = \frac{1}{k!} \left(\int_{t_1}^{t_2} \lambda(t)dt \right)^k e^{-\left(\int_{t_1}^{t_2} \lambda(t)dt \right)} \quad (3.9)$$

olarak tanımlanır.

3.1.3. Homojen Olmayan Poisson Sürecinde Kullanılan Modeller

1970'lerin sonu ve 1980'lerin başına kadar, onarılabılır sistem güvenilirliği üzerine sınırlı sayıda çalışma bulunmaktadır. Günümüzde ise literatürde bu konu üzerine çok farklı çalışma ile karşılaşmak mümkündür. Onarılabılır sistem kavramı, sistemin bazı bileşenlerinin bozulması sebebiyle arızalanabileceği, ancak bu arızalı bileşenlerinin değiştirilmesinden sonra çalışır duruma getirilebileceği durumlarda oldukça kabul edilebilir bir modeldir. Genellikle, onarılabılır sistemler ya yineleme süreçleri ya da HOPS ile modellenmektedir. Bir yineleme süreci, sistemin onarımdan sonra “yenisi kadar iyi” olacağı varsayımına dayandırılırken, HOPS, sistemin onarımdan sonra “eskisi kadar iyi” olacağı varsayımına dayandırılmaktadır. Bir yineleme sürecinden elde edilen verilere göre yaşam dağılımlarının (örneğin; üstel, Weibull, lognormal veya Gamma dağılımları) uydurulması konusunda çok fazla çalışma bulunmaktadır. HOPS süreci matematiksel olarak izlenebilir olduğundan daha sık kullanılmaktadır. Barlow ve Davis optimum değiştirme aralıklarını belirlemek amacıyla arızalar arası süreleri analiz etmek için HOPS'yi kullanarak grafiksel bir yöntem geliştirmiştir [Barlow and Davis, 1977]. Engelhardt ve Bain tamir edilebilir

sistemler için arızalar arasındaki süreyi incelemişlerdir. Sonrasında bir sonraki arızaya kadar geçen ortalama sürenin asimptotik olarak yoğunluk fonksiyonunun tersiyle orantılı olması için gerekli ve yeterli bir koşul olduğunu ifade etmişler ve teoremlerini kuvvet yasası ve log-lineer süreçler için doğrulamışlardır [Engelhardt and Bain, 1986]. Kuvvet yasası süreci onarılabilir sistemleri modellemek için sıklıkla kullanılmaktadır. Engelhardt ve Bain gelecekteki arızaların zamanını tahmin etmeye yönelik yaklaşımlar tanımlamıştır [Engelhardt and Bain, 1978]. Lee, birkaç bağımsız kuvvet yasası sürecinin tehlike oranlarını karşılaştırmıştır [Lee, 1980]. Rigdon ve Basu arızalar arasındaki zaman dağılımının bilinmeyen ölçek ve şekil parametrelerine sahip olduğu durumlarda nokta tahminleri ve güven aralıklarını elde etmek için bir çalışma ortaya koymuştur [Rigdon and Basu, 1989]. Calabria ve çalışma arkadaşları maksimum olabilirlik ilkesi temelinde onarılabilir bir sisteme ait gelecekteki arıza sürelerinin bir nokta tahmin edicisini incelemiştir [Calabria vd., 1990]. Hulting ve Robinson, bileşen, alt sistem ve sistem seviyelerinde test verileri ve geçmiş bilgiler mevcut olduğunda, onarılabilir alt sistemlerden oluşan bir seri sistemin güvenilirliğini tahmin etmek için Bayes kestirimi bir yaklaşım kullanmıştır [Hulting and Robinson, 1994]. Brown ve Proschan onarımdan sonra sistemin p olasılığı ile “yenisi kadar iyi” duruma ve $1 - p$ olasılığı ile “eskisi kadar kötü” duruma döndüğünü varsayan bir model önermiştir [Brown and Proschan, 1983].

Güvenilirlik alanında sıklıkla kullanılan modellerden biri de HOPS’dır. Burada arızalar arasındaki sürelerin bağımsız ve özdeş dağılımlı rastgele değişkenler olduğu varsayılmaktadır. Fakat Hartler tarafından arızalar arasında özdeş olarak dağılmış süreler varsayımının doğru olmadığı çünkü arızaların meydana gelme oranının zamana bağlı olduğu gösterilmiştir. Bunun için daha genel bir model olarak HOPS önerilmiştir [Hartler, 1989]. Ascher ve Feingold, çoğu onarımın bir sistemi oluşturan parçaların yalnızca küçük bir kısmının değiştirilmesini içerdiğinden, onarımdan sonra sistemin güvenilirliğinin esasen arıza meydana gelmeden hemen önceki ile aynı olduğu varsayımının uygun olduğunu belirtmiştir [Ascher and Feingold, 1984]. Bu anlayış, HOPS’nin bir sistem güvenilirlik modeli olarak yaygın bir şekilde kullanılmasına yol açmıştır. HOPS, sürecin zaman içinde durağan olmasını gerektirmemesi, bağımsız artış özelliğinin var olması ve yoğunluk fonksiyonunun yalnızca zamanın bir fonksiyonuna bağlı olduğu için sistem bozulmalarının gözlenebilir olması açısından da önem arz etmektedir.

HOPS’de sistemin arıza süresi zamana bağlı olduğundan, arıza sürecinin yoğunluk fonksiyonu (birim zamanda beklenen arızalanma sayısı), $\lambda(x) = h(\alpha\beta, x)$ olduğu varsayılmaktadır. Burada α başlangıçtaki arıza oranı veya ölçek faktörü, β yaşlanma (eskime) oranı, x geçen zaman ve $h(;)$ yaşlanma sürecini gösteren herhangi bir β ve x fonksiyonu olabilir. İlgilendiğimiz genel problem $[0, x]$ zaman aralığında gözlemlediğimiz arıza sürelerine dayanarak α ve β için istatistiksel çıkarımlar yapmaktadır. Bu çıkarımları analiz etmek için üç ana model aşağıda verilmiştir:

- Doğrusal yoğunluk fonksiyonu : $\lambda(x) = \alpha + \beta x$
- Kuvvet yasası yoğunluk fonksiyonu : $\lambda(x) = \alpha\beta x^{\beta-1}$
- Üstel yoğunluk fonksiyonu : $\lambda(x) = \alpha e^{\beta x}$

Gerçek hayatta, çoğu karmaşık sistem zaman geçtikçe aşınır, yani birbirini izleyen arıza süreleri gittikçe azalma eğilimindedir. Bu olgu “yaşlanma” olarak adlandırılır. Yaşlanmayı modellemek amacıyla, onarılabilir sistemin zamana bağlı davranışını daha izlenebilir hale getirmek amacıyla HOPS kullanılır. HOPS’nin temel varsayımları, onarım sürelerinin ihmal edilebileceği, onarımların arızadan sonra anlık olarak gerçekleştiği ve onarılan sistemin aynı yaştaki arıza yaşamamış bir sistem gibi davranmasıdır. İhmal edilebilir onarım sürelerinin varsayımı, HOPS modelinin onarımların nispeten sık olduğu sistemlerle değil, esas olarak son derece güvenilir sistemlerle ilgili olduğu anlamına gelir.

3.1.4. Arıza Modelleri

Hata süreci HOPS olarak tanımlanan bir sistemi göz önüne alalım. Burada x^* bir sabit ve N bir rastgele değişken olmak üzere, x^* gözlenen birim zaman ve N bu süre boyunca gözlenen arıza sayısı olarak ele alınır. Böyle bir HOPS’de $\Lambda(x) = \int_0^x \lambda(x)dx$, x zamandaki ortalama arıza sayısı olmak üzere, ilk N arıza zamanının ortak yoğunluk fonksiyonu

$$f_{X_1, X_2, \dots, X_N, N}(x_1, x_2, \dots, x_n, n) = \left[\prod_{i=1}^n \lambda(x_i) e^{-\Lambda(x^*)} \right] \quad (3.10)$$

şeklinde ifade edilmektedir. Şimdi sistemi n^* bir sabit ve X_{n^*} rastgele bir değişken olmak üzere, n^* gözlemlenen birim zaman ve n^* arıza zamanı X_{n^*} zamanında meydana gelmiş olsun. O halde ilk n^* arıza zamanının ortak yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{X_1, X_2, \dots, X_{n^*}}(x_1, x_2, \dots, x_{n^*}) = \left[\prod_{i=1}^{n^*} \lambda(x_i) \right] e^{-\Lambda(x_{n^*})} \quad (3.11)$$

şeklinde tekrardan ifade edilebilir. Yukarıda üç farklı arıza yoğunluk fonksiyonu tanımlanmıştır. Burada verilen ortak yoğunluk fonksiyonları kullanılarak aşağıdaki üç farklı arıza modeli verilmiştir.

3.1.4.1. Doğrusal Arıza Modeli

β 'nın birim zaman cinsinden ölçüldüğü ve negatif değerler alabildiği göz önüne alınsın. Ayrıca α başlangıç arıza oranı ve β doğrusal yaşlanma oranı ile sistemin arıza oranının zaman içinde doğrusal arttığını veya azaldığını varsayarsak, bir arıza süreci HOPS tarafından,

$$\lambda(x) = \alpha + \beta x \quad (3.12)$$

doğrusal bir arıza modeli ile modellenmektedir. Bu model α başlangıç arıza oranı ve β doğrusal yaşlanma oranı ile sistemin arıza oranının zaman içinde doğrusal olarak arttığını veya azaldığını varsayalım. β sıfıra eşit olduğunda HOPS sabit arıza oranı α olan bir HPS' ne dönüşür.

Zamanla kesilmiş veri durumu için ilk $N = n$ arıza zamanının olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki şekilde verilir:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, n | \alpha, \beta) = \left[\prod_{i=1}^n (\alpha + \beta x_i) \right] e^{-(\alpha x^* + \beta x^{*2}/2)} \quad (3.13)$$

Benzer şekilde, arıza kesilmiş veri durumu için ilk n^* arıza zamanının olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_{n^*}, |\alpha, \beta) = \left[\prod_{i=1}^{n^*} (\alpha + \beta x_i) \right] e^{[-(\alpha x_{n^*} + \beta x_{n^*}^2/2)]} \quad (3.14)$$

Söz konusu olabilirlik fonksiyonunun maksimize edilmesiyle beraber bilinmeyen parametreleri en çok olabilirlik tahmin edicilerine ulaşılmaktadır. Massey ve çalışma arkadaşları (1996) söz konusu olabilirlik fonksiyonunun maksimum yapan değerlerini hesaplamıştır.

3.1.4.2. Kuvvet Yasası Arıza Modeli

β birimsiz olmak üzere sistem arıza süreci, $\lambda(x) = \alpha\beta x^{\beta-1}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ şeklinde yoğunluk fonksiyonuna sahip bir HOPS tarafından veriliyorsa, kuvvet yasası arıza modeli ile modellenir. $\beta < 1$ için arıza yoğunluğu azalır yani güvenilirliğe karşılık gelir. $\beta > 1$ için arıza yoğunluğu artar yani yaşlanmaya karşılık gelir. $1 < \beta < 2$ için arıza yoğunluğu aşağı doğru içbükey iken $\beta > 2$ için arıza yoğunluğunun yukarı doğru içbükey şeklinde açıklanmaktadır. Kuvvet yasası arıza modeli güvenilirlik mühendisliği alanında sıklıkla kullanılmaktadır. Bu modelin bu kadar popüler olmasının nedeni, istatistiksel olarak titiz yöntemler sunmasıdır. Model parametreleri üzerinde güven sınırlarını belirlemek, gelecekteki arıza süreleri üzerinde tahmin sınırlarını bulmak ve belki de en önemlisi modelin yeterliliğini istatistiksel olarak geçerli bir uyum iyiliği testi ile kontrol etmektir.

Zamanla kesilmiş veri durumu için ilk $N = n$ arıza süresinin olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibi gözlenir:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, n|\alpha, \beta) = \left[\alpha^n \beta^n \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{\beta-1} e^{(-\alpha x^{\beta})} \right] \quad (3.15)$$

Benzer şekilde, arıza kesilmiş veri durumu için ilk n^* arıza zamanının olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_{n^*} | \alpha, \beta) = \left[\alpha^{n^*} \beta^{n^*} \left(\prod_{i=1}^{n^*} x_i \right)^{\beta-1} e^{(-\alpha x_{n^*}^\beta)} \right] \quad (3.16)$$

Bir önceki modelde olduğu gibi olabilirlik fonksiyonunu maksimum yapan bilinmeyen parametre değerleri en çok olabilirlik tahmin edicisidir.

3.1.4.3. Üstel Arıza Modeli

Bir sistem arıza süreci $\lambda(x) = \alpha e^{\beta x}$, $\alpha > 0$ şeklinde bir yoğunluk fonksiyonuna sahip bir HOPS ile veriliyorsa, üstel arıza modeli ile modellenir. β sıfıra eşit olduğunda, HOPS sabit bir α arıza oranına sahip HPS' ne dönüşür. $\beta < 0$ ise, güvenilirlik artışını belirtirken $\beta > 0$ ise sistem zaman içinde yaşlanma artmaktadır. Bu model, α başlangıç arıza oranı ve β üstel yaşlanma oranı ile sistemin arıza oranının zaman içinde üstel olarak arttığını veya azaldığını varsaymaktadır. Ayrıca x 'in büyük değerleri içinde ortalama fonksiyonu:

$$\Lambda(x) = \int_0^x \alpha e^{(\beta x)} dx = \left(\frac{\alpha}{\beta} \right) [e^{(\beta x)} - 1] \quad (3.17)$$

olarak ifade edilir. Zamanla kesilmiş veri durumu için ilk $N = n$ arıza zamanının olabilirlik fonksiyonu:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n | \alpha, \beta) = \alpha^n e^{(\beta \sum_{i=1}^n x_i)} e^{\left[-\left(\frac{\alpha}{\beta} \right) e^{((\beta x^*)-1)} \right]} \quad (3.18)$$

ile verilmektedir. Yine önceki modellerde olduğu gibi olabilirlik fonksiyonunu maksimum yapan bilinmeyen parametre değerleri en çok olabilirlik tahmin edicisidir.

4. UYGULAMA

Üzerinde yaşadığımız yer kabuğu sürekli olarak hızlı veya yavaş gelişen hareketleri içinde barındırır. Günlük yaşamda bu hareketliliğin büyük bir çoğunluğu hissedilmez. Ancak insanlar tarafından hissedilen ve duyulan yer hareketleri de vardır. Kökeni doğal nedenler olan ve yer kabuğunda beklenmedik bir anda ortaya çıkan enerji sonucunda meydana gelen sismik dalgalar ve bu dalgaların yeryüzünü sarsması olayı deprem olarak adlandırılmaktadır.

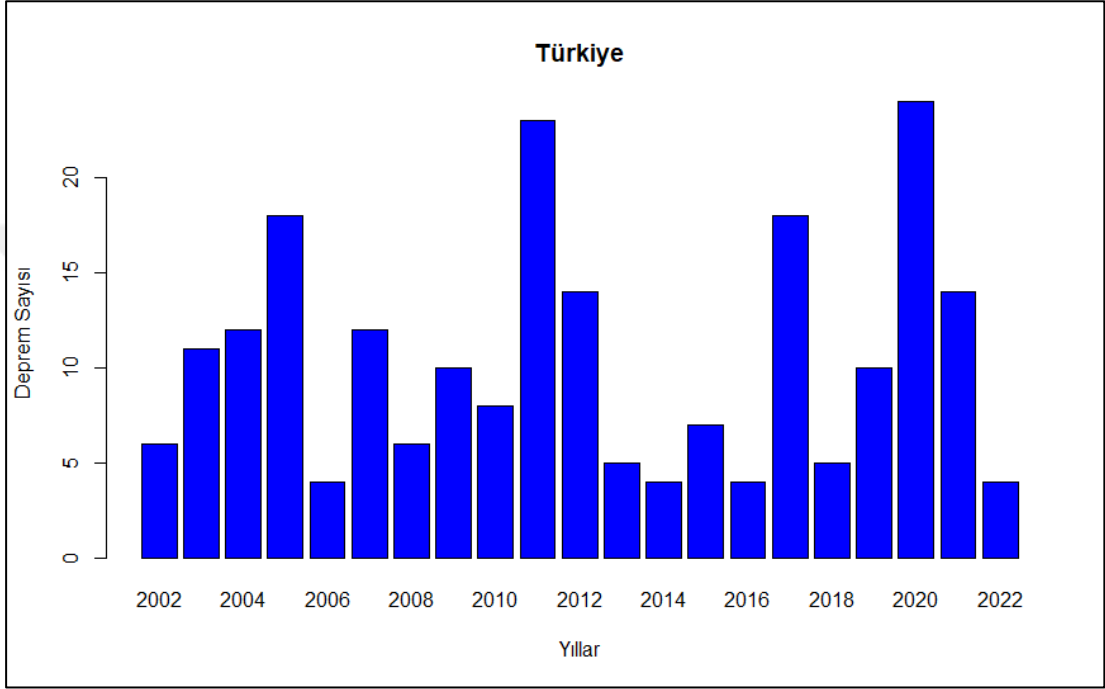
Depremler, büyük elastiki kırıklara bağlı olarak gelişmektedir. Bu elastiki kırıklara da fay denilmektedir. Fay hattı boyunca biriken enerji kütlenin direncini aştığında bu kırıklar boyunca kaymalar oluşmakta ve sonucunda deprem meydana gelmektedir. Bu hareketler sonucunda bazı bölgeler şiddetli bir şekilde sarsılırken bazı bölgeler bu hareketliliklerden daha az etkilenmektedir. Bu bölgeler deprem kuşağı bölgesi olarak ifade edilmektedir.

Deprem parametrelerinin olasılığa bağlı olarak tanımlanmasına sismik risk analizi denilmektedir. Günümüzde sismik riskin değerlendirilmesi için deterministik ve olasılıksal modellerden yararlanılmaktadır. Deterministik yaklaşımlar tamamen süreci anlamaya ve tahmin etmeye çalışırken olasılıksal modeller ise deterministik sürecin bazı düzensizlikleri yani rastgele durumlar içerdiğini ve bu nedenle rastgele bir süreç olduğunu kabul etmektedir. Yer zaman ve büyüklüğe göre rastgelelik gösteren depremler, sismik risk analizinde kullanılan modellerdeki bazı belirsizlikler ve olasılıksal modellerin bu belirsizlikleri göz önünde bulundurması nedeniyle sismik riskin olasılıksal yöntemlerle tahmini daha uygun görülmektedir.

Sismik tehlikenin tahmin edilmesinde kullanılan ilk modeller depremlerin zaman ve yer bakımından bağımsız oldukları varsayımına dayanmaktadır. Poisson modeli ile risk saptamaları geniş alanlarda iyi sonuç verdiği için en yaygın kullanılan modellerden biridir.

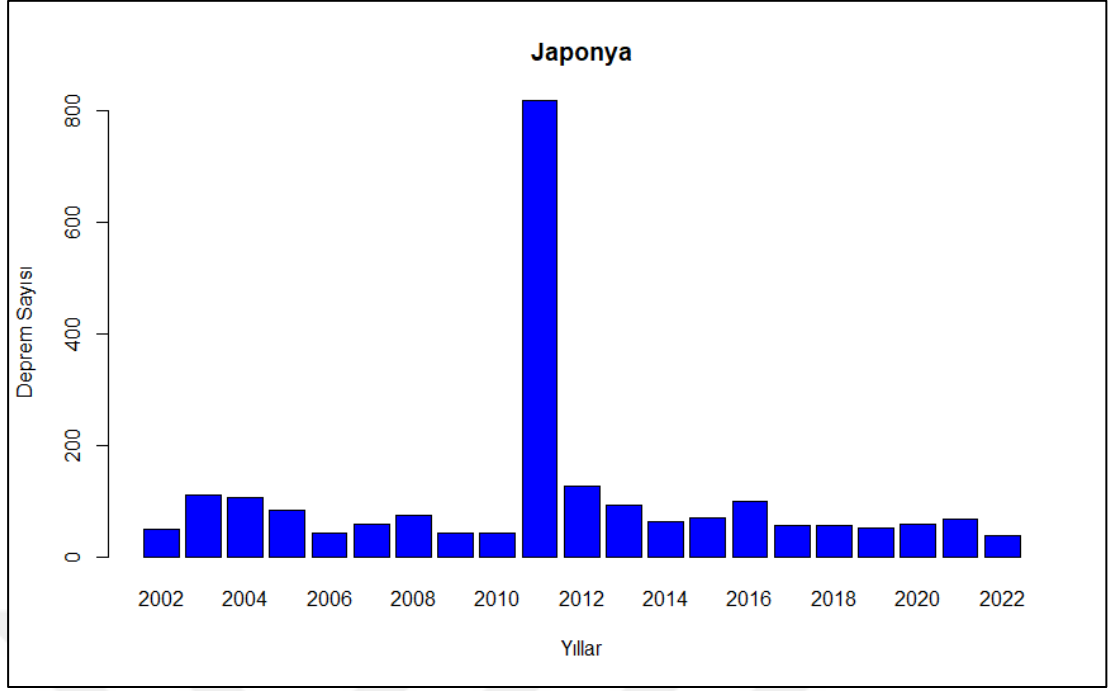
Bu çalışmada United States Geological Survey (USGS)'den 29.06.2022 tarihinde ulaşılan veriler modelleme ile yapılmıştır. Ayrıca verilere Ek 1'de bırakılan web sitesinden ulaşılmıştır. Daha sonra HOPS kullanılarak Türkiye, Japonya ve ABD'de 2002-2021 yılları arasında gerçekleşen 5 ve üzeri büyüklüğündeki depremleri dikkate alarak belirli tahminler yapılmıştır.

HOPS'ye geçmeden önce depremler arası süre (DAS) ve birikimli depremler arası süre (BDAS) hesaplanması gerekmektedir. BDAS için 5 ve üssü büyüklüğündeki iki deprem arası süre saat cinsinden ifade edilmiştir. Öncelikle veriyi anlamak için yıllara göre 5 ve üzeri deprem sayısı hesaplanmış ve her üç ülke için aşağıdaki grafikler elde edilmiştir.



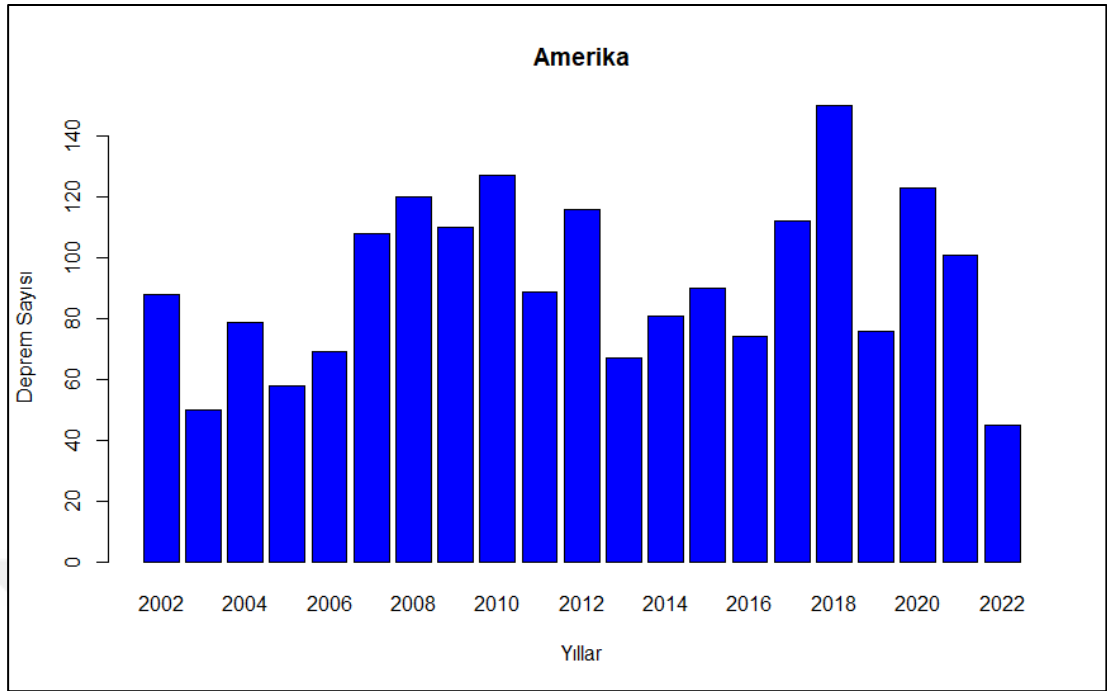
Şekil 4.1: Türkiye için yıllara göre deprem (5 ve üzeri) sayıları

Yukarıdaki grafik 2002-2021 yılları arasında Türkiye’de meydana gelen 5 ve üzeri büyüklükteki depremlerin yıllara göre dağılımlarını göstermektedir. Bu grafikten anlaşılacağı üzere yıllık olarak gerçekleşen deprem sayıları 4 ve 24 arasında değişiklik göstermektedir. Şekil 4.1’den Türkiye için 2002-2021 yılları arasında ortalama 10 adet 5 ve üzeri büyüklüğünde deprem olduğu görülmektedir.



Şekil 4.2: Japonya için yıllara göre deprem (5 ve üzeri) sayıları

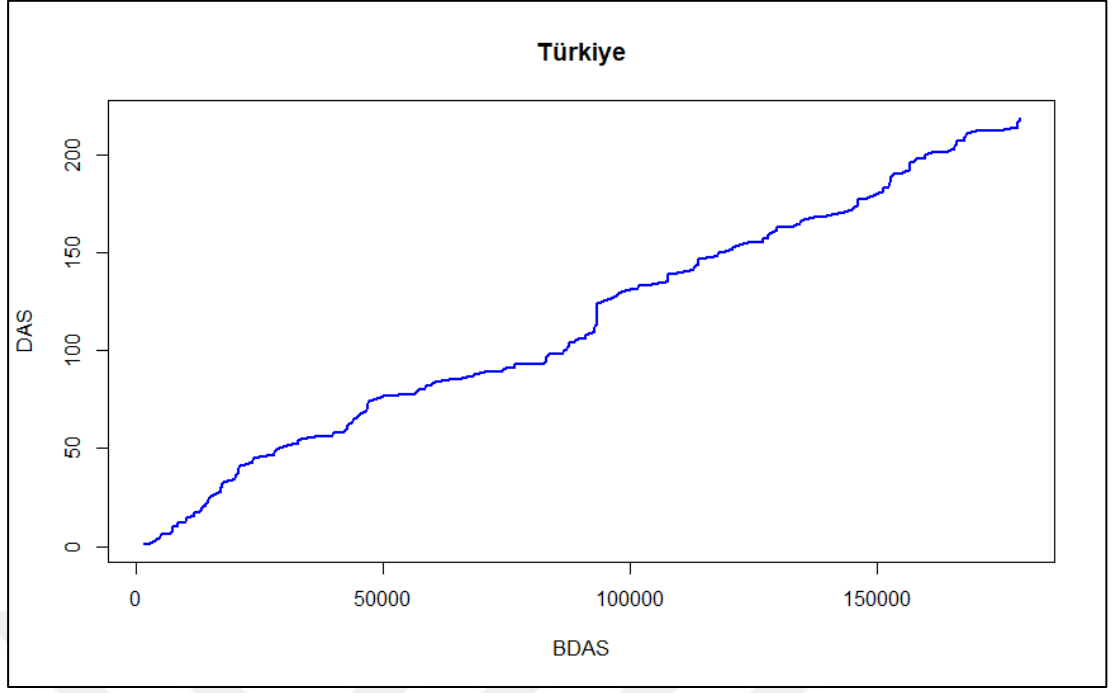
Yukarıdaki grafik 2002-2021 yılları arasında Japonya’da meydana gelen 5 ve üzeri büyüklükteki depremlerin yıllara göre dağılımlarını göstermektedir. Şekil 4.2’de görüldüğü üzere yıllık olarak gerçekleşen deprem sayıları 39 ve 817 arasında değişiklik göstermektedir. Şekil 4.2’den anlaşılabacağı üzere Japonya için 2002-2022 yılları arasında ortalama 108 adet 5 üzeri büyüklüğünde deprem gerçekleşmektedir. Ancak şekilden de görüldüğü gibi 2011 yılında 817 adet deprem gerçekleşmiştir. 2011 yılında gerçekleşen 817 adet depremi uç değer olarak kabul ettiğimizde ortalama 70 adet deprem gerçekleştiği gözlenmektedir.



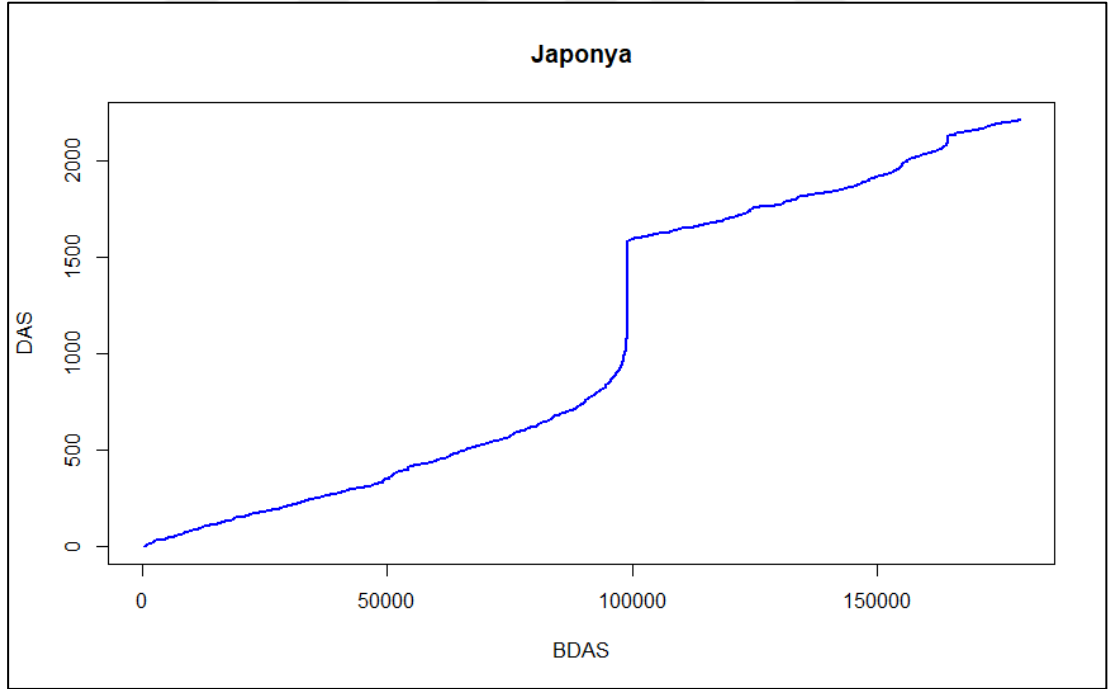
Şekil 4.3: ABD için yıllara göre deprem (5 ve üzeri) sayıları

Şekil 4.3, 2002-2021 yılları arasında Amerika’da meydana gelen 5 ve üzeri büyüklükteki depremlerin yıllara göre dağılımlarını göstermektedir. Yukarıdaki grafikten de görüldüğü gibi bu yıllar arasında gerçekleşen deprem sayılarının 45 ve 150 arasında değişiklik gösterdiği gözlenmektedir. Grafikten anlaşılacağı üzere Amerika için 2002-2021 yılları arasında ortalama 92 adet 5 üzeri büyüklüğünde deprem gerçekleşmektedir.

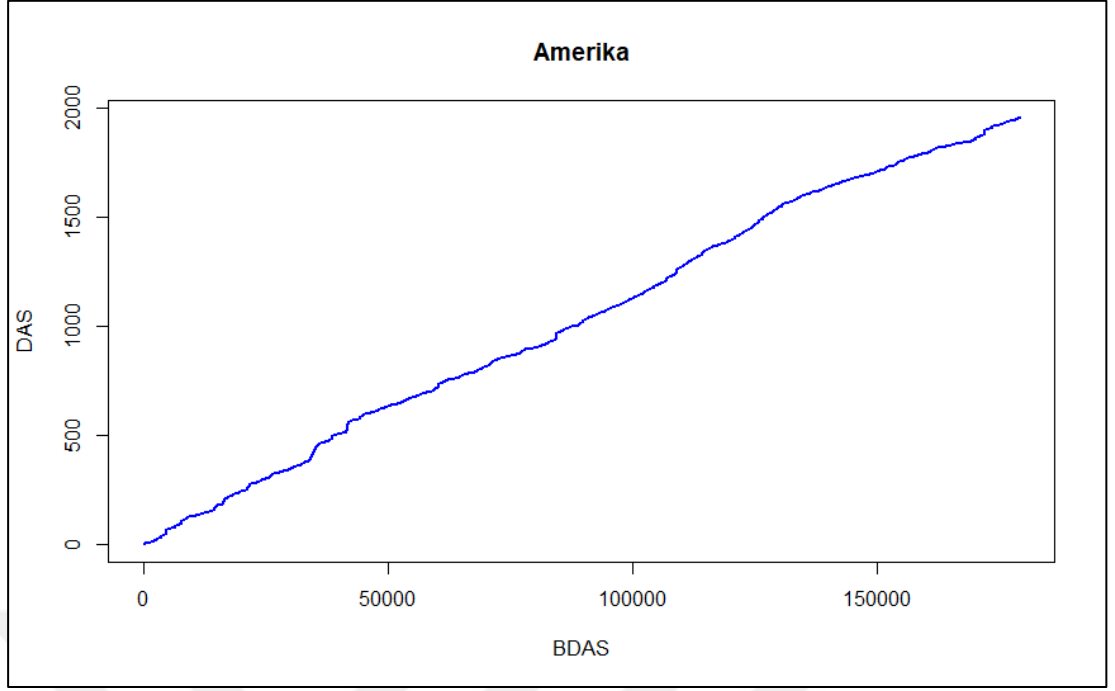
Daha sonra, arıza (deprem) model seçimini yapabilmek için elde edilen verilere göre DAS ve BDAS için trend olup olmadığına bakılmalıdır. Trendin varlığından söz edebilmek için DAS verileri kullanılarak trend grafiklerini oluşturmak gerekmektedir. Oluşturulan grafiklere göre noktalar eğer yatay bir çizgi çevresinde toplanıyorsa trendin olmadığından eğer yatay bir çizgi çevresinde değil de bir eğri veya doğru etrafında toplanıyorsa trendin varlığından söz edilir. Ardından trend grafiğinde bir dışbükey eğri oluşuyorsa, DAS’nin zaman içinde arttığı, eğer bir içbükey eğri oluşuyorsa, DAS’nin zaman içinde azaldığı yorumu yapılmaktadır.



Şekil 4.4: Türkiye için BDAS verilerine karşılık DAS grafiği



Şekil 4.5: Japonya için BDAS verilerine karşılık DAS grafiği



Şekil 4.6: Amerika için BDAS verilerine karşılık DAS grafiği

Her üç ülkeye ait DAS ve BDAS grafikleri incelendiğinde her üç ülke için trend varlığı tespit edilmiştir. Şekil 4.4, Şekil 4.5 ve Şekil 4.6 için kullanılan veri sonuçlarına göre DAS'lerin azaldığı gözlenmiştir.

Bu tez kapsamında model olarak HOPS'de yaygın olarak kullanılan kuvvet yasası modeli ele alınmıştır. Kuvvet yasası modelinin yoğunluk fonksiyonu,

$$\lambda(t) = \alpha \beta t^{\beta-1} \quad (4.1)$$

olarak tanımlanırken, birikimli yoğunluk fonksiyonu,

$$\Lambda(t) = \alpha t^{\beta} \quad (4.2)$$

şeklinde ifade edilir. Bu tanımlamalar yapıldıktan sonra modelin en çok olabilirlik tahmin edicisi kullanılarak elde edilen parametre tahminleri Türkiye, Japonya ve ABD'nin BDAS verileri için aşağıdaki şekilde bulunmuştur.

Tablo 4.1: Türkiye Japonya ve ABD için parametre tahminleri

	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$
Türkiye	0,002523	0,940274
Japonya	0,001123	1,198418
Kuzey Amerika	0,002580	0,928843

Tablo 4.1, Türkiye, Japonya ve ABD için parametre tahmin değerlerini göstermektedir. $\hat{\alpha}$ parametresi için tahmin değerleri Türkiye için 0,002523, Japonya için 0,001123 ve ABD için 0,002580 olarak bulunmuştur. $\hat{\beta}$ tahmin değeri ise Türkiye için 0,940274, Japonya için 1,198418 ve ABD için 0,928843 olarak elde edilmiştir.

Tablodaki β değerlerine bakılarak sistemin güvenilirliği hakkında yorum yapılabilmektedir. $\beta < 1$ olduğunda arıza yoğunluğu azalmaktadır yani güvenilirliğe karşılık gelmektedir. $\beta > 1$ olduğunda ise arıza yoğunluğu artmaktadır yani yaşlanmaya karşılık gelmektedir. Tabloda β değerlerine bakıldığında Türkiye ve Amerika için arıza yoğunluğunun azaldığı gözlenirken, Japonya için arıza yoğunluğunun arttığı gözlemlenmiştir. Ancak, söz konusu değerler 1'e çok yakın olduğundan teorik olarak yaşlanma ve iyileşmeden bahsetmekle beraber durağan bir süreç gözlenmektedir.

Kuvvet yasası modeline göre belirli bir aralıkta beklenen arıza sayısı,

$$E[N(t)] = \Lambda(t) = \alpha t^{\beta} \quad (4.3)$$

olduğundan $m(t) = \hat{\alpha} t^{\hat{\beta}}$ olur. Buna göre belirli zaman aralıkları için beklenen arıza sayıları aşağıdaki tabloda haftalık, aylık, yarıyıllık ve yıllık olarak ifade edilmiştir.

Tablo 4.2: Türkiye Japonya ve Amerika için haftalık, aylık ve yıllık beklenen arıza sayıları

	Haftalık	Aylık	Yıllık
Türkiye	0,312154	1,226431	12,85291
Japonya	0,52136	2,9824	59,57379
ABD	3,010363	11,6324	118,3486

Tablo 4.2’den anlaşılacağı üzere Türkiye, Japonya ve Amerika için haftalık, aylık ve yıllık olarak 5 ve üzeri beklenen deprem sayıları tahmin edilmiştir. Bu tabloya göre 2002-2022 yılları arasında verilere göre hesaplanan beklenen deprem sayıları ülkelere göre değişiklik göstermektedir. Türkiye için ayda yaklaşık 1 adet deprem olması beklenirken Japonya için yaklaşık 3 adet ve ABD için yaklaşık 11 adet deprem olması beklenmektedir. Bu verilere göre yorumlanacak olursa Türkiye’deki beklenen deprem sayısı Japonya ve Kuzey Amerika ile kıyaslandığında daha azdır.

Bunlara ek olarak $(t_1, t_2]$ aralığında ℓ kadar arızanın meydana gelme olasılığı HOPS’ nin yoğunluğu kullanılarak hesaplanabilmektedir. Bu hesaplama,

$$m(t_2) - m(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) dt \quad (4.4)$$

şeklinde yapılır. Buna göre (3.9) denkleminde, herhangi bir zaman aralığında ℓ kadar arıza meydana gelme olasılığı,

$$P[N(t_2) - N(t_1) > \ell] \quad (4.5)$$

şeklinde bulunur. Örneğin, Türkiye için 250-1000 saat aralığında 2 tane 5 ve üzeri deprem olma olasılığı;

$$m(1000) - m(250) = \int_{250}^{1000} \alpha \beta t^{\beta-1} dt = 1.216$$

olmak üzere;

$$P[N(1000) - N(250) > 2] = 0.219$$

şeklinde hesaplanabilir.

Bir sonraki 5 ve üzeri beklenen deprem süresinin tahmin değeri ise

$$t_{n+1} = \left(t_n^{\hat{\beta}} + \frac{1}{\hat{\alpha}} \right)^{\frac{1}{\hat{\beta}}} \quad (4.6)$$

ile hesaplanır. Aşağıdaki sonuçlara göre ise son olan depremde sonra ilk 5 ve üzeri büyüklüğündeki deprem için geçen süre tahminleri Türkiye için 868,02 saat, Japonya için 67,17 saat ve Amerika için 98,67 saat sonra meydana gelir.

HOPS için herhangi bir $(t_1, t_2]$ zaman aralığında meydana gelen arıların sayısının $\int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) dt$ ortalamalı bir Poisson dağılımına sahip ise güvenilirlik fonksiyonu

$$R(t_1, t_2) = P[N(t_2) - N(t_1) = 0] = e^{-\int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) dt} = e^{-[m(t_2) - m(t_1)]} \quad (4.7)$$

olarak bulunur. Buna göre aşağıdaki tabloda çeşitli zaman aralıkları için güvenilirlik hesaplamaları verilmiştir.

Tablo 4.3: Türkiye Japonya ve Amerika belirli zaman aralıkları için güvenilirlik tahminleri

Zaman Aralığı	$R(t_1, t_2)$		
	Türkiye	Japonya	ABD
0-20	0,95868459	0,96012044	0,95916025
20-50	0,94395938	0,92188898	0,94557145
50-100	0,91231908	0,85384107	0,9155203
100-200	0,8385441	0,69585479	0,84532841
200-400	0,71327077	0,43511025	0,72623108

Tablo 4.3’de görüldüğü gibi güvenilirlik düzeyleri zamanla azalmaktadır. 0-20 saat aralığında güvenilirlik değerleri Türkiye için 0,95868459, Japonya için 0,96012044 ve ABD için 0,95916020 olarak hesaplanmıştır. 200-400 saat aralığında ise güvenilirlikler Türkiye için 0,71327077, Japonya için 0,43511025 ve ABD için 0,72623108 değerlerini almaktadır. Tabloda elde edilen tahminlere göre her üç ülke içinde DAS verilerinin azalan bir trend oluşturduğu, DAS’nin zamanla azaldığı gözlenmektedir.

5. SONUÇ

Tarih boyunca doğanın en yıkıcı ve ürkütücü olgularından birisi olan depremler insanlarda hep bir korku duygusu uyandırmıştır. Bir depremi bu denli korkutucu yapan ise depremin başladığı anda sarsıntıların ne şiddetle olacağının ya da ne kadar süreceğinin tahmin edilememesidir. Deprem oluşumundaki belirsizlikler göz önüne alındığında, güvenilir tahminler geliştirmek için birçok çalışma yapılmış ve yapılmaya devam edilmektedir. Bu çalışmaların ana amaçlarından biri, bir depremten sonra bir sonraki depremin ne zaman, nerede ve ne sıklıkla olacağını tahmin etmeye çalışmaktır. Bu yolla, gelecekteki herhangi bir depremin neden olacağı kayıpların ve maddi hasarların tahminlerle en aza indirilmesi amaçlanmaktadır. Literatürde bu çalışmaya benzer birçok çalışma mevcuttur. Bu çalışmadaki ana amaç güvenilirlik analizi yapılırken kullanılacak olan modelin tercih edilmesi ve güvenilirlik analizinde çok sık kullanılan Homojen Olmayan Poisson Süreci modelinin deprem verileri üzerinde uygulanabilirliğini göstermektir.

Bu tezde, Türkiye, Japonya ve Amerika'daki 2002-2021 yılları arasında meydana gelen 5 ve üzeri büyüklüğündeki deprem verileri uygulama konusu olarak seçilmiştir. İlk aşamada Depremler Arası Süre verilerinin benzer dağılım gösterip göstermediğini belirlemek için R programı kullanılarak trend grafikleri oluşturulmuştur. Grafikler için yapılan detaylı analizler neticesinde verilerin trend içerdiği gözlemlenmiştir. Verilerde oluşan (trend) eğilim korelasyonunu esas alan Kuvvet Yasası modeli ile bu çalışmadaki veriler için modelleme yapılmıştır. Modelleme yapıldıktan sonra en çok olabilirlik tahmin edicileri kullanılarak parametre tahminleri elde edilmiştir. Çalışmanın son bölümünde ise güvenilirlik hesaplamalarına yer verilmiştir.

Çalışmada yapılan parametre tahminleri bize güvenilirlik hakkında bilgi vermektedir. Elde edilen β değeri sistemin arıza yoğunluğunun yani depremler arası sürenin azalması ya da artmasının yorumlanmasında önemli rol oynamaktadır. Eğer $\beta < 1$ ise arıza yoğunluğu azalmaktadır yani güvenilirliğe karşılık gelmektedir. Eğer $\beta > 1$ ise arıza yoğunluğu artmaktadır yani yaşlanmaya karşılık gelmektedir. Çalışmadaki β değerlerine bakıldığında Japonya için arıza yoğunluğunun arttığı gözlenirken Türkiye ve Amerika için arıza yoğunluğunun azaldığı gözlenmiştir. Fakat, söz konusu değerler 1'e çok yakın olduğundan teorik olarak yaşlanma ve iyileşmeden bahsetmekle beraber durağan bir süreç gözlenmektedir.

Bir sonraki bölümde elde edilen veriler ile belirli zaman aralıkları için beklenen deprem sayısı tahmin değerleri verilmiş ve güvenilirlik hesaplamaları yapılmıştır. Beklenen deprem sayıları üç ülke içinde farklılık göstermekle birlikte veri setindeki değerler ile kıyaslandığında tutarlı sonuçlar vermektedir. Yapılan güvenilirlik hesaplamaları sonucunda ise güvenilirliğin zamanla azaldığı gözlenmektedir.

Yapılan işlemler neticesinde 5 ve üzeri deprem sayısı verilerinin trend grafiklerine göre depremler arası süresinin azaldığından bahsetmek doğru olacaktır.

Son olarak model güvenilirliği yüksek çıktığı için deprem sayısı modellemesi başarılı bir şekilde sonuç vermiştir. İleriki çalışmalarda kuvvet yasası dışındaki arıza modelleri ya da Poisson dışında farklı bir dağılımdan türetilen sayma süreçleri kıyası yapılacaktır.



KAYNAKLAR

An G., Gao M., (2015), “Poisson Processes in Free Probability”, 1506031330(2).

Antoniadis N., Hero A. O., (1994), “Time-Delay Estimation for Filtered Poisson Processes Using an EM-Type Algorithm”, IEEE Transactions on Signal Processing, 42, 2112-2123.

Asanjarani A., Hautphenne S., Nazarathy Y., (2021), “Markovian Transition Counting Processes: An Alternative to Markov Modulated Poisson Processes”, The ANZIAM Journal, 64(1), 1-15.

Ascher H., Feingold H., (1984), “Repairable System Reliability, Newyork.

Barlow R. E., Davis B., (1977), “Analysis of Time Between Failures for Repairable Components”, Proceedings of SIAM Conference on Nuclear System Reliability Engineering and Risk Assesment, 543-561.

Bartlett M. S., (1953), “Stochastic Processes or the Statistics of Chance”, Applied Statistics”, 2, 44 - 64.

Başköy Y., (2018), “Çeşitli Konveks Stokastik Süreçler için Bazı Eşitsizlikler”, Yüksek Lisans Tezi, Ordu Üniversitesi.

Bremaud P., (2020), “Probability Theory and Stochastic Processes”, France.

Brown M., Proschan F., (1983), “Imperfect repair”, Journal of Applied Probability, 20, 851-859.

Calabria R., Guida M., Pulcini G., (1990), “Point estimation of future failure times of a repairable system”, Reliability Engineering and System Safety, 28, 23-34.

Cai K., Hu D., Bai C., Hu H., Jing T., (2006), "Does software reliability growth behavior follow a non-homogeneous Poisson processes", *Information and Software Technology*, 50, 1232-1247.

Castanon D., Karl C. W., (2004), "Stochastic Processes", Boston.

Cifuentes-Amado M. V., Bogota-Cuervo E., (2015), "Non-Homogeneous Poisson Processes to Model Seasonal Events: Application to the Health Diseases", *International Journal of Statistics in Medical Research*, 4, 337-346.

Cox D. R., Miller H. D., (1965), "The Theory of Stochastic Processes", USA.

Çınlar E., (2013), "Introduction of Stochastic Processes", USA.

Decreusefond L., Savy N., (2003), "Girsanov Theorem For Filtered Poisson Processes", *Ecole Nationale Supérieure Des Telecommunication*, 46, 1-11.

Demir H., (2021), "Olasılık ve İstatistiğe Giriş", Beşinci Baskı, Ankara.

Deshpande J. V., Mukhopadhyay M., Naik-Nimbalkar U. V., (1999), "Testing of two sample proportional intensity assumption non homogeneous Poisson processes", *Journal of Statistical Planning and Inference*, 81, 237-251.

Dincer N. G., Demir S., Yalçın M. O., (2022), "Forecasting COVID19 Reliability of the Countries by Using Non-Homogeneous Poisson Process Models", *New Generation Computing*, 40, 1143-1164.

Dong M., Kowalchuk G. A., Liu H., Xiong W., Deng X., Zhang Na., Li R., Shen Q., Dini-Andreote F., (2021), "Microbial Community Assembly in Soil Aggregates: A Dynamic Interplay of Stochastic and Deterministic Processes", *Journal of Applied Soil Ecology*, 163, 1-5.

Engelhardt M., Bain L. J., (1986), "On the mean time between failures for repairable system", "IEEE Transactions on Reliability, 35(4), 419-422.

Engelhardt M., Bain L. J., (1978), "Prediction intervals for the Weibull process", Technometrics, 20(2), 167-169.

Faraci G., Pennisi A. R., (1982), "Experimental Dead-Time Distortions of Poisson Processes", Nuclear Instruments and Methods, 212, 307-310.

Fierro R., Tapia A., (2011), "Testing Homogeneity for Poisson Processes", Colombian Journal of Statistic, 34(3), 421-432.

Garrido J., Lu Y., (2002), "On Double Periodic Non-Homogeneous Poisson Processes", Business Economics Series, 16, 2-43.

Ghahramani S., (2016), "Fundamentals of Probability with Stochastic Processes", Third Edition, USA.

Grabski F., (2019), "Nonhomogeneous Poisson Process and Compound Poisson Processes in the Modelling of Random Processes Related to Road Accidents", Journal of KONES Powertrain and Transport, 26(1), 39-46.

Grabski F., (2018), "Nonhomogeneous compound Poisson process application to modeling of random processes related to accidents in the Baltic Sea waters and ports", Journal of Polish Safety and Reliability Association, 9(3), 21-30.

Grandell J., (1976), "Doubly Stochastic Poisson Processes", USA.

Grandell J., (1997), "Mixed Poisson Processes", First Edition, Sweden.

Guida M., Calabria R., Pulcini G., (1989) "Bayes Inference for a Non-Homogeneous Poisson Process with Power Intensity Law", IEE Transactions on Reliability, 38(5), 603-609.

Halim S. Z., Quddus N., Pasman H., (2021), "Time-trend analysis of offshore fire incidents using nonhomogeneous Poisson process through Bayesian inference", *Process Safety and Environmental Protection*, 147, 421-429.

Hartler G., (1989), "The nonhomogeneous Poisson processes – a model for the reliability of complex repairable system", *Microelectronics and Reliability*", 29(3), 381-386.

Hogg Robert V. and Craig Allen T., (1995), *Introduction to Mathematical Statistics*. Prentice-Hall, Inc.

Hulting F. L., Robinson J. A., (1994), "The reliability of a series system of repairable subsystem: A Bayesian approach", *Naval Research Logistics*, 41, 483-506.

Ito K., (2015), "Poisson Point Processes and Their Application to Markov Processes", First Edition, Japan.

Jones P. W., Smith P., (2018), "Stochastic Processes An Introduction", Third Edition, USA.

Kingman J. F. C., (1993), "Poisson Processes", First Edition, USA.

Krivtsov V. V., (2008), "Practical extensions to NHPP application in repairable system reliability analysis", *Reliability Engineering and System Safety*, 92, 560-562.

Kumar A., Nane E., Vellaisamy P., (2011), "Time-Changed Poisson Processes", *Statistic & Probability Letters*, 81, 1899-1910.

Lee L., (1980), "Comparing rates of several independent Weibull processes", *Technometrics*, 22(3), 427-430.

Medhi J., (2002), "Stochastic Processes", Second Edition, New Delhi.

Mikosch T., (2006), "Non-Life Insurance Mathematics", Second Edition, Germany.

Montgomery D. C., Runger G. C., (2011), “Applied Statistics and Probability for Engineers”, Fifth Edition, USA.

Muralidharan K., Kumar D., Naik S. R., (2014), “A non-homogeneous Poisson processes through Pathway model”, Journal of Indian Statistical Association, 52(2), 247-266.

Najim K., Ikonen E., Daoud A., (2004), “Stochastic Processes Estimation, Optimization & Analysis”, First Edition, USA.

Nelson R., (1995), “Probability, Stochastic Processes, and Queueing Theory”, First Edition, USA.

Ofosu J. B., Hesse C. A., Otchere F., (2014), “Applied Stochastic Processes”, EPP Books Services, Accra.

Özel Kadılar G., (2020), “Stokastik Süreçler ve R Uygulamaları”, Birinci Baskı, Ankara.

Pellerey F., Shaked M., Zinn J., (2000), “Nonhomogeneous Poisson Processes and Logconcavity”, Probability in the Engineering and Informational Sciences, 14, 353-373.

Pinsky M. A., Karlin S., (2011), “An Introduction to Stochastic Modelling”, Fourth Edition, USA.

Rigdon S. E., Basu A. P., (1989), “The power law processes a model for the reliability of repairable system”, Journal of Quality Technology, 21(4), 251-260.

Roussas George G., (1997) A course in Mathematical Statistics. Academic Press, Second Edition, USA.

Serfozo F. R., (1985), "Partitions of Point Processes: Multivariate Poisson Approximations", *Stochastic Processes and Their Applications*, 20, 281-294.

Skorokhod A. V., (2005), "Basic Principles and Applications of Probability Theory", Five Edition, Russia.

Srivastava N. K., Mondal S., (2016), "Development of Predictive Maintenance Model for N-Component Repairable System Using NHPP Models and System Availability Concept", *Global Business Review*, 17(1), 105-115.

Stirzaker D., (2005), "Stochastic Processes & Models", First Edition, USA.

Sumiati I., Rahmani U., Supian S., Subiyanto S., (2019), "Application of the Nonhomogeneous Poisson Processes for Counting Earthquakes", *World Scientific News*, 127 (3), 163-176.

Taddy M. A., Kattos A., (2011), "Mixture Modeling for Marked Poisson Processes", *DERGİ ADI*, 7(2), 335-362.

Tüzgıray E., (1991), "Durağan Stokastik Süreçler: Bir Yaklaşım Teorik Otokorelasyon Matrislerle Hesabı", Doktora Tezi, İstanbul Üniversitesi.

Yiğiter A., (2006), "Homojen Poisson Sürecinde Değişme Noktasına İlişkin İstatistiksel Çıkarımlar", Doktora Tezi, Hacettepe Üniversitesi.

Zhang Q., Ma Q., Liu M., Zhong K., Xu B., Wu L., (2020), "Research on the software reliability quantitative evaluation of nuclear power plant digital control system based on non-homogeneous Poisson process model", *Annals of Nuclear Energy*, 144, 1-7.

Zhao M., Xie M., (1996), "On Maximum Likelihood Estimation for a General Non-Homogeneous Poisson Processes", *Scandinavian Journal of Statistics*, 23(4), 597-607.

ÖZGEÇMİŞ

Fatma Nur Gül 2013 yılında başladığı İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünü 2018 yılında başarıyla tamamlayarak 2021 yılında yüksek lisans eğitimine Gebze Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında başladı. Yüksek lisans eğitimi devam ederken 2023 yılında başladığı Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Matematik Bölümü Uygulamalı Matematik Anabilim Dalında Araştırma Görevlisi olarak çalışma hayatına devam etmektedir.



EKLER

Ek 1: Veri Ulaşım Linki

<https://earthquake.usgs.gov/earthquakes/search/>

