

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



**BAZI LİNEER OLMAYAN KİSMİ TÜREVLİ DENKLEMLERİN
OPTİK, SOLİTON ÇÖZÜMLERİ VE KARARLILIK ANALİZİ**

Harun BİÇER

Doktora Tezi

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Uygulamalı Matematik Bilim Dalı

TEMMUZ 2023

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

**BAZI LİNEER OLMAYAN KİSMİ TÜREVLİ DENKLEMLERİN
OPTİK, SOLİTON ÇÖZÜMLERİ VE KARARLILIK ANALİZİ**

Tez Yazarı
Harun BİÇER

Danışman
Prof. Dr. Mustafa İNÇ

İkinci Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Abdullahi YUSUF

TEMMUZ 2023
ELAZIĞ

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Başlığı:	Bazı Lineer Olmayan Kısmi Türevli Denklemlerin Optik, Soliton Çözümleri ve Kararlılık Analizi
Yazarı:	Harun BİÇER
İlk Teslim Tarihi:	16.05.2023
Savunma Tarihi:	06.07.2023

TEZ ONAYI

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına göre hazırlanan bu tez aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından değerlendirilmiş ve akademik dinleyicilere açık yapılan savunma sonucunda OYBİRLİĞİ ile kabul edilmiştir.

Danışman:	Prof. Dr. Mustafa İNÇ Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	İmza Onayladım
Başkan:	Prof. Dr. Ali YEŞİL Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	Onayladım
Üye:	Prof. Dr. Mirsajjad HASHEMIMOTLAGH BONAB Biruni Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi	Onayladım
Üye:	Doç. Dr. Ebru CAVLAK ASLAN Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	Onayladım
Üye:	Dr. Öğr. Üyesi Tukur Abdulkadir SULAIMAN Biruni Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi	Onayladım

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunun/...../20..... tarihli toplantısında tescillenmiştir.

İmza
Prof. Dr. Burhan ERGEN
Enstitü Müdürü

BEYAN

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım “Bazı Lineer Olmayan Kısmi Türevli Denklemlerin Optik, Soliton Çözümleri ve Kararlılık Analizi” Başlıklı Doktora Tezimin içindeki bütün bilgilerin doğru olduğunu, bilgilerin üretilmesi ve sunulmasında bilimsel etik kurallarına uygun davrandığımı, kullandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi, maddi ve manevi desteği olan tüm kurum/kuruluş ve kişileri belirttiğimi, burada sunduğum veri ve bilgileri unvan almak amacıyla daha önce hiçbir şekilde kullanmadığımı beyan ederim.

06.07.2023

Harun BİÇER



ÖNSÖZ

Soliter dalgalarla ilgili gözlem yapan ilk kişi 1834 yılında John Scott Russelly olarak bilinmektedir. Orijinal şeklini korurken yavaşça hareket eden büyük bir su çıkıntısı görmüştür. Ayrıca, bu "suyun çıkıntısı" gözlemini "büyük öteleme dalgası" olarak adlandırmıştır. Russell'ın soliter dalgaları incelemesinin ardındaki motivasyon esas olarak bu gözlemden gelmiştir. Soliter dalgaların hızını su yüzeyinin üzerindeki maksimum genlik, sonlu derinlik ve yerçekimi ile ilişkilendiren bir ifade türetmiştir. Soliter dalgalar, büyük mesafelerde asimptotik olarak sıfıra kaybolan lokalize hareketli dalgalardır. Solitonlar, diğer solitonlarla etkileşim sırasında kimliklerini koruyan özel bir tür soliter dalgadır. Solitonlar kavramı, çok sayıda araştırmacının dikkatini çekmiş olup tüm dünyada bu konuda büyük araştırmalar yapılmaktadır. KdV denkleminin önemli bir uygulaması, örneğin sıg su yüzeyinin yüksekliği veya dağınık bir ortamda plazma dalgalarının yayılması gibi önemli miktarda fiziksel model geliştirilmesine yol açmış olmasıdır. Solitonlar ayrıca, de Broglie tarafından 1927'de geliştirilen "Çift çözüm teorisi" veya "Lineer olmayan dalga mekaniği" olarak bilinen de Broglie'nin teorisi aracılığıyla bir temel oluşturdukları için kuantum mekaniğinde de uygulamalar bulunmaktadır.

Lie grup analizi; 19. yüzyılın başlarında, diferansiyel denklemlerin integrasyonunun özel metotlarını birleştiren ve genişleten Norveçli matematikçi Sophus Lie tarafından geliştirilmiştir. Lie simetri grubu, herhangi bir çözümü başka bir çözüme dönüştüren dönüşümler grubu olarak ifade edilebilir. Lie'nin geliştirdiği bu yöntemin diferansiyel denklemlere uygulamaları yarım yüzyıla yakın hareketsiz kalmıştır. Bunun en büyük nedenlerinden biri benzerlik dönüşümlerini el ile hesaplamamanın çok karmaşık ve zahmetli olduğu için, elde etmenin oldukça güç olmasındandır. Bununla birlikte, Reduce, Maple, Mathematica gibi bilgisayar yazılımların ortaya çıkması ile iş yükünün büyük oranda basitleştirdiğinden dolayı yöntemin popülerliğini arttırmıştır.

Nucci indirgeme yöntemi ilk olarak 2000 yılında Nucci tarafından diferansiyel denklemlerin lokal olmayan simetrilerini bulmak için kullanılmıştır. Bu yöntem daha sonra temelde değişken değişikliklere dayanarak adi diferansiyel denklemlerin bazı yeni tam çözümlerini ve bunlara karşılık gelen first integralleri bulmak için kullanılmıştır. Literatürde az bulunan bir yöntemdir.

Tez konusu belirlenmesi ve yürütülmesi aşamasında, her türlü yardımı ve desteği esirgemeyen, bilgi ve hoş görüşünden yararlandığım saygıdeğer danışman hocam Prof. Dr. Mustafa İNÇ'e çok teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Tezin hazırlanmasında bilgilerinden yararlandığım Prof. Dr. Mirsajjad HASHEMIMOTLAGH BONAB'a, Dr. Öğr. Üyesi Abdullahi YUSUF'a ve Dr. Selahattin GÜLŞEN'e teşekkür ederim.

Ayrıca bugüne kadar verdikleri destek için sevgili annem, babam, çocuklarım ve hayat arkadaşım değerli eşim Emel BİÇER'e (Gamzelim'e) teşekkür ederim.

Harun BİÇER
ELAZIĞ, 2023

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ.....	iv
İÇİNDEKİLER	v
ÖZET	vii
ABSTRACT	viii
ŞEKİLLER LİSTESİ	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR	xi
1. Giriş	1
2. TEMEL KAVRAMLAR VE YÖNTEM ANALİZİ	4
2.1. Simetri Üzerine.....	4
2.2. Lie Grup Dönüşümleri.....	4
2.2.1. Sonsuz Küçük Dönüşümler	5
2.2.2. Sonsuz Küçük Üreteçler.....	6
2.2.3. İnvaryant Fonksiyonlar	6
2.2.4. Nokta Dönüşümleri ve Uzantılar.....	6
2.2.5. Genişletilmiş Sonsuz Küçük Dönüşümler	7
2.2.6. Bir Kısmi Diferansiyel Denklem Sisteminin İnvaryansı	8
2.2.7. Belirleyici Denklemler	10
2.2.8. İnvaryant Çözümler	11
2.2.9. İnvaryant Form Metodu	12
2.2.10. Çok Parametrelili Lie Grup Dönüşümü.....	13
2.2.11. Alt Grup ve Alt Cebirlerin Sınıflandırılması	15
2.3. Klasik Lie Metodu	15
2.4. Simetri İndirgeme Metodu.....	16
2.5. Nucci İndirgeme Metodu.....	18
3. ÇİFT KIRILMALI FİBERDE MODULASYON KARARSIZLIĞI VE TAM OPTİK SOLİTONLAR ÜZERİNE ELİPTİK AÇI ETKİSİ	20
3.1. Modifiye Edilmiş Yeni Sardar Alt-Denklem Metodunun İncelenmesi	25
3.2. Çift Kırılmada YSADM'nin CLOSD'ye Uygulanması	28
3.3. Modülasyon Kararsızlık Analizi	36
3.3.1. Normal Dağılım Etkisi: $\beta_2 > 0$	36
3.3.2. Anormal Dağılım Etkisi: $\beta_2 < 0$	40
4. PERİYODİK GENEL DEGASPERİS-PROCESİ DENKLEMİNİN YENİ ÇÖZÜMLERİ VE FIRST İNTEGRALLERİ	42
4.1. Lie Simetrikleri ve İndirgemeler	44
4.2. Nucci'nin İndirgeme Yöntemi	46
4.2.1. I. Durum: Camassa-Holm Denklemi.....	49
4.2.2. II. Durum: Degasperis-Procesi Denklemi	50
4.2.3. III. Durum: b-family Denklemi	50
4.2.4. IV. Durum: Fornberg-Whitham Denklemi.....	51
4.3. (4.10) Denkleminin Özel Çözümleri	51

5. PERİYODİK HUNTER-SAXTON DENKLEMİNİN LİE SİMETRİ VE NUCCI YÖNTEMİ İLE İNDİRGENEREK FİRST İNTEGRALLERİNİN VE YENİ ÇÖZÜMLERİNİN BULUNMASI.....	54
5.1. Lie Simetri Metodu.....	55
5.2. Periyodik Hunter-Saxton Denkleminin Bazı Çözümleri	55
5.2.1. $\alpha(t) = e^t$ olması durumu:	55
5.2.2. $\alpha(t) = t^2$ olması durumu:	60
5.2.3. $\alpha(t) = \sinh(t)$ olması durumu:	63
5.2.4. $\alpha(t) = \ln(t)$ olması durumu:	66
6. SONUÇLAR.....	70
KAYNAKLAR.....	72
ÖZGEÇMİŞ	



ÖZET

Bazı Lineer Olmayan Kısmi Türevli Denklemlerin Optik, Soliton Çözümleri ve Kararlılık Analizi

Harun BİÇER

Doktora Tezi

FIRAT ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Temmuz 2023, Sayfa: xi + 79

Bu tez altı bölüm olarak hazırlanmıştır. İlk bölümde, konuya giriş yapılmış ve konunun tarihsel gelişimi hakkında teknik bilgiler detaylı olarak verilmiştir. İkinci bölümde, sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanım, teorem ve yöntem analizleri verilmiştir. Üçüncü bölümde, lineer olmayan optik fiberlerdeki darbe yayılımını tanımlayan coupled lineer olmayan denklemlerin tam hareket eden dalga soliton çözümleri, yeni alt denklem yöntemiyle incelenmiştir. Buradan bright, W-biçim bright, kink solitonların, trigonometrik ve tekil fonksiyon çözümleri elde edilmiş ve bu çözümlerin davranışları şekillerle betimlenmiştir. Ayrıca, eliptiklik açısı ve birleştirilmiş denklemin katsayısının etkisi altında Modülasyon kararsızlığı gain spektrumlarının davranışı incelenmiştir. Dördüncü bölümde, periyodik genel Degasperis-Procesi denkleminin bazı çözümleri araştırılmıştır. Denklem, Lie simetri yaklaşımı ile lineer olmayan adi diferansiyel denkleme indirgendikten sonra literatürde az rastlanan Nucci indirgeme metodu ile denklemin first integralleri ve tam çözümleri bulunmuştur. Öte yandan indirgenmiş adi diferansiyel denklemlerin bazı çözümleri özel durumlar için sinüs genişletme yöntemiyle türetilmiştir. Beşinci bölümde, Lie simetri ve Nucci yöntemiyle indirgeme yapılarak periyodik Hunter-Saxton denkleminin yeni çözümleri araştırılmıştır. Buradan iki avantajlı analitik çözüm yöntemi altında sunulan modelin her iki indirgemesi için de çeşitli tam çözümlere ulaşıldığı sonucuna varılmıştır. Elde edilen çözümlerin fiziksel özelliklerinin daha iyi anlaşılması için bazı grafikleri verilmiştir. Son bölümde ise elde edilen sonuçlar değerlendirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Lie simetri analizi, Solitonlar, Modülasyon Kararsızlığı, Nucci İndirgeme Yöntemi, First İntegral

ABSTRACT

Optical, Soliton Solutions and Stability Analysis of Some Nonlinear Partial Differential Equations

Harun BİÇER

Ph.D. Thesis

FIRAT UNIVERSITY
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

July 2023, Pages: xi + 79

This thesis is set as six chapters. In first chapter, the topic is introduced and technical information about its historical development are told in detail. In second chapter, some fundamental definition, theorem and method analysis, which will be used next chapters are given. In the third chapter, the full moving wave soliton solutions of the coupled nonlinear equations describing the pulse propagation in nonlinear optical fibers are examined with the new sub-equation method, and as a result, trigonometric and singular function solutions of bright, W-shaped bright, kink solitons are obtained and behaviors of these results is illustrated by figures. Moreover, behavior of Modulation instability gain spectra under the influence of ellipticity angle and coefficient of coupled equation is investigated. In the fourth chapter, some solutions of the periodic general Degasperis-Procesi equation are investigated. After reducing the equation to nonlinear ordinary differential equation with Lie symmetry approach, first integrals and exact solutions were found with Nucci reduction method, which is rare in the literature. On the other hand, some solutions of reduced ordinary differential equations are derived by sine expansion method for special cases. In the fifth chapter, new solutions of the periodic Hunter-Saxton equation are investigated by reducing with Lie symmetry and Nucci method. Here it is concluded that we arrive at various exact solutions for both reductions of the model presented under the two advantageous analytical solution method. In order to better understand the physical properties of the solutions obtained, some graphs are given. In the last section, the obtained results are evaluated.

Keywords: Lie Symmetry Analysis, Solitons, Modulation Instability, Nucci Reduction Method, First Integral

ŞEKİLLER LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 3.1. Bright soliton.....	22
Şekil 3.2. Dark soliton.....	22
Şekil 3.3. Kink soliton.....	23
Şekil 3.4. Breather soliton	23
Şekil 3.5. $[E_0 = 0.5, H_1 = 10.001, E_1 = -0.005, a = 0.085, b = -2.5, p = q = 1]$ için soliton (μ) hızının etkisiyle (3.33) denkleminin bright soliton grafik gösterimi.....	31
Şekil 3.6. $[E_0 = -0.5, H_1 = -10.001, E_1 = 0.55, a = 0.085, b = -2.5, p = q = 1]$ için (C_3) [$\mu = -0.11$] (üç boyutlu ve iki boyutlu) ve (C_4) [$\mu = -0.21$] (üç boyutlu ve karşılık gelen kontur grafiği) soliton (μ) hızının etkisiyle (3.33) denkleminin W-biçimli bright soliton grafik gösterimi	31
Şekil 3.7. $[E_0 = -0.5, H_1 = -10.001, E_1 = 0.55, a = 0.085, b = -2.5, p = q = 1]$ için soliton hızının negatif değerinin ($\mu = -0.21$) etkisiyle (3.33) denkleminin W-biçimli bright soliton grafik gösterimi	32
Şekil 3.8. $[E_0 = -0.5, H_1 = -10.001, E_1 = 0.55, a = 0.085, b = -2.5, p = q = 1]$ için soliton hızının ($\mu = 0.21$) pozitif etkisiyle (3.33) denkleminin W-biçimli bright soliton grafik gösterimi....	33
Şekil 3.9. $[H_0 = -4.15, H_1 = 20.55, b = 150.5, p = q = 1]$ için (3.41) denkleminin Alt-ADD yöntem parametresinin değişimi ile (C_5) [$a = -0.95$] dark optik soliton ve soliton hızının değişimi ile Kink benzeri soliton (C_6) [$\mu = -0.21$] grafik gösterimi.....	33
Şekil 3.10. $[\beta_2 = 20.10ps^2/Km, \gamma = 0.1/(KW.m), Q = 0.5/m, P_0 = 245 kW]$ de eliptik açısının (θ) etkisiyle modülasyon frekansına karşı normal dağılım etkisi spektrumundaki gain gösterimi 37	
Şekil 3.11. $[\beta_2 = 1ps^2/Km, Q = 0.75/m, P_0 = 500 kW]$ için (D_5) de $[\gamma = 0.1/(KW.m)]$, (D_6) da $[\gamma = 0.01/(KW.m)]$, (D_7) de $[\gamma = 0.001/(KW.m)]$, (D_8) de $[\gamma = 0.0001/(KW.m)]$ de lineer olmayan terimin etkisi altında eliptik açısına karşı normal dağılım etkisinde gain spektrumunun kontur çizimi ve grafik gösterimi	38
Şekil 3.12. $[\theta = 45^\circ, \gamma = 0.1/(KW.m), P_0 = 500 kW]$ için (H_1) de $Q = 0.75m$, (H_2) de $Q = 0.95m$, (H_3) de $Q = 1.5m$, (H_4) de $Q = 1.75m$ de coupled denklemin katsayısının (Q) etkisi ile normal dağılım altında MK gain spektrumlarının gösterimi.....	38
Şekil 3.13. $[\theta = 0^\circ, Q = 0.5/m, P_0 = 650 kW]$ için (N_1) [$\gamma = -0.1/(KW.m)$], (N_2) [$\gamma = -0.01/(KW.m)$], (N_3) [$\gamma = -0.001/(KW.m)$], (N_4) [$\gamma = -0.0001/(KW.m)$] lineer olmayan katsayısının (γ) etkisi ile lineer çift kırılmada normal dağılım altında MK gain spektrumlarının gösterimi	39
Şekil 3.14. $[\theta = 90^\circ, Q = -1.5/m]$ için toplam güç olayının (P_0) etkisiyle dairesel çift kırılmada normal dağılım altında MK gain spektrumlarının gösterimi	39
Şekil 3.15. $[\gamma = 0.1/(KW.m), Q = -1.5/m, P_0 = 20.50 kW]$ için (R_1) [$\theta = 90^\circ$], (R_2) [$\theta = 45^\circ$], (R_3) [$\theta = 30^\circ$] ve (R_4) [$\theta = 0^\circ$] de çift kırılmada eliptik açının etkisiyle anormal dağılım etkisinde MK gain spektrumlarının gösterimi.....	40

Şekil 3.16. $[\gamma = 0.01/(KW.m), \theta = 45^\circ, P_0 = 10.50 kW]$ için (J_1) $[Q = -10.10/m]$, (J_2) $[Q = -20.10/m]$, (J_3) $[Q = -30.10/m]$ ve (J_4) $[Q = -40.10/m]$ coupled denklemin katsayısının (Q) etkisi ile anormal dağılım etkisinde MK gain spektrumlarının gösterimi	41
Şekil 5.1. $v = 1, D_0 = \frac{1}{3}$ ve $K_2 = 2$ için (a): (5.12) denkleminin üç boyutlu grafiği; (b): (5.23) denkleminin üç boyutlu grafiği.....	59
Şekil 5.2. $v = 1, D_0 = \frac{1}{3}$ ve $K_2 = 2$ için (a): (5.12) denkleminin kontur grafiği; (b): (5.23) denkleminin kontur grafiği	59
Şekil 5.3. $v = 1, D_0 = \frac{1}{3}$ ve $K_2 = 2$ için (a): (5.12) denkleminin yoğunluk grafiği; (b): (5.23) denkleminin yoğunluk grafiği.....	60
Şekil 5.4. $v = 1, C_0 = \frac{1}{5}$ ve $M_2 = \frac{1}{5}$ için (a): (5.32) denkleminin üç boyutlu grafiği; (b): (5.36) denkleminin üç boyutlu grafiği.....	62
Şekil 5.5. $v = 1, C_0 = \frac{1}{5}$ ve $M_2 = \frac{1}{5}$ için (a): (5.32) denkleminin kontur grafiği; (b): (5.36) denkleminin kontur grafiği	62
Şekil 5.6. $v = 1, C_0 = \frac{1}{5}$ ve $M_2 = \frac{1}{5}$ için (a): (5.32) denkleminin yoğunluk grafiği; (b): (5.36) denkleminin yoğunluk grafiği.....	63
Şekil 5.7. $v = \frac{1}{2}, H_0 = 0$ ve $N_2 = 1$ için (a): (5.43) denkleminin üç boyutlu grafiği; (b): (5.47) denkleminin üç boyutlu grafiği.....	65
Şekil 5.8. $v = \frac{1}{2}, H_0 = 0$ ve $N_2 = 1$ için (a): (5.43) denkleminin kontur grafiği; (b): (5.47) denkleminin kontur grafiği	65
Şekil 5.9. $v = \frac{1}{2}, H_0 = 0$ ve $N_2 = 1$ için (a): (5.43) denkleminin yoğunluk grafiği; (b): (5.47) denkleminin yoğunluk grafiği.....	66
Şekil 5.10. $v = 1, T_0 = 2$ ve $Z_2 = 2$ için (a): (5.54) denkleminin üç boyutlu grafiği; (b): (5.58) denkleminin üç boyutlu grafiği.....	68
Şekil 5.11. $v = 1, T_0 = 2$ ve $Z_2 = 2$ için (a): (5.54) denkleminin kontur grafiği; (b): (5.58) denkleminin kontur grafiği	68
Şekil 5.12. $v = 1, T_0 = 2$ ve $Z_2 = 2$ için (a): (5.54) denkleminin yoğunluk grafiği; (b): (5.58) denkleminin yoğunluk grafiği.....	69

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

ξ	: Sonsuz Küçük
η	: Sonsuz Küçük
Γ	: Sonsuz Küçük Üreteci
D_i	: i 'e Bağlı Toplam Türev Operatörü
$P_r^{(n)}$	: n -ıncı uzanım operatörü
$\mathcal{R}_1$	: First İntegral
$\mathcal{R}_2$	: First İntegral
X	: Vektör Alanı

Kısaltmalar

ADD	: Adi Diferansiyel Denklem
Alt-ADD	: Alt Adi Diferansiyel Denklem
CHD	: Camassa-Holm Denklemi
CLOSD	: Coupled Lineer Olmayan Schrodinger Denklemi
DPD	: Degasperis-Procesi Denklemi
FWD	: Fornberg-Whitham Denklemi
KDD	: Kısmi Diferansiyel Denklem
KdV	: Korteweg-de Vries Denklemi
KFM	: Kendinden Fazlı Modülasyon
LKDD	: Lineer Kısmi Diferansiyel Denklem
LOED	: Lineer Olmayan Evrim Denklemleri
LOKDD	: Lineer Olmayan Kısmi Diferansiyel Denklem
MK	: Modülasyon Kararsızlığı
YSADM	: Yeni Sardar Alt Denklem Metodu

1. GİRİŞ

Bu tezde, sistemin bağımsız ve bağımlı değişkenlerin uzayında hareket eden, daha çok “Lie Grupları” olarak bilinen, “sürekli grup dönüşümleri” teorisine dayanan, invaryant (değişmez) grup çözümleri metodu ele alınacaktır. Metot; adını, 19. yüzyılın başlarında, diferansiyel denklemlerin integrasyonunun özel metotlarını birleştiren ve genişleten Norveçli matematikçi Sophus Lie’den almıştır. Lie’nin adi diferansiyel denklemler (ADD) için olan çalışması; integrasyon çarpanları, ayrılabilir ve homojen denklemler, mertebe indirgeme, bilinmeyen katsayılar ve parametrelerin değişimi metotları, Euler denklemi ve sabit katsayılı homojen denklemler gibi geniş bir alana yayılan konuları sistematik ve tamamlayıcı biçimde incelemiştir. Bir diferansiyel denklem sistemi için Lie simetri grubu, herhangi bir çözümü başka bir çözüme dönüştüren dönüşümler grubu demektir. Öte yandan, lineer kısmî diferansiyel denklemler (LKDD) için de Lie, sürekli grup dönüşümü altında invaryans oluşturmuştur ki; bu da bizi dönüşüm cinsinden çözümlerin süperpozisyonuna yönlendirir. Kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin tümü, daha az bağımsız değişken içeren indirgenmiş bir diferansiyel denklem sistemi çözülerek bulunabilir. Dolayısıyla, özellikle, bir parametrelili simetri grubu altında değişmeyen iki bağımsız değişkenli kısmi bir diferansiyel denklemin çözümleri, bir "indirgenmiş" adi diferansiyel denklem çözülerek bulunabilir.

1922’de Cartan [1], diferansiyel denklemlerin geometrik teorisini ve Lie sürekli grup dönüşümünü geliştirmiştir. Tarihsel olarak Lie ve Noether [2] tarafından geliştirilen Lie gruplarının diferansiyel denklemlere uygulamaları, Birkoff’un 1950’deki “Lie grup uygulamalarının diferansiyel denklemlerin işletilmeyen uygulamalarına dikkat” adlı çalışmasına kadar yarım yüzyıla yakın hareketsiz kalmıştır [3]. Ovsianniko vd. [4], Lie sürekli grup dönüşümleri metodunu çeşitli alanlardaki problemlere başarıyla uygulamıştır. Bu çalışmaları, Bluman ve Cole’un araştırmaları takip etmiştir [5, 6]. O zamandan itibaren bu teori, fiziksel sistemlere uygulandığı gibi, gelişimi alanındaki araştırmaların genişletilmesine de olanak sağlamıştır [7, 8].

Backlund dönüşümü [9], Painleve analizi [10], Ters saçılım dönüşümleri [11] gibi grup teorisi uygulamalarına dayanmayan alternatif yöntemler de vardır.

Adi ya da kısmi diferansiyel denklem sistemleri için açık çözümlerin üretimi açısından grup teorik yöntemler çok fazla potansiyel taşımasına rağmen oldukça karmaşık ve zahmetli cebirsel hesaplamalar içerdiği için çok popüler olamamıştır. Bununla birlikte, Reduce, Maple, Mathematica, Macsyma gibi yazılımların ortaya çıkması ile iş yükü büyük ölçüde basitleşmiştir.

Lie grup teorisi metodunun geliştirilmesine katkı sağlayan çalışmaların bir kısmı: Grundy [12, 13], Bhutani ve Sharma [14], Allasia ve Nucci [15], Tajiri [16], Lakshmann ve Kalliappan [17], Torrisi ve Valenti [18], Nishitani [19], Bhutani ve Mittal [20], Bhutani vd. [21], Hill [22],

Nucci ve Clarkson [23], Gagnon [24], Clarkson ve Mansfield [25], Clarkson ve Hood [26], Gagnon ve Winternitz [27] olarak verilebilir. Son zamanlarda Bruzon vd. [28], Cheh vd. [29], Rosati ve Nucci [30], Anco ve Liu [31], Ibragimov vd. [32] ve Gandarias vd. [33] bu konu ile ilgili olarak yapılan yeni çalışmalar arasında yer almıştır.

Fiber optik iletişimin ortaya çıkışından bu yana, yerelleştirilmiş dalgalar özel ilgi görmüştür. Bu konularla ilgili birçok çalışma ortaya çıkmıştır [34-40]. Bu çalışmalarda, varlık koşullarının yanı sıra çeşitli tam çözümler araştırılmıştır. Teorik olarak telekomünikasyon sisteminde kullanıldığı ispatlanan bright ve dark solitonlar, kararlılıkları, sağlamlıkları ve etkileşimden sonra hızlarını ve şekillerini koruma yetenekleriyle bilinen tek dalgalardır [34, 36, 40-42].

Tam çözümleri elde etmek, birden çok matematiksel yöntemin ortaya çıkması sayesinde kolaylaşmıştır. Bu yöntemler arasında, yardımcı denklem, sinüs-kosinüs, sinh-genişlemesi, (G'/G)-genişlemesi, Kudryashov, yeni alt-ADD, homojen denge, yeni genişletilmiş cebirsel, rasyonel hiperbolik fonksiyon, Hirota bilineer metod ve Darboux dönüşümü gibi yöntemler vardır [43-54].

Optik fiberlerde dalga yayılımının, lineer olmama ve dağılma terimleri arasındaki mücadeleyle karşı karşıya kaldığı ve kararlılık-kararsızlık problemlerini içerdiği iyi bilinmektedir. Bunun için lineer olmayan optik fiberlerde bir modülasyon kararsızlık (MK) analizi elzem hale gelmiştir. Modülasyon kararsızlığı modern teknolojide birçok uygulamaya sahiptir. MK'nın optikteki önemi kapsamlı bir şekilde ele alınmıştır. Benzer şekilde biyoloji hidrodinamik ve plazmalar gibi çeşitli alanlardaki önemi de araştırılmıştır. MK, lineer olmayan optik ortamda kısa darbe dizisi üretimi ve optik parametrik amplifikasyon ile doğal bağlantısı nedeniyle kapsamlı çalışmaların konusu olmuştur.

MK, dağılım ve lineer olmayan terimler arasındaki karşılaştırma içindeki yayılma üzerinde genlik bozulmalarının üstel olarak büyüdüğü temel bir işlemdir [55-61]. Çoğu zaman, MK çalışması daha çok çift kırılmanın varlığıyla ve eliptiklik açısının etkisine bağlılıkla ilgilidir [57, 59, 61]. Bu çalışmalar sıfır çift kırılma, dairesel çift kırılma ve lineer çift kırılma olarak adlandırılan üç yöne odaklanmıştır.

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. 2. bölümde Lie simetri yöntemi, Nucci indirgeme yöntemi ile ilgili temel özellikler verilmiştir. Ayrıca çalışma içerisinde kullanılan bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir. 3. bölümde eliptiklik açısı ve coupled denkleminin katsayısının etkisi ile çift kırılmalı optik fiberlerde darbe yayılımını tanımlayan lineer olmayan coupled denklemlerin tam optik solitonları araştırılmıştır. Yeni Sardar alt-denkleme metodundan (YSADM) yararlanılarak W-biçim bright, dark optik solitonlar, trigonometrik fonksiyon ve tekil fonksiyon çözümleri gibi çeşitli optik solitonlar elde edilmiştir. Ayrıca eliptiklik açısının ve coupled denklemin katsayısının modülasyon kararsızlığı üzerindeki etkileri incelenmiştir. 4. bölümde Lie

simetri yaklaşıımı, Nucci indirgeme yöntemi ve sinüs genişletme yöntemi kullanılarak periyodik genel Degasperis-Proces denkleminin (DPD) bazı çözümleri elde edilmiştir. 5. bölümde periyodik Hunter-Saxton denkleminin yeni çözümlerini elde etmek için simetri analizi ve Nucci indirgeme yönteminden yararlanılmıştır. 6. bölümde elde edilen sonuçlar değerlendirilmiştir.



2. TEMEL KAVRAMLAR VE YÖNTEM ANALİZİ

Bu bölümde daha çok “Lie Grupları” olarak bilinen, Lie simetri analizi için gerekli olan temel tanım, teorem ve matematiksel yapılar hakkında bilgi verilecektir. Daha sonra birçok evrim tipi diferansiyel denklemlerde kullanılan Nucci indirgeme yönteminin uygulama süreci açıklanacaktır.

2.1. Simetri Üzerine

Bir cismi değişmez (invariant) bırakan bir dönüşüm varsa bu dönüşüm Simetri olarak tanımlanabilir [62]. Örneğin köşeleri D, E ve F olan bir eşkenar üçgeni düşünelim. Bu üçgeni eşit iki parçaya bölerek üçgenin köşelerinden geçen eksenlere göre yansımaları alırsak üçgen değişmez kalacaktır. Benzer şekilde bu üçgeni herhangi bir açısı etrafında $\frac{2\pi}{3}$ veya $\frac{4\pi}{3}$ kadar döndürdüğümüzde üçgen yine değişmez kalacaktır. Bir diğer örnek bir çemberin β açısı kadar döndürülmesi olarak verilebilir. Yarıçapı r olan bir çemberin çevresi üzerinde herhangi iki nokta (x, y) ve $(\bar{x}, \bar{y})$ olsun. r yarıçap, α referans açısı ve döndürme sonunda oluşan açı $\alpha + \beta$ olmak üzere

$$\begin{aligned} x &= r \cos \alpha, & \bar{x} &= r \cos(\alpha + \beta) \\ y &= r \sin \alpha, & \bar{y} &= r \sin(\alpha + \beta) \end{aligned} \quad (2.1)$$

denklemleri yazılır ve (2.1) denkleminde α açısı yok edilirse

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x \cos \beta - y \sin \beta \\ \bar{y} &= y \cos \beta + x \sin \beta \end{aligned} \quad (2.2)$$

elde edilir. Eğer $x^2 + y^2 = r^2$ iken $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = r^2$ olduğunu gösterirsek çemberin de değişmez kaldığını göstermiş oluruz. O halde

$$\begin{aligned} \bar{x}^2 + \bar{y}^2 &= (x \cos \beta - y \sin \beta)^2 + (y \cos \beta + x \sin \beta)^2 \\ &= x^2 \cos^2 \beta - 2xy \sin \beta \cos \beta + y^2 \sin^2 \beta \\ &\quad + x^2 \sin^2 \beta + 2xy \sin \beta \cos \beta + y^2 \cos^2 \beta \\ &= x^2 + y^2 \\ &= r^2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

olduğundan çember değişmez kalmıştır.

2.2. Lie Grup Dönüşümleri

Tanım 2.2.1. Bir G grubu, elemanlar arasında aşağıdaki şartları sağlayan ψ birleşim kuralına sahip elemanların bir kümesidir:

i) Kapalılık Özelliği. $\forall m, n \in G$ için $\psi(m, n) \in G$.

ii) Birleşme Özelliği. $\forall m, n, k \in G$ için

$$\psi(m, \psi(n, k)) = \psi(\psi(m, n), k).$$

iii) Birim eleman. $\forall m \in G$ için,

$$\psi(m, e) = \psi(e, m) = m$$

şartını sağlayan yalnız bir $e \in G$ etkisiz elemanı vardır.

iv) Ters eleman. $\forall m \in G$ için,

$$\psi(m, m^{-1}) = \psi(m^{-1}, m) = e$$

şartını sağlayan yalnız bir $m^{-1} \in G$ ters elemanı vardır.

Tanım 2.2.2. $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $D \subset \mathbb{R}^n$ bölgesinde tanımlı olsun. D 'de tanımlı her bir $\bar{x}$ ve $\varepsilon \in T \subset \mathbb{R}$ parametresi için $\varepsilon, \delta \in T$ parametrelerinin birleşim kuralı $\psi(\varepsilon, \delta)$ ile verilen $\bar{x}^* = \bar{X}(\bar{x}; \varepsilon)$ dönüşümler kümesi, aşağıdaki şartları sağlıyorsa D üzerinde *1-parametrelili grup dönüşümleri* olarak adlandırılır.

i) $\forall \varepsilon \in T$ için, dönüşümler D üzerinde birebirdir [$\bar{x}^* \in D$].

ii) T, ψ birleşim kuralı ile bir G grubu oluşturur.

iii) D 'deki her bir $\bar{x}$ için, $\varepsilon = \varepsilon_0, e$ birim elemana karşılık geldiğinde $\bar{x}^* = \bar{x}$ olur.

Yani; $\bar{X}(\bar{x}; \varepsilon_0) = \bar{x}$ olur.

iv) $\bar{x}^* = \bar{X}(\bar{x}; \varepsilon)$, $\bar{x}^{**} = \bar{X}(\bar{x}^*; \delta)$ ise $\bar{x}^{**} = \bar{X}(\bar{x}; \psi(\varepsilon, \delta))$ olur.

Tanım 2.2.3. 1-parametrelili grup dönüşümleri, 2.2.2 tanımında verilen (i)-(iv) durumlarına ek olarak aşağıdaki ifadeleri de sağlıyorsa *1-parametrelili Lie grup dönüşümleri* tanımlar:

v) ε , sürekli bir parametredir, yani $T, \mathbb{R}$ 'de bir aralıktır. Genellemeyi bozmadan, $\varepsilon = 0, e$ birim elemanına karşılık gelir.

vi) $\bar{X}, \bar{x} \in D$ 'ye göre sonsuz türevlenebilirdir ve $\varepsilon \in T$ 'nin bir analitik bir fonksiyonudur.

vii) $\varepsilon, \delta \in T$ olmak üzere; $\psi(\varepsilon, \delta)$, ε ve δ 'nın bir analitik bir fonksiyonudur.

2.2.1. Sonsuz Küçük Dönüşümler

$\varepsilon = 0$ birim elemanlı ve ψ birleşim kuralına sahip

$$\bar{x}^* = \bar{X}(\bar{x}; \varepsilon) \tag{2.4}$$

1-parametrelili (ε) Lie grup dönüşümleri düşünelim. (2.4), $\varepsilon = 0$ civarında açılırsa, $\varepsilon = 0$ 'ın bazı komşuluğunda;

$$\begin{aligned}\bar{x}^* &= \bar{x} + \varepsilon \left(\frac{\partial \bar{X}(\bar{x}; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \right) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{X}(\bar{x}; \varepsilon)}{\partial \varepsilon^2} \Big|_{\varepsilon=0} \right) + \dots \\ &= \bar{x} + \varepsilon \left(\frac{\partial \bar{X}(\bar{x}; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \right) + O(\varepsilon^2)\end{aligned}$$

elde edilir. $\bar{\xi}(\bar{x}) = \frac{\partial \bar{X}(\bar{x}; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0}$ olsun. Bu durumda $\bar{x} + \varepsilon \bar{\xi}(\bar{x})$ dönüşümü, (2.4) Lie grup dönüşümlerinin sonsuz küçük dönüşümü olarak adlandırılır. $\bar{\xi}(\bar{x})$ 'in bileşenleri (2.4)'ün sonsuz küçükleri olarak adlandırılır.

2.2.2. Sonsuz Küçük Üreteçler

(2.4) ile verilen 1- parametrelili Lie grup dönüşümlerinin sonsuz küçük üreteci;

$$X = X(\bar{x}) = \bar{\xi}(\bar{x}) \cdot \nabla = \sum_{i=1}^n \xi_i(\bar{x}) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

şeklinde verilen operatördür. Burada ∇ ;

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

gradient operatörüdür. Türevlenebilir bir $F(\bar{x}) = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonu için;

$$XF(\bar{x}) = \bar{\xi}(\bar{x}) \cdot \nabla F(\bar{x}) = \sum \xi_i(\bar{x}) \frac{\partial F(\bar{x})}{\partial x_i}$$

eşitliği sağlanır.

2.2.3. İnvaryant Fonksiyonlar

Sonsuz türevlenebilir bir $F(\bar{x})$ fonksiyonunun, (2.4) Lie grup dönüşümlerinin invaryant fonksiyonu olabilmesi için gerek ve yeter koşul $F(\bar{x}^*) = F(\bar{x})$ olmasıdır.

Eğer, $F(\bar{x})$; (2.4)'ün bir invaryant fonksiyonu ise $F(\bar{x})$ 'ye, (2.4)'ün invaryantı denir ve $F(\bar{x})$, (2.4) dönüşümü altında invaryant olarak adlandırılır.

Teorem 2.2.1. $F(\bar{x})$ fonksiyonunun, (2.4) Lie grup dönüşümleri altında invaryant olabilmesi için gerek ve yeter koşul, $XF(\bar{x}) \equiv 0$ olmasıdır [63].

2.2.4. Nokta Dönüşümleri ve Uzantılar

Bir 1-parametrelili (ε) Lie grup nokta dönüşümleri,

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ u &= (u^1, u^2, \dots, u^m) \end{aligned}$$

$n + m$ değişkenli uzayda hareket eden,

$$\begin{aligned} x^* &= X(x, u; \varepsilon) \\ u^* &= U(x, u; \varepsilon) \end{aligned} \quad (2.5)$$

formundaki dönüşümlerin bir grubudur. Burada; x , n bağımsız değişkenli, u ise m bağımlı değişkenlidir. T , diferansiyel denklemlerin sistemi olarak kabul edilen 1- parametrelili Lie grup dönüşümlerini tanımlasın. (2.5) Lie grup nokta dönüşümü T 'nin herhangi $u = \Theta(x)$ çözümünü, T 'nin $u = \psi(x; \varepsilon)$ 1-parametrelili çözümlerinin ailesine eşleştirir.

∂u , u 'nun x 'e göre tüm birinci mertebeden kısmi türevlerine karşılık gelen nm koordinatlar kümesini gösterebilir. Yani,

$$\partial u = \left(\frac{\partial u^1}{\partial x_1}, \frac{\partial u^1}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u^1}{\partial x_n}, \frac{\partial u^2}{\partial x_1}, \frac{\partial u^2}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u^2}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial u^m}{\partial x_1}, \frac{\partial u^m}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u^m}{\partial x_n} \right) \quad (2.6)$$

olsun. Genel olarak, $k \geq 1$ ve $\mu = 1, 2, \dots, m$, $i_j = 1, 2, \dots, n$, ve $j = 1, 2, \dots, k$ için, $\partial^k u$ koordinatlar kümesi olmak üzere

$$u_{i_1 i_2 \dots i_k}^\mu = \frac{\partial^k u^\mu}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}}$$

ifadesi u 'nun x 'e göre bütün k . mertebeden kısmi türevlerine karşılık gelen koordinatlarının kümesini gösterebilir.

2.2.5. Genişletilmiş Sonsuz Küçük Dönüşümler

Diferansiyel denklem sistemlerinin çalışılmasında, m bağımlı değişkene bağlı $u = (u^1, u^2, \dots, u^m)$ ve n bağımsız değişkene bağlı $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ için $m \geq 2$ iken $u = u(x)$, durumu ortaya çıkar. Bu (x, u) uzayından $(x, u, \partial u, \partial^2 u, \dots, \partial^k u)$ uzayına genişletilmiş dönüşümlerin düşünülmesine yol açar. Burada $\partial^k u$, x 'e göre u 'nun k 'inci mertebeden bütün kısmi türevlerinin bileşenlerini gösterir. $(x, u, \partial u, \partial^2 u, \dots, \partial^k u)$ -uzayında $k \geq 2$, $l = 1, 2, \dots, k$ için

$$\eta_i^{(1)\mu} = D_i \eta^\mu - (D_i \xi_j) u_j^\mu \quad (2.7)$$

ve

$$\eta_{i_1 i_2 \dots i_k}^{(k)\mu} = D_{i_k} \eta_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}}^{(k-1)\mu} - (D_{i_k} \xi_j) u_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}}^\mu, \quad i_l = 1, 2, \dots, n \quad (2.8)$$

ile verilen $\eta_{i_1 i_2 \dots i_k}^{(k)\mu}$ genişletilmiş sonsuz küçükleri ile

$$\begin{aligned} x_i^* &= X_i(x, u; \varepsilon) = x_i + \varepsilon \xi_i(x, u) + O(\varepsilon^2) \\ (u^\mu)^* &= U^\mu(x, u; \varepsilon) = u^\mu + \varepsilon \eta^\mu(x, u) + O(\varepsilon^2) \\ (u_i^\mu)^* &= U_i^\mu(x, u, \partial u; \varepsilon) = u_i^\mu + \varepsilon \eta_i^{(1)\mu}(x, u, \partial u) + O(\varepsilon^2) \\ &\vdots \\ (u_{i_1 i_2 \dots i_k}^\mu)^* &= U_{i_1 i_2 \dots i_k}^\mu(x, u, \partial u, \dots, \partial^k u; \varepsilon) \\ &= u_{i_1 i_2 \dots i_k}^\mu + \varepsilon \eta_{i_1 i_2 \dots i_k}^{(k)\mu}(x, u, \partial u, \dots, \partial^k u) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (2.9)$$

k 'ıncı genişletilmiş dönüşümü düşünelim. D_i toplam türev operatörüdür ve

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + u_i^\mu \frac{\partial}{\partial u^\mu} + u_{ij}^\mu \frac{\partial}{\partial u_j^\mu} + \dots + u_{i i_1 i_2 \dots i_n}^\mu \frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2 \dots i_n}^\mu} + \dots \quad (2.10)$$

ile verilir. Burada k 'ıncı genişletilmiş sonsuz küçük üretici

$$\begin{aligned} X^{(k)} &= \xi_i(x, u) \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta^\mu(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\mu} + \eta_i^{(1)\mu}(x, u, \partial u) \frac{\partial}{\partial u_i^\mu} + \dots \\ &\quad + \eta_{i_1 i_2 \dots i_k}^{(k)\mu}(x, u, \partial u, \dots, \partial^k u) \frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2 \dots i_n}^\mu}, \quad k \geq 1, \end{aligned} \quad (2.11)$$

şeklinde verilir.

2.2.6. Bir Kısmi Diferansiyel Denklem Sisteminin İnvaryansı

n bağımsız değişkenli $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve m bağımlı değişkenli $u = (u^1, u^2, \dots, u^m)$ için;

$$F^\mu(x, u, \partial u, \partial^2 u, \dots, \partial^k u) = 0, \mu = 1, 2, \dots, N \quad (2.12)$$

şeklinde verilen N KDD sistemini düşünelim.

Tanım 2.2.4. 1-parametrelili

$$x^* = X(x, u; \varepsilon) \quad (2.13)$$

$$u^* = U(x, u; \varepsilon)$$

Lie grup nokta dönüşümleri, (2.12) KDD sistemini invaryant bırakır. Yani (2.13) Lie grup nokta dönüşümünün (2.12) tarafından bir nokta simetrisi olarak kabul edilmesi için gerek ve yeter şart, (2.7) ile tanımlanan k . genişlemesinin (2.12)'de tanımlanan $(x, u, \partial u, \partial^2 u, \dots, \partial^k u)$ uzayındaki yüzeyleri invaryant bırakmasıdır.

Teorem 2.2.2. (Bir Kısmi Diferansiyel Denklemler Sisteminin İnvaryansı İçin Sonsuz Küçük Kriteri)

$$X = \xi_i(x, u) \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta^v(x, u) \frac{\partial}{\partial u^v} \quad (2.14)$$

(2.13) Lie grup nokta dönüşümlerinin sonsuz küçük üretici olsun.

$$X^{(k)} = \xi_i(x, u) \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta^v(x, u) \frac{\partial}{\partial u^v} + \eta_i^{(1)v}(x, u, \partial u) \frac{\partial}{\partial u_i^v} + \dots \\ + \eta_{i_1 i_2 \dots i_k}^{(k)v}(x, u, \partial u, \dots, \partial^k u) \frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2 \dots i_k}^v} \quad (2.15)$$

(2.14)'ün k 'ıncı genişlemeli sonsuz küçük üretici olsun. Burada $\eta_i^{(1)v}$ (2.7)'de ve $\eta_{i_1 i_2 \dots i_j}^{(j)\mu}$ (2.8)'de verilmiştir. $v = 1, 2, \dots, m$, $i_j = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, k$ için $\xi(x, u) = (\xi_1(x, u), \xi_2(x, u), \dots, \xi_n(x, u))$, $\eta(x, u) = (\eta^1(x, u), \eta^2(x, u), \dots, \eta^m(x, u))$ şeklindedir. Bu durumda (2.13) 1-parametrelili Lie grup nokta dönüşümlerinin, (2.12) KDD sistemi tarafından kabul edilmesi için gerek ve yeter şart her bir $\sigma = 1, 2, \dots, N$ için u , (2.12)'yi sağlarken

$$X^{(k)} F^\sigma(x, u, \partial u, \partial^2 u, \dots, \partial^k u) = 0 \quad (2.16)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. (Lie değişmezlik koşulu)

Örnek: $y'' = 0$ denkleminin sonsuz küçüklerini bulalım. Verilen denklem

$$\Delta = y'' = 0,$$

şeklinde yazılırsa, (2.11)'den

$$X^{(n)} = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} + \eta^x \frac{\partial}{\partial y'} + \eta^{xx} \frac{\partial}{\partial y''} + \dots + \eta^{nx} \frac{\partial}{\partial y^{(n)}} + \dots,$$

elde edilir. Yukarıda yazılan ifade dikkate alınarak Lie değişmezlik koşulu ile

$$X^{(2)} \Delta|_{\Delta=0} = X^{(2)}(y'')|_{y''=0} = \eta^{xx}|_{y''=0} = 0$$

bulunur. (2.7) ve (2.8) denklemlerinden elde edilebilen

$$\begin{aligned}\eta^{nx} &= D_x(\eta^{(n-1)x}) - y^{(n)}D_x(\xi); \\ \eta^x &= D_x(\eta) - y'D_x(\xi), \\ \eta^{xx} &= D_x(\eta^x) - y''D_x(\xi)\end{aligned}$$

sonsuz küçük dönüşümleri bir önceki ifadede yerine bırakılır ve terimler açılırsa

$$\eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y' + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})(y')^2 - \xi_{yy}(y')^3 + (\eta_y - 2\xi_x)y'' - 3\xi_y y' y'' = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemde $y'' = 0$ alınır

$$\eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y' + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})(y')^2 - \xi_{yy}(y')^3 = 0$$

denklemi elde edilir. Yukarıdaki denklemde y' , $(y')^2$ ve $(y')^3$ ifadelerinin katsayıları sıfıra eşitlenirse

$$\eta_{xx} = 0, \quad 2\eta_{xy} - \xi_{xx} = 0, \quad \eta_{yy} - 2\xi_{xy} = 0, \quad \xi_{yy} = 0,$$

belirleyici denklem sistemi elde edilir. Buradan bilinmeyenler ξ ve η 'dir. Son denklem sisteminin çözümünden

$$\begin{aligned}\xi &= (c_1x + c_2)y + p_1x^2 + d_1x + d_2, \\ \eta &= c_1y^2 + (p_1x + p_2)y + q_1x + q_2\end{aligned}$$

sonsuz küçükleri elde edilir. Burada $c_1, c_2, d_1, d_2, p_1, p_2, q_1, q_2$ değerleri keyfi sabitlerdir.

2.2.7. Belirleyici Denklemler

Bazı $v_\mu = 1, 2, \dots, m$ için u^{v_μ} 'nin özel bazı l_μ mertebeden kısmi türevlerine göre

$$u_{i_1 i_2 \dots i_{k\mu}}^{v_\mu} = f^\mu(x, u, \partial u, \partial^2 u, \dots, \partial^k u) = 0 \quad (2.17)$$

formunda çözülmüş (2.12) KDD sistemini düşünelim. Burada, $f^\mu(x, u, \partial u, \partial^2 u, \dots, \partial^k u)$, her bir $\mu = 1, 2, \dots, N$ için, $u_{i_1 i_2 \dots i_{k\mu}}^{v_\sigma}$, $\sigma = 1, 2, \dots, N$ 'nin herhangi bir bileşenine açık bir şekilde bağlı değildir. Teorem (2.2.2)'den, (2.17) ile verilen denklem sisteminin (2.15) ile verilen (2.18)'ün k . genişlemesi ile

$$X = \xi_i(x, u) \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta^v(x, u) \frac{\partial}{\partial u^v} \quad (2.18)$$

nokta simetrisini kabul etmesi için gerek ve yeter şart

$$u_{i_1 i_2 \dots i_{k\sigma}}^{v\sigma} = f^\sigma(x, u, \partial u, \partial^2 u, \dots, \partial^k u) = 0, \quad \sigma = 1, 2, \dots, N, \quad (2.19)$$

ile

$$\eta_{i_1 i_2 \dots i_k}^{(l_\mu)v_\mu} = \xi_j \frac{\partial f^\mu}{\partial x_j} + \eta^v \frac{\partial f^\mu}{\partial u^v} + \eta_j^{(1)v} \frac{\partial f^\mu}{\partial u_j^v} + \dots + \eta_{j_1 j_2 \dots j_k}^{(k)v} \frac{\partial f^\mu}{\partial u_{j_1 j_2 \dots j_k}^v}, \quad (2.20)$$

$$\mu = 1, 2, \dots, N,$$

olmasıdır. $\eta_{j_1 j_2 \dots j_p}^{(p)v}$ 'nin $\xi(x, u)$, $\eta(x, u)$ ve bunların p . mertebeden türevlerindeki bileşenlerde lineer homojen katsayılar ile verilen $\partial u, \partial^2 u, \dots, \partial^p u$ 'nin bileşenleri cinsinden bir polinomdur. Bu yüzden (2.20)'deki ξ ve η lineer olarak görülür. (2.19-20) simetri belirleyici denklemler sistemi ξ ve η için bir lineer homojen denklem sistemine yol açar. Öncelikle, $\sigma = 1, 2, \dots, N$ için $u_{i_1 i_2 \dots i_{k\sigma}}^{v\sigma}$ 'nin bileşenleri ve onun diferansiyel sonuçları (2.19)' dan ve benzer şekilde (2.20)'den gelen diferansiyel sonuçlar elenir. Sonuç olarak; x, u bileşenleri ve (2.20) simetri belirleyici denklemlerinin oluşan sisteminde görünen $\partial u, \partial^2 u, \dots, \partial^k u$ 'nun kalan bileşenleri kendi başlarına bağımsız değişkenlerdir. Yani keyfi değerler alırlar. (2.20) için elde edilen sonuçlar, bu bağımsız değişkenlerin herhangi bir değeri için sağlanacağından, bunlardan biri verilen (2.12) KDD tarafından kabul edilen sonsuz küçük X üreticileri için belirleyici denklemler kümesi oluşturan, ξ ve η cinsinden bir lineer homojen KDD sistemi elde eder. Özel olarak, eğer her $f^\mu(x, u, \partial u, \partial^2 u, \dots, \partial^k u)$, $\mu = 1, 2, \dots, N$, $\partial u, \partial^2 u, \dots, \partial^k u$ bileşenleri cinsinden bir polinom ise, bu durumda (2.20) simetri belirleme denklemleri sistemi, $\partial u, \partial^2 u, \dots, \partial^k u$ 'nun bağımsız bileşenleri cinsinden polinom denklemlerini verir. Sonuç olarak; bu polinom denklemlerinin katsayıları ayrı ayrı yok edilmelidir. Bu durum, ξ ve η için lineer belirleyici denklemler kümesini verir.

2.2.8. İnvaryant Çözümler

(2.14) sonsuz küçük üreticili 1-parametrelili Lie grup nokta dönüşümlerini kabul eden bir KDD sistemini düşünelim. $\xi(x, u) \neq 0$ olsun.

Tanım 2.2.5. $u^v = \theta^v(x)$, $v = 1, 2, \dots, m$ bileşenleri ile $u = \theta(x)$ 'in (2.14) sonsuz küçük üretici ile kabul edilen nokta simetrisinden oluşan (2.12) KDD sisteminin bir invaryant çözümü olması için gerek ve yeter şart

- i) Her $v = 1, 2, \dots, m$ için $u^v = \theta^v(x)$, (2.14)'ün bir invaryant yüzeyidir.
- ii) $u = \theta(x)$, (2.12)'yi sağlar.

Buradan; $u = \theta(x)$ 'in (2.13) Lie grup nokta dönüşümü altında invaryansı olmasından ortaya çıkan (2.12) KDD sisteminin bir invaryantı olması için gerek ve yeter şart; $u = \theta(x)$ 'in

i) $v = 1, 2, \dots, m$ için $u = \theta(x)$ iken $X(u^v - \theta^v(x)) = 0$, yani;

$$\xi_i(x, \theta(x)) \frac{\partial \theta(x)}{\partial x_i} = \eta^v(x, \theta(x)), v = 1, 2, \dots, m \quad (2.21)$$

ii) $\mu = 1, 2, \dots, N$ için $u = \theta(x)$ iken $F^\mu(x, u, \partial u, \partial^2 u, \dots, \partial^k u) = 0$, yani

$$F^\mu(x, \theta(x), \partial \theta(x), \partial^2 \theta(x), \dots, \partial^k \theta(x)) = 0, \mu = 1, 2, \dots, N, \quad (2.22)$$

koşullarını sağlamasıdır. Burada $\partial^j \theta(x)$; $j = 1, 2, \dots, k$ için $v = 1, 2, \dots, n$, $\partial^j \theta^v(x) / \partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_n}$ ifadesini belirtmektedir. (2.21) denklemleri (2.14) nokta simetrisi altında invaryant olmasından kaynaklanan (2.12) KDD sisteminin invaryant çözümleri için invaryant yüzey koşullarıdır.

İnvaryant çözümler aşağıda verilecek olan invaryant form metodu ile belirlenebilir.

2.2.9. İnvaryant Form Metodu

Burada,

$$\frac{dx_1}{\xi_1(x, u)} = \frac{dx_2}{\xi_2(x, u)} = \dots = \frac{dx_n}{\xi_n(x, u)} = \frac{du^1}{\eta^1(x, u)} = \frac{du^2}{\eta^2(x, u)} = \dots = \frac{du^m}{\eta^m(x, u)} \quad (2.23)$$

ile verilen $u = \theta(x)$ için ilgili karakteristik denklemlerin açık bir şekilde çözülmesiyle (2.21) invaryant yüzey koşulları bulunacaktır.

Eğer $y_1(x, u), y_2(x, u), \dots, y_{n-1}(x, u), v^1(x, u), v^2(x, u), \dots, v^m(x, u)$ 'lar $\partial(v^1, v^2, \dots, v^m) / \partial(u^1, u^2, \dots, u^m) \neq 0$ jakobiye ile verilen, $(n + m - 1)$ -tane birinci mertebeden (2.23) ADD sisteminin çözülmesiyle ortaya çıkan $(n + m - 1)$ -tane fonksiyonel bağımsız sabitler ise bu durumda (2.21) ADD sisteminin $u = \theta(x)$ genel çözümü kapalı olarak

$$v^v(x, u) = \Phi^v(y_1(x, u), y_2(x, u), \dots, y_{n-1}(x, u)) \quad (2.24)$$

invaryant formunda verilir. Burada $\Phi^v, v = 1, 2, \dots, m$ için $y_1(x, u), y_2(x, u), \dots, y_{n-1}(x, u)$ 'nın bir keyfi diferansiyellenebilir fonksiyonudur.

$y_1(x, u), y_2(x, u), \dots, y_{n-1}(x, u), v^1(x, u), v^2(x, u), \dots, v^m(x, u)$ 'lar (2.14)'ün $(n + m - 1)$ -tane fonksiyonel bağımsız grup invaryantlarıdır. Yani, (2.13) Lie grup nokta dönüşümlerinin $(n + m - 1)$ -tane kanonik koordinatlarıdır. $y_n(x, u), Xy_n = 1$ koşulunu sağlayan $(n + m)$. kanonik koordinatları olsun. Eğer, (2.12) KDD sistemi, $y_1, y_2, \dots, y_n$ bağımsız değişkenler ve

$v^1, v^2, \dots, v^m$ bağımlı değişkenler cinsinden bir KDD sistemine dönüştürülürse; dönüştürülmüş KDD sistemi

$$\begin{aligned} y^*_i &= y_i, i = 1, 2, \dots, n-1, \\ y^*_n &= y_n + \varepsilon, \\ v^{*v} &= v^v, v = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (2.25)$$

1-parametrelı Lie grup dönüşümünü verir. O halde, y_n değişkeni dönüştürülmüş ADD sisteminde açıkça görülmez ve bu yüzden dönüştürülmüş KDD sistemi, (2.24) formundaki çözümlere sahiptir. Sonuç olarak (2.12) KDD sistemi, (2.24) invaryant formu ile açık olarak verilen invaryant çözümlere sahiptir. Bu tür çözümler, $n-1$ bağımsız değişkenli $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ ve m bağımlı değişkenli $v^1, v^2, \dots, v^m$ için bir indirgenmiş diferansiyel denklem sistemi çözümlenerek bulunur. İndirgenmiş diferansiyel denklem sistemi; (2.24) invaryant formunun (2.12) KDD’de yerine konulmasıyla bulunur. Bu yerine koyma işleminin tekil bir diferansiyel denkleme sebep olmadığı düşünülür. $\frac{\partial \xi}{\partial u} \equiv 0$ ise $y_i = y_i(x), i = 1, 2, \dots, n-1$ olur. $n = 2$ için indirgenmiş diferansiyel denklem sistemi bir ADD sistemidir.

2.2.10. Çok Parametrelı Lie Grup Dönüşümü

$\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r)$ parametreleri ile verilen

$$\bar{x}^* = \bar{X}(\bar{x}; \bar{\varepsilon}) \quad (2.26)$$

r -parametrelı bir Lie grup nokta dönüşümünü düşünelim. $\bar{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r)$ olmak üzere; $\varphi(\bar{\varepsilon}, \bar{\delta}) = (\phi_1(\bar{\varepsilon}, \bar{\delta}), \phi_2(\bar{\varepsilon}, \bar{\delta}), \dots, \phi_r(\bar{\varepsilon}, \bar{\delta}))$ ile gösterilen parametrelerin birleşim kuralını düşünelim. Burada $\varphi(\bar{\varepsilon}, \bar{\delta}), \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_r = 0$ eşitliğine karşılık gelen $\bar{\varepsilon} = \bar{0}$ ile grup aksiyomlarını sağlar ve tanımlı olduğu bölgede analitiktir. $\Xi(\bar{x})$; elemanları

$$\xi_{\alpha j}(\bar{x}) = \left. \frac{\partial \bar{x}^*_j}{\partial \varepsilon_\alpha} \right|_{\varepsilon=0} = \left. \frac{\partial X_j(\bar{x}; \bar{\varepsilon})}{\partial \varepsilon_\alpha} \right|_{\varepsilon=0}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, r, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.27)$$

ile verilen $r \times n$ boyutlarında sonsuz küçük matris olsun.

Tanım 2.2.6. ε_α parametresine karşılık gelen (2.26) r -parametrelı Lie grup dönüşümünün sonsuz küçük üretici X_α ,

$$X_\alpha = \sum_{j=1}^n \xi_{\alpha j}(\bar{x}) \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, r \quad (2.28)$$

şeklinde verilir.

Tanım 2.2.7. (2.27) ve (2.28)'de tanımlanan $X_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, r$ sonsuz küçük üretici ile verilen (2.26) r –parametrelili bir Lie grup dönüşümü için,

$$\eta_j(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n \left(\xi_{\alpha i}(\bar{x}) \frac{\partial \xi_{\beta j}(\bar{x})}{\partial x_i} - \xi_{\beta i}(\bar{x}) \frac{\partial \xi_{\alpha j}(\bar{x})}{\partial x_i} \right) \quad (2.29)$$

olmak üzere X_α ve X_β 'nin ayracı (Lie ayracı)

$$\begin{aligned} [X_\alpha, X_\beta] &= X_\alpha X_\beta - X_\beta X_\alpha \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left[\left(\xi_{\alpha j}(\bar{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \left(\xi_{\beta j}(\bar{x}) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) - \left(\xi_{\beta i}(\bar{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \left(\xi_{\alpha j}(\bar{x}) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \right] \\ &= \sum_{j=1}^n \eta_j(\bar{x}) \frac{\partial}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (2.30)$$

şeklinde tanımlanan birinci mertebeden bir operatördür. Buradan

$$[X_\alpha, X_\beta] = -[X_\beta, X_\alpha] \quad (2.31)$$

olduğu kolaylıkla görülür.

Teorem 2.2.3. r –parametrelili bir Lie grup dönüşümünün herhangi iki sonsuz küçük üreticinin ayracı da bir sonsuz küçük üreticidir. Özel olarak $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \dots, r$ için;

$$[X_\alpha, X_\beta] = \sum_{\gamma=1}^r C_{\alpha\beta}^\gamma X_\gamma \quad (2.32)$$

şeklindedir. Burada $C_{\alpha\beta}^\gamma$ katsayıları, yapı sabitleri olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.8. (2.32) denklemleri, (2.28) sonsuz küçük üreticilerine sahip, (2.26) r –parametrelili Lie grup dönüşümünün değişme bağıntıları olarak adlandırılır. $X_\alpha, X_\beta, X_\gamma$ şeklindeki herhangi üç sonsuz küçük üretici için

$$[X_\alpha, [X_\beta, X_\gamma]] + [X_\beta, [X_\gamma, X_\alpha]] + [X_\gamma, [X_\alpha, X_\beta]] = 0 \quad (2.33)$$

Jakobi özdeşliğinin sağlandığı gösterilebilir.

Tanım 2.2.9. Bir $\mathcal{L}$ Lie cebiri; bilineer ayraç işlemi ile (2.31), (2.33) ve (2.32) özelliklerini sağlayan, $\mathfrak{R}$ veya $\mathcal{C}$ üzerinde tanımlı bir vektör uzayıdır. Özel olarak; (2.1.20) r –parametrelili bir Lie grup dönüşümünün sonsuz küçük $\{X_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, r$ üreticilerinin kümesi, $\mathfrak{R}$ üzerinde r –boyutlu bir Lie cebiri oluşturur.

Önerme: $G, \mathcal{L}$ Lie cebiriyle verilen bir Lie grup olsun. Her $v \in \mathcal{L}$ vektörü için, $w \in \mathcal{L}$ 'deki adjoint vektörü $ad v$;

$$ad v|_w = [w, v] = -[v, w] \quad (2.34)$$

dir [7].

Bir Lie grubunun adjoint gösterimi AdG ,

$$w(\varepsilon) = Ad(exp(\varepsilon v))w_0,$$

çözümü ile verilen

$$\frac{dw}{d\varepsilon} = ad v|_w, w(0) = w_0$$

lineer ADD sisteminin integrali alınarak veya daha basitçe

$$Ad(exp(\varepsilon v))w_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} (ad v)^n(w_0) = w_0 - \varepsilon[v, w_0] + \frac{\varepsilon^2}{2} [v, [v, w_0]] - \dots \quad (2.35)$$

Lie serileri toplanarak yeniden düzenlenebilir [7].

2.2.11. Alt Grup ve Alt Cebirlerin Sınıflandırılması

G bir Lie grup olsun. s -parametrelili alt grupların bir optimal sistemi, bir alt grubun listedeki herhangi bir alt gruba tam olarak eşlenik olma özelliği taşıyan, denk olmayan eşlenik s -parametrelili alt gruplarının bir listesidir. Benzer şekilde; s -parametrelili alt cebirlerin bir listesi; $\mathcal{L}$ 'nin her s -parametrelili alt cebirinin, bazı adjoint elemanları altındaki listesinin yalnız bir elemanına denk olması durumunda bir optimal sistem oluşturur.

Alt grupların bir optimal sistemini bulma problemi, alt cebirlerin bir optimal sistemini bulma işlemi ile eşdeğerdir. Her bir-boyutlu alt cebir $\mathcal{L}$ 'de 0'dan farklı bir vektör olarak tanımlandığından bir-boyutlu alt cebirler için bu sınıflandırma problemi; adjoint temsilinin yörüngelerini sınıflandırma problemi ile aynıdır [7].

2.3. Klasik Lie Metodu

Klasik yöntem temel olarak, KDD sisteminin (2.16) invaryans koşulu altında belirleyici denklemler yardımıyla, KDD'nin simetri indirgemelerinin bulunmasından oluşur. Daha spesifik olarak, (2.12) diferansiyel denklem sistemi, (2.13) 1-parametrelili Lie grup dönüşümü altında bir invaryansa maruz bırakıldığında, grup sonsuz küçükleri için over-determined bir lineer denklem

sistemine ulaşılır. Bu sonsuz küçük dönüşümler, sistemin indirgemelerini elde etmemize yardımcı olur.

Metodun aşamaları aşağıdaki gibidir:

m bağımlı değişkenli $u = (u^1, u^2, \dots, u^m)$ ve n bağımsız değişkenli $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ için

$$F^\mu(x, u, \partial u, \partial^2 u, \dots, \partial^k u) = 0, \mu = 1, 2, \dots, N \quad (2.36)$$

ile verilen bir N kısmi diferansiyel denklem sistemini düşünelim.

- 1) 1-parametrelili (2.13) Lie grup nokta dönüşümleri, (2.36) KDD sistemini invaryant bıraksın.
- 2) (2.15)'de verilen $X^{(k)}$ operatörünü (2.36) sisteminin her bir denklemine uygulayalım ve $\mu, v = 1, 2, \dots, N$ için

$$X^{(k)} F^\mu \Big|_{F^v=0} = 0, \quad (2.37)$$

gerektirmesi sağlansın. (2.37) şartı, $X^{(k)}$ nin başlangıçta verilen (2.36) sisteminin çözüm kümesi üzerinde yok olması anlamına gelir. Kesin bir şekilde bu şart $u^*(x^*)$ tek olduğunda $u(x)$ 'in (2.36)'nın çözümü olduğunu garanti eder.

- 3) (2.2.6) bölümünde belirtilen süreç izlenerek (2.36) KDD sistemi tarafından oluşturulan sonsuz küçük X üretici için bir belirleyici denklem kümesi oluşturan ξ ve η cinsinden bir lineer KDD sistemi elde edilir.
- 4) Belirleyici denklemlerin çözümleri, ξ ve η 'nin açık formlarını ortaya çıkarır.
- 5) (2.23)'deki karakteristik denklemler oluşturulur ve u , $n-1$ yeni bağımsız değişkenler cinsinden elde edilir.
- 6) Sistemin indirgenmiş formunu elde etmek için (2.36) sistemi bu yeni koordinatlarla yeniden yazılır.

2.4. Simetri İndirgeme Metodu

Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin (LOKDD) (denklemler veya bir sistem) çözümlerinin bulunması için kullanılan ve grup teorik metotlar literatüründe önemli bir yere sahip olan bu teknik Steinberg'e aittir [64]. Metodun algoritmik gösterimi, kavramları açık ve anlaşılır kılabilir. Ayrıca metot, lineer denklemlerde değişkenlere ayırma yöntemiyle yakın bir ilişki içindedir. Daha önce çeşitli LOKDD'nin tam çözümlerini elde etmek için kullanılmıştır [20, 21, 65, 66].

Bu metot, coupled Korteweg-de Vries (KdV) sistemi, genelleştirilmiş Hirota-Satsuma KdV sistemi ve varyant Boussinesq denklemlerin simetri ve indirgemelerinin incelenmesinde kullanılmıştır. Bu yaklaşımın avantajı, hem grup sonsuz küçüklerini nispeten kolay bir şekilde

sağlaması hem de genellikle klasik Lie metodundan daha genelleştirilmiş simetriler sağlamasıdır [65].

Metodun aşamaları aşağıdaki gibidir:

- Diferansiyel denklemlerin simetrileri bulunur.
- Simetri için kanonik koordinatlar belirlenir ya da diferansiyel denklem için ayrılabilir bir form varsayılır.
- İndirgenmiş problem kanonik koordinatlar cinsinden bulunur.

Bir diferansiyel denklem sisteminin simetri operatörünü belirlemek için aşağıdaki şekilde ilerlemek gerekir:

k bağımlı değişkenli $\bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_k)$ ve $(n+1)$ -tane bağımsız değişkenli $(t, \bar{x}) = (t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ den oluşan, bir k LOKDD sistemini düşünelim. $\bar{u} = \bar{u}(t, \bar{x})$ olmak üzere sistemin $\bar{N} = (N_1, N_2, \dots, N_k)$ lineer olmayan diferansiyel operatör cinsinden

$$\bar{N}(\bar{u}) \equiv \frac{\partial^p \bar{u}}{\partial t^p} - \bar{H}(\bar{u}) = \bar{0} \quad (2.38)$$

şeklinde yazılabildiğini varsayalım. $\bar{u}$ 'nin türevleri, t 'nin $p-1$ türevlerinden fazlasını içermedikçe $\bar{H}$; $t, \bar{x}, \bar{u}$ ve $\bar{u}$ 'nin herhangi bir türevinin uzayı üzerinde tanımlanabilir. $\bar{H}$ lineer olmayabilir. Şimdi (2.38) sistemi için, sonsuz küçük simetriler olarak adlandırılan $\bar{S} = (S_1, S_2, \dots, S_k)$ simetri operatörünü tanımlayalım. Bu simetriler, 1.mertebeden yarı-lineer kısmi diferansiyel operatörlerdir ve $\bar{C} = (C_1, C_2, \dots, C_k)$ olmak üzere;

$$\bar{S} \equiv A(t, \bar{x}, \bar{u}) \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \sum_{i=1}^n B_i(t, \bar{x}, \bar{u}) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} + \bar{C}(t, \bar{x}, \bar{u}) \quad (2.39)$$

formunda olmalıdır. $\bar{N}$ 'nin $\bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_k)$ 'daki $\bar{v} = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ yönündeki $\bar{F} = (F_1, F_2, \dots, F_k)$ Fréchet türevi

$$\bar{F}(\bar{N}, \bar{u}, \bar{v}) = \left. \frac{d}{d\varepsilon} [\bar{N}(\bar{u} + \varepsilon \bar{v})] \right|_{\varepsilon=0} \quad (2.40)$$

şeklinde verilir.

- Metot temelinde $A, B_i, i = 1, 2, \dots, n$ ve $C_j, j = 1, 2, \dots, k$ katsayılarının $\bar{S}$ simetri operatöründe belirlenmesinden oluşur. Bunun için şu adımlar takip edilmelidir:

Öncelikle (2.40) denklemleriyle $\bar{N}(\bar{u}) = (N_1, N_2, \dots, N_k)$ 'nin $\bar{F} = (F_1, F_2, \dots, F_k)$ Fréchet türevi bulunur. Daha sonra $\bar{v} = (v_1, v_2, \dots, v_k)$; $\bar{S} = (S_1, S_2, \dots, S_k)$ 'de,

$$\bar{F}(\bar{N}, \bar{u}, \bar{S}) = \left. \frac{d}{d\varepsilon} [\bar{N}(\bar{u} + \varepsilon \bar{S})] \right|_{\varepsilon=0} \quad (2.41)$$

simetri operatörü yönünde hesaplamak için yerine yazılır. (2.38) sisteminin invaryansı için, $\bar{S}$ simetri operatörü yönündeki (2.38) çözüm kümesinde (2.41) Fréchet türevi yok edilmelidir. Yani;

$$\bar{F}(\bar{N}, \bar{\eta}, \bar{S})|_{\bar{N}=\bar{0}} = \bar{0} \quad (2.42)$$

olmalıdır. Bunun için (2.42)'de $\frac{\partial^p(\bar{u})}{\partial t^p}$ yerine $\bar{H}(\bar{u})$ yazılır. (2.42) denklemleri genişletildiğinde $\bar{u}$ 'nın çeşitli kısmi türevlerinde polinom şeklinde ifadeler bulunur. Bu türev terimlerinin katsayılarının eşitlenmesi ile, $A, B_i, i = 1, 2, \dots, n$ ve $C_j, j = 1, 2, \dots, k$ grup sonsuz küçükleri için belirleyici denklemler olarak adlandırılan bir LKDD kümesi elde edilir. (2.38) sisteminin simetrisi için elde edilen “belirleyici denklemler” çözülür.

b) Elde edilen bu kısmi diferansiyel denklem kümesi, $\bar{S}$ 'nin katsayılarını bulmak için çözüldüğünde, (2.38)'in sonsuz küçük simetrilerinin ilgili Lie cebiri:

$$V \equiv A(t, \bar{x}, \bar{u}) \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^n B_i(t, \bar{x}, \bar{u}) \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^k C_j(t, \bar{x}, \bar{u}) \frac{\partial}{\partial u_j} \quad (2.43)$$

şeklindeki vektör cisimlerinin kümesi olur. Benzer şekilde $\bar{u}^* = (u_1^*, u_2^*, \dots, u_k^*)$ olmak üzere, (2.38)'in 1-parametrelili grup nokta dönüşümü

$$\begin{aligned} t^* &= t + \varepsilon A(t, \bar{x}, \bar{u}) + O(\varepsilon^2) \\ \bar{x}^* &= \bar{x} + \varepsilon \bar{B}(t, \bar{x}, \bar{u}) + O(\varepsilon^2) \\ \bar{u}^* &= \bar{u} - \varepsilon \bar{C}(t, \bar{x}, \bar{u}) + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (2.44)$$

şeklinde olur. (2.43) sonsuz küçük üreteçleri kullanılarak orijinalinden bir eksik bağımsız değişkene sahip bir (2.38) indirgenmiş sistemi elde edilebilir. Bunun için

$$\frac{dt}{A} = \frac{dx_1}{B_1} = \frac{dx_2}{B_2} = \dots = \frac{dx_n}{B_n} = \frac{du_1}{-C_1} = \frac{du_2}{-C_2} = \dots = \frac{du_k}{-C_k} \quad (2.45)$$

karakteristik denklemleri çözülür. Bu denklemlerden, kanonik koordinatlar elde edilir.

c) Problemin indirgenmiş formunu elde etmek için (2.38) sistemi bu yeni koordinatlarla değiştirilir.

2.5. Nucci İndirgeme Metodu

İncelenmekte olan modelin indirgenmiş ADD'i için first integralleri ve tam çözümleri elde etmede kullanılan yöntemlerden biridir. Bu teknik ilk olarak diferansiyel denklemlerin lokal olmayan simetrilerini bulmak için önerilmiştir [67]. Ayrıca birçok evrim tipi diferansiyel denklem de Nucci'nin indirgeme yöntemi ile incelenmiştir. Lie simetri yaklaşımı ile elde edilen

üreteçlerden yararlanılır. Bu üreteçler yardımıyla oluşan üçüncü mertebeden lineer olmayan adi diferansiyel denklemlere Nucci yöntemi şöyle uygulanır:

Elde edilen üçüncü mertebeden lineer olmayan adi diferansiyel denklemlerden $F(\xi), F'(\xi), F''(\xi)$ ve $F'''(\xi)$ bağımlı değişkenlerini içeren herhangi bir denklemi $\mathcal{N}$ ile gösterelim. Nucci yöntemini kullanarak $\mathcal{N}$ denkleminin bazı yeni tam çözümlerini ve bunlara karşılık gelen first integralleri bulmaya çalışalım. Bu yöntem altında

$$\Psi_1(\xi) = F(\xi), \quad \Psi_2(\xi) = F'(\xi), \quad \Psi_3(\xi) = F''(\xi)$$

değişken dönüşümlerini yapalım. Bu durumda;

$$\begin{aligned} \Psi_1' &= \Psi_2 \\ \Psi_2' &= \Psi_3 \\ \Psi_3' &= F'''(\xi) \end{aligned} \tag{2.46}$$

elde edilir. Ψ_1 yeni bir bağımsız değişken olarak seçilirse;

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi_2}{d\Psi_1} &= \frac{\Psi_3}{\Psi_2} \\ \frac{d\Psi_3}{d\Psi_1} \Psi_2 &= \Psi_3' \end{aligned} \tag{2.47}$$

olur. $\mathcal{N}$ denkleminden $F'''(\xi)$ çekilip (2.47)'nin ikinci denkleminde yerine yazılır. Buradan Ψ_3 ve bir first integral bulunur. Bulunan Ψ_3 ifadesi (2.47)'nin birinci denkleminde yerine yazıldığında, Ψ_2 ve bir first integral daha elde edilir. Son olarak bulunan Ψ_2 , (2.46)'nın ilk denkleminde yerine yazılarak Ψ_1 ifadesi elde edilir. $\Psi_1(\xi) = F(\xi)$ olduğundan nihai çözüm elde edilmiş olur. Üçüncü mertebeden bir denklemde iki tane first integral, ikinci mertebeden bir denklemde bir tane first integral bulunabilir.

3. ÇİFT KIRILMALI FİBERDE MODULASYON KARARSIZLIĞI VE TAM OPTİK SOLİTONLAR ÜZERİNE ELİPTİK AÇI ETKİSİ

Solitonlar, yayılma sırasında ve diğer darbelerle etkileşimden sonra kimliklerini koruyan darbe benzeri dalgaları karakterize ederler. Ortamın dağılımının ve lineer olmamasının dengeleyici etkisi, solitonların gelişmesine yol açar. Solitonlar, diğer solitonlarla etkileşim sırasında kimliklerini koruyan soliter dalganın özel bir türüdür. Soliter dalgalar, büyük mesafelerde asimptotik olarak sifıra yaklaşarak yok olan bölgesel hareketli dalgardır.

John Scott Russell, 1834 yılında soliter dalgalarla ilgili gözlem yapan ilk kişiydi [68]. Russell, yavaşça hareket ederken orijinal şeklini koruyan büyük bir su çıkıntısı görmüştür. Bu "su çıkıntısı" gözlemini "büyük öteleme dalgası" olarak adlandırmıştır. Soliter dalgaların incelenmesi Russell'ın bu gözlemine dayanmaktadır. Russell, su yüzeyi üzerindeki maksimum genlik, sonlu derinlik ve yerçekimi ile soliter dalgaların hızıyla ilgili c, g, h ve a sırasıyla tek bir dalganın hızını, yerçekimine bağlı ivmeyi, sonlu derinliği ve dalganın maksimum genliğini göstermek üzere;

$$c^2 = g(h + a)$$

şeklinde bir eşitlik bulmuştur. Önceleri Scott Russell'ın araştırması, çalışmasının Isaac Newton ve Daniel Bernoulli tarafından verilen hidrodinamik teorilerine aykırı olması nedeniyle araştırmacı arkadaşları tarafından onaylanmamıştır. 1870'lerde Joseph Boussinesq ve Lord Rayleigh, Russell gözleminin teorik incelemesini geliştirmiş ve sonra onu bir laboratuvar deneyinde yeniden üretmişlerdir. 1895'te Hollandalı Diederik Korteweg ve Gustav de Vries, şimdilerde iyi bilinen Korteweg-de Vries denklemi (KdV denklemi) ve bunların soliter ve periyodik dalga çözümleri ile ilgilendiler [69]. 1955'te Fermi, Pasta ve Ulam, lineer olmayan bir uyumsuz osilatörün çalışmasında solitonlar üzerine beklenmedik sonuçlar elde ettiler [70]. Normal titreşim modları arasındaki lineer olmayan etkileşimlerin, enerjinin eşit dağılımı nedeniyle sistemin enerjisinin tüm modlar boyunca eşit dağılımına yol açtığını gösterme girişimleri başarısızlıkla sonuçlanmıştır. Enerji tüm modlar boyunca yayılmaz, ancak bir süre sonra deneyin başlangıcında olduğu yerdeki ilk modunda birikir.

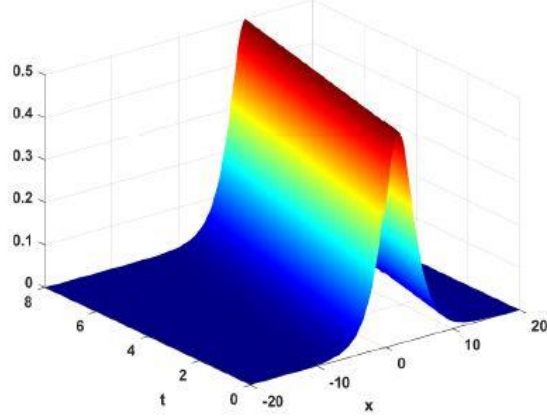
1965 yılında Zabusky ve Kruskal; Fermi, Pasta ve Ulam problemini sürekli bakış açısıyla incelediler [71]. Onlar, Korteweg ve de Vries denklemlerini yeniden türetmiş ve kararlı dalga çözümlerini sayısal simülasyonlarla elde etmişlerdir. Bu sayısal sonuçlar sayesinde, bu çözümlerin ikisi çarpıştıktan, etkileşime girdikten ve sonra tekrar dağıldıktan sonra şekillerini ve hızlarını korudukları sonucuna vardılar. Bu dalgalar, parçacık benzeri özelliklerini belirtmek amacıyla soliton olarak adlandırılmıştır. Solitonların bu parçacık davranışı, ilginç bir gözlemde çok daha fazlasıdır ve matematiksel önemi büyüktür. Sayısal simülasyonlar parçacık benzeri

davranış önerse de, solitonların bir çarpışmadan sonra orijinal şekillerini tamamen geri kazanmalarının nasıl mümkün olduğu sorusu her zaman ortaya çıkar. Bu soruya cevap aramak için bu tür sayısal simülasyonların sonuçları detaylı bir şekilde incelenmiş ve çarpışmadan sonra bazı dalgalanmaların görüldüğü gözlemlenmiş ve bu nedenle solitonların çarpışmalardan sonra orijinal şeklinin tam olarak geri kazanılmadığı sonucuna ulaşılmıştır. Bu nedenle, solitonların çarpışmalar yoluyla yok olup olmadığını doğrulamak için, soliton dalga denklemlerinin teorik yönlerini incelemek ve bunların kesin çözümlerini aramak elzem hale gelmiştir.

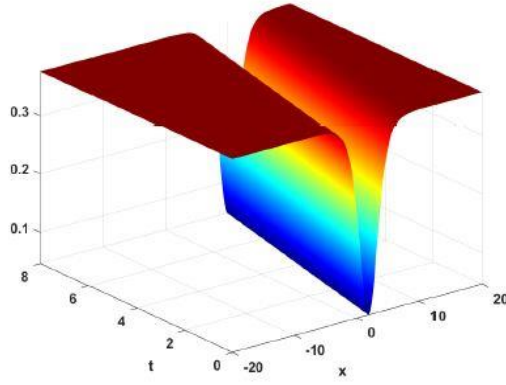
Solitonlar kavramı, çok sayıda araştırmacının dikkatini çekmiş olup tüm dünyada bu konuyla ilgili büyük araştırmalar yapılmaktadır. Uygulamada KdV denkleminin öneminin nedeni, çok sayıda fiziksel model geliştirilmesine yol açmış olmasıdır. Solitonlar ayrıca, de Broglie tarafından 1927'de geliştirilen "Çift çözüm teorisi" veya "Lineer olmayan dalga mekaniği" olarak bilinen de Broglie'nin teorisi aracılığıyla bir temel oluşturdukları için kuantum mekaniğinde de uygulamalar bulmaktadır. Bu teori, esas olarak, Albert Einstein'ın ışıkla ilgili benzer teorisini genelleştirerek, dalga-parçacık ikili doğasını maddenin tüm parçacıklarına göre incelemeye yardımcı olmuştur.

Solitonlar, yoğunluk profiline göre bazı tiplere ayrılır. Bunların bazı önemli olanları Spatial ve temporal solitonlar, bright, dark, kink ve breather solitonlardır.

- **Spatial ve Temporal Solitonlar.** Temporal solitonlar, şeklini koruyan ve optik fiberde yayılma sırasında zaman içinde sınırlanan optik darbelerdir. Spatial soliton, yayılma yönüne dik olan enine yönde sınırlı kalan bir ışındır. Optik Kerr etkisi olarak bilinen, ışık yoğunluğunun neden olduğu bir optik malzemenin kırılma indisindeki lineer olmayan değişim temporal ve spatial solitonların evriminden sorumludur. Kırılma indisine bağlı yoğunluk, spatial kendi kendine odaklanma ve temporal kendi kendine faz modülasyonunun (KFM) etkilerine yol açar. Bir optik ışının kendi kendine odaklanması, doğal kırınım kaynaklı yayılmasını dengeler ve spatial soliton üretir. Temporal soliton, bir optik darbenin doğal dağılımının neden olduğu genişlemesine karşı koyduğunda KFM tarafından geliştirilir. Spatial ve temporal solitonlar, optik soliton teorisinde önemli bir rol oynar [72].
- **Bright ve Dark Solitonlar.** Yoğunluğu arka plandan daha yüksek olan bir soliton benzeri darbe, bright soliton olarak adlandırılır. Yoğunluk profilinde tekdüze arka plana göre düşüş olan bir soliton, dark soliton olarak bilinir. Bright ve dark solitonların profili sırasıyla Şekil 3.1 ve Şekil 3.2'de gösterilmektedir. Dark ve bright solitonlar arasındaki en büyük fark, zamana bağlı faz veya dark solitonlarda frekans civıltısı açısından görülebilir. Sayısal simülasyonlar, dark solitonların bright solitonlara göre gürültü varlığında daha kararlı olduğunu ve fiber kaybı durumunda daha yavaş yayıldığını göstermektedir.

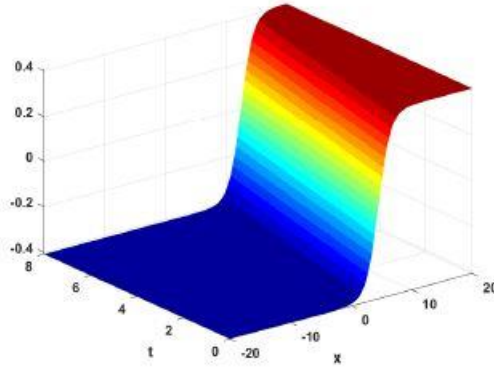


Şekil 3.1. Bright soliton



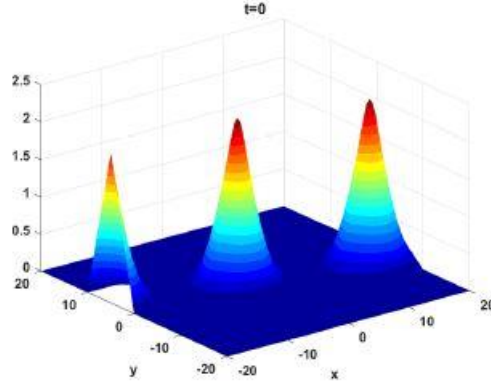
Şekil 3.2. Dark soliton

- **Kink Soliton.** Kink soliton, dar bir bölgede genliği hızla değişen ancak $x \rightarrow \pm\infty$ için yok olmayan bir şok dalgasını temsil eder. Kink profili, belirli yoğunluktaki iki kararlı arka plan dalgasını sıfır yoğunlukla birleştirir. Dinamikleri Sine-Gordon denklemi tarafından yönetilen birçok fiziksel sistem, kink solitonu yansıtır [73]. Optik fiber boyunca yayılma sırasında şeklini koruyan bir optik şok dalgası, bir kink solitonunu temsil eder. Kink solitonun evrimi Şekil 3.3'de gösterilmiştir.



Şekil 3.3. Kink soliton

- **Breather Soliton.** Bir breather soliton, enerjinin salınımlı ve lokalize biçimde yoğunlaştığı yerde lineer olmayan bir dalgadır (Şekil 3.4). Breather terimi, çoğu breatherların uzayda lokalize olması ve zamanda salınması özelliğinden doğar. Ancak uzayda salınması ve zamanda lokalize olması durumu da breather ile gösterilir. Ayrıca, ayrık kafes denklemlerinin lokal bir periyodik çözümüdür [74, 75].



Şekil 3.4. Breather soliton

Solitonların Uygulama Alanları. Soliton teorisi, lineer olmayan optik, hidrodinamik, plazmalar, trafik akışı, şok dalgası, kasırgalar, tsunamiler, internet, türbülans, mıknatıslar ve nükleer fizik gibi çeşitli alanlara uygulanabilir. Dark solitonların, bright solitonlara göre zamanlama titremesi ve sinyal içi Raman saçılımı gibi durumlara karşı nispeten daha az etkilendiği bulunmuştur. Dark soliton'un bu özelliği, optik iletişim sistemlerinde potansiyel uygulamalara sahiptir [72]. Soliton kimlik koruyucu özelliğinden dolayı fiber optik haberleşme sistemlerinde veri iletiminde kullanılır. Bu sistem, bir dijital bit sisteminde '1' biti temsil etmek

için solitonları kullanır. Optik fiberde yayılma sırasında solitonlar, fiber kayıpları, üçüncü dereceden dağılım ve sinyal içi Raman saçılması gibi birçok bozulma türüyle karşılaşılır. Solitonlar, klasik ve kuantum alan teorisinde ve nanoteknolojide, özellikle nanohidrodynamicte hayati bir rol oynamaktadır [76]. Nörobilimde, nöronlar boyunca elektrik sinyali yolunu açıklama, proteinler ve DNA'daki düşük frekanslı kolektif hareketlerle ilgili olarak oldukça uygulanabilir alanlara sahiptir [77, 78].

Modülasyon kararsızlığı (MK), lineer olmayan dağıtıcı ortamlarda periyodik yapıların oluşumunu başlatan kritik süreçlerden biridir. Bu mekanizmada, başlangıçta büyüyen ancak aynı zamanda bozulabilen periyodik tohumlama pertürbasyonları nedeniyle bir arka plan taşıyıcı dalgası modüle edilir. Fiber kayıpları, üçüncü mertebeden dağılım, yükselteç gibi birçok pertürbasyon türlerinde optik fiber iletişim sırasında gürültü ve sinyal içi Raman saçılmasıyla karşılaşılır. Bu sırada yeni frekanslar üretilir ve dalgalar arasında yoğun bir enerji alışverişi gerçekleşir [79]. Modülasyon kararsızlığı modern teknolojiye birçok uygulamaya sahiptir. MK'nın optikteki önemi kapsamlı bir şekilde ele alınmıştır [80, 81, 82]. Benzer şekilde biyoloji hidrodinamik ve plazmalar gibi çeşitli alanlardaki önemi de araştırılmıştır [83, 84, 85, 86]. MK, lineer olmayan optik ortamda kısa darbe dizisi üretimi ve optik parametrik amplifikasyon ile doğal bağlantısı nedeniyle kapsamlı çalışmaların konusu olmuştur. Süperkesintisiz üretiminin ilk aşamasında yer alan temel mekanizma, gürültü odaklı MK ile yakından bağlantılıdır. Süperkesintisiz oluşturma sürecinde bir optik dev dalganın ortaya çıkmasından MK'nın sorumlu olduğu ortaya çıkmıştır.

Lineer olmayan evrim denklemleri (LOED) bulunan lineer olmama durumları ve dağılım terimleri, MK analizi kullanılarak izlenebilen sürekli dalgaların genlik ve faz modülasyonunu etkilemede önemli bir rol oynar. Esasında, kapalı formdaki bir çözüm veya sayısal bir yaklaşımın rolü, MK analizi ile değiştirilebilir. MK analizi, LOED'lerin çözümünde kullanılan sayısal tekniklerin kod doğrulamasında önemli bir rol oynayabilir. Bir denklemin MK analizinde dört önemli adım aşağıdadır:

- i. Bir denge durumunun bulunması,
- ii. Denge durumunun bozulması ve pertürbasyonlara göre denklemlerin formüle edilmesi,
- iii. Elde edilen denklemleri kullanarak lineer olmayan bir dağılım ilişkisinin oluşturulması,
- iv. Denklemler için MK gain spektrumunu elde etmek için dağılım ilişkisinin çözülmesi.

Bu bölümdeki çalışma, eliptiklik açısı ve coupled denkleminin katsayısının etkisi ile çift kırılmalı optik fiberlerde darbe yayılımını tanımlayan lineer olmayan coupled denklemlerin tam optik solitonlarını oluşturmaktadır. Yeni Sardar alt-ADD yönteminden yararlanılarak W-biçim

bright, dark optik solitonlar, trigonometrik fonksiyon ve tekil fonksiyon çözümleri gibi çeşitli optik solitonlar korunmuştur. Ayrıca eliptiklik açısının ve coupled denklemin katsayısının modülasyon kararsızlığı üzerindeki etkileri incelenmiştir. $\theta = 45^\circ$ için lineer, dairesel çift kırılma ve MK büyüme hızında kararsız bölge gösterilmiştir. Coupled denklemin katsayısının MK büyüme hızı üzerindeki etkilerini kaydetmek için eliptiklik açısı $\theta = 45^\circ$ olarak sabitlenmiştir. Şekil 3.10 ve Şekil 3.14'te, Houwe ve ark.'nın yaptığı çalışmaya kıyasla MK gain'in bazı yeni davranışları elde edilmiştir [87]. Bu sonuçlar, Ablowitz ve Horikis [88], Houwe ve ark. tarafından yapılan çalışmalar ile karşılaştırıldığında kararlı/kararsız bölgeleri göstermektedir [87]. Ayrıca, bu sonuçlar lineer olmayan optik fiberlerde uzun mesafeli iletişimi ve fiber optik tasarımını açıklamak için yardımcı olacaktır.

Bu bölümde yapılan çalışmanın amacı, eliptik olarak çift kırılmalı bir fiberdeki optik darbeleri tanımlayan

$$\begin{aligned} i \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \gamma(|A|^2 + g|B|^2)A - QB &= 0 \\ i \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} + \gamma(|B|^2 + g|A|^2)B - QA &= 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

coupled denklem kümesinin tam optik solitonlarını araştırmaktır [88]. Burada $A(x, t)$ ve $B(x, t)$, iki çekirdekli optik fiberlerde eliptik olarak çift kırılmalı bir fiberde darbenin yayılmasını gösteren genlikleri belirtir. β_2, γ, Q parametreleri sırasıyla grup hız dağılımı, lineer olmama katsayısı ve coupled denklemin katsayısıdır. Ayrıca eliptiklik açısı $g = \frac{2+2\sin^2(\theta)}{2+\cos^2(\theta)}$ ile tanımlanır. Genellikle eliptiklik açısı değerleri, sırasıyla lineer çift kırılmalı ve dairesel çift kırılmalı fiber ile ilgili olan $\theta = 0^\circ$ ve $\theta = 90^\circ$ 'dir. Ek olarak, sıfır çift kırılma ($g = 0$) durumu vardır. Son zamanlarda, Houwe ve arkadaşları, eliptiklik açısının ve üçüncü/dördüncü mertebe gibi yüksek mertebeli dağılımların MK üzerindeki etkilerini incelemişlerdir. Araştırmacılar, eliptiklik açısını $g \in [0, 90^\circ]$ aralığında değiştirerek MK'nın bazı yeni davranışlarını ortaya koymuşlardır [87]. Bu çalışmada, soliton çözümlerinin davranışını ve MK gain'i incelemek için coupled denklemin katsayısı eklenmiş ve yüksek dereceli dağılım terimleri azaltılmıştır.

Bu çalışmada ayrıca, çift kırılmada çapraz faz modülasyonu varlığında coupled lineer olmayan Schrodinger denkleminin (CLOSD) tam çözümleri araştırılmıştır. İlk olarak yeni Sardar alt denklem metodu (YSADM) açıklanmıştır. Bu yeni metot coupled denklemlerine uygulanmıştır. Sonrasında ise modülasyon kararsızlığı incelenmiştir.

3.1. Modifiye Edilmiş Yeni Sardar Alt-Denklem Metodunun İncelenmesi

H , bir bilinmeyen $u(x, t)$ cinsinden polinomal fonksiyon olmak üzere

$$H(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{tt}, \dots) = 0 \quad (3.2)$$

lineer olmayan denklemleri alınsın. (3.2) denkleminin çözümlerinin araştırılması için $\mu \neq 0$ olmak üzere

$$u(x, t) = U(\xi), \quad \xi = x - \mu t \quad (3.3)$$

değişken dönüşümlerini yapalım. (3.3) dönüşümü (3.2) denkleminde yazılırsa $(')$, $\frac{dU}{d\xi}$ türevi olmak üzere

$$G(U, U', \mu U', U'', \mu^2 U'', \dots) = 0 \quad (3.4)$$

elde edilir.

(3.4) denkleminin çözümlerinin

$$U(\xi) = H_0 + \sum_{i=1}^n H_i [\phi(\xi)]^i, \quad (3.5)$$

formunda olduğunu varsayalım [48]. Burada $i = 1, 2, \dots, N$ için $\rho, H_i \neq 0$ sabitler olmak üzere $\phi(\xi)$;

$$(\phi'(\xi))^2 = \rho + a\phi(\xi)^2 + b\phi(\xi)^4, \quad (3.6)$$

lineer olmayan diferansiyel denklemini sağlar.

(3.6) diferansiyel denklemini aşağıdaki çözümlere sahiptir:

1. Durum. $\rho = 0$ için,

$a > 0$ ve $b \neq 0$ olduğu zaman

$$\phi_1^\pm(\xi) = \pm \sqrt{-\frac{pqa}{b}} \operatorname{sech}_{pq}(\sqrt{a}\xi) \quad (3.7)$$

ve

$$\phi_2^\pm(\xi) = \pm \sqrt{\frac{pqa}{b}} \operatorname{csch}_{pq}(\sqrt{a}\xi) \quad (3.8)$$

bright ve singüler solitonlar ortaya çıkmıştır.

$a < 0$ ve $b \neq 0$ olduğu zaman

$$\phi_3^\pm(\xi) = \pm \sqrt{-\frac{pqa}{b}} \operatorname{sech}_{pq}(\sqrt{-a}\xi), \quad (3.9)$$

ve

$$\phi_4^\pm(\xi) = \pm \sqrt{-\frac{pqa}{b}} \operatorname{csch}_{pq}(\sqrt{-a}\xi) \quad (3.10)$$

periyodik ve singüler fonksiyon çözümleri elde edilir.

2. Durum. $\rho = \frac{1}{4} \frac{a^2}{b}$ için,

$a < 0$ ve $b > 0$ olduğu zaman

$$\phi_5^\pm(\xi) = \pm \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{2a}{b}} \tanh_{pq} \left(\frac{1}{2} \sqrt{-2a}\xi \right), \quad (3.11)$$

$$\phi_6^\pm(\xi) = \pm \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{2a}{b}} \coth_{pq} \left(\frac{1}{2} \sqrt{-2a}\xi \right), \quad (3.12)$$

$$\phi_7^\pm(\xi) = \pm \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{2a}{b}} \left(\tanh_{pq}(\sqrt{-2a}\xi) \pm i\sqrt{pq} \operatorname{sech}_{pq}(\sqrt{-2a}\xi) \right), \quad (3.13)$$

$$\phi_8^\pm(\xi) = \pm \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{2a}{b}} \left(\coth_{pq}(\sqrt{-2a}\xi) \pm \sqrt{pq} \operatorname{csch}_{pq}(\sqrt{-2a}\xi) \right), \quad (3.14)$$

$$\phi_9^\pm(\xi) = \pm \frac{1}{4} \sqrt{-\frac{2a}{b}} \left(\tanh_{pq} \left(\sqrt{\frac{-a}{8}} \xi \right) \pm \sqrt{pq} \coth_{pq} \left(\sqrt{\frac{-a}{8}} \xi \right) \right) \quad (3.15)$$

şekillerinde dark, singüler ve birleşik optik solitonlar elde edilir.

3. Durum. $\rho = \frac{1}{4} \frac{a^2}{b}$ için,

$a > 0$ ve $b > 0$ olduğu zaman

$$\phi_{10}^\pm(\xi) = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2a}{b}} \tan_{pq} \left(\frac{1}{2} \sqrt{2a}\xi \right), \quad (3.16)$$

$$\phi_{11}^\pm(\xi) = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2a}{b}} \cot_{pq} \left(\frac{1}{2} \sqrt{2a}\xi \right), \quad (3.17)$$

$$\phi_{12}^{\pm}(\xi) = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2a}{b}} \left(\tan_{pq}(\sqrt{2a}\xi) \pm \sqrt{pq} \sec_{pq}(\sqrt{2a}\xi) \right), \quad (3.18)$$

$$\phi_{13}^{\pm}(\xi) = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2a}{b}} \left(\cot_{pq}(\sqrt{2a}\xi) \pm \sqrt{pq} \csc_{pq}(\sqrt{2a}\xi) \right), \quad (3.19)$$

$$\phi_{14}^{\pm}(\xi) = \pm \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2a}{b}} \left(\tan_{pq} \left(\sqrt{\frac{a}{8}} \xi \right) \pm \sqrt{pq} \cot_{pq} \left(\sqrt{\frac{a}{8}} \xi \right) \right) \quad (3.20)$$

trigonometrik fonksiyon çözümleri elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} \operatorname{sech}_{pq}(\xi) &= \frac{2}{pe^{\xi} + qe^{-\xi}}, \quad \operatorname{csch}_{pq}(\xi) = \frac{2}{pe^{\xi} - qe^{-\xi}}, \quad \sec_{pq}(\xi) = \frac{2}{pe^{i\xi} + qe^{-i\xi}}, \quad \csc_{pq}(\xi) = \frac{2i}{pe^{i\xi} - qe^{-i\xi}}, \\ \tanh_{pq}(\xi) &= \frac{pe^{\xi} - qe^{-\xi}}{pe^{\xi} + qe^{-\xi}}, \quad \coth_{pq}(\xi) = \frac{pe^{\xi} + qe^{-\xi}}{pe^{\xi} - qe^{-\xi}}, \quad \tan_{pq}(\xi) = -i \frac{pe^{i\xi} - qe^{-i\xi}}{pe^{i\xi} + qe^{-i\xi}}, \quad \cot_{pq}(\xi) = \\ &= i \frac{pe^{i\xi} + qe^{-i\xi}}{pe^{i\xi} - qe^{-i\xi}} \end{aligned}$$

şeklindedir.

3.2. Çift Kırılmada YSADM'nin CLOSD'ye Uygulanması

Bu kısımda eliptik açı varlığı ile bir lineer olmayan karşıt yönlü coupler için analitik çözümler araştırılacaktır.

$$A(x, t) = \phi_1(\xi) e^{i(\vartheta x + \omega t)}, \quad (3.21)$$

$$B(x, t) = \phi_2(\xi) e^{i(\vartheta x + \omega t)}, \quad (3.22)$$

ve $\xi = x - \mu t$ olsun. CLOSD kümesinde (3.21) ve (3.22)'nin kullanılmasıyla imajiner kısımlardan

$$\mu = -\frac{1}{\beta_2 \omega} \quad (3.23)$$

ve reel kısımlardan

$$m_1 \phi_1 + m_2 \phi_2^2 \phi_1 - m_3 \phi_1'' - 2Q\phi_2 + 2\gamma \phi_1^3 = 0 \quad (3.24)$$

ve

$$m_1\phi_2 + m_2\phi_1^2\phi_2 - m_3\phi_2'' - 2Q\phi_1 + 2\gamma\phi_2^3 = 0 \quad (3.25)$$

elde edilir. Burada

$$m_1 = (\omega^2\beta_2 - 2v), \quad m_2 = 2\gamma g\phi_1^2, \quad m_3 = \mu^2\beta_2 \quad (3.26)$$

dir. CLOSD'nin

$$\phi_1(\xi) = H_0 + \sum_{i=1}^{n_1} H_i[\phi(\xi)]^i, \quad (3.27)$$

$$\phi_2(\xi) = E_0 + \sum_{i=1}^{n_2} E_i[\phi(\xi)]^i, \quad (3.28)$$

şeklindeki çözüm formlarından faydalanılması ve homojen denge (balans) prensibinin uygulanmasıyla $n_1 = n_2 = 1$ bulunur. Buradan

$$\phi_1(\xi) = H_0 + H_1\phi(\xi), \quad (3.29)$$

$$\phi_2(\xi) = E_0 + E_1\phi(\xi) \quad (3.30)$$

elde edilir. Coupled denklem kümesinin soliton çözümlerini oluşturmak için (3.6), (3.29), (3.30), eşitlikleri (3.24) ve (3.25) denklemlerinde yerine yazılır. MAPLE 18 yardımıyla elde edilen cebirsel denklem sisteminin çözülmesiyle

$$1. \quad m_1 = (\omega^2\beta_2 - 2v), \quad m_2 = 2\gamma g\phi_1^2, \quad m_3 = \mu^2\beta_2 \text{ ile}$$

$$H_0 = -E_1, \quad H_1 = H_1, \quad E_0 = E_0, \quad E_1 = E_1, \quad a = a, \quad b = b$$

bulunur. Buradan çözümün genel formu

$$A_m^\pm(x, t) = e^{i(\vartheta x + \omega t)}(H_0 + H_1\phi_{1m}^\pm), m = 1 \dots 4 \quad (3.31)$$

ve

$$B_m^\pm(x, t) = e^{i(\vartheta x + \omega t)}(E_0 + E_1\phi_{2m}^\pm), m = 1 \dots 4 \quad (3.32)$$

şeklinde olur.

Böylece dördüncü tip soliton çözümleri aşağıdaki gibi elde edilir:

- $\rho = 0$ ise,

$a > 0$ ve $b \neq 0$ için bright soliton çözümleri

$$A_1^\pm(x, t) = e^{i(\vartheta x + \omega t)} \left(H_0 \pm H_1 \sqrt{-\frac{pq a}{b}} \operatorname{sech}_{pq}(\sqrt{a}\xi) \right), \quad (3.33)$$

ve

$$B_1^\pm(x, t) = e^{i(\vartheta x + \omega t)} \left(E_0 \pm E_1 \sqrt{-\frac{pq\bar{a}}{b}} \operatorname{sech}_{pq}(\sqrt{a}\xi) \right), \quad (3.34)$$

olur.

Singüler soliton çözümleri

$$A_2^\pm(x, t) = e^{i(\vartheta x + \omega t)} \left(H_0 \pm H_1 \sqrt{-\frac{pq\bar{a}}{b}} \operatorname{csch}_{pq}(\sqrt{a}\xi) \right), \quad (3.35)$$

ve

$$B_2^\pm(x, t) = e^{i(\vartheta x + \omega t)} \left(E_0 \pm E_1 \sqrt{-\frac{pq\bar{a}}{b}} \operatorname{csch}_{pq}(\sqrt{a}\xi) \right), \quad (3.36)$$

şeklinde elde edilir.

$a < 0$ ve $b \neq 0$ için periyodik ve singüler fonksiyon çözümleri

$$A_3^\pm(x, t) = e^{i(\vartheta x + \omega t)} \left(H_0 \pm H_1 \sqrt{-\frac{pq\bar{a}}{b}} \operatorname{sec}_{pq}(\sqrt{-a}\xi) \right), \quad (3.37)$$

$$B_3^\pm(x, t) = e^{i(\vartheta x + \omega t)} \left(E_0 \pm E_1 \sqrt{-\frac{pq\bar{a}}{b}} \operatorname{sec}_{pq}(\sqrt{-a}\xi) \right), \quad (3.38)$$

ve

$$A_4^\pm(x, t) = e^{i(\vartheta x + \omega t)} \left(H_0 \pm H_1 \sqrt{-\frac{pq\bar{a}}{b}} \operatorname{csc}_{pq}(\sqrt{-a}\xi) \right), \quad (3.39)$$

$$B_4^\pm(x, t) = e^{i(\vartheta x + \omega t)} \left(E_0 \pm E_1 \sqrt{-\frac{pq\bar{a}}{b}} \operatorname{csc}_{pq}(\sqrt{-a}\xi) \right) \quad (3.40)$$

şekillerinde elde edilir.

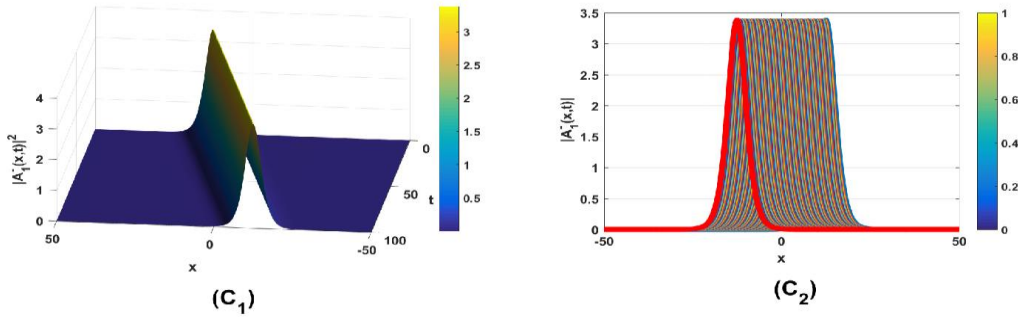
Şekil 3.5’de (C_1 ve C_2), soliton hızının değişimi ile bright üç boyutlu (C_1) ve karşılık gelen iki boyutlu (C_2) gösterilmiştir. Burada bright optik solitonun şeklini koruduğu görülür. Şekil 3.6’da (C_3 ve C_4), soliton hızının negatif olduğu yerde ve modelin uygun parametreleri seçilerek W-biçimli bright optik soliton gösterilmiştir. Şekil 3.6 (C_4)’teki Kontur grafiğinde W-biçimli bright optik solitonun sağdan sola doğru kaydığı da gözlemlenmektedir. Ayrıca Şekil 3.7 ve Şekil 3.8’de soliton hızının etkisiyle iki boyutluda W-biçimli bright değişimi gösterilmiştir. Elde edilen eğriler, solitonun şeklini koruma, sadece genel bakış için deformasyon olmadan yayılma gibi iyi bilinen özelliklerini göstermektedir.

- $\rho = \frac{1}{4} \frac{a^2}{b}$ ise aşağıdaki sonuç kümesi elde edilir:

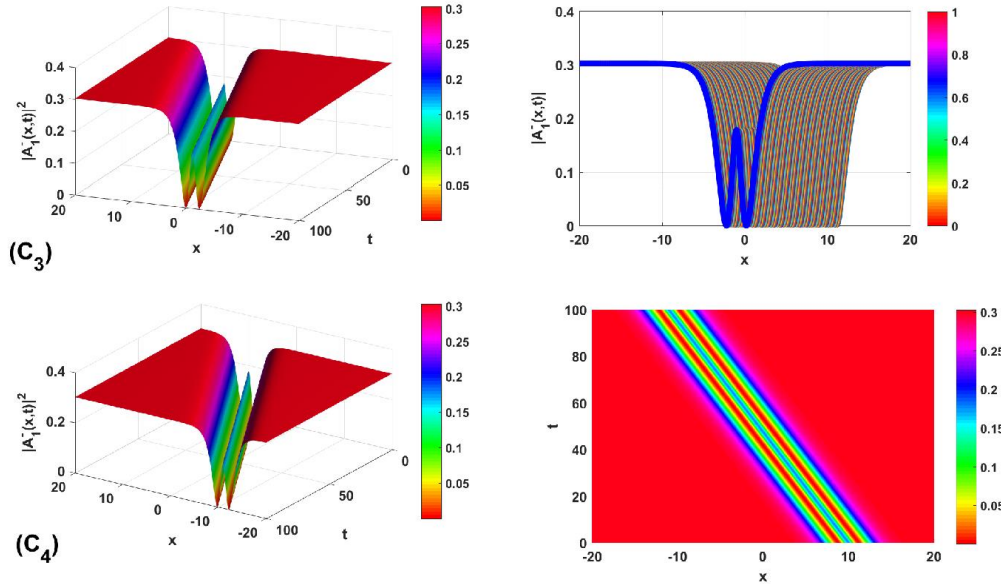
2. $m_1 = (\omega^2 \beta_2 - 2\nu)$, $m_2 = 2\gamma g \phi_1^2$, $m_3 = \mu^2 \beta_2$ ile

$H_0 = -E_0$, $H_1 = -E_1$, $E_0 = E_0$, $E_1 = E_1$, $a = a$, $b = b$.

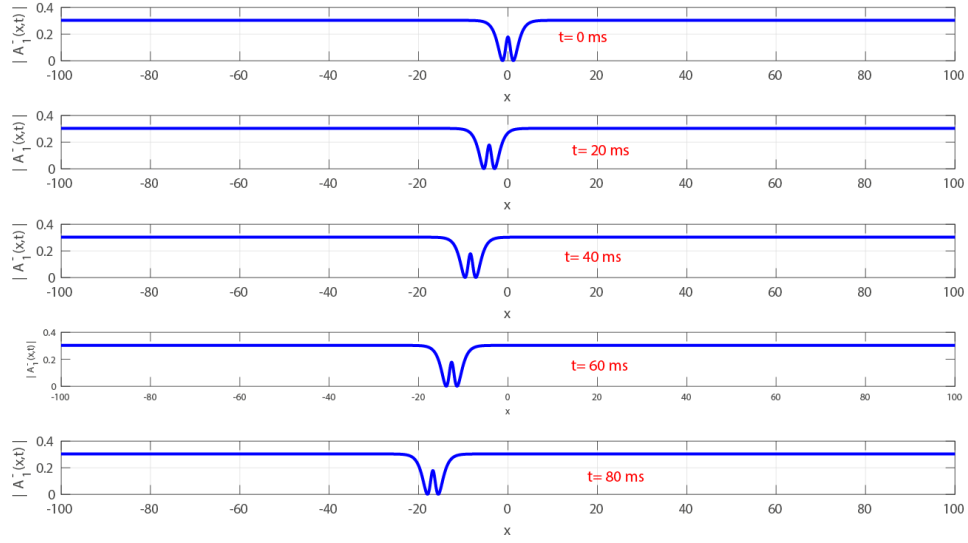
$a < 0$ ve $b > 0$ alınmasıyla



Şekil 3.5. $[E_0 = 0.5, H_1 = 10.001, E_1 = -0.005, a = 0.085, b = -2.5, p = q = 1]$ için soliton (μ) hızının etkisiyle (3.33) denkleminin bright soliton grafik gösterimi



Şekil 3.6. $[E_0 = -0.5, H_1 = -10.001, E_1 = 0.55, a = 0.085, b = -2.5, p = q = 1]$ için (C_3) [$\mu = -0.11$] (üç boyutlu ve iki boyutlu) ve (C_4) [$\mu = -0.21$] (üç boyutlu ve karşılık gelen kontur grafiği) soliton (μ) hızının etkisiyle (3.33) denkleminin W-biçimli bright soliton grafik gösterimi



Şekil 3.7. $[E_0 = -0.5, H_1 = -10.001, E_1 = 0.55, a = 0.085, b = -2.5, p = q = 1]$ için soliton hızının negatif değerinin ($\mu = -0.21$) etkisiyle (3.33) denkleminin W-biçimli bright soliton grafik gösterimi

$$A_5^\pm(x, t) = e^{i(\vartheta x + \omega t)} \left\{ H_0 \pm H_1 \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{2a}{b}} \tanh_{pq} \left(\frac{1}{2} \sqrt{-2a\xi} \right) \right\}, \quad (3.41)$$

$$B_5^\pm(x, t) = e^{i(\vartheta x + \omega t)} \left\{ E_0 \pm E_1 \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{2a}{b}} \tanh_{pq} \left(\frac{1}{2} \sqrt{-2a\xi} \right) \right\} \quad (3.42)$$

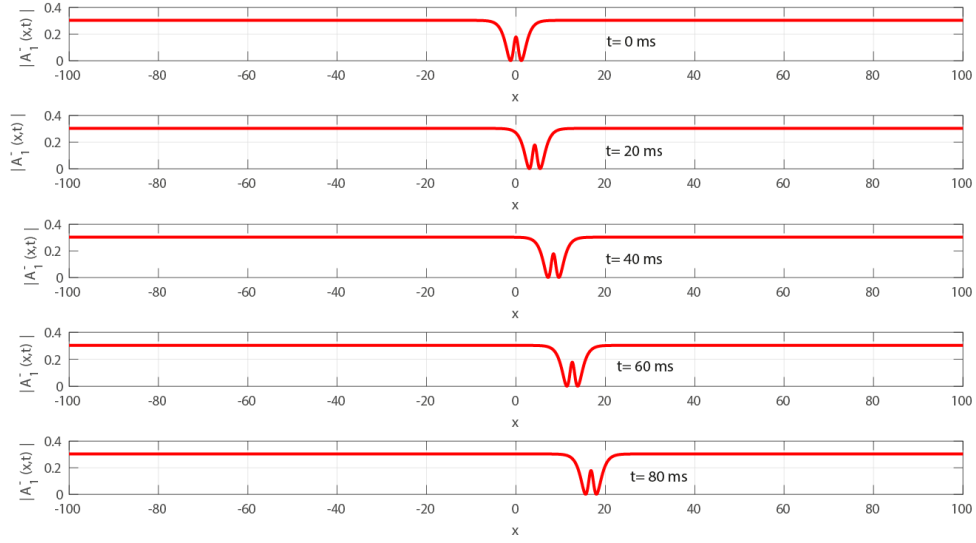
dark soliton çözümleri ortaya çıkar.

Trigonometrik fonksiyonların çözümü

$$A_6^\pm(x, t) = e^{i(\vartheta x + \omega t)} \left\{ H_0 \pm H_1 \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{2a}{b}} \coth_{pq} \left(\frac{1}{2} \sqrt{-2a\xi} \right) \right\}, \quad (3.43)$$

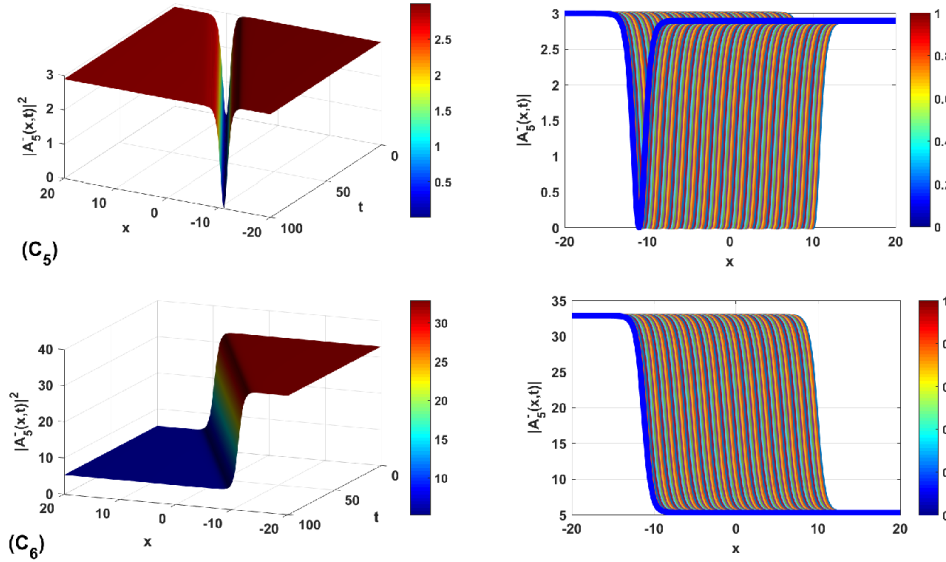
$$B_6^\pm(x, t) = e^{i(\vartheta x + \omega t)} \left\{ E_0 \pm E_1 \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{2a}{b}} \coth_{pq} \left(\frac{1}{2} \sqrt{-2a\xi} \right) \right\}, \quad (3.44)$$

şeklinde olur.



Şekil 3.8. $[E_0 = -0.5, H_1 = -10.001, E_1 = 0.55, a = 0.085, b = -2.5, p = q = 1]$ için soliton hızının $(\mu = 0.21)$ pozitif etkisiyle (3.33) denkleminin W-biçimli bright soliton grafik gösterimi

Şekil 3.9’da, optik fiberlerde dark optik soliton ve Kink benzeri soliton gösterilmiştir. Elde edilen şekiller sinyal amplifikasyonu, veri koruma, telekomünikasyon sistemi, fiber optik yapı tasarımı gibi çeşitli uygulamalarda iyi bilinmektedir.



Şekil 3.9. $[H_0 = -4.15, H_1 = 20.55, b = 150.5, p = q = 1]$ için (3.41) denkleminin Alt-ADD yöntem parametresinin değişimi ile $(C_5)[a = -0.95]$ dark optik soliton ve soliton hızının değişimi ile Kink benzeri soliton $(C_6)[\mu = -0.21]$ grafik gösterimi

Dark soliton, sağlamlığı nedeniyle optik iletişimde büyük bir potansiyele sahiptir. Son zamanlarda, dark solitonun daha düşük bir güç hızında yayılabileceği ve daha yüksek güç hızında daraltılabileceği gösterilmiştir [87].

$$A_7^\pm(x, t) = e^{i(\vartheta x + \omega t)} \left\{ H_0 \pm H_1 \left[\frac{1}{2} \sqrt{-\frac{2a}{b}} (\tanh_{pq}(\sqrt{-2a}\xi) \pm i\sqrt{pq} \operatorname{sech}_{pq}(\sqrt{-2a}\xi)) \right] \right\} \quad (3.45)$$

$$B_7^\pm(x, t) = e^{i(\vartheta x + \omega t)} \left\{ E_0 \pm E_1 \left[\frac{1}{2} \sqrt{-\frac{2a}{b}} (\tanh_{pq}(\sqrt{-2a}\xi) \pm i\sqrt{pq} \operatorname{sech}_{pq}(\sqrt{-2a}\xi)) \right] \right\} \quad (3.46)$$

kompleks soliton çözümleri ortaya çıkmıştır.

$$A_8^\pm(x, t) = e^{i(\vartheta x + \omega t)} \left\{ H_0 \pm H_1 \left[\frac{1}{2} \sqrt{-\frac{2a}{b}} (\coth_{pq}(\sqrt{-2a}\xi) \pm i\sqrt{pq} \operatorname{csch}_{pq}(\sqrt{-2a}\xi)) \right] \right\} \quad (3.47)$$

$$B_8^\pm(x, t) = e^{i(\vartheta x + \omega t)} \left\{ E_0 \pm E_1 \left[\frac{1}{2} \sqrt{-\frac{2a}{b}} (\coth_{pq}(\sqrt{-2a}\xi) \pm i\sqrt{pq} \operatorname{csch}_{pq}(\sqrt{-2a}\xi)) \right] \right\} \quad (3.48)$$

şeklinde trigonometrik ve singüler fonksiyon çözümlerinin birleşimi elde edilmiştir.

Dark ve trigonometrik fonksiyon çözümlerinin birleşimi

$$A_9^\pm(x, t) = e^{i(\vartheta x + \omega t)} \left\{ H_0 \pm H_1 \left[\frac{1}{4} \sqrt{-\frac{2a}{b}} \left(\tanh_{pq}(\sqrt{-\frac{a}{8}}\xi) \pm i\sqrt{pq} \coth_{pq}(\sqrt{-\frac{a}{8}}\xi) \right) \right] \right\} \quad (3.49)$$

$$B_9^\pm(x, t) = e^{i(\vartheta x + \omega t)} \left\{ E_0 \pm E_1 \left[\frac{1}{4} \sqrt{-\frac{2a}{b}} \left(\tanh_{pq}(\sqrt{-\frac{a}{8}}\xi) \pm i\sqrt{pq} \coth_{pq}(\sqrt{-\frac{a}{8}}\xi) \right) \right] \right\} \quad (3.50)$$

şeklinde olur.

- $\rho = \frac{1}{4} \frac{a^2}{b}$ için

$a > 0$ ve $b > 0$ olduğu zaman trigonometrik fonksiyonların çözümü aşağıdaki gibidir:

$$A_{10}^\pm(x, t) = e^{i(\vartheta x + \omega t)} \left\{ H_0 \pm \frac{1}{2} H_1 \sqrt{\frac{2a}{b}} \tan_{pq} \left(\frac{1}{2} \sqrt{2a}\xi \right) \right\} \quad (3.51)$$

ve

$$B_{10}^{\pm}(x, t) = e^{i(\vartheta x + \omega t)} \left\{ E_0 \pm \frac{1}{2} E_1 \sqrt{\frac{2a}{b}} \tan_{pq} \left(\frac{1}{2} \sqrt{2a} \xi \right) \right\} \quad (3.52)$$

$$A_{11}^{\pm}(x, t) = e^{i(\vartheta x + \omega t)} \left\{ H_0 \pm \frac{1}{2} H_1 \sqrt{\frac{2a}{b}} \cot_{pq} \left(\frac{1}{2} \sqrt{2a} \xi \right) \right\} \quad (3.53)$$

ve

$$B_{11}^{\pm}(x, t) = e^{i(\vartheta x + \omega t)} \left\{ E_0 \pm \frac{1}{2} E_1 \sqrt{\frac{2a}{b}} \cot_{pq} \left(\frac{1}{2} \sqrt{2a} \xi \right) \right\} \quad (3.54)$$

$$A_{12}^{\pm}(x, t) = e^{i(\vartheta x + \omega t)} \left\{ H_0 \pm H_1 \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2a}{b}} \left(\tan_{pq}(\sqrt{2a} \xi) \pm \sqrt{pq} \sec_{pq}(\sqrt{2a} \xi) \right) \right] \right\} \quad (3.55)$$

ve

$$B_{12}^{\pm}(x, t) = e^{i(\vartheta x + \omega t)} \left\{ E_0 \pm E_1 \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2a}{b}} \left(\tan_{pq}(\sqrt{2a} \xi) \pm \sqrt{pq} \sec_{pq}(\sqrt{2a} \xi) \right) \right] \right\} \quad (3.56)$$

$$A_{13}^{\pm}(x, t) = e^{i(\vartheta x + \omega t)} \left\{ H_0 \pm H_1 \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2a}{b}} \left(\cot_{pq}(\sqrt{2a} \xi) \pm \sqrt{pq} \csc_{pq}(\sqrt{2a} \xi) \right) \right] \right\} \quad (3.57)$$

ve

$$B_{13}^{\pm}(x, t) = e^{i(\vartheta x + \omega t)} \left\{ E_0 \pm E_1 \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2a}{b}} \left(\cot_{pq}(\sqrt{2a} \xi) \pm \sqrt{pq} \csc_{pq}(\sqrt{2a} \xi) \right) \right] \right\} \quad (3.58)$$

$$A_{14}^{\pm}(x, t) = e^{i(\vartheta x + \omega t)} \left\{ H_0 \pm H_1 \left[\frac{1}{4} \sqrt{\frac{2a}{b}} \left(\tan_{pq} \left(\sqrt{\frac{a}{8}} \xi \right) \pm \sqrt{pq} \cot_{pq} \left(\sqrt{\frac{a}{8}} \xi \right) \right) \right] \right\} \quad (3.59)$$

ve

$$B_{14}^{\pm}(x, t) = e^{i(\vartheta x + \omega t)} \left\{ E_0 \pm E_1 \left[\frac{1}{4} \sqrt{\frac{2a}{b}} \left(\tan_{pq} \left(\sqrt{\frac{a}{8}} \xi \right) \pm \sqrt{pq} \cot_{pq} \left(\sqrt{\frac{a}{8}} \xi \right) \right) \right] \right\}. \quad (3.60)$$

3.3. Modülasyon Kararsızlık Analizi

Bu kısımda, eliptiklik açısı ve coupled denklemin katsayısı değiştirilerek MK gain spektrumu incelendi [89]. P_0 ve δ_0 güç durumlarıyla ilgili iken Γ_1, Γ_2, x ve t değişkenleri cinsinden ifade edilen küçük pertürbasyonları göstermek üzere, küçük pertürbasyon terimleri aşağıdaki gibi kabul edilmiştir:

$$A(x, t) = (\sqrt{P_0} + \Gamma_1(x, t))\exp(ikx) \quad (3.61)$$

$$B(x, t) = (\delta_0 + \Gamma_2(x, t))\exp(ikx) \quad (3.62)$$

Küçük pertürbasyonlar için elde edilen çözümler

$$\Gamma_1(x, t) = r_1 e^{i(Kx + \Omega t)} + h_1 e^{-i(Kx + \Omega t)} \quad (3.63)$$

$$\Gamma_2(x, t) = r_2 e^{i(Kx + \Omega t)} + h_2 e^{-i(Kx + \Omega t)} \quad (3.64)$$

şeklindedir. Burada K , MK'nın frekansı ve Ω parametresi pertürbasyon dalga numarasını göstermektedir. (3.61) ve (3.62) denklemlerinin (3.1) denkleminde kullanılması ve sonrasında küçük bozulmalar için lineerleştirme şemasının kullanılması ve (3.63)-(3.64) coupled linear denklemlerinin kullanılması ile elde edilen

$$M(\Omega) = \begin{pmatrix} 0 & \gamma g P_0 - Q & \gamma P_0 & \gamma g P_0 \\ \gamma P_0 & \gamma g P_0 & K + \gamma P_0 + \frac{1}{2} \beta_2 \Omega^2 & \gamma g P_0 - Q \\ \gamma g P_0 - Q & \gamma P_0 + \Omega + \frac{1}{2} \beta_2 \Omega^2 & \gamma g P_0 & \gamma P_0 \\ \gamma g P_0 & \gamma P_0 & \gamma g P_0 - Q & \gamma P_0 - \Omega + \frac{1}{2} \beta_2 \Omega^2 \end{pmatrix} \quad (3.65)$$

şeklindeki bir (4×4) M matrisinin determinantının çözülebilirlik koşulu

$$b_4 \Omega^4 + b_3 \Omega^3 + b_2 \Omega^2 + b_1 \Omega + b_0 = 0 \quad (3.66)$$

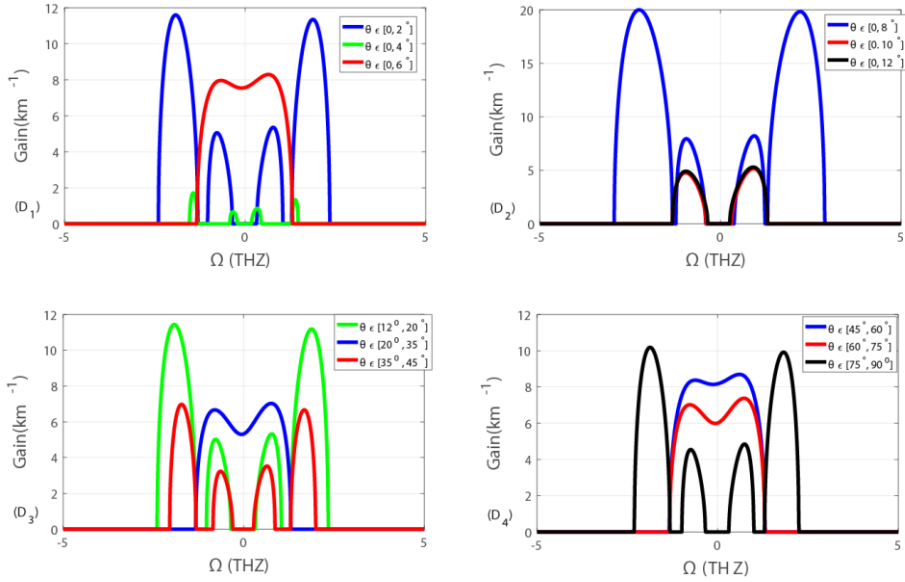
ile verilir. Burada b_0, b_1, b_2, b_3 ve b_4 (3.66) denkleminin katsayılarıdır.

Aşağıda, gain spektrumunun gösterimi; normal ($\beta_2 > 0$) ve anormal ($\beta_2 < 0$) dağılıma etkisi olmak üzere iki farklı etki ele alınmıştır.

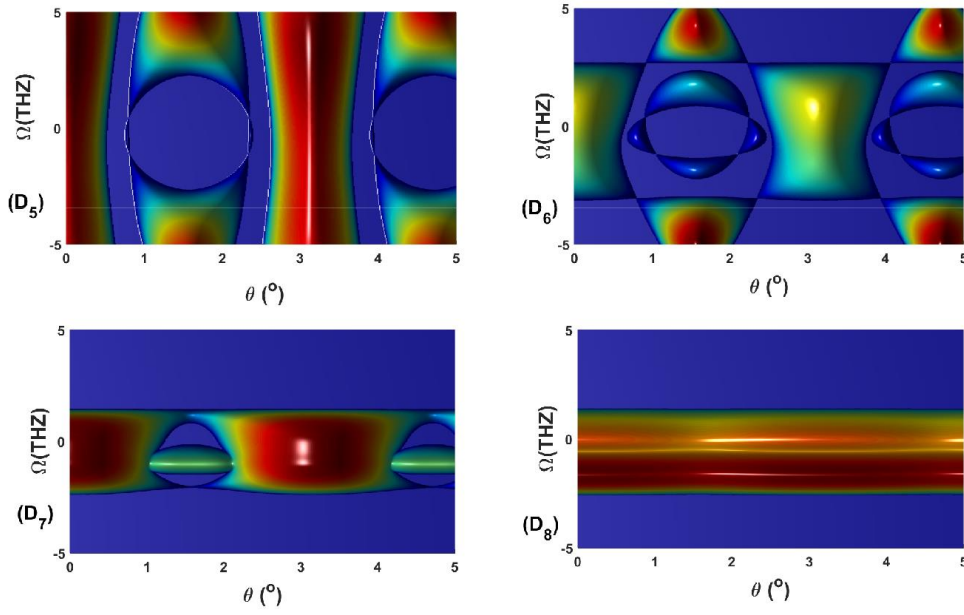
3.3.1. Normal Dağılım Etkisi: $\beta_2 > 0$

Şekil (3.10), $(D_1) \theta \in [0, 2^\circ], \theta \in [0, 4^\circ], \theta \in [0, 6^\circ]$; $(D_2) \theta \in [0, 8^\circ], \theta \in [0, 10^\circ], \theta \in [0, 12^\circ]$; $(D_3) \theta \in [12^\circ, 20^\circ], \theta \in [20^\circ, 35^\circ], \theta \in [35^\circ, 45^\circ]$; $(D_4) \theta \in [45^\circ, 60^\circ], \theta \in [60^\circ, 75^\circ], \theta \in [75^\circ, 90^\circ]$ için eliptik θ açısının etkisi ile normal dağılım etkisinde modülasyon frekansına karşı MK gain

spektrumu değişimini göstermektedir. İki slayt lobu elde edilmiştir ve ardından sırasıyla $\theta \in [0, 6^\circ]$, $\theta \in [20^\circ, 35^\circ]$, $\theta \in [45^\circ, 60^\circ]$ ve $\theta \in [60^\circ, 75^\circ]$ için bir slayt lobu ortaya çıkmıştır. Bu durumlar için maksimum büyüme hızı azalır ve modülasyon frekansının boşluğu artar. Ayrıca Şekil 3.11, lineer olmayan katsayıların etkisi ile MK gain spektrumunun varyasyonudur. Lineer olmayan katsayıların küçük değerleri için kararsızlık bölgeleri oluşur ve ardından önemli kararlılık alanı ortaya çıkar (Şekil 3.11-3.12). Elbette yukarıda elde edilen soliton çözümleri bu aralıklarda kararlı olmalıdır. $\theta = 45^\circ$ için Şekil 3.12, coupled denklemin katsayısının etkin etkisi altında normal grup dağılımında MK gain spektrumunun davranışını vurgulamaktadır. Dört kayma lobunun ve MK büyüme hızının (yani kararsız sürekli dalgalar) gösterildiği yerde özel durum elde edilir. Ayrıca, lineer olmayan terimlerin etkisi ile lineer-çift kırılmada MK gain spektrumunun davranışı Şekil 3.13'te gösterilmektedir. Şekil 3.14'te güç olayının etkisiyle $\theta = 90^\circ$ 'lik dairesel çift kırılmada MK gain spektrumunun değişimi gösterilmektedir.

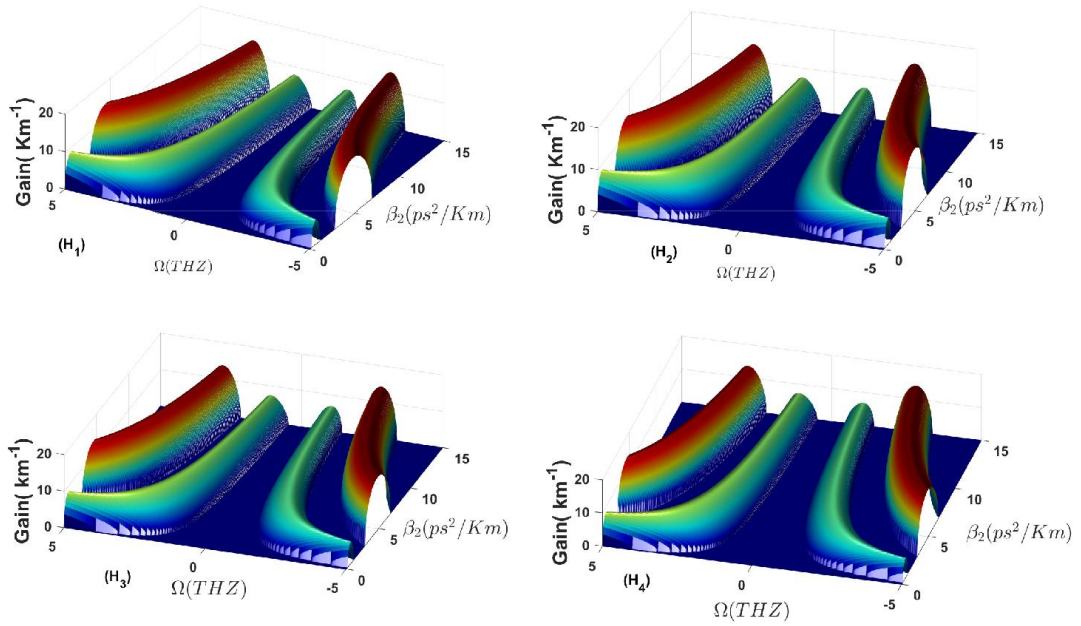


Şekil 3.10. $[\beta_2 = 20.10 \text{ ps}^2/\text{Km}, \gamma = 0.1/(\text{KW} \cdot \text{m}), Q = 0.5/\text{m}, P_0 = 245 \text{ kW}]$ de eliptik açısının (θ) etkisiyle modülasyon frekansına karşı normal dağılım etkisi spektrumundaki gain gösterimi

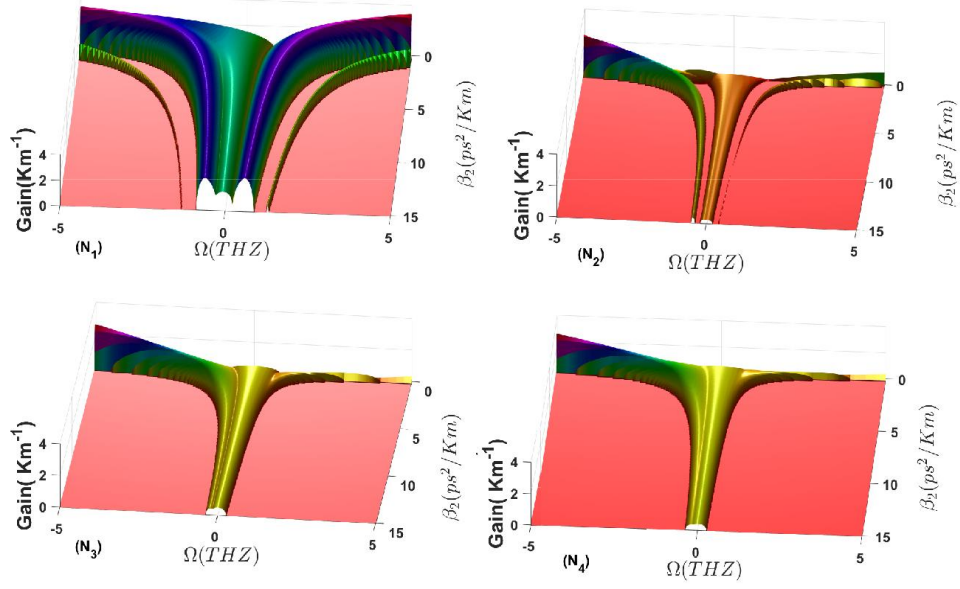


Şekil 3.11. $[\beta_2 = 1ps^2/Km, Q = 0.75/m, P_0 = 500 kW]$ için (D_5) de $[\gamma = 0.1/(KW.m)]$, (D_6) da $[\gamma = 0.01/(KW.m)]$, (D_7) de $[\gamma = 0.001/(KW.m)]$, (D_8) de $[\gamma = 0.0001/(KW.m)]$ de lineer olmayan terimin etkisi altında eliptik açısına karşı normal dağılım etkisinde gain spektrumunun kontur çizimi ve grafik gösterimi

Ayrıca Şekil 3.14'te MK büyüme hızının olduğu yerde ek bantların oluşumu gözlemlenmiştir. Son olarak Şekil 3.15 ve Şekil 3.16'da sırasıyla eliptiklik açısının değişimi ve coupled denklemin katsayısının negatif değerleri ile MK gain'in davranışı görülmektedir.

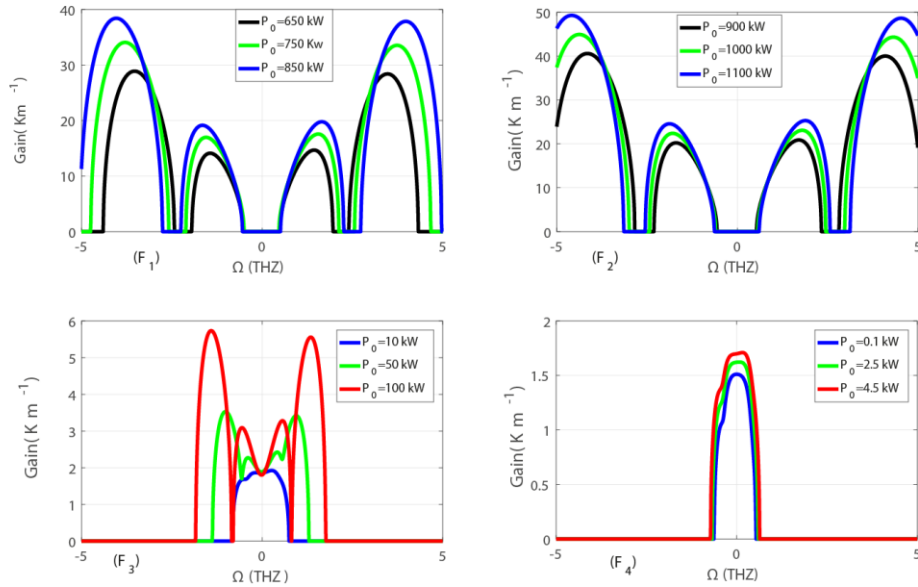


Şekil 3.12. $[\theta = 45^\circ, \gamma = 0.1/(KW.m), P_0 = 500 kW]$ için (H_1) de $Q = 0.75(m)$, (H_2) de $Q = 0.95(m)$, (H_3) de $Q = 1.5(m)$, (H_4) de $Q = 1.75(m)$ de coupled denklemin katsayısının (Q) etkisi ile normal dağılım altında MK gain spektrumlarının gösterimi

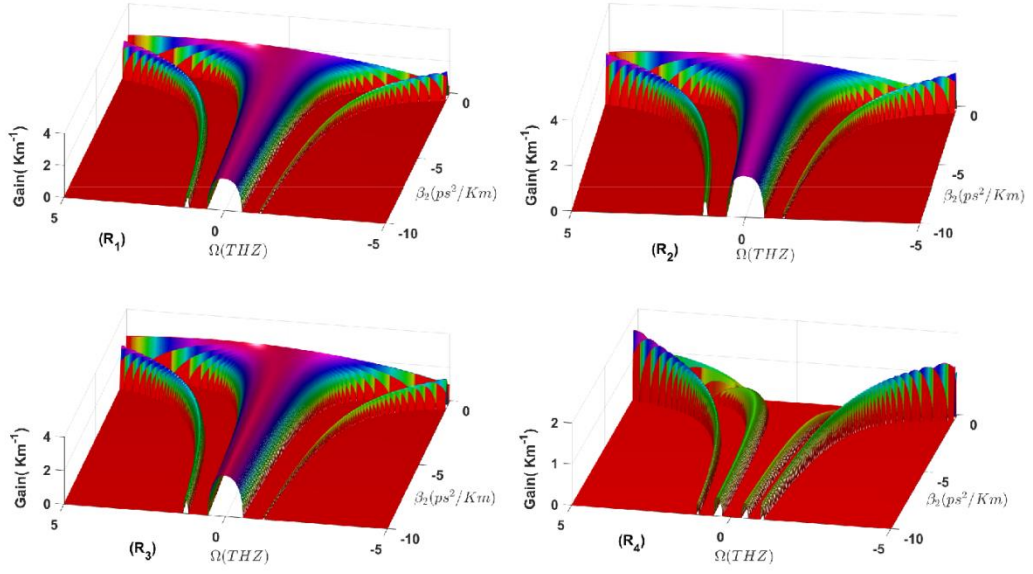


Şekil 3.13. $[\theta = 0^\circ, Q = 0.5/m, P_0 = 650 \text{ kW}]$ için $(N_1)[\gamma = -0.1(/KW.m)]$, $(N_2)[\gamma = -0.01(/KW.m)]$, $(N_3)[\gamma = -0.001(/KW.m)]$, $(N_4)[\gamma = -0.0001(/KW.m)]$ lineer olmayan katsayının (γ) etkisi ile lineer çift kırılmada normal dağılım altında MK gain spektrumlarının gösterimi

Şekil 3.15'de R_1 , R_2 ve R_3 de üç yan lob, R_4 de ise dört yan lob elde edilmiştir. Aynı zamanda Şekil 3.15'de MK gain'in maksimum değeri $\Omega = 0$ 'da (sıfır) görülür, (R_1 , R_2 , ve R_3). Ayrıca, Şekil 3.15'in R_4 grafiğinde MK gain'in maksimum değerinin $\theta = 0$ için sıfır olduğu gösterilmiştir.



Şekil 3.14. $[\theta = 90^\circ, Q = -1.5/m]$ için toplam güç olayının (P_0) etkisiyle dairesel çift kırılmada normal dağılım altında MK gain spektrumlarının gösterimi

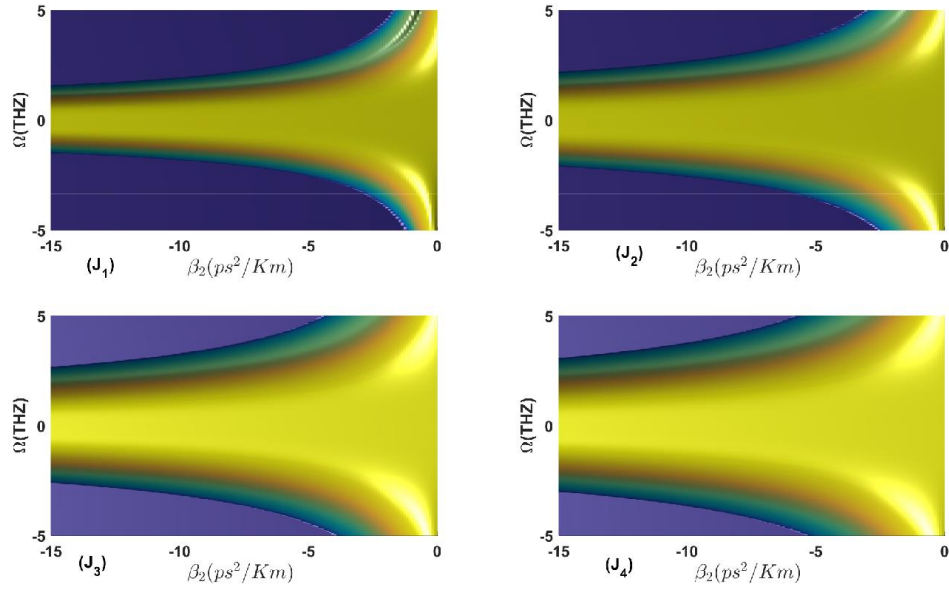


Şekil 3.15. $[\gamma = 0.1/(KW.m), Q = -1.5/m, P_0 = 20.50 kW]$ için (R_1) $[\theta = 90^\circ]$, (R_2) $[\theta = 45^\circ]$, (R_3) $[\theta = 30^\circ]$ ve (R_4) $[\theta = 0^\circ]$ de çift kırılmada eliptik açının etkisiyle anormal dağılım etkisinde MK gain spektrumlarının gösterimi

Bununla birlikte, Şekil 3.16'da, coupled teriminin mutlak değerleri arttığında, kararlı bölgeler azaldığında MK büyüme hızı gösterilmektedir. Bu sonuçlar, Ablowitz ve Horikis, Houwe ve ark. çalışmaları ile karşılaştırıldığında MK gain spektrumlarının yeni davranışını göstermektedir [87, 88].

3.3.2. Anormal Dağılım Etkisi: $\beta_2 < 0$

Anormal dağılım etkisi bağlamında, sırasıyla iyi bilinen lineer çift kırılma, dairesel çift kırılma $((\theta = 90^\circ), (\theta = 45^\circ))$ ve $(\theta = 30^\circ), (\theta = 0^\circ)$ kullanılmaktadır. Şekil 3.15, $(P_0 = 20.50 kW, \gamma = 0.1/(KW.m))$ ve $(Q = -1.5/m)$ için MK gain spektrumlarının varyasyonunu gösterir. Kararsızlık bölgelerinin (kararsız sürekli dalgalar) $(\theta = 30^\circ)$ ve $(\theta = 0^\circ)$ için elde edildiği görülmektedir. Şekil 3.16'da coupled denklemin katsayısının etkisi, anormal dağılım etkisinde MK gain spektrumunun değişimi boyunca ortaya çıkar. Ayrıca, coupled denklemin katsayısının mutlak değeri arttığında MK büyümesi üstel olarak artarken, kararlılık bölgeleri de azalmıştır.



Şekil 3.16. $[\gamma = 0.01/(KW.m), \theta = 45^\circ, P_0 = 10.50 kW]$ için (J_1) $[Q = -10.10/m]$, (J_2) $[Q = -20.10/m]$, (J_3) $[Q = -30.10/m]$ ve (J_4) $[Q = -40.10/m]$ coupled denklemin katsayısının (Q) etkisi ile anormal dağılım etkisinde MK gain spektrumlarının gösterimi

4. PERİYODİK GENEL DEGASPERİS-PROCESİ DENKLEMİNİN YENİ ÇÖZÜMLERİ VE FIRST İNTEGRALLERİ

Rüzgar, su altı depremlerinden oluşan dalgalar ve okyanusa düşen göktaşları kıyıda ciddi hasarlara neden olabilir. Benzer şekilde, yanlış hızda hareket eden bir geminin oluşturduğu dalgalar da kıyıya ulaştıklarında önemli hasarlara neden olmaktadır. Bu örnekler, su yüzeyindeki dalgaların davranışını gözlemlemenin ve değerlendirmenin günlük yaşamda ne kadar önemli olduğunu fazlasıyla göstermektedir. Dalgaların yıkıcı etkilerinin yanı sıra sağladıkları faydalar açısından da incelenmesi ve analiz edilmesi önemlidir. Bunun nedeni, dalgaların kontrol edilemeyen muazzam enerji içermesidir. Yenilenebilir enerji kaynakları günümüzde çok önemli olduğundan, bu enerjinin en azından bir kısmı kontrol edilebilirse, dünyanın günlük enerji ihtiyacının önemli bir kısmının karşılanabileceğine inanılmaktadır. Hem fizik hem de matematiksel problemler açısından kıyılardaki su dalgalarının, nehirlerdeki taşkınlarla oluşan dalgaların, okyanuslardaki fırtınalarda oluşan dalgaların, sulardaki gemi dalgalarının, göl ve limanlar gibi kapalı sulardaki salınımların incelenmesi birçok araştırmacı için oldukça önemlidir. Hareket eden dalgalar, yapılarını koruyan ve $c\in\mathbb{R}$ sabit hızıyla hareket eden kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerine karşılık gelir.

Lineer olmayan evrim denklemleri, fizik, kimya, biyoloji ve malzeme bilimi gibi matematik dışındaki çok çeşitli alanlarda görülen kısmi diferansiyel denklemlerdir. Akış mekaniğinde Navier-Stokes ve Euler Denklemleri, ısı transferi ve biyoloji biliminde reaksiyon-difüzyon denklemi, kuantum mekaniğinde Klein-Gordon denklemi ve Schrödinger denklemi ve malzeme biliminde Cahn-Hilliard denklemi lineer olmayan evrim denklemlerine örnek olarak verilebilir. Uygulamalı bilimlerde çeşitli süreçleri modellemek için evrim denklemleri veya denklem sistemleri kullanılabilir. Bu durum, lineer olmayan evrim denklemlerini ve bu denklemlerin çözümlerinin matematiksel özelliklerini inceleyen çok sayıda araştırmacının dikkatini çekmiştir. Literatürde denge çözümleri, ilerleyen dalgalar, kendine benzer çözümler, zaman-periyodik çözümler gibi özel çözümlerin varlığı, bu çözümlerin dinamik kararlılığı, kaotik dinamikler, tam integrallenebilirlik gibi evrim denklemleriyle ilgili oldukça önemli konular bulunmaktadır. Ayrıca, lineer olmayan evrim denklemleri için çözümlerin varlık tekliği ve çözümlerin verilere sürekli olarak bağlı olması, yani çözümün iyi konumlanmış olması önemli bir çalışma konusu olmuştur. Çözümlerin tekilliği, kararlılığı ve asimptotik davranışı da evrim denklemlerini incelerken ele alınan en temel problemlerden olmuştur.

Bu bölümde, t zamanı bağımsız değişken olmak üzere, bir evrim denklemi olan periyodik genel Degasperis-Proces denkleminin (DPD) matematiksel davranışı ve buna karşılık gelen özel durumlar, iki etkin analitik yöntem altında tartışılmıştır. Birçok araştırmacı, matematiksel fizik, akışkanlar dinamiği, optik fiberler ve ekonomi gibi bilim ve teknolojinin birçok alanında

uygulamaları olan lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin (LOKDD) tam çözümlerine odaklanmıştır. LOKDD'in tam çözümlerini belirlemek için bazı analitik tekniklerde dalga dönüşümlerine ihtiyaç duyulur. Fakat buna, Lie simetrisi, indirgeme yöntemi, değişmez alt uzay yöntemi gibi tekniklerde ihtiyaç duyulmaz.

LOKDD için farklı türde yapılmış çok sayıda bilimsel çalışma vardır. Bazı araştırmacılar bu tür denklemler için çözümlerin varlığı-teklifi üzerinde çalışırken, bazıları da denklemlerin kararlılığını dikkate almıştır. Bununla birlikte, LOKDD ile ilgili büyük çalışmalar çözümler üzerinedir. Literatürde yaklaşık ve analitik çözümler olmak üzere iki farklı çözüm türü ele alınmaktadır. Tam çözüme ulaşamayan veya tam çözümü bulmanın zor olduğu denklemler için geometrik sayısal yöntemler [90-93], çekirdek Hilbert uzayını çoğaltma yöntemi [94, 95] gibi sayısal teknikler uygulanabilir. Lie simetri yöntemi [96-99], Kudryashov yöntemi [100-102], sinüs-Gordon genişletme Yöntemi [103], değişmez altuzay yöntemi [98, 104, 105] gibi birçok teknik, KDD'de tam çözümleri bulmak için son yıllarda geliştirilmiş yöntemler arasındadır.

Bu bölümde, periyodik genel Degasperis-Procesi denkleminin bazı çözümleri araştırılmıştır. Üç sonsuz küçük üreteç (jeneratör) üretmek için Lie simetri yaklaşımı kullanılmıştır. Ayrıca, elde edilen üreteçler yardımıyla oluşturulan iki indirgemeye karşılık gelen üçüncü mertebeden lineer olmayan adi diferansiyel denklemler gösterilmiştir. İncelenmekte olan modelin ilk indirgenmiş ADD'nin first integral ve tam çözümlerini elde etmek için Nucci indirgeme yöntemi kullanılmıştır. Son olarak, ikinci indirgenmiş ADD'nin bazı çözümleri, özel durumlarda sinüs genişletme yöntemi kullanılarak türetilmiştir.

Bu çalışmada,

$$(u - \alpha_1 u_{xx})_t + \alpha_2 u_x + \alpha_3 uu_x + \alpha_4 u_{xxx} = \alpha_1 (\alpha_5 u_x u_{xx} + uu_{xxx}), x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+ \quad (4.1)$$

periyodik genel DPD'nin analitik çözümleri verilmiştir [106-108]. Burada, $u(x, t)$ üç boyutlu uzayda x yönünde, t zamanındaki sıvı hızı veya yüzen bir tekne üzerindeki suyun serbest yüzeyinin yüksekliği olarak ifade edilir. Ayrıca, α_2 , kritik sıg su dalgası hızını ve $\alpha_3, \alpha_5, \alpha_1$ dağılım parametrelerini göstermektedir. Literatürde (4.1) denkleminin bazı soliter dalga çözümleri ele alınmıştır [109]. (4.1) denkleminin yürüyen dalga çözümlerini elde etmek için yardımcı denklem yöntemi kullanılmıştır [110]. Ayrıca (4.1) denkleminin çan şeklindeki solitonlarını, periyodik ve karmaşık çözümlerini elde etmek için genişletilmiş tanh yöntemi, rasyonel hiperbolik fonksiyonlar yöntemi ve rasyonel üstel fonksiyonlar yöntemi kullanılmıştır [111].

$\alpha_3 = 3, \alpha_5 = 2, \alpha_4 = 0$ olduğunda (4.1) denklemi, ilk olarak Camassa, Holm ve Hymanin tarafından bir su dalgası problemi olarak türetilen Camassa-Holm denklemi (CHD) olarak bilinir [112, 113]. CHD için bazı tam soliter dalga çözümleri, tepe noktaları ve anti-tepe noktaları, periyodik tepe noktaları, periyodik dalga çözümleri ve kompaktan çözümleri ifade

edilmiştir [114]. CHD'nin genel durumu için bazı tam çözümler Lie simetrisi ve μ -simetri yöntemleriyle elde edilmiştir [115]. CHD tipi sistemlerin Darboux dönüşümleri de incelenmiştir [116]. CHD'nin soliter düzgün tümsek çözümlerinden oluşan bir aileye sahip olmak için homotopi analizi yaklaşımı kullanılmıştır [117]. Öte yandan, $\alpha_1 = 1, \alpha_3 = 4, \alpha_5 = 3, \alpha_4 = 0$ ve $\alpha_2 = 0$ olduğunda (4.1) denklemi klasik tip DPD'yi belirtir. DPD'nin n-tepe noktası çözümlerini hesaplamak için bir ters saçılma tekniği oluşturulmuştur [118]. DPD'nin çok-soliton çözümleri de bir indirgeme prosedürü yardımıyla sunulmuştur [119]. DPD için tek tepe noktası çözümü, ters hörgüç benzeri ve döngü benzeri soliter dalga çözümleri ele alınmıştır [120].

(4.1) denkleminde çıkarılabilen bir başka üçüncü mertebeden diferansiyel denklem b-family denklemleridir. Bu ise (4.1) denkleminde $\alpha_3 = \alpha_5 + 1 = b + 1, \alpha_5 = b, \alpha_1 = 1, \alpha_4 = \alpha_2 = 0$ alınarak türetilir. Yukarıda ele alınan denklemin çözümleri için bazı özellikler incelenmiştir. Ayrıca, verilen denklem için şapka-şekli ve çan-şekli soliter dalga çözümleri elde edilmiştir. Mutlak Cauchy-Kowalewski teoreminden yararlanan yazarlar yerel olarak zaman içinde bir tek analitik çözüm kabul eden b-family denklemini göstermiştir [121-123].

(4.1) denklemi için ele alınacak son durum $\alpha_3 = 1, \alpha_5 = 3, \alpha_1 = 1, \alpha_4 = 0, \alpha_2 = 1$ 'e karşılık gelir. Bu durumda (4.1) denklemi, Fornberg-Whitham denklemi (FWD) olur. FWD'nin grup invaryant çözümleri ve korunum yasaları ele alınmıştır [124]. FWD için bazı pürüzsüz periyodik dalga, periyodik zirve dalgası, pürüzsüz soliter dalga ve döngü-soliton çözümleri ifade edilmiştir [125].

Bu kısımda ele alınan problemin Lie simetrileriyle ilgili bazı standart durumlar ele alınacaktır. Üç sonsuz küçük üreticiler (jeneratör) ve karşılık gelen iki indirgeme gösterilecektir. Kapalı ve açık çözümlere karşılık gelen first integrallere ulaşmak için Nucci yöntemiyle ilk indirgeme yapılacaktır. Ayrıca, ele alınan problemin özel durumları verilecektir.

4.1. Lie Simetrileri ve İndirgemeler

Lie simetrisi, diferansiyel denklemler için faydalı bir tekniktir. Bu avantajlı yaklaşım, fizik ve mühendislik gibi uygulamalı bilimlerdeki bazı problemlerin matematiksel olarak modellenmesiyle oluşturulan adi, kısmi ve kesirli diferansiyel denklemleri çözmek için tercih edilmektedir. Bu nedenle, sistematik bir teknik olan Lie gruplarının hem adi hem de kısmi diferansiyel denklemlerin özel analitik çözümlerini elde etmemizi sağlaması beklenir. Bu yaklaşım, bir invaryant diferansiyel denklem formundan ayrılan değişken dönüşümlerin hesaplanmasını gerektirir. Simetri yöntemi eşdeğer diferansiyel denklem sistemlerinin daha basit bir formla belirlenmesine ve karmaşık sistemlerin azaltılmasına olanak sağlar.

Sonsuz küçük dönüşümlerin tek parametrelili bir Lie grubu

$$t^* = t + \delta\phi^1(t, x, u) + O(\delta^2) \quad (4.2)$$

$$x^* = x + \delta \phi^2(t, x, u) + O(\delta^2) \quad (4.3)$$

$$u^* = u + \delta \eta(t, x, u) + O(\delta^2) \quad (4.4)$$

olsun. Burada grup parametresi δ sembolü ile gösterilmiştir. Ayrıca, Γ tarafından belirtilen vektör alanı kümesi

$$\Gamma = \phi^1(t, x, u) \frac{\partial}{\partial t} + \phi^2(t, x, u) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(t, x, u) \frac{\partial}{\partial u} \quad (4.5)$$

ile belirtilen vektör alanı kümesi sonsuz küçük simetrilerin Lie cebiri ile ilgilidir. $Pr^{(3)}\Gamma$, Γ 'nın üçüncü uzantısını temsil ediyorsa, değişmezlik koşulu

$$Pr^{(3)}\Gamma(\Delta)|_{\Delta=0} = 0 \quad (4.6)$$

şeklindedir. Burada $\Delta = (u - \alpha_1 u_{xx})_t + \alpha_2 u_x + \alpha_3 u u_x + \alpha_4 u_{xxx} - \alpha_1(\alpha_5 u_x u_{xx} + u u_{xxx})$ dir ve ϕ^1 , ϕ^2 ve η ya bağlı over determined lineer sistemi elde edilir, buna belirleyici denklemler de denir. Bu denklemler çözüldükten sonra

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \frac{\partial}{\partial t}, \Gamma_2 = \frac{\partial}{\partial x} \\ \Gamma_3 &= (1 - \alpha_3)\alpha_1 t \frac{\partial}{\partial t} + (\alpha_3\alpha_4 + \alpha_1\alpha_2)t \frac{\partial}{\partial x} + (\alpha_3\alpha_1 u + \alpha_1\alpha_2 - \alpha_1 u + \alpha_4) \frac{\partial}{\partial u} \end{aligned} \quad (4.7)$$

şeklinde üç sonsuz küçük üreteç (jeneratör) elde edilmiş olur.

İndirgeme 1: $\Gamma_1 + c\Gamma_2 = \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x}$ eşitliği ile ilgili benzerlik değişkenleri, $\xi = x - ct$ olmak üzere

$$\begin{aligned} (\alpha_2 - c)\mathcal{Y}'(\xi) + \alpha_3 \mathcal{Y}(\xi)\mathcal{Y}'(\xi) - \alpha_1\alpha_5 \mathcal{Y}'(\xi)\mathcal{Y}''(\xi) + (\alpha_4 + c\alpha_1)\mathcal{Y}'''(\xi) \\ - \alpha_1 \mathcal{Y}(\xi)\mathcal{Y}'''(\xi) = 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

denklemiyle $u(t, x) = \mathcal{Y}(\xi)$ şeklindedir.

İndirgeme 2: $\Gamma_3 = (1 - \alpha_3)\alpha_1 t \frac{\partial}{\partial t} + (\alpha_3\alpha_4 + \alpha_1\alpha_2)t \frac{\partial}{\partial x} + (\alpha_3\alpha_1 u + \alpha_1\alpha_2 - \alpha_1 u + \alpha_4) \frac{\partial}{\partial u}$ ile ilgili benzerlik değişkenleri

$$u(x, t) = \frac{\alpha_1(\alpha_3 - 1)\mathcal{G}(\xi) - \alpha_1\alpha_2 t - \alpha_4 t}{\alpha_1(\alpha_3 - 1)t}, \xi = \frac{\alpha_3\alpha_1 x + \alpha_3\alpha_4 t + \alpha_1\alpha_2 t - \alpha_1 x}{\alpha_1(\alpha_3 - 1)} \quad (4.9)$$

şeklindedir ve

$$\alpha_1 \mathcal{G}(\xi)\mathcal{G}'''(\xi) - \alpha_1 \mathcal{G}''(\xi) + \alpha_1\alpha_5 \mathcal{G}'(\xi)\mathcal{G}''(\xi) - \alpha_3 \mathcal{G}(\xi)\mathcal{G}'(\xi) + \mathcal{G}(\xi) = 0 \quad (4.10)$$

denklemini sağlar.

4.2. Nucci'nin İndirgeme Yöntemi

Bu kısımda, (4.8) denkleminin bazı yeni tam çözümleri ve bunlara karşılık gelen first integraller bulunacaktır. Bu tam çözüm ve first integralleri elde etmek için Nucci'nin indirgeme yöntemini kullanılacaktır. Bu teknik ilk olarak diferansiyel denklemlerin lokal olmayan simetrilerini bulmak için önerilmiştir [67]. Son zamanlarda tanımlanan tekil olmayan çekirdeğe (kernel) sahip kesirli türevler ile evrim tipi diferansiyel denklemler de Nucci'nin indirgeme yöntemi ile incelenmiştir [126]. Bu indirgeme yöntemi altında

$$\mathcal{V}_1(\xi) = \mathcal{Y}(\xi), \quad \mathcal{V}_2(\xi) = \mathcal{Y}'(\xi), \quad \mathcal{V}_3(\xi) = \mathcal{Y}''(\xi)$$

değişken değişimlerini yapalım [96, 127, 128]. Bu durumda

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1' &= \mathcal{V}_2 \\ \mathcal{V}_2' &= \mathcal{V}_3 \end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\mathcal{V}_3' = \frac{(\alpha_2 - c)\mathcal{V}_2 + \alpha_3\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2 - \alpha_1\alpha_5\mathcal{V}_2\mathcal{V}_3}{\alpha_1\mathcal{V}_1 - \alpha_4 - c\alpha_1}$$

şeklindeki ADD sistemi (4.8) denkleminde elde edilebilir. $\mathcal{V}_1$, yeni bir bağımsız değişken olarak seçilirse, (4.11) sistemi

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{V}_2}{d\mathcal{V}_1} &= \frac{\mathcal{V}_3}{\mathcal{V}_2} \\ \frac{d\mathcal{V}_3}{d\mathcal{V}_1} &= \frac{(\alpha_2 - c) + \alpha_3\mathcal{V}_1 - \alpha_1\alpha_5\mathcal{V}_3}{\alpha_1\mathcal{V}_1 - \alpha_4 - c\alpha_1} \end{aligned} \tag{4.12}$$

olur. (4.12)'nin ikinci denklemi değişkenlerine ayrılabilir ADD'dir ve integralinin alınmasıyla, $\mathcal{R}_1$ keyfi sabit olmak üzere;

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_3(\mathcal{V}_1) &= \frac{\alpha_3\alpha_5\alpha_1\mathcal{V}_1 + (\alpha_3 - \alpha_5 - 1)c\alpha_1 + (\alpha_5 + 1)\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_4}{\alpha_5(\alpha_5 + 1)\alpha_1^2} \\ &\quad + \frac{\mathcal{R}_1}{(c\alpha_1 + \alpha_4 - \alpha_1\mathcal{V}_1)^{\alpha_5}} \end{aligned} \tag{4.13}$$

elde edilir. $\mathcal{Y}$ ve ξ 'ye bağlı (4.8) denkleminde karşılık gelen bir first integral;

$$\begin{aligned} \frac{(c\alpha_1 + \alpha_4 - \alpha_1 \mathcal{Y}(\xi))^{\alpha_5}}{\alpha_5(\alpha_5 + 1)\alpha_1^2} & \left((\alpha_5 + 1)\alpha_1^2 \mathcal{Y}''(\xi) - \alpha_3 \alpha_5 \alpha_1 \mathcal{Y}(\xi) - (\alpha_3 - \alpha_5 - 1)c\alpha_1 \right. \\ & \left. - (\alpha_5 + 1)\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3 \alpha_4 \right) = \mathcal{R}_1 \end{aligned} \quad (4.14)$$

şeklindedir. (4.13)'ün (4.12)'deki ilk denklemden yerine yazılması ve elde edilen denklemin çözülmesiyle, $\mathcal{R}_2$ keyfi sabit olmak üzere;

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_2(\mathcal{V}_1) = \frac{1}{\sqrt{\alpha_5(\alpha_5^2 - 1)\alpha_1}} & \left[2\mathcal{R}_1 \alpha_5(\alpha_5 + 1)\alpha_1(c\alpha_1 + \alpha_4 - \alpha_1 \mathcal{V}_1)^{1-\alpha_5} \right. \\ & + \mathcal{V}_1^2(\alpha_5 + 1)\alpha_5 \alpha_3 \alpha_1 + \mathcal{R}_2(\alpha_5^2 - 1)\alpha_5 \alpha_1^2 \\ & + 2\mathcal{V}_1 \left(c\alpha_1 \alpha_5(\alpha_3 - \alpha_5) + \alpha_2 \alpha_1(\alpha_5^2 - 1) + \alpha_3 \alpha_4(\alpha_5 - 1) \right. \\ & \left. \left. + c\alpha_1(1 - \alpha_3) \right) \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.15)$$

elde edilir. Buradan $\mathcal{Y}$ ve ξ 'ye bağlı (4.8) denkleminin karşılık gelen bir diğer first integral;

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_1^3 \alpha_5(\alpha_5^2 - 1)} & \left[2\alpha_5(\alpha_5 + 1)\alpha_1^2 \mathcal{Y}''(\xi)(\mathcal{Y}(\xi) - \alpha_4 - c\alpha_1) \right. \\ & + \alpha_5(\alpha_5^2 - 1)\alpha_1^3 (\mathcal{Y}'(\xi))^2 - \alpha_5(\alpha_5 + 1)\alpha_3 \alpha_1^2 \mathcal{Y}(\xi)^2 \\ & + 2\alpha_5(\alpha_5 + 1)(c - 1)\alpha_1^2 \mathcal{Y}(\xi) + 2(\alpha_3 - \alpha_5 - 1)c^2 \alpha_1^2 \\ & + 2(\alpha_5 + 1)(\alpha_4 + c\alpha_1)\alpha_2 \alpha_1 + 2(2\alpha_3 - \alpha_5 - 1)\alpha_4 c\alpha_1 \\ & \left. + 2\alpha_3 \alpha_4^2 \right] = \mathcal{R}_2 \end{aligned} \quad (4.16)$$

şeklinde olur. Şimdi, $\mathcal{V}_1$, bağımlı değişken olsun. (4.15) ve (4.11)'in ilk denkleminde,

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1'(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\alpha_5(\alpha_5^2 - 1)\alpha_1}} & \left[2\mathcal{R}_1 \alpha_5(\alpha_5 + 1)\alpha_1(c\alpha_1 + \alpha_4 - \alpha_1 \mathcal{V}_1(\xi))^{1-\alpha_5} \right. \\ & + \mathcal{V}_1^2(\xi)(\alpha_5 + 1)\alpha_5 \alpha_3 \alpha_1 + \mathcal{R}_2(\alpha_5^2 - 1)\alpha_5 \alpha_1^2 \\ & + 2\mathcal{V}_1(\xi) \left(c\alpha_1 \alpha_5(\alpha_3 - \alpha_5) + \alpha_2 \alpha_1(\alpha_5^2 - 1) + \alpha_3 \alpha_4(\alpha_5 - 1) \right. \\ & \left. \left. + c\alpha_1(1 - \alpha_3) \right) \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.17)$$

elde edilir. Bu denklem $\mathcal{R}_3$ keyfi sabit ve

$$\begin{aligned}\Omega = & \left[2\mathcal{R}_1\alpha_5(\alpha_5 + 1)\alpha_1(c\alpha_1 + \alpha_4 - \alpha_1\mathcal{V}_1(\xi))^{1-\alpha_5} + \mathcal{V}_1^2(\xi)(\alpha_5 + 1)\alpha_5\alpha_3\alpha_1 \right. \\ & + \mathcal{R}_2(\alpha_5^2 - 1)\alpha_5\alpha_1^2 \\ & + 2\mathcal{V}_1(\xi)(c\alpha_1\alpha_5(\alpha_3 - \alpha_5) + \alpha_2\alpha_1(\alpha_5^2 - 1) + \alpha_3\alpha_4(\alpha_5 - 1) \\ & \left. + c\alpha_1(1 - \alpha_3)) \right]^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\xi - \int \frac{\sqrt{\alpha_5(\alpha_5^2 - 1)\alpha_1}}{\Omega} d\mathcal{V}_1 + \mathcal{R}_3 = 0 \quad (4.18)$$

şeklinde kapalı çözüme sahip olan birinci mertebeden lineer olmayan değişkenlerine ayrılabilir bir ADD'dir.

$\mathcal{R}_1 = 0$ alınırsa, (4.18) denkleminden

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}(\xi) = \mathcal{V}_1(\xi) = & \frac{\exp\left(-\sqrt{\frac{\alpha_3(\alpha_5 - 1)}{(\alpha_5^2 - 1)\alpha_1}}(\xi + \mathcal{R}_3)\right)}{2\alpha_3\alpha_5^2\alpha_1(\alpha_5 - 1)\sqrt{\alpha_3\alpha_1(\alpha_5 + 1)}} \left[\alpha_3\alpha_5\alpha_1 \exp\left(2\sqrt{\frac{\alpha_3(\alpha_5 - 1)}{(\alpha_5^2 - 1)\alpha_1}}(\xi + \mathcal{R}_3)\right) \right. \\ & + 2\alpha_5(\alpha_5 - 1)\sqrt{\alpha_3\alpha_1(\alpha_5 + 1)}((\alpha_5 - \alpha_3 + 1)c\alpha_1 - (\alpha_5 + 1)\alpha_1\alpha_2 \\ & - \alpha_3\alpha_4) \exp\left(\sqrt{\frac{\alpha_3(\alpha_5 - 1)}{(\alpha_5^2 - 1)\alpha_1}}(\xi + \mathcal{R}_3)\right) + \alpha_3\alpha_5^3\alpha_1^3(2\alpha_5^2 - \alpha_5^4 - 1)\mathcal{R}_2 \\ & + \alpha_5\alpha_1^2\alpha_2^2(\alpha_5^5 + \alpha_5^4 - 2\alpha_5^3 - 2\alpha_5^2 + \alpha_5 + 1) \\ & + \alpha_5c^2\alpha_1^2(\alpha_3^2\alpha_5(\alpha_5^2 - \alpha_5 - 1) + \alpha_3^2 - 2\alpha_3 + 1) \\ & + \alpha_5(\alpha_5^4 + \alpha_5^3 - 2\alpha_5^2 - 2\alpha_5 + 1) + 2\alpha_3\alpha_5^2(2 - \alpha_5^2)) \\ & + 2c\alpha_5\alpha_1^2\alpha_2(\alpha_3\alpha_5^2(\alpha_5^2 - 2) - \alpha_5^5 - \alpha_5^4 + 2\alpha_5^3 + 2\alpha_5^2 - \alpha_5 - 1 + \alpha_3) \\ & + 2\alpha_3\alpha_5\alpha_4\alpha_1\alpha_2(\alpha_5^4 - 2\alpha_5^2 + 1) + \alpha_3^2\alpha_5\alpha_4^2(\alpha_3^3 - \alpha_5^2 - \alpha_5 + 1) \\ & \left. + 2c\alpha_3\alpha_5\alpha_4(\alpha_3\alpha_5(\alpha_5^2 - \alpha_5 - 1) - \alpha_5^4 + 2\alpha_5^2 - 1 + \alpha_3) \right] \quad (4.19)\end{aligned}$$

açık çözümü elde edilir. Bu nedenle, İndirgeme 1 ve ilerleyen dalga dönüşümünden, (4.1) denkleminin son çözümü

$$\begin{aligned}
u(x, t) = & \frac{\exp\left(-\frac{\sqrt{\frac{\alpha_3(\alpha_5-1)}{(\alpha_5^2-1)\alpha_1}}(x-ct+\mathcal{R}_3)}{2\alpha_3\alpha_5^2\alpha_1(\alpha_5-1)\sqrt{\alpha_3\alpha_1(\alpha_5+1)}}\right)}{\left[\alpha_3\alpha_5\alpha_1\exp\left(2\sqrt{\frac{\alpha_3(\alpha_5-1)}{(\alpha_5^2-1)\alpha_1}}(x-ct+\mathcal{R}_3)\right) \right.} \\
& + 2\alpha_5(\alpha_5-1)\sqrt{\alpha_3\alpha_1(\alpha_5+1)}((\alpha_5-\alpha_3+1)c\alpha_1 - (\alpha_5+1)\alpha_1\alpha_2 \\
& - \alpha_3\alpha_4)\exp\left(\frac{\sqrt{\frac{\alpha_3(\alpha_5-1)}{(\alpha_5^2-1)\alpha_1}}(x-ct+\mathcal{R}_3)}{\sqrt{\frac{\alpha_3(\alpha_5-1)}{(\alpha_5^2-1)\alpha_1}}}\right) + \alpha_3\alpha_5^3\alpha_1^3(2\alpha_5^2 - \alpha_5^4 - 1)\mathcal{R}_2 \\
& + \alpha_5\alpha_1^2\alpha_2^2(\alpha_5^5 + \alpha_5^4 - 2\alpha_5^3 - 2\alpha_5^2 + \alpha_5 + 1) \\
& + \alpha_5c^2\alpha_1^2(\alpha_3^2\alpha_5(\alpha_5^2 - \alpha_5 - 1) + \alpha_3^2 - 2\alpha_3 + 1 \\
& + \alpha_5(\alpha_5^4 + \alpha_5^3 - 2\alpha_5^2 - 2\alpha_5 + 1) + 2\alpha_3\alpha_5^2(2 - \alpha_5^2)) \\
& + 2c\alpha_5\alpha_1^2\alpha_2(\alpha_3\alpha_5^2(\alpha_5^2 - 2) - \alpha_5^5 - \alpha_5^4 + 2\alpha_5^3 + 2\alpha_5^2 - \alpha_5 - 1 + \alpha_3) \\
& + 2\alpha_3\alpha_5\alpha_4\alpha_1\alpha_2(\alpha_5^4 - 2\alpha_5^2 + 1) + \alpha_3^2\alpha_5\alpha_4^2(\alpha_5^3 - \alpha_5^2 - \alpha_5 + 1) \\
& \left. + 2c\alpha_3\alpha_5\alpha_4(\alpha_3\alpha_5(\alpha_5^2 - \alpha_5 - 1) - \alpha_5^4 + 2\alpha_5^2 - 1 + \alpha_3) \right] \quad (4.20)
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir.

Şimdi, fiziksel açıdan önemli olan bazı özel durumlara karşılık gelen first integraller ve tam çözümleri araştıracağız.

4.2.1. I. Durum: Camassa-Holm Denklemi

(4.1) denkleminde, $\alpha_3 = 3, \alpha_5 = 2, \alpha_4 = 0$ seçilirse

$$u_t - \alpha_1 u_{xxt} + \alpha_2 u_x + 3uu_x = \alpha_1(2u_x u_{xx} + uu_{xxx}) \quad (4.21)$$

şeklindeki Camassa-Holm denklemi elde edilir. (4.1) denklemi için genel first integrallerden, karşılık gelen parametreler (4.14) ve (4.16) denklemlerinde yerine yazılırsa, (4.21) Camassa-Holm denklemi için first integraller

$$\frac{\alpha_1}{2}(\mathcal{Y}(\xi) - c)^2(2\alpha_1\mathcal{Y}''(\xi) - 2\mathcal{Y}(\xi) - \alpha_2) = \mathcal{R}_1$$

ve

$$2(\mathcal{Y}(\xi) - c)\mathcal{Y}''(\xi) + (\mathcal{Y}'(\xi))^2 - \frac{3}{\alpha_1}\mathcal{Y}^2(\xi) + \frac{2(c - \alpha_2)}{\alpha_1}\mathcal{Y}(\xi) + \frac{c\alpha_2}{\alpha_1} = \mathcal{R}_2$$

olur. Ayrıca, (4.20)'den (4.21)'in tam çözümü

$$u(x, t) = \frac{4\sqrt{\alpha_1} \exp^2\left(-\frac{x-ct+\mathcal{R}_3}{\sqrt{\alpha_1}}\right) - 4\alpha_1\alpha_2 \exp\left(-\frac{x-ct+\mathcal{R}_3}{\sqrt{\alpha_1}}\right) + \alpha_1\sqrt{\alpha_1}\alpha_2^2 - 4\alpha_1^2\sqrt{\alpha_1}\mathcal{R}_2}{8\alpha_1 \exp\left(-\frac{x-ct+\mathcal{R}_3}{\sqrt{\alpha_1}}\right)}$$

şeklinde elde edilir.

4.2.2. II. Durum: Degasperis-Procesi Denklemi

$\alpha_1 = 1, \alpha_3 = 4, \alpha_5 = 3, \alpha_4 = 0$ ve $\alpha_2 = 0$ kabul edildiğinde (4.1) denklemi

$$u_t - u_{xxt} + 4uu_x = 3u_x u_{xx} + uu_{xxx} \quad (4.22)$$

şeklindeki Degasperis-Procesi denklemi (DPD) olur. (4.1) denklemi için genel first integrallerden, karşılık gelen parametreler (4.14) ve (4.16) denklemlerinde yerine yazılabilir. Bu durumda (4.22) DPD denklemi için first integraller

$$(\mathcal{Y}(\xi) - c)^3 (\mathcal{Y}(\xi) - \mathcal{Y}''(\xi)) = \mathcal{R}_1$$

ve

$$(\mathcal{Y}(\xi) - c) \mathcal{Y}'''(\xi) + (\mathcal{Y}'(\xi))^2 - 2\mathcal{Y}^2(\xi) + c\mathcal{Y}(\xi) = \mathcal{R}_2$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca, (4.20)'den, (4.22) denkleminin tam çözümü

$$u(x, t) = \frac{\exp^2(ct - x + \mathcal{R}_3) - \mathcal{R}_2}{2\exp(ct - x + \mathcal{R}_3)}$$

şeklinde olur.

4.2.3. III. Durum: b-family Denklemi

(4.1) denkleminde $\alpha_3 = \alpha_5 + 1 = b + 1, \alpha_5 = b, \alpha_1 = 1, \alpha_4 = \alpha_2 = 0$ alınırsa,

$$u_t - u_{xxt} + (b + 1)uu_x = bu_x u_{xx} + uu_{xxx} \quad (4.23)$$

şeklindeki b-family denklemi elde edilir. (4.1) denklemi için genel first integrallerden, karşılık gelen parametreler (4.14) ve (4.16) denklemlerinde yerine koyulabilir. Bu durumda (4.23) b-family denkleminin first integralleri

$$(c - \mathcal{Y}(\xi))^b (\mathcal{Y}''(\xi) - \mathcal{Y}(\xi)) = \mathcal{R}_1$$

ve

$$\frac{1}{1-b} \left(2(c - \mathcal{Y}(\xi))\mathcal{Y}''(\xi) + (1-b)(\mathcal{Y}'(\xi))^2 + (1+b)\mathcal{Y}^2(\xi) - 2c\mathcal{Y}(\xi) \right) = \mathcal{R}_2$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca, (4.20)'den, (4.23) denkleminin tam çözümü

$$u(x, t) = \frac{\exp^2(ct - x - \mathcal{R}_3) - \mathcal{R}_2 b^2 (b^4 - 2b^2 + 1)}{2b(b^2 - 1)\exp(ct - x - \mathcal{R}_3)}$$

şeklindedir.

4.2.4. IV. Durum: Fornberg-Whitham Denklemi

(4.1) denkleminde $\alpha_3 = 1, \alpha_5 = 3, \alpha_1 = 1, \alpha_4 = 0, \alpha_2 = 1$ değerleri alındığında,

$$u_t - u_{xxt} + u_x - uu_x = 3u_x u_{xx} + uu_{xxx} \quad (4.24)$$

şeklindeki Fornberg-Whitham denklemi elde edilir. (4.1) denklemi için genel first integrallerden, karşılık gelen parametreler (4.14) ve (4.16) denklemlerinde yerine yazılırsa, (4.24) Fornberg-Whitham denkleminin first integralleri

$$\frac{1}{12} (\mathcal{Y}(\xi) - c)^3 (3\mathcal{Y}(\xi) - 12\mathcal{Y}''(\xi) - 3c + 4) = \mathcal{R}_1$$

ve

$$(\mathcal{Y}(\xi) - c)\mathcal{Y}''(\xi) + (\mathcal{Y}'(\xi))^2 - \frac{1}{2}\mathcal{Y}^2(\xi) + (c - 1)\mathcal{Y}(\xi) - \frac{c^2}{4} + \frac{c}{3} = \mathcal{R}_2$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca, (4.20)'den (4.24) denkleminin tam çözümü

$$u(x, t) = \frac{\exp^2\left(-\frac{1}{2}(x - ct + \mathcal{R}_3)\right) + (6c - 8)\exp\left(-\frac{1}{2}(x - ct + \mathcal{R}_3)\right) + 9c^2 - 24c - 36\mathcal{R}_2 + 16}{6\exp\left(-\frac{1}{2}(x - ct + \mathcal{R}_3)\right)}$$

formunda olur.

4.3. (4.10) Denkleminin Özel Çözümleri

(4.10) denkleminin tam çözümüne ulaşmak için ilk olarak Sinüs genişletme yöntemini uygulanacaktır. Bu yaklaşımda λ, μ ve v belirlenecek sabitler olmak üzere (4.10) denkleminin çözümünün

$$\mathcal{G}(\xi) = \lambda \sin^v(\mu\xi) \quad (4.25)$$

formunda olduğunu varsayalım. (4.25) denkleminin (4.10)'da yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned} & -\lambda(\mu^3 v^3 \alpha_5 \alpha_1 + \mu^3 v^3 \alpha_1 + \alpha_3 \mu v) \sin^{2v}(\mu\xi) \cos^3(\mu\xi) \\ & + \lambda(\alpha_5 \alpha_1 \mu^3 v^2 + 3\alpha_1 \mu^3 v^2 - 2\alpha_1 \mu^3 v + \alpha_3 \mu v) \sin^{2v}(\mu\xi) \cos(\mu\xi) \\ & + (\mu^2 v^2 \alpha_1 + 1) \sin^{v+1}(\mu\xi) \cos^2(\mu\xi) - (\alpha_1 \mu^2 v + 1) \sin^{v+1}(\mu\xi) = 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

elde edilir. (4.26) denklemindeki güçlerin dengelenmesiyle, yani $2v = v + 1$ alınmasıyla $v = 1$ olduğu bulunur. Bu nedenle (4.26) denkleminde $v = 1$ değeri yerine yazıldıktan sonra oluşan

$$\begin{aligned} & (\alpha_5 + 1) \alpha_1 \lambda \mu^3 + \alpha_3 \mu \lambda = 0 \\ & \alpha_1 \mu^2 + 1 = 0 \end{aligned} \quad (4.27)$$

cebirsel sistemin çözülmesi yeterlidir. (4.27) denkleminin çözümünden $\alpha_5 = \alpha_3 - 1, \mu = \frac{1}{\sqrt{-\alpha_1}}$ elde edilir. O halde (4.10) denkleminin özel çözümü;

$$\mathcal{G}(\xi) = \lambda \sin\left(\frac{\xi}{\sqrt{-\alpha_1}}\right), \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (4.28)$$

şeklinde yazılabilir.

Dolayısıyla $\alpha_5 = \alpha_3 - 1$ olması koşuluyla, (4.9) benzerlik değişkenleri (4.1) denklemi için aşağıdaki nihai çözümü verir:

$$u(x, t) = \frac{\lambda \alpha_1 (\alpha_3 - 1) \sin\left(\frac{\alpha_3 \alpha_1 x + \alpha_3 \alpha_4 t + \alpha_1 \alpha_2 t - \alpha_1 x}{\alpha_1 (\alpha_3 - 1) \sqrt{-\alpha_1}}\right) - \alpha_1 \alpha_2 t - \alpha_4 t}{\alpha_1 (\alpha_3 - 1) t} \quad (4.29)$$

Benzer yöntemle, (4.10) denkleminin özel çözümü

$$\mathcal{G}(\xi) = \lambda \sinh^v(\mu\xi) \quad (4.30)$$

şeklinde kabul edilirse $v = 1, \alpha_5 = \alpha_3 - 1, \mu = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}}$ elde edilebilir. Dolayısıyla (4.1) denkleminin bir başka nihai çözümü, $\alpha_5 = \alpha_3 - 1$ olması koşuluyla;

$$u(x, t) = \frac{\lambda \alpha_1 (\alpha_3 - 1) \sinh\left(\frac{\alpha_3 \alpha_1 x + \alpha_3 \alpha_4 t + \alpha_1 \alpha_2 t - \alpha_1 x}{\alpha_1 (\alpha_3 - 1) \sqrt{\alpha_1}}\right) - \alpha_1 \alpha_2 t - \alpha_4 t}{\alpha_1 (\alpha_3 - 1) t} \quad (4.31)$$

şeklinde yazılabilir.

(4.1) denkleminin breather dalga çözümlerini oluşturmak için, n_1, n_2, p ve q belirlenecek keyfi sabitler olmak üzere (4.10) denklemi için bir çözüm olarak

$$\mathcal{G}(\xi) = \exp(-q\xi) + n_1 \cos(p\xi) + n_2 \exp(q\xi) \quad (4.32)$$

şeklindeki deneme fonksiyonunu ele alalım. (4.32) denkleminin (4.10) denkleminde yerine yazılması ve $j \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ için $\cos(p\xi), \sin(p\xi)$ ve $\exp(jq\xi)$ terimlerinin katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle, $\alpha_5 = \alpha_3 - 1, p = \pm \frac{1}{\sqrt{-\alpha_1}}, q = \pm \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}}$ ifadeleri elde edilir. Böylece (4.1) denkleminin breather dalga çözümü

$$\mathcal{G}(\xi) = \exp\left(\pm \frac{\xi}{\sqrt{\alpha_1}}\right) + n_1 \cos\left(\pm \frac{\xi}{\sqrt{-\alpha_1}}\right) + n_2 \exp\left(\pm \frac{\xi}{\sqrt{\alpha_1}}\right) \quad (4.33)$$

şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla (4.9) dönüşümünden, (4.1) denkleminin başka bir nihai çözümü

$$\begin{aligned} u(x, t) = \frac{1}{t} & \left(\exp\left(\pm \frac{\alpha_3 \alpha_1 x + \alpha_3 \alpha_4 t + \alpha_1 \alpha_2 t - \alpha_1 x}{\alpha_1 \sqrt{\alpha_1} (\alpha_3 - 1)}\right) \right. \\ & + n_1 \cos\left(\pm \frac{\alpha_3 \alpha_1 x + \alpha_3 \alpha_4 t + \alpha_1 \alpha_2 t - \alpha_1 x}{\alpha_1 \sqrt{\alpha_1} (\alpha_3 - 1)}\right) \\ & \left. + n_2 \exp\left(\pm \frac{\alpha_3 \alpha_1 x + \alpha_3 \alpha_4 t + \alpha_1 \alpha_2 t - \alpha_1 x}{\alpha_1 \sqrt{\alpha_1} (\alpha_3 - 1)}\right) \right) - \frac{\alpha_1 \alpha_2 t + \alpha_4}{\alpha_1 (\alpha_3 - 1)t} \end{aligned} \quad (4.34)$$

şeklinde yazılabilir.

5. PERİYODİK HUNTER-SAXTON DENKLEMİNİN LİE SİMETRİ VE NUCCI YÖNTEMİ İLE İNDİRGENEREK FİRSİT İNTEGRALLERİNİN VE YENİ ÇÖZÜMLERİNİN BULUNMASI

Teknolojinin ilerlemesi ve bilgisayarların basit hesaplamalara imkan sağlaması nedeniyle, lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler günlük hayatımızda artan bir rol oynamaktadır. Çok sayıda bilim insanı, gerçek hayattaki problemleri bu denklemlerle ifade etmenin yollarını aramaktadır. Dolayısıyla bu denklemlerin analiz edilerek tam ve yaklaşık çözümlerinin elde edilmesi önem kazanmaktadır. Bunun için yeni olan ve yaygın kullanılan tekniklerden bazıları Lie grup analizi yöntemi [96, 129-132], Nucci'nin indirgeme yöntemi [127, 133], Heir-equations yöntemi [134, 135], Sardar-alt denklemi [136, 137], Kudryashov yöntemi [39] olarak verilebilir.

Diferansiyel denklemlerin tam çözümünü belirlemek için popüler bir yaklaşım, Sophus Lie tarafından bulunmuş olan grup değişmezliği yöntemidir [138]. Yöntem, bir diferansiyel denklemi değişmez bırakan benzer dönüşümler bulmaya dayalıdır. Bu şekilde, orijinal denklem daha basit bir forma dönüştürülür, bu da çözümleri elde etmeyi biraz daha kolaylaştırır. Daha spesifik olarak, çözülmesi zor ve zaman alan lineer olmayan bir kısmi diferansiyel denklemi bir adi diferansiyel denkleme indirgemek için kullanılır. Literatür incelendiğinde birçok problemin bu yöntemle başarıyla çözüldüğü görülmektedir [62, 63, 139-141].

Nucci indirgeme yöntemi ilk olarak kısmi diferansiyel denklemlerin klasik olmayan simetri dönüşümlerini elde etmek için kullanılmıştır [67]. Yeni kullanılan bir yöntem olduğu için henüz çok fazla uygulaması yoktur [96, 127, 128].

Lineer olmayan dalga denklemi Hunter ve Saxton tarafından verilmiştir [142]. $\Theta(t, x)$ nematik bir sıvı kristalin yönetici alanını, t zaman değişkenini ve x uzay değişkenini göstermek üzere denklemin zayıf lineer olmayan dalgalarının

$$(\Theta_t + \Theta\Theta_x)_x = \frac{\Theta_x^2}{2} \quad (5.1)$$

şeklinde tanımlandığını gösterdiler [142]. Farklı bir fiziksel ortamda, Hunter-Saxton denklemi, Camassa-Holm denkleminin yüksek frekans limiti olarak görünür [143, 144]. Sığ su dalgalarını modellemek için kullanılabilecek uygun bir denklem olabileceği düşünülmüştür [112, 145].

Bu bölümde,

$$\Theta_{tx} = -\Theta\Theta_{xx} - \frac{\Theta_x^2}{2} + 2v\Theta + \alpha(t) \quad (5.2)$$

şeklinde tanımlanan Galilean çatı hızı v ile parametrize edilen periyodik Hunter-Saxton denklemi incelenecektir. Patlama senaryosu altında bu denklemin güçlü çözümleri, yerel varlık ile ele

alınmıştır [146]. $v = 0$ durumunda Yin, periyodik Hunter-Saxton denkleminin güçlü çözümlerinin yerel varlığını ve uzaydan bağımsız çözümler dışındaki tüm güçlü çözümlerin sonlu zamanda patladığını göstermiştir [147].

5.1. Lie Simetri Metodu

Çalışmanın bu bölümünde, bir parametrelili Lie simetri yöntemi kullanılarak (5.2) denklemini değişmez formda bırakan benzerlik dönüşümleri elde edilecektir. Bu nedenle, verilen denklemin sonsuz küçük dönüşümünü

$$\begin{aligned}\bar{t} &= t + \rho\sigma^1(t, x, \Theta) + O(\rho^2) \\ \bar{x} &= x + \rho\sigma^2(t, x, \Theta) + O(\rho^2) \\ \bar{\Theta} &= \Theta + \rho\psi(t, x, \Theta) + O(\rho^2)\end{aligned}\tag{5.3}$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Burada ρ , grubun parametresini ifade eder. Ayrıca σ^1, σ^2 ve ψ daha sonra belirlenmesi gereken sonsuz küçük dönüşümleri temsil eder. Şimdi (5.3) ile ilişkili vektör alanı

$$\mathcal{X} = \sigma^1(t, x, \Theta) \frac{\partial}{\partial t} + \sigma^2(t, x, \Theta) \frac{\partial}{\partial x} + \psi(t, x, \Theta) \frac{\partial}{\partial \Theta}\tag{5.4}$$

olsun. Ayrıca $\mathcal{X}$ 'in ikinci uzantısı $Pr^{(2)}\mathcal{X}$ ile gösterilirse değişmezlik durumu;

$$Pr^{(2)}\mathcal{X}(\Omega)|_{\Omega=0} = 0\tag{5.5}$$

şeklinde olacaktır. Burada $\Omega = \Theta_{tx} + \Theta\Theta_{xx} + \frac{\Theta_x^2}{2} - 2v\Theta - \alpha(t)$ dir. (5.2) denklemi için (5.5) koşulları dikkate alındığında, σ^1, σ^2 ve ψ 'den oluşan, belirleyici denklemler olarak adlandırılan, KDD'lerin bir over-determined lineer sistemi elde edilir. Bu sistemin çözümünden ve $\alpha(t)$ 'nin özel seçimlerinden, orijinal denklemi ADD'lere indirgeyen üç farklı benzerlik dönüşümü ve karşılık gelen sonsuz küçük üreteçler elde edilir.

5.2. Periyodik Hunter-Saxton Denkleminin Bazı Çözümleri

Periyodik Hunter-Saxton denklemi, eğrilerin geometrisi çalışmasında ortaya çıkan lineer olmayan bir kısmi diferansiyel denklemdir. Denklemi geleneksel yöntemlerle çözmek zorken, Lie simetri metodu tam çözümleri bulmada güçlü bir yöntemdir.

5.2.1. $\alpha(t) = e^t$ olması durumu:

$\alpha(t) = e^t$ olsun. Bu durumda d_1, d_2 ve d_3 keyfi sabitler olmak üzere;

$$\begin{aligned}
\sigma^1(t, x, \Theta) &= -\frac{d_1 t}{2} + d_2 \\
\sigma^2(t, x, \Theta) &= \frac{((t+1)d_1 - 2d_2)e^t + 2v(d_1 x + 2d_3)}{4v} \\
\psi(t, x, \Theta) &= \frac{((t+2)d_1 - 2d_2)e^t + 4d_1 v \Theta}{4v}
\end{aligned} \tag{5.6}$$

şeklinde sonsuz küçük dönüşümler elde edilir. Bunlara karşılık gelen sonsuz küçük üreticiler;

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}_1 &= -\frac{t}{2} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{((t+1)e^t + 2vx)}{4v} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{((t+2)e^t + 4\Theta v)}{4v} \frac{\partial}{\partial \Theta} \\
\mathcal{X}_2 &= \frac{\partial}{\partial t} - \frac{e^t}{2v} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{e^t}{2v} \frac{\partial}{\partial \Theta} \\
\mathcal{X}_3 &= \frac{\partial}{\partial x}
\end{aligned} \tag{5.7}$$

şeklinde ortaya çıkar.

İndirgeme 1: (5.2) denkleminde $\mathcal{X}_1 = -\frac{t}{2} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{((t+1)e^t + 2vx)}{4v} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{((t+2)e^t + 4\Theta v)}{4v} \frac{\partial}{\partial \Theta}$ üretici kullanılırsa;

$$(2\xi + 2F(\xi))F''(\xi) - 4F(\xi)v + (F'(\xi))^2 - 2F'(\xi) = 0 \tag{5.8}$$

denklemini sağlayan

$$\Theta(t, x) = \frac{-e^t t^2 + 2F(\xi)v}{2vt^2}, \quad \xi = \frac{(2vx + e^t)t}{2v} \tag{5.9}$$

şeklindeki benzerlik dönüşümleri elde edilir.

(5.8) denkleminin D_2, D_1 ve D_0 keyfi sabitler olmak üzere

$$F(\xi) = D_2 \xi^2 + D_1 \xi + D_0 \tag{5.10}$$

formunda bir polinom çözümüne sahip olduğunu varsayalım. (5.10) denklemi (5.8) denkleminde yerine yazılır, ξ katsayıları düzenlenir, bu katsayı sonuçları

$$F(\xi) = \frac{v\xi^2}{2} + \xi\sqrt{2D_0v + 1} + \xi + D_0 \tag{5.11}$$

denkleminde çözülür ve (5.9) benzerlik dönüşümleri dikkate alınır, (5.2) denkleminin bir çözümü;

$$\begin{aligned} \Theta_1(t, x) \\ = \frac{-e^t t^2 + \left(\frac{(2vx + e^t)^2 t^2}{4v} + \frac{(2vx + e^t)t\sqrt{2D_0v + 1}}{v} + \frac{(2vx + e^t)t}{v} + 2D_0 \right) v}{2vt^2} \end{aligned} \quad (5.12)$$

formunda olur.

İndirgeme 2: $\mathcal{X}_2 = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{e^t}{2v} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{e^t}{2v} \frac{\partial}{\partial \Theta}$ jeneratörü için

$$2F(\xi)F''(\xi) + (F'(\xi))^2 - 4F(\xi)v = 0 \quad (5.13)$$

denklemini sağlayan

$$\Theta(t, x) = \frac{2F(\xi)v - e^t}{2v}, \quad \xi = \frac{2vx + e^t}{2v} \quad (5.14)$$

şeklindeki benzerlik değişkenleri elde edilir.

Şimdi (5.13) denklemi için Nucci indirgeme yöntemini kullanalım. Bu teknikte değişkenleri

$$\Phi_1(\xi) = F(\xi), \quad \Phi_2(\xi) = F'(\xi) \quad (5.15)$$

şeklinde değiştireceğiz.

(5.15) değişken değişimi ile, (5.13) denklemi için

$$\begin{aligned} \Phi_1' &= \Phi_2, \\ \Phi_2' &= \frac{4\Phi_1v - \Phi_2^2}{2\Phi_1} \end{aligned} \quad (5.16)$$

ADD sistemi yazılabilir. Şimdi Φ_1 'i yeni bir bağımsız değişken olarak tanımlayalım. Böylece (5.16)'da verilen sistem:

$$\frac{d\Phi_2(\Phi_1)}{d\Phi_1} = \frac{4\Phi_1v - \Phi_2^2(\Phi_1)}{2\Phi_1\Phi_2(\Phi_1)} \quad (5.17)$$

şekline dönüşür. K_1 keyfi sabit olmak üzere, (5.17) denkleminin iki çözümü

$$\Phi_2(\Phi_1) = \frac{\sqrt{\Phi_1(2v\Phi_1^2 + K_1)}}{\Phi_1}, \quad \Phi_2(\Phi_1) = -\frac{\sqrt{\Phi_1(2v\Phi_1^2 + K_1)}}{\Phi_1} \quad (5.18)$$

şeklindedir. (5.13) denkleminin ξ ve $\Phi(\xi)$ 'ye bağlı first integralini

$$(F'(\xi))^2 F(\xi) - 2vF^2(\xi) = K_1 \quad (5.19)$$

şeklinde yazabiliriz. Φ_1 'i tekrar bağımlı bir değişkene çevirelim. Sonra da (5.16) ve (5.18)' in ilk denklemleri dikkate alınırsa;

$$\Phi_1'(\xi) = \frac{\sqrt{\Phi_1(\xi)(2v\Phi_1^2(\xi) + K_1)}}{\Phi_1(\xi)} \quad (5.20)$$

ifadesi elde edilir. (5.20) denkleminin çözülmesi ile, K_2 bir sabit olmak üzere

$$\xi - \int \frac{\Phi_1(\xi)}{\sqrt{\Phi_1(\xi)(2v\Phi_1^2(\xi) + K_1)}} d\Phi_1(\xi) + K_2 = 0 \quad (5.21)$$

şeklinde bir kapalı çözüm bulunur. (5.21) denkleminde $K_1 = 0$ kabul edilirse açık çözümü:

$$\Phi_1(\xi) = F(\xi) = \frac{1}{2}vK_2^2 + vK_2\xi + \frac{1}{2}v\xi^2 \quad (5.22)$$

olur. (5.14)' den ise, (5.2) denkleminin nihai çözümünü;

$$\Theta_2(t, x) = \frac{\left(vK_2^2 + K_2(2vx + e^t) + \frac{(2vx + e^t)^2}{4v}\right)v - e^t}{2v} \quad (5.23)$$

şeklinde elde ederiz.

İndirgeme 3: $\mathcal{X}_3 = \frac{\partial}{\partial x}$ jeneratörü için benzerlik değişkenleri

$$\Theta(t, x) = F(\xi), \quad \xi = t \quad (5.24)$$

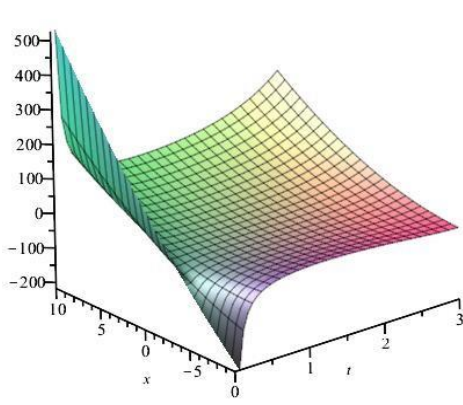
şeklindedir. Bu benzerlik değişkenleri;

$$-2F(\xi)v - e^\xi = 0 \quad (5.25)$$

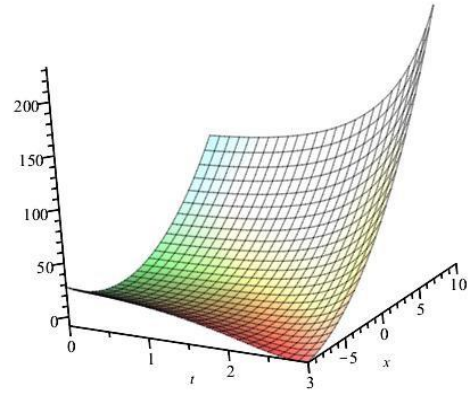
denklemini sağlar. Bu denklemin çözümünün

$$\Theta_3(t, x) = -\frac{e^t}{2v} \quad (5.26)$$

şeklinde olduğu açıktır. $\Theta_1(t, x)$ ve $\Theta_2(t, x)$ çözümlerinin uygun değerler altında Şekil 5.1'de üç boyutlu, Şekil 5.2'de kontur ve Şekil 5.3'de yoğunluk grafiği verilmiştir.

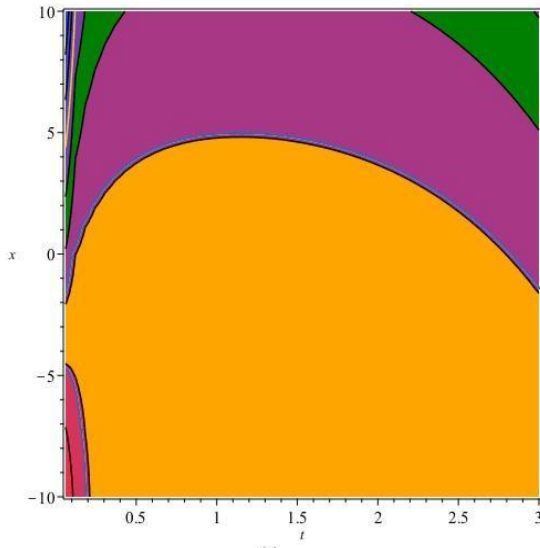


(a)

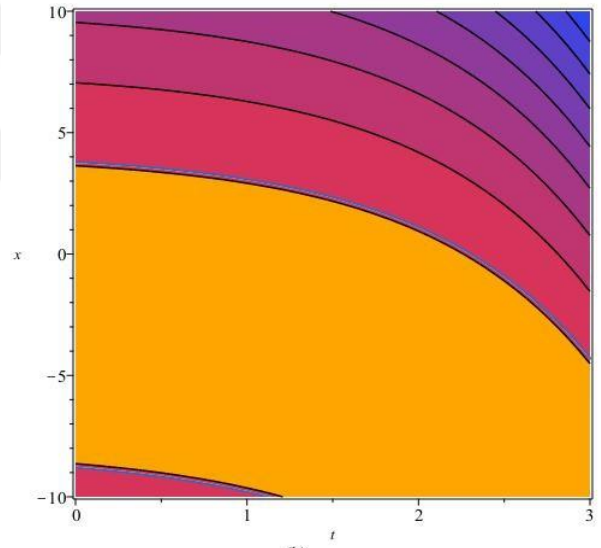


(b)

Şekil 5.1. $v = 1, D_0 = \frac{1}{3}$ ve $K_2 = 2$ için (a): (5.12) denkleminin üç boyutlu grafiği; (b): (5.23) denkleminin üç boyutlu grafiği

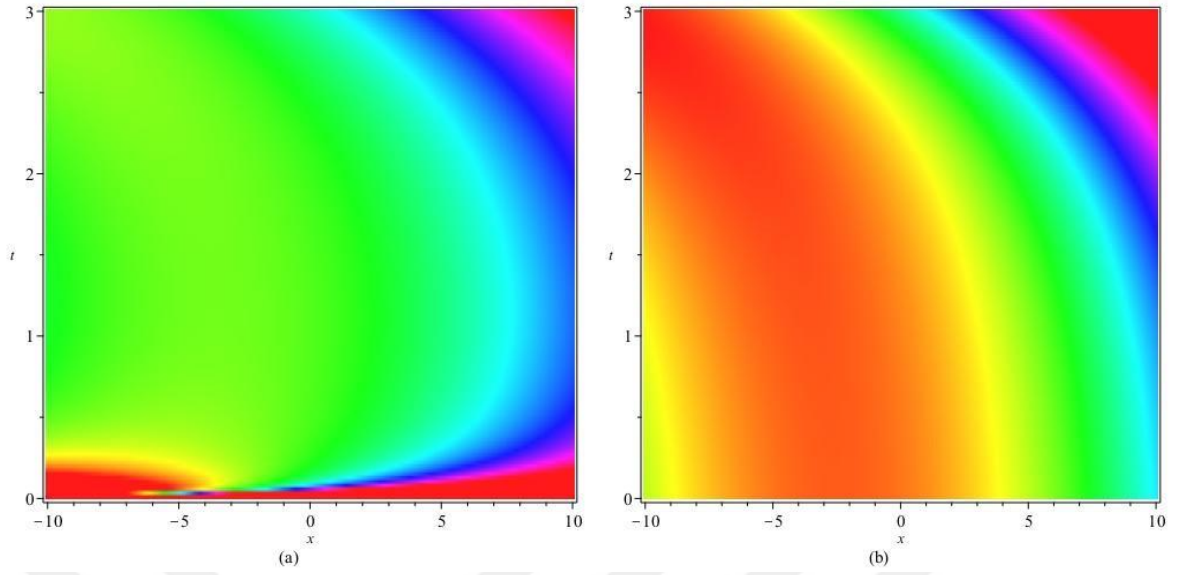


(a)



(b)

Şekil 5.2. $v = 1, D_0 = \frac{1}{3}$ ve $K_2 = 2$ için (a): (5.12) denkleminin kontur grafiği; (b): (5.23) denkleminin kontur grafiği



Şekil 5.3. $v = 1, D_0 = \frac{1}{3}$ ve $K_2 = 2$ için (a): (5.12) denkleminin yoğunluk grafiği; (b): (5.23) denkleminin yoğunluk grafiği

5.2.2. $\alpha(t) = t^2$ olması durumu:

(5.2) denkleminde $\alpha(t) = t^2$ alınması ve Lie simetri yönteminin uygulanması ile

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_4 &= -\frac{t}{2} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{2t^3 + 3xv}{6v} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\Theta v + t^2}{v} \frac{\partial}{\partial \Theta} \\ \mathcal{X}_5 &= \frac{\partial}{\partial t} - \frac{t^2}{2v} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{t}{v} \frac{\partial}{\partial \Theta} \\ \mathcal{X}_6 &= \frac{\partial}{\partial x} \end{aligned} \quad (5.27)$$

şeklindeki sonsuz küçük üreteçler elde edilir.

İndirgeme 4: (5.2) denkleminde $\mathcal{X}_4 = -\frac{t}{2} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{2t^3 + 3xv}{6v} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\Theta v + t^2}{v} \frac{\partial}{\partial \Theta}$ jeneratörünün uygulanmasıyla,

$$(2\xi + 2F(\xi))F''(\xi) - 4F(\xi)v + (F'(\xi))^2 - 2F'(\xi) = 0 \quad (5.28)$$

denklemini sağlayan

$$\Theta(t, x) = \frac{-t^4 + 2F(\xi)v}{2vt^2}, \quad \xi = \frac{(t^3 + 6xv)t}{6v} \quad (5.29)$$

benzerlik değişkenleri elde edilir. C_2, C_1 ve C_0 keyfi sabitler olmak üzere, (5.28) denkleminin

$$F(\xi) = C_2 \xi^2 + C_1 \xi + C_0 \quad (5.30)$$

şeklinde bir polinom çözümüne sahip olduğunu varsayalım. (5.30) denklemi (5.28) denkleminde yerine yazılır, ξ katsayıları düzenlenir, bu katsayı sonuçları

$$F(\xi) = \frac{v\xi^2}{2} + \xi\sqrt{2C_0v+1} + \xi + C_0 \quad (5.31)$$

denkleminde çözülür ve (5.29) benzerlik dönüşümleri kullanılırsa, (5.2) denkleminin;

$$\Theta_4(t, x) = \frac{-t^4 + \left(\frac{(t^3 + 6xv)^2 t^2}{36v} + \frac{(t^3 + 6xv)t\sqrt{2C_0v+1}}{3v} + \frac{(t^3 + 6xv)t}{3v} + 2C_0 \right) v}{2v} \quad (5.32)$$

tam çözümü elde edilir.

İndirgeme 5: (5.2) denkleminde $\mathcal{X}_5 = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{t^2}{2v} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{t}{v} \frac{\partial}{\partial \Theta}$ jeneratörünün uygulanmasıyla,

$$2F(\xi)F''(\xi) - 4F(\xi)v + (F'(\xi))^2 = 0 \quad (5.33)$$

denklemini sağlayan

$$\Theta(t, x) = \frac{2F(\xi)v - t^2}{2v}, \quad \xi = \frac{t^3 + 6xv}{6v} \quad (5.34)$$

şeklindeki benzerlik dönüşümleri elde edilir. (5.33) denkleminde Nucci indirgeme yaklaşımı uygulanırsa, (5.2) denkleminin sırasıyla first integrali ve çözümü;

$$(F'(\xi))^2 F(\xi) - 2vF^2(\xi) = R_1 \quad (5.35)$$

ve

$$\Theta_5(t, x) = \frac{\left(M_2^2 v + \frac{M_2(t^3 + 6xv)}{3} + \frac{(t^3 + 6xv)^2}{36v} \right) v - t^2}{2v} \quad (5.36)$$

şekillerinde elde edilir. Burada M_2 sabittir.

İndirgeme 6: $\mathcal{X}_6 = \frac{\partial}{\partial x}$ jeneratörü için

$$\Theta(t, x) = F(\xi), \quad \xi = t \quad (5.37)$$

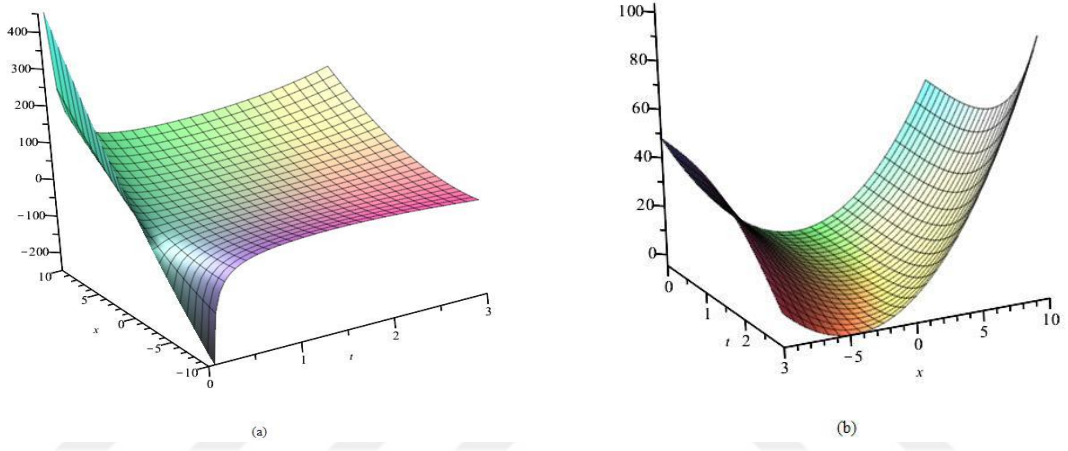
benzerlik değişkenleri elde edilir. Elde edilen benzerlik değişkenleri

$$-2F(\xi)v - \xi^2 = 0 \quad (5.38)$$

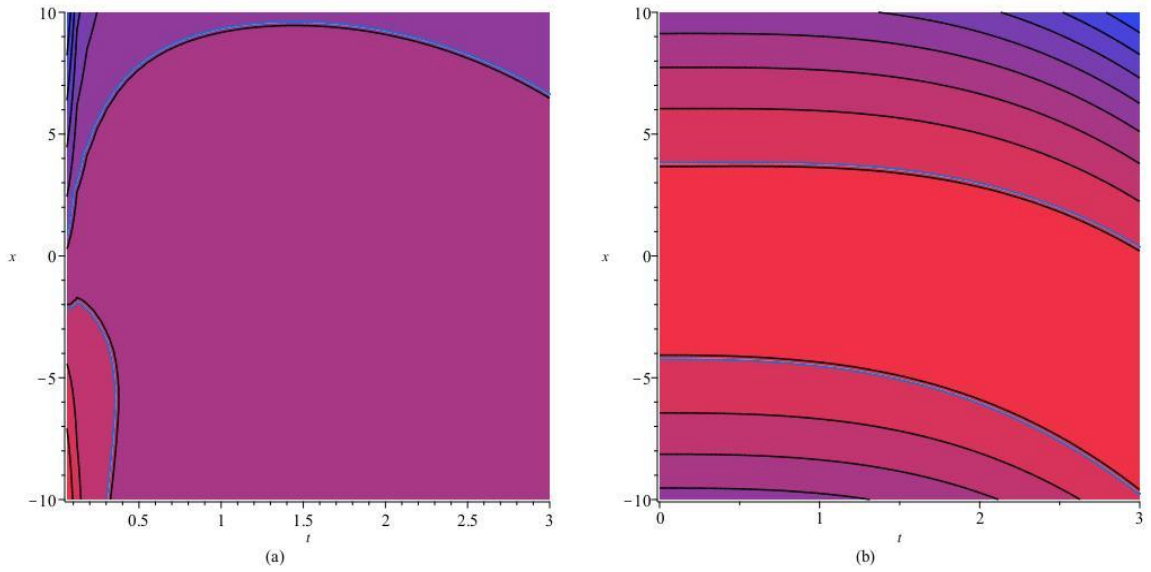
denklemini sağlar. Buradan çözüm

$$\Theta_6(t, x) = -\frac{t^2}{2v} \quad (5.39)$$

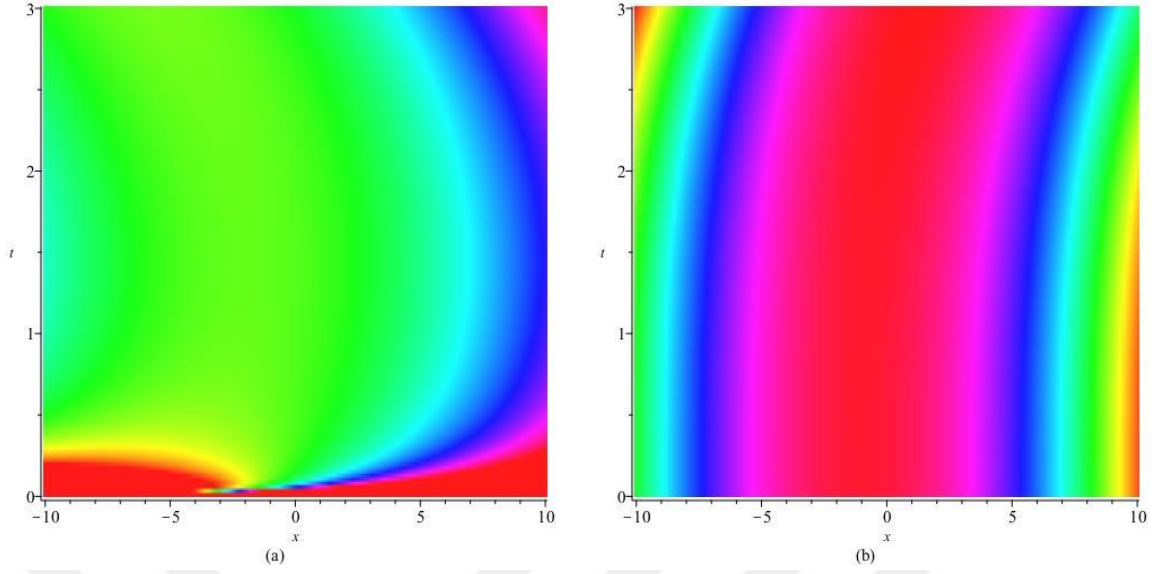
ile verilir. Şekil 5.4-5.6'da $\Theta_4(t, x)$ ve $\Theta_5(t, x)$ çözümlerinin uygun değerler altında üç boyutlu, kontur ve yoğunluk grafiği verilmiştir.



Şekil 5.4. $v = 1, C_0 = \frac{1}{5}$ ve $M_2 = \frac{1}{5}$ için (a): (5.32) denkleminin üç boyutlu grafiği; (b): (5.36) denkleminin üç boyutlu grafiği



Şekil 5.5. $v = 1, C_0 = \frac{1}{5}$ ve $M_2 = \frac{1}{5}$ için (a): (5.32) denkleminin kontur grafiği; (b): (5.36) denkleminin kontur grafiği



Şekil 5.6. $v = 1, C_0 = \frac{1}{5}$ ve $M_2 = \frac{1}{5}$ için (a): (5.32) denkleminin yoğunluk grafiği; (b): (5.36) denkleminin yoğunluk grafiği

5.2.3. $\alpha(t) = \sinh(t)$ olması durumu:

(5.2) denkleminde $\alpha(t) = \sinh(t)$ alınması ve Lie simetri yönteminin uygulanmasıyla

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_7 &= -\frac{t}{2} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{t \sinh(t) + \cosh(t) + 2vx}{4v} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{t \cosh(t) + 2 \sinh(t) + 4\theta v}{4v} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \mathcal{X}_8 &= \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\sinh(t)}{2v} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\cosh(t)}{2v} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \mathcal{X}_9 &= \frac{\partial}{\partial x} \end{aligned} \quad (5.40)$$

ile verilen üç vektör alanı elde edilir.

İndirgeme 7: $\mathcal{X}_7 = -\frac{t}{2} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{t \sinh(t) + \cosh(t) + 2vx}{4v} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{t \cosh(t) + 2 \sinh(t) + 4\theta v}{4v} \frac{\partial}{\partial \theta}$ vektör alanını ele alırsak, (5.2) denkleminin benzerlik dönüşümleri;

$$\Theta(t, x) = \frac{2F(\xi)v - \sinh(t)t^2}{2vt^2}, \quad \xi = -t(\cosh(t) + 2vx) \quad (5.41)$$

şeklinde olacaktır. Burada $F(\xi)$;

$$-2v \left((-2F(\xi)v + \xi)F''(\xi) - (F'(\xi))^2 v + F(\xi) - F'(\xi) \right) = 0 \quad (5.42)$$

denkleminin çözümüdür. (5.42) denklemini polinom formunda çözdükten sonra, (5.2) denkleminin çözümü;

$$\Theta_7(t, x) = \frac{1}{2vt^2} \left(-t^2 \sinh(t) + \frac{1}{4} (8H_0v - 4tL\sqrt{2H_0v + 1} + t^2L^2 + 4tL) \right) \quad (5.43)$$

şeklinde olur. Burada H_0 keyfi sabit ve $L = (2vx + \cosh(t))$ 'dir.

İndirgeme 8: $\mathcal{X}_8 = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\sinh(t)}{2v} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\cosh(t)}{2v} \frac{\partial}{\partial \Theta}$ vektör alanı (5.2) denkleminde uygulandığında benzerlik dönüşümleri;

$$\Theta(t, x) = \frac{2F(\xi)v - \sinh(t)}{2v}, \quad \xi = \frac{2vx + \cosh(t)}{2v} \quad (5.44)$$

şeklinde ortaya çıkar. Burada $F(\xi)$;

$$2F(\xi)F''(\xi) - 4F(\xi)v + (F'(\xi))^2 = 0 \quad (5.45)$$

denkleminin çözümüdür. Nucci indirgeme yöntemini (5.45)'e uygulayarak, sırasıyla (5.2) denkleminin first integralini ve çözümünü;

$$(F'(\xi))^2 F(\xi) - 2vF^2(\xi) = R_1 \quad (5.46)$$

ve

$$\Theta_8(t, x) = \frac{\left(N_2^2 v + N_2(2xv + \cosh(t)) + \frac{(2xv + \cosh(t))^2}{4v} \right) v - \sinh(t)}{2v} \quad (5.47)$$

şeklinde elde ederiz. Burada N_2 sabittir.

İndirgeme 9: $\mathcal{X}_9 = \frac{\partial}{\partial x}$ vektör alanı için (5.2) denkleminin benzerlik dönüşümleri;

$$\Theta(t, x) = F(\xi), \quad \xi = t \quad (5.48)$$

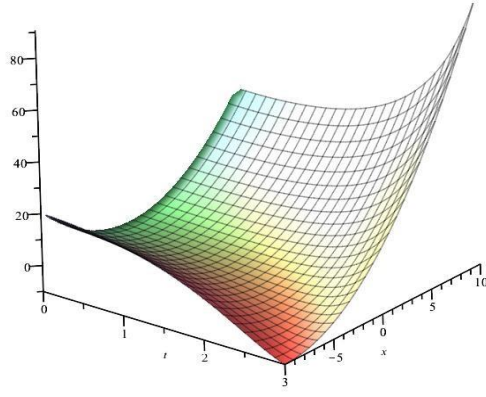
şeklindedir. Burada $F(\xi)$;

$$-2F(\xi)v - \sinh(\xi) = 0 \quad (5.49)$$

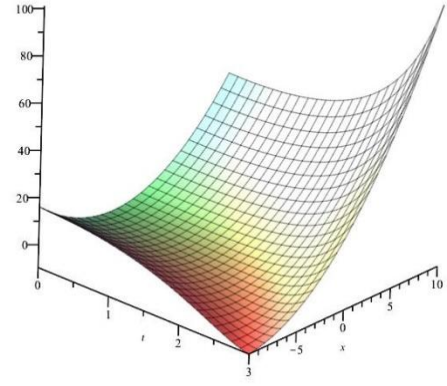
denklemini sağlar. (5.2) denkleminin (5.49)'a karşılık gelen basit çözümü

$$\Theta_9(t, x) = -\frac{\sinh(t)}{2v} \quad (5.50)$$

olur. Şekil 5.7-5.9'da $\Theta_7(t, x)$ ve $\Theta_8(t, x)$ çözümlerinin $v = \frac{1}{2}, H_0 = 0$ ve $N_2 = 1$ değerleri için üç boyutlu, kontur ve yoğunluk grafiği verilmiştir.

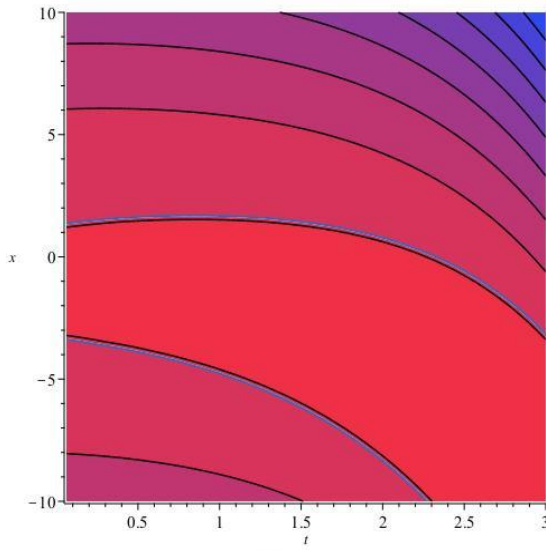


(a)

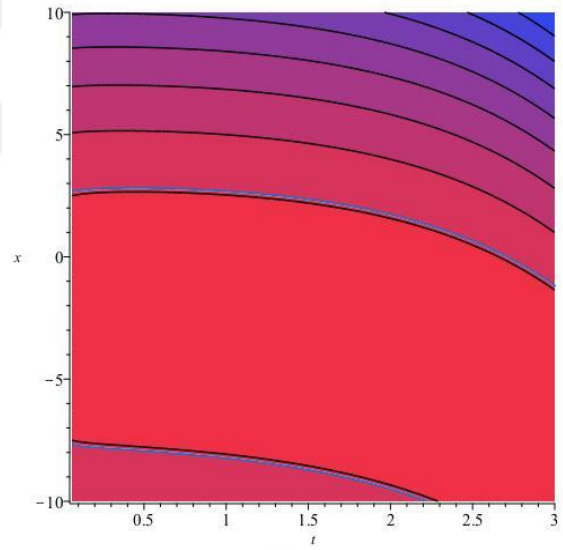


(b)

Şekil 5.7. $v = \frac{1}{2}$, $H_0 = 0$ ve $N_2 = 1$ için (a): (5.43) denkleminin üç boyutlu grafiği; (b): (5.47) denkleminin üç boyutlu grafiği

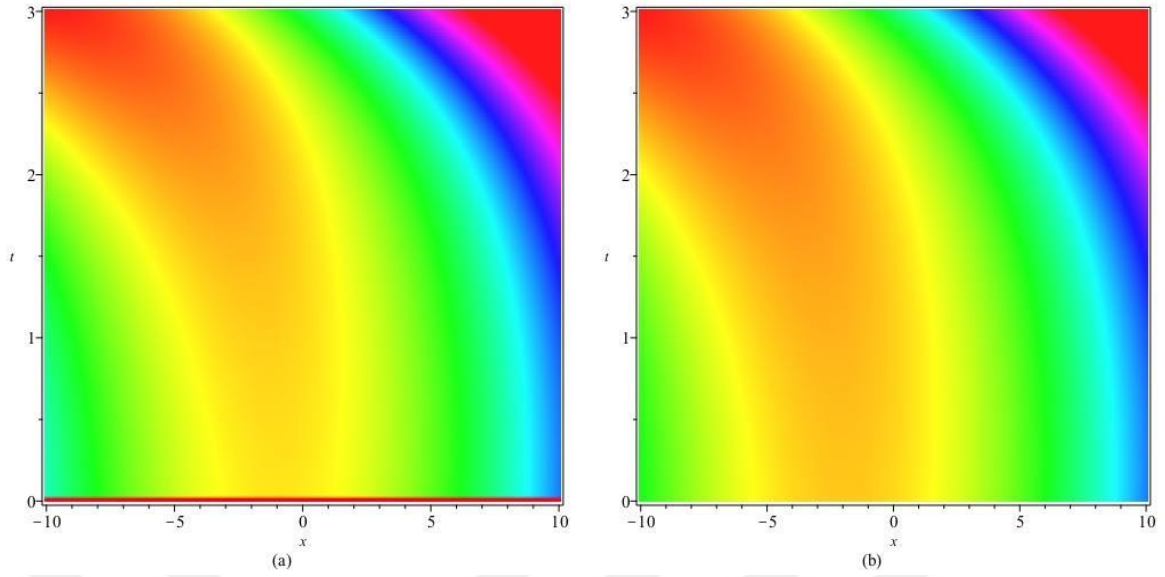


(a)



(b)

Şekil 5.8. $v = \frac{1}{2}$, $H_0 = 0$ ve $N_2 = 1$ için (a): (5.43) denkleminin kontur grafiği; (b): (5.47) denkleminin kontur grafiği



Şekil 5.9. $v = \frac{1}{2}$, $H_0 = 0$ ve $N_2 = 1$ için (a): (5.43) denkleminin yoğunluk grafiği; (b): (5.47) denkleminin yoğunluk grafiği

5.2.4. $\alpha(t) = \ln(t)$ olması durumu:

(5.2) denkleminde $\alpha(t) = \ln(t)$ alınması ve Lie simetri yönteminin uygulanmasıyla

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{10} &= -\frac{t}{2} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{2t \ln(t) + 2vx - t}{4v} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{2t \ln(t) + (4\Theta v + 1)t}{4vt} \frac{\partial}{\partial \Theta} \\ \mathcal{X}_{11} &= \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\ln(t)}{2v} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2vt} \frac{\partial}{\partial \Theta} \\ \mathcal{X}_{12} &= \frac{\partial}{\partial x} \end{aligned} \quad (5.51)$$

sonsuz küçük üreteçleri elde edilir.

İndirgeme 10: (5.2) denkleminde $\mathcal{X}_{10} = -\frac{t}{2} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{2t \ln(t) + 2vx - t}{4v} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{2t \ln(t) + (4\Theta v + 1)t}{4vt} \frac{\partial}{\partial \Theta}$ vektör alanının dikkate alınması ile, (5.2) denkleminin benzerlik dönüşümleri;

$$\Theta(t, x) = \frac{2F(\xi)v - t^2 \ln(t)}{2vt^2}, \quad \xi = \frac{t(t \ln(t) + 2vx - t)}{2v} \quad (5.52)$$

şeklinde olacaktır. Burada $F(\xi)$;

$$(2F(\xi) + 2\xi)F''(\xi) - 4F(\xi)v + (F'(\xi))^2 - 2F'(\xi) = 0 \quad (5.53)$$

denkleminin çözümüdür. (5.53) denkleminin polinom formunda çözülmesiyle, (5.2) denkleminin çözümü;

$$\Theta_{10}(t, x) = \frac{1}{2vt^2} \left(-t^2 \ln(t) + \left(\frac{1}{4} v M^2 t^2 + Mt \sqrt{2T_0 v + 1} + Mt + 2T_0 \right) v \right) \quad (5.54)$$

şeklinde olur. Burada T_0 keyfi sabit ve $M = \frac{t \ln(t) + 2xv - t}{v}$, dir.

İndirgeme 11: $\mathcal{X}_{11} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\ln(t)}{2v} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2vt} \frac{\partial}{\partial \Theta}$ vektör alanı (5.2) denkleminde uygulandığında benzerlik dönüşümleri;

$$\Theta(t, x) = \frac{2F(\xi)v - \ln(t)}{2v}, \quad \xi = \frac{2vx + t \ln(t) - t}{2v} \quad (5.55)$$

şeklinde ortaya çıkar. Burada $F(\xi)$;

$$2F(\xi)F''(\xi) + (F'(\xi))^2 - 4F(\xi)v = 0 \quad (5.56)$$

denkleminin çözümüdür. Nucci indirgeme yönteminin (5.56) denkleminde uygulanmasıyla, (5.2) denkleminin first integrali ve çözümü sırasıyla;

$$(F'(\xi))^2 F(\xi) - 2vF^2(\xi) = R_1 \quad (5.57)$$

ve

$$\Theta_{11}(t, x) = \frac{1}{2v} \left(\left(Z_2^2 v + Z_2(t \ln(t) + 2xv - t) + \frac{(t \ln(t) + 2xv - t)^2}{4v} \right) v - \ln(t) \right) \quad (5.58)$$

olur. Burada Z_2 sabittir.

İndirgeme 12: $\mathcal{X}_{12} = \frac{\partial}{\partial x}$ vektör alanı için (5.2) denkleminin benzerlik dönüşümleri;

$$\Theta(t, x) = F(\xi), \quad \xi = t \quad (5.59)$$

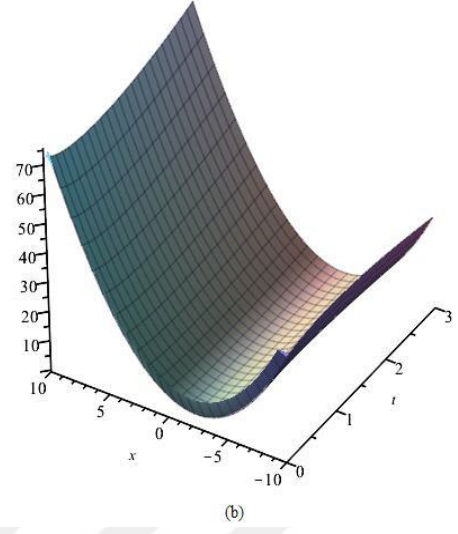
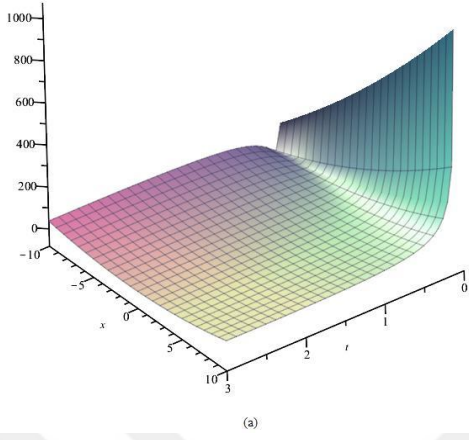
şeklindedir. Burada $F(\xi)$;

$$-2F(\xi)v - \ln(\xi) = 0 \quad (5.60)$$

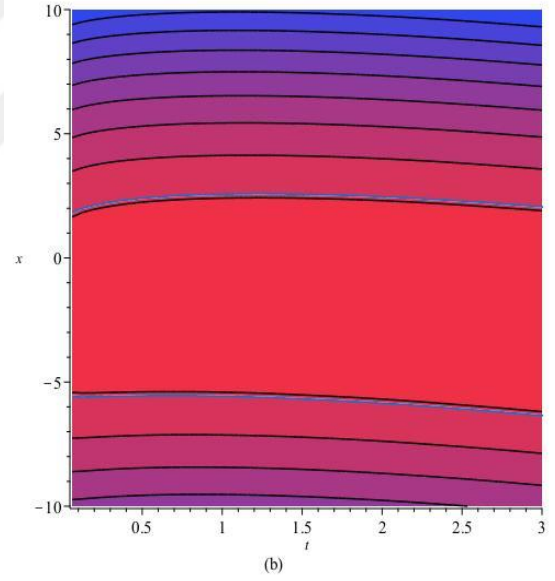
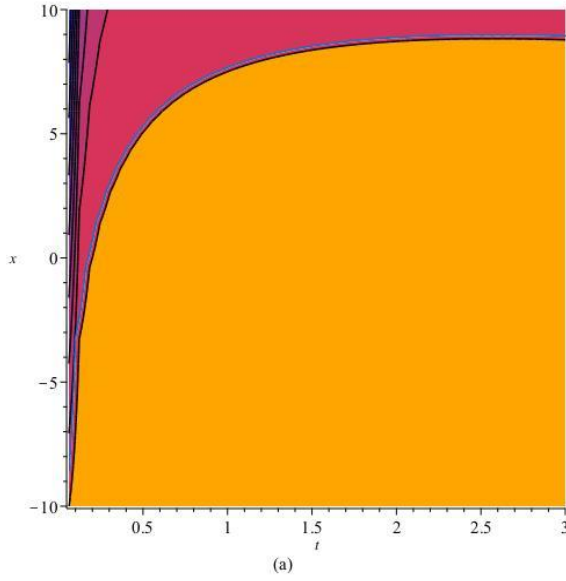
denklemini sağlar. (5.2) denkleminin (5.60)'a karşılık gelen bir basit çözümü;

$$\Theta_{12}(t, x) = -\frac{\ln(t)}{2v} \quad (5.61)$$

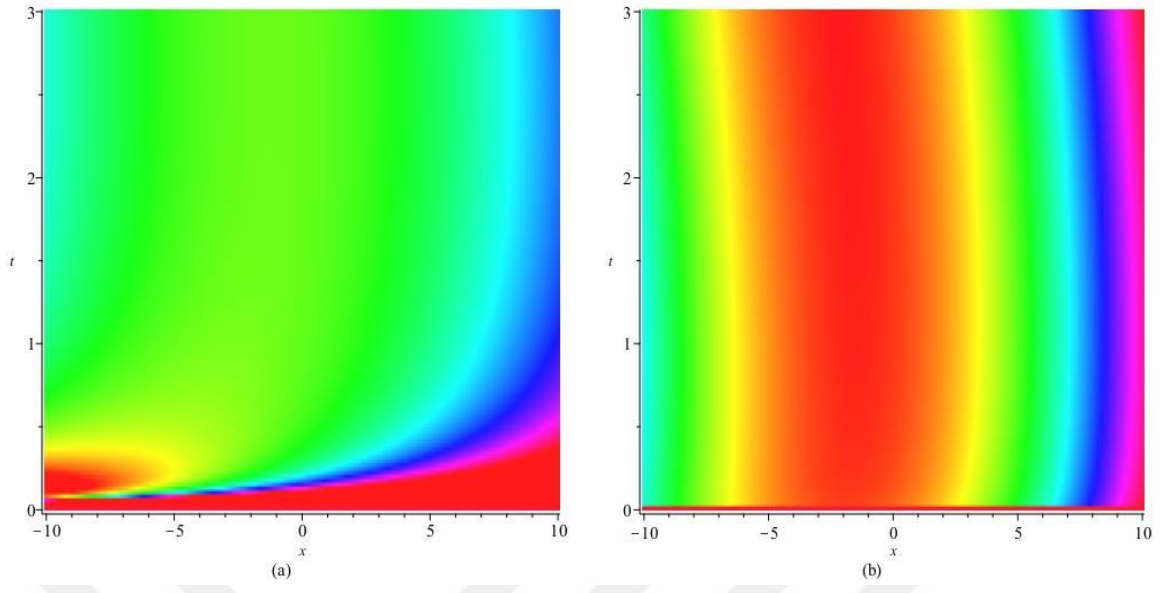
olur. Şekil 5.10-5.12'de $\Theta_{10}(t, x)$ ve $\Theta_{11}(t, x)$ çözümlerinin $v = 1, T_0 = 2$ ve $Z_2 = 2$ değerleri için üç boyutlu, kontur ve yoğunluk grafiği verilmiştir.



Şekil 5.10. $v = 1, T_0 = 2$ ve $Z_2 = 2$ için (a): (5.54) denkleminin üç boyutlu grafiği; (b): (5.58) denkleminin üç boyutlu grafiği



Şekil 5.11. $v = 1, T_0 = 2$ ve $Z_2 = 2$ için (a): (5.54) denkleminin kontur grafiği; (b): (5.58) denkleminin kontur grafiği



Şekil 5.12. $v = 1, T_0 = 2$ ve $Z_2 = 2$ için (a): (5.54) denkleminin yoğunluk grafiği; (b): (5.58) denkleminin yoğunluk grafiği

6. SONUÇLAR

Son yüzyıl ile birlikte hayatımızda önemli değişiklikler meydana getiren sanayi, teknoloji, sağlık vb. bilimin her alanında kayda değer gelişmeler olmuştur. Bu gelişmeler insanlığa üretim, ulaşım, iletişim gibi alanlarda birçok fayda sağlarken küresel ısınma, hastalık, hava kirliliği, sanayi atıkları gibi tüm insanlığı olumsuz yönde etkileyen sorunlar meydana getirmiştir. Bilim insanları; insanların hayatlarını kolaylaştıran yenilikleri ortaya koyarken bu yeniliklerle beraber ortaya çıkan problemleri de kaldırmak ve çözüm üretmek için çalışmaktadır. Dolayısıyla tüm dünya insanını yakından ilgilendiren tüm bilimlerde yapılan birçok bilimsel araştırmada matematiksel modeller kullanılmaktadır. Kullanılan matematiksel modellerin çoğunu da LOKDD oluşturmaktadır. Bu durum bilim insanları için LOKDD'nin çözüm yollarını araştırmayı ilgi çekici hale getirmiştir. Literatürü incelediğimizde yapılan çalışmalarda LOKDD çözümleri için birçok yöntem geliştirildiğini görmekteyiz. Bu yöntemlerden biri; adını Norveçli matematikçi Sophus Lie'den alan analitik çözümleri bulmada kullanılabilecek en genel yöntem olarak düşünebileceğimiz Lie simetri yöntemidir. Bir diferansiyel denklem sistemi için Lie simetri grubu, herhangi bir çözümü başka bir çözüme dönüştüren dönüşümler grubu demektir. Lie simetri metodunda; verilen herhangi bir denkleme değişmez bırakan simetri grubuna karşılık bir sonsuz küçük üreteç grubu bulunur, bulunan sonsuz küçük üreteçler yardımıyla benzerlik dönüşümleri tanımlanır ve elde edilen benzerlik dönüşümleri ile LOKDD ADD'lere indirgenir. Böylece yeni çözümlerin elde edilmesine olanak sağlanır. ADD'lere indirgenen denklemlerin tam çözümlerini elde etmek için birçok yöntem vardır. Bunlardan biri, literatürde üzerine az sayıda çalışma bulunan Nucci indirgeme yöntemidir. Nucci indirgeme yöntemi temelde değişken değiştirme yapılarak verilen ADD'nin tam çözümlerini elde etmek için kullanılan bir metottur. Ayrıca ADD'ler Nucci yöntemiyle çözüldüğünde matematiksel fizikte önemli bir yeri olan first integraller elde edilir.

Bu tezde sonsuz küçük dönüşümlerin bir parametreliliği Lie grubunu dikkate alarak, ele alınan problemin iki indirgemesini elde etmek için kullanılan üç sonsuz küçük üreteci elde edilmiştir. Nucci indirgeme yöntemiyle ilk indirgeme için bazı tam çözümler sunulmuştur. Ayrıca karşılık gelen first integraller verilmiştir. Periyodik genel Degasperis-Procesi denkleminin özel durumları da bu güçlü yöntem kapsamında ele alınmıştır. Camassa-Holm denklemi, klasik Degasperis-Procesi denklemi, b-family denklemi ve Fornberg-Whitham denklemi için tam çözümler bulunmuştur. Ayrıca, ele alınan problemin ikinci indirgemesi için Sinüs genişletme yöntemi adı verilen farklı bir verimli yöntem yardımıyla bazı tam çözümler elde edilmiştir. Periyodik Hunter-Saxton denklemi de Lie simetri ve Nucci yöntemiyle indirgenerek first integralleri ve yeni çözümleri bulunmuştur. Bu araştırmada, iki avantajlı analitik çözüm yöntemi altında sunulan

modelin iki indirgemesi için çeşitli tam çözümlere ulaşılmıştır. Elde edilen çözümlerin fiziksel özelliklerinin daha iyi anlaşılması için bazı grafikler verilmiştir.

Ayrıca bu tezde lineer olmayan optik fiberlerdeki darbe yayılımını tanımlayan coupled lineer olmayan denklemlerin tam hareket eden dalga soliton çözümleri, Yeni Sardar Alt Denklem yöntemiyle incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar, bright, W-biçim bright ve kink solitonların, trigonometrik ve tekil fonksiyon çözümleridir. Bu sonuçların davranışı şekillerle tasvir edilmiştir. Ayrıca, eliptiklik açısı ve coupled denklemin katsayısının etkisi altında MK gain spektrumlarının davranışı incelenmiştir. Lineer olmayan katsayının değeri negatif olduğunda, kararsızlık bölgelerinin (MK büyüme hızı) görünümü incelenmiştir. Bu sonuçlar, coupled denklemin katsayısının optik çift kırılmadaki etkilerini vurgulamaktadır.



KAYNAKLAR

- [1] Cartan, E. (1922). *Leçons sur les invariants intégraux*, A. Hermann & fils, Paris.
- [2] Noether, E. (1918). Konig Gesell Wissen, Gottingen. *Math. Phys. Kl*, 235-257.
- [3] Birkhoff, G. (2015). *Hydrodynamics* (Vol. 2234). Princeton University Press, New Jersey.
- [4] Ovsjannikov, L. V. (1962). *Group properties of differential equations*, Novasibirsk, Moscow.
- [5] Bluman, G. W., & Cole, J. D. (1974). *Similarity Method for Differential Equations*, Springer Verlag, New York.
- [6] Bluman, G. W., & Cole, J. D. (1969). The general similarity solution of the heat equation. *Journal of mathematics and mechanics*, 18(11), 1025-1042.
- [7] Olver, P. J. (1993). *Applications of Lie groups to differential equations*, Graduate Texts Math. Vol. 107, Springer Verlag, New York.
- [8] Olver, P. J. (1977). Evolution equations possessing infinitely many symmetries. *Journal of Mathematical Physics*, 18(6), 1212-1215.
- [9] Rogers, C., & Shadwick, W. F. (1982). *Bäcklund transformations and their applications* (Vol. 161, pp. xiii+334), Academic press, New York.
- [10] Ablowitz, M. J., Ramani, A., & Segur, H. (1980). A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type. I. *Journal of Mathematical Physics*, 21(4), 715-721.
- [11] Ablowitz, M. J., & Segur, H. (1981). *Solitons and the inverse scattering transform* (Vol. 4), Siam.
- [12] Grundy, R. E. (1979). Similarity solutions of the nonlinear diffusion equation. *Quarterly of Applied Mathematics*, 37(3), 259-280.
- [13] Grundy, R. E. (1992). The asymptotics of extinction in nonlinear diffusion reaction equations. *The ANZIAM Journal*, 33(4), 414-429.
- [14] Bhutani, O. P., & Sharma, N. L. (1981). On the similarity solutions of the generalized Boussinesq equation in hydrology via transformation groups. *International Journal of Engineering Science*, 19(6), 779-790.
- [15] Allasia, F., & Nucci, M. C. (1996). Symmetries and their equations for the laminar boundary layer model. *Journal of mathematical analysis and applications*, 201(3), 911-942.
- [16] Tajiri, M. (1983). Similarity reductions of the one and two dimensional nonlinear Schrödinger equations. *Journal of the Physical Society of Japan*, 52(6), 1908-1917.
- [17] Lakshmanan, M., & Kaliappan, P. (1983). Lie transformations, nonlinear evolution equations, and Painlevé forms. *Journal of mathematical physics*, 24(4), 795-806.
- [18] Torrisi, M., & Valenti, A. (1985). Group properties and invariant solutions for infinitesimal transformations of a non-linear Wave Equation. *International journal of non-linear mechanics*, 20(3), 135-144.
- [19] Nishitani, T. (1988). Similarity Transformations of Compressible Viscous Flow in Conservative Force Fields. I. Two-Dimensional Problem. *Journal of the Physical Society of Japan*, 57(3), 844-855.
- [20] OP, B., & Mital, P. (1986). Similarity solutions of the equations of dynamical meteorology via symmetry method. *Journal of the Meteorological Society of Japan. Ser. II*, 64(4), 593-598.

- [21] Bhutani, O. P., Singh, K., & Kalra, D. K. (2003). On certain classes of exact solutions of Einstein equations for rotating fields in conventional and nonconventional form. *International journal of engineering science*, 41(7), 769-786.
- [22] Hill, J. M. (1989). Similarity solutions for nonlinear diffusion—a new integration procedure. *Journal of engineering mathematics*, 23(2), 141-155.
- [23] Nucci, M. C., & Clarkson, P. A. (1992). The nonclassical method is more general than the direct method for symmetry reductions. An example of the Fitzhugh-Nagumo equation. *Physics Letters A*, 164(1), 49-56.
- [24] Gagnon, L. (1992). Self-similar solutions for a coupled system of nonlinear Schrodinger equations. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 25(9), 2649.
- [25] Clarkson, P. A., & Mansfield, E. L. (1994). Symmetry reductions and exact solutions of a class of nonlinear heat equations. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 70(3), 250-288.
- [26] Clarkson, P. A., & Hood, S. (1993). Symmetry reductions of a generalized, cylindrical nonlinear Schrodinger equation. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 26(1), 133.
- [27] Gagnon, L., & Winternitz, P. (1993). Symmetry classes of variable coefficient nonlinear Schrodinger equations. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 26(23), 7061.
- [28] Bruzon, M. S., Clarkson, P. A., Gandarias, M. L., & Medina, E. (2001). The symmetry reductions of a turbulence model. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 34(18), 3751.
- [29] Cheh, J., Olver, P. J., & Pohjanpelto, J. (2005). Maurer–Cartan equations for Lie symmetry pseudogroups of differential equations. *Journal of mathematical physics*, 46(2), 023504.
- [30] Rosati, L., & Nucci, M. C. (2005). A Lie symmetry connection between Jacobi’s modular differential equation and Schwarzian differential equation. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 12(2), 144-161.
- [31] Anco, S. C., & Liu, S. (2004). Exact solutions of semilinear radial wave equations in n dimensions. *Journal of mathematical analysis and applications*, 297(1), 317-342.
- [32] Ibragimov, N. H., Torrisi, M., & Valenti, A. (2004). Differential invariants of nonlinear equations $v_{tt} = f(x, v_x) v_{xx} + g(x, v_x)$. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 9(1), 69-80.
- [33] Gandarias, M. L., Torrisi, M., & Valenti, A. (2004). Symmetry classification and optimal systems of a non-linear wave equation. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 39(3), 389-398.
- [34] Houwe, A., Abbagari, S., Salathiel, Y., Inc, M., Doka, S. Y., Crepin, K. T., & Baleanu, D. (2020). Complex traveling-wave and solitons solutions to the Klein-Gordon-Zakharov equations. *Results in Physics*, 17, 103127
- [35] Houwe, A., İnç, M., Doka, S. Y., Akinlar, M. A., & Baleanu, D. (2020). Chirped solitons in negative index materials generated by Kerr nonlinearity. *Results in Physics*, 17, 103097
- [36] Kudryashov, N. A. (2012). One method for finding exact solutions of nonlinear differential equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 17(6), 2248-2253.
- [37] Kudryashov, N. A. (2013). Polynomials in logistic function and solitary waves of nonlinear differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, 219(17), 9245-9253
- [38] Kudryashov, N. A., Ryabov, P. N., Fedyanin, T. E., & Kutukov, A. A. (2013). Evolution of pattern formation under ion bombardment of substrate. *Physics Letters A*, 377(10-11), 753-759
- [39] Ryabov, P. N., Sinelshchikov, D. I., & Kochanov, M. B. (2011). Application of the Kudryashov method for finding exact solutions of the high order nonlinear evolution equations. *Applied Mathematics and Computation*, 218(7), 3965-3972

- [40] Zayed, E. M. E., & Arnous, A. H. (2012). DNA dynamics studied using the homogeneous balance method. *Chinese Physics Letters*, 29(8), 080203
- [41] Houwe, A., Abbagari, S., Inc, M., Betchewe, G., Doka, S. Y., Crépin, K. T., & Nisar, K. S. (2020). Chirped solitons in discrete electrical transmission line. *Results in Physics*, 18, 103188
- [42] Wang, M., Li, X., & Zhang, J. (2008). The (G' G)-expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics. *Physics Letters A*, 372(4), 417-423
- [43] Souleymanou, A., Ali, K. K., Rezazadeh, H., Eslami, M., Mirzazadeh, M., & Korkmaz, A. (2019). The propagation of waves in thin-film ferroelectric materials. *Pramana*, 93(2), 1-6
- [44] Souleymanou, A., Korkmaz, A., Rezazadeh, H., Mukam, S. P. T., & Bekir, A. (2020). Soliton solutions in different classes for the Kaup–Newell model equation. *Modern Physics Letters B*, 34(03), 2050038.
- [45] Souleymanou, A., Kuetché, V. K., Bouetou, T. B., & Kofane, T. C. (2011). Scattering behavior of waveguide channels of a new coupled integrable dispersionless system. *Chinese Physics Letters*, 28(12), 120501.
- [46] Souleymanou, A., Kuetché, V. K., Bouetou, T. B., & Kofane, T. C. (2012). Traveling wave-guide channels of a new coupled integrable dispersionless system. *Communications in Theoretical Physics*, 57(1), 10.
- [47] Abbagari, S., Youssoufa, S., Tchokouansi, H. T., Kuetché, V. K., Bouetou, T. B., & Kofane, T. C. (2017). N-rotating loop-soliton solution of the coupled integrable dispersionless equation. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 5(6), 1370-1379.
- [48] Aslan, I., & Öziş, T. (2009). Analytic study on two nonlinear evolution equations by using the (G'/G)-expansion method. *Applied Mathematics and Computation*, 209(2), 425-429.
- [49] Mukam, S. P. T., Souleymanou, A., Kuetché, V. K., & Bouetou, T. B. (2018). Generalized Darboux transformation and parameter-dependent rogue wave solutions to a nonlinear Schrödinger system. *Nonlinear Dynamics*, 93(2), 373-383.
- [50] Nestor, S., Abbagari, S., Houwe, A., Betchewe, G., & Doka, S. Y. (2020). Diverse chirped optical solitons and new complex traveling waves in nonlinear optical fibers. *Communications in Theoretical Physics*, 72(6), 065501.
- [51] Nestor, S., Betchewe, G., Inc, M., & Doka, S. Y. (2020). Exact traveling wave solutions to the higher-order nonlinear Schrödinger equation having Kerr nonlinearity form using two strategic integrations. *The European Physical Journal Plus*, 135(4), 1-13.
- [52] Savaissou, N., Gambo, B., Rezazadeh, H., Bekir, A., & Doka, S. Y. (2020). Exact optical solitons to the perturbed nonlinear Schrödinger equation with dual-power law of nonlinearity. *Optical and Quantum Electronics*, 52(6), 1-16.
- [53] Nestor, S., Houwe, A., Betchewe, G., & Doka, S. Y. (2020). A series of abundant new optical solitons to the conformable space-time fractional perturbed nonlinear Schrödinger equation. *Physica Scripta*, 95(8), 085108
- [54] Yopez-Martínez, H., Rezazadeh, H., Souleymanou, A., Mukam, S. P. T., Eslami, M., Kuetché, V. K., & Bekir, A. (2019). The extended modified method applied to optical solitons solutions in birefringent fibers with weak nonlocal nonlinearity and four wave mixing. *Chinese Journal of Physics*, 58, 137-150
- [55] Drexler, P., & Fiala, P. (2009, February). Suppression of polarimetric birefringence effect in optical fiber and its application for pulsed current sensing. In *2009 International Waveform Diversity and Design Conference* (pp. 173-177). IEEE.

- [56] Drummond, P. D., Kennedy, T. A. B., Dudley, J. M., Leonhardt, R., & Harvey, J. D. (1990). Cross-phase modulational instability in high-birefringence fibers. *Optics communications*, 78(2), 137-142.
- [57] Li, J. H., Chiang, K. S., & Chow, K. W. (2011). Modulation instabilities in two-core optical fibers. *JOSA B*, 28(7), 1693-1701.
- [58] Mukam, S. P. T., Souleymanou, A., Kuetché, V. K., & Bouetou, T. B. (2018). Rogue wave dynamics in barotropic relaxing media. *Pramana*, 91(4), 1-4.
- [59] Murdoch, S. G., Leonhardt, R., & Harvey, J. D. (1995). Polarization modulation instability in weakly birefringent fibers. *Optics letters*, 20(8), 866-868.
- [60] Rothenberg, J. E. (1990). Modulational instability for normal dispersion. *Physical Review A*, 42(1), 682.
- [61] Tanemura, T., Ozeki, Y., & Kikuchi, K. (2004). Modulational instability and parametric amplification induced by loss dispersion in optical fibers. *Physical review letters*, 93(16), 163902.
- [62] Arrigo, D. J. (2015). *Symmetry Analysis of Differential Equations: An Introduction*. John Wiley & Sons.
- [63] Bluman, G., Anco, S., & Anco, S. C. (2002). *Symmetry and integration methods for differential equations* (Vol. 154). Springer Science & Business Media.
- [64] Steinberg, S. (1979). Technical Report No. 367. *University of New Mexico, USA*.
- [65] Bhutani, O. P., & Singh, K. (1998). Generalized similarity solutions for the type D fluid in five-dimensional flat space. *Journal of Mathematical Physics*, 39(6), 3203-3212.
- [66] Moussa, M. H. M. (2001). Similarity solutions to non-linear partial differential equation of physical phenomena represented by the Zakharov–Kuznetsov equation. *International journal of engineering science*, 39(14), 1565-1575.
- [67] Nucci, M. C., & Leach, P. G. L. (2000). The determination of nonlocal symmetries by the technique of reduction of order. *Journal of mathematical analysis and applications*, 251(2), 871-884.
- [68] Russell, J. S. (1845). *Report on Waves: Made to the Meetings of the British Association in 1842-43*.
- [69] Korteweg, D.J., Vries, G.D., XLI. (1895). On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves, *Phil. Mag.* 39, 422–443.
- [70] Fermi, E., Pasta, P., Ulam, S., & Tsingou, M. (1955). *Studies of the nonlinear problems* (No. LA-1940). Los Alamos National Lab.(LANL), Los Alamos, NM (United States).
- [71] Zabusky, N. J., & Kruskal, M. D. (1965). Interaction of "solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Physical review letters*, 15(6), 240.
- [72] Kivshar, Y. S., & Agrawal, G. (2003). *Optical solitons: from fibers to photonic crystals*. Academic press.
- [73] Ablowitz, M. J., Ablowitz, M. A., Clarkson, P. A., & Clarkson, P. A. (1991). *Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering* (Vol. 149). Cambridge university press.
- [74] Aubry, S. (1997). Breathers in nonlinear lattices: Existence, linear stability and quantization. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 103(1-4), 201-250.
- [75] Flach, S., & Willis, C. R. (1998). Discrete breathers. *Physics reports*, 295(5), 181-264.
- [76] Rajaraman, R. (1982). *Solitons and instantons: an introduction to solitons and instantons in quantum field theory*, North-Holland Amsterdam.

- [77] Davydov, Aleksandr, S. (1991). Soliton in molecular system. Mathematics and Its Applications (Soviet Series), 61 (2nd ed.) Kluwer Academic Publisher.
- [78] Yakushevich, Ludmila, V. (2004). *Nonlinear Physics of DNA* (2nd Revised ed.), Wiley-VCH.
- [79] Akhmediev, N. N., & Ankiewicz, A. (1997). *Nonlinear pulses and beams*. London: Chapman & Hall.
- [80] Agrawal, G. P. (1987). Modulation instability induced by cross-phase modulation. *Physical review letters*, 59(8), 880.
- [81] Hasegawa, A. (1984). Generation of a train of soliton pulses by induced modulational instability in optical fibers. *Optics letters*, 9(7), 288-290.
- [82] Tai, K., Hasegawa, A., & Tomita, A. (1986). Observation of modulational instability in optical fibers. *Physical review letters*, 56(2), 135.
- [83] Turing, A.M. (1952). The chemical basis of morphogenesis, *Philos. Trans. R. Soc. Lond. B* 237, 37–72.
- [84] Benjamin, T. B., & Feir, J. E. (1967). The disintegration of wave trains on deep water Part 1. Theory. *Journal of Fluid Mechanics*, 27(3), 417-430.
- [85] Chabchoub, A., Kibler, B., Dudley, J. M., & Akhmediev, N. (2014). Hydrodynamics of periodic breathers. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 372(2027), 20140005.
- [86] Nishikawa, K., Hojo, H., Mima, K., & Ikezi, H. (1974). Coupled nonlinear electron-plasma and ion-acoustic waves. *Physical Review Letters*, 33(3), 148-151.
- [87] Houwe, A., Yakada, S., Abbagari, S., Saliou, Y., Inc, M., & Doka, S. Y. (2021). Survey of third- and fourth-order dispersions including ellipticity angle in birefringent fibers on W-shaped soliton solutions and modulation instability analysis. *The European Physical Journal Plus*, 136(4), 1-27.
- [88] Ablowitz, M. J., & Horikis, T. P. (2017). Rogue waves in birefringent optical fibers: elliptical and isotropic fibers. *Journal of Optics*, 19(6), 065501.
- [89] Li, J. H., Chow, K. W., Liu, P., Hu, Y. Z., & Sun, T. T. (2016). Effects of ellipticity angle on modulation instabilities in birefringent optical fibers. *Communications in Theoretical Physics*, 65(2), 231-236.
- [90] Akgül, A., Inc, M., & Hashemi, M. S. (2017). Group preserving scheme and reproducing kernel method for the Poisson–Boltzmann equation for semiconductor devices. *Nonlinear Dynamics*, 88(4), 2817-2829.
- [91] Hashemi, M. S., & Abbasbandy, S. (2017). A geometric approach for solving Troesch's problem. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 40(1), 97-116.
- [92] Hashemi, M. S. (ns by a novel geometric meshless method. *Engineering with Computers*, 37(4), 3397-3407.
- [93] Hashemi, M. S., & Akgül, A. (2021). On the MHD boundary layer flow with diffusion and chemical reaction over a porous flat plate with suction/blowing: two reliable methods. *Engineering with Computers*, 37(2), 1147-1158.
- [94] Attia, N., & Akgül, A. (2022). A reproducing kernel Hilbert space method for nonlinear partial differential equations: applications to physical equations. *Physica Scripta*, 97(10), 104001.
- [95] Foroutan, M. R., Hashemi, M. S., Gholizadeh, L., Akgül, A., & Jarad, F. (2022). A new application of the Legendre reproducing kernel method. *AIMS Mathematics*, 7(6), 10651-10670.

- [96] Hashemi, M. S., & Baleanu, D. (2020). *Lie symmetry analysis of fractional differential equations*. Chapman and Hall/CRC.
- [97] Pashayi, S., Hashemi, M. S., & Shahmorad, S. (2017). Analytical lie group approach for solving fractional integro-differential equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 51, 66-77.
- [98] Sahadevan, R., & Prakash, P. (2017). On Lie symmetry analysis and invariant subspace methods of coupled time fractional partial differential equations. *Chaos, Solitons & Fractals*, 104, 107-120.
- [99] Osman, M. S., Baleanu, D., Adem, A. R., Hosseini, K., Mirzazadeh, M., & Eslami, M. (2020). Double-wave solutions and Lie symmetry analysis to the (2+ 1)-dimensional coupled Burgers equations. *Chinese Journal of Physics*, 63, 122-129.
- [100] Zafar, A., Raheel, M., Asif, M., Hosseini, K., Mirzazadeh, M., & Akinyemi, L. (2022). Some novel integration techniques to explore the conformable M-fractional Schrödinger-Hirota equation. *Journal of Ocean Engineering and Science*, 7(4), 337-344.
- [101] Iqbal, M. A., Wang, Y., Miah, M. M., & Osman, M. S. (2021). Study on date–Jimbo–Kashiwara–Miwa equation with conformable derivative dependent on time parameter to find the exact dynamic wave solutions. *Fractal and Fractional*, 6(1), 4.
- [102] Malik, S., Hashemi, M. S., Kumar, S., Rezazadeh, H., Mahmoud, W., & Osman, M. S. (2023). Application of new Kudryashov method to various nonlinear partial differential equations. *Optical and Quantum Electronics*, 55(1), 1-13.
- [103] Rezazadeh, H., Mirzazadeh, M., Mirhosseini-Alizamini, S. M., Neirameh, A., Eslami, M., & Zhou, Q. (2018). Optical solitons of Lakshmanan–Porseizian–Daniel model with a couple of nonlinearities. *Optik*, 164, 414-423.
- [104] Gazizov, R. K., & Kasatkin, A. A. (2013). Construction of exact solutions for fractional order differential equations by the invariant subspace method. *Computers & Mathematics with Applications*, 66(5), 576-584.
- [105] Chu, Y. M., Inc, M., Hashemi, M. S., & Eshaghi, S. (2022). Analytical treatment of regularized Prabhakar fractional differential equations by invariant subspaces. *Computational and Applied Mathematics*, 41(6), 1-17.
- [106] Degasperis, A., & Procesi, M. (1999). Asymptotic integrability. *Symmetry and perturbation theory*, 1(1), 23-37.
- [107] Degasperis, A., Holm, D. D., & Hone, A. N. (2002). A new integrable equation with peakon solutions. *Theoretical and Mathematical Physics*, 133(2), 1463-1474.
- [108] Tian, L., Chen, Y., Liu, Y., & Gao, Y. (2011). Low-regularity solutions of the periodic general Degasperis–Procesi equation. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 74(8), 2802-2812.
- [109] Rodriguez, J. N., & Omel’yanov, G. (2019). General Degasperis-Procesi equation and its solitary wave solutions. *Chaos, Solitons & Fractals*, 118, 41-46.
- [110] Ma, H. C., Yu, Y. D., & Ge, D. J. (2008). New exact traveling wave solutions for the modified form of Degasperis–Procesi equation. *Applied mathematics and computation*, 203(2), 792-798.
- [111] Wazwaz, A. M. (2007). New solitary wave solutions to the modified forms of Degasperis–Procesi and Camassa–Holm equations. *Applied Mathematics and Computation*, 186(1), 130-141.
- [112] Camassa, R., & Holm, D. D. (1993). An integrable shallow water equation with peaked solitons. *Physical review letters*, 71(11), 1661.

- [113] Camassa, R., Holm, D. D., & Hyman, J. M. (1994). A new integrable shallow water equation. *Advances in Applied Mechanics*, 31, 1-33.
- [114] Liang, J., Li, J., & Zhang, Y. (2020). Bifurcations and exact solutions of an asymptotic rotation-Camassa–Holm equation. *Nonlinear Dynamics*, 101(4), 2423-2439.
- [115] Jafari, H., Goodarzi, K., Khorshidi, M., Parvaneh, V., & Hammouch, Z. (2021). Lie symmetry and μ -symmetry methods for nonlinear generalized Camassa–Holm equation. *Advances in Difference Equations*, 2021(1), 1-12.
- [116] Huang, S., & Li, H. (2022). Darboux transformations of the Camassa-Holm type systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, 157, 111910.
- [117] Abbasbandy, S., & Parkes, E. J. (2008). Solitary smooth hump solutions of the Camassa–Holm equation by means of the homotopy analysis method. *Chaos, Solitons & Fractals*, 36(3), 581-591.
- [118] Lundmark, H., & Szmigielski, J. (2003). Multi-peakon solutions of the Degasperis–Procesi equation. *Inverse problems*, 19(6), 1241.
- [119] Matsuno, Y. (2005). Multisoliton solutions of the Degasperis–Procesi equation and their peakon limit. *Inverse problems*, 21(5), 1553.
- [120] Vakhnenko, V. O., & Parkes, E. J. (2004). Periodic and solitary-wave solutions of the Degasperis–Procesi equation. *Chaos, Solitons & Fractals*, 20(5), 1059-1073.
- [121] Zhou, S., & Mu, C. (2013). The properties of solutions for a generalized b-family equation with peakons. *Journal of Nonlinear Science*, 23(5), 863-889.
- [122] Xia, B., & Qiao, Z. (2013). The N-kink, bell-shape and hat-shape solitary solutions of b-family equation in the case of $b=0$. *Physics Letters A*, 377(37), 2340-2342.
- [123] Coclite, G. M., Gargano, F., & Sciacca, V. (2012). Analytic solutions and singularity formation for the peakon b-family equations. *Acta applicandae mathematicae*, 122(1), 419-434.
- [124] Zhou, J., & Tian, L. (2008). A type of bounded traveling wave solutions for the Fornberg–Whitham equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 346(1), 255-261.
- [125] Chen, A., Li, J., Deng, X., & Huang, W. (2009). Travelling wave solutions of the Fornberg–Whitham equation. *Applied mathematics and computation*, 215(8), 3068-3075.
- [126] Hashemi, M. S. (2021). A novel approach to find exact solutions of fractional evolution equations with non-singular kernel derivative. *Chaos, Solitons & Fractals*, 152, 111367.
- [127] Akbulut, A., Mirzazadeh, M., Hashemi, M. S., Hosseini, K., Salahshour, S., & Park, C. (2022). Triki–Biswas model: Its symmetry reduction, Nucci’s reduction and conservation laws. *International Journal of Modern Physics B*, 2350063.
- [128] Xia, F. L., Jarad, F., Hashemi, M. S., & Riaz, M. B. (2022). A reduction technique to solve the generalized nonlinear dispersive mK (m, n) equation with new local derivative. *Results in Physics*, 105512.
- [129] Gülşen, S., Yao, S. W., & Inc, M. (2021). Lie symmetry analysis, conservation laws, power series solutions, and convergence analysis of time fractional generalized drinfeld-sokolov systems. *Symmetry*, 13(5), 874.
- [130] Hashemi, M. S., İnç, M., & Bayram, M. (2019). Symmetry properties and exact solutions of the time fractional Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov equation. *Revista mexicana de fisica*, 65(5), 529-535.
- [131] Kumar, S., & Rani, S. (2020). Lie symmetry reductions and dynamics of soliton solutions of (2+1)-dimensional Pavlov equation. *Pramana*, 94(1), 1-12.

- [132] Sahoo, S., Garai, G., & Saha Ray, S. (2017). Lie symmetry analysis for similarity reduction and exact solutions of modified KdV–Zakharov–Kuznetsov equation. *Nonlinear Dynamics*, 87(3), 1995-2000.
- [133] Faridi, W. A., Asjad, M. I., & Eldin, S. M. (2022). Exact Fractional Solution by Nucci’s Reduction Approach and New Analytical Propagating Optical Soliton Structures in Fiber-Optics. *Fractal and Fractional*, 6(11), 654.
- [134] Hashemi, M. S. (2016). On Black-Scholes equation; method of Heir-equations, nonlinear self-adjointness and conservation laws. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, 42(4), 903-921.
- [135] Nucci, M. C. (2003). Nonclassical symmetries as special solutions of heir-equations. *Journal of mathematical analysis and applications*, 279(1), 168-179.
- [136] Cinar, M., Secer, A., Ozisik, M., & Bayram, M. (2022). Derivation of optical solitons of dimensionless Fokas-Lenells equation with perturbation term using Sardar sub-equation method. *Optical and Quantum Electronics*, 54(7), 1-13.
- [137] Asjad, M. I., Munawar, N., Muhammad, T., Hamoud, A. A., Emadifar, H., Hamasalh, F. K., ... & Khademi, M. (2022). Traveling wave solutions to the Boussinesq equation via Sardar sub-equation technique. *AIMS Mathematics*, 7(6), 11134-11149.
- [138] Lie, S. (1890). *Theorie der Transformationsgruppen II* (in German), Leipzig: BG Teubner. *Written with the help of Friedrich Engel*.
- [139] Kumar, S., Niwas, M., & Wazwaz, A. M. (2020). Lie symmetry analysis, exact analytical solutions and dynamics of solitons for $(2+1)$ -dimensional NNV equations. *Physica Scripta*, 95(9), 095204.
- [140] Gazizov, R. K., Kasatkin, A. A., Lukashchuk, S. Y. (2009). Symmetry properties of fractional diffusion equations. *Physica Scripta*, 136, 014016.
- [141] Wang, G. W., Liu, X. Q., & Zhang, Y. Y. (2013). Lie symmetry analysis to the time fractional generalized fifth-order KdV equation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 18(9), 2321-2326.
- [142] Hunter, J. K., & Saxton, R. (1991). Dynamics of director fields. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 51(6), 1498-1521.
- [143] Dai, H. H., & Pavlov, M. (1998). Transformations for the Camassa-Holm equation, its high-frequency limit and the Sinh-Gordon equation. *Journal of the Physical Society of Japan*, 67(11), 3655-3657.
- [144] Hunter, J. K., & Zheng, Y. (1994). On a completely integrable nonlinear hyperbolic variational equation. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 79(2-4), 361-386.
- [145] Johnson, R. S. (2002). Camassa–Holm, Korteweg–de Vries and related models for water waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 455, 63-82.
- [146] Wei, X., & Yin, Z. (2011). Global existence and blow-up phenomena for the periodic Hunter–Saxton equation parametrized by the speed κ of the Galilean frame. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 12(5), 2616-2624.
- [147] Yin, Z. (2004). On the Structure of Solutions to the Periodic Hunter--Saxton Equation. *SIAM journal on mathematical analysis*, 36(1), 272-283.

ÖZGEÇMİŞ

Harun BİÇER

[illegible]

AKADEMİK FAALİYETLER

Makaleler:

1. Inc, M., Houwe, A., & Bicer, H. (2021). Ellipticity angle effect on exact optical solitons and modulation instability in birefringent fiber. *Optical and Quantum Electronics*, 53(11), 1-18.
2. Biçer, H. (2022). Stability of Partial Differential Equations by Mahgoub Transform Method. *Sakarya University Journal of Science*, 26(6), 1267-1273.
3. Yao, S. W., Gulsen, S., Hashemi, M. S., Inc, M., & Bicer, H. (2023). Periodic Hunter–Saxton equation parametrized by the speed of the Galilean frame: Its new solutions, Nucci’s reduction, first integrals and Lie symmetry reduction. *Results in Physics*, 47, 106370.
4. Gulsen, S., Hashemi, M. S., Alhefthi, R., Inc, M., & Bicer, H. (2023). Nonclassical symmetry analysis and heir-equations of forced Burger equation with time variable coefficients. *Computational and Applied Mathematics*, 42(5), 221.

Bildiriler:

1. Biçer H., "On The Periodic Solutions of a Nonlinear Differential Equation with Variable Delays", 6th. International Conference on Computational Mathematics and Engineering Sciences (CMES 2022), Ordu University, Turkey, 20- 22 May (2022).

2. Biçer H., "Mahgoub trasform method in stability research", 4th. International Conference on Pure and Applied Mathematics (ICPAM-VAN 2022), Van Yüzüncü Yıl University, Turkey, June 22-23 (2022).

