

HAZİRAN 2020

Yüksek Lisans Tezi - Matematik

HÜSEYİN TAMER

TÜRKİYE CUMHURİYETİ
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YAKIN-HALKALARIN VE SMARANDACHE YAKIN-
HALKALARIN ASAL İDEALLERİ VE RADİKALLERİ

MATEMATİK
YÜKSEK LİSANS TEZİ

HÜSEYİN TAMER
HAZİRAN 2020

**YAKIN-HALKALARIN VE SMARANDACHE YAKIN-
HALKALARIN ASAL İDEALLERİ VE RADİKALLERİ**

Gaziantep Üniversitesi

Matematik

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Doç. Dr. Necati OLGUN

Hüseyin TAMER

Haziran 2020



©2020 [Hüseyin TAMER]

İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilmek suretiyle tezde yer aldığını beyan ederim.

Hüseyin TAMER

ABSTRACT

PRIME IDEALS AND RADICALS OF THE NEAR-RINGS AND SMARANDACHE NEAR-RINGS

TAMER, Hüseyin

M.Sc. in Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Necati OLGUN

June 2020

63 pages

The purpose of this thesis is to study the concept of near-rings, Smarandache near-rings, examining some related features and researching some theorems and results. In addition, because of the near-rings, generalized version of the rings, studies and researches in this field are carried out regularly and continuously. Historically, the first studies on the near-ring were done by L.E. Dickson in 1905. Vasantha Kandasamy did his first work on Smarandache near-rings in 2002. Different results have been obtained by extending many concepts in rings in near-rings. In this study, it has been shown that it can create different near-ring structures on each G group. In addition, it has been investigated that in the N near-ring the annihilator of each element is a left ideal requirement and generally there is no sub near-ring. Then the concepts of S -near-ring, S -sub near-ring and S -near-ring homomorphism are explained by giving examples. Finally, examples are presented with prime, semi-prime ideals and related theorems on the prime radical of an ideal.

Key Words: Near-ring, N -group, Near-ring Homomorphism, Group Near-ring, S -near-ring, S -ideal, Prime Ideal, Semi Prime Ideal, Prime Radical.

ÖZET

YAKIN-HALKALARIN VE SMARANDACHE YAKIN-HALKALARIN ASAL İDEALLERİ VE RADİKALLERİ

TAMER, Hüseyin
Yüksek Lisans Tezi, Matematik
Danışman: Doç. Dr. Necati OLGUN
Haziran 2020
63 sayfa

Bu tezin yapılmasının amacı yakın-halkalar, Smarandache yakın-halkaları kavramı üzerinde çalışılması, ilgili bazı özelliklerin incelenmesi ve konuyla ilgili bazı teoremler ile sonuçların araştırılmasıdır. Ayrıca yakın-halkalar, halkaların genelleştirilmiş hali olduğu nedeni ile bu alanda çalışmalar, araştırmalar düzenli ve sürekli bir şekilde yürütülmektedir. Tarihsel olarak, yakın-halka üzerinde ilk çalışmalar 1905 yılında L.E. Dickson tarafından yapılmıştır. Smarandache yakın-halkaları üzerinde ilk çalışmaları Vasantha Kandasamy 2002 yılında yapmıştır. Halkalardaki pek çok kavramın yakın-halkalar'da genişletilmesiyle farklı sonuçlar elde edilmiştir. Bu çalışmada her G grubu üzerinde farklı yakın-halka yapısı oluşturabileceği gösterilmiştir. Ayrıca N yakın-halkasında her elemanın sıfırlayan bir sol ideal gerek olduğu ve genelde alt yakın-halka olmadığı incelenmiştir. Daha sonra S -yakın-halka, S -alt yakın-halka ve S -yakın-halka homomorfizması kavramları örnek vererek açıklanmıştır. Son olarak, asal, yarı asal idealler ve bir idealin asal radikali üzerinde ilgili teoremler ile örnekler sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Yakın-halka, N -grup, Yakın-halka Homomorfizm, Grup Yakın-halka, S -yakın-halka, S -ideal, Asal İdeal, Yarı Asal İdeal, Asal Radikal.



“Canum aileme”

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince tüm bilgilerini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen ve tezimde büyük emeği olan, Gaziantep Üniversitesi öğretim üyelerinden danışman hocam, sayın Doç. Dr. Necati Olgun’a sonsuz minnet ve teşekkürlerimi sunarım.

Çalışma süresince beni hep destekleyen ve güvenen çok sevdiğim biricik babam İsmail TAMER, annem, eşim ve tüm aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ABSTRACT	v
ÖZET.....	vi
TEŞEKKÜR	viii
İÇİNDEKİLER	ix
SEMBOLLER LİSTESİ.....	x
BÖLÜM 1: GİRİŞ	1
1.1. Çalışmanın Amacı	1
BÖLÜM 2: YAKIN-HALKALAR	3
2.1. Ön Bilgiler	3
2.2. N -Gruplar (Yakın-Modüller)	14
2.3. Alt Yakın-Halkalar	16
2.4. Yakın-Halka Homomorfizması Ve İdealler	17
BÖLÜM 3: SMARANDACHE YAKIN-HALKALAR.....	32
3.1. Grup Yakın-Halkaları.....	32
3.2 Smarandache Yakın-Halkaları	33
3.3. Smarandache Alt Yakın-Halkaları	34
3.4. Smarandache Yakın-Halka Homomorfizması Ve Smarandache İdealler.....	36
BÖLÜM 4: ASAL İDEALLER VE RADİKALLER	44
4.1. Yakın-Halkalarda Alt Kümelerin Çarpımı	44
4.2. Asal idealler.....	45
4.3. Yarı Asal İdealler	52
4.4. Yakın-Halkalarda Asal Radikal Kavramı.....	55
BÖLÜM 5: SONUÇ VE ÖNERİLER	61
KAYNAKLAR	62

SEMBOLLER LİSTESİ

G^G	G grubunun üzerindeki fonksiyonlar kümesi
0_G	G grubunun etkisiz elemanı
$\circ$	Fonksiyonlarda belirlenen bileşke işlemi
$\forall$	Her
$\exists$	En az bir
$\in$	Eleman
$\notin$	Eleman değil
$\subseteq$	Alt küme
$\not\subseteq$	Alt küme değil
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$E(G)$	G grubunun bütün endomorfizmlerin kümesi
$M_{int}(\mathbb{R})$	İntegralli gerçek fonksiyonların kümesi
$\Rightarrow$	İse
$\Leftrightarrow$	Ancak ve ancak
$\cap$	Kesişim işlemi
$M_{aff}(V)$	V vektör uzayı üzerindeki affine fonksiyonların kümesi
$Hom_f(V, V)$	V vektör uzayı üzerindeki homomorfizmaların kümesi
$n(N)$	N yakın-halkasının tüm normal elemanlarının kümesi
$C(N)$	N yakın-halkasının merkezi
$SN(N)$	N yakın-halkasının simple nilpotent elemanların kümesi
N^N	N -grup

$M(L)^L$	$M(L)$ -grup
$\leq_N$	N -alt grup
$Hom_N(L, L')$	L N -grubundan, L' N -grubuna tüm N -homomorfizmlerinin kümesi
$\trianglelefteq$	İdeal
Φ	Boş küme
$\cong$	Eşlik
$Card(\Omega)$	Ω kümesinin eleman sayısı
$\langle n \rangle$	n elemanı ile üretilen ideal
$\langle S \rangle$	S kümesi ile üretilen ideal

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 Çalışmanın Amacı

Yakın-halkalar kavramı genel olarak halkaların genelleştirilmiş halidir. Ayrıca her halka bir yakın-halka belirtmektedir. Yakın-halkalar, halkalardan farklı olarak birinci işleme göre değişmeli olması gerekmeyen ve belirlenen ikinci işlem birinci işlem üzerine tek yönden dağılma özelliğini sağlaması yeterlidir [1].

Yakın-halka bünyesinin varlığını gösteren birçok örnek ile doğal bir şekilde karşılaşabiliriz, örneğin; $(G, +)$ herhangi bir grup olmak üzere, fonksiyonlarda toplama $+$ ve bileşke $\circ$ işlemi altında,

$$M(G) = \{ \sigma : G \rightarrow G \mid \sigma \text{ bir fonksiyon} \}$$

kümesi bir yakın-halka bünyesi belirtmektedir. Hatta G değişmeli bir grup ise, dağılma özelliği sağ taraftan, $(\sigma + \mu) \circ \tau = \sigma \circ \tau + \mu \circ \tau$ daima sağlanmaktadır. Fakat sol taraftan $\sigma \circ (\mu + \tau) = \sigma \circ \mu + \sigma \circ \tau$ sağlanması için, σ 'nın bir grup homomorfizm olması gerekmektedir.

Tarihsel açıdan, yakın-halka üzerinde ilk çalışmalar 1905 yılında L.E. Dickson tarafından yapılmıştır [2]. Ancak Dickson sadece tek yönden dağılma özelliğini sağlayan cisimlerin varlığını kanıtlamıştır. Zira bulunan cisimler "yakın-cisim" adı verilerek tanımlanmıştır. Sonraki yıllarda yakın-halka teorisi üzerine, birinci baskısı 1977'de ve daha sonra yenilenmiş baskısı 1983 yılında, yapılan Günter PİLZ'e ait olan "Near-rings" isimli kitabı, yakın-halkalarla ilgili temel bir kaynak olarak kabul edilmiştir.

Yakın-halkalarda, asal ideallerin konusunda ilk adımlar ve detaylı çalışmalar (Van der Walt, 1964) [3], (Beidleman, 1967) [4], (Rao, 1979) [5] tarafından yapılmıştır.

Yarı asal ideal, asal ideal ve asal radikal kavramları yakın-halka teorisinde önemli bir rol almaktadır.

Ayrıca asallık kavramını incelemek ve ilgili temel teoremler ile sonuçları ispatlamak için, *sp*-system, *m*-system gibi kavramlar kullanılmaktadır. Smarandache yakın-halkaları üzerine ilk detaylı çalışmaları Vasantha Kandasamy (2002b) yapmıştır [6,7].

Bu tezde ilk olarak yakın-halkalarla ilgili genel bilgilere yer verilmiştir.

İkinci bölümde yakın-halka, *N*-grup (yakın-modül), alt yakın-halka, yakın-halka homomorfizması ve idealler gibi kavramlar tanıtılmıştır. Ayrıca bu kavramlarla ilgili bazı özellikler ve teoremler incelenmiştir. Bu bölümde *N* yakın-halkası için, $(N, +)$ grubu, $(N_0, +)$ sıfır simetrik kısmının, $(N_C, +)$ sabit kısmı ile bir yarı-direkt çarpımı olduğu gösterilmiştir. Yakın-halka teorisinde her sol idealin bir alt yakın-halka olmadığı kanıtlanmıştır. Örneğin; *N* yakın-halkasında her elemanın sıfırlayan bir sol ideal gerek olduğu ve genelde alt yakın-halka olmadığı incelenmiştir.

Üçüncü bölümde grup yakın-halka, Smarandache yakın-halka tanımı verilerek, örnekler ve teoremler ile birçok özellikler incelenmiştir. Daha sonra Smarandache alt yakın-halka (S-alt yakın-halka), Smarandache yakın-halka homomorfizm (S-yakın-halka homomorfizm), Smarandache ideal (S-ideal) gibi kavramlar tanımlanmış, bazı örnekler sunularak açıklanmıştır.

Dördüncü bölümde yakın-halkalarda asal ideal, yarı asal ideal ve bir idealin asal radikali gibi kavramlara yer verilmiştir. Yakın-halkalar, halkalardan farklı olduğuna göre asallık kavramı birçok farklı asallık tanımı ile sunulmuştur. Ayrıca asallık konusunda, Halkalardaki pek çok kavramın yakın-halkalar 'da genişletilmesiyle farklı sonuçlar elde edilmiştir.

Beşinci bölümde son olarak bu tezde elde edilen sonuçlara ve önerilere yer verilmiştir.

BÖLÜM 2

YAKIN-HALKALAR

2.1 Ön Bilgiler

Yakın-halkalar kavramı genel olarak halkaların bir genelleştirilmiş halidir. Yakın-halkalar, halkalardan farklı olarak, birinci işleme göre değişmeli olması gerekmeyen ve belirlenen ikinci işlem birinci işlem üzerine tek yönden dağılma özelliğini sağlaması yeterlidir.

Tanım 2.1.1 [1] $N \neq \emptyset$ bir küme olsun. Eğer N kümesi üzerine belirlenen $+$ ve $\cdot$ iki ikili işlem, aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, N 'ye sağ yakın-halka denir.

1) $(N, +)$ (değişmeli olması gerekmeyen) grup.

2) $(N, \cdot)$ yarı grup.

3) $\forall a_1, a_2, a_3 \in N$ için,

$$(a_1 + a_2) \cdot a_3 = a_1 \cdot a_3 + a_2 \cdot a_3$$

Eğer 3.özellik

3') $\forall a_1, a_2, a_3 \in N$ için,

$$a_1 \cdot (a_2 + a_3) = a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot a_3$$

şeklinde sağlanıyorsa, N 'ye sol yakın-halka denir. Bu tez çalışmasında aksi belirtilmedikçe verilen yakın-halkalar bir sağ yakın-halka olarak alınacaktır.

Örnekler 2.1.2

1) $(G, +)$ bir grup ve 0_G etkisiz elemanı olmak üzere, fonksiyonlara tanımlanan toplama $+$ ve bileşke $\circ$ işlemi altında aşağıdaki kümeler yakın-halka bünyesi belirtmektedir.

i. $M(G) = \{ \sigma : G \rightarrow G \mid \sigma \text{ bir fonksiyon} \} = G^G.$

ii. $M_0(G) = \{ \sigma : G \rightarrow G \mid \sigma(0_G) = 0_G \}.$

iii. $M_C(G) = \{ \sigma : G \rightarrow G \mid \sigma \text{ sabit fonksiyon} \}.$

iv. $M_C^0(G) = \{ \sigma_\gamma : G \rightarrow G \mid \gamma \in G \text{ ve } \sigma_\gamma(\beta) = \begin{cases} 0_G & \beta = 0_G \\ \gamma & \beta \neq 0_G \end{cases} \}.$

Çözüm: Sadece $(M_C(G), +, \circ)$ üçlüsünün bir yakın-halka olduğunu göstereceğiz.

Kalan i., ii. ve iv. Örnekler ise, benzer bir şekilde kolayca ispatlatılabilir.

» $(M_C(G), +)$ 'nin grup olduğunu gösterelim.

$$+ : M_C(G) \times M_C(G) \rightarrow M_C(G)$$

$$\forall \sigma, \mu \in M_C(G), \gamma \in G \text{ için, } (\sigma, \mu) \mapsto \sigma + \mu : (\sigma + \mu)(\gamma) = \sigma(\gamma) + \mu(\gamma)$$

i. $\forall \sigma, \mu \in M_C(G), \gamma \in G \text{ için,}$

$$(\sigma + \mu)(\gamma) = \sigma(\gamma) + \mu(\gamma) = c_1 + c_2$$

$\Rightarrow \sigma + \mu \in M_C(G)$ olduğundan, kapalılık özelliği sağlanır.

ii. $\forall \sigma, \mu, \tau \in M_C(G), \gamma \in G \text{ için,}$

$$((\sigma + \mu) + \tau)(\gamma) = (\sigma + \mu)(\gamma) + \tau(\gamma)$$

$$= (\sigma(\gamma) + \mu(\gamma)) + \tau(\gamma)$$

$$= \sigma(\gamma) + (\mu(\gamma) + \tau(\gamma))$$

$$= \sigma(\gamma) + (\mu + \tau)(\gamma)$$

$$= (\sigma + (\mu + \tau))(\gamma)$$

$\Rightarrow (\sigma + \mu) + \tau = \sigma + (\mu + \tau)$ olduğundan, birleşme özelliği sağlanır.

iii. $\forall \sigma \in M_C(G), \gamma \in G$ için, $\exists \mu = 0 \in M_C(G)$:

$$(\sigma + \mu)(\gamma) = \sigma(\gamma) + \mu(\gamma) = \sigma(\gamma) + 0(\gamma) = \sigma(\gamma) + 0 = \sigma(\gamma)$$

ve

$$(\mu + \sigma)(\gamma) = \mu(\gamma) + \sigma(\gamma) = 0(\gamma) + \sigma(\gamma) = 0 + \sigma(\gamma) = \sigma(\gamma)$$

$\Rightarrow \sigma + 0 = 0 + \sigma = \sigma$ olduğundan, birim eleman özelliği sağlanır.

iv. $\forall \sigma \in M_C(G), \gamma \in G$ için, $\exists \mu = -\sigma \in M_C(G)$:

$$(\sigma + \mu)(\gamma) = \sigma(\gamma) + \mu(\gamma) = \sigma(\gamma) + (-\sigma)(\gamma) = \sigma(\gamma) + (-\sigma(\gamma)) = 0 = 0(\gamma)$$

ve

$$(\mu + \sigma)(\gamma) = \mu(\gamma) + \sigma(\gamma) = (-\sigma)(\gamma) + \sigma(\gamma) = (-\sigma(\gamma)) + \sigma(\gamma) = 0 = 0(\gamma)$$

$\Rightarrow \sigma + (-\sigma) = (-\sigma) + \sigma = 0$ olduğundan, ters eleman özelliği sağlanır.

» $(M_C(G), o)$ 'nın yarı grup olduğunu gösterelim.

$$o : M_C(G) \times M_C(G) \rightarrow M_C(G)$$

$$\forall \sigma, \mu \in M_C(G), \gamma \in G \text{ için, } (\sigma, \mu) \mapsto \sigma o \mu : (\sigma o \mu)(\gamma) = \sigma(\mu(\gamma))$$

i. $\forall \sigma, \mu \in M_C(G), \gamma \in G$ için,

$$(\sigma o \mu)(\gamma) = \sigma(\mu(\gamma)) = \sigma(c_1) = c_2$$

$\Rightarrow \sigma o \mu \in M_C(G)$ olduğundan, kapalılık özelliği sağlanır.

ii. $\forall \sigma, \mu, \tau \in M_C(G), \gamma \in G$ için,

$$((\sigma o \mu) o \tau)(\gamma) = (\sigma o \mu)(\tau(\gamma)) = (\sigma o \mu)(c_1)$$

$$= \sigma(\mu(c_1)) = \sigma(c_2) = c_3$$

$$(\sigma o (\mu o \tau))(\gamma) = \sigma((\mu o \tau)(\gamma)) = \sigma(\mu(\tau(\gamma)))$$

$$= \sigma(\mu(c_1)) = \sigma(c_2) = c_3$$

$\Rightarrow (\sigma \circ \mu) \circ \tau = \sigma \circ (\mu \circ \tau)$ olduğundan, birleşme özelliği sağlanır.

» $\forall \sigma, \mu, \tau \in M_C(G), \gamma \in G$ için,

$$((\sigma + \mu) \circ \tau)(\gamma) = (\sigma + \mu)(\tau(\gamma)) = (\sigma + \mu)(c_1)$$

$$= \sigma(c_1) + \mu(c_1) = c_2 + c_3$$

$$((\sigma \circ \tau) + (\mu \circ \tau))(\gamma) = (\sigma \circ \tau)(\gamma) + (\mu \circ \tau)(\gamma)$$

$$= \sigma(\tau(\gamma)) + \mu(\tau(\gamma))$$

$$= \sigma(c_1) + \mu(c_1) = c_2 + c_3$$

$\Rightarrow (\sigma + \mu) \circ \tau = (\sigma \circ \tau) + (\mu \circ \tau)$ olduğundan, dağılma özelliği sağlanır.

2) $(R, +, \cdot)$ değişmeli ve birimli bir halka ise, $(R[x], +, \cdot)$ üçlüsü, fonksiyon toplama "+" ve fonksiyon bileşke "o" işlemi altında bir yakın-halkadır.

$$R[x] = \{f: f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n \mid n \in \mathbb{N}, x \text{ bir değişken}, a_i \in R\}.$$

3) G bir grup olsun. $E(G)$, G 'nin bütün endomorfizmlerin kümesi fonksiyonlarda toplama ve bileşke işlemleri altında yakın-halka belirtmektedir.

4) $(N, +)$ bir grup ve $\forall a, a' \in N$ için, çarpma işlemi

$$a \cdot a' = \begin{cases} a & ; \quad a' \neq 0 \\ 0 & ; \quad a' = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa, bu durumda $(N, +, \cdot)$ bir yakın-halkadır ve aşikâr yakın-halka olarak tanımlanmaktadır.

5) Her grup üzerine bir yakın-halka yapısı oluşturulabilir. Eğer $(N, +)$ grubun üzerine ikinci işlem olarak $\forall a, a' \in N$ için, $a \cdot a' = 0$ ile tanımlanırsa, $(N, +, \cdot)$ bir yakın-halk olur.

6) Her halka bir yakın-halkadır.

Örnek 2.1.3 $M_{int}(R) = \{f: R \rightarrow R \mid f \text{ integralli}\}$ kümesi fonksiyonlarda toplama ve bileşke işlemi altında bir yakın-halka değildir. Örneğin ;

$$f(x) = e^x, g(x) = x^2 \text{ için, } (g \circ f)(x) = e^{2x} \in M_{int}(R)$$

$$\text{fakat } (f \circ g)(x) = e^{x^2} \notin M_{int}(R) \text{ 'dir}$$

Özellikler 2.1.4 N yakın-halka olmak üzere, aşağıdaki özellikler sağlanmaktadır.

$$\mathbf{a)} \quad \forall a \in N \text{ için, } 0a = 0$$

$$\mathbf{b)} \quad \forall a, a' \in N \text{ için, } (-a)a' = -aa'$$

İspat: a) $\forall a \in N$ için, ve sağ taraftan dağılma özelliğini kullanarak,

$$0a = (0 + 0)a = 0a + 0a \Rightarrow 0a = 0 \text{ bulunur.}$$

$$\mathbf{b)} \quad \forall a, a' \in N \text{ için, sağ taraftan dağılma ve a) özelliklerini kullanarak,}$$

$$(-a)a' = (0 - a)a' = 0a - aa' = -aa' \text{ elde edilir.}$$

Not 2.1.5: Bir N yakın-halkasında, $a0 = 0$ ve $a(-a') = -aa'$

özellikleri genel olarak sağlanmamaktadır. Örnek 2.1.2'de $(M(G), +, 0)$ yakın-halkasında,

$\sigma \circ 0 = 0$ olması için, σ fonksiyonunun orijinden geçmesi ile sağlanır. Benzer şekilde

$\sigma \circ (-\mu) = -(\sigma \circ \mu)$ gerçekleşmesi de σ fonksiyonunun tek fonksiyon olması ile sağlanmaktadır.

Tanım 2.1.6 [1] N yakın-halka olmak üzere,

$$\mathbf{a)} \quad N_0 = \{ a \in N \mid a0 = 0 \} \text{ kümesine, } N \text{ 'nin } 0\text{-simetrik kısmı denir.}$$

$$\mathbf{b)} \quad N_C = \{ a \in N \mid a0 = a \} = \{ a \in N \mid \forall a' \in N : aa' = a \} \text{ kümesine, } N \text{ 'nin sabit kısmı denir.}$$

N_0 ve N_C kümeleri aynı zamanda N 'nin alt yakın-halkasıdır.

Eğer $N = N_0$ ise, N 'ye 0-simetrik yakın-halka ve $N = N_C$ ise, N 'ye sabit yakın-halka denir.

Örnek 2.1.7 $(M(G))_0 = M_0(G)$ ve $(M(G))_C = M_C(G)$ 'dir.

$$\mathbf{Çözüm:} \quad (M(G))_0 = \{ \sigma \in M(G) \mid \sigma \circ 0 = 0 \} = \{ \sigma \in M(G) \mid \sigma(0) = 0 \} = M_0(G)$$

$$(M(G))_C = \{ \sigma \in M(G) \mid \sigma \circ 0 = \sigma \} = \{ \sigma \in M(G) \mid \sigma \text{ sabit} \} = M_C(G)$$

Bu durumda, $M_0 (G)$ 0-simetrik; $M_C (G)$ sabit yakın-halkalardır.

Teorem 2.1.8 [8] Her N yakın-halkası için, $N = N_0 + N_C$ 'dir.

İspat: $\forall a \in N$ için,

$$\begin{aligned} [a - (a 0)] 0 &= [a + (-a 0)] 0 = [a + (-a) 0] 0 \\ &= a 0 + [(-a) 0] 0 = a 0 + (-a) (0 0) \\ &= a 0 + (-a) 0 = a 0 + [-(a 0)] = 0 \end{aligned}$$

olduğundan, $a - (a 0) \in N_0$ 'dir.

Aynı zamanda, $\forall a \in N$ için,

$$(a 0) 0 = a (0 0) = a 0$$

olduğundan, $a 0 \in N_C$ 'dir.

Bu durumda, $\forall a \in N$ için,

$$a = [a - (a 0)] + a 0 \in N_0 + N_C \text{ 'dir.}$$

O halde $N \subseteq N_0 + N_C$ ve $(N_0 + N_C \subseteq N \text{ aşikâr})$ olduğundan, $N = N_0 + N_C$ 'dir.

Şonuç 2.1.9 Her N yakın-halkası için, $(N, +)$ grubu, $(N_0, +)$ 'nın, $(N_C, +)$ ile bir yarı-direkt çarpımıdır.

İspat: $\forall \lambda \in N_0 \cap N_C \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda \in N_0 \Rightarrow \lambda 0 = 0 \\ \lambda \in N_C \Rightarrow \lambda 0 = \lambda \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda = 0$

O halde $N_0 \cap N_C \subseteq \{0\}$ ve $\{0\} \subseteq N_0 \cap N_C$ olduğundan,

$N_0 \cap N_C = \{0\}$ 'dir.

Teorem 2.1.8'den, $N = N_0 + N_C$ 'dir.

Son olarak $(N_0, +)$ 'nın $(N, +)$ 'da normal olduğunu gösterelim.

$\forall b \in N_0$, $\forall a \in N$ için,

$$\begin{aligned} (a + b - a) 0 &= a 0 + b 0 + (-a 0) \\ &= a 0 + [-(a 0)] = 0 \end{aligned}$$

olduğundan, $a + b - a \in N_0$ 'dır.

Böylece $(N, +)$ grubu, $(N_0, +)$ 'nın, $(N_C, +)$ ile bir yarı-direkt çarpımıdır.

Önerme 2.1.10 N 0-simetrik yakın-halka,

$$N_r = \{ a \in N \mid a r = 0, r \text{ idempotent} \}$$

olmak üzere, bu durumda,

i) N_r ve Nr birer yakın-halkadır.

ii) $N = N_r + Nr$ 'dir.

iii) $(N, +)$ grubu, $(N_r, +)$ 'nın, $(Nr, +)$ ile bir yarı-direkt çarpımıdır.

İspat: i) $\forall u, v \in Nr$ için, $u = ar$ ve $v = br$ olacak şekilde $a, b \in N$ vardır.

$$u - v = ar - br = (a - b)r$$

olduğundan, $(Nr, +)$, $(N, +)$ 'nin alt grubudur.

$\forall u, v \in Nr$ için,

$$u v = (ar)(br) = ((ar)b)r = (arb)r \text{ 'dir.}$$

Buradan, $Nr Nr \subseteq Nr$ olur.

$\forall a, a' \in Nr$ için,

$$(a - a')r = ar - a'r = 0 - 0 = 0$$

olduğundan, $(Nr, +)$, $(N, +)$ 'nin bir alt grubudur.

$\forall a, a' \in Nr$ için,

$$(a a')r = a(a'r) = a 0 = 0 \text{ 'dır.}$$

Buradan, $Nr Nr \subseteq Nr$ elde edilir.

ii) $\forall a \in N$ için, $[a - (ar)]r = [a + (-ar)]r = [a + (-a)r]r$

$$= ar + [(-a)r]r = ar + (-a)(rr)$$

$$= ar + (-a)r = ar + [-(ar)] = 0$$

olduğundan, $a - (a r) \in N_r$ 'dir.

Aynı zamanda, $\forall a \in N$ için, $a r \in N_r$ 'dir.

Bu durumda, $\forall a \in N$ için,

$$a = [a - (a r)] + a r \in N_r + N_r \text{ 'dir.}$$

O halde $N \subseteq N_r + N_r$ ve $(N_r + N_r \subseteq N$ aşikâr) olduğundan, $N = N_r + N_r$ 'dir.

$$\text{iii) } \forall \lambda \in N_r \cap N_r \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda \in N_r \Rightarrow \lambda r = 0 \\ \lambda \in N_r \Rightarrow \lambda = a r, a \in N \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \lambda = a r = a (r r) = (a r) r = \lambda r = 0$$

O halde $N_r \cap N_r \subseteq \{0\}$ ve $(\{0\} \subseteq N_r \cap N_r$ aşikâr) olduğundan $N_r \cap N_r = \{0\}$ 'dır.

Son olarak $(N_r, +)$ 'nın $(N, +)$ 'da normal alt grup olduğunu gösterelim.

$\forall a \in N, \forall b \in N_r$ için,

$$(a + b - a) r = a r + b r - a r = a r + 0 - a r = a r - a r = 0$$

sağlanır.

Böylece $(N, +)$ grubu, $(N_r, +)$ 'nın, $(N_r, +)$ ile bir yarı-direkt çarpımıdır.

Tanım 2.1.11 [1] N yakın-halka olsun. $\forall a, a' \in N, t \in N$ için,

a) Eğer

$$t(a + a') = t a + t a'$$

sağlanıyorsa, t elemanına dağılmalı eleman denir. N 'nin bütün dağılmalı elemanlarının kümesi N_d ile gösterilmektedir.

b) Eğer $N_d = N$ ise, N 'ye dağılmalı yakın-halka,

c) $(N, +)$ değişmeli grup ise, N 'ye abelyen yakın-halka,

d) $(N, .)$ değişmeli yarı grup ise, N 'ye komutatif yakın-halka,

e) $(N, .)$ birimli yarı grup ise, N 'ye birimli yakın-halka,

f) $(N - \{0\}, .)$ grup ise, N 'ye yakın-cisim denir.

Örnekler 2.1.12

1) Örnek 2.1.2 3)'de G bir grup ise, $E(G)$, G grubunun bütün endomorfizmlerin kümesi fonksiyonlarda toplama ve bileşke işlemleri altında dağılmalı yakın-halkadır.

2) V, F cismi üzerinde vektör uzayı olmak üzere, $(N = M_{aff}(V), +, \circ)$ üçlüsü bir yakın-halkadır.

$$M_{aff}(V) = \{ f \in M(V) \mid f, V \text{ de affine fonksiyonu} \}$$

Bu durumda, $N_d = Hom_f(V, V)$ 'dir.

3) $Z_2 = \{ 0, 1 \}$ kümesi üzerinde aşağıdaki verilen işlemlere göre $(Z_2, +, \cdot)$ bir yakın-cisimdir.

$$0 + 0 = 0 = 1 + 1 \quad \text{ve} \quad 0 + 1 = 1 = 1 + 0$$

$$0 \cdot 0 = 0 = 0 \cdot 1 \quad \text{ve} \quad 1 \cdot 0 = 0 = 1 \cdot 1$$

Sonuç 2.1.13 a) Eğer N komutatif sağ yakın-halka ise, N sol yakın-halkadır.

b) Eğer N birimli bir yakın-halka ise, $1 \in N_0$ 'dir.

c) Her N yakın-halkası için, $N_d \subseteq N_0$ 'dir.

İspat: a) $\forall a_1, a_2, a_3 \in N$ için,

$$a_1 \cdot (a_2 + a_3) = (a_2 + a_3) \cdot a_1 = a_2 \cdot a_1 + a_3 \cdot a_1 = a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot a_3$$

$$\mathbf{b)} \quad 1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0 \Rightarrow 1 \cdot 0 = 0 \Rightarrow 1 \in N_0.$$

$$\mathbf{c)} \quad \forall t \in N_d \text{ için, } t \cdot 0 = t \cdot (0 + 0) = t \cdot 0 + t \cdot 0 \Rightarrow t \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow t \in N_0 \Rightarrow N_d \subseteq N_0$$

Tanım 2.1.14 [9] N yakın-halka olmak üzere, eğer $s \in N$ için,

$$sN = Ns$$

sağlanıyorsa, s 'ye normal eleman denir. N 'nin bütün normal elemanlarının kümesi $n(N)$ ile gösterilmektedir.

Eğer $n(N) = N$ ise, N yakın-halkasına normal yakın-halka denir.

$$C(N) = \{ c \in N \mid ca = ac \ \forall a \in N \}$$

kümesine N 'nin merkezi olarak tanımlanmaktadır.

Önerme 2.1.15 [10] N normal yakın-halka,

$$E = \{ r \in N \mid r \text{ idempotent} \}$$

olmak üzere,

$$E \neq \{ 0 \} \Rightarrow E \subseteq C(N) \text{ 'dir.}$$

İspat: $\forall r \in E$ için, N normal yakın-halka olduğuna göre,

$$rN = Nr$$

'dir. Bu taktirde, $\forall a \in N$ için,

$$ra = x r$$

ve

$$ar = r b$$

olacak şekilde $u, b \in N$ vardır. Buradan,

$$rar = r(ar) = r(rb) = (rr)b = r^2b = rb = ar$$

ve

$$rar = (ra)r = (ur)r = u(rr) = ur^2 = ur = ra$$

olup,

$$ra = ar$$

elde edilir.

Önerme 2.1.16 N bir 0-simetrik yakın-kalka,

$$SN(N) = \{ s \in N \mid s^2 = 0 \}$$

simple nilpotent elemanların kümesi olmak üzere, eğer

$$E \subseteq N_d \text{ ve } SN(N) = \{ 0 \} \Rightarrow E \subseteq C(N) \text{ 'dir.}$$

İspat: $\forall r \in E$, $\forall a \in N$ için,

$$\begin{aligned} (rar - ar)^2 &= (rar - ar)(rar - ar) = (rar)(rar - ar) - (ar)(rar - ar) = \\ (ra)(r(rar - ar)) - (a)(r(rar - ar)) &= (ra)(rar - rar) - a(rar - rar) = \\ (ra)0 - a0 &= r(a0) - a0 = r0 - 0 = 0 \end{aligned}$$

olduğundan,

$$rar - ar \in SN(N) \text{ ve } SN(N) = \{0\}$$

olduğuna göre,

$$rar - ar = 0$$

buradan,

$$rar = ar$$

olur. Aynı zamanda,

$$\begin{aligned} (rar - ra)^2 &= (rar - ra)(rar - ra) = (rar)(rar - ra) - (ra)(rar - ra) = \\ (ra)(r(rar - ra)) - (ra)(rar - ra) &= (ra)(rar - ra) - (ra)(rar - ra) = 0 \end{aligned}$$

olduğundan,

$$rar - ra \in SN(N) \text{ ve } SN(N) = \{0\}$$

olduğuna göre,

$$rar - ra = 0$$

buradan,

$$rar = ra$$

sağlanır.

Bu durumda,

$$ra = ar$$

elde edilir.

2.2 N - Gruplar (Yakın-Modüller)

Halkalar üzerine tanımlanan modül kavramının, yakın-halkalarda karşısı olan yakın-modüle bir N -grup adı verilmiştir.

Tanım 2.2.1 [1] $(L, +)$ bir grup ve 0_L bu grubun etkisiz elemanı, N bir yakın-halka olmak üzere,

$$\eta : N \times L \rightarrow L$$

$$\forall a \in N, l \in L \text{ için, } (a, l) \mapsto al$$

Eğer $\forall a, a' \in N$ ve $\forall l \in L$ için,

$$(a + a')l = al + a'l$$

ve

$$(aa')l = a(a'l)$$

koşulları sağlanıyorsa, (L, η) 'ye bir N -grup veya N üzerinde bir yakın-modül denir ve N^L ile gösterilmektedir. Eğer N birimli yakın-halka ise,

$\forall l \in L$ için,

$$1l = l$$

koşulunu sağlanıyorsa, L N -grubuna üniter N -grup denir.

Örnekler 2.2.2 1) N yakın-halka olmak üzere,

$$\eta : N \times N \rightarrow N$$

$$\forall a, a' \in N \text{ için, } (a, a') \mapsto aa'$$

dönüşümü altında $(N, +)$ bir N -gruptur ve N^N ile gösterilir.

2) R halkası üzerinde, her M sol modül bir R -gruptur.

3) $(L, +)$ bir grup olsun.

$$\eta : M(L) \times L \rightarrow L$$

$$\forall \sigma \in M(L) \text{ ve } \forall l \in L \text{ için, } (\sigma, l) \mapsto \sigma(l)$$

dönüşümü altında, L bir $M(L)$ -gruptur ve $M(L)^L$ ile gösterilir.

Gerçekten, $\forall \sigma, \mu \in M(L)$ ve $\forall l \in L$ için,

$$(\sigma + \mu)l = (\sigma + \mu)(l) = \sigma(l) + \mu(l) = \sigma l + \mu l$$

ve

$$(\sigma \mu)l = (\sigma \mu)(l) = \sigma(\mu(l)) = \sigma(\mu l)$$

sağlanır.

Özellikler 2.2.3 N yakın-halka, L bir N -grup olmak üzere, bu durumda,

a) $\forall l \in L$ için, $0l = 0_L$

b) $\forall l \in L, \forall a \in N$ için, $(-a)l = -al$

c) $\forall a \in N_0$ için, $a0_L = 0_L$

d) $\forall l \in L, \forall a \in N_C$ için, $al = a0_L$

İspat: **a)** $\forall l \in L$ için,

$$0l = (0 + 0)l = 0l + 0l$$

Buradan,

$$0l = 0_L$$

elde edilir.

b) $\forall l \in L, \forall a \in N$ için,

$$(-a)l = (0 - a)l = 0l - al = 0_L - al = -al \text{ 'dir.}$$

c) $\forall a \in N_0$ için,

$$a0_L = a(00_L) = (a0)0_L = 00_L = 0_L \text{ 'dir.}$$

d) $\forall l \in L, \forall a \in N_C$ için,

$$al = (a0)l = a(0l) = a0_L \text{ 'dir.}$$

2.3 Alt Yakın-halkalar

Tanım 2.3.1 [1] N yakın-halka ve $(H, +)$, $(N, +)$ 'nin bir alt grubu olmak üzere, eğer $HH \subseteq H$ sağlanıyorsa, H 'ye N yakın-halkasının bir alt yakın-halkası denir.

Örnekler 2.3.2 N_0 , N_C ve N_r , N 'nin birer alt yakın-halkalarıdır.

Gerçekten,

i) $\forall a, a' \in N_0$ için, $(a - a')0 = a0 - a'0 = 0 - 0 = 0$

olduğundan, $(N_0, +)$, $(N, +)$ 'nin alt grubudur.

$\forall a, a' \in N_0$ için, $(aa')0 = a(a'0) = a0 = 0$ 'dir.

Böylece $N_0 N_0 \subseteq N_0$ olur.

ii) $\forall a, a' \in N_C$ için, $(a - a')0 = a0 - a'0 = a - a'$

olduğundan, $(N_C, +)$, $(N, +)$ 'nin alt grubudur.

$\forall a, a' \in N_C$ için, $(aa')0 = a(a'0) = aa'$ 'dir.

Bu durumda, $N_C N_C \subseteq N_C$ olur.

iii) önerme 2.1.10'da N_r , N 'nin alt yakın-halkası olduğu gösterilmiştir.

Örnek 2.3.3 N 0-simetrik yakın-halka,

$$E = \{ r \in N \mid r \text{ idempotent} \}$$

olmak üzere, bu durumda,

$$N_r = \{ a \in N \mid ar = 0, r \text{ idempotent} \}$$

N 'nin alt yakın-halkasıdır.

Çözüm: önerme 2.1.10'da verilmiştir.

Örnek 2.3.4 a) K , G grubunun alt grubu olsun. Bu durumda,

$$M_K(G) = \{ \sigma \in M(G) \mid \sigma(K) \subseteq K \}$$

kümesi, $M(G)$ 'nin alt yakın-halkasıdır.

b) K , G grubunun normal alt grubu olmak üzere, Bu durumda,

$$M_{G/K}(G) = \{ \sigma \in M(G) \mid \forall \gamma \in G : \sigma(\gamma + K) \subseteq \sigma(\gamma) + K \}$$

kümesi, $M(G)$ 'nin alt yakın-halkasıdır.

Tanım 2.3.5 N yakın-halka ve L N -grup olmak üzere, L 'nin Ω alt grubu için,

$$N\Omega \subseteq \Omega$$

koşulu sağlanıyorsa, o halde Ω 'ya L 'nin N -alt grubu denir ve $\Omega \leq_N L$ ile gösterilmektedir.

2.4 Yakın-halka Homomorfizması ve İdealler

Tanım 2.4.1 [1] N ve H iki yakın-halka ve

$$\psi : N \rightarrow H$$

bir dönüşüm olmak üzere, eğer $\forall a, a' \in N$ için,

$$\textbf{i)} \quad \psi(a + a') = \psi(a) + \psi(a')$$

$$\textbf{ii)} \quad \psi(aa') = \psi(a)\psi(a')$$

şartları sağlanıyorsa, ψ 'ye **yakın-halka homomorfizması** denir. N yakın-halkasından H yakın-halkasına tüm yakın-halka homomorfizmalarının kümesi $Hom(N, H)$ ile gösterilmektedir.

Not 2.4.2 ψ yakın-halka homomorfizması olmak üzere,

a) ψ bire-bir ise, ψ homomorfizmasına **yakın-halka monomorfizması**,

b) ψ örten ise, ψ homomorfizmasına **yakın-halka epimorfizması**,

c) ψ bire-bir ve örten ise, ψ homomorfizmasına **yakın-halka izomorfizması**,

adı verilir.

d) $\psi : N \rightarrow N$ homomorfizmasına N yakın-halkasının **endomorfizması** ve ψ izomorfizma ise, ψ dönüşümüne N yakın-halkasının **otomorfizması** denir.

Tanım 2.4.3 N yakın-halka, L ve L' iki N -grup olmak üzere, eğer

$$\psi : N^L \rightarrow N^{L'}$$

dönüşümü, $\forall a \in N, \forall l, l' \in L$ için,

$$\textbf{i) } \psi (l + l') = \psi (l) + \psi (l')$$

$$\textbf{ii) } \psi (a l) = a \psi (l)$$

koşulları sağlıyorsa, ψ 'ye N -homomorfizması denir. L N -grubundan L' N -grubuna tüm N -homomorfizmalarının kümesi $Hom_N (L, L')$ ile gösterilmektedir.

Örnek 2.4.4 N yakın-halka, L bir N -grup olmak üzere,

$\forall l \in L$ için,

$$\psi_l : N \rightarrow L$$

$\forall a \in N$ için,

$$a \mapsto a l$$

dönüşümü bir N -homomorfizmasıdır ve $Hom_N (N, L)$ ile gösterilmektedir.

Tanım 2.4.5 [1] N yakın-halka ve R, N 'nin normal alt grubu olmak üzere,

eğer

$$\textbf{i) } RN \subseteq R$$

$$\textbf{ii) } \forall a, a' \in N, \forall r \in R \text{ için,}$$

$$a (a' + r) - a a' \in R$$

koşulları sağlanıyorsa, R 'ye N 'nin ideali denir ve $R \triangleleft N$ ile gösterilmektedir. Sadece

i) koşulu sağlanıyorsa, R 'ye N 'nin sağ ideali, sadece **ii)** koşulu sağlanıyorsa, R 'ye N 'nin sol ideali denir ve sırasıyla $R \triangleleft_r N, R \triangleleft_l N$ ile gösterilmektedir.

Tanım 2.4.6 N yakın-halka, L bir N -grup olmak üzere, L 'nin bir Ω normal alt grubu için,

$\forall l \in L, \forall \omega \in \Omega$ ve $\forall a \in N$ için,

$$a (l + \omega) - a l \in \Omega$$

koşulu sağlanıyorsa, Ω' ya L' nin ideali denir ve $\Omega \triangleleft_N L$ ile gösterilmektedir.

Önerme 2.4.7 N ve H iki yakın-halka ve $\psi : N \rightarrow H$ bir homomorfizma olmak üzere, aşağıdaki özellikler sağlanır.

i) $\psi(0_N) = 0_H$ 'dir.

ii) $\forall a \in N$ için, $\psi(-a) = -\psi(a)$ 'dır.

iii) N birim elemanlı yakın-halka ise, $\psi(1_N) = 1_H$ 'dir.

iv) N birim elemanlı yakın-halka ise, herhangi bir $a \in N$ 'nin tersi varsa,

bu a^{-1} elemanın görüntüsü, $\psi(a)$ elemanının H 'deki tersi, yani

$$\psi(a^{-1}) = (\psi(a))^{-1} \text{ 'dir.}$$

İspat: i) $\forall a \in N$ için, $\psi(a + 0_N) = \psi(a) + \psi(0_N) \Rightarrow \psi(0_N) = 0_H$

ii) $\forall a \in N$ için, $\psi(a) + \psi(-a) = \psi(a + (-a)) = \psi(0_N) = 0_H$

$$\Rightarrow \psi(-a) = -\psi(a)$$

iii) $\forall a \in N$ için, $\psi(a 1_N) = \psi(a) \psi(1_N) \Rightarrow \psi(1_N) = 1_H$

iv) $\forall a \in N$ için, $\psi(a a^{-1}) = \psi(1_N) = 1_H$

olup, diğer taraftan,

$$\psi(a a^{-1}) = \psi(a) \psi(a^{-1}) = 1_H \Rightarrow \psi(a^{-1}) = (\psi(a))^{-1}$$

Tanım 2.4.8 $\psi : N \rightarrow H$ yakın-halka homomorfizması olsun.

$$\text{Ker } \psi = \{ a \in N \mid \psi(a) = 0_H \}$$

kümesine, ψ homomorfizmasının çekirdeği,

$$\text{Im } \psi = \{ \psi(a) \mid a \in N \}$$

kümesine, ψ homomorfizmasının görüntüsü denir.

Önerme 2.4.9 $\psi : N \rightarrow H$ yakın-halka homomorfizması olmak üzere,

i) ψ bire-bir dönüşümüdür $\Leftrightarrow \text{Ker } \psi = \{ 0_N \}$ 'dir.

ii) ψ örten dönüşümdür $\Leftrightarrow \text{Im } \psi = H$ 'dir.

iii) $\text{Ker } \psi$, N yakın-halkasının idealidir.

iv) $\text{Im } \psi$, H yakın-halkasının bir alt yakın-halkasıdır.

v) S, H yakın-halkasının bir ideali ise, $\psi^{-1}(S)$ kümesi N yakın-halkasının bir idealidir.

vi) R, N yakın-halkasının bir ideali ise, $\psi(R)$ kümesi H yakın-halkasının bir alt yakın-halkasıdır.

İspat: i) $\Rightarrow$) ψ 1-1 olsun. $\forall a \in \text{Ker } \psi$ için, $\psi(a) = 0_H = \psi(0_N)$ olur.

ψ 1-1 olduğundan, $a = 0_N$ olup,

$\text{Ker } \psi = \{ 0_N \}$ 'dir.

$\Leftarrow$) $\text{Ker } \psi = \{ 0_N \}$ olsun. $\forall a, a' \in N$ için, $\psi(a) = \psi(a')$ alalım.

$\Rightarrow \psi(a) - \psi(a') = 0_H \Rightarrow \psi(a - a') = 0_H \Rightarrow a - a' \in \text{Ker } \psi = \{ 0_N \}$

$\Rightarrow a - a' = 0_N \Rightarrow a = a' \Rightarrow \psi$ 1-1 olur.

ii) $\Rightarrow$) ψ örten olsun. $\forall b \in H$ için, ψ örten olduğundan dolayı, $b = \psi(a)$

olacak şekilde $a \in N$ vardır. Buradan, $b = \psi(a) \in \text{Im } \psi$ olup, $H \subseteq \text{Im } \psi$ 'dir.

Böylece $\text{Im } \psi = H$ eşitliği sağlanır.

$\Leftarrow$) $\text{Im } \psi = H$ olsun. $\forall b \in H$ için, $b \in H = \text{Im } \psi$ olur.

$\Rightarrow b = \psi(a)$ olacak şekilde $a \in N$ vardır. $\Rightarrow \psi$ örtendir.

iii) $0_N \in N$ ve $\psi(0_N) = 0_H$ olduğundan, $0_N \in \text{Ker } \psi$ 'dir. Buradan, $\emptyset \neq \text{Ker } \psi \subseteq N$ elde edilir.

$\forall a, a' \in \text{Ker } \psi$ için, $a - a' \in N$ ve

$$\psi(a - a') = \psi(a) - \psi(a') = 0_H - 0_H = 0_H$$

olduğundan, $a - a' \in \text{Ker } \psi$ olur. Buradan, $\text{Ker } \psi$, N 'nin bir alt grubudur.

$\forall a \in N, \forall b \in \text{Ker } \psi$ için, $a + b - a \in N$ ve

$$\begin{aligned} \psi(a + b - a) &= \psi(a) + \psi(b) - \psi(a) \\ &= \psi(a) + 0_H - \psi(a) \\ &= \psi(a) - \psi(a) = 0_H \end{aligned}$$

Olduğundan, $a + b - a \in \text{Ker } \psi$ 'dir. Bu durumda $\text{Ker } \psi$, N 'nin bir normal alt grubudur.

$\forall a \in N, \forall b \in \text{Ker } \psi$ için, $ba \in N$ ve

$$\psi(ba) = \psi(b)\psi(a) = 0_H \psi(a) = 0_H$$

olduğundan, $ba \in \text{Ker } \psi$ 'dir. Yani $\text{Ker } \psi$, N 'nin bir sağ idealidir.

$\forall a, a' \in N, \forall b \in \text{Ker } \psi$ için, $a(a' + b) - aa' \in N$ ve

$$\begin{aligned} \psi(a(a' + b) - aa') &= \psi(a(a' + b)) - \psi(aa') \\ &= \psi(a)\psi(a' + b) - \psi(aa') \\ &= \psi(a)(\psi(a') + \psi(b)) - \psi(aa') \\ &= \psi(a)(\psi(a') + 0_H) - \psi(aa') \\ &= \psi(a)\psi(a') - \psi(aa') \\ &= \psi(aa') - \psi(aa') = 0_H \end{aligned}$$

olduğundan, $a(a' + b) - aa' \in \text{Ker } \psi$ 'dir. Böylece $\text{Ker } \psi$, N 'nin bir sol idealidir.

O halde $\text{Ker } \psi$, N yakın-halkasının idealidir.

iv) $0_N \in N$ ve $\psi(0_N) = 0_H \in \text{Im } \psi$ olduğundan, $\phi \neq \text{Im } \psi \subseteq H$ 'dir.

$\forall b, b' \in \text{Im } \psi$ için, $\begin{cases} b = \psi(a) \\ b' = \psi(a') \end{cases}$ olacak şekilde $a, a' \in N$ vardır,

ve

$$b - b' = \psi(a) - \psi(a') = \psi(a - a') \in \text{Im } \psi \text{ 'dir.}$$

Buradan, $\text{Im } \psi$, H 'nin bir alt grubudur.

Aynı zamanda,

$$bb' = \psi(a)\psi(a') = \psi(aa') \in \text{Im } \psi \text{ 'dir.}$$

O halde $\text{Im } \psi$, H 'nin alt yakın-halkasıdır.

v) $\psi^{-1}(S) = \{a \in N \mid \psi(a) \in S\}$ olsun.

$\psi(0_N) = 0_H \in S$ olduğundan, $0_N \in \psi^{-1}(S)$ olur. Bu durumda, $\emptyset \neq \psi^{-1}(S) \subseteq N$ 'dir.

$\forall a, a' \in \psi^{-1}(S)$ için, $a, a' \in N$, $\psi(a), \psi(a') \in S$ ve S alt grup olduğundan,

$$\psi(a - a') = \psi(a) - \psi(a') \in S \text{ 'dir.}$$

Buradan, $a - a' \in \psi^{-1}(S)$ sağlanır. Böylece $\psi^{-1}(S)$, N 'nin bir alt grubudur.

$\forall a \in N$, $\forall b \in \psi^{-1}(S)$ için, $a + b - a \in N$, $\psi(b) \in S$ ve S normal alt grup olduğundan,

$$\psi(a + b - a) = \psi(a) + \psi(b) - \psi(a) \in S \text{ 'dir.}$$

Buradan, $a + b - a \in \psi^{-1}(S)$ olur. Bu durumda, $\psi^{-1}(S)$, N 'nin normal alt grubudur.

$\forall a \in N$, $\forall b \in \psi^{-1}(S)$ için, $ba \in N$, $\psi(b) \in S$ ve S sağ ideal olduğundan,

$$\psi(ba) = \psi(b)\psi(a) \in S \text{ 'dir.}$$

Bu durumda, $ba \in \psi^{-1}(S)$ elde edilir. Böylece $\psi^{-1}(S)$, N 'nin bir sağ idealidir.

$\forall a, a' \in N$, $\forall b \in \psi^{-1}(S)$ için,

$$a(a' + b) - aa' \in N, \psi(b) \in S \text{ ve } S \text{ sol ideal}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} \psi(a(a' + b) - aa') &= \psi(a(a' + b)) - \psi(aa') \\ &= \psi(a)\psi(a' + b) - \psi(aa') \\ &= \psi(a)(\psi(a') + \psi(b)) - \psi(aa') \\ &= \psi(a)(\psi(a') + \psi(b)) - \psi(a)\psi(a') \in S' \text{ dir.} \end{aligned}$$

Buradan, $a(a' + b) - aa' \in \psi^{-1}(S)$ 'dir. O halde $\psi^{-1}(S)$, N 'nin bir sol idealidir.

Sonuç olarak, $\psi^{-1}(S)$, N yakın-halkasının bir idealidir.

vi) $\psi(R) = \{\psi(a) \mid a \in R\}$ alalım.

$0_N \in R$ ve $\psi(0_N) = 0_H$ olduğundan, $0_H \in \psi(R)$ olur. O halde $\phi \neq \psi(R) \subseteq H$ 'dir.

$\forall b, b' \in \psi(R)$ için, $\begin{cases} b = \psi(a) \\ b' = \psi(a') \end{cases}$ olacak şekilde $a, a' \in R$ vardır.

R alt grup olduğundan,

$$b - b' = \psi(a) - \psi(a') = \psi(a - a') \in \psi(R) \text{ dir.}$$

Bu durumda, $\psi(R)$, H 'nin bir alt grubudur.

$\forall b, b' \in \psi(R)$ için, $\begin{cases} b = \psi(a) \\ b' = \psi(a') \end{cases}$ olacak şekilde $a, a' \in R$ vardır.

R alt yakın-halka olduğundan,

$$bb' = \psi(a)\psi(a') = \psi(aa') \in \psi(R) \text{ dir.}$$

O halde, $\psi(R)$, H 'nin alt yakın-halkasıdır.

Not 2.4.10 $\psi : N \rightarrow H$ yakın-halka homomorfizması olmak üzere,

R, N yakın-halkasının bir ideali ve ψ örten ise, $\psi(R)$ kümesi de H yakın-halkasının bir idealidir.

Tanım 2.4.11 [1] N yakın-halka ve $R \triangleleft N$ olmak üzere,

o halde N/R bölüm yakın-halkası, bölüm halkası olduğu gibi,

$$N/R = \{ a + R \mid a \in N \}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Teorem 2.4.12 [1] a) N yakın-halka ve $R \triangleleft N$ olmak üzere,

$$\varphi : N \rightarrow N/R$$

kanonik dönüşümü yakın-halka epimorfizmidir. Buradan, N/R , N 'nin bir homomorfik görüntüsüdür.

b) N, H iki yakın-halka ve $\psi \in \text{Hom}(N, H)$ ise,

bu durumda,

$$N/\text{Ker } \psi \cong \text{Im } \psi$$

'dir.

Eğer ψ yakın-halka epimorfizması ise, o halde

$$N/\text{Ker } \psi \cong H$$

olur.

Teorem 2.4.13 [1] a) N, H iki yakın-halka ve $\psi : N \rightarrow H$ bir epimorfizm olsun. O halde N deki ψ nin çekirdeğini içeren alt yakın-halkalarla (ideallerle), H nin alt yakın-halkaları (idealleri) arasındaki 1 – 1 bir eşleme ψ dönüşümüdür. Ayrıca N yakın-halkasının $\text{Ker } \psi$ içeren her R idealleri için,

$$N/R \cong \psi(N)/\psi(R)$$

'dir.

b) $\varphi : N \rightarrow N/R$ kanonik epimorfizm ise, N 'nin R idealini içeren tüm S idealleri için,

$$\frac{N/R}{S/R} \cong N/S$$

'dir.

Önerme 2.4.14 N, H iki yakın-halka ve $\psi : N \rightarrow H$ yakın-halka homomorfizması olmak üzere, bu durumda,

i) $\psi (N_0) \subseteq H_0$ 'dır.

ii) $\psi (N_C) \subseteq H_C$ 'dir.

İspat : i) $\forall b \in \psi (N_0)$ için, $b = \psi (a)$ olacak şekilde $a \in N_0$ vardır,

ve

$$b \cdot 0_H = \psi (a) \cdot 0_H = \psi (a) \psi (0_N) = \psi (a \cdot 0_N) = \psi (0_N) = 0_H$$

'dir. Böylece $\psi (N_0) \subseteq H_0$ sağlanır.

ii) $\forall b \in \psi (N_C)$ için, $b = \psi (a)$ olacak şekilde $a \in N_C$ vardır. Bu durumda,

$$b \cdot 0_H = \psi (a) \cdot 0_H = \psi (a) \psi (0_N) = \psi (a \cdot 0_N) = \psi (a) = b$$

elde edilir. Buradan $\psi (N_C) \subseteq H_C$ sağlanır.

Tanım 2.4.15 T, N yakın-halkasının alt yakın-halkası olmak üzere,

eğer

$$TN \subseteq T \quad \text{ve} \quad NT \subseteq T$$

koşulları sağlanıyorsa, T' ye, N yakın-halkasının invaryant alt yakın-halkası denir. Buradan, N 'nin olduğu yöne göre T' ye sırasıyla sağ ya da sol invaryant alt yakın-halka denir.

Örnek 2.4.16 N yakın-halka olmak üzere, bu durumda,

i) $N_0 \triangleleft_l N$ 'dir. Fakat genelde $N_0 \triangleleft N$ olmak zorunda değildir.

ii) N_C , N nin invaryant alt yakın-halkasıdır. Ancak genel olarak ne sağ ne de sol ideali değildir.

Çözüm: i) $\forall a, a' \in N_0$ için,

$$(a - a') 0 = a 0 - a' 0 = 0 - 0 = 0$$

olduğundan, $(N_0, +), (N, +)$ 'nın bir alt grubudur.

$\forall a \in N, \forall b \in N_0$ için,

$$(a + b - a) 0 = a 0 + b 0 + (-a 0) = a 0 + [-(a 0)] = 0$$

olduğundan, $a + b - a \in N_0$ 'dır. Böylece $(N_0, +), (N, +)$ 'nın normal alt grubudur.

$\forall a, a' \in N, \forall b \in N_0$ için,

$$\begin{aligned} (a(a' + b) - a a') 0 &= (a(a' + b)) 0 - (a a') 0 \\ &= a((a' + b) 0) - a a' 0 \\ &= a(a' 0 + b 0) - a a' 0 \\ &= a(a' 0 + 0) - a a' 0 \\ &= a a' 0 - a a' 0 = 0 \end{aligned}$$

olduğundan, $a(a' + b) - a a' \in N_0$ 'dır. Buradan, $N_0 \triangleleft_l N$ 'dir.

Şimdi N_0, N 'nin ideali olmadığını göstermek için, aşağıdaki örneği verebiliriz.

$\mathbb{R}$ gerçekte sayılar kümesi olmak üzere, $N = M(\mathbb{R}) = \{ \sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \sigma \text{ bir fonksiyon} \}$ yakın-halkasında,

$$\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\forall k \in \mathbb{R} \text{ için, } \theta(k) = k$$

birim fonksiyonu ise, o halde $\theta \in N_0 = M_0(\mathbb{R})$ 'dir. $\sigma \in M(\mathbb{R})$ fonksiyonu,

$$\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\forall k \in \mathbb{R} \text{ için, } \sigma(k) = 1_R$$

ile tanımlanırsa, bu durumda,

$$\forall k \in \mathbb{R} \text{ için,}$$

$$\begin{aligned} ((\theta \circ \sigma) \circ 0)(k) &= (\theta \circ \sigma)(0(k)) = (\theta \circ \sigma)(0_R) = (\theta \circ \sigma)(0_R) \\ &= \theta(\sigma(0_R)) = \theta(1_R) = 1_R = \sigma(k) \end{aligned}$$

olduğundan, $(\theta \circ \sigma) \circ 0 = \sigma \neq 0$ 'dır. Buradan, $\theta \circ \sigma \notin N_0$ olur.

Bu ise, N_0 'ın, N 'nin sağ ideali olmadığını göstermektedir.

ii) örnek 2.3.2'de N_C , N 'nin alt yakın-halkası olduğu gösterilmiştir.

Şimdi $\forall a \in N$, $\forall b \in N_C$ için,

$$(ba)0 = b0 = b = ba$$

ve

$$(ab)0 = a(b0) = ab$$

olduğundan,

$$N_C N \subseteq N_C \quad \text{ve} \quad N N_C \subseteq N_C$$

koşulları sağlanır. Böylece N_C , N 'nin bir invaryant alt yakın-halkasıdır.

Genelde N_C , N 'nin ne sağ ne de sol ideali olmak zorunda değildir. Çünkü genel olarak N_C , N 'nin normal alt grubu değildir.

Örneğin, $(G, +)$ abelyen olmayan bir grup olmak üzere, $\beta, \gamma \in G$ elemanları $\beta + \gamma \neq \gamma + \beta$ olacak şekilde seçilirse ve $N = M(G) = \{ \sigma : G \rightarrow G \mid \sigma \text{ bir fonksiyon} \}$ yakın-halkasında,

$$\sigma_\gamma : G \rightarrow G$$

$$\forall k \in G \text{ için, } \sigma_\gamma(k) = \gamma$$

ile tanımlanırsa, $\sigma_\gamma \in N_C = M_C(G)$ 'dir. $\theta \in M(G)$ birim fonksiyonu ise,

$$\theta : G \rightarrow G$$

$$\forall k \in G \text{ için, } \theta(k) = k$$

bu durumda,

$$(\theta + \sigma_\gamma - \theta)(0_G) = 0_G + \gamma - 0_G = \gamma = \sigma_\gamma(0_G)$$

olur, fakat

$$(\theta + \sigma_\gamma - \theta)(\beta) = \beta + \gamma - \beta \neq \gamma \text{ dir.}$$

Buradan, $\theta + \sigma_\gamma - \theta \notin N_C$ olur.

Böylece N_C, N 'nin normal alt grubu değildir.

Önerme 2.4.17 $\psi : N \rightarrow H$ yakın-halka homomorfizması ve

$$N_d = \{ t \in N \mid t \text{ dağılmalıdır} \}$$

$$E_N = \{ r \in N \mid r \text{ idempotent} \}$$

$$C(N) = \{ c \in N \mid ca = ac \ \forall a \in N \}$$

$$\forall s \in N \text{ için, } N_s = \{ a \in N \mid as = 0_N \} = (0_N : s)$$

olmak üzere, bu durumda,

a) $t \in N_d$ ve ψ epimorfizma ise, $\psi(t) \in H_d$ 'dir.

b) $r \in E_N \cap C(N)$ ve ψ epimorfizma ise, $\psi(r) \in E_H \cap C(H)$ 'dir.

c) $\forall s \in N$ için, $(0_N : s) \triangleleft_l N$ 'dir.

d) $s \in C(N)$ ise, $(0_N : s) \triangleleft N$ 'dir.

e) $s \in C(N)$ ve ψ epimorfizma ise, $\psi((0_N : s)) \triangleleft (0_H : \psi(s)) \triangleleft H$ 'dir.

f) $s \in C(N)$ ve ψ izomorfizma ise, $\psi((0_N : s)) = (0_H : \psi(s)) \triangleleft H$ 'dir.

İspat: a) $t \in N_d$ olsun. $\forall b, b' \in H$ ve ψ epimorfizma olduğu için, $\begin{cases} b = \psi(a) \\ b' = \psi(a') \end{cases}$ olacak şekilde $a, a' \in N$ vardır. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \psi(t)(b + b') &= \psi(t)[\psi(a) + \psi(a')] = \psi(t)\psi(a + a') \\ &= \psi(t(a + a')) = \psi(ta + ta') \\ &= \psi(ta) + \psi(ta') = \psi(t)\psi(a) + \psi(t)\psi(a') \\ &= \psi(t)b + \psi(t)b' \end{aligned}$$

olduğundan, $\psi(t) \in H_d$ 'dir.

b) $r \in E_N \cap C(N)$ alalım. O halde $r^2 = r$ ve $\forall a \in N$ için, $ra = ar$ 'dir.

Bu durumda,

$$(\psi(r))^2 = \psi(r)\psi(r) = \psi(rr) = \psi(r)'dir.$$

Diğer taraftan, $\forall b \in H$ ve ψ epimorfizma olduğundan dolayı $b = \psi(a)$ olacak şekilde $a \in N$ vardır. Buradan,

$$\psi(r)b = \psi(r)\psi(a) = \psi(ra) = \psi(ar) = \psi(a)\psi(r) = b\psi(r)'dir.$$

Böylece $\psi(r) \in E_H \cap C(H)$ olur.

c) $0_N \in N$ ve $0_N s = 0_N$ olduğundan, $0_N \in (0_N : s)$ 'dir. Buradan, $\phi \neq (0_N : s) \subseteq N$

$\forall a, a' \in (0_N : s)$ için,

$$(a - a')s = as - a's = 0_N - 0_N = 0_N$$

olduğundan, $((0_N : s), +), (N, +)$ 'nin alt grubudur.

$\forall a \in N, \forall b \in (0_N : s)$ için,

$$(a + b - a)s = as + bs - as = as + 0_N - as = as - as = 0_N' dir.$$

Buradan, $((0_N : s), +), (N, +)$ 'nin bir normal alt grubu olduğu görülür.

$\forall a, a' \in N, \forall b \in (0_N : s)$ için,

$$\begin{aligned}
(a(a' + b) - a a') s &= (a(a' + b)) s - (a a') s \\
&= a((a' + b) s) - a a' s \\
&= a(a' s + b s) - a a' s \\
&= a(a' s + 0_N) - a a' s \\
&= a a' s - a a' s = 0_N \text{ 'dir.}
\end{aligned}$$

O halde $(0_N : s) \triangleleft_l N$ 'dir.

d) $\forall a \in N, \forall b \in (0_N : s)$ ve $s \in C(N)$ olduğundan,

$$(b a) s = b(a s) = b(s a) = (b s) a = 0_N a = 0_N \text{ 'dir.}$$

Buradan, $b a \in (0_N : s)$ elde edilir.

Yani $(0_N : s) N \subseteq (0_N : s)$ sağlanır.

Böylece $(0_N : s) \triangleleft N$ olur.

e) öncelikle $s \in C(N)$ olduğundan, $(0_N : s) \triangleleft N$ 'dir.

ψ epimorfizma olduğuna göre ve not 2.4.10'na dayanarak, $\psi((0_N : s)) \triangleleft H$ olur.

Diğer taraftan, $\forall b \in H, s \in C(N)$ ve ψ epimorfizma olduğundan, $b = \psi(a)$ olacak şekilde $a \in N$ vardır.

Bu durumda,

$$b \psi(s) = \psi(a) \psi(s) = \psi(a s) = \psi(s a) = \psi(s) \psi(a) = \psi(s) b \text{ 'dir.}$$

Buradan, $\psi(s) \in C(H)$ 'dir. O halde $(0_H : \psi(s)) \triangleleft H$ sağlanır.

Şimdi $\forall b \in \psi((0_N : s))$ için, $b = \psi(a)$ olacak şekilde $a \in (0_N : s)$ vardır.

Bu durumda,

$$b \psi(s) = \psi(a) \psi(s) = \psi(a s) = \psi(0_N) = 0_H \text{ 'dir.}$$

Bu ise, $b \in (0_H : \psi(s))$ olduğunu gösterir.

Yani $\psi((0_N : s)) \subseteq (0_H : \psi(s))$ 'dir.

Böylece $\psi((0_N : s)) \triangleleft (0_H : \psi(s)) \triangleleft H$ olur.

f) $\forall b \in (0_H : \psi(s))$ için, ve ψ izomorfizma olduğuna göre, $\begin{cases} b = \psi(a) ; a \in N \\ b \psi(s) = 0_H \end{cases}$

'dir.

$$b \psi(s) = 0_H \Rightarrow \psi(a) \psi(s) = 0_H \Rightarrow \psi(as) = 0_H$$

$$\Rightarrow as \in \text{Ker } \psi = \{0_N\} \Rightarrow as = 0_N$$

$$\Rightarrow a \in (0_N : s) \Rightarrow b = \psi(a) \in \psi((0_N : s)) \text{'dir.}$$

Buradan, $(0_H : \psi(s)) \subseteq \psi((0_N : s))$ sağlanır.

Sonuç olarak $\psi((0_N : s)) = (0_H : \psi(s)) \triangleleft H$ elde edilir.

BÖLÜM 3

SMARANDACHE YAKIN-HALKALAR

Bu bölümde grup yakın-halkasının tanımı ile bazı örnekler verilmiştir. Ayrıca yine bu bölümde Smarandache yakın-halka (S-yakın-halka) kavramının tanımı verilerek, örnekler ve teoremler ile S-yakın-halkalarla ilgili birçok özellikler incelenmiştir. Daha sonra Smarandache alt yakın-halka (S-alt yakın-halka), Smarandache yakın-halka homomorfizm (S-yakın-halka homomorfizm), Smarandache ideal (S-ideal) gibi kavramlar tanımlanmış ve bunlarla ilgili bazı örnekler verilmiştir. Smarandache yakın-halkaları üzerinde ilk detaylı çalışmalar Vasantha Kandasamy (2002 b) tarafından gerçekleştirilmiştir.

3.1 Grup Yakın-halkaları

Tanım 3.1.1 [6] G çarpımsal grup ve N birimli komutatif yakın-halka olmak üzere, Bu durumda, NG grup yakın-halkası, $\alpha_i \in N$ ve $g_i \in G$ olmak üzere, aşağıdaki koşulları sağlayan bütün sonlu $\sum_i \alpha_i g_i$ toplamalarını içeren bir yakın-halkadır.

i) $\forall i = 1, 2, \dots, n, \alpha_i, \beta_i \in N, g_i \in G$ için,

$$\sum_i \alpha_i g_i = \sum_i \beta_i g_i \Leftrightarrow \alpha_i = \beta_i$$

ii) $\forall i = 1, 2, \dots, n, \alpha_i, \beta_i \in N, g_i \in G$ için,

$$\sum_i \alpha_i g_i + \sum_i \beta_i g_i = \sum_i (\alpha_i + \beta_i) g_i$$

iii) $\forall i = 1, 2, \dots, n, \alpha_i \in N, g_i \in G$ için, $\alpha_i g_i = g_i \alpha_i$

iv) $\forall i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m, \alpha_i, \beta_j \in N, g_i, h_j \in G$ için,

$$(\sum_i \alpha_i g_i) (\sum_j \beta_j h_j) = \sum_k \lambda_k k \quad ; \quad g_i h_j = k, \lambda_k = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j$$

Bu yakın-halkanın sıfırı $0 \in N$ 'dir. $1 \in N$ olduğundan, $G = 1G \subset NG$ ve e, G 'nin birim elemanı ise, $N = Ne \subseteq NG$ 'dir.

Örnek 3.1.2 $Z_3 = \{ 0, 1, 2 \}$ kümesi üzerinde aşağıdaki verilen işlemlere göre, $(Z_3, +, \cdot)$ bir yakın-halkadır.

"+" işlemi Z_3 üzerinde modülo 3 ile bilenen toplama işlemi ve " $\cdot$ " işlemi

$\forall r, s \in Z_3$ için,

$$r \cdot s = r$$

ile tanımlanır.

$G = \langle g \mid g^2 = 1 \rangle$ grubu olmak üzere, o halde grup yakın-halkası

$$Z_3 G = \{ 0, 1, 2, g, 2g, 1+g, 1+2g, 2+g \}$$

'dir.

3.2 Smarandache Yakın-halkaları

Tanım 3.2.1 [6] $(N, +, \cdot)$ yakın-halka olmak üzere, eğer N 'nin N deki işlemlere göre yakın-cisim olan bir $(A, +, \cdot)$ öz alt kümesi varsa, o halde N ye bir Smarandache yakın-halka (S-yakın-halka) denir.

Örnek 3.2.2 $Z_2 = \{ 0, 1 \}$ bilenen Z_2 deki toplama işlemi ve

$\forall r, s \in Z_2$ için,

$$r \cdot s = r$$

belirlenen çarpma işlemi altında bir yakın-cisimdir. G herhangi bir grup olmak üzere, bu durumda $Z_2 \subset Z_2 G$ olup, grup yakın-halkası $Z_2 G$ bir S-yakın-halkadır.

Örnek 3.2.3 $\Omega \neq \phi$ ve $Card(\Omega) > 1$ bir küme olsun. $P(\Omega)$ kuvvet kümesi olmak üzere, ve $\forall X, Y \in P(\Omega)$ için,

$$X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$$

alalım. Bu durumda, $(P(\mathcal{Q}), \Delta, \cap)$ yakın-halkadır. Şimdi $\{\phi, \mathcal{Q}\} \subset P(\mathcal{Q})$ yakın-cisim olduğundan, $(P(\mathcal{Q}), \Delta, \cap)$ S-yakın-halkadır.

Örnek 3.2.4 F bir yakın-cisim olsun.

$\forall u(x), v(x) \in F[x]$ için,

$$u(x) \cdot v(x) = u(x)$$

alınırsa, bu durumda, $(F[x], +, \cdot)$ bir yakın-halkadır. Ayrıca $F \subset F[x]$ olduğundan, $(F[x], +, \cdot)$ 'nin bir S-yakın-halka olduğu görülür.

3.3 Smarandache Alt Yakın-halkaları

Tanım 3.3.1 [7] $(N, +, \cdot)$ S-yakın-halka ve H, N 'nin alt yakın-halkası olmak üzere, eğer H S-yakın-halka ise, o halde H 'ye S-alt yakın-halka denir.

Örnek 3.3.2 $Z_2 = \{0, 1\}$ yakın-cisim ve S_n n . Dereceden bir simetrik grup olsun. Bu durumda, $Z_2 S_n$ grup yakın-halkasıdır.

Diğer taraftan,

$$H = \left\{ 1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

S_n 'nin bir alt grubu ve $Z_2 \subset Z_2 H$ olduğundan, $Z_2 H$ bir S-alt yakın-halkadır.

Sonuç 3.3.3 $M_{3 \times 3} = \{(a_{ij}), i, j = 1, 2, 3, a_{ij} \in Z_2 = \{0, 1\}, Z_2 \text{ yakın - cisim}\}$ olsun. Bilenen matrislerdeki toplama ve Z_2 de tanımlanan çarpma işlemi altında $(M_{3 \times 3}, +, \cdot)$ bir yakın-halka olur. Bu yakın-halka en az bir S-alt yakın-halka içerir.

İspat: $\forall A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{3 \times 3}$ için,

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

$$A \cdot B = (a_{ij}) \cdot (b_{ij}) = (c_{ik}) ; c_{ik} = \sum_{j=1}^3 a_{ij} \cdot b_{jk}, k = 1, 2, 3$$

'dir.

Şimdi

$$K = \left\{ (k_{ij}), i, j = 1, 2, 3, k_{ij} \in Z_2 \text{ ve } \sum_{j=1}^3 k_{1j} = \sum_{j=1}^3 k_{2j} = \sum_{j=1}^3 k_{3j} \right\} \subseteq M_{3 \times 3}$$

alalım.

Sıfır matrisi $0 \in K$ olduğundan, $K \neq \emptyset$ 'dir.

$\forall P = (p_{ij}), Q = (q_{ij}) \in K$ için,

$$P - Q = (p_{ij}) - (q_{ij}) = (p_{ij} - q_{ij})$$

ve

$$\sum_{j=1}^3 (p_{1j} - q_{1j}) = \sum_{j=1}^3 p_{1j} - \sum_{j=1}^3 q_{1j} = \sum_{j=1}^3 p_{2j} - \sum_{j=1}^3 q_{2j} = \sum_{j=1}^3 (p_{2j} - q_{2j}) = \sum_{j=1}^3 (p_{3j} - q_{3j})$$

olduğuna göre, $P - Q \in K$ 'dir. Buradan, $K, M_{3 \times 3}$ yakın-halkasının bir alt grubudur.

$\forall P = (p_{ij}), Q = (q_{ij}) \in K$ için,

$$P \cdot Q = (p_{ij}) \cdot (q_{ij}) = (r_{ik}); r_{ik} = \sum_{j=1}^3 p_{ij} \cdot q_{kj}, k = 1, 2, 3$$

ve

$$\sum_{k=1}^3 r_{1k} = \sum_{k=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 p_{1j} \cdot q_{kj} \right) = 3 \sum_{j=1}^3 p_{1j} = 3 \sum_{j=1}^3 p_{2j} = \sum_{k=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 p_{2j} \cdot q_{kj} \right) = \sum_{k=1}^3 r_{2k} = \sum_{k=1}^3 r_{3k}$$

sağlandığına göre, $P \cdot Q \in K$ 'dir. O halde $K, M_{3 \times 3}$ yakın-halkasının alt yakın-halkasıdır. Diğer taraftan,

$$\left\{ 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, 1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right\} \subset K$$

bir yakın-cisim olduğu kolayca görülür. Böylece K alt yakın-halkası bir S-alt yakın-halkasıdır.

Sonuç 3.3.4 $M_{n \times n} = \{(a_{ij}), i, j = 1, 2, 3, \dots, n, a_{ij} \in Z_2 = \{0, 1\}, Z_2 \text{ yakın - cisim}\}$

olsun. Bilenen matrislerdeki toplama ve Z_2 de tanımlanan çarpma işlemi altında $(M_{n \times n}, +, \cdot)$ bir yakın-halka olur. Bu yakın-halka en az bir S-alt yakın-halka içerir.

İspat: Benzer şekilde, aşağıdaki kapsamalar gözlenmektedir.

$$K = \left\{ (k_{ij}), i, j = 1, 2, 3, \dots, n, k_{ij} \in Z_2 \text{ and } \sum_{j=1}^n k_{1j} = \sum_{j=1}^n k_{2j} = \sum_{j=1}^n k_{3j} = \dots = \sum_{j=1}^n k_{nj} \right\} \subseteq M_{n \times n}$$

ve

$$F = \left\{ 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, 1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \right\} \subset K$$

Burada, K, F yakın-cismini içeren bir S-alt yakın-halkasıdır.

3.4 Smarandache Yakın-halka Homomorfizması ve Smarandache İdealler

Tanım 3.4.1 [7] N, N' iki S-yakın-halka ve F, N 'nin bir yakın-cismi olsun.

$$\varphi : N \rightarrow N'$$

bir dönüşüm olmak üzere,

eğer $\forall k, l \in F$ için,

$$\textbf{i) } \varphi(k + l) = \varphi(k) + \varphi(l)$$

$$\textbf{ii) } \varphi(kl) = \varphi(k) \varphi(l)$$

olacak şekilde $\varphi(k), \varphi(l) \in F'$ ve F', N' nün bir yakın-cismi olarak

yukarıdaki koşullar sağlanıyorsa, φ' ye bir Smarandache yakın-halka homomorfizması

(S-yakın-halka homomorfizması) denir.

Tanım 3.4.2 [7] N S-yakın-halka, F , N 'nin yakın-cismi ve I , N 'nin normal alt grubu olmak üzere,

eğer

$$\text{i) } IF \subseteq I$$

$$\text{ii) } \forall k, l \in F, \forall a \in I \text{ için,}$$

$$k(l + a) - kl \in I$$

koşulları sağlanıyorsa, I ya N 'nin F yakın-cismi ile bağlı Smarandache ideali (S-ideali) denir.

Sadece **i)** koşulu sağlanıyorsa, I ya N 'nin F yakın-cismi ile bağlı Smarandache sağ ideali (S-sağ ideali),

sadece **ii)** koşulu sağlanıyorsa, I ya N 'nin F yakın-cismi ile bağlı Smarandache sol ideali (S-sol ideali) denir.

Tanım 3.4.3 T , N yakın-halkasının bir S-alt yakın-halkası ve F , N 'nin yakın-cismi olmak üzere,

eğer

$$TF \subseteq T \quad \text{ve} \quad FT \subseteq T$$

koşulları sağlanıyorsa, T 'ye, N 'nin F yakın-cismi ile bağlı bir Smarandache invaryant alt yakın-halkası (S-invaryant alt yakın-halkası) denir. Buradan, F 'nin yönüne göre T 'ye sırasıyla F yakın-cismi ile bağlı sağ ya da sol S-invaryant alt yakın-halka denir.

Önerme 3.4.4 $\varphi : N \rightarrow N'$ yakın-halka monomorfizması olsun.

Eğer

N S-yakın- halkası ise, o zaman N' 'de S-yakın-halkasıdır.

İspat: N bir S-yakın-halkası olduğundan, N deki işlemlere göre yakın-cisim olan bir A öz alt kümesine sahiptir.

Yani,

$$A \subsetneq N \text{ ve } A \text{ bir yakın-cisimdir.}$$

Şimdi,

$$\varphi(A) = \{ \varphi(a) \mid a \in A \}$$

alalım.

$$0_N \in A \text{ ve } \varphi(0_N) = 0_{N'} \in \varphi(A) \text{ olduğundan, } \phi \neq \varphi(A) \subseteq N'$$

olur.

$$\forall b, b' \in \varphi(A) \text{ için, } \begin{cases} \varphi(a) = b \\ \varphi(a') = b' \end{cases} \text{ olacak şekilde } a, a' \in A \text{ vardır,}$$

ve

$$\varphi(a - a') = \varphi(a) - \varphi(a') = b - b' \in \varphi(A) \text{ 'dır.}$$

Buradan, $(\varphi(A), +), N'$ 'nün bir alt grubudur.

$$\forall b, b' \in \varphi(A) \text{ için, } \begin{cases} \varphi(a) = b \\ \varphi(a') = b' \end{cases} \text{ olacak şekilde } a, a' \in A \text{ vardır,}$$

ve

$$\varphi(aa') = \varphi(a)\varphi(a') = bb' \in \varphi(A) \text{ 'dır.}$$

$\forall a \in A$ için,

$$\varphi(a) = \varphi(a1_A) = \varphi(a)\varphi(1_A)$$

olduğundan, $\varphi(1_A) = 1_{\varphi(A)}$ 'dır.

$\forall b \in \varphi(A)$ için, $\varphi(a) = b$ olacak şekilde $a \in A$ vardır. Ayrıca $a \in A$ ve A yakın-cisim olduğuna göre, $a^{-1} \in A$ sağlanır.

Buradan,

$$\varphi(aa^{-1}) = \varphi(1_A) = 1_{\varphi(A)}$$

olup, diğer taraftan,

$$\varphi(a a^{-1}) = \varphi(a) \varphi(a^{-1})$$

olduğundan, $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1} = b^{-1} \in \varphi(A)$ 'dır.

Böylece $(\varphi(A) \setminus \{0_{N'}\}, \cdot, \cdot^{-1})$, N' 'nin bir alt grubudur.

Bu ise, $\varphi(A)$, N' 'nin bir yakın-cismi olduğunu gösterir.

Şimdi N' yakın-halkasının bir S-yakın-halkası olduğunu göstermek için, $\varphi(A) \neq N'$ 'ye ispatlanması yeterlidir.

Eğer $\varphi(A) = N'$ ise, bu durumda, $x \in N \setminus A$ vardır ve $\varphi(x) \in N' = \varphi(A)$ olur.

Buradan, $\varphi(x) \in \varphi(A)$ olduğundan, $\varphi(x) = \varphi(a)$ olacak şekilde $a \in A$ vardır.

$$\varphi(x) = \varphi(a) \Rightarrow \varphi(x) - \varphi(a) = 0_{N'} \Rightarrow \varphi(x - a) = 0_{N'}$$

$$\Rightarrow x - a \in \ker \varphi = \{0_N\} \Rightarrow x - a = 0_N$$

$$\Rightarrow x = a \in A \text{ (çelişkidir).}$$

Böylece $\varphi(A) \subsetneq N'$ sağlanır. O halde N' bir S-yakın-halkasıdır.

Sonuç 3.4.5 Bir N S-yakın-halkası için, her I S-ideali N' nin bir ideali olmak zorunda değildir.

Örnek 3.4.6 Z_{12} S-yakın-halkasında, $F = \{0, 4, 8\}$, Z_{12} 'nin bir yakın-cismidir.

$I = \{0, 3, 6, 9\}$, Z_{12} 'nin hem F ile bağlı bir S-ideali hem de bir idealidir. Fakat

$J = \{0, 3, 9\}$, Z_{12} 'nin F ile bağlı bir S-idealidir ama bir ideali değildir.

Çünkü, $3 \in J$ ve $2 \in Z_{12}$ için, $3 \cdot 2 = 6 \notin J$ olur.

Örnek 3.4.7 $N = Z_2 \times Z_7$, $N' = Z \times Z_2$ iki S-yakın-halkası olmak üzere, φ dönüşümü

$$\varphi : N \rightarrow N'$$

$$\forall (\bar{a}, \bar{b}) \in Z_2 \times Z_7 \text{ için, } \varphi[(\bar{a}, \bar{b})] = (b, \bar{a})$$

ile tanımlanırsa, o halde φ dönüşümü bir S-yakın-halka homomorfizmasıdır.

Gerçekten,

$$F = \{ (\bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{0}) \}, N \text{ nin bir yakın-cismi,}$$

$$F' = \{ (0, \bar{0}), (0, \bar{1}) \}, N' \text{ 'nün bir yakın-cismi olduğu kolayca görülür. Diğer taraftan,}$$

$$\varphi [(\bar{0}, \bar{0})] = (0, \bar{0})$$

$$\varphi [(\bar{1}, \bar{0})] = (0, \bar{1})$$

ve $\forall (\bar{a}, \bar{b}), (\bar{c}, \bar{d}) \in F$ için,

$$\begin{aligned} \text{i) } \varphi [(\bar{a}, \bar{b}) + (\bar{c}, \bar{d})] &= \varphi [(\bar{a} + \bar{c}, \bar{b} + \bar{d})] = \varphi [(\overline{a+c}, \overline{b+d})] \\ &= [(b+d, \overline{a+c})] = (b, \bar{a}) + (d, \bar{c}) \\ &= \varphi [(\bar{a}, \bar{b})] + \varphi [(\bar{c}, \bar{d})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } \varphi [(\bar{a}, \bar{b}).(\bar{c}, \bar{d})] &= \varphi [(\bar{a}.\bar{c}, \bar{b}.\bar{d})] = \varphi [(\bar{a}, \bar{b})] = (b, \bar{a}) \\ &= (b, \bar{a}).(d, \bar{c}) = \varphi [(\bar{a}, \bar{b})] . \varphi [(\bar{c}, \bar{d})] \end{aligned}$$

koşulları sağlanır. Bu ise, φ dönüşümünün bir S-yakın-halka homomorfizması olduğunu gösterir.

Önerme 3.4.8 N, N' iki S-yakın-halkası, $\varphi (F) = F'$ olacak şekilde F, F' sırasıyla N, N'' nün yakın-cismi olmak üzere, ve

$$\varphi : N \rightarrow N'$$

bir yakın-halka homomorfizması olsun.

i) Eğer I, N nin F yakın-cismi ile bağlı bir S-ideali ve φ örten ise, bu durumda,

$\varphi (I), N''$ nün F' yakın-cismi ile bağlı bir S-idealidir.

ii) Eğer J, N' 'nün F' yakın-cismi ile bağlı bir S-ideali ise, o halde $\varphi^{-1}(J),$

N 'nin F yakın-cismi ile bağlı bir S-idealidir.

İspat: i) I, N 'nin F yakın-cismi ile bağı bir S-ideali olsun.

Bu durumda, $\varphi(I), N'$ 'nün $F' = \varphi(F)$ yakın-cismi ile bağı bir S-ideali olduğunu gösterelim.

$0_N \in I$ ve $\varphi(0_N) = 0_{N'} \in \varphi(I)$ olduğundan, $\phi \neq \varphi(I) \subseteq N'$ olur.

$\forall b, b' \in \varphi(I)$ için, $\begin{cases} \varphi(a) = b \\ \varphi(a') = b' \end{cases}$ olacak şekilde $a, a' \in I$ vardır,

ve

$$\varphi(a - a') = \varphi(a) - \varphi(a') = b - b' \in \varphi(I)' \text{dir.}$$

Buradan, $(\varphi(I), +), N'$ 'nün bir alt grubudur.

$\forall b \in \varphi(I), \forall y \in N'$ ve φ örten olduğundan, $\begin{cases} \varphi(a) = b \\ \varphi(x) = y \end{cases}$ olacak şekilde $a \in I, x \in N$ vardır, ve

$$\varphi(a + x - a) = \varphi(a) + \varphi(x) - \varphi(a) = b + y - b \in \varphi(I)' \text{dir.}$$

Bu durumda, $(\varphi(I), +), N'$ 'nün bir normal alt grubudur.

$\forall b \in \varphi(I), \forall l' \in F'$ için, $\begin{cases} \varphi(a) = b \\ \varphi(l) = l' \end{cases}$ olacak şekilde $a \in I, l \in F$ vardır,

ve

$$\varphi(al) = \varphi(a)\varphi(l) = bl' \in \varphi(I)' \text{dir.}$$

$\forall b \in \varphi(I), \forall l', k' \in F'$ için, $\begin{cases} \varphi(a) = b \\ \varphi(l) = l' \\ \varphi(k) = k' \end{cases}$ olacak şekilde $a \in I, l, k \in F$ vardır,

ve

$$\begin{aligned} \varphi(l(k+a) - lk) &= \varphi(l(k+a)) - \varphi(lk) \\ &= \varphi(l)\varphi(k+a) - \varphi(l)\varphi(k) \\ &= \varphi(l)[\varphi(k) + \varphi(a)] - \varphi(l)\varphi(k) \\ &= l'(k' + b) - l'k' \in \varphi(I)' \text{dir.} \end{aligned}$$

Böylece, $\varphi(I), N'$ 'nün $F' = \varphi(F)$ yakın-cismi ile bağlı bir S-ideali olduğu sağlanır.

ii) J, N' 'nün $F' = \varphi(F)$ yakın-cismi ile bağlı bir S-ideali olsun.

Bu durumda, $\varphi^{-1}(J), N$ 'nin F yakın-cismi ile bağlı bir S-ideali olduğunu gösterelim.

$0_N \in N$ ve $\varphi(0_N) = 0_{N'} \in J$ olduğundan, $0_N \in \varphi^{-1}(J)$ olur.

O halde, $\phi \neq \varphi^{-1}(J) \subseteq N'$ dir.

$\forall a, a' \in \varphi^{-1}(J)$ için, $\begin{cases} \varphi(a) = b \\ \varphi(a') = b' \end{cases}$ olacak şekilde $b, b' \in J$ vardır,

ve

$$\varphi(a - a') = \varphi(a) - \varphi(a') = b - b' \in J \Rightarrow a - a' \in \varphi^{-1}(J)$$

'dir.

Buradan, $(\varphi^{-1}(J), +), N$ 'nin bir alt grubudur.

$\forall a \in \varphi^{-1}(J), \forall x \in N$ için, $\begin{cases} \varphi(a) = b \\ \varphi(x) = y \end{cases}$ olacak şekilde $b \in J, y \in N'$ vardır,

ve

$$\varphi(x + a - x) = \varphi(x) + \varphi(a) - \varphi(x) = y + b - y \in J \Rightarrow x + a - x \in \varphi^{-1}(J)$$

'dir.

Bu durumda, $(\varphi^{-1}(J), +), N$ 'nin bir normal alt grubudur.

$\forall a \in \varphi^{-1}(J), \forall l \in F$ için, $\begin{cases} \varphi(a) = b \\ \varphi(l) = l' \end{cases}$ olacak şekilde $b \in J, l' \in F'$ vardır,

ve

$$\varphi(al) = \varphi(a) \varphi(l) = b l' \in J \Rightarrow al \in \varphi^{-1}(J)$$

'dir.

$\forall a \in \varphi^{-1}(J), \forall l, k \in F$ için, $\begin{cases} \varphi(a) = b \\ \varphi(l) = l' \\ \varphi(k) = k' \end{cases}$ olacak şekilde $b \in J, l', k' \in F'$ vardır,

ve

$$\begin{aligned}\varphi(l(k+a)-lk) &= \varphi(l(k+a)) - \varphi(lk) \\ &= \varphi(l)\varphi(k+a) - \varphi(l)\varphi(k) \\ &= \varphi(l)[\varphi(k) + \varphi(a)] - \varphi(l)\varphi(k) \\ &= l'(k'+b) - l'k' \in J \\ &\Rightarrow l(k+a)-lk \in \varphi^{-1}(J)\end{aligned}$$

'dir.

Böylece $\varphi^{-1}(J)$, N 'nin F yakın-cismi ile bağlı bir S-ideali olduğu sağlanır.

BÖLÜM 4

ASAL İDEALLER VE RADİKALLER

Yakın-halkalar, halkalardan farklı olduğuna göre asallık kavramı birçok farklı asallık tanımı ile sunulmuştur. Yakın-halkalarda asal idealler birçok yazarlar tarafından araştırılmıştır. Yakın-halkalarda asal idealler üzerinde ilk detaylı çalışmalar, (Van der Walt,1964) , (Ramakotaiah,1979) , (Laxton,1964) , (Rao,1979) tarafından yapılmıştır. Bu bölümde yakın-halkalarda asal ideallerin bazı temel özellikleri gösterilmiş ve aynı doğrultuda yarı (semi) asal ideal, asal radikal, sp -system ve m -system gibi kavramlar ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir.

4.1 Yakın-halkalarda Alt Kümelerin Çarpımı

Tanım 4.1.1 [1] N yakın-halka ve $U, V \subseteq N$ olmak üzere,

bu durumda,

$$UV = \{ uv \mid u \in U \text{ ve } v \in V \}$$

'dir. n doğal sayısı için U^n tanımı benzer bir şekilde tanımlanmaktadır.

N yakın-halka ve $U, V \triangleleft N$ olsun. O halde UV çarpımı ideal olmayabilir. Hatta genel olarak bu çarpım $(N, +)$ grubunun alt yarı grubu olmak zorunda değildir.

Önerme 4.1.2 N ve N' birer yakın-halka olmak üzere bu durumda,

i) $\forall U, V, W \subseteq N$ için, $(UV)W = U(VW)$

ii) $\psi : N \rightarrow N'$ yakın-halka homomorfizması olsun. O halde

$$\forall U, V \subseteq N \text{ için, } \psi(UV) = \psi(U)\psi(V)$$

ve

$$\forall U', V' \subseteq N' \text{ için, } \psi^{-1}(U' V') \supseteq \psi^{-1}(U') \psi^{-1}(V')$$

$$\text{iii) } \forall I \trianglelefteq N, \forall U, V \subseteq N \text{ için, } (U + I)(V + I) = UV + I$$

4.2 Asal İdealler

Tanım 4.2.1 [1] N yakın-halka ve $P \trianglelefteq N$ olmak üzere,

$$\forall I, J \trianglelefteq N \text{ için, } IJ \subseteq P \Rightarrow I \subseteq P \text{ veya } J \subseteq P$$

gerektirmesi sağlanıyor ise, P 'ye N yakın-halkasının asal ideali denir.

Tanım 4.2.2 Eğer N yakın-halkasının sıfır ideali asal ideal ise, N 'ye asal yakın-halka denir.

Not 4.2.3 N yakın-halka ve $S \subseteq N$ olmak üzere, S kümesi tarafından üretilen ideal $\langle S \rangle$ ile gösterilmiştir.

Ayrıca bir $n \in N$ için, $\langle \{n\} \rangle$ yerine $\langle n \rangle$ gösterimi kullanılmıştır.

Örnek 4.2.4 N sabit yakın-halka olsun. Bu durumda, $(N, +)$ 'nin her normal alt grubu asal idealdir.

Böylece her sabit yakın-halka aynı zamanda asal yakın-halkadır.

Örnek 4.2.5 $N = Z_3 = \{0, 1, 2\}$ aşağıdaki tablolarda toplama ve çarpma işlemleri altında yakın-halka olmak üzere,

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

*	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Aynı zamanda, N yakın-halkası komutatif, integral (sıfır bölensiz), birimli, dağılmalı ve bir yakın-cisimdir. Birim elemanı $1'$ dir.

Ayrıca $\{0\}$, N' nin bir asal ideali olduğu görülür.

Bu takdirde N bir asal yakın-halkadır.

Örnek 4.2.6 $N = \{0, a, b, c\}$, Klein-4-grup üzerinde, aşağıdaki tablolarda verilen işlemlere göre yakın-halkadır.

+	0	a	b	c
0	0	a	b	c
a	a	0	c	b
b	b	c	0	a
c	c	b	a	0

*	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	b	c	a
b	0	c	a	b
c	0	a	b	c

Üstelik bu N yakın-halkası komutatif, integral (sıfır bölensiz), birimli, dağılmalı ve bir yakın-cisimdir.

Birim elemanı c' dir.

Ayrıca $\{0\}$, N' nin bir asal ideali olduğundan dolayı, N bir asal yakın-halkadır.

Örnek 4.2.7 $N = A_4 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$, alterne grubu üzerinde, aşağıdaki tablolarda verilen işlemlere göre bir yakın-halkadır.

$$0 = (1) \quad , \quad 4 = (2 \ 3 \ 4) \quad , \quad 8 = (2 \ 4 \ 3)$$

$$1 = (1 \ 3)(2 \ 4) \quad , \quad 5 = (1 \ 4 \ 3) \quad , \quad 9 = (1 \ 2 \ 3)$$

$$2 = (1 \ 4)(2 \ 3) \quad , \quad 6 = (1 \ 2 \ 4) \quad , \quad 10 = (1 \ 3 \ 4)$$

$$3 = (1 \ 2)(3 \ 4) \quad , \quad 7 = (1 \ 3 \ 2) \quad , \quad 11 = (1 \ 4 \ 2)$$

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	0	3	2	7	6	5	4	10	11	8	9
2	2	3	0	1	5	4	7	6	11	10	9	8
3	3	2	1	0	6	7	4	5	9	8	11	10
4	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3
5	5	4	7	6	11	10	9	8	2	3	0	1
6	6	7	4	5	9	8	11	10	3	2	1	0
7	7	6	5	4	10	11	8	9	1	0	3	2
8	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	8	11	10	3	2	1	0	6	7	4	5
10	10	11	8	9	1	0	3	2	7	6	5	4
11	11	10	9	8	2	3	0	1	5	4	7	6

*	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	4	4	4	4	8	8	8	8
5	0	0	0	0	4	4	4	4	8	8	8	8
6	0	0	0	0	4	4	4	4	8	8	8	8
7	0	0	0	0	4	4	4	4	8	8	8	8
8	0	0	0	0	8	8	8	8	4	4	4	4
9	0	0	0	0	8	8	8	8	4	4	4	4
10	0	0	0	0	8	8	8	8	4	4	4	4
11	0	0	0	0	8	8	8	8	4	4	4	4

Aynı zamanda, N yakın-halkası 0-simetrik, komutatif ve dağılmalı bir yakın-halkadır.

$A = \{ 0 \}$, $I = \{ 0, 1, 2, 3 \}$ ve $J = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 \}$, N 'nin birer idealidir. Ayrıca I ideali, N yakın-halkasının bir asal idealidir.

Önerme 4.2.8 [3] N yakın-halka ve $P \trianglelefteq N$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

- i) P asal idealdir.
- ii) $\forall r, s \in N$ için, $r \notin P$ ve $s \notin P$ ise $\langle r \rangle \langle s \rangle \not\subseteq P$ 'dir.
- iii) $\forall R, S \trianglelefteq N$ için, $R \supset P$ ve $S \supset P$ ise $RS \not\subseteq P$ 'dir.
- iv) $\forall R, S \trianglelefteq N$ için, $R \not\subseteq P$ ve $S \not\subseteq P$ ise $RS \not\subseteq P$ 'dir.

Önerme 4.2.9 [1] N yakın-halka ve $\{P_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ kapsama altında tam sıralı olan N 'nin asal ideallerinin bir ailesi olmak üzere, bu durumda,

$$\bigcap_{\alpha \in \Lambda} P_\alpha$$

ideali N 'nin bir asal idealidir. Burada Λ bir indis kümesidir.

Önerme 4.2.10 [11] N yakın-halka, $I \trianglelefteq N$ direkt toplanan ideal ve P asal ideali ise, o halde $P \cap I$, I 'da bir asal idealdir.

Önerme 4.2.11 [1] N yakın-halka, $I \trianglelefteq N$, $I \subseteq P \trianglelefteq N$ ve

$$\varphi : N \rightarrow N/I = \bar{N}$$

kanonik epimorfizması olmak üzere, bu durumda,

$$P \text{ asal idealdir} \Leftrightarrow \varphi(P) \text{ asal idealdir.}$$

İspat: $\Rightarrow$) P bir asal ideal ve $\bar{J}_1, \bar{J}_2 \trianglelefteq N/I$ için, $\bar{J}_1 \bar{J}_2 \subseteq \varphi(P)$ olsun.

$J_i = \varphi^{-1}(\bar{J}_i)$, $i \in \{1, 2\}$ alalım. Önerme 4.1.2 den,

$$J_1 J_2 = \varphi^{-1}(\bar{J}_1) \varphi^{-1}(\bar{J}_2) \subseteq \varphi^{-1}(\bar{J}_1 \bar{J}_2) \subseteq \varphi^{-1}(\varphi(P)) = \varphi^{-1}(P + I) = P$$

'dir. Buradan, P bir asal ideal olduğuna göre,

$$J_1 \subseteq P \quad \text{veya} \quad J_2 \subseteq P$$

olup, ve φ örten olduğundan,

$$\bar{J}_1 = \varphi(\varphi^{-1}(\bar{J}_1)) = \varphi(J_1) \subseteq \varphi(P)$$

veya

$$\bar{J}_2 \subseteq \varphi(P)$$

elde edilir. Bu ise, $\varphi(P)$ 'nin bir asal ideal olduğunu gösterir.

$\Leftarrow$) $\varphi(P)$ bir asal ideal ve $J_1, J_2 \trianglelefteq N$ için, $J_1 J_2 \subseteq P$ olsun.

O halde, önerme 4.1.2 den,

$$\varphi(J_1 J_2) = \varphi(J_1) \varphi(J_2) \subseteq \varphi(P)$$

dir. Buradan, $\varphi(P)$ bir asal ideal olduğundan,

$$\varphi(J_1) \subseteq \varphi(P) \quad \text{veya} \quad \varphi(J_2) \subseteq \varphi(P)$$

olup,

$$J_1 \subseteq J_1 + I \subseteq \varphi^{-1}(\varphi(J_1)) \subseteq \varphi^{-1}(\varphi(P)) = \varphi^{-1}(P + I) = P$$

veya

$$J_2 \subseteq P$$

elde edilir. Bu ise, P 'nin asal ideal olduğunu gösterir.

Önerme 4.2.12 N yakın-halka olmak üzere, $P \trianglelefteq N$ idealinin asal olması için gerek ve yeter koşul N/P bölüm yakın-halkasının asal yakın-halkası olmasıdır.

İspat: $\varphi : N \rightarrow N/P = \bar{N}$ kanonik epimorfizmasını alalım. Önerme 4.2.11' den,

$$P \text{ asal idealdir} \Leftrightarrow \varphi(P) \text{ asal idealdir.}$$

Buradan,

$$P \text{ asal idealdir} \Leftrightarrow N/P \text{ asal yakın-halkadır.}$$

Önerme 4.2.13 N, N' iki yakın-halka ve $\psi : N \rightarrow N'$ örten homomorfizması olsun,

a) P, N yakın-halkasının bir asal ideali ve $\text{Ker } \psi \subseteq P$ ise, $\psi(P), N'$ yakın-halkasının bir asal idealidir.

b) P' , N' yakın-halkasının bir asal ideali ise, $\psi^{-1} (P')$ 'de N yakın-halkasının bir asal idealidir.

İspat: **a)** $\forall J_1 , J_2 \trianglelefteq N'$ için, $J_1 J_2 \subseteq \psi (P)$ olsun. ψ yakın-halka homomorfizması olduğundan,

$$\psi^{-1} (J_1) , \psi^{-1} (J_2) \trianglelefteq N' \text{ dir.}$$

$\text{Ker } \psi \subseteq P$ olduğuna göre,

$$\forall x \in \psi^{-1} (\psi (P)) \Rightarrow \psi (x) \in \psi (P) \Rightarrow \psi (x) = \psi (y) : y \in P$$

$$\Rightarrow \psi (x) - \psi (y) = 0 \Rightarrow \psi (x - y) = 0$$

$$\Rightarrow x - y \in \text{Ker } \psi \subseteq P \Rightarrow x - y = z : z \in P$$

$$\Rightarrow x = y + z \in P' \text{ dir.}$$

Önerme 4.1.2' den,

$$\psi^{-1} (J_1) \psi^{-1} (J_2) \subseteq \psi^{-1} (J_1 J_2) \subseteq \psi^{-1} (\psi (P)) \subseteq P$$

'dir. Buradan, P bir asal ideal olduğuna göre,

$$\psi^{-1} (J_1) \subseteq P \quad \text{veya} \quad \psi^{-1} (J_2) \subseteq P$$

olup,

$$J_1 \subseteq \psi (P) \quad \text{veya} \quad J_2 \subseteq \psi (P)$$

elde edilir.

b) $\forall I_1 , I_2 \trianglelefteq N$ için, $I_1 I_2 \subseteq \psi^{-1} (P')$ olsun.

Önerme 4.1.2' den,

$$I_1 I_2 \subseteq \psi^{-1} (P') \Rightarrow \psi (I_1 I_2) \subseteq P' \Rightarrow \psi (I_1) \psi (I_2) \subseteq P'$$

'dir. Buradan, P' bir asal ideal olduğuna göre,

$$\psi (I_1) \subseteq P' \quad \text{veya} \quad \psi (I_2) \subseteq P'$$

olup,

$$I_1 \subseteq \psi^{-1}(P') \quad \text{veya} \quad I_2 \subseteq \psi^{-1}(P')$$

elde edilir.

Tanım 4.2.14 [1] N yakın-halka ve $M \subseteq N$ olmak üzere,

eğer

$$\forall a, b \in M \text{ için, } \exists a_1 \in \langle a \rangle, \exists b_1 \in \langle b \rangle : a_1 b_1 \in M$$

ise, M 'ye bir m -system denir.

Örnek 4.2.15

a) ϕ ve N aşikâr m -system lerdir.

b) $\forall n \in N$ için, $\{n, n^2, n^3, \dots\}$ bir m -systemdir.

Teorem 4.2.16 N bir yakın-halka ve $P \trianglelefteq N$ olmak üzere,

$$P \text{ asal idealdir} \Leftrightarrow N \setminus P \text{ bir } m\text{-systemdir.}$$

İspat: $\Rightarrow$) P bir asal ideal olsun. O halde $\forall a, b \in N \setminus P$ için, $a, b \notin P$ olup, önerme 4.2.8'den, $\langle a \rangle \langle b \rangle \not\subseteq P$ 'dir.

Buradan,

$$\exists a_1 \in \langle a \rangle, \exists b_1 \in \langle b \rangle : a_1 b_1 \notin P$$

Olduğundan, $a_1 b_1 \in N \setminus P$ olur. O halde $N \setminus P$ bir m -systemdir.

$\Leftarrow$) $N \setminus P$ bir m -system olsun. Bu durumda, $\forall a, b \notin P$ için, $a, b \in N \setminus P$ olur ve $N \setminus P$ bir m -system olduğundan,

$$\exists a_1 \in \langle a \rangle, \exists b_1 \in \langle b \rangle : a_1 b_1 \in N \setminus P$$

olup, $a_1 b_1 \notin P$ olur.

Buradan, $\langle a \rangle \langle b \rangle \not\subseteq P$ 'dir. Bu ise, P 'nin asal ideal olduğunu gösterir.

Önerme 4.2.16 N yakın-halka ve $M \subseteq N$ bir m -system olmak üzere,

eğer N 'nin bir I ideali için, $I \cap M = \phi$

ise, o halde

$$P \neq N \text{ ve } P \cap M = \phi$$

olacak şekilde I idealini içeren N 'nin bir P asal ideali vardır.

İspat: $\mathcal{I} = \{ J \leq N, I \subseteq J, J \cap M = \phi \}$ olsun.

$I \in \mathcal{I}$ olduğundan, $\mathcal{I} \neq \phi$ 'dir.

Zorn lemmasına dayanarak $\mathcal{I}$, bir P maksimal elemanını içerir.

$P \cap M = \phi$ olduğuna göre, $P \neq N$, N 'nin bir idealidir.

P gerçekten bir asal idealdir:

Eğer $J_1 \supset P$ ve $J_2 \supset P$ ise, P maksimal eleman olduğuna göre,

$$\exists j_1 \in J_1 \cap M \text{ ve } \exists j_2 \in J_2 \cap M$$

olup,

$\langle j_1 \rangle \langle j_2 \rangle \subseteq J_1 J_2$ ve M bir m -system olduğundan,

$$\exists a \in \langle j_1 \rangle \text{ ve } \exists b \in \langle j_2 \rangle : a b \in M \text{ dir.}$$

Buradan, $a b \in \langle j_1 \rangle \langle j_2 \rangle \cap M \subseteq J_1 J_2 \cap M$ olur.

Yani $J_1 J_2 \cap M \neq \phi$ 'dir.

Böylece $J_1 J_2 \not\subseteq P$ olup, P 'nin bir asal ideal olduğunu gösterir.

4.3 Yarı Asal İdealler

Tanım 4.3.1 [1] N yakın-halka ve $S \leq N$ olmak üzere,

$$\forall I \leq N \text{ için, } I^2 \subseteq S \Rightarrow I \subseteq S$$

gerektirmesi sağlanıyor ise, S idealine N yakın-halkasının yarı asal ideali denir.

Tanım 4.3.2 Eğer N yakın-halkasının sıfır ideali yarı asal ideal ise, o halde N 'ye yarı asal yakın-halka denir.

Not 4.3.3 N yakın-halkasında her asal ideal aynı zamanda yarı asal idealdir.

Önerme 4.3.4 [1] N yakın-halka olmak üzere, $S \trianglelefteq N$ ideali için, aşağıdaki ifadeler denktir.

- i) S yarı asal idealdir.
- ii) $\forall R \trianglelefteq N$ için, $\langle R^2 \rangle \subseteq S \Rightarrow R \subseteq S$ 'dir.
- iii) $\forall r \in N$ için, $\langle r \rangle^2 \subseteq S \Rightarrow r \in S$ 'dir.
- iv) $\forall R \trianglelefteq N$ için, $R \supset S$ ise, $R^2 \not\subseteq S$ 'dir.
- v) $\forall R \trianglelefteq N$ için, $R \not\subseteq S \Rightarrow R^2 \not\subseteq S$ 'dir.

Önerme 4.3.5 [1] N yakın-halka ve $\{S_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ kapsama altında tam sıralı olan N yakın-halkasının yarı asal ideallerinin bir ailesi olmak üzere, bu durumda,

$$\bigcap_{\alpha \in \Lambda} S_\alpha$$

ideali N 'nin yarı asal idealidir. Burada, Λ bir indis kümesidir.

Önerme 4.3.6 [1] N yakın-halka, $I \trianglelefteq N$ direkt toplanan ideal ve S bir yarı asal ideali ise,

$$S \cap I, I \text{ 'da yarı asal idealdir.}$$

Önerme 4.3.7 N yakın-halka, $I \trianglelefteq N$, $I \subseteq S \trianglelefteq N$ olsun.

$$S \text{ yarı asal idealdir} \Leftrightarrow \varphi(S) \subseteq N/I \text{ yarı asal idealdir.}$$

Önerme 4.3.8 N yakın-halkasının asal ideallerinin herhangi kesişimleri birer yarı asal idealdir.

İspat: $\{P_i\}_{i \in I}$, N yakın-halkasının asal ideallerinin bir ailesi olsun.

$$S = \bigcap_{i \in I} P_i$$

alalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \forall R \trianglelefteq N \text{ için, } R^2 \subseteq S &\Rightarrow R^2 \subseteq \bigcap_{i \in I} P_i \Rightarrow \forall r \in R \text{ için, } R^2 \subseteq P_i \\ &\Rightarrow \forall r \in R \text{ için, } R \subseteq P_i \Rightarrow R \subseteq \bigcap_{i \in I} P_i = S' \text{ dir.} \end{aligned}$$

Tanım 4.3.9 [1] N yakın-halka ve $S \subseteq N$ olmak üzere,

eğer

$$\forall s \in S \text{ için, } \exists s_1, s_2 \in \langle s \rangle : s_1 s_2 \in S$$

ise, S 'ye bir sp -system denir.

Sonuç 4.3.10 Her m -system kümesi, aynı zamanda bir sp -system denir.

Teorem 4.3.11 N yakın-halka ve $S \trianglelefteq N$ olmak üzere,

$$S \text{ yarı asal idealdir} \Leftrightarrow N \setminus S \text{ bir } sp\text{-system dir.}$$

İspat: $\Rightarrow$) S bir yarı asal ideal olsun. Bu durumda, $\forall s \in N \setminus S$ için, $s \notin S$ olup, önerme 4.3.4'den, $\langle s \rangle^2 \not\subseteq S$ 'dir.

Buradan,

$$\exists s_1, s_2 \in \langle s \rangle : s_1 s_2 \notin S$$

Olduğundan, $s_1 s_2 \in N \setminus S$ olur. O halde $N \setminus S$ bir sp -systemdir.

$\Leftarrow$) $N \setminus S$ bir sp -system olsun. Bu durumda,

$\forall s \notin S$ için, $s \in N \setminus P$ olur ve $N \setminus S$ bir sp -system olduğundan,

$$\exists s_1, s_2 \in \langle s \rangle : s_1 s_2 \in N \setminus S$$

olup, $s_1 s_2 \notin S$ olur. Buradan, $\langle s \rangle^2 \not\subseteq S$ 'dir. Bu ise, S 'nin bir yarı asal ideal olduğunu gösterir.

Önerme 4.3.12 N yakın-halka , $S \subseteq N$ sp -system ve $s \in S$ olsun. O halde

$$M \subseteq N \quad \text{ve} \quad s \in M \subseteq S$$

olacak şekilde M gibi bir m -system vardır.

İspat: $s \in S$ ve S bir sp -system olduğundan,

$$\exists s_1, s_2 \in \langle s \rangle : s_1 s_2 \in S$$

'dir. Benzer şekilde $s_1 s_2 \in S$ olduğuna göre,

$$\exists s_1^1, s_2^1 \in \langle s_1 s_2 \rangle : s_1^1 s_2^1 \in S$$

'dir. Aynı doğrultuda devam ederek, her k pozitif tam sayı için,

$$s_1^k s_2^k \in S$$

ve

$$\langle s \rangle \supseteq \langle s_1 s_2 \rangle \supseteq \langle s_1^1 s_2^1 \rangle \supseteq \dots \supseteq \langle s_1^k s_2^k \rangle \supseteq \dots$$

olur. Şimdi $M = \{ s, s_1 s_2, s_1^1 s_2^1, \dots, s_1^k s_2^k, \dots \}$ alınırsa,

bu durumda, $s \in M \subseteq S$ olup, $\forall s_1^k s_2^k, s_1^l s_2^l \in M$ ($k \leq l$) için,

$$\exists s_1^{l+1}, s_2^{l+1} \in \langle s_1^l s_2^l \rangle \subseteq \langle s_1^k s_2^k \rangle : s_1^{l+1} s_2^{l+1} \in M$$

sağlanır. Bu ise, M kümesinin bir m -system olduğunu gösterir.

4.4 Yakın-halkalarda Asal Radikal Kavramı

Tanım 4.4.1 [12] N yakın-halka ve $M \subseteq N$ olmak üzere,

eğer

$$\forall a, b \in M \text{ için, } \exists b_1 \in \langle b \rangle : a b_1 \in M$$

ise, M 'ye bir m^* -system denir.

Tanım 4.4.2 [12] N yakın-halka ve $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, N 'de bir eleman dizisi olmak üzere, eğer

$$\forall n \geq 1 \text{ için, } a_n \in a_{n-1} \langle a_{n-1} \rangle$$

ise, $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ dizisine bir m^* -dizisi denir.

Sonuç 4.4.3 N yakın-halkasında, eğer M kümesi m -system ise, o halde M bir m^* -system olur.

Önerme 4.4.4 N yakın-halka, $P \trianglelefteq N$ olmak üzere,

i) P asal idealdir $\Leftrightarrow \forall r, s \in N$ için, $r \langle s \rangle \subseteq P$ ise, $r \in P$ veya $s \in P$ 'dir.

ii) P asal idealdir $\Leftrightarrow N \setminus P$ bir m^* -systemdir.

İspat: i) $\Rightarrow$) P bir asal ideal olsun. $\forall r, s \in N$ için, $r \langle s \rangle \subseteq P$ olacak şekilde

$r \notin P$ ve $s \notin P$ farz edelim. O halde $r, s \in N \setminus P$ olur. Teorem 4.2.16'dan, $N \setminus P$ bir m -system olduğuna göre,

$$\exists r \in \langle r \rangle, \exists s_1 \in \langle s \rangle : rs_1 \in N \setminus P$$

'dir. Bu durumda,

$$rs_1 \in r \langle s \rangle \subseteq P$$

çelişkisi elde edilir.

Buradan,

$$\forall r, s \in N \text{ için, } r \langle s \rangle \subseteq P \text{ ise, } r \in P \text{ veya } s \in P \text{'dir.}$$

$\Leftarrow$) $\forall r, s \in N$ için, $r \langle s \rangle \subseteq P$ ise, $r \in P$ veya $s \in P$ olsun. Bu durumda,

$\forall r, s \in N \setminus P$ için, $r \langle s \rangle \not\subseteq P$ olup,

$$\exists r \in \langle r \rangle, \exists s_1 \in \langle s \rangle : rs_1 \notin P$$

olur. O halde $rs_1 \in N \setminus P$ 'dir. Bu ise, $N \setminus P$ bir m -system olduğunu gösterir.

Böylece teorem 4.2.16'dan faydalanılarak, P 'nin bir asal ideal olduğu ispatlanmış olur.

ii) $\Rightarrow$) Teorem 4.2.16 ve sonuç 4.4.3'e göre,

$$P \text{ asal idealdir} \Rightarrow N \setminus P \text{ bir } m\text{-systemdir} \Rightarrow N \setminus P \text{ bir } m^*\text{-systemdir.}$$

$\Leftarrow$) $\forall r, s \in N$ için, $r \langle s \rangle \subseteq P$ olacak şekilde $r \notin P$ ve $s \notin P$ farz edelim.

O halde $r, s \in N \setminus P$ olur. $N \setminus P$ bir m^* -system olduğuna göre,

$$\exists s_1 \in \langle s \rangle : rs_1 \in N \setminus P$$

'dir.

Bu durumda,

$$rs_1 \in r \langle s \rangle \subseteq P$$

çelişkisi elde edilir. Böylece

$$\forall r, s \in N \text{ için, } r \langle s \rangle \subseteq P \text{ ise, } r \in P \text{ veya } s \in P' \text{ dir.}$$

Buradan i) şikkına dayanarak, P 'nin asal ideal olduğu ispatlanır.

Sonuç 4.4.5 N yakın-halkasında, eğer $\{a_n\}_{n \geq 0}$ bir m^* -dizisi ise, o halde

$$M = \{a_n \mid n \geq 0\}$$

kümesi bir m^* -system olur.

Çözüm: $a_s, a_t \in M$, $(s < t)$ alalım. O halde $\{a_n\}_{n \geq 0}$ bir m^* -dizisi olduğundan,

$$a_{t+1} \in a_t \langle a_t \rangle \Rightarrow \exists b_t \in \langle a_t \rangle : a_{t+1} = a_t b_t$$

'dir. Diğer taraftan,

$$a_t \in a_{t-1} \langle a_{t-1} \rangle \subseteq \langle a_{t-1} \rangle$$

$$a_{t-1} \in a_{t-2} \langle a_{t-2} \rangle \subseteq \langle a_{t-2} \rangle$$

$$\vdots$$

$$a_{s+1} \in a_s \langle a_s \rangle \subseteq \langle a_s \rangle$$

olduğuna göre,

$$\langle a_t \rangle \subseteq \langle a_{t-1} \rangle \subseteq \langle a_{t-2} \rangle \subseteq \dots \subseteq \langle a_s \rangle$$

sağlanır. Buradan,

$$\forall a_s, a_t \in M, (s < t) \text{ için, } \exists b_t \in \langle a_s \rangle : a_t b_t = a_{t+1} \in M$$

'dir. Böylece M kümesi bir m^* -system olur.

Tanım 4.4.6 [1] N yakın-halka ve $I \trianglelefteq N$ olmak üzere, I 'yı içeren N 'nin bütün asal ideallerin kesişimlerine, I idealinin radikali denir ve $\mathfrak{p}(I)$ ile gösterilir. Bu durumda,

$$\mathfrak{p}(I) = \bigcap_{\substack{P \text{ asal ideal} \\ I \subseteq P}} P$$

'dir.

Sonuç 4.4.7 Önerme 4.3.8'e bakarak, $\mathfrak{p}(I)$, I 'yı içeren bir yarı asal ideal olduğu görülmektedir.

Önerme 4.4.8 [12] N yakın-halka ve $I \trianglelefteq N$ olmak üzere, o halde

$$n \in \mathfrak{p}(I) \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n^k \in I$$

İspat: $M = \{ n, n^2, n^3, \dots \}$ alalım. Bu durumda, M kümesi bir m -systemdir.

Eğer

$$I \cap M = \phi$$

ise, önerme 4.2.16'dan,

$$P \neq N \text{ ve } P \cap M = \phi$$

olacak şekilde I idealini içeren N 'nin bir P asal ideali vardır. Bu ise, $n \in \mathfrak{p}(I)$ olduğunun çelişkisidir. Buna göre,

$$I \cap M \neq \phi$$

olup,

$$\exists k \in \mathbb{N} : n^k \in I$$

'dır.

Teorem 4.4.9 [13] N yakın-halka ve $I \trianglelefteq N$ olmak üzere, o halde

$$\mathfrak{p}(I) = \{ n \in N \mid n \text{ 'yi içeren her } m^* \text{-system, } I \text{ 'nan kesişir} \}$$

İspat: $X = \{ n \in N \mid n \text{ 'yi içeren her } m^* \text{-system, } I \text{ 'nan kesişir} \}$ olsun.

$n \in \mathfrak{p}(I)$ alalım. Eğer $n \notin X$ ise,

bu durumda,

$$n \in M \quad \text{ve} \quad M \cap I = \phi$$

bir m^* -system vardır.

Buradan,

$$P \supseteq I \quad \text{ve} \quad M \cap P = \phi$$

olacak şekilde bir P asal ideali vardır.

Böylece

$$n \notin P$$

olup,

$$n \notin p(I)$$

çelişkisi elde edilir.

Bu ise, $p(I) \subseteq X$ olduğunu gösterir.

Diğer taraftan, $n \in X$ olsun. Eğer $n \notin p(I)$ ise, o halde

$$P \supseteq I \quad \text{ve} \quad n \notin P$$

olacak şekilde bir P asal ideal vardır.

Buradan,

$$n \in N \setminus P \quad \text{ve} \quad N \setminus P \text{ } m^*\text{-system}$$

olur. Bu durumda, $n \in X$ olduğuna göre,

$$(N \setminus P) \cap I \neq \phi$$

gerekir. Fakat

$$P \supseteq I$$

olduğundan, bir çelişki gerçekleşir.

Buradan, $X \subseteq p(I)$ sağlanır.

Böylece

$$\mathcal{P}(I) = X$$

olur.

Teorem 4.4.10 [14] N yakın-halka ve $I \trianglelefteq N$ olmak üzere,

bu durumda,

$$I \text{ yarı asal idealdir} \Leftrightarrow \mathcal{P}(I) = I$$

İspat: $\Rightarrow$) I yarı asal ideal olsun. Genelde $I \subseteq \mathcal{P}(I)$ 'dir. farz edelim ki $I \subset \mathcal{P}(I)$.

Bu durumda,

$$a \in \mathcal{P}(I) \quad \text{ve} \quad a \notin I$$

bir a elemanı vardır.

I yarı asal ideal olduğuna göre, Teorem 4.3.11'den, $N \setminus I$ bir sp -system olur. önerme 4.3.12'den, $a \in N \setminus I$ olduğundan dolayı,

$$M \subseteq N \quad \text{ve} \quad a \in M \subseteq N \setminus I$$

olacak şekilde M gibi bir m -system vardır. Sonuç 4.4.3'e göre, M aynı zamanda bir m^* -systemdir.

Şimdi $a \in \mathcal{P}(I)$ ve teorem 4.4.9'a dayanarak, a elemanını içeren her m^* -system, I 'nin kesişimi gerekmektedir.

Fakat

$$I \cap (N \setminus I) = \emptyset \Rightarrow I \cap M = \emptyset$$

'dir. Böylece bir çelişki elde edilir.

Sonuçta $I \subseteq \mathcal{P}(I)$ ve $I \not\subset \mathcal{P}(I)$ olduğuna göre, $I = \mathcal{P}(I)$ olur.

$\Leftarrow$) $I = \mathcal{P}(I)$ olsun. $\mathcal{P}(I)$ bir yarı asal ideal olduğuna göre, I ideali de yarı asal ideal olmaktadır.

BÖLÜM 5

SONUÇ

Bu tezde ilk olarak, yakın-halka, N -grup (yakın-modül), alt yakın-halka ve invaryant alt yakın-halka, ideal ve yakın-halka homomorfizması gibi kavramların tanımı ile temel özellikleri verilmiştir. Ancak N yakın-halkası için, $(N, +)$ grubu, $(N_0, +)$ sıfır simetrik kısmının, $(N_C, +)$ sabit kısmı ile bir yarı-direkt çarpımı olduğu özellik, aynı zamanda da 0-simetrik yakın-halkası ve her $r \in N$ idempotent eleman için, $(N, +)$ grubu, $(N_r, +)$ grubu'nun, $(Nr, +)$ grubu ile bir yarı-direkt çarpımı olduğu ispatlanmıştır. Daha sonra idempotent elemanların merkezi olabileceği durumlar incelenmiştir. Sonraki bölümde Smarandache alt yakın-halkası ve Smarandache yakın-halka homomorfizması ile ilgili detaylı örnekler sunulmuştur. Son olarak, yakın-halkalar, halkalardan farklı olduğu nedeni ile sp -system, m -system gibi kavramlar kullanarak, asal ideal, yarı asal ideal ve bir idealin asal radikali ile ilgili bazı teoremler ispatlanmıştır.

Bu konunun önemi, özellikle halkalar, gruplar, halkaların genelleştirilmiş bir hali olan yakın-halkalar konusunda araştırmacının cebir alandaki bilgilerine ve sonraki lisansüstü öğrencilerin benzer konularda çalışmalarına katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] Pilz, G. (2011). *Near-rings: the theory and its applications*. Elsevier.
- [2] Betsch, G. (Ed.). (2011). *Near-rings and near-fields*. Elsevier.
- [3] Van der Walt, A. P. (1964). Prime Ideals and Nil Radicals in Near-rings. *Archiv der Mathematik*, **15(1)**, 408-414.
- [4] Beidleman, J. C. (1967). Strictly Prime Distributively Generated Near-rings. *Mathematische Zeitschrift*, **100(2)**, 97-105.
- [5] Rao, V. S. (1982). A Characterization of Semiprime Ideals in Near-rings. *Journal of the Australian Mathematical Society*, **32(2)**, 212-214.
- [6] Kandasamy, W. V. (2002). *Smarandache near-rings*. Infinite Study.
- [7] Kandasamy, W. V. (2003). *Bi-algebraic Structures and Smarandache Bi-algebraic Structures*. Infinite Study.
- [8] Clay, J. R. (1994). Near-rings geneses and applications. *Bull. Amer. Math. Soc*, **31**, 327-330.
- [9] Nandakumar, P. (2009). BI-Regular Near-Rings. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, **33(3)**.
- [10] Chelvam, T. T. , Ganesan, N. (1988). On Minimal Bi-Ideals of Near-Rings. *Journal of Indian Math. Soc*, **53**, 161-166.
- [11] Maxson, C. J. (1968). On Near-Rings and Near-Ring Modules.
- [12] Satyanarayana, B. , Prasad, K. S. (2013). *Near rings, fuzzy ideals, and graph theory*. CRC press.

- [13] Rao, V. S. , Satyanarayana, B. (1984). In Van der Walt (1964). *Indian J. Püre appl. Math*, **15(4)**, 361-364.
- [14] Groenewald, N. J. (1983). A Characterization of Semi-Prime Ideals in Near-Rings. *Journal of the Australian Mathematical Society*, **35(2)**, 194-196.
- [15] Booth, G. L., Groenewald, N. J. (1996). Different Prime Ideals in Near-Rings II. *Pitman Research Notes in Mathematics Series*, 131-140.

