

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



**4-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA BISHOP ÇATIYA GÖRE
BAZI İLİŞKİLİ EĞRİLER**

Ahmet DUYAN

Yüksek Lisans Tezi

MATEMATİK ANABİLİM DALI
Geometri Bilim Dalı

TEMMUZ-2020

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

**4-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA BISHOP ÇATIYA GÖRE
BAZI İLİŞKİLİ EĞRİLER**

Tez Yazarı

Ahmet DUYAN

Danışman

Doç. Dr. Mustafa YENEROĞLU

TEMMUZ 2020
ELAZIĞ

BEYAN

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım “4-Boyutlu Öklid Uzayında Bishop Çatıya Göre Bazı İlişkili Eğriler” yüksek lisans tezimin içindeki bütün bilgilerin doğru olduğunu, bilgilerin üretilmesi ve sunulmasında bilimsel etik kurallarına uygun davrandığımı, kullandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi, maddi ve manevi desteği olan tüm kurum/kuruluş ve kişileri belirttiğimi, burada sunduğum veri ve bilgileri unvan almak amacıyla daha önce hiçbir şekilde kullanmadığımı beyan ederim.

23/07/2020

Ahmet DUYAN



ÖNSÖZ

Eğriler, geometride geniş bir çalışma olanağı sunmaktadır. Özellikle farklı çatılara göre eğriler oluşturup bunlarla ilgili karakterizasyonlar yapmak mümkündür. Bu çatıların en bilineni Frenet çatısıdır. Bu çatının tek dezavantajı eğrinin üçüncü mertebeye kadar türevinin sürekli olmasıdır. Bundan dolayı yeni çatılara ihtiyaç duyulmuştur. Bishop çatısı, eğrinin ikinci türevinin sıfır olması halinde bile çalışabilen bir çatıdır.

Bu çalışmanın hazırlanmasında her türlü yardımını esirgemeyen değerli hocam Doç. Dr. Mustafa YENEROĞLU'na ve desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen sayın hocam Prof. Dr. Vedat ASİL'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bu günlere gelmemde büyük pay sahibi olan aileme üzerimdeki emeklerinden dolayı saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım.

Ahmet DUYAN

ELAZIĞ-2019



İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ.....	iv
İÇİNDEKİLER	v
ÖZET	vi
ABSTRACT	vii
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	viii
SEMBOLLER LİSTESİ.....	ix
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	2
3. 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA BİSHOP ÇATIYA GÖRE İLİŞKİLİ EĞRİLER.....	12
4. 4-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA BİSHOP ÇATIYA GÖRE BAZI İLİŞKİLİ EĞRİLER.....	17
Bu bölümde 4-boyutlu Öklid uzayında Bishop çatıya göre bazı ilişkili eğriler verilecektir.	17
4.1. M_1 – Doğrultman Eğrileri.....	17
4.2. M_2 – Doğrultman Eğrileri.....	19
4.3. M_3 – Doğrultman Eğrileri.....	21
4.6. M_3 – Rektifiyan Eğrileri	25
5. SONUÇLAR	27
KAYNAKLAR	28
ÖZGEÇMİŞ	

ÖZET

4-Boyutlu Öklid Uzayında Bishop Çatıya Göre Bazı İlişkili Eğriler

Ahmet DUYAN

Yüksek Lisans Tezi

FIRAT ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Geometri Bilim Dalı

TEMMUZ 2020, Sayfa ix+29

Öklid uzayında eğriler teorisinde farklı çatılara göre birçok çalışma yapılmıştır. Birçok bilim adamı bu teoride Frenet çatı, Bishop çatı, Adapted çatı gibi çatıları çalışmıştır. Bu çatılar eğriler ile ilgili karakterizasyonlarda bize yardımcı olur.

Bu çalışmada, 4-boyutlu Öklid uzayında bishop çatıya göre Frenet eğrisi ile ilişkili eğriler incelenmiştir. Bu çatıya göre Frenet eğrilerin doğrultman eğrileri ve rektifyan eğrileri verilmiştir.

Anahtar kelimeler : Bishop çatı, Frenet eğrileri, Frenet çatısı, İntegral eğrisi

ABSTRACT

Associated Curves According to Bishop Frame in 4-Dimensional Euclidean Space

Ahmet DUYAN

Master's Thesis

FIRAT ÜNİVERSİTY
Graduate School of Natural and Applied Sciences

Matematik Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalı
July 2020, Page ix+29

Many studies have been done according to different frames of the theory of curves in Euclidean Space. Many scientists have studied frames such as Frenet frame, Bishop frame, Adapted frame in this theory. These frames help us in the characterization of curves.

In this study, associated curves with Frenet curve according to Bishop frame in 4-dimensional Euclidean space are investigated. Direction and rectifying curves of the frenet curve according to this frame are given.

Key words : Bishop frame, Frenet curves, Frenet frame, Integral curve

ŞEKİLLER LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 2.1. n-boyutlu uzayda eğri.....	2
Şekil 2.2. Frenet vektörleri.....	3
Şekil 2.3. 3-boyutlu uzayda bishop vektörleri	6
Şekil 2.4. 4-boyutlu uzayda bishop vektörleri	9



SEMBOLLER LİSTESİ

R	: Reel sayılar cümlesi
IR^3	: 3-boyutlu öklid uzayı
IR^4	: 4-boyutlu öklid uzayı
$\{T, N, B\}$	: 3-boyutlu öklid uzayında Serre-Frenet çatısı
$\{T, M_1, M_2, \}$	: 3- boyutlu öklid uzayında Bishop çatısı
κ	: 3-boyutlu öklid uzayında eğrilik fonksiyonu
τ	: 3-boyutlu öklid uzayında burulma fonksiyonu
K_1, K_2	: 3-boyutlu öklid uzayında Bishop çatısına göre eğrilik fonksiyonları
$\{T, N, B_1, B_2\}$	: 4-boyutlu öklid uzayında Serre-Frenet çatısı
$\{k_1, k_2, k_3\}$	: 4-boyutlu öklid uzayında Serre-Frenet çatısı na göre eğrilik fonksiyonları
$\{T, M_1, M_2, M_3\}$	: 4-boyutlu öklid uzayında bishop çatısı
K_1, K_2, K_3	: 4-boyutlu öklid uzayında bishop çatısı na göre eğrilik fonksiyonları

1. GİRİŞ

Eğrilerin diferansiyel geometrisi farklı uzaylarda farklı çatılara göre çalışılan en önemli alanlardan birisidir. 3-boyutlu Öklid uzayında bir eğrinin teğet, asli normal ve binormal vektörlerinden oluşan Frenet çatısı bu eğrinin diferansiyel geometrisinin çalışılabilmesi için en iyi bilinen bir ortonormal çatıdır. Ayrıca bir uzay eğrisinin şekli, yani uzaydaki yerel davranışı bu eğrinin eğrilik ve burulması ile tamamen belirlidir. Dolayısıyla bir eğrinin tamamen incelenebilmesi için en azından üçüncü mertebeye kadar sürekli türevlenebilir olması gerekmektedir.

Bir çok araştırmacı eğrilerin özelliklerini karakterize etmek ve hesap yapmak için Frenet çatısını kullanır. Fakat Frenet çatısı yalnızca diferensiyellenebilen eğriler için tanımlıdır ve bazı noktalarda eğrinin ikinci türevi sıfır olabilir. Bu durumda eğri için alternatif bir çatıya ihtiyaç vardır. Bu sebeple 1975 yılında L.R. Bishop paralel vektör alanları yardımıyla 3-boyutlu Öklid uzayında eğriler için bir alternatif çatı ya da paralel öteleme çatısı tanımlamıştır. Bu çatı bir eğrinin ikinci türevinin tamamen sıfır olduğu durumda bile iyi tanımlanan bir hareketli çatıdır.

Bishop, bu çatı sayesinde hareketli bir çatıyı tanımlamak için alternatif bir yol bulmuştur [1]. Bu çatı Frenet çatısında bulunan teğet vektör sabit tutularak normal vektörlerin belli bir açıyla döndürülmesiyle oluşur [1]. Bu alternatif çatının bulunuşuyla birlikte araştırmacılar bazı temel konuları bu yeni çatıya göre incelemeyi amaçlamışlardır ve Bishop çatısı üzerine pek çok çalışma yapmışlardır [2,3,4].

Bükçü ve Karacan bazı özel eğrileri Bishop çatısına göre incelemişlerdir [5]. Yılmaz, Özyılmaz ve Turgut söz konusu Bishop çatısının bileşenlerinin küresel görüntüleri üzerine çalışmıştır [6]. Babadağ ise bazı eğrileri Bishop çatısına göre karakterize etmiştir [8]. Macit ve Döldül, E^3 de her ilişkili eğrinin eğriliklerini karakterize etmişler ve E^4 de bazı yeni ilişkili eğrileri tanımlamışlardır [9]. 2015 yılında Büyükkütük ve Öztürk E^4 de Bishop çatıya göre eğriler için bazı sonuçlar elde etmişler [10]. Elzawy 2017 yılında yaptığı çalışmasında 4-boyutlu Öklid uzayında Bishop ve Frenet çatıyı çalışmıştır [11]. J. H. Choi ve Y. H. Kim 2012 yılında integral eğrileri yardımıyla, verilen bir Frenet eğrisi için bazı bağlantılı eğriler tanımlamışlardır. Bu bağlantılı eğrileri asli-doğrultu eğrisi, binormal doğrultu eğrisi, asli-donör eğrisi, binormal-donör eğrisi olarak sıralayabiliriz.[12]. Körpınar 3-boyutlu Öklid uzayda Bishop çatıya göre ilişkili eğrileri incelemiştir [4,13]. Körpınar, bu çalışmasında 3- boyutlu Öklid uzayında Bishop çatısına bağlı olarak M_1 -doğrultman eğrisini ve M_2 -donör eğrisini vermiştir.

Bu çalışmada ise 3-boyutlu Öklid uzayında Bishop çatıya göre bazı ilişkili eğriler verip 4-boyutlu Öklid uzayındaki Bishop çatı ya göre doğrultman eğrilerinin birinci ikinci ve üçüncü eğrilikleriyle birlikte asli normal vektör alanı ile binormal vektör alanını elde etmeye çalışacağız.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde bazı temel tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1 (Öklid iç çarpım): $\langle , \rangle : R^n \times R^n \rightarrow R$, her $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ için

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} x_i y_i \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona R^n vektör uzayı üzerinde Öklid iç çarpım denir [13].

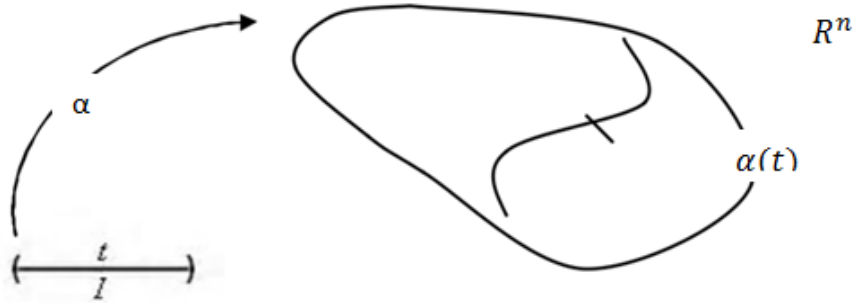
Tanım 2.2 (Vektörel çarpım): $a = (a_1, a_2, a_3)$ ve $b = (b_1, b_2, b_3) \in R^3$ şeklinde iki vektör olsunlar. Bu iki vektörün vektörel çarpımı

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad (2.2)$$

ile verilir [13].

Tanım 2.3 (Norm): Bir $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektörünün normu $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ olarak tanımlanır [13].

Tanım 2.4 (Eğri): I, R nin açık aralığı olmak üzere $\alpha: I \rightarrow R^n$ biçiminde (C^∞ sınıfından) bir α dönüşümüne, R^n uzayı içinde bir eğri denir [13]. Bu şekilde tanımlı eğrinin geometrik ifadesi Şekil 2.1’de gösterilmiştir.



Şekil 2.1. n-boyutlu uzayda eğri

Tanım 2.5 (Hız vektörü): $\alpha: I \rightarrow R^n, \alpha = \alpha_n(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$ bir eğri olsun. $\alpha' = \alpha'_n(t) = (\alpha'_1(t), \alpha'_2(t), \dots, \alpha'_n(t))$ eğrisine α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki hız vektörü denir [13].

Tanım 2.6 (Regüler eğri): $\alpha: I \rightarrow R^n$ eğrisi verilsin. Her $t \in I$ için $\alpha'(t) \neq 0$ ise α eğrisine regüler eğri(düzenli eğri) denir [13].

Tanım 2.7 (Birim hızlı eğri): $\alpha: I \rightarrow R^n, \alpha = \alpha(t)$ olmak üzere

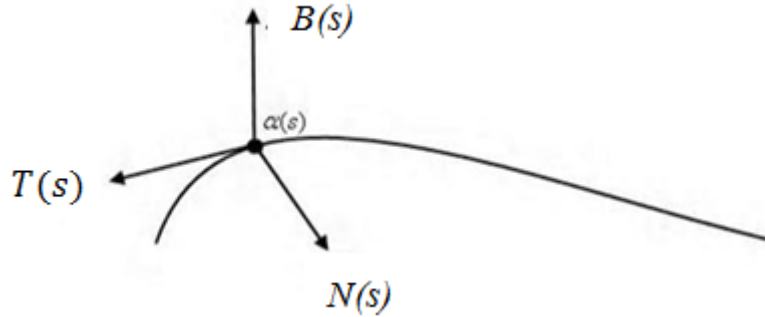
$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle} = 1 \quad (2.3)$$

ise α eğrisine birim hızlı eğri denir [13].

Tanım 2.8 (Frenet Vektörleri): $T(s), B(s), N(s)$ vektörlerine, $\alpha: I \rightarrow R^3$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet vektörleri denir.

$$\{T(s), B(s), N(s)\} \quad (2.4)$$

kümesine, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet çatısı denir. T, N, B vektör alanlarına, α eğrisi üstünde Frenet vektör alanları denir [13]. Bu vektör alanları Şekil 2.2’de gösterilmiştir.



Şekil 2.2. Frenet vektörleri

Tanım 2.9 (Serre-Frenet çatısı): $\alpha: I \rightarrow R^3$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki $T(s), N(s), B(s)$ vektörlerine Serre-Frenet vektör alanları denir. $\{T(s), N(s), B(s)\}$ ortonormal kümesine α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Serre-Frenet çatısı denir [13].

Teorem 2.10 (Eğrilik fonksiyonu): R^3 uzayındaki birim hızlı $\alpha: I \rightarrow R^3$ eğrisi için

$$\kappa: I \rightarrow R, \kappa(s) = \|T'(s)\| \quad (2.5)$$

fonksiyonuna, α eğrisinin eğrilik fonksiyonu denir. $\kappa(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğriliği denir [13].

Tanım 2.11 (Burulma Fonksiyonu): Birim hızlı $\alpha: I \rightarrow R^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B olmak üzere

$$\tau: I \rightarrow R$$

$$\tau(s) = -\langle B'(s), N(s) \rangle \quad (2.6)$$

fonksiyonuna α eğrisinin burulma fonksiyonu denir. $\tau(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki burulması denir [13].

Tanım 2.12 (Birim Teğet Vektörü): R^3 uzayında birim hızlı $\alpha: I \rightarrow R^3$ eğrisi için

$$T(s) = \alpha'(s) \quad (2.7)$$

eşitliğiyle belirli $T(s)$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki birim teğet vektörü denir [13].

Tanım 2.13 (Asli Normal Vektörü): R^3 uzayındaki birim hızlı $\alpha: I \rightarrow R^3$ eğrisi için

$$N(s) = \frac{1}{\kappa(s)} T'(s) \quad (2.8)$$

eşitliğiyle belirli $N(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki birinci asli normali denir. N vektör alanına, α eğrisinin asli normal vektör alanı denir [13].

Tanım 2.14 (Binormal Vektör): R^3 uzayındaki birim hızlı $\alpha: I \rightarrow R^3$ eğrisi için

$$B(s) = T(s) \times N(s) \quad (2.9)$$

eşitliğiyle tanımlı $B(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki binormali denir. B vektör alanına, α eğrisinin binormal vektör alanı denir [13].

Tanım 2.15 (Birim teğet vektör alanı): R^3 uzayında birim hızlı $\alpha: I \rightarrow R^3$ eğrisi için

$$T(s) = \alpha'(s) \quad (2.10)$$

eşitliğiyle belirli $T(s)$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki birim teğet vektörü denir [13].

Tanım 2.16 (Serre-Frenet türev formülleri): $\alpha: I \rightarrow R^3$ birim hızlı bir eğri olsun.

α eğrisinin Serre-Frenet vektör alanları T, N, B ise,

$$T' = \kappa N$$

$$N' = -\kappa T + \tau B \quad (2.11)$$

$$B' = -\tau N$$

dir. Matris formu da

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

dir. Bu formüllere Serre-Frenet türev formülleri denir [13].

Tanım 2.17 (Ortogonal küme ve Ortonormal küme): S, sıfırdan farklı vektörlerin kümesi olsun. Eğer S kümesinde herhangi iki vektör birbirine dik ise S kümesine ortogonaldır denir. S ortogonal iken S deki her bir vektör birim vektör ise S ye ortonormaldir denir [14].

Tanım 2.18 (Bishop çatı): Bishop çatısı veya paralel öteleme çatısı hareketli çatı tanımlamasına alternatif bir yaklaşımdır. Bir eğrinin bazı noktalarında eğrilik sıfırlanabilir yani eğrinin ikinci türevi sıfır olabilir. Bu durumda alternatif bir çatı olan Bishop çatısı oluşturulabilir.

Bir eğrinin Frenet çatısında bulunan T teğet vektörünü değiştirmeden teğet vektörünü değiştirmeden diğer asli normal ve binormal vektörleri belli bir açı ile döndürülerek Bishop çatı veya paralel öteleme çatısı adı verilen alternatif bir çatı oluşturulur. Buna göre Bishop çatısında T vektörü aynen alınır ve bu vektöre dik bir düzlemde bulunan herhangi iki elemanlı $\{M_1, M_2\}$ bazı seçilir. Bu iki vektörün türevleri sadece T vektörüne bağlıdır. Böylece oluşturulan $\{T, M_1, M_2\}$ çatısı dik bir çatı olur [20].

Buna göre Bishop veya paralel öteleme çatısı şu şekilde tanımlanabilir.

α , sıfırdan farklı κ eğrilikleriyle birlikte verilmiş birim hızlı bir uzay eğrisi ve M_1, T teğet vektörüne dik bir herhangi birim vektör olsun. Eğer $M_2 = T \times M_1$ olacak şekilde alınırsa, $\{T, M_1, M_2\}$ pozitif yönlendirilmiş ortonormal çatı olur ve bu çatıya Bishop çatı denir. Frenet ve Bishop çatıları arasındaki ilişki şu şekilde verilebilir.

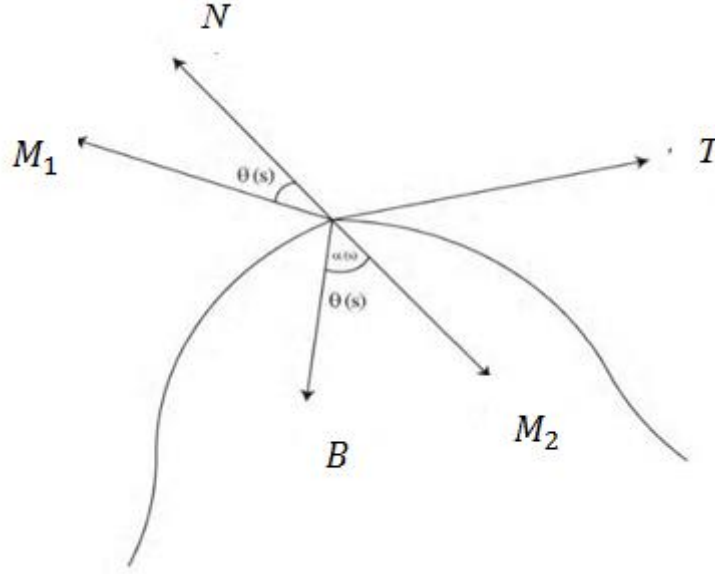
$$\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

$$T = T$$

$$N = \cos \theta M_1 + \sin \theta M_2 \quad (2.14)$$

$$B = -\sin \theta M_1 + \cos \theta M_2$$

Burada θ, N ile M_1 arasındaki açıdır [1]. Böylece tanımlı Bishop çatı elemanları Şekil 2.3'de gösterilmiştir.



Şekil 2.3. 3-boyutlu uzayda bishop vektörleri

Tanım 2.19 (İntegral eğrisi): X, M de diferensiyellenbilir vektör alanı olsun. Herhangi bir $t \in I$ için

$\alpha: I \rightarrow M$ diferensiyellenbilir eğrisi X in bir integral eğrisidir [12].

$$\alpha'(t) = X_{\alpha(t)} \quad (2.15)$$

Teorem 2.20: α , sıfırdan farklı κ eğriliği ile verilmiş birim hızlı bir eğri olsun. Bu durumda κ ve τ Frenet eğrilikleri, K_1 ve K_2 Bishop eğrilikleri olmak üzere, Bishop çatısı için türev formülleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} T'(s) &= K_1 M_1(s) + K_2(s) M_2(s) \\ M_1'(s) &= -K_1(s) T(s) \\ M_2'(s) &= -K_2(s) T(s) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Frenet ve Bishop çatıları arasındaki dönüşüm matrisi ise

$$\begin{bmatrix} T' \\ M_1' \\ M_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & K_1 & K_2 \\ -K_1 & 0 & 0 \\ -K_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

şeklinde olup bu matris anti-simetrik matristir. Frenet ve Bishop çatı arasındaki eğrilikler de

$$\kappa(s) = \sqrt{K_1^2(s) + K_2^2(s)} \quad (2.18)$$

$$\tau(s) = \frac{d\theta(s)}{d(s)}, \theta(s) = \arctan\left(\frac{K_2(s)}{K_1(s)}\right)$$

$$K_1(s) = \kappa(s) \cos \theta \quad (2.19)$$

$$K_2(s) = \kappa(s) \sin \theta$$

şeklinde olur [1].

Tanım 2.21: $\alpha: R^4 \rightarrow R$, 4-boyutlu Öklid uzayında keyfi bir eğri olmak üzere ,

$a=(a_1,a_2,a_3,a_4)$, $b=(b_1,b_2,b_3,b_4)$, $c=(c_1,c_2,c_3,c_4)$ R^4 uzayında birer eğri olsun .

a, b, c için dış çarpım

$$a \times b \times c = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} \quad (2.20)$$

ile verilir. Burada

$$e_1 \times e_2 \times e_3 = e_4$$

$$e_2 \times e_3 \times e_4 = e_1$$

$$e_3 \times e_4 \times e_1 = e_2$$

$$e_4 \times e_1 \times e_2 = e_3$$

$$e_3 \times e_2 \times e_1 = e_4$$

dır [10].

$T(s), N(s), B_1(s), B_2(s)$ vektörleri birim hızlı bir α eğrisi boyunca hareketli Frenet-Serret çatısıdır. Frenet-Serret türev formülleri şöyle verilir.

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

Burada T, N, B_1, B_2 sırasıyla α eğrisinin teğet, asli normal, 1.binormal ve 2.binormal vektör alanlarıdır. Bu $k_1(s), k_2(s), k_3(s)$ fonksiyonları sırasıyla α eğrisinin 1., 2. ve 3. eğrilikleridir.

Bishop (paralel öteleme) denklemleri R^4 uzayında aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{bmatrix} T' \\ M_1' \\ M_2' \\ M_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & K_1 & K_2 & K_3 \\ -K_1 & 0 & 0 & 0 \\ -K_2 & 0 & 0 & 0 \\ -K_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Burada $\{K_1, K_2, K_3\}$ eğrilikleri Bishop (paralel öteleme) çatısına göre α eğrisinin eğrilik fonksiyonlarıdır. $\{T, M_1, M_2, M_3\}$ kümesine α eğrisinin Bishop (paralel öteleme) çatısı denir [15,16]. Temel eğrilikler de aşağıdaki gibi verilir.

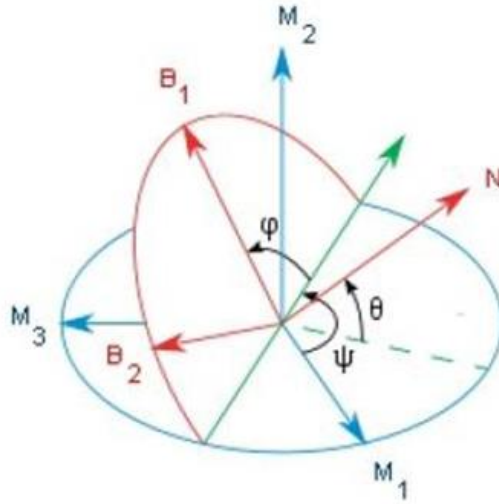
$$\begin{aligned}
K_1 &= k_1 \cos \theta \cos \psi \\
K_2 &= k_1 (-\cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \theta \cos \psi) \\
K_3 &= k_1 (-\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \sin \theta \cos \psi) \\
k_1 &= \sqrt{K_1^2 + K_2^2 + K_3^2} \\
k_2 &= -\psi' + \varphi' \sin \theta \\
k_3 &= \frac{\theta'}{\sin \psi'} \\
\varphi' \cos \theta + \theta' \cot \psi &= 0
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Burada

$$\begin{aligned}
\theta' &= \frac{k_3}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \\
\psi' &= -\left(k_2 + k_3 \frac{\sqrt{k_3^2 - (\theta')^2}}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \right) \\
\varphi' &= \frac{\sqrt{k_3^2 - (\theta')^2}}{\cos \theta}
\end{aligned} \tag{2.24}$$

şeklindedir.

Burada $\{K_1, K_2, K_3\}$ eğrilikleri Bishop (paralel öteleme) çatısına göre α eğrisinin temel eğrilik fonksiyonları ve k_1, k_2, k_3 fonksiyonları sırasıyla α eğrisinin Frenet Serret çatısına göre temel eğrilik fonksiyonlarıdır. Bishop çatı Şekil 2.4’de gösterilmiştir.



Şekil 2.4. 4-boyutlu uzayda bishop vektörleri

Tanım 2.22: $\alpha, \beta: I \rightarrow E^3$ iki eğri olsun. $\forall t \in I$ için $\beta(t) = F(\alpha(t))$ olacak şekilde E^3 te bir F izometrisi varsa bu iki eğriye kongruenttir (eşdeğerdir) denir [21].

Tanım 2.23 (B_2 – Rektifiyan Eğrileri): β, E^4 Te Bir Frenet eğrisi β nın B_2 – doğrultman eğrisi $\bar{\beta}$ olsun. Eğer $\bar{\beta}$ eğrisinin konum vektörü daima β nın asli normalinin ortogonal tümleyeninde bulunuyorsa, yani $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$\bar{\beta} = \lambda_1 T + \lambda_2 B_1 + \lambda_3 B_2 \quad (2.25)$$

oluyorsa $\bar{\beta}$ eğrisine B_2 – rektifiyan eğrisi denir [22].

Teorem 2.24: $\bar{\beta}, \bar{k}_1(s), \bar{k}_2(s), \bar{k}_3(s)$ eğriliklerine sahip Frenet eğrisi olsun. $\bar{\beta}$ bir B_2 – rektifiyan eğriye kongruenttir gerek ve yeter şart

$$\left(\frac{c\bar{k}_3}{\bar{k}_2}\right)' + \left(s + c \int \frac{\bar{k}_1\bar{k}_3}{\bar{k}_2} ds\right) \bar{k}_1 = 0, \quad c \in R \quad (2.26)$$

dir [22].

İspat : ($\Rightarrow$) $\bar{\beta}$ Frenet eğrisi B_2 – rektifiyan eğrisi olsun. Tanım gereğince,

$$\bar{\beta} = \lambda_1 T + \lambda_2 B_1 + \lambda_3 B_2$$

yazılır. Ayrıca β eğrisinin B_2 – doğrultman eğrisi $\bar{\beta}$ ise

$$T = \bar{B}_2, \quad B_1 = \bar{N}, \quad B_2 = \bar{T}$$

olduğunu biliyoruz. Bu eşitlikler yerine yazılırsa

$$\bar{\beta} = \lambda_1 \bar{B}_2 + \lambda_2 \bar{N} + \lambda_3 \bar{T}$$

elde edilir. Her iki tarafın türevi alınırsa,

$$\bar{T} = \lambda'_1 \bar{B}_2 + \lambda_1 (-\bar{k}_3 \bar{B}_1) + \lambda'_2 \bar{N} + \lambda_2 (-\bar{k}_1 \bar{T} + \bar{k}_2 \bar{B}_1) + \lambda'_3 \bar{T} + \lambda_3 (\bar{k}_1 \bar{N})$$

olup

$$\{\lambda'_3 - \lambda_2 \bar{k}_1 = 1, \quad \lambda'_2 - \lambda_3 \bar{k}_1 = 0, \quad -\lambda'_1 \bar{k}_3 + \lambda_2 \bar{k}_2 = 0, \quad \lambda'_1 = 0$$

elde edilir. Burada $\lambda'_1 = 0$ eşitliğinden $\lambda_1 = c(\text{sabit})$ olur. Ayrıca, $-\lambda'_1 \bar{k}_3 + \lambda_2 \bar{k}_2 = 0$

eşitliğinden $\lambda_2 = \frac{c\bar{k}_3}{\bar{k}_2}$ olup, $\lambda'_3 - \lambda_2 \bar{k}_1 = 1$ denkleminde yerine yazılırsa $\lambda_3 = s + c \int \frac{\bar{k}_1 \bar{k}_3}{\bar{k}_2} ds$ elde

edilir. Bulunan değerler $\lambda'_2 - \lambda_3 \bar{k}_1 = 0$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\left(\frac{c\bar{k}_3}{\bar{k}_2}\right)' + \left(s + c \int \frac{\bar{k}_1 \bar{k}_3}{\bar{k}_2} ds\right) \bar{k}_1 = 0$$

elde edilir.

($\Leftrightarrow$) E^4 , $\bar{k}_1$, $\bar{k}_2$, $\bar{k}_3$ eğriliklerine sahip ve eğrilikleri denklem (2.26) sağlayan keyfi bir $\bar{\beta}$ eğrisi alalım.

$$X = \bar{\beta} - c\bar{B}_2 - \frac{c\bar{k}_3}{\bar{k}_2} \bar{N} - \left(s + c \int \frac{\bar{k}_1 \bar{k}_3}{\bar{k}_2} ds\right) \bar{N}$$

eşitliğini sağlayan $X \in E^4$ vektörünü göz önüne alalım.

$$\begin{aligned} X &= \bar{\beta} - c\bar{B}_2 - \frac{c\bar{k}_3}{\bar{k}_2} \bar{N} - \frac{c\bar{k}_3}{\bar{k}_2} (-\bar{k}_1 \bar{T} + \bar{k}_2 \bar{B}_1) - \left(1 + c \frac{\bar{k}_1 \bar{k}_3}{\bar{k}_2}\right) \bar{T} \\ &\quad - \left(s + c \int \frac{\bar{k}_1 \bar{k}_3}{\bar{k}_2} ds\right) \bar{k}_1 \bar{N} \\ X' &= \left\{ -\left(\frac{c\bar{k}_3}{\bar{k}_2}\right)' - \left(s + c \int \frac{\bar{k}_1 \bar{k}_3}{\bar{k}_2} ds\right) \bar{k}_1 \right\} \bar{N} = \vec{0} \end{aligned}$$

olacağından X bir sabit vektördür. Böylece

$$\bar{\beta} = c\bar{B}_2 + \frac{c\bar{k}_3}{\bar{k}_2} \bar{N} + \left(s + c \int \frac{\bar{k}_1 \bar{k}_3}{\bar{k}_2} ds\right) \bar{T} + X$$

yani $\bar{\beta}$ eğrisi X sabit vektörü tarafından belirlenen öteleme ile bir B_2 - rektifiyan eğriye kongruentir.

Tanım 2.25 (Helis): R^3 uzayında bir α eğrisinin birim teğet vektör alanı T olsun. T vektör alanı, belirli bir u vektörü ile sabit açı yapıyorsa α eğrisine bir helis adı verilir [22].

Tanım 2.26 (Slant Helis): $\alpha: I \rightarrow R^3$ birim vektörü $N_1(s)$ olan düzenli eğrisinin belirli u sabit vektörüyle yaptığı açı θ olsun. Her $s \in I$

$$\langle N_1(s), u \rangle = \cos \theta \quad (2.27)$$

ise α eğrisi bir slant helis adını alır [22].



3. 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA BISHOP ÇATIYA GÖRE İLİŞKİLİ EĞRİLER

Bu bölümde 3-boyutlu Öklid uzayında Bishop çatıya göre bazı ilişkili eğriler verilecektir.

Tanım 3.1: β , E^3 te bir Frenet eğrisi olsun. Bishop çatıya göre β nın M_1 in bir integral eğrisi M_1 - doğrultman eğrisi adını alır. Öyleyse $u(s) = w(s) = 0, v(s) = 1$ olmak üzere bir M_1 - doğrultman eğrisi

$$V(s) = u(s)T(s) + v(s)M_1(s) + w(s)M_2(s) \quad (3.1)$$

nin bir integral eğrisidir.

Tanım 3.2: β , E^3 te bir Frenet eğrisi olsun. Bishop çatıya göre β nın M_2 nin bir integral eğrisi M_2 - doğrultman eğrisi adını alır. Öyleyse $u(s) = w(s) = 0, v(s) = 1$ olmak üzere bir M_2 -doğrultman eğrisi (3.1) in bir integral eğrisidir.

Teorem 3.3: β , E^3 te bir Frenet eğrisi ve $\bar{\beta}$ (3.1) in bir integral eğrisi olsun. Buna göre ve $\bar{\beta}$ nın M_1 -doğrultman eğrisi β ya eşittir gerek ve yeter şart

$$u(s) = 0, v(s) = -1, w(s) = 0 \quad (3.2)$$

dır.

Tanım 3.4: β nın Bishop çatıya göre M_1 in bir integral eğrisi M_1 - donör eğrisi adını alır.

Teorem 3.5: β , E^3 te κ eğriliği ve τ burulmasıyla verilmiş bir Frenet eğrisi ve $\bar{\beta}$ $\bar{\kappa}$ eğriliği ve $\bar{\tau}$ burulmasıyla verilmiş β nın bir M_1 - doğrultman eğrisi olsun. Böylece $\bar{\beta}$ nın Frenet çatısı

$$\bar{T}(s) = M_1(s), \bar{N}(s) = -T(s), \bar{B}(s) = M_2(s)$$

ve $\bar{\beta}$ nın $\bar{\kappa}$ eğriliği ve $\bar{\tau}$ burulması

$$\bar{\kappa} = k_1(s) \text{ ve } \bar{\tau} = -k_2(s)$$

şeklinde verilir.

İspat: (3.1) tanımından

$$\bar{\beta}' = \bar{T} = M_1 \quad (3.3)$$

yazabiliriz. (3.3) ün türevinin normunu alırsak $k_1 > 0$ için

$$\bar{\kappa} = k_1(s) \quad (3.4)$$

elde ederiz. Diğer taraftan

$$\bar{N}(s) = -T(s), \bar{B}(s) = M_2(s)$$

yazılır. $\bar{B}(s) = M_2(s)$ olduğundan, $\bar{B}'(s) = -k_2(s)$ ve

$$\bar{\tau} = -\langle \bar{B}', \bar{N} \rangle = -k_2 \quad (3.5)$$

elde edilir.

Sonuç 3.6: β, E^3 te κ eğriliği ve τ burulmasıyla verilmiş bir Frenet eğrisi ve $\bar{\beta}$ da $\bar{\kappa}$ eğriliği ve $\bar{\tau}$ burulmasıyla verilmiş β nın bir M_1 - doğrultman eğrisi olsun. Buna göre $\bar{\beta}$ nın Bishop çatısı

$$\bar{T}(s) = M_1(s),$$

$$\bar{M}_1(s) = -\cos\left(\int k_2(s) ds\right)T(s) + \sin\left(\int k_2(s) ds\right)M_2(s),$$

$$\bar{M}_2(s) = \sin\left(\int k_2(s) ds\right)T(s) + \cos\left(\int k_2(s) ds\right)M_2(s),$$

Teorem 3.7: Eğer E^3 te bir β eğrisi $\bar{\kappa}$ eğriliği ve $\bar{\tau}$ burulmasıyla verilmiş $\bar{\beta}$ nın bir M_1 - donör eğrisi ise β eğrisinin κ eğriliği ve τ burulması

$$\kappa(s) = \sqrt{\bar{\kappa}^2(s) + \bar{\tau}^2(s)} \quad \tau(s) = -\frac{\bar{\kappa}^2(s)}{\bar{\kappa}^2(s) + \bar{\tau}^2(s)} \left(\frac{\bar{\tau}(s)}{\bar{\kappa}(s)}\right)',$$

şeklinde verilir.

İspat. (3.4) ve (3.5) karelerini alıp taraf tarafa toplayıp karekökleri alınır, o zaman

$$\kappa(s) = \sqrt{\bar{\kappa}^2(s) + \bar{\tau}^2(s)}$$

elde edilir.

$\tau(s)$ ispatı (3.5) ten aşıkardır.

Sonuç 3.8: β, E^3 te κ eğrilik ve τ burulmasıyla verilmiş bir Frenet eğrisi ve $\bar{\beta}$ da $\bar{\kappa}$ eğriliği ve $\bar{\tau}$ burulmasıyla verilmiş β nın bir M_1 - Doğrultman eğrisi olsun. Buna göre

$$\frac{\bar{\tau}}{\bar{\kappa}} = -\tan \theta(s)$$

$$\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = -\frac{\bar{\kappa}^2(s)}{(\bar{\kappa}^2(s) + \bar{\tau}^2(s))^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\bar{\tau}(s)}{\bar{\kappa}(s)}\right)',$$

olur.

Teorem 3.9: β, E^3 te bir Frenet eğrisi ve $\bar{\beta}$ (3.1) in bir integral eğrisi olsun. Buna göre ve $\bar{\beta}$ nın M_2 -doğrultman eğrisi β a eşittir gerek ve yeter şart

$$u(s) = a, v(s) = -\sqrt{1 - a^2 \sin \theta(s)}, w(s) = \sqrt{1 - a^2 \cos \theta(s)}.$$

Tanım 3.10: Bir integral eğrisi olan

$$aT(s) - \sqrt{1 - a^2 \sin \theta(s)} + \sqrt{1 - a^2 \cos \theta(s)}$$

eğrisine β nın Bishop çatıya göre M_2 - donör eğrisi denir.

Teorem 3.11: β, E^3 te κ eğriliği ve τ burulmasıyla verilmiş bir Frenet eğrisi ve $\bar{\beta}$ da $\bar{\kappa}$ eğriliği ve $\bar{\tau}$ burulmasıyla verilmiş β nın bir M_2 - doğrultman eğrisi olsun. Buna göre $\bar{\kappa}$ eğriliği ve $\bar{\tau}$ burulması

$$\bar{\kappa}(s) = k_2(s) \text{ ve } \bar{\tau}(s) = k_1(s)$$

ile verilir.

Teorem 3.12: β, E^3 te κ eğriliği ve τ burulmasıyla verilmiş bir Frenet eğrisi ve $\bar{\beta}$ da $\bar{\kappa}$ eğriliği ve $\bar{\tau}$ burulmasıyla verilmiş β nın bir M_2 - doğrultman eğrisi olsun. Buna göre $\bar{\beta}$ nın Bishop çatısı

$$\bar{T}(s) = M_2(s),$$

$$\bar{M}_1(s) = -\cos\left(\int k_1(s) ds\right)T(s) + \sin\left(\int k_1(s) ds\right)M_1(s),$$

$$\bar{M}_2(s) = -\sin\left(\int k_1(s) ds\right)T(s) - \cos\left(\int k_2(s) ds\right)M_1(s),$$

Sonuç 3.13: β, E^3 te bir eğri ve $\bar{\beta}, \bar{\kappa}$ eğriliği ve $\bar{\tau}$ burulmasıyla verilmiş β nın bir M_2 - donör eğrisi ise β nın κ eğriliği ve τ burulması

$$\kappa(s) = \sqrt{\bar{\kappa}^2(s) + \bar{\tau}^2(s)} \quad \tau(s) = \frac{\bar{\tau}^2(s)}{\bar{\kappa}^2(s) + \bar{\tau}^2(s)} \left(\frac{\bar{\kappa}(s)}{\bar{\tau}(s)} \right)',$$

biçiminde verilir.

Sonuç 3.14: β, E^3 te κ eğriliği ve τ burulmasıyla verilmiş bir Frenet eğrisi ve $\bar{\beta}$ da $\bar{\kappa}$ eğriliği ve $\bar{\tau}$ burulmasıyla verilmiş β nın bir M_1 - doğrultman eğrisi olsun. Öyleyse

$$\frac{\bar{\tau}}{\bar{\kappa}} = \cot \theta(s),$$

$$\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = \frac{\bar{\tau}^2(s)}{(\bar{\kappa}^2(s) + \bar{\tau}^2(s))^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\bar{\kappa}(s)}{\bar{\tau}(s)} \right)',$$

Örnek 3.15: 3-boyutlu Öklid uzayında Euler spirali olarak adlandırılan

$\beta(s) = \left(\frac{3}{5} \int \sin(s^2 + 1) ds, \int \cos(s^2 + 1) ds, \frac{4}{5}s \right)$ eğrisini ele alalım. $\beta(s)$ nin Frenet çatı aparatları

$$T(s) = \left(\frac{3}{5} \sin(s^2 + 1), \cos(s^2 + 1), \frac{4}{5} \right),$$

$$N(s) = (\cos(s^2 + 1), -\sin(s^2 + 1), 0),$$

$$B(s) = \left(\frac{4}{5} \sin(s^2 + 1), \frac{4}{5} \cos(s^2 + 1), -\frac{3}{5} \right)$$

$$\kappa(s) = \frac{6s}{5}, \tau(s) = -\frac{8s}{5}$$

Bishop aparatlarını elde etmek için $\theta = -\int \tau ds = \frac{4s^2}{5}$ hesaplırsak eğrinin dönüşüm matrisi

$$\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{4s^2}{5}\right) & -\sin\left(\frac{4s^2}{5}\right) \\ 0 & \sin\left(\frac{4s^2}{5}\right) & \cos\left(\frac{4s^2}{5}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}$$

şeklinde olup β nin bishop aparatlarını

$$T(s) = T(s),$$

$$M_1(s) = \cos\left(\frac{4s^2}{5}\right) N(s) + \sin\left(\frac{4s^2}{5}\right) B(s)$$

$$M_2(s) = -\sin\left(\frac{4s^2}{5}\right) N(s) + \cos\left(\frac{4s^2}{5}\right) B(s)$$

$$K_1(s) = \frac{6s}{5} \cos\left(\frac{4s^2}{5}\right)$$

$$K_2(s) = -\frac{6s}{5} \sin\left(\frac{4s^2}{5}\right)$$

biçiminde elde ederiz[19].

Örnek 3.16: 3-boyutlu Öklid uzayında bir eğri

$$\beta = \left(\cos s \cos \sqrt{17}s + \sin s \sin \sqrt{17}s, \cos s \sin \sqrt{17}s + \sin s \cos \sqrt{17}s, \frac{4}{\sqrt{17}} \sin s \right)$$

olsun. Bu eğrinin Frenet eğrilik fonksiyonları

$$\kappa(s) = \frac{1}{\cos s}, \tau(s) = -\frac{1}{4 \cos s}$$

ve Frenet çatısı

$$T(s) = \left(-\frac{4}{\sqrt{17}} \sin \sqrt{17}s, -\frac{4}{\sqrt{17}} \cos \sqrt{17}s, \frac{1}{17} \right),$$

$$N(s) = (-\cos \sqrt{17}s, -\sin \sqrt{17}s, 0),$$

$$B(s) = \left(-\frac{1}{\sqrt{17}} \sin \sqrt{17}s, -\frac{1}{\sqrt{17}} \cos \sqrt{17}s, -\frac{4}{17} \right)$$

Bishop çatısını elde etmek için $\theta = -\int \tau ds = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{1+\sin s}{\cos s} \right)$ alırsak dönüşüm matrisimiz

$$\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \frac{1}{4} \ln \left(\frac{1+\sin s}{\cos s} \right) & -\sin \frac{1}{4} \ln \left(\frac{1+\sin s}{\cos s} \right) \\ 0 & \sin \frac{1}{4} \ln \left(\frac{1+\sin s}{\cos s} \right) & \cos \frac{1}{4} \ln \left(\frac{1+\sin s}{\cos s} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}$$

olur ve eğrinin Bishop aparatlarını

$$T(s) = T(s),$$

$$M_1(s) = \cos \frac{1}{4} \ln \left(\frac{1+\sin s}{\cos s} \right) N(s) + \sin \frac{1}{4} \ln \left(\frac{1+\sin s}{\cos s} \right) B(s)$$

$$M_2(s) = -\sin \frac{1}{4} \ln \left(\frac{1+\sin s}{\cos s} \right) N(s) + \cos \frac{1}{4} \ln \left(\frac{1+\sin s}{\cos s} \right) B(s)$$

$$K_1(s) = \frac{1}{\cos s} \cos \frac{1}{4} \ln \left(\frac{1+\sin s}{\cos s} \right)$$

$$K_2(s) = -\frac{6s}{5} \sin \frac{1}{4} \ln \left(\frac{1+\sin s}{\cos s} \right)$$

biçiminde elde ederiz.

4. 4-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA BISHOP ÇATIYA GÖRE BAZI İLİŞKİLİ EĞRİLER

Bu bölümde 4-boyutlu Öklid uzayında Bishop çatıya göre bazı ilişkili eğriler verilecektir.

4.1. M_1 – Doğrultman Eğrileri

Teorem 4.1: β, E^4 te k_1, k_2, k_3 eğrilikli Frenet eğrisi ve $\bar{\beta}, \bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3$ eğrilikli β nın bir M_1 - doğrultman eğrisi olsun. O zaman $\bar{\beta}$ nın Frenet çatısı

$$\bar{T} = M_1, \quad (4.1)$$

$$\bar{N} = -T, \quad (4.2)$$

$$\bar{B}_1 = \frac{1}{\sqrt{K_3^2 + K_2^2}} (K_2 M_2 - K_3 M_3), \quad (4.3)$$

$$\bar{B}_2 = \frac{1}{\sqrt{K_3^2 + K_2^2}} (K_3 M_2 - K_2 M_3), \quad (4.4)$$

$$\bar{k}_1 = K_1, \quad (4.5)$$

$$\bar{k}_2 = -\frac{\sqrt{K_3^2 + K_2^2}}{K_1}, \quad (4.6)$$

$$\bar{k}_3 = \frac{1}{K_3^2 + K_2^2} (K_3 K_2' - K_2 K_3') \quad (4.7)$$

İspat 4.1: $\{\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}_1, \bar{B}_2, \bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3\}$ $\bar{\beta}$ eğrisinin Frenet aparatları olsun. β nın M_1 - doğrultman eğrisi $\bar{\beta}$ olduğundan

$$\bar{\beta}' = \bar{T} = M_1 \Rightarrow \bar{T}' = \bar{M}_1'$$

$$= -K_1 T$$

bulunur. Böylece M_1 - doğrultman eğrisinin 1.eğriliği

$$\|\bar{T}'\| = \bar{k}_1 = \sqrt{\langle -K_1 T, -K_1 T \rangle}$$

$$\Rightarrow \bar{k}_1 = K_1$$

şeklinde olur. Böylece β nın M_1 - doğrultman eğrisinin asli normal vektör alanı

$$\bar{N} = \frac{\bar{\beta}''}{\|\bar{\beta}''\|} = \frac{\bar{T}'}{\bar{k}_1} = \frac{M_1'}{K_1} = \frac{-K_1 T}{K_1} = -T$$

şeklindedir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\bar{\beta}' \times \bar{\beta}'' \times \bar{\beta}''' &= \begin{vmatrix} T & M_1 & M_2 & M_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_1 & K_2 & K_3 \end{vmatrix} \\
&= K_3 M_2 - K_2 M_3 \\
\|\bar{\beta}' \times \bar{\beta}'' \times \bar{\beta}'''\| &= \sqrt{\langle K_3 M_2 - K_2 M_3, K_3 M_2 - K_2 M_3 \rangle} \\
&= \sqrt{K_3^2 + K_2^2}
\end{aligned}$$

eşitliklerinden M_1 - doğrultman eğrisinin ikinci binormal vektör alanı

$$\bar{B}_2 = \frac{\bar{\beta}' \times \bar{\beta}'' \times \bar{\beta}'''}{\|\bar{\beta}' \times \bar{\beta}'' \times \bar{\beta}'''\|} = \frac{1}{\sqrt{K_3^2 + K_2^2}} (K_3 M_2 - K_2 M_3)$$

olarak bulunur. $\bar{B}_1(s) = \bar{B}_2(s) \times \bar{T}(s) \times \bar{N}(s)$ eşitliği kullanılırsa M_1 - doğrultman eğrisinin birinci binormal vektör alanı

$$\begin{aligned}
\bar{B}_1 &= \frac{1}{\sqrt{K_3^2 + K_2^2}} \begin{vmatrix} T & M_1 & M_2 & M_3 \\ 0 & 0 & K_3 & -K_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{K_3^2 + K_2^2}} (-K_2 M_2 - K_3 M_3)
\end{aligned}$$

şeklinde. O halde M_1 - doğrultman eğrisinin ikinci eğriliği

$$\begin{aligned}
\bar{k}_2 &= \frac{\langle \bar{B}_1, \bar{\beta}'''\rangle}{\bar{k}_1} = \frac{1}{K_1 \sqrt{K_3^2 + K_2^2}} (\langle -K_2 M_2 - K_3 M_3, K_1 M_1 + K_2 M_2 + K_3 M_3 \rangle) \\
&= \frac{1}{K_1 \sqrt{K_3^2 + K_2^2}} [-K_3^2 - K_2^2] \\
&= -\frac{K_3^2 + K_2^2}{K_1 \sqrt{K_3^2 + K_2^2}} = -\frac{\sqrt{K_3^2 + K_2^2}}{K_1}
\end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned}
\bar{\beta}^4 &= (K_1 M_1 + K_2 M_2 + K_3 M_3)' \\
&= K_1' M_1 + K_1 M_1' + K_2' M_2 + K_2 M_2' + K_3' M_3 + K_3 M_3' \\
&= K_1' M_1 - K_1^2 T + K_2' M_2 - K_2^2 T + K_3' M_3 - K_3^2 T \\
&\Rightarrow \bar{\beta}^4 = K_1' M_1 + K_2' M_2 + K_3' M_3 - (K_1^2 + K_2^2 + K_3^2) T
\end{aligned}$$

olduğundan ve

$$\bar{k}_3 = \frac{\langle \bar{B}_2, \bar{\beta}^4 \rangle}{\bar{k}_1, \bar{k}_2}$$

eşitliklerinden M_1 -doğrultman eğrisinin üçüncü eğriliği

$$\bar{k}_3 = \frac{\left\langle \frac{1}{\sqrt{K_3^2 + K_2^2}} (K_3 M_2 - K_2 M_3), K_1' M_1 + K_2' M_2 + K_3' M_3 - (K_1^2 + K_2^2 + K_3^2) T \right\rangle}{-K_1 \frac{\sqrt{K_3^2 + K_2^2}}{K_1}}$$

$$= \frac{1}{K_3^2 + K_2^2} (K_3 K_2' - K_2 K_3')$$

biçiminde elde edilir.

4.2. M_2 – Doğrultman Eğrileri

Teorem 4.2: β , E^4 te k_1, k_2, k_3 eğrilikli Frenet eğrisi ve $\bar{\beta}, \bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3$ eğrilikli β nın bir M_2 - doğrultman eğrisi olsun. O zaman $\bar{\beta}$ nın Frenet çatısı

$$\bar{T} = M_2, \quad (4.8)$$

$$\bar{N} = -T, \quad (4.9)$$

$$\bar{B}_1 = \frac{1}{\sqrt{K_3^2 + K_1^2}} (K_1 M_1 + K_3 M_3), \quad (4.10)$$

$$\bar{B}_2 = \frac{1}{\sqrt{K_3^2 + K_1^2}} (-K_3 M_1 + K_1 M_3) \quad (4.11)$$

$$, \bar{k}_1 = K_2 \quad (4.12)$$

$$\bar{k}_2 = -\frac{\sqrt{K_3^2 + K_1^2}}{K_2}, \quad (4.13)$$

$$\bar{k}_3 = -\frac{1}{K_3^2 + K_1^2} (K_3 K_1' - K_1 K_3') \quad (4.14)$$

İspat 4.2: $\{\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}_1, \bar{B}_2, \bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3\}$ $\bar{\beta}$ eğrisinin Frenet aparatları olsun. β nın M_1 - doğrultman eğrisi $\bar{\beta}$ olduğundan

$$\bar{\beta}' = \bar{T} = M_2 \Rightarrow \bar{T}' = \bar{M}_2'$$

$$= -K_2 T$$

bulunur. Böylece M_2 - doğrultman eğrisinin 1.eğriliği

$$\|\bar{T}'\| = \bar{k}_1 = \sqrt{\langle -K_2 T, -K_2 T \rangle}$$

$$\Rightarrow \bar{k}_1 = K_2$$

şeklinde olur. Böylece β nun M_2 - doğrultman eğrisinin asli normal vektör alanı

$$\bar{N} = \frac{\bar{\beta}''}{\|\bar{\beta}''\|} = \frac{\bar{T}'}{\bar{k}_1} = \frac{M_2}{K_2} = \frac{-K_2 T}{K_2} = -T$$

şeklindedir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \bar{\beta}' \times \bar{\beta}'' \times \bar{\beta}''' &= \begin{vmatrix} T & M_1 & M_2 & M_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_1 & K_2 & K_3 \end{vmatrix} \\ &= -K_3 M_1 + K_1 M_3 \\ \|\bar{\beta}' \times \bar{\beta}'' \times \bar{\beta}'''\| &= \sqrt{\langle -K_3 M_1 + K_1 M_3, K_3 M_1 - K_1 M_3 \rangle} \\ &= \sqrt{K_3^2 + K_1^2} \end{aligned}$$

eşitliklerinden M_2 - doğrultman eğrisinin ikinci binormal vektör alanı

$$\bar{B}_2 = \frac{\bar{\beta}' \times \bar{\beta}'' \times \bar{\beta}'''}{\|\bar{\beta}' \times \bar{\beta}'' \times \bar{\beta}'''\|} = \frac{1}{\sqrt{K_3^2 + K_1^2}} (-K_3 M_1 + K_1 M_3)$$

olarak bulunur. $\bar{B}_1(s) = \bar{B}_2(s) \times \bar{T}(s) \times \bar{N}(s)$ eşitliği kullanılırsa M_2 - doğrultman eğrisinin birinci binormal vektör alanı

$$\begin{aligned} \bar{B}_1 &= \frac{1}{\sqrt{K_3^2 + K_1^2}} \begin{vmatrix} T & M_1 & M_2 & M_3 \\ 0 & K_3 & 0 & -K_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{K_3^2 + K_1^2}} (K_1 M_1 + K_3 M_3) \end{aligned}$$

şeklindedir. O halde M_2 - doğrultman eğrisinin ikinci eğriligi

$$\begin{aligned} \bar{k}_2 &= \frac{\langle \bar{B}_1, \bar{\beta}'''\rangle}{\bar{k}_1} = \frac{1}{K_2 \sqrt{K_3^2 + K_1^2}} (\langle K_1 M_1 + K_3 M_3, K_1 M_1 + K_2 M_2 + K_3 M_3 \rangle) \\ &= \frac{1}{K_1 \sqrt{K_3^2 + K_1^2}} [K_3^2 + K_1^2] \\ &= \frac{K_3^2 + K_1^2}{K_2 \sqrt{K_3^2 + K_1^2}} = \frac{\sqrt{K_3^2 + K_1^2}}{K_2} \end{aligned}$$

olup $\bar{\beta}^4$ ve $\bar{k}_3 = \frac{\langle \bar{B}_2, \bar{\beta}^4 \rangle}{\bar{k}_1, \bar{k}_2}$ eşitliklerinden M_2 - doğrultman eğrisinin 3.eğriligi

$$\begin{aligned}\bar{k}_3 &= \frac{\left\langle \frac{1}{\sqrt{K_3^2 + K_1^2}}(-K_3M_1 + K_1M_3), K_1'M_1 + K_2'M_2 + K_3'M_3 - (K_1^2 + K_2^2 + K_3^2)T \right\rangle}{K_2 \frac{\sqrt{K_3^2 + K_1^2}}{K_2}} \\ &= \frac{1}{K_3^2 + K_1^2}(-K_3K_1' + K_1K_3')\end{aligned}$$

biçiminde elde edilir.

4.3. M_3 - Doğrultman Eğrileri

Teorem 4.3: β, E^4 te k_1, k_2, k_3 eğrilikli Frenet eğrisi ve $\bar{\beta}, \bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3$ eğrilikli β nın bir M_3 - doğrultman eğrisi olsun. O zaman $\bar{\beta}$ nın Frenet çatısı

$$\bar{T} = M_3 \quad (4.15)$$

$$\bar{N} = -T, \quad (4.16)$$

$$\bar{B}_1 = \frac{1}{\sqrt{K_1^2 + K_2^2}}(K_1M_1 - K_2M_2), \quad (4.17)$$

$$\bar{B}_2 = \frac{1}{\sqrt{K_1^2 + K_2^2}}(K_1M_2 - K_2M_1), \quad (4.18)$$

$$\bar{k}_1 = K_3 \quad (4.19)$$

$$\bar{k}_2 = -\frac{\sqrt{K_1^2 + K_2^2}}{K_3}, \quad (4.20)$$

$$\bar{k}_3 = -\frac{1}{K_1^2 + K_2^2}(K_2K_1' - K_1K_2') \quad (4.21)$$

İspat 4.3: $\{\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}_1, \bar{B}_2, \bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3\}$ $\bar{\beta}$ eğrisinin Frenet aparatları olsun. β nın M_3 - doğrultman eğrisi $\bar{\beta}$ olduğundan

$$\bar{\beta}' = \bar{T} = M_3 \Rightarrow \bar{T}' = \bar{M}_3'$$

$$= -K_3T \text{ bulunur. Böylece}$$

M_3 - doğrultman eğrisinin 1.eğriliği

$$\|\bar{T}'\| = \bar{k}_1 = \sqrt{\langle -K_3T, -K_3T \rangle}$$

$$\Rightarrow \bar{k}_1 = K_3$$

şeklinde olur. Böylece β nın M_1 - doğrultman eğrisinin asli normal vektör alanı

$$\bar{N} = \frac{\bar{\beta}'''}{\|\bar{\beta}'''\|} = \frac{\bar{T}'}{\bar{k}_1} = \frac{M_3}{K_3} = \frac{-K_3 T}{K_3} = -T$$

şeklindedir. Ayrıca

$$\bar{\beta}' \times \bar{\beta}'' \times \bar{\beta}''' = \begin{vmatrix} T & M_1 & M_2 & M_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_1 & K_2 & K_3 \end{vmatrix}$$

$$= K_2 M_1 - K_1 M_2$$

$$\|\bar{\beta}' \times \bar{\beta}'' \times \bar{\beta}'''\| = \sqrt{\langle K_2 M_1 - K_1 M_2, K_2 M_1 - K_1 M_2 \rangle}$$

$$= \sqrt{K_1^2 + K_2^2}$$

eşitliklerinden M_3 - doğrultman eğrisinin ikinci binormal vektör alanı

$$\bar{B}_2 = \frac{\bar{\beta}' \times \bar{\beta}'' \times \bar{\beta}'''}{\|\bar{\beta}' \times \bar{\beta}'' \times \bar{\beta}'''\|} = \frac{1}{\sqrt{K_1^2 + K_2^2}} (K_2 M_1 - K_1 M_2)$$

olarak bulunur. $\bar{B}_1(s) = \bar{B}_2(s) \times \bar{T}(s) \times \bar{N}(s)$ eşitliği kullanılırsa M_3 - doğrultman eğrisinin birinci binormal vektör alanı

$$\bar{B}_1 = \frac{1}{\sqrt{K_1^2 + K_2^2}} \begin{vmatrix} T & M_1 & M_2 & M_3 \\ 0 & K_2 & -K_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{K_1^2 + K_2^2}} (K_1 M_1 - K_2 M_2)$$

şeklindedir. O halde M_1 - doğrultman eğrisinin ikinci eğriliği

$$\bar{k}_2 = \frac{\langle \bar{B}_1, \bar{\beta}'''\rangle}{\bar{k}_1} = \frac{1}{K_3 \sqrt{K_1^2 + K_2^2}} (\langle -K_1 M_1 - K_2 M_2, K_1 M_1 + K_2 M_2 + K_3 M_3 \rangle)$$

$$= \frac{1}{K_3 \sqrt{K_1^2 + K_2^2}} [-K_1^2 - K_2^2]$$

$$= -\frac{K_1^2 + K_2^2}{K_3 \sqrt{K_1^2 + K_2^2}} = -\frac{\sqrt{K_1^2 + K_2^2}}{K_3}$$

olup $\bar{\beta}^4$ ve $\bar{k}_3 = \frac{\langle \bar{B}_2, \bar{\beta}^4 \rangle}{\bar{k}_1, \bar{k}_2}$ eşitliklerinden M_3 - doğrultman eğrisinin 3. eğriliği

$$\bar{k}_3 = \frac{\left\langle \frac{1}{\sqrt{K_1^2 + K_2^2}} (K_2 M_1 - K_1 M_2), K_1' M_1 + K_2' M_2 + K_3' M_3 - (K_1^2 + K_2^2 + K_3^2) T \right\rangle}{-K_3 \frac{\sqrt{K_1^2 + K_2^2}}{K_3}}$$

$$= -\frac{1}{K_1^2 + K_2^2} (K_2 K_1' - K_1 K_2')$$

Örnek 4.5: Birim hızlı

$$\beta(s) = \left(\sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin s, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos s \right)$$

eğrisi yarıçapı 1 olan bir küresel eğri olsun. β nın Frenet eğrilik fonksiyonları

$$k_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, k_2 = \frac{\sqrt{3}}{6}, k_3 = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

ve Frenet çatı vektör alanları

$$T(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, -\sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \cos s, -\sin s \right)$$

$$N(s) = -\frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2} \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin s, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos s \right)$$

$$B_1(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, -\sin \frac{s}{\sqrt{2}}, -\cos s, \sin s \right)$$

$$B_2(s) = -\frac{8}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{4\sqrt{2}} \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{4\sqrt{2}} \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{8} \sin s, -\frac{1}{8} \cos s \right)$$

biçiminde olur. Aynı zamanda Bishop (paralel öteleme) çatısının vektör alanları

$$T(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, -\sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \cos s, -\sin s \right)$$

$$M_1(s) = \frac{8}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{4\sqrt{2}} \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{4\sqrt{2}} \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{8} \sin s, -\frac{1}{8} \cos s \right)$$

$$M_2(s) = \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{6}s\right) N(s) + \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{6}s\right) B_1(s)$$

$$M_3(s) = \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{6}s\right) N(s) - \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{6}s\right) B_1(s)$$

ve Bishop çatısının eğrilikleri

$$K_1 = 0, K_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{6}s\right), K_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{6}s\right)$$

biçiminde bulunur. Bu eğrinin M_1 - doğrultman eğrisinin teğeti, normali 1. ve 2.binormal ve vektör alanları ve 1.,2.,3. eğrilikleri sırasıyla

$$\bar{T} = M_1 = \frac{8}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{4\sqrt{2}} \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{4\sqrt{2}} \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{8} \sin s, -\frac{1}{8} \cos s \right)$$

$$\bar{N} = -T = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{s}{\sqrt{2}}, -\sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \cos s, -\sin s \right)$$

$$\bar{B}_1 = \frac{1}{\sqrt{K_3^2 + K_2^2}} (K_2 M_2 - K_3 M_3) = \sin^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{6} s \right) N(s) + \cos^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{6} s \right) B_1(s)$$

$$\bar{B}_2 = \frac{1}{\sqrt{K_3^2 + K_2^2}} (K_3 M_2 - K_2 M_3) = \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{6} s \right) \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{6} s \right) N(s) + \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{6} s \right) \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{6} s \right) B_1(s)$$

$$\bar{k}_1 = 0$$

$$\bar{k}_2 = -\frac{\sqrt{K_3^2 + K_2^2}}{K_1} = \text{tanımsız}$$

$$\bar{k}_3 = \frac{1}{K_3^2 + K_2^2} (K_3 K_2' - K_2 K_3') = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

M_2 - doğrultman eğrisinin teğeti, normali 1. Ve 2.binormal vektör alanları ve 1.,2.,3. eğrilikleri sırasıyla

$$\bar{T} = M_2 = \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{6} s \right) N(s) + \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{6} s \right) B_1(s)$$

$$\bar{N} = -T = \frac{8}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{4\sqrt{2}} \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{4\sqrt{2}} \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{8} \sin s, -\frac{1}{8} \cos s \right)$$

$$\bar{B}_1 = \frac{1}{\sqrt{K_3^2 + K_1^2}} (K_1 M_1 - K_3 M_3) = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{6} s \right) \left[\cos \left(\frac{\sqrt{3}}{6} s \right) N(s) - \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{6} s \right) B_1(s) \right]$$

$$\begin{aligned} \bar{B}_2 &= \frac{1}{\sqrt{K_3^2 + K_1^2}} (K_3 M_1 - K_1 M_3) \\ &= \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{6} s \right) \left[\frac{8}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{4\sqrt{2}} \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{4\sqrt{2}} \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{8} \sin s, -\frac{1}{8} \cos s \right) \right] \end{aligned}$$

$$\bar{k}_1 = K_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{6} s \right)$$

$$\bar{k}_2 = -\frac{\sqrt{K_3^2 + K_1^2}}{K_2} = \cot \left(\frac{\sqrt{3}}{6} s \right)$$

$$\bar{k}_3 = -\frac{1}{K_3^2 + K_1^2} (K_3 K_1' - K_1 K_3') = 0$$

elde edilir.

M_3 - doğrultman eğrisinin teğeti, normali 1. Ve 2.binormal vektör alanları ve 1.,2.,3. eğrilikleri sırasıyla

$$\bar{T} = M_3 = M_3(s) = \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{6}s\right) N(s) - \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{6}s\right) B_1(s)$$

$$\bar{N} = -T = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, -\sin\frac{s}{\sqrt{2}}, \cos s, -\sin s\right)$$

$$\bar{B}_1 = \frac{1}{\sqrt{K_1^2 + K_2^2}}(K_1 M_1 - K_2 M_2) = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{6}s\right)} \left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{6}s\right) N(s) - \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{6}s\right) B_1(s)\right]$$

$$\bar{B}_2 = \frac{1}{\sqrt{K_1^2 + K_2^2}}(K_1 M_2 - K_2 M_1)$$

$$= -4\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{6}s\right) \left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\sin\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{4\sqrt{2}}\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{8}\sin s, -\frac{1}{8}\cos s\right)$$

$$\bar{k}_1 = K_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{6}s\right)$$

$$\bar{k}_2 = -\frac{\sqrt{K_1^2 + K_2^2}}{K_3} = -\tan\left(\frac{\sqrt{3}}{6}s\right)$$

$$\bar{k}_3 = -\frac{1}{K_1^2 + K_2^2}(K_2 K_1' - K_1 K_2') = 0$$

bulunur.

4.6. M_3 – Rektifiyan Eğrileri

Tanım 4.6: β E^4 te bir Frenet eğrisi β nın B_2 – doğrultman eğrisi $\bar{\beta}$ olsun. eğer $\bar{\beta}$ eğrisinin konum vektörü daima β nın asli normalinin ortogonal tümleyeninde bulunuyorsa, yani $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$\bar{\beta} = \lambda_1 T + \lambda_2 M_2 + \lambda_3 M_3$$

oluyorsa $\bar{\beta}$ eğrisine M_3 – rektifiyan eğrisi denir.

Teorem 4.7: $\bar{\beta}$, $\bar{k}_1(s)$, $\bar{k}_2(s)$, $\bar{k}_3(s)$ eğriliklerine sahip Frenet eğrisi olsun. $\bar{\beta}$ bir M_3 – rektifiyan eğriye kongruenttir gerek ve yeter şart

$$\left(c \frac{K_3 \sqrt{K_1^2 + K_2^2}}{(K_1^2 + K_2^2)^2} (K_2 K_1' - K_1 K_2') \right)' + \left(s + c \int K_3^2 \frac{\sqrt{K_1^2 + K_2^2}}{(K_1^2 + K_2^2)^2} (K_2 K_1' - K_1 K_2') ds \right) K_3 = 0,$$

$c \in \mathbb{R}$ dir.

İspat: Teorem 2.24, (4.19), (4.20) ve (4.21) ifadelerinden ispat kolayca yapılabilir.

Sonuç 4.8: $\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3$ eğriliklerinin tümünün sıfırdan farklı sabitler olduğunu kabul edelim. Bu durumda (4.22) numaralı denklem sağlanmayacağından, tamamen E^4 de bulunan, sıfırdan farklı $\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3$ sabit eğriliklerine sahip bir M_2 – rektifiyan eğri yoktur.

Teorem 4.8:

1) β E^4 Öklid uzayında bir Frenet eğrisi ve β nın asli doğrultman eğrisi $\bar{\beta}$ olsun. Bu durumda β bir slant helistir $\Leftrightarrow \bar{\beta}$ bir genel helistir.

2) β E^4 Öklid uzayında bir Frenet eğrisi ve β nın M_1 -doğrultman eğrisi $\bar{\beta}$ olsun. Bu durumda β bir slant helistir $\Leftrightarrow \bar{\beta}$ bir genel helistir.

3) β E^4 Öklid uzayında bir Frenet eğrisi ve β nın M_2 - doğrultman eğrisi $\bar{\beta}$ olsun. Bu durumda β bir slant helistir $\Leftrightarrow \bar{\beta}$ bir genel helistir.

İspat 4.8:

1) β nın asli doğrultman eğrisi $\bar{\beta}$ olduğundan $N(\bar{\beta}(s)) = \bar{\beta}'(s) = \bar{T}(s)$ yazılabilir. β bir slant helistir $\Leftrightarrow \langle N, u \rangle = \cos \theta$ (u sabit bir birim vektör ve $\theta = \text{sabit}$)

$$\Leftrightarrow \langle -\bar{T}, u \rangle = \cos \theta \Leftrightarrow \bar{\beta} \text{ bir genel helistir.}$$

2) β nın M_1 - doğrultman eğrisi $\bar{\beta}$ olduğundan $M_1(\bar{\beta}(s)) = \bar{\beta}'(s) = \bar{T}(s)$ yazılabilir. β bir slant helistir $\Leftrightarrow \langle M_1, v \rangle = \cos \theta$ (v sabit bir birim vektör ve $\theta = \text{sabit}$)

$$\Leftrightarrow \langle \bar{T}, v \rangle = \cos \theta \Leftrightarrow \bar{\beta} \text{ bir genel helistir.}$$

3) β nın M_2 -doğrultman eğrisi $\bar{\beta}$ olduğundan $N(\bar{\beta}(s)) = \bar{\beta}'(s) = T(s)$ yazılabilir. β bir slant helistir $\Leftrightarrow \langle M_2, w \rangle = \cos \theta$ (w sabit bir birim vektör ve $\theta = \text{sabit}$)

$$\Leftrightarrow \langle \bar{T}, w \rangle = \cos \theta \Leftrightarrow \bar{\beta} \text{ bir genel helistir.}$$

5. SONUÇLAR

Bu çalışmada, 3 ve 4-boyutlu Öklid uzayında bazı yeni ilişkili eğriler Bishop çatıya göre tanımlanmıştır. Bir Frenet eğrisinin Bishop çatısı yardımıyla doğrultman eğrisi tanımlanarak, bu eğrilerin eğrilikleri arasındaki ilişki elde edilmiştir. Ayrıca, 3-boyutlu Öklid uzayında asli doğrultman ve donör eğrileri elde edilerek doğrulman eğrileri verilmiştir. Son olarak, 4-boyutlu Öklid uzayında bir Frenet eğrisi için M_1 -doğrulman eğrisi, M_2 -doğrultman eğrisi, M_3 -doğrultman eğrisi ve M_3 -rektifiyan eğri tanımları yapılmış ve bu eğrilerin bazı karakterizasyonları elde edilmiştir.

Benzer düşünceyle; n -boyutlu Öklid uzayında bir Bishop çatıya göre bir Frenet eğrisiyle ilişkili yeni eğriler tanımlanarak, bu eğrilerin eğrilikleri arasındaki ilişkiler araştırılabilir.

KAYNAKLAR

- [1] Bishop L.R.. 1975. There is no more than one way to frame a curve. *Mathematical Monthly*, 82(3):246-251
- [2] Hanson, A. J., Ma, H., January 1995. Parallel Transport Approach to Curve Framing, Techreports TR425.
- [3] Güven, İ. A, Nurkan, S. K., 2011. The Relation Among Spherical Indicatrix Curves, *International Mathematical Forum*, 6(25): 1209-1215.
- [4] Körpınar, T., Asil, V., Baş, S., 2011. On characterization inextensible flows of curves according to Bishop frame in E^3 , *Revista Notas de Matematica*, 7(1), No 302, 37-45.
- [5] Bukcu, B., Karacan, M. K., 2009 The Slant Helices According to Bishop Frame. *International Scholarly and Scientific Research & Innovation*, 3(11), 1010-1013.
- [6] Yılmaz, S., Özyılmaz, E., Turgut, M., 2010. New Spherical Indicatrices and Their Characterizations. *An. şt. Univ. Ovidius Constanta*. 18(2), 337-354.,
- [7] Babadağ, F., 2016 On Similar Partner Curves in Bishop Frames with Variable Transformations. *International Journal of New Technology and Research*, 2(4), 59-64.
- [8] Macit, N., Dıldül, M., 2014. Some new associated curves of a Frenet curve in E^3 and E^4 . *Turkish J. Math.*, 38, 1023-1037.
- [9] Buyukkutuk, S. and Ozturk, G., 2015. Constant ratio curves according to parallel transport frame in Euclidean 4-space E^4 . *New Trends in Mathematica Sci.*, 3(4), 171-178.
- [10] Elzawy M., 2017. Smarandache Curves İn Euclidean 4-space , *Journal Of The Egptian Mathematical Society*
- [11] Choi, J. H. ve Kim, Y. H., (2012). “Associated Curves of a Frenet Curve and Their Applications”, *Applied Mathematics and Computation*, 218.
- [12] Körpınar, T., Sarıaydın, M. T., & Turhan, E. 2013. Associated Curves According To Bishop Frame In Euclidean 3-Space. *Advanced Modeling and Optimization* .
- [13] Sabuncuoğlu A., 2001. Diferensiyel geometri. Nobel Yayın Dağıtım, Ankara.
- [14] Hacısalihoğlu H.H..1977. Lineer cebir. Fen Fakültesi Yayınları, Diyarbakır .
- [15] Senyurt S., Çalışkan A., 2015. N C-Smarandache of Mannheim curve couple according to Frenet Frame , *Int. J. Math. Combin*, Vol:1
- [16] Cetin M., Tuncer Y., Karacan M.K., 2014 february Smarandache Curves according to Bishop Frame in Euclidean 3-space , *Gen.Math. Notes.*, Vol:20, no:2
- [17] O'Neill B., 1966. *Elementary Differential Geometry*. Burlington, MA, USA: Academic Press,
- [18] Körpınar, T., Turhan , E., 2013. Biharmonic curves according to parallel transport frame in E^4 . *Bol. Soc. Paran. Mat.*, 31(2), 213–217.
- [19] Ateş, F., Gök, İ., Ekmekçi, F.N., ve Yaylı, Y., (2019). Characterizations of Inclined Curves According to Parallel Transport Frame in E^4 and Bishop Frame in E^3 . *Konuralp Journal of Mathematics*, 7(1), 16-24.

- [20] Ayyıldız, N., Cöken, A. C., ve Yücesan, A., (2007). A characterization of dual Lorentzian spherical curves in the dual Lorentzian space. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 11(4), 999-1018.
- [21] Hacısalıhoğlu, H. H., (2000). Diferensiyel Geometri, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Ankara
- [22] Gürhan, N., (2013). Frenet eğrisi ile bağlantılı eğriler ve uygulamaları. Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi.



ÖZGEÇMİŞ

Ahmet DUYAN

KİŞİSEL BİLGİLER

Doğum Yeri : Mardin
Doğum Yılı : 1990
Uyruğu : T.C
Adres : Yukarı Azıklı Küme evleri Kızıltepe/MARDİN
E-posta : ahmetduyan08@gmail.com
Yabancı Diller : İngilizce

EĞİTİM BİLGİLER

İlkokul : Yukarı Azıklı Kazım Duyan İlköğretim Okulu
Ortaokul : Yukarı Azıklı Kazım Duyan İlköğretim Okulu
Lise : Mardin Aziz Sancar Lisesi
Lisans : Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi