

**T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

SS-TÜMLENİMİŞ MODÜLLER

Doktora Tezi

Engin KAYNAR

Danışman
Prof. Dr. Hamza ÇALIŞICI

II. Danışman
Prof. Dr. Ergül TÜRKMEN

SAMSUN
2020

TEZ ONAYI

Engin KAYNAR tarafından hazırlanan “SS-Tümlenmiş Modüller” adlı tez çalışması 06/07/2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman Prof. Dr. Hamza ÇALIŞICI
Matematik ve Fen Bilimleri
Eğitimi Anabilim Dalı

İkinci Danışman Prof. Dr. Ergül TÜRKMEN
Amasya Üniversitesi
Matematik Anabilim Dalı

Jüri Üyeleri

Başkan Prof. Dr. Şenol EREN
Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Matematik Anabilim Dalı

Üye Prof. Dr. Hamza ÇALIŞICI
Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Matematik ve Fen Bilimleri
Eğitimi Anabilim Dalı

Üye Doç. Dr. Burcu Nişancı TÜRKMEN
Amasya Üniversitesi
Matematik Anabilim Dalı

Üye Dr. Öğr. Üyesi Esra ÖZTÜRK SÖZEN
Sinop Üniversitesi
Matematik Anabilim Dalı

Üye Dr. Öğr. Üyesi Hasan Hüseyin ÖKTEN
Amasya Üniversitesi
Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım. .../.../2020

Prof. Dr. Ali BOLAT
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

05/07/2020

Engin KAYNAR

ÖZET

SS-TÜMLENİMİŞ MODÜLLER

Engin Kaynar
Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Doktora, Temmuz/2020
Danışman: Prof. Dr. Hamza Çalışıcı

M modülünün her bir U alt modülünün $U \cap V$ yarı basit olacak şekilde M de bir V tümleyeni varsa M ye ss-tümlenmiş modül denir. Bu tezde tümlenmiş modüllerin bir özel hali olan ss-tümlenmiş modüllerin özellikleri incelendi. Bu modüllerin birimli halkalar ve Dedekind bölgeleri üzerindeki yapısı belirlendi. Sonlu üretilmiş bir M modülünün ss-tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul M modülünün tümlenmiş ve $Rad(M) \subseteq Des(M)$ olmasıdır. M yerel modül ve $Rad(M)$ yarı basit ise, M ye güçlü yerel modül denir. Güçlü yerel modüllerin direkt toplamı ss-tümlenmiş ve eş atomdur. R halkasının $Rad(R) \subseteq Des({}_R R)$ özelliğini sağlayan yarı mükemmel halka olması için gerek ve yeter koşul her sol R -modülün (bol) ss-tümlenmiş olmasıdır.

Anahtar Sözcükler: yarı basit modül, ss-tümlenmiş modül, güçlü yerel modül

ABSTRACT

SS-SUPPLEMENTED MODULES

Engin Kaynar

Ondokuz Mayıs University

Institute of Graduate Studies

Mathematics Department

M.B.A., July/ 2020

Supervisor: Prof. Dr. Hamza Çalışıcı

If any U submodule of the M module has a V supplement in M such that the $U \cap V$ is semisimple, M is called ss-supplemented module. In this thesis, the properties of ss-supplemented modules, which is a special version of the supplemented modules, are examined. It is aimed to determine the structure of these modules on unitary rings and Dedekind domains. It is shown that a finitely generated module M is ss-supplemented if and only if it is supplemented and $Rad(M) \subseteq Soc(M)$. A module M is called strongly local if it is local and $Rad(M)$ is semisimple. Any direct sum of strongly local modules is ss-supplemented and coatomic. A ring R is semiperfect and $Rad(R) \subseteq Soc({}_R R)$ if and only if every left R -module is (amply) ss-supplemented.

Keywords: semi simple modules, strongly local modules, ss-supplemented modules

ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR

Araştırmam boyunca bilimsel anlamda rehberlik eden, karşılaştığım problemlerin çözümünde bilgi ve görüşlerini paylaşan, yürüdüğüm akademik yolda bana ışık tutan değerli hocam Sayın Prof. Dr. Hamza Çalışıcı'ya teşekkürü bir borç bilirim.

Doktora tez çalışmalarımda bilimsel olarak rehberlik eden, karşılaştığım problemlerin çözümünde bilgi ve görüşlerini paylaşan değerli hocam Prof. Dr. Ergül Türkmen'e en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Doktora çalışmalarım boyunca yoğun çalışmalarının arasında bilgi ve tecrübelerini esirgemeyen tez izleme komitemde bulunan saygıdeğer hocam Prof. Dr. Şenol Eren'e çok teşekkür ederim.

Tezin hazırlanmasında değerli bilgi ve deneyimleri ile katkı sağlayan Doç. Dr. Burcu Nişancı Türkmen'e teşekkür ederim.

Doktora öğrenimim boyunca sabır ve sükunetle bana destek olan sevgili eşim Nihal Kan Kaynar'a ve biricik oğlum Barlas Kaynar'a çok teşekkür ederim.

Temmuz 2020, Samsun

Engin Kaynar

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER VE KAYNAK ÖZETLERİ	3
2.1. Halkalar	3
2.2. Modüller	5
2.3. Homomorfizmalar	10
2.4. Direkt Çarpımlar ve Direkt Topamlar	13
2.5. Küçük Alt Modüller	17
2.6. Yarı Basit Modüller ve Bir Modülün Desteği	18
2.7. Bir Modülün Radikali.....	26
3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	37
3.1. Tümlenmiş ve Rad-Tümlenmiş Modüller	37
3.2. Projektif ve İnjektif Modüller.....	40
3.3. Yerel, Yarı Yerel Modüller ve Halkalar.....	51
3.4. Yarı Mükemmel Modüller ve Halkalar	53
3.5. Mükemmel Modüller ve Halkalar	62
3.6. Artinian ve Noetherian Modüller	66
3.7. Dedekind Bölgeleri.....	70
4. BULGULAR VE TARTIŞMA.....	76
4.1. Güçlü Yerel Modüller	76
4.2. SS-Tümlenmiş Modüller	78
4.3. Modülleri SS-Tümlenmiş olan Halkalar	88
4.4. Dedekind Bölgeleri Üzerinde SS-Tümlenmiş Modüller	90

5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	96
KAYNAKLAR	97
ÖZGEÇMİŞ	99



SİMGELER VE KISALTMALAR

R	: Birimli halka
1_R	: Birimli R halkasının birimi
$\mathbb{Z}$	: Tamsayılar halkası
$\mathbb{Q}$	: Tamsayılar halkasının kesirler cismi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\emptyset$	: Boş küme
$\subseteq$	: Alt küme
$\not\subseteq$	: Alt küme değil
$\subsetneq$	: Öz alt küme
$\leq$	: Alt modül
$<$	: Öz alt modül
K	: Bir R tamlık bölgesinin kesir cismi
$Rm = \langle m \rangle$	: Bir M modülünde m elemanı tarafından üretilen devirli alt modül
$End(M)$	: M modülünün endomorfizmalarının kümesi
$Gör(f)$	: f homomorfizmasının görüntü kümesi
$Çek(f)$	: f homomorfizmasının çekirdeği
$M \cong K$	: M ile K modülleri izomorftur.
i	: içerme monomorfizması
π	: doğal homomorfizma
$f _N$	: M modülünden herhangi bir modüle tanımlı f homomorfizmasının $N \leq M$ alt modülüne kısıtlanması
I_M	: M modülünün birim homomorfizması
M/N	: M modülünün N alt modülüne göre bölüm modülü
$Ann(M)$	: M modülünün sıfırlayanı
$M^{(I)}$	: M modülünün I indis kümesine göre kopyalarının direkt toplamı
$Des(M)$	: M modülünün tüm basit alt modüllerinin toplamı
$Des_S(M)$	: M modülünün tüm küçük ve basit alt modüllerinin toplamı
$\ll$	: Küçük alt modül
$Rad(M)$	: M modülünün radikali
$P(M)$	: M modülünün tüm radikal alt modüllerinin ($U = Rad(U), U \leq M$) toplamı
$E(M)$	: M modülünün injektif bürümü
$D(M)$	: M modülünün tüm bölünebilir alt modüllerinin toplamı

1. GİRİŞ

Bu doktora tezinde, ss-tümlenmiş modüllerin tanımı ve özellikleri, ss-tümlenmiş modüllerin birtakım halkalarla karakterizasyonu ve Dedekind bölgeleri üzerindeki yapısı çalışıldı.

Alt modülü (zayıf) tümleyene sahip modüller, son dönemde modül teoride yoğun olarak çalışılan konulardan biri olmuştur. R birimli bir halka ve M üniter sol R -modül olsun. M nin U alt modülünün $M = U + V$ koşulunu sağlayan minimal bir V alt modülü varsa V ye U nun M modülünde tümleyeni denir. Her alt modülü tümleyene sahip olan modüle tümlenmiş modül denir. M nin herhangi bir U alt modülünün yalnızca M ile toplamı M ye eşitse, yani $N \leq M$ için $U + N = M$ eşitliği ancak $N = M$ olmasıyla mümkünse U ya M nin küçük alt modülü denir ve $U \ll M$ ile gösterilir. V alt modülünün U nun tümleyeni olması için gerek ve yeter şart $M = U + V$ ve $U \cap V \ll V$ olmasıdır. Eğer $M = U + V$ ve $U \cap V \ll M$ ise V ye U nun zayıf tümleyeni denir.

$Des(M)$, M modülünün basit alt modüllerinin toplamı, $Rad(M)$, M nin küçük alt modüllerinin toplamı olmak üzere, $Des_s(M)$, M nin tüm basit ve küçük alt modüllerin toplamı olarak tanımlanır. Buradan $Des_s(M) \subseteq Des(M)$ ve $Des_s(M) \subseteq Rad(M)$ olduğu açıktır.

$Rad(V)$, V nin tüm küçük alt modüllerinin toplamı olduğundan M nin U ve V alt modülleri için $M = U + V$ ve $U \cap V \ll V$ iken $U \cap V \leq Rad(V)$ dir. Buradan $M = U + V$ ve $U \cap V \leq Rad(V)$ koşulunu sağlayan V alt modülüne U nun M de Rad-tümleyeni denir. Eğer $M = U + V$ ve $U \cap V \leq Des_s(V)$ ise V ye U nun ss-tümleyeni denir. $Des_s(V) \leq Rad(V)$ olduğundan her ss-tümleyen Rad-tümleyen olduğu görülmektedir. Bu takdirde her alt modülü ss-tümleyene sahip modül ss-tümlenmiş modül olarak tanımlanmaktadır.

Bu tezde tüm halkalar birimli ve tüm modüller üniter sol R -modül olarak alınmıştır. Bu tez üç bölümden oluşmaktadır. Kuramsal temeller ve kaynak özetleri bölümün de temel düzeyde bilinen ve tez de kullanılan bazı bilgiler sunuldu. Materyal ve metot bölümünde ise tümlenmiş modüllerin bilinen ve özellikle bulgular bölümünde kullanacak olduğumuz özellikleri verildi.

Bulgular ve tartışma bölümü dört alt başlıktan oluşmaktadır. İlk olarak ss-tümlenmiş modüllerde tanımında önemli bir yere sahip güçlü yerel modül kavramı verildi. İkinci kısımda ss-tümlenmiş modül ve bol ss-tümlenmiş modül kavramları tanıtıldı. Her güçlü yerel modülün ss-tümlenmiş olduğu ispat edildi. ss-tümlenmiş modül olan ancak tümlenmiş modül olmayan modül örnekleri verildi ve ss-tümlenmiş modüller sınıfının yarı basit modüller ile tümlenmiş modüller sınıfı arasında olduğu elde edildi. π -projektif ss-tümlenmiş modüllerin bol ss-tümlenmiş modül olduğu gösterildi. Üçüncü kısımda ss-tümlenmiş modüllerin yarı-mükemmel halkalar, yarı yerel halkalar ve her maksimal sol ideali ss-tümleyene sahip olan halkalar ile karakterizasyonu verildi. Dördüncü kısımda Dedekind bölgesi üzerinde ss-tümlenmiş modüllerin yapısı belirlendi. Özellikle p asal eleman olmak üzere R yerel Dedekind bölgesi üzerinde ss-tümlenmiş modüllerin R/pR ile R/p^2R yerel modüllerin direkt toplamına izomorf olduğu ispat edildi.

2. KURAMSAL TEMELLER VE KAYNAK ÖZETLERİ

H. Bass 1960 yılında “Finitistic dimension and a homological generalization of semiprimary rings” adlı makalesinde her modülü bir projektif örtüye sahip olan halkaları mükemmel halka ve her sonlu üretilmiş modülü bir projektif örtüye sahip olan halkaları yarı mükemmel halka olarak tanımlamıştır. F. Kasch ve E. A. Mares bu halka tanımlarını 1966’da “Eine kennzeichnung semi-perfecter moduln” adlı makalelerinde modüllere aktarmışlardır ve tümlenmiş modülleri tanımlamışlardır. Bir halkanın mükemmel olması için gerek ve yeter şart her modülünün tümlenmiş olması gerektiğini ve bir halkanın yarı mükemmel olması için gerek ve yeter şartın her sonlu üretilmiş modülünün tümlenmiş olması olduğunu göstermişlerdir. 1974 yılında H. Zöschinger yapmış olduğu “Komplementierte moduln über Dedekindringen” başlıklı makalesinde tümlenmiş modülleri Dedekind bölgeleri üzerinde belirlemiştir. Xue 1996’da yayınladığı “Characterizations of semiperfect and perfect rings” adlı makalede tümlenmiş modülleri genelleştirerek Rad-tümlenmiş modülleri tanımlamıştır. D. X. Zhou ve X. R. Zhang 2011’de yayınlamış oldukları “Small-Essential Submodules and Morita Duality” adlı makalede bir M modülünün basit ve küçük alt modüllerinin toplamı olarak $Des_s(M)$ tanımlamışlardır. Özellikle $Des_s(M) \subseteq Rad(M)$ dir.

Bu bölümde, üzerinde çalıştığımız konuyla ilgili temel kavramları vererek başlıyoruz.

2.1. Halkalar

Tanım 2.1.1: Aşağıdaki koşulları sağlayan $(R, +, \cdot)$ cebirsel yapısına halka denir.

(i) $(R, +)$ abel gruptur.

(ii) Her $a, b, c \in R$ için $(ab)c = a(bc)$ dir.

(iii) Her $a, b, c \in R$ için $a(b + c) = ab + ac$ ve $(a + b)c = ac + bc$ dir (Hungerford, 1973).

Bu tez çalışmasında R ile $(R, +, \cdot)$ halkası kastedilecektir.

Tanım 2.1.2: R halka olsun. Her $a, b \in R$ için $ab = ba$ eşitliği sağlanıyorsa R ye değişmeli halka, her $a \in R$ için $1_R a = a 1_R = a$ olacak şekilde $1_R \in R$ elemanı varsa R ye birimli halka denir (Hungerford, 1973).

Bu çalışmamızda bütün halkalar birimli halka olarak alınacaktır.

Tanım 2.1.3: R halka ve $0 \neq a \in R$ olsun. $ab = 0$ ($ba = 0$) olacak şekilde R halkasında sıfırdan farklı bir $b \in R$ varsa $a \in R$ elemanına sol (sağ) sıfır bölen eleman denir. R halkası sol (sağ) sıfır bölen eleman içermiyorsa R halkasına sol (sağ) sıfır bölensiz halka denir. Sol ve sağ sıfır bölensiz halkaya sıfır bölensiz halka denir. Sıfır bölensiz değişmeli halkaya tamlık bölgesi denir (Hungerford, 1973).

Tanım 2.1.4: R halka ve $a \in R$ olsun. $ca = 1_R$ ($ac = 1_R$) olacak şekilde $c \in R$ varsa, a elemanına sol (sağ) terslenebilir, c elemanına a elemanının sol (sağ) tersi denir. Hem sol hem de sağ terslenebilir $a \in R$ elemanına terslenebilir denir (Hungerford, 1973).

Tanım 2.1.5: R halkasının sıfırdan farklı her elemanı terslenebilir ise, R halkasına bölme halkası denir (Kasch, 1982).

Tanım 2.1.6: R halka ve $\emptyset \neq I \subseteq R$ olsun. $I, (R, +)$ abel grubunun bir alt grubu ve her $a, b \in I$ için $ab \in I$ ise, I ya R halkasının alt halkası ve her $r \in R$ ve her $a \in I$ için $ra \in I$ ($ar \in I$) ise, I ya R halkasının sol (sağ) ideali denir. I, R halkasının hem sol hem de sağ ideali ise, I ya R halkasının ideali denir (Hungerford, 1973).

Tanım 2.1.7: R halkasının 0 ve R den başka ideali yoksa, R halkasına basit halka denir (Wisbauer, 1991).

Tanım 2.1.8: R değişmeli halka ve P, R halkasının bir ideali olsun. $a, b \in R$ olmak üzere $ab \in P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ oluyorsa, P ye R halkasının asal ideali denir (Hungerford, 1973).

Tanım 2.1.9: R halka ve I, R nin kendisinden farklı sol ideali olsun. R de I yı kapsayan R den başka bir sol ideal yoksa, I ya R nin maksimal sol ideali denir (Hungerford, 1973).

R değişmeli halka ise, R nin her maksimal ideali asal idealdir.

Tanım 2.1.10: R halka olsun.

(i) $e \in R$ elemanı için $e^2 = e$ ise, e elemanına idempotent eleman denir.

(ii) R nin e_1, e_2 idempotent elemanları için $e_1 e_2 = 0 = e_2 e_1$ ise, e_1 ve e_2 elemanlarına ortogonaldirler denir.

(iii) e_1, e_2 ortogonal idempotent elemanlar olmak üzere $e = e_1 + e_2$ iken $e_1 = 0$ veya $e_2 = 0$ oluyorsa $0 \neq e \in R$ idempotent elemanına ilkel idempotent denir (Wisbauer, 1991).

$e \in R$ idempotent eleman olsun.

$$(1_R - e)^2 = (1_R - e)(1_R - e) = 1_R - e - e + e^2 = 1_R - 2e + e = 1_R - e$$

olduğundan $(1_R - e) \in R$ idempotent elemandır. Ayrıca

$$e(1_R - e) = e - e^2 = e - e = 0$$

ve

$$(1_R - e)e = e - e^2 = 0$$

olduğundan e ve $1_R - e$ elemanları ortogonal idempotentir. Diğer taraftan $1_R = e + (1_R - e)$ olduğu açıktır.

2.2. Modüller

Tanım 2.2.1: R halka ve $(M, +)$ bir abel grup olsun. Her $r \in R$ ve her $m \in M$ için $\bullet(r, m) = rm$ ile gösterilen $\bullet: R \times M \rightarrow M$ dış işlemi;

- (i) Her $r \in R$ ve her $m, n \in M$ için $r(m + n) = rm + rn$,
- (ii) Her $r, s \in R$ ve her $m \in M$ için $(r + s)m = rm + sm$,
- (iii) Her $r, s \in R$ ve her $m \in M$ için $(rs)m = r(sm)$,

şartlarını gerçekleştiriyorsa M abel grubuna “ $\bullet$ ” dış işlemine göre bir sol R -modül veya kısaca R -modül denir ve ${}_R M$ ile gösterilir. R birimi 1_R olan bir halka olmak üzere her $m \in M$ için $1_R m = m$ eşitliği gerçekleşiyorsa M modülüne üniter sol R -modül denir (Hungerford, 1973).

Benzer şekilde $\bullet: M \times R \rightarrow M$ dış işlemi ile birlikte M_R sağ R -modül tanımı yapılır. R halkasının tanımı gereği ${}_R R$ üniter sol R -modül ve R_R nin ise üniter sağ R -modül olduğu açıktır. Dolayısıyla modül kavramına, halkaların genellemesi gözüyle bakılabilir.

Bu çalışmada bütün modüller, aksi belirtilmedikçe üniter sol modül olarak alınacaktır.

Tanım 2.2.2: M bir R -modül ve $\emptyset \neq N \subseteq M$ olsun. N , $(M, +)$ abel grubunun bir alt grubu ve her $m \in N$, her $r \in R$ için $rm \in N$ oluyorsa N ye M modülünün bir alt modülü denir ve bu $N \leq M$ ile gösterilir.

Bu tanıma göre 0 ve M , M modülünün birer alt modülleridir. Bu alt modüllere aşikar alt modüller denir. 0 alt modülü sadelik için 0 ile de gösterilir. M nin kendinden farklı her alt modülüne bir öz alt modül denir (Hungerford, 1973).

Tanım 2.2.3: Aşikar alt modüllerinden başka alt modülü bulunmayan sıfırdan farklı bir M modülüne basit modül denir (Kasch, 1982).

${}_R R$ basit modül ise, R ye sol basit halka denir. Benzer şekilde R_R basit modül ise, R ye sağ basit halka denir (Kasch, 1982).

Teorem 2.2.1: M modülünün bir takım alt modüllerinin arakesiti M nin bir alt modülüdür (Hungerford, 1973).

Tanım 2.2.4: M bir R -modül ve X de M nin bir alt kümesi olsun. M modülünün X kümesini kapsayan tüm alt modüllerinin arakesitine M nin X tarafından üretilen alt modülü denir ve $\langle X \rangle$ ile gösterilir. X kümesine de $\langle X \rangle$ alt modülünün üreteç kümesi denir. $X = \emptyset$ ise, $\langle X \rangle = 0$ olduğu açıktır.

$X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ sonlu küme ise, $\langle X \rangle = \langle x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \rangle$ alt modülüne sonlu üretilmiş alt modül, $X = \{m\}$ şeklinde tek elemana sahipse $\langle X \rangle = \langle m \rangle$ alt modülüne devirli alt modül denir. $M = \langle X \rangle$ olacak şekilde M nin bir X sonlu alt kümesi varsa M ye sonlu üretilmiş modül ve özel olarak $M = \langle m \rangle$ olacak şekilde bir $m \in M$ varsa, M modülüne m elemanı tarafından üretilen devirli modül denir (Hungerford, 1973).

Önerme 2.2.1: R halka ve M bir R -modül olmak üzere $\emptyset \neq X \subseteq M$ olsun. Bu takdirde,

(i) $\langle X \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^u r_i x_i + \sum_{j=1}^v n_j y_j \mid r_i \in R, n_j \in \mathbb{Z}, x_i, y_j \in X, u, v \in \mathbb{Z}^+ \right\}$ şeklindedir.

(ii) $\{N_i \mid i \in I\}$, M nin alt modüllerinin bir ailesi ise

$$\left\langle \bigcup_{i \in I} N_i \right\rangle = \left\{ \sum_{j=1}^k n_{i_j} \mid \text{Her } j = 1, 2, \dots, k \text{ için } n_{i_j} \in N_{i_j}, k \in \mathbb{Z}^+ \right\}$$

şeklindedir (Hungerford, 1973).

İspat: (i) $K = \{\sum_{i=1}^u r_i x_i + \sum_{j=1}^v n_j y_j \mid r_i \in R, n_j \in \mathbb{Z}, x_i, y_j \in X, u, v \in \mathbb{Z}^+\}$ olsun. $\langle X \rangle = K$ olduğunu gösterelim. Öncelikle $K \leq M$ olduğunu gösterelim. $X \neq \emptyset$ olduğundan en az bir $x \in X$ vardır. O halde $0_R \cdot x + 0 \cdot x = 0 \in K$ olup $K \neq \emptyset$ dir. Herhangi bir $a \in K$ için $a = \sum_{i=1}^u r_i x_i + \sum_{j=1}^v n_j y_j$ şeklindedir. $x_i, y_j \in X \subseteq M$ olduğundan $K \subseteq M$ dir. Şimdi $a, b \in K$ alalım. $a = \sum_{i=1}^u r_i x_i + \sum_{j=1}^v n_j y_j$ ve $b = \sum_{k=1}^{u'} r'_k x'_k + \sum_{t=1}^{v'} n'_t y'_t$ olacak şekilde $u, v, u', v' \in \mathbb{Z}^+, r_i, r'_k \in R$ $x_i, y_j, x'_k, y'_t \in X$ ve $n_j, n'_t \in \mathbb{Z}$ vardır.

$$\begin{aligned} a - b &= \left(\sum_{i=1}^u r_i x_i + \sum_{j=1}^v n_j y_j \right) - \left(\sum_{k=1}^{u'} r'_k x'_k + \sum_{t=1}^{v'} n'_t y'_t \right) \\ &= \sum_{i=1}^u r_i x_i + \sum_{k=1}^{u'} (-r'_k) x'_k + \sum_{j=1}^v n_j y_j + \sum_{t=1}^{v'} (-n'_t) y'_t \in K \end{aligned}$$

olur. $r \in R$ ve her $a \in K$ için

$$ra = r \left(\sum_{i=1}^u r_i x_i + \sum_{j=1}^v n_j y_j \right) = \sum_{i=1}^u \underbrace{(rr_i)}_{\in R} x_i + \sum_{j=1}^v \underbrace{(rn_j)}_{\in R} y_j \in M$$

olup $K \leq M$ bulunur. Şimdi $\langle X \rangle = K$ olduğunu gösterelim. $a \in X$ olmak üzere $a = 0_R a + 1a \in K$ olduğundan $X \subseteq K$ dir. $\langle X \rangle$, X i içeren en küçük alt modül olduğundan $\langle X \rangle \subseteq K$ olur. Tersine $a \in K$ olsun. $a = \sum_{i=1}^u r_i x_i + \sum_{j=1}^v n_j y_j$ olacak şekilde $r_i \in R, n_j \in \mathbb{Z}, x_i, y_j \in X, u, v \in \mathbb{Z}^+$ vardır. $x_i, y_j \in X \subset \langle X \rangle$ ve $\langle X \rangle \leq M$ olduğundan $r_i x_i \in \langle X \rangle$ olup $\sum_{i=1}^u r_i x_i \in \langle X \rangle$ ve $n_j y_j \in \langle X \rangle$ olup $\sum_{j=1}^v n_j y_j \in \langle X \rangle$ dir. Buradan $a \in \langle X \rangle$ olur. Böylece $K \subseteq \langle X \rangle$ olur. Sonuç olarak $K = \langle X \rangle$ elde edilir.

Bu gerçek üniter olmayan bir modül içinde geçerlidir. Fakat bu çalışmada R nin birimli ve M üniter R -modül olduğundan

$$L = \{\sum_{i=1}^u r_i x_i \mid r_i \in R, x_i \in X, u \in \mathbb{Z}^+\}$$

olmak üzere $\langle X \rangle = L$ dir. Gerçekten her $a = \sum_{i=1}^u r_i x_i + \sum_{j=1}^v n_j y_j \in \langle X \rangle$ için R birimli M üniter R -modül olduğundan $y_j \in X \subseteq M$ elemanı için $1_R y_j = y_j$ olacaktır.

$$a = \sum_{i=1}^u r_i x_i + \sum_{j=1}^v n_j (1_R y_j) = \sum_{i=1}^u r_i x_i + \sum_{j=1}^v \underbrace{(n_j 1_R)}_{\in R} y_j = \sum_{t=1}^{v'} r'_t z'_t$$

olup $\langle X \rangle \subseteq L$ dir. $L \subseteq \langle X \rangle$ olduğu açıktır. Böylece $\langle X \rangle = L$ elde edilir.

(ii) $\{N_i \mid i \in I\}$, M modülünün alt modüllerinin ailesi ve $X = \bigcup_{i \in I} N_i$ olsun.

$$N = \left\{ \sum_{j=1}^k n_{i_j} \mid \text{Her } j = 1, 2, \dots, k \text{ için } n_{i_j} \in N_{i_j}, k \in \mathbb{Z}^+ \right\}$$

diyelim. $\langle X \rangle = N$ olduğunu gösterelim. $\emptyset \neq N \subseteq M$ olduğu açıktır. Şimdi $N \leq M$ olduğunu gösterelim. Her $r \in R$ ve her $x, y \in N$ için, $1 \leq s \leq k$ olmak üzere $n_{i_s} \in N_{i_s}$ ve $1 \leq t \leq m$ olmak üzere $n'_{i_t} \in N_{i_t}$ olup $x = n_{i_1} + n_{i_2} + \dots + n_{i_k}$ ve $y = n'_{i_1} + n'_{i_2} + \dots + n'_{i_m}$ biçimindedir.

$$x - y = n_{i_1} + n_{i_2} + \dots + n_{i_k} + (-n'_{i_1}) + (-n'_{i_2}) + \dots + (-n'_{i_m}) \in N$$

ve

$$rx = r(n_{i_1} + n_{i_2} + \dots + n_{i_k}) = \underbrace{rn_{i_1}}_{N_{i_1}} + \underbrace{rn_{i_2}}_{N_{i_2}} + \dots + \underbrace{rn_{i_k}}_{N_{i_k}} \in N$$

olur. Böylece $N \leq M$ bulunur. Şimdi $\langle X \rangle = N$ olduğunu gösterelim. (i) den her $e \in \langle X \rangle$ için $r_i \in R, n_j \in \mathbb{Z}, x_i, y_j \in X, u, v \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$e = \sum_{i=1}^u r_i x_i + \sum_{j=1}^v n_j y_j$$

şeklindedir. $x_i, y_j \in X = \bigcup_{i \in I} N_i$ olduğundan en az bir $i_l, j_h \in I$ için $x_i \in N_{i_l}$ ve $y_j \in N_{j_h}$ dir. O halde $e \in N$ dir. Buradan $\langle X \rangle \subseteq N$ olur. Tersine $f \in N$ için $f = n_{i_1} + n_{i_2} + \dots + n_{i_k}$ olacak şekilde $n_{i_k} \in N_{i_k} \subseteq X$ vardır. $X = \bigcup_{i \in I} N_i$ olduğu göz önüne alınırsa $f \in \langle X \rangle$ olup $N \subseteq \langle X \rangle$ dir. Sonuç olarak $N = \langle X \rangle$ elde edilir.

(ii) deki $\langle \bigcup_{i \in I} N_i \rangle$ alt modülüne M modülünün $\{N_i \mid i \in I\}$ alt modülleri ailesinin toplamı denir ve $\langle \bigcup_{i \in I} N_i \rangle = \sum_{i \in I} N_i$ şeklinde gösterilir.

Özel olarak, $I = \{1, 2\}$ ise, $\langle N_1 \cup N_2 \rangle = N_1 + N_2 = \{n_1 + n_2 \mid n_1 \in N_1 \text{ ve } n_2 \in N_2\}$ dir.

M bir R -modül ve $m \in M$ olsun. Bu takdirde, Önerme 2.2.1 (i) nin ispatından

$$\begin{aligned} \langle m \rangle &= \{ \sum_{i=1}^u r_i m \mid r_i \in R, u \in \mathbb{Z}^+ \} \\ &= \{ r_1 m + r_2 m + \dots + r_u m \mid r_i \in R, i = 1, 2, \dots, u, u \in \mathbb{Z}^+ \} \\ &= \{ (r_1 + r_2 + \dots + r_u) m \mid r_i \in R, i = 1, 2, \dots, u, u \in \mathbb{Z}^+ \} \\ &= \{ rm \mid r \in R \} = Rm \end{aligned}$$

şeklindedir.

Önerme 2.2.2: M modül, K, N, H ise M nin alt modülleri ve $H \leq N$ olsun. Bu takdirde, $(H + K) \cap N = H + (K \cap N)$ dir (Alizade ve Pancar, 1999).

İspat: $a \in (H + K) \cap N$ olsun. Bu takdirde, $a \in H + K$ ve $a \in N$ dir. O halde $a = h + k$ olacak şekilde $h \in H$, $k \in K$ elemanları vardır. $H \leq N$ olduğundan $k = a + (-h) \in K \cap N$ olup $a \in H + (K \cap N)$ bulunur. Buradan

$$(H + K) \cap N \leq H + (K \cap N)$$

dir. Ayrıca $H + (K \cap N) \leq H + K$ ve $H + (K \cap N) \leq N$ olduğundan

$$H + (K \cap N) \leq (H + K) \cap N$$

dir. Dolayısıyla $(H + K) \cap N = H + (K \cap N)$ elde edilir.

Teorem 2.2.2: M bir R -modül ve $N \leq M$ olsun. M/N bölüm grubu, $r \in R$ ve $m + N \in M/N$ elemanları için, $r \cdot (m + N) = rm + N$ ile tanımlı $\bullet : R \times M/N \rightarrow M/N$ dış işlemine göre bir R -modül yapısına sahiptir. M/N modülüne M nin N alt modülüne göre bölüm modülü denir (Hungerford, 1973).

İspat: Öncelikle “ $\bullet$ ” işleminin iyi tanımlı olduğunu görelim. $(r_1, m_1 + N) = (r_2, m_2 + N)$ olsun. Buradan $r_1 = r_2 = r$ ve $m_1 + N = m_2 + N$ olup $m_1 - m_2 \in N$ dir. O halde $r(m_1 - m_2) = rm_1 - rm_2 \in N \Rightarrow rm_1 + N = rm_2 + N$ olur. Dolayısıyla $\bullet$ işlemi iyi tanımlıdır. Her $k, m \in M$ ve her $r, s \in R$ için

(i)

$$\begin{aligned} r((m + N) + (k + N)) &= r((m + k) + N) \\ &= r(m + k) + N \\ &= (rm + rk) + N \\ &= (rm + N) + (rk + N) \\ &= r(m + N) + r(k + N) \end{aligned}$$

olur.

(ii)

$$\begin{aligned} (r + s)(m + N) &= (r + s)m + N \\ &= (rm + sm) + N \\ &= (rm + N) + (sm + N) \\ &= r(m + N) + s(m + N) \end{aligned}$$

olur.

(iii) $(rs)(m + N) = (rs)m + N = r(sm) + N = r(sm + N) = r(s(m + N))$ olur.

(iv) $1_R(m + N) = 1_R m + N = m + N$ olduğundan M/N üniter sol R -modüldür.

2.3. Homomorfizmalar

Tanım 2.3.1: M ve N R -modüller ve $f: M \rightarrow N$ bir fonksiyon olsun. Her $m_1, m_2 \in M$ ve her $r \in R$ için $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)$ ve $f(rm_1) = rf(m_1)$ şartları sağlanırsa f fonksiyonuna bir R -modül homomorfizması veya kısaca homomorfizma denir. f homomorfizmasının görüntü kümesine f nin homomorfik görüntüsü denir ve $\text{Gör}(f)$ ile gösterilir.

M modülünden N modülüne tanımlanan tüm homomorfizmaların kümesi $\text{Hom}(M, N)$ ile gösterilir. Bu küme her $f, g \in \text{Hom}(M, N)$ her $a \in M$ için $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$ şeklinde fonksiyonlarla tanımlı toplama işlemine göre bir abel grup yapısına sahiptir. M bir R -modül olmak üzere $f: M \rightarrow M$ homomorfizmasına M modülünün endomorfizması denir. M modülünün tüm endomorfizmalarının kümesi $\text{End}(M)$ ile gösterilir. Ayrıca $\text{End}(M)$ fonksiyonlar üzerinde tanımlı toplama ve bileşke işlemlerine göre bir halka yapısına sahiptir. Bu halkaya M modülünün endomorfizmalar halkası denir.

$f: M \rightarrow N$ homomorfizma olsun. Eğer f bire-bir ise f ye bir monomorfizma, f örten ise f ye bir epimorfizma ve f bire-bir örten ise f ye bir izomorfizma denir. M ve N modülleri arasında bir izomorfizma varsa, M ile N modüllerine izomorf modüller denir ve bu durum $M \cong N$ ile gösterilir (Hungerford, 1973).

Tanım 2.3.2: (i) $f: M \rightarrow N$ bir epimorfizma olsun. $fg = 1_N$ olacak şekilde $g: N \rightarrow M$ homomorfizması varsa f epimorfizmasına parçalanabilir denir.

(ii) $f: M \rightarrow N$ bir monomorfizma olsun. $hf = 1_M$ olacak şekilde $h: N \rightarrow M$ homomorfizması varsa f monomorfizmasına parçalanabilir denir (Wisbauer, 1991).

Teorem 2.3.1: M modül ve $N \leq M$ olsun. Her $m \in M$ için $\pi(m) = m + N$ ile tanımlı $\pi: M \rightarrow M/N$ dönüşümü bir epimorfizmadır. Bu epimorfizmaya doğal homomorfizma adı verilir (Hungerford, 1973).

Teorem 2.3.2: M ve N modül olmak üzere, $f: M \rightarrow N$ homomorfizması verilsin. Bu takdirde,

(i) $K \leq M$ ise, $f(K) \leq N$ dir. Özel olarak $\text{Gör}(f) \leq N$ dir.

(ii) $L \leq N$ ise, $f^{-1}(L) \leq M$ dir. Özel olarak $L = 0 \leq N$ alınırsa,

$$f^{-1}(0) = \{m \in M \mid f(m) = 0\}$$

alt modüldür. Bu $f^{-1}(0) \leq M$ alt modülüne f in çekirdeği denir ve $\text{Çek}(f)$ ile gösterilir. $\pi: M \rightarrow M/N$ doğal homomorfizması için $\text{Çek}(\pi) = N$ olduğu açıktır.

(iii) $K \leq M$ ve $L \leq N$ ise, $f^{-1}(f(K)) = K + \text{Çek}(f)$ ve $f(f^{-1}(L)) = L \cap f(M)$ dir.

(iv) $K \leq M$ ve $L \leq N$ ise,

$$f^{-1}(f(K) + L) = K + f^{-1}(L)$$

ve

$$f(f^{-1}(L) \cap K) = L \cap f(K)$$

dir.

(v) g ve h modül homomorfizmaları için $f = gh$ ise $\text{Çek}(f) \cong h^{-1}(\text{Çek}(g))$ dir (Alizade ve Pancar, 1999).

Teorem 2.3.3: $f: M \rightarrow N$ homomorfizma olsun. $\pi: M \rightarrow M/\text{Çek}(f)$ doğal homomorfizma olmak üzere $f = g\pi$ olacak şekilde bir tek $g: M/\text{Çek}(f) \rightarrow N$ monomorfizması vardır ve $M/\text{Çek}(f) \cong f(M)$ dir (Alizade ve Pancar, 1999).

Teorem 2.3.4: M modül ve $N, L \leq M$ olsun. Bu takdirde, $(N + L)/L \cong N/(N \cap L)$ dir (Alizade ve Pancar, 1999).

Teorem 2.3.5: M modül ve $N \leq L \leq M$ olsun. Bu takdirde, $M/L \cong (M/N)/(L/N)$ dir (Alizade ve Pancar, 1999).

Teorem 2.3.6: $f: M \rightarrow K$ bir epimorfizma olsun. Bu durumda K modülünün alt modülleriyle M modülünün $\text{Çek}(f)$ yi kapsayan alt modülleri arasında birebir eşleme vardır. Bu eşleme K nın U alt modülüne M nin $f^{-1}(U)$ alt modülünü karşılık getirerek yapılabilir (Hungerford, 1973).

Sonuç 2.3.1: M modül ve $N \leq M$ olsun. Bu takdirde, M/N bölüm modülünün her alt modülü; K , M nin N yi kapsayan bir alt modülü olmak üzere K/N biçimindedir.

İspat: $\pi: M \rightarrow M/N$ doğal homomorfizması için $N \leq K \leq M$ ise Teorem 2.3.2 (i) den $\pi(K) = K/N \leq M/N$ dir. Tersine; $A \leq M/N$ ise

$$\pi^{-1}(A) = \{m \in M \mid m + N \in A\} = K$$

için $N = \pi^{-1}(0) \leq K \leq M$ ve $\pi(K) = K/N = A$ olduğundan M nin N yi içeren K alt modülü belirlenir.

Tanım 2.3.3: M modül ve N , M nin öz alt modülü olsun. M nin N alt modülünü kapsayan N den başka öz alt modülü yoksa, N öz alt modülüne M modülünün maksimal alt modülü denir (Kasch, 1982; Wisbauer, 1991).

Önerme 2.3.1: M basit R -modül olsun. 0 alt modülü M nin maksimal alt modülüdür her $0 \neq m \in M$ elemanı için $Rm = M$ olup M devirlidir (Kasch, 1982).

İspat: M basit modül olması sebebiyle 0 alt modülünü kapsayan M nin kendisinden başka alt modül yoktur. Dolayısıyla 0 , M nin maksimal alt modülüdür. Her $0 \neq m \in M$ elemanı için Rm , M nin bir alt modülü ve $m \in Rm$ dir. Böylece $0 \neq Rm$ ve M basit olduğundan $Rm = M$ olup M devirlidir.

Teorem 2.3.7: M modül olsun. M nin N alt modülünün maksimal alt modül olması için gerek ve yeter şart M/N bölüm modülünün basit olmasıdır (Wisbauer, 1991).

İspat: N , M nin bir maksimal alt modülü ve $K/N \leq M/N$ olsun. N , M de maksimal alt modül olduğundan $K = N$ veya $K = M$ olmalıdır. Dolayısıyla M/N bölüm modülü basittir. Tersine; M/N bölüm modülü basit olsun. $N \leq K \leq M$ olacak şekilde K alt modülünü alalım. Sonuç 2.3.1 den K/N , M/N bölüm modülünün bir alt modülüdür. M/N basit olduğundan $K/N = M/N$ veya $K/N = N$ olup $K = M$ veya $K = N$ dir. O halde N , M nin maksimal alt modülüdür.

Sonuç 2.3.2: M modül ve $N \leq M$ olsun. Bu takdirde, $N \leq K$ olacak şekildeki bir K alt modülünün M nin bir maksimal alt modülü olması için gerek ve yeter şart K/N alt modülünün M/N nin maksimal alt modülü olmasıdır (Hungerford, 1973).

İspat: $N \leq K$ olacak şekildeki bir K alt modülü maksimal alt modül ise Teorem 2.3.7 den M/K bölüm modülü basittir. Teorem 2.3.5 gereği $M/K \cong (M/N)/(K/N)$ basittir. Dolayısıyla yine Teorem 2.3.7 den K/N alt modülü M/N nin maksimal alt modülüdür.

Tanım 2.3.4: M modül olsun. M nin her öz alt modülü en az bir maksimal alt modül tarafından kapsanıyorsa, M ye eş atom modül denir (Zöschinger, 1974).

Teorem 2.3.8: Sonlu üretilmiş modüller eş atomdur (Sharpe ve Vamos, 1972).

İspat: $M = \langle m_1, m_2, \dots, m_n \rangle$ ve N , M nin öz alt modülü olsun. N yi kapsayan M nin öz alt modülleri kümesini Φ ile gösterelim. Bu takdirde, N öz alt modül olduğundan $N \in \Phi$ olup $\Phi \neq \emptyset$ dir. Φ kümesi kapsama bağıntısına göre sıralı kümedir. Γ , Φ kümesinin tam sıralı bir alt kümesi olsun. C ile Γ kümesinin elemanlarının birleşimini Γ tam sıralı olduğundan $C \leq M$ dir. Üstelik C , M nin öz alt modülüdür. Aksi takdirde $M = \langle m_1, m_2, \dots, m_n \rangle$ olduğundan her bir m_i , Γ ya ait olur. Γ tam sıralı olduğundan Γ nın tüm m_i leri kapsayan bir elemanı vardır. Bu elemana L dersek $L = M$ olur. Dolayısıyla $M \in \Gamma$ bulunur. Bu ise, Γ nın seçimi ile çelişir. Dolayısıyla C , Φ de Γ nın üst sınırıdır. Zorn Lemmasına göre Φ kümesinin M de K maksimal elemanı vardır. Bu K elemanı M nin N yi kapsayan bir maksimal alt modülüdür.

Önerme 2.3.2: M bir R -modül ve N , M nin öz alt modül olsun. N nin M modülünün maksimal alt modülü olması için gerek ve yeter şart her $m \in M - N$ için $N + Rm = M$ olmasıdır (Kasch, 1982).

İspat: ($\Rightarrow$) Her $m \in M - N$ için $N \subsetneq N + Rm$ ve N maksimal alt modül olduğundan, maksimal alt modül tanımı gereği $N + Rm = M$ bulunur.

($\Leftarrow$) K , M nin $N \subsetneq K$ şartını sağlayan bir alt modülü olsun. Eğer $K = M$ olduğunu gösterirsek istenen elde edilir. $N \neq K$ olduğundan en az bir $m \in K - N$ vardır. Bu durumda $m \in M - N$ olup hipotez gereği $N + Rm = M$ olur. Aynı zamanda $m \in K$ olduğundan $Rm \leq K$ olup $M = N + Rm \leq K$ olur. Dolayısıyla $K = M$ dir.

2.4. Direkt Çarpımlar ve Direkt Toplamlar

Tanım 2.4.1: M modül ve $\{M_i\}_{i \in I}$, M nin alt modüllerinin bir ailesi olsun. $M = \sum_{i \in I} M_i$ ve her $k \in I$ için $M_k \cap (\sum_{i \neq k} M_i) = 0$ ise, M ye bu alt modüller ailesinin iç direkt toplamı denir ve $\bigoplus_{i \in I} M_i$ ile gösterilir. Bu durumda her bir M_i alt modülüne de M nin direkt toplam terimi denir. Özel olarak $I = \{1, 2\}$ ise, $M = M_1 \oplus M_2$ olması için gerek ve yeter şart $M = M_1 + M_2$ ve $M_1 \cap M_2 = 0$ olmasıdır (Hungerford, 1973).

Eğer M modülünün 0 ve kendisinden başka direkt toplam terimi bulunmuyorsa M modülüne parçalanamaz modül denir (Sharpe ve Vamos, 1972).

Teorem 2.4.1: $f: M \rightarrow N$, $g: N \rightarrow M$ homomorfizmaları ve $gf = I_M$ olsun. Bu takdirde $N = \text{Gör}(f) \oplus \text{Çek}(g)$ dir (Alizade ve Pancar, 1999).

İspat: Her $n \in N$ için

$$n = f(g(n)) + n - f(g(n))$$

$f(g(n)) \in \text{Gör}(f)$ ve $n - f(g(n)) \in \text{Çek}(g)$ olduğundan $N = \text{Gör}(f) + \text{Çek}(g)$ dir. Şimdi $n \in \text{Gör}(f) \cap \text{Çek}(g)$ alalım. Bu takdirde $g(n) = 0_M$ ve $n = f(m)$ olacak şekilde bir $m \in M$ vardır. Buradan

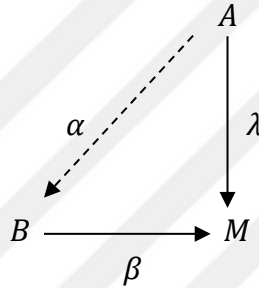
$$0_M = g(n) = g(f(m)) = m$$

olup

$$n = f(m) = f(0_M) = 0_N$$

bulunur. Yani $\text{Gör}(f) \cap \text{Çek}(g) = 0_N$ olup $N = \text{Gör}(f) \oplus \text{Çek}(g)$ dir.

Lemma 2.4.1:



$\lambda = \beta\alpha$ olacak şekilde değişmeli diyagram olsun. Bu takdirde $\text{Gör}(\alpha) + \text{Çek}(\beta) = \beta^{-1}(\text{Gör}(\lambda))$ dir (Kasch, 1982).

İspat: $\lambda = \beta\alpha$ olduğundan $\text{Gör}(\lambda) = \text{Gör}(\beta\alpha) = \beta(\text{Gör}(\alpha))$ olur. Buradan

$$\beta^{-1}(\text{Gör}(\lambda)) = \beta^{-1}(\beta(\text{Gör}(\alpha)))$$

dır. O halde Teorem 2.3.2 (iii) den

$$\beta^{-1}(\text{Gör}(\lambda)) = \text{Gör}(\alpha) + \text{Çek}(\beta)$$

bulunur. Burada λ epimorfizma ise $\text{Gör}(\alpha) + \text{Çek}(\beta) = \beta^{-1}(M) = B$ dir.

Tanım 2.4.2: R halka ve $\emptyset \neq I$ indis kümesi olmak üzere, $\{M_i\}_{i \in I}$ R -modüllerin bir ailesi olsun. $\{\alpha \mid \alpha: I \rightarrow \cup_{i \in I} M_i, \forall i \in I \text{ için } \alpha(i) \in M_i\}$ dönüşümlerin kümesine $\{M_i\}_{i \in I}$ ailesinin çarpımı denir ve bu küme $\prod_{i \in I} M_i$ ile gösterilir. Her $i \in I$ için $\alpha(i) = \alpha_i$ ve $\alpha = (\alpha_i)_{i \in I}$ ile gösterelim. Burada α_i ye α dönüşümünün i . bileşeni denir. Eğer I sayılabilir ise, $\alpha = (\alpha_i)_{i \in I} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots)$ şeklinde gösterilebilir.

$\alpha, \beta \in \prod_{i \in I} M_i$ olmak üzere

(i) $\alpha = \beta \iff$ her $i \in I$ için $\alpha_i = \beta_i$,

$$(ii) \alpha + \beta = (\alpha_i + \beta_i)_{i \in I},$$

$$(iii) -\alpha = (-\alpha_i)_{i \in I},$$

(iv) $r \in R$ olmak üzere $r\alpha = (r\alpha_i)_{i \in I}$ ile tanımlı cebirsel işlemlere göre $\prod_{i \in I} M_i$ bir R -modül yapısına sahiptir. Bu modüle $\{M_i\}_{i \in I}$ modüller ailesinin dış direkt çarpımı denir.

$\bigoplus_{i \in I}^w M_i = \{ (\alpha_i)_{i \in I} \mid \text{sonlu sayıda } i \in I \text{ için } \alpha_i \neq 0 \}$ kümesi $\prod_{i \in I} M_i$ modülünün bir alt modülüdür. $\bigoplus_{i \in I}^w M_i$ alt modülüne $\{M_i\}_{i \in I}$ modüller ailesinin dış direkt toplamı denir. I indis kümesi sonlu ise, $\prod_{i \in I} M_i = \bigoplus_{i \in I}^w M_i$ dir. İç direkt toplam ile dış direkt toplam izomorftur (Alizade ve Pancar, 1999).

Tanım 2.4.3: R bir halka ve $\{M_i\}_{i \in I}$, boş kümeden farklı R -modüller ailesi olsun. Her $n \in I$ için $\pi_n(m_i) = m_n$ ile tanımlı $\pi_n: \bigoplus_{i \in I}^w M_i \rightarrow M_n$ epimorfizmasına n . kanonik projeksiyon denir. Diğer taraftan; her $n = k$ için $m_k = m$ ve $k \neq n$ için $m_k = 0$ olmak üzere $i_n(m_n) = i_n(m) = (m_i)$ ile tanımlı $i_n: M_n \rightarrow \bigoplus_{k \in I} M_k$ fonksiyonuna n . injeksiyon denir (Alizade ve Pancar, 1999).

Tanım 2.4.4: M modül olsun. $\emptyset \neq I$ indis kümesi olmak üzere her $i \in I$ için $M_i = M$ alınırsa, $\bigoplus_{i \in I}^w M_i$ dış direkt toplamına M nin kopyalarının toplamı denir ve $M^{(I)}$ ile ifade edilir (Kasch, 1982).

Tanım 2.4.5: F bir R -modül olsun. I indis kümesi olmak üzere $F = R^{(I)}$ ise, F ye serbest modül ve $I = \{1, 2, \dots, n\}$ biçiminde sonlu elemanlı ise, $F = R^{(n)}$ ye sonlu üretilmiş serbest modül denir (Kasch, 1982).

Tanım 2.4.6: M ve K modüller ve $\emptyset \neq I$ indis kümesi olsun. Eğer $f: M^{(I)} \rightarrow K$ epimorfizması mevcut ise, K ya M -üretilmiş modül denir. Eğer I indis kümesi sonlu elemanlı ise, K ya sonlu M -üretilmiş modül denir (Wisbauer, 1991).

Teorem 2.4.2: R halka olsun. Bu takdirde, her sol R -modül R -üretilmiştir. Dolayısıyla her R -modül bir serbest modülün bölüm modülüne izomorftur (Sharpe ve Vamos, 1972).

İspat: M bir R -modül olsun. M kümesini indis kümesi olarak alalım ve her $(r_m)_{m \in M} \in R^{(M)}$ için $f((r_m)_{m \in M}) = \sum_{m \in M} r_m m$ ile tanımlı $f: R^{(M)} \rightarrow M$ dönüşümünü tanımlayalım. f fonksiyonunun R -modül homomorfizması olduğu gösterilebilir. Şimdi f_n nin epimorfizma olduğunu gösterelim. Her $m \in M$ için bir

$(r_m)_{m \in M} \in R^{(M)}$ elemanını m . bileşeni 1_R ve diğer bileşenleri de 0_R olarak alalım. Bu takdirde, $f((r_m)_{m \in M}) = 1_R m = m$ olup f bir epimorfizmadır. Sonuç olarak M , Teorem 2.3.3 ile $F = R^{(M)}$ serbest modülünün bölüm modülüne izomorftur.

Önerme 2.4.1: M modül ve $\{M_i\}_{i \in I}$, M nin alt modüllerinin ailesi olsun. Bu takdirde her $(m_i)_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I}^w M_i$ için $f((m_i)_{i \in I}) = m_{i_1} + m_{i_2} + m_{i_3} + \dots + m_{i_n}$ ile tanımlı $f: \bigoplus_{i \in I}^w M_i \rightarrow \sum_{i \in I} M_i$ epimorfizması vardır. (Burada $j = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere m_{i_j} ler $(m_i)_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I}^w M_i$ elemanının sıfırdan farklı tüm bileşenleridir) (Hungerford, 1973).

Önerme 2.4.2: R herhangi bir halka ve $i \in I$ için A_i , ${}_R R = \bigoplus_{i \in I} A_i$ olacak şekilde R nin birer sol ideali olsun. Bu takdirde, aşağıdaki özellikler sağlanır.

- (i) $I_0 = \{i \in I | A_i \neq 0\}$ sonlu indis kümesi olmak üzere ${}_R R = \bigoplus_{i \in I_0} A_i$ dır.
- (ii) $i \in I_0$ için $e_i \in A_i$ olmak üzere
 - (a) $A_i = Re_i$ dir.
 - (b) $1_R = \sum_{i \in I_0} e_i$ dir.
 - (c) $i, j \in I_0$ için $e_i e_j = \begin{cases} e_i, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ dir. Buradan, $\{e_i | i \in I_0\}$ ortogonal idempotent bir kümedir.
- (iii) $i \in I_0$ için A_i ideal ise, (ii) deki $e_i \in A_i$ elemanları R nin merkezindedir.
- (iv) $1_R = \sum_{i \in I_0} e_i$ koşulunu sağlayan $e_1, e_2, \dots, e_n \in R$ ortogonal idempotent elemanları için $R = \bigoplus_{i=1}^n Re_i$ dir (Kasch, 1982).

İspat: (i) R halkasının birimi 1_R ve $e_i \in A_i$ olmak üzere $1_R = \sum_{i \in I} e_i$ dir. Buradan $I_0 = \{i \in I | e_i \neq 0\}$ sonlu indis kümesi için $1_R = \sum_{i \in I_0} e_i$ olur. $e_i \in A_i$ olduğundan $i \in I_0$ için $A_i \neq 0$ dır. Şimdi keyfi bir $j \in I$ için $a_j \in A_j$ elemanını ele alalım. Bu takdirde, $1_R = \sum_{i \in I_0} e_i$ eşitliğinin her iki yanını soldan a_j ile çarparsak $a_j = \sum_{i \in I_0} a_j e_i$ olur. $j \notin I_0$ için $a_j = 0 \Rightarrow Ra_j = 0 \Rightarrow A_j = 0$ dır. Böylece ${}_R R = \bigoplus_{i \in I} A_i$ ve $a_j e_i \in A_i$ olduğundan ${}_R R = \bigoplus_{i \in I_0} A_i$ elde edilir.

(ii) (a) $i = j \in I_0$ için $e_i \in A_i$ ve $a_i = a_i e_i$ olup $A_i = A_i e_i \leq Re_i \leq A_i$ olur. Böylece $A_i = Re_i$ bulunur.

(b) (i) den açıktır.

(c) $i \neq j \in I_0$ olduğunda $e_j \neq 0$ ve $e_i = 0$ dır. Buradan $a_j = a_j e_i = 0$ olur. O halde $i, j \in I_0$ için $e_i = a_j$ alınırsa $i = j$ için $e_j = e_j e_j$ ve $i \neq j$ için $e_j e_i = 0$ bulunur.

(iii) $1_R = \sum_{i \in I_0} e_i$ eşitliğinin her iki yanını sağdan ve soldan $r \in R$ ile çarparsak $r = \sum_{i \in I_0} e_i r$ ve $r = \sum_{i \in I_0} r e_i$ olur. Hipotezden A_i ideal olduğundan $e_i r, r e_i \in A_i$ dır. Buradan $\sum_{i \in I_0} e_i r = \sum_{i \in I_0} r e_i$ olup $e_i r = r e_i$ olur. Yani e_i elemanları R nin merkezindedir.

(iv) $1_R = \sum_{i=1}^n e_i$ eşitliğinin her iki yanını soldan $r \in R$ ile çarparsak, $R = \sum_{i=1}^n R e_i$ olur. Diğer taraftan

$$r \in R e_{i_0} \cap \sum_{\substack{i=1 \\ i_0 \neq i}}^n R e_i$$

elemanını alalım. Bu takdirde $r = r e_{i_0}$ ve

$$r = \sum_{\substack{i=1 \\ i_0 \neq i}}^n r_i e_i$$

dır. Dolayısıyla

$$r = r e_{i_0} = \sum_{\substack{i=1 \\ i_0 \neq i}}^n r_i e_i e_{i_0} = 0$$

olup $R = \bigoplus_{i=1}^n R e_i$ elde edilir.

2.5. Küçük Alt Modüller

Tanım 2.5.1: M modül ve K , M nin bir öz alt modül olsun. $K + L = M$ koşulunu sağlayan M nin bir L öz alt modülü yoksa K ya M nin bir küçük alt modülü denir ve $K \ll M$ ile gösterilir (Wisbauer, 1991).

M sıfırdan farklı bir modül olmak üzere M nin her öz alt modülü M nin küçük alt modülü ise, M ye oyuk modül denir (Clark vd, 2006).

Teorem 2.5.1: M modülü için aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i) M modül ve $K \leq N \leq M$ olsun. $N \ll M$ ise, $K \ll M$ dir.

(ii) M modül ve $K \leq N \leq M$ olsun. $K \ll N$ ise, $K \ll M$ dir.

(iii) M modül, $K_1, K_2, \dots, K_m, L_1, L_2, \dots, L_m$, M nin alt modülleri ve her $i = 1, 2, \dots, m$ için $K_i \ll L_i$ olsun. Bu takdirde,

$$K_1 + K_2 + \cdots + K_m \ll L_1 + L_2 + \cdots + L_m \text{ dir.}$$

(iv) M ve N birer modül, K M nin bir alt modülü ve $f: M \rightarrow N$ homomorfizma olsun. $K \ll M$ ise, $f(K) \ll f(M)$ dir.

(v) M modül, $K \leq N \leq M$ ve N , M nin bir direkt toplam terimi olsun. Bu takdirde, $K \ll N$ olması için gerek ve yeter şart $K \ll M$ olmasıdır (Wisbauer,1991).

İspat: (i) $K + L = M$ koşulunu sağlayan M nin bir L alt modülünü alalım. $K \leq N$ olduğundan $N + L = M$ yazılır. Buradan $N \ll M$ olduğundan $L = M$ bulunur. Dolayısıyla $K \ll M$ dir.

(ii) $K + U = M$ koşulunu sağlayan M nin bir U alt modülünü alalım. $N \leq M$ olduğundan $(K + U) \cap N = N$ bulunur. $K \leq N$ olduğundan Önerme 2.2.2 gereğince, $K + (N \cap U) = N$ yazılır. $K \ll N$ olduğundan $N \cap U = N$ bulunur. Buradan $N \subseteq U$ dur. $K \leq N \leq U$ ve $K + U = M$ olduğundan $U = M$ bulunur. Dolayısıyla $K \ll M$ dir.

(iii) İfadenin doğruluğunu $m = 2$ için ispatlayalım. $K_1 + K_2 + U = L_1 + L_2$ koşulunu sağlayan $L_1 + L_2$ nin bir U alt modülünü alalım. $K_1 \ll L_1$ olduğundan (ii) den $K_2 + U = L_1 + L_2$ yazılır. Benzer şekilde $K_2 \ll L_2$ olduğundan tekrar (ii) den $U = L_1 + L_2$ elde edilir. Böylece $K_1 + K_2 \ll L_1 + L_2$ bulunur. Tümevarımla her $2 < m$ tamsayısı içinde ifadenin doğru olduğu gösterilebilir.

(iv) $f(K) + L = f(M)$ koşulunu sağlayan $f(M)$ nin bir L alt modülünü alalım. Bu takdirde, $f^{-1}(f(K) + L) = M$ olup Teorem 2.3.2 (iv) ile $K + f^{-1}(L) = M$ eşitliği elde edilir. $K \ll M$ olduğundan $f^{-1}(L) = M$ bulunur. Tekrar Teorem 2.3.2 (iii) ile O halde $L = f(M)$ dir. Dolayısıyla $f(K) \ll f(M)$ dir.

(v) $(\Rightarrow)$ $K \ll N$ ise, (ii) gereğince $K \ll M$ bulunur.

$(\Leftarrow)$ $K \ll M$ olsun. $K + L = N$ koşulunu sağlayan N nin bir L alt modülünü alalım. N , M nin direkt toplam terimi olması sebebiyle $M = N \oplus U$ şeklinde M nin bir U alt modülü vardır. Buradan $K + L + U = M$ eşitliği elde edilir. $K \ll M$ olduğundan $L + U = M$ dir. Önerme 2.2.2 gereğince $N = L + (U \cap N) = L$ olup $K \ll N$ bulunur.

2.6. Yarı Basit Modüller ve Bir Modülün Desteği

Teorem 2.6.1: R birimli halka olsun. Bu takdirde aşağıdakiler denktir:

(i) R bölme halkasıdır;

(ii) R sol basit halkadır;

(iii) R sağ basit halkadır (Kasch, 1982).

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii) R bölme halkası ve I , R nin sıfırdan farklı bir sol ideali olsun. O halde $a \neq 0$ olacak şekilde $a \in I$ elemanı vardır. R bölme halkası olduğundan $a^{-1}a = 1_R$ olacak şekilde a^{-1} mevcut olup I sol ideal olduğundan $1_R = a^{-1}a \in I$ dır. Böylece her $r \in R$ için $r = r1_R \in I$ olup $I = R$ elde edilir.

(ii) $\Rightarrow$ (i) R sol basit halka olsun. $0 \neq a \in R$ elemanını ele alalım. $Ra = R$ olduğundan $1_R = ra$ olacak şekilde $0 \neq r \in R$ vardır. Diğer taraftan bu r elemanı içinde $tr = 1_R$ olacak şekilde $t \in R$ vardır. Buradan $t = t1_R = t(ra) = (tr)a = 1_R a = a$ olur. Dolayısıyla $ra = 1_R = ar$ olup a nın tersi vardır. R nin sıfırdan farklı her elemanının tersi mevcut olduğundan R bölme halkasıdır.

(i) $\Rightarrow$ (iii) ve (iii) $\Rightarrow$ (i) benzer şekilde gösterilir.

Örnek 2.6.1: Son teoreme göre her bölme halkası basit halkadır. Fakat her basit halkanın bölme halkası olması gerekmez. $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi olmak üzere $M_2(\mathbb{R})$ matris halkasını ele alalım. A , $M_2(\mathbb{R})$ nin sıfırdan farklı bir ideali olsun. Bu takdirde, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ elemanlarının en az biri sıfırdan farklı olacak şekilde $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in A$ vardır. O halde A ideal olduğundan $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ için

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{bmatrix} \in A, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in A$$

ve $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in A$ elde edilir. Böylece $0 \neq a \in \mathbb{R}$ olacak şekilde A idealinde bir $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ matrisi vardır. O halde $a^{-1} \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{bmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

$$\text{dir.} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ ca^{-1} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in A$$

dir. Diğer taraftan $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in A$ olur. O halde

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in A$$

dır. Buradan $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 \in A$ olur. Dolayısıyla $A = M_2(\mathbb{R})$ bulunur. Böylece $M_2(\mathbb{R})$ matris halkası bölme halkası olmayan basit halkadır.

Tanım 2.6.1: M modül olsun. M nin her alt modülü direkt toplam terimi ise, M modülüne yarı basit modül denir (Kasch, 1982).

Lemma 2.6.1: M yarı basit modül olsun. Bu takdirde, M nin sıfırdan farklı her alt modülü bir basit alt modül içerir (Kasch, 1982).

İspat: U , M nin sıfırdan farklı sonlu üretilmiş bir alt modülü olsun. Teorem 2.3.8 dan U bir C maksimal alt modülünü içerir. Hipotezden; $M = C \oplus M_1$ olacak şekilde M_1 alt modülü vardır. Önerme 2.2.2 den $U = M \cap U = C \oplus (M_1 \cap U)$ dır. Böylece $U/C \cong M_1 \cap U$ elde edilir. C , U nun maksimal alt modülü olduğundan Teorem 2.3.7 gereği U/C basittir. Sonuç olarak $M_1 \cap U$, U nun basit alt modülüdür. M nin sıfırdan farklı her alt modülü sonlu üretilmiş bir alt modül kapsayacağından M nin sıfırdan farklı her alt modülü bir basit alt modül içerir.

Lemma 2.6.2: M bir modül olsun. $\{M_i | i \in I\}$ basit alt modüllerin ailesi olmak üzere $M = \sum_{i \in I} M_i$ ve U , M nin herhangi bir alt modülü olsun. Bu takdirde,

(i) $M = U \oplus (\oplus_{i \in J} M_i)$ olacak şekilde $J \subseteq I$ vardır.

(ii) $U \cong \oplus_{i \in K} M_i$ olacak şekilde $K \subseteq I$ vardır (Kasch, 1982).

İspat: (i)

$$\Gamma = \{L \mid L \subseteq I \text{ için } U + \left(\sum_{i \in L} M_i \right) = U \oplus (\oplus_{i \in L} M_i) \}$$

kümesini tanımlayalım. $L = \emptyset$ ise, $\oplus_{i \in \emptyset} M_i = 0$ olduğundan $\emptyset \in \Gamma$ olup $\Gamma \neq \emptyset$ dır. Γ kapsama bağıntısına göre sıralı kümedir. Λ , Γ kümesinin tam sıralı alt kümesi olsun. $L^* = \bigcup_{L \in \Lambda} L$, Λ kümesinin bir üst sınırıdır. Şimdi $L^* \in \Gamma$ olduğunu gösterelim. E sonlu olmak üzere $E \subset L^*$ alt kümesini alalım. Bu takdirde, Λ tam sıralı olması sebebiyle $E \subset L$ şeklinde bir $L \in \Lambda$ vardır. $0 = u + \sum_{i \in E} m_i$ olacak şekilde $u \in U$ ve $m_i \in M_i$ elemanlarını alalım. $E \subset L$ olduğundan her $i \in E$ için $u = m_i = 0$ bulunur. Buradan $U + \sum_{i \in L^*} M_i = U \oplus (\oplus_{i \in L^*} M_i)$ olup $L^* \in \Gamma$ dır. Dolayısıyla Γ nin her tam sıralı alt kümesi bir üst sınıra sahiptir. Zorn Lemmasından Γ nin bir J maksimal elemanı vardır. Kabul edelim ki $N = U + \sum_{i \in J} M_i = U \oplus (\oplus_{i \in J} M_i)$ olsun. Herhangi bir $i_0 \in I$ için $N + M_{i_0}$ alt modülünü alalım. J nin maksimalliğinden dolayı $N + M_{i_0} \neq N \oplus M_{i_0}$

yazılabilir. M_{i_0} basit olduğundan $N \cap M_{i_0} = M_{i_0}$ olup $M_{i_0} \leq N$ bulunur. Yani N, M modülündeki tüm basit alt modülleri kapsar. Sonuç olarak $N = M$ elde edilir.

(ii) (i) den dolayı $M = N \oplus (\oplus_{i \in J} M_i)$ eşitliği elde edilir. Şimdi (i) deki U alt modülü yerine $U = \oplus_{i \in J} M_i$ alt modülünü alalım. Tekrar (i) yi uygularsak

$$M = (\oplus_{i \in J} M_i) \oplus (\oplus_{i \in K} M_i)$$

olacak şekilde $K \subseteq I$ vardır. Teorem 2.3.3 den $U \cong M / \oplus_{i \in J} M_i \cong \oplus_{i \in K} M_i$ izomorfizması bulunur.

Teorem 2.6.2: M modülü için aşağıdaki ifadeler denktir:

- (i) M nin her alt modülü basit alt modüllerin toplamıdır;
- (ii) M basit alt modüllerin toplamıdır;
- (iii) M basit alt modüllerin direkt toplamıdır;
- (iv) M yarı basittir (Kasch, 1982).

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii) Açıktır.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Lemma 2.6.2 (i) de $U = 0$ alınarak bulunur.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Lemma 2.6.2 (i) den açıktır.

(iv) $\Rightarrow$ (i) U, M nin herhangi bir alt modülü olsun. M_i ler U alt modülünde kapsanan basit alt modüller olmak üzere $U_0 = \sum_{M_i \leq U} M_i$ alt modülünü alalım. Hipotezden M nin bir U_0 direkt toplam terimi vardır. Yani $M = U_0 \oplus N$ olacak şekilde $N \leq M$ alt modülü vardır. Önerme 2.2.2 den $U = M \cap U = U_0 \oplus (N \cap U) = 0$ yazılabilir. $N \cap U = 0$ ise $U = U_0$ olup (i) sağlanır. $N \cap V \neq 0$ olsun. Lemma 2.6.1 den $N \cap U$ bir B basit alt modülünü içerir. Bu takdirde, U_0 ın tanımından $B \leq U_0 \cap (N \cap U) = 0$ çelişkisi elde edilir. Sonuç olarak U basit alt modüllerin toplamıdır.

Tanım 2.6.2: M bir modül olsun. M nin basit alt modüllerinin toplamına M nin desteği denir ve $Des(M)$ ile gösterilir (Sharpe ve Vamos, 1972).

Buna göre Teorem 2.6.2 den aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

Sonuç 2.6.1: M modülü için aşağıdaki ifadeler denktir:

- (i) M nin her N alt modülü için $N = Des(N)$ dir;
- (ii) $M = Des(M)$ dir;

(iii) M basit alt modüllerin direkt toplamıdır;

(iv) M yarı basittir (Kasch, 1982).

Sonuç 2.6.2: (i) Yarı basit modüllerin her alt modülü de yarı basittir.

(ii) Yarı basit modülün her homomorfik görüntüsü de yarı basit modüldür.

(iii) Yarı basit modüllerin herhangi sayıdaki toplamı da yarı basittir (Kasch, 1982).

İspat: (i) Teorem 2.6.2 (i) den açıktır.

(ii) M yarı basit modül ve $f: M \rightarrow N$ homomorfizma olsun. Teorem 2.6.2 gereği $M = \sum_{i \in I} A_i$ basit alt modüllerin toplamı şeklinde yazılır. Her $i \in I$ için f in A_i ye kısıtlanışını $f|_{A_i} = g$ ile gösterirsek, A_i basit olduğundan $\text{Çek}(g) = 0$ veya $\text{Çek}(g) = A_i$ olup Teorem 2.3.3 ile $g(A_i)$ basit veya $g(A_i) = 0$ dır. Böylece $f(M) = \sum_{i \in I} f(A_i)$ olduğundan N bir takım basit alt modüllerin toplamıdır. Dolayısıyla Teorem 2.6.2 gereği N yarı basittir.

(iii) M yarı basit modüllerin toplamı olsun. Teorem 2.6.2 den her yarı basit modül basit modüllerin toplamı olduğundan M basit modüllerin toplamıdır. Böylece M yarı basittir.

Tanım 2.6.3: M bir modül ve K, M nin bir alt modülü olsun. K nın M nin sıfırdan farklı her alt modülü ile kesişimi sıfırdan farklı ise, K ya M nin bir büyük alt modülü denir ve $K \trianglelefteq M$ ile gösterilir (Wisbauer, 1991).

Tanım 2.6.4: M modül ve $A \leq M$ olsun. M nin A' alt modülü için $A \cap A' = 0$ ve A' bu şarta göre maksimal ise yani her $A' \leq B \leq M$ için $A \cap B = 0$ olması $B = A'$ olmasını gerektirirse, A' ye A nın kesişime göre tümleyeni denir (Alizade ve Pancar, 1999).

Teorem 2.6.3: Herhangi bir M modülü için

$$\bigcap_{A \trianglelefteq M} A = \text{Des}(M) = \sum_{\substack{N \text{ yarı basit} \\ f \in \text{Hom}(N, M)}} \text{Gör}(f)$$

dir (Kasch, 1982).

İspat: Eşitlikteki ifadeleri sırasıyla M nin U_1, U_2, U_3 alt modülleri ile temsil edelim.

$U_2 \leq U_1$ olduğunu gösterelim. B, M nin herhangi bir basit alt modülü ve A, M nin herhangi büyük alt modülü ise $A \cap B \neq 0$ olup $A \cap B = B$ ve $B \leq A$ olur. Böylece

her büyük alt modül, tüm basit alt modülleri, dolayısıyla bunların toplamını kapsar. Böylece $U_2 \leq U_1$ dir.

$U_3 \leq U_2$ olduğunu gösterelim. Sonuç 2.6.2 (i) den U_3 M nin yarı basit alt modülüdür. O halde basit modüllerin toplamıdır. U_2 , M nin tüm basit alt modüllerinin toplamı olduğundan $U_3 \leq U_2$ elde edilir.

$U_1 \leq U_3$ olduğunu gösterelim. C , U_1 in herhangi bir alt modülü ve C' , C nin M de kesişime göre tümleyeni olsun. Buradan, $C \cap C' = 0$ ve $C + C' = C \oplus C' \trianglelefteq M$ dir. Önerme 2.2.2 den $U_1 = C \oplus (C' \cap U_1)$ dir. Dolayısıyla C , U_1 alt modülünün direkt toplam terimi olup U_1 yarı basittir. $i: U_1 \rightarrow M$ içerme fonksiyonu alınır, $i \in \text{Hom}(U_1, M)$ olup $U_1 \leq U_3$ elde edilir.

Önerme 2.6.1. R halka olsun. R nin sol R -modül olarak yarı basit olması için gerek ve yeter koşul R nin sağ R -modül olarak yarı basit olmasıdır (Kasch, 1982).

İspat: $(\Leftarrow)$ R_R yarı basit olsun. Teorem 2.6.2, Önerme 2.3.1 ve Önerme 2.4.2 gereğince $e_i \neq 0$, $e_i e_j = \begin{cases} e_i, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$, $L_i = e_i R$ basit modül ve $1_R = \sum_{i=1}^n e_i$ olmak üzere $R_R = \bigoplus_{i=1}^n L_i = \bigoplus_{i=1}^n e_i R$ dir. Yine Önerme 2.4.2 (iv) den $R = \bigoplus_{i=1}^n R e_i$ parçalanışı elde edilir. Burada tüm $R e_i$ lerin basit olduğunu gösterirsek istenen elde edilir. Bunun için $i = 1, \dots, n$ için e_i elemanlarından birisi e olmak üzere $0 \neq a \in R e$ keyfi elemanını alalım. O halde $a = r e$ olacak şekilde $r \in R$ vardır. Ayrıca

$$a e = (r e) e = r e^2 = r e = a$$

yazılır. Buradan $R a \leq R e$ dir. Şimdi $R e$ nin basit olduğunu gösterelim. $e R$ basit olduğundan $\varphi(e r) = a e r = a r$ ile tanımlı $\varphi: e R \rightarrow a R$ dönüşümü bir izomorfizmadır. Diğer taraftan, $R_R = a R \oplus U$ olarak yazılırsa

$$\psi(a r + u) = \varphi^{-1}(a r) = e r \in R$$

ile tanımlı $\psi: R \rightarrow R$ dönüşümü bir epimorfizmadır. $r = {}_R 1$ ve $u = 0$ alınır, $b \in R$ için $e = \psi(a) = b a$ olur. Buradan $e \in R a \Rightarrow R e \leq R a$ olup $R e = R a$ bulunur. Dolayısıyla $R e$ basit olup R_R yarı basit elde edilir.

$(\Rightarrow)$ Benzer şekilde ispatlanır.

Önerme 2.6.1 deki denk koşulların birini sağlayan R halkasına yarı basit halka denir. Her bölme halkası yarı basit halkadır, fakat tersi genellikle doğru değildir. Örneğin; $\mathbb{Z}_6$ yarı basit halkadır, fakat bölme halkası değildir.

Sonuç 2.6.3: R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir:

- (i) R yarı basit halkadır;
- (ii) Her sol R -modül yarı basittir;
- (iii) Her sağ R -modül yarı basittir (Kasch, 1982).

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii) R yarı basit halka ve M herhangi bir sol R -modül olsun. Bu takdirde, R sol R -modül olarak yarı basittir. $m \in M$ olsun. Her $r \in R$ için $\varphi(r) = rm$ ile tanımlı $\varphi: {}_R R \rightarrow Rm$ dönüşümü epimorfizma olup Sonuç 2.6.2 (ii) gereği Rm yarı basittir. Sonuç 2.6.2 (iii) den yarı basit modüllerin toplamı da yarı basit olduğundan $M = \sum_{m \in M} Rm$ sol R -modülü yarı basittir.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Açıktır.

(i) $\Rightarrow$ (iii), (i) $\Rightarrow$ (ii) nin ispatına benzer şekilde yapılır.

(iii) $\Rightarrow$ (i) R_R sağ yarı basittir.

Önerme 2.6.2: $\{M_i\}_{i \in I}$, R -modüllerin ailesi olsun. Bu takdirde,

$$Des(\bigoplus_{i \in I} M_i) = \bigoplus_{i \in I} Des(M_i)$$

dir (Wisbauer, 1991).

İspat: Her $i \in I$ için $Des(M_i)$ yarı basit olduğundan $Des(M_i)$, M_i nin basit alt modüllerinin direkt toplamıdır. Dolayısıyla $\bigoplus_{i \in I} Des(M_i)$, $\bigoplus_{i \in I} M_i$ nin yarı basit alt modülüdür. $Des(\bigoplus_{i \in I} M_i)$ de $\bigoplus_{i \in I} M_i$ nin en büyük yarı basit alt modülü olduğundan $\bigoplus_{i \in I} Des(M_i) \subseteq Des(\bigoplus_{i \in I} M_i)$ dir. Tersine X , $\bigoplus_{i \in I} M_i$ nin bir basit alt modülü olsun. Önerme 2.3.1 gereğince $X = Rx$ olacak şekilde $x \in X$ vardır. x in sıfırdan farklı bir bileşeni $x_j \in M_j$ olsun. $\varphi(rx) = rx_j$ ile tanımlı $\varphi: Rx \rightarrow Rx_j$ dönüşümünü alalım. $rx = r'x$ koşulunu sağlayan $r, r' \in R$ için $rx_j = r'x_j$ olduğundan φ iyi tanımlıdır. Her $rx, r'x \in Rx$ ve her $s \in R$ için

$$\varphi(rx + r'x) = (r + r')x_j = rx_j + r'x_j = \varphi(rx) + \varphi(r'x)$$

ve

$$\varphi(s(rx)) = \varphi(sr)x = (sr)x_j = s(rx_j) = s\varphi(rx)$$

eşitlikleri sağlandığından φ , R -modül homomorfizmasıdır. x_j , x in sıfırdan farklı bir bileşeni olduğundan φ nin örten olduğu açıktır. Her $rx_j \in Rx_j$ için $\varphi(0, 0, \dots, 0, rx_j, 0, \dots) = rx_j$ olacak şekilde en az bir $(0, 0, \dots, 0, rx_j, 0, \dots) \in Rx$ var olduğundan φ bir R -modül epimorfizmasıdır. Buradan $\varphi(Rx) = Rx_j$ yazılır. Basit bir modülün homomorfik görüntüsü basit olduğundan Rx_j de basittir. $Des(M_j)$, M_j nin tüm basit alt modüllerini toplamı olduğundan $Rx_j \subseteq Des(M_j)$ dir. Buradan $X = Rx \subseteq \bigoplus_{i \in I} Des(M_i)$ kapsamasından $Des(\bigoplus_{i \in I} M_i) \subseteq \bigoplus_{i \in I} Des(M_i)$ olup $Des(\bigoplus_{i \in I} M_i) = \bigoplus_{i \in I} Des(M_i)$ eşitliği elde edilir.

Uyarı 2.6.1: R halka ve M bir R -modül olsun. $Des({}_R R)$, R sol R -modülünün desteğini göstermek üzere $Des({}_R R)M \leq Des(M)$ dir. Gerçekten, $m \in M$ olmak üzere her $r \in R$ için $f_m(r) = rm$ ile tanımlı $f_m: R \rightarrow M$ dönüşümü homomorfizmadır. Bu takdirde, $f_m(Des({}_R R)) = Des({}_R R)m$ olup Sonuç 2.6.2 (ii) den $f_m(Des({}_R R)) \leq Des(M)$ dir. Her $m \in M$ için $f_m(Des({}_R R)) \leq Des(M)$ olduğundan $Des({}_R R)M \leq Des(M)$ bulunur. $M = {}_R R$ alınırsa, $Des({}_R R)R \leq Des({}_R R)$ olup $Des({}_R R)$, R halkasının bir idealidir (Kasch, 1982).

Benzer yöntemle $Des(R_R)$, R halkasının idealidir ve $Des(R_R) = Des({}_R R)$ eşitliği sağlanmak zorunda değildir.

Önerme 2.6.3: M modül ve K , M nin herhangi bir alt modülü olsun. Bu takdirde $Des(K) = K \cap Des(M)$ dir (Wisbauer, 1991).

İspat: M nin herhangi bir K alt modülü için $Des(K) \subseteq K$ ve $Des(K) \subseteq Des(M)$ olduğundan $Des(K) \subseteq K \cap Des(M)$ dir. Diğer taraftan $a \in K \cap Des(M)$ olsun. O halde $a \in K$ ve $a \in Des(M)$ dir. Ra sonlu üretilmiş yarı basit modül ve $Ra \subseteq K$ dir. Buradan $a \in Ra \subseteq Des(K)$ olur. Yani $a \in Des(K)$ dir. Böylece

$$Des(K) = K \cap Des(M)$$

eşitliği elde edilir.

2.7. Bir Modülün Radikali

Tanım 2.7.1: M bir modül olsun. M nin tüm maksimal alt modüllerinin arakesitine M nin radikali denir ve $Rad(M)$ ile gösterilir. Eğer M nin maksimal alt modülü yoksa $Rad(M) = M$ olarak tanımlanır ve M ye radikal modül denir (Wisbauer, 1991).

M modülünün tüm radikal alt modüllerinin toplamı $P(M)$ ile gösterilir (Zöschinger, 1974). $P(M) = 0$ ise, M modülüne indirgenmiş modül denir. O halde M indirgenmiş ise, sıfırdan farklı her alt modülü bir maksimal alt modül içerir.

Lemma 2.7.1: M modül olsun. $a \in M$ olmak üzere Ra devirli alt modülünün küçük alt modül olmaması için gerek ve yeter koşul $a \notin C$ olacak şekilde M nin bir C maksimal alt modülünün mevcut olmasıdır (Kasch, 1982).

İspat: $a \notin C$ olacak şekilde M nin bir C maksimal alt modülünün mevcut olduğunu kabul edelim. Bu takdirde, C maksimal olduğundan Önerme 2.3.2 den $C + Ra = M$ olup Ra , M modülünde küçük alt modül değildir. Tersine; Ra nın M de küçük alt modül olmadığını kabul edelim. Bu takdirde $Ra + B' = M$ olacak şekilde bir B' öz alt modülü vardır. Şimdi $\Gamma = \{B \mid B, M \text{ nin öz alt modülü, } Ra + B = M\}$ kümesini tanımlayalım. Hipotezden $B' \in \Gamma$ olup $\Gamma \neq \emptyset$ dir. Γ , kapsama bağıntısına göre sıralı bir kümedir. Λ , Γ kümesinin tam sıralı bir alt kümesi olsun. Bu takdirde, $B_0 = \bigcup_{B \in \Lambda} B$, dersek $a \notin B_0$ dir. $a \in B_0$ olsa, $a \in B$ olacak şekilde bir $B \in \Lambda$ vardır ve $Ra \leq B$ dir. Buradan $B = Ra + B = M$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla B_0 , M nin öz alt modülüdür. $B \in \Lambda$ için $B \leq B_0$ olduğundan $Ra + B_0 = M$ dir. Sonuç olarak $B_0 \in \Gamma$ dir. B_0 ın Γ da Λ nın bir üst sınırı olduğu açıktır. O halde Zorn Lemmasından Γ kümesi bir C maksimal elemanını içerir. Şimdi C nin M de maksimal alt modül olduğunu gösterelim. C , $U \leq M$ nun öz alt modülü olsun. Bu takdirde, C , Γ da maksimal olduğundan $U \notin \Gamma$ dir. $M = Ra + C \leq Ra + U \leq M$ olduğundan $Ra + U = M$ ve $U \notin \Gamma$ olduğundan $U = M$ elde edilir. Böylece C , M nin maksimal alt modülüdür. Ayrıca $Ra + C = M$ olduğundan $a \notin C$ dir.

Sonuç 2.7.1: $m \in M$ olmak üzere $Rm \ll M$ olması için gerek ve yeter şart $m \in Rad(M)$ olmasıdır (Kasch, 1982).

Teorem 2.7.1: Herhangi bir M modülü için

$$\sum_{A \ll M} A = \text{Rad}(M) = \bigcap_{\substack{N \text{ yarı basit} \\ f \in \text{Hom}(M, N)}} \text{Çek}(f)$$

dir (Kasch, 1982).

İspat: Eşitlikteki alt modülleri sırasıyla U_1 , U_2 , U_3 ile temsil edelim.

$U_2 \leq U_1$ olduğunu görelim. Bunun için $a \in U_2$ olsun. Ra , M modülünün küçük alt modülü olmasın. Bu takdirde, Lemma 2.7.1 den $a \notin C$ olacak şekilde M nin bir C maksimal alt modülü vardır. Bu ise a nın seçimiyle çelişir. Sonuç olarak Ra küçük alt modül olur ve $a \in Ra \leq U_1$ bulunur.

$U_3 \leq U_2$ olduğunu görelim. B , M de maksimal alt modül ve $\pi: M \rightarrow M/B$ doğal homomorfizma olsun. Teorem 2.3.7 gereği M/B basit modüldür. Böylece $\text{Çek}(\pi) = B$ olduğundan

$$U_3 \subseteq \bigcap_{\substack{B \text{ maksimal} \\ B \leq M}} \text{Çek}(\pi) = \bigcap_{\substack{B \text{ maksimal} \\ B \leq M}} B = U_2$$

bulunur.

$U_1 \leq U_3$ olduğunu görelim. Teorem 2.5.1 (iv) den her $f: M \rightarrow N$ homomorfizması için $A \ll M \Rightarrow f(A) \ll N$ dir. N yarı basit ise, 0 , N nin tek küçük alt modülüdür. O halde $f(A) = 0$ olmalıdır. Yani $A \leq \text{Çek}(f)$ olur. Böylece, $U_1 \leq U_3$ bulunur.

Sonuç olarak bu kapsamalardan istenen eşitlikler elde edilir.

Teorem 2.7.2: M bir eş atom modül olsun. Bu takdirde, $\text{Rad}(M) \ll M$ dir (Wisbauer, 1991).

İspat: $\text{Rad}(M) + L = M$ koşulunu sağlayan bir L alt modülü için $L \neq M$ olsa, hipotez gereğince L , M nin bir K maksimal alt modülü tarafından kapsanır. Buradan $L \leq K$ ve $\text{Rad}(M) \leq K$ olduğundan $M = \text{Rad}(M) + L \leq K$ olup $M = K$ çelişkisi elde edilir. O halde $L = M$ olup $\text{Rad}(M) \ll M$ bulunur.

Sonuç 2.7.2: M sonlu üretilmiş bir modül ise, $\text{Rad}(M) \ll M$ dir (Wisbauer, 1991).

İspat: Teorem 2.3.8 ve Teorem 2.7.2 den görülür.

Lemma 2.7.2: M bir modül olsun. $N \leq M$ ve $\{N_i\}_{i \in I}$, M nin N yi kapsayan bir alt modüller ailesi olsun. Bu takdirde; $\bigcap_{i \in I} (N_i/N) = (\bigcap_{i \in I} N_i)/N$ dir (Kasch, 1982).

İspat: $m + N \in \bigcap_{i \in I} (N_i/N)$ ise her $i \in I$ için $m + N \in N_i/N$ olup $m \in N_i$ dir. Buradan $m \in \bigcap_{i \in I} N_i$ olur ki $m + N \in (\bigcap_{i \in I} N_i)/N$ elde edilir. Benzer işlemler yapılarak ters kapsama gösterilebilir.

Teorem 2.7.3: (i) M ve N birer modül ve $f \in \text{Hom}(M, N)$ olsun. Bu takdirde, $f(\text{Rad}(M)) \leq \text{Rad}(N)$ dir. Eğer $\text{Çek}(f) \leq \text{Rad}(M)$ ise, $f(\text{Rad}(M)) = \text{Rad}(f(M))$ dir;

(ii) $\text{Rad}(M/\text{Rad}(M)) = 0$ dir;

(iii) $U \leq V \leq M$ ise, $\text{Rad}(U) \leq \text{Rad}(V)$ dir;

(iv) $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ ise, $\text{Rad}(M) = \bigoplus_{i \in I} \text{Rad}(M_i)$ dir;

(v) $N \leq M$ ise, $(N + \text{Rad}(M))/N \leq \text{Rad}(M/N)$ ve $N \leq \text{Rad}(M)$ ise

$$\text{Rad}(M/N) = \text{Rad}(M)/N$$

dir;

(vi) M nin radikal modül olması için gerek ve yeter şart M nin her sonlu üretilmiş alt modülünün M de küçük olmasıdır;

(vii) $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ ise

$$M/\text{Rad}(M) \cong \bigoplus_{i \in I} (M_i/\text{Rad}(M_i))$$

dir (Kasch, 1982; Wisbauer, 1991);

İspat: (i) $\text{Rad}(M) = \sum_{L \ll M} L$ olduğundan $f(\text{Rad}(M)) = \sum_{L \ll M} f(L)$ dir. Teorem 2.5.1 (iv) den $f(L) \ll N$ olur. Böylece $f(\text{Rad}(M)) \leq \text{Rad}(N)$ elde edilir. $m \in \text{Rad}(M)$ ise, Sonuç 2.7.1 den $Rm \ll M$ olup Teorem 2.5.1 (iv) den $f(Rm) = Rf(m) \ll f(M)$ dir. Dolayısıyla $f(m) \in \text{Rad}(f(M))$ olup $f(\text{Rad}(M)) \leq \text{Rad}(f(M))$ olur. Şimdi herhangi bir $f(m) \in \text{Rad}(f(M))$ alalım. Sonuç 2.7.1 den $Rf(m) \ll f(M)$ dir. $m \notin \text{Rad}(M)$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde Lemma 2.7.1 den $Rm + K = M$ olacak şekilde M nin bir K maksimal alt modülü vardır. Buradan $Rf(m) + f(K) = f(M)$ olup $Rf(m) \ll f(M)$ olduğundan $f(K) = f(M)$ eşitliği bulunur. Teorem 2.3.2 (iii) den $M = K + \text{Çek}(f)$ olup, $\text{Çek}(f) \leq \text{Rad}(M) \leq K$ olduğundan $M = K$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $m \in \text{Rad}(M)$ olmalıdır. O halde $f(m) \in f(\text{Rad}(M))$ olur. Sonuç olarak $f(\text{Rad}(M)) = \text{Rad}(f(M))$ bulunur.

(ii) Sonuç 2.3.2 den M nin maksimal alt modülleriyle $M/Rad(M)$ bölüm modülünün maksimal alt modülleri arasında birebir eşleme vardır. Bu takdirde X , M nin tüm maksimal alt modüllerinin kümesi olmak üzere $M/Rad(M) = \bigcap_{U \in X} (U/Rad(M))$ olup, Lemma 2.7.2 den

$$\begin{aligned} M/Rad(M) &= \bigcap_{U \in X} (U/Rad(M)) \\ &= \left(\bigcap_{U \in X} U \right) / Rad(M) \\ &= Rad(M)/Rad(M) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

(iii) $i: U \rightarrow V$ içermeye dönüşümünü alalım. (i) gereğince

$$i(Rad(U)) = Rad(U) \leq Rad(V)$$

dir.

(iv) (iii) den $Rad(M_i) \leq Rad(M)$ dir. Buradan

$$\sum_{i \in I} Rad(M_i) = \bigoplus_{i \in I} Rad(M_i) \leq Rad(M)$$

olur. Tersine; $m = \sum_{i \in I} m_i \in Rad(M)$ elemanını alalım. $\pi_i(m) = m_i$ ile tanımlı $\pi_i: M \rightarrow M_i$ i. kanonik projeksiyon olmak üzere (i) gereğince

$$\pi_i(m) = m_i \in Rad(M_i)$$

dir. Böylece $m \in \bigoplus_{i \in I} Rad(M_i)$ olur. Sonuç olarak $\bigoplus_{i \in I} Rad(M_i) = Rad(M)$ eşitliği bulunur.

(v) $\pi: M \rightarrow M/N$ doğal homomorfizması için (i) gereğince

$$\pi(Rad(M)) = (Rad(M) + N)/N \leq Rad(M/N)$$

dir. $\text{Çek}(\pi) = N \leq Rad(M)$ ise Lemma 2.7.2 gereği $Rad(M/N) = Rad(M)/N$ eşitliği elde edilir.

(vi) $M = Rad(M)$ ise, her $m \in M$ için Sonuç 2.7.1 gereği $Rm \ll M$ olur. Buradan Teorem 2.5.1 (iii) den M nin sonlu üretilmiş her öz alt modülü M de küçük olur. Ters, Sonuç 2.7.1 den açıktır.

(vii) Her $\sum m_i \in M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ için

$$f\left(\left(\sum m_i\right) + \text{Rad}(M)\right) = \sum (m_i + \text{Rad}(M_i)) \in \bigoplus_{i \in I} (M_i/\text{Rad}(M_i))$$

ile tanımlı $f: M/\text{Rad}(M) \rightarrow \bigoplus_{i \in I} (M_i/\text{Rad}(M_i))$ dönüşümünün izomorfizma olduğunu gösterelim. $\sum m_i, \sum m'_i \in M$ için $(\sum m_i) + \text{Rad}(M) = (\sum m'_i) + \text{Rad}(M)$ olsun. Bu takdirde $\sum(m_i - m'_i) \in \text{Rad}(M)$ dir. (iv) den $m_i - m'_i \in \text{Rad}(M_i)$ olur. Böylece $m_i + \text{Rad}(M_i) = m'_i + \text{Rad}(M_i)$ olup

$$\sum m_i + \text{Rad}(M_i) = \sum m'_i + \text{Rad}(M_i)$$

bulunur. Dolayısıyla f iyi tanımlıdır. $f(\sum m_i + \text{Rad}(M)) = \sum(m_i + \text{Rad}(M_i)) = 0$ olsun. O halde $\sum m_i + \text{Rad}(M) = \text{Rad}(M)$ olur. Böylece $\text{Çek}(f) = 0$ bulunur. f in epimorfizma olduğu açıktır. Sonuç olarak f izomorfizmadır.

Sonuç 2.7.3: Yarı basit modüllerin radikali 0 dır.

Önerme 2.7.1: Bir M modülü için $\text{Rad}(P(M)) = P(M)$ dir (Wisbauer, 1991).

İspat: $\text{Rad}(P(M)) \leq P(M)$ olduğu açıktır. $m \in P(M)$ olsun. Bu durumda $m = v_1 + v_2 + \dots + v_n$, her $i = 1, 2, \dots, n$ için $v_i \in V_i$ olacak şekilde M nin V_i radikal alt modülleri vardır. Teorem 2.7.3 (iv) den her $i = 1, 2, \dots, n$ için $Rv_i \ll V_i$ dir. Teorem 2.5.1 (iii) gereğince $Rm \ll V_1 + V_2 + \dots + V_n$ dir. Teorem 2.5.1 (ii) gereğince, $Rm \ll P(M)$ olup Sonuç 2.7.1 den $m \in \text{Rad}(P(M))$ bulunur. Dolayısıyla $P(M) \leq \text{Rad}(P(M))$ dir. O halde $\text{Rad}(P(M)) = P(M)$ olduğu görülür.

M modül olsun. Bu takdirde, Önerme 2.7.1 gereğince $P(M) \leq \text{Rad}(M)$ ve $P(M)$, M nin en büyük radikal alt modülüdür.

Uyarı 2.7.1: $P(M) \leq L \leq M$ olmak üzere $\text{Rad}(L/P(M)) = L/P(M)$ olsun. Teorem 2.7.3 (v) gereği

$$\text{Rad}(L)/P(M) = \text{Rad}(L/P(M)) = L/P(M)$$

olup $L = \text{Rad}(L) \leq P(M)$ dir. O halde $L = P(M)$ elde edilir. Sonuç olarak $M/P(M)$ radikal alt modül içermez (Kasch, 1982).

Uyarı 2.7.2: R bir halka ve M bir R -modül olsun. $\text{Rad}({}_R R)$, ${}_R R$ sol R -modülünün radikalini göstermek üzere $\text{Rad}({}_R R)M \leq \text{Rad}(M)$ dir. Gerçekten, $m \in M$ olmak üzere her $r \in R$ için $f_m(r) = rm$ ile tanımlı $f_m: R \rightarrow M$ dönüşümü

homomorfizmadır. Bu takdirde, $f_m(Rad({}_R R)) = Rad({}_R R)m$ olup Teorem 2.7.3 (i) den $f_m(Rad({}_R R)) \leq Rad(M)$ dir. Her $m \in M$ için $f_m(Rad({}_R R)) \leq Rad(M)$ olduğundan $Rad({}_R R)M \leq Rad(M)$ bulunur. $M = {}_R R$ alırsak

$$Rad({}_R R)R \leq Rad({}_R R)$$

olup $Rad({}_R R)$, R halkasının bir idealidir (Kasch, 1982).

Benzer yöntemle $Rad(R_R)$, R halkasının idealidir. Şimdi aşağıdaki önerme yardımıyla $Rad(R_R) = Rad({}_R R)$ eşitliğinin mevcut olduğunu göstereyim.

Önerme 2.7.2: R halka ve I , R nin bir sol ideali olsun. Bu takdirde, aşağıdaki ifadeler denktir:

- (i) $I \ll {}_R R$ dir;
- (ii) $I \leq Rad({}_R R)$ dir;
- (iii) Her $a \in I$ için $1_R - a$ sol terslenebilirdir;
- (iv) Her $a \in I$ için $1_R - a$ terslenebilirdir;
- (v) Her $a \in I$ için $1_R - a$ sağ terslenebilirdir;
- (vi) $I \leq Rad(R_R)$ dir (Wisbauer, 1991).

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii) $Rad({}_R R)$ küçük alt modüllerin toplamı olduğundan açıktır.

(ii) $\Rightarrow$ (i) $I \leq Rad({}_R R)$ olsun. Sonuç 2.7.2 den $Rad({}_R R) \ll R$ olup Teorem 2.5.1 (i) gereği $I \ll {}_R R$ dir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Her $a \in I$ ve her $r \in R$ için $r = ra + r(1_R - a)$ olduğundan

$$R = Ra + R(1_R - a)$$

yazılır. Sonuç 2.7.1 gereği $Ra \ll {}_R R$ olup $R(1_R - a) = R$ elde edilir. Böylece $(1_R - a)$ sol ters elemana sahiptir.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Herhangi bir $a \in I$ için $r(1_R - a) = 1_R$ olsun. Buradan $r = 1_R + ra = 1_R - (-ra)$ olup, $-ra \in I$ olduğundan $s(1 + ra) = 1_R$ olacak şekilde $s \in R$ elemanı vardır. Dolayısıyla $sr = s(1_R - (-ra)) = 1_R$ olup $s(1_R - (-ra)) = s + (sr)a = 1_R$ den $s + a = 1_R$ bulunur. Buradan $s = 1_R - a$ dir. Böylece $(1_R - a)r = sr = 1_R$ olup $(1_R - a)$ terslenebilirdir.

(iv) $\Rightarrow$ (v) Açıktır.

(v) $\Rightarrow$ (vi) R nin bir K sağ ideali için $I + K = R$ ise, $1_R = a + b$ olacak şekilde $a \in I$ ve $b \in K$ elemanları vardır. Buradan $b = 1_R - a$ olup hipotezden $(1_R - a)r = 1_R$ olacak şekilde $r \in R$ elemanı vardır. Dolayısıyla $bR = (1_R - a)R = R$ olduğundan $K = R$ elde edilir. Buradan $I \ll R_R$ olup $I \leq \text{Rad}(R_R)$ elde edilir.

(vi) $\Rightarrow$ (v) (ii) den (iii) ye geçişteki gibi benzer yolla yapılabilir.

(v) $\Rightarrow$ (iv) (iii) den (iv) ye geçişteki gibi benzer yolla yapılabilir.

(iv) $\Rightarrow$ (iii) Açıktır.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Herhangi bir $a \in I$ alalım. R nin K sol ideali için $Ra + K = R$ ise, $1_R = ra + s$ olacak şekilde $r \in R$ ve $s \in K$ vardır. $a \in I$ olduğundan $ra \in I$ olup hipotezden $s = 1_R - ra$ nın R de sol tersi vardır. Dolayısıyla K, R nin birim elemanını içerir ve buradan $K = R$ elde edilir. $Ra \ll R$ olup $a \in I$ olduğundan Sonuç 2.7.1 gereği $I \leq \text{Rad}({}_R R)$ elde edilir.

Sonuç 2.7.4: Herhangi bir R halkası için $\text{Rad}({}_R R) = \text{Rad}(R_R)$ dir (Wisbauer, 1991).

İspat: Önerme 2.7.2 de $I = \text{Rad}({}_R R)$ alınırsa $\text{Rad}({}_R R) \leq \text{Rad}(R_R)$ olur. Önermedeki denklikler sağ R -modül için yapılırsa $\text{Rad}(R_R) \leq \text{Rad}({}_R R)$ olduğu gösterilebilir. Böylece $\text{Rad}({}_R R) = \text{Rad}(R_R)$ elde edilir.

Bu eşitlikten dolayı $\text{Rad}(R) = \text{Rad}({}_R R)$ olarak alacağız. $\text{Rad}(R)$ idealeine, R halkasının Jacobson radikali denir.

Önerme 2.7.3: M bir R -modül olsun. Bu takdirde, $\text{Rad}(R)\text{Des}(M) = 0$ dir. Özel olarak, $M = {}_R R$ için $\text{Rad}(R)\text{Des}({}_R R) = 0$ dir (Kasch, 1982).

İspat. Her $m \in \text{Des}(M)$ için $f_m(r) = rm$ ile tanımlı $f_m: R \rightarrow \text{Des}(M)$ dönüşümü homomorfizmadır. Teorem 2.7.3 (i) gereği $f_m(\text{Rad}(R)) \leq \text{Rad}(\text{Des}(M)) = 0$ olduğundan $\text{Rad}(R) \leq \text{Çek}(f_m)$ dir. Dolayısıyla her $r \in \text{Rad}(R)$ için $r \in \text{Çek}(f_m)$ olup $f_m(r) = rm = 0$ bulunur. Böylece $\text{Rad}(R)\text{Des}(M) = 0$ dir.

Aşağıdaki Lemma bir sol $\mathbb{Z}$ -modül olarak $(\mathbb{Q}, +)$ rasyonel sayılar grubunun radikalini belirlemek için önemlidir.

Lemma 2.7.3: Bir $\mathbb{Z}$ -modül olarak $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar halkası için $\mathbb{Q} = \langle X \rangle$ ise, Bu durumda her $1 \leq n \in \mathbb{Z}$ için $x_i \in X, i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere

$$\bar{X} = X - \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

için $\mathbb{Q} = \langle \bar{X} \rangle$ dir (Kasch, 1982).

İspat: $n = 1$ için ispatı yapmak yeterlidir. $1 \leq n$ için ifadenin doğruluğu tümevarımla gösterilebilir. $\mathbb{Q} = \langle X \rangle$ ve bir $x_1 \in X$ için $\bar{X} = X - \{x_1\}$ olsun. $\frac{x_1}{2} \in \mathbb{Q} = \langle X \rangle$ olduğundan Önerme 2.2.1 ile $\frac{x_1}{2} = z_1 x_1 + \sum_{x_1 \neq x_i} z_i x_i$ olacak şekilde $z_i \in \mathbb{Z}$ ve $x_i \in X$ vardır. Buna göre $x_1 = (2z_1)x_1 + \sum_{x_1 \neq x_i} (2z_i)x_i$ dir. $m = 1 - 2z_1 \in \mathbb{Z}$ denirse $z_1 \in \mathbb{Z}$ olduğundan $m \neq 0$ ve $m x_1 = \sum_{x_1 \neq x_i} (2z_i)x_i$ olur. Benzer şekilde $\frac{x_1}{m} \in \mathbb{Q}$ için $\frac{x_1}{m} = z'_1 x_1 + \sum_{x_1 \neq x_j} z'_j x_j$ olacak şekilde $z'_j \in \mathbb{Z}$ ve $x_j \in X$ vardır. Buna göre $x_1 = (m z'_1)x_1 + \sum_{x_1 \neq x_j} (m z'_j)x_j = z'_1(m x_1) + \sum_{x_1 \neq x_j} (m z'_j)x_j$

dir. Bu eşitlikte $m x_1$ in yerine karşılığı yazılırsa

$$x_1 = \sum_{x_1 \neq x_i} (2z'_1 z_i)x_i + \sum_{x_1 \neq x_j} (m z'_j)x_j = \sum_{x_1 \neq x_k} z''_k x_k$$

$z''_k \in \mathbb{Z}$, $x_k \in X$ elde edilir. Böylece $x_1, \bar{X} = X - \{x_1\}$ in ürettiği alt modülün bir elemanıdır. O halde $\mathbb{Q} = \langle X \rangle$ ise $\mathbb{Q} = \langle X - \{x_1\} \rangle = \langle \bar{X} \rangle$ dir.

Sonuç 2.7.5: ${}_Z\mathbb{Q}$ sonlu üretilmiş bir modül değildir (Kasch, 1982).

İspat: $\mathbb{Q}$ nun bir $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ sonlu alt kümesi için $\langle X \rangle = {}_Z\mathbb{Q}$ olsun. Bu durumda X sonlu bir küme olduğundan Lemma 2.7.3 ile

$${}_Z\mathbb{Q} = \langle X \rangle = \langle X - \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \rangle = \langle \emptyset \rangle = 0$$

çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla ${}_Z\mathbb{Q}$ sonlu üretilmiş bir modül değildir.

Sonuç 2.7.6: ${}_Z\mathbb{Q}$ modülünün maksimal alt modülü yoktur. Böylece $Rad({}_Z\mathbb{Q}) = {}_Z\mathbb{Q}$ dur (Kasch, 1982).

İspat: N , $\mathbb{Q}$ nun bir maksimal alt modülü olsun. O halde Önerme 2.3.2 gereği her $a \in \mathbb{Q} - N$ için $N + \mathbb{Z}a = \mathbb{Q}$ dur. $X = N \cup \{a\}$ alınırsa $\langle X \rangle = N + \mathbb{Z}a = \mathbb{Q}$ olup X , $\mathbb{Q}$ nun bir üreteç kümesidir. Lemma 2.7.3 den $\mathbb{Q} = \langle X \rangle = \langle X - \{a\} \rangle = \langle N \rangle = N$ çelişkisi elde edilir.

Şimdi $n > 0$ için $\mathbb{Z}_n$ sol $\mathbb{Z}$ -modülünün desteğini ve radikalini izomorfizma farkıyla karakterize edelim.

Örnek 2.7.1: $\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ izomorfizmasından yararlanalım. $\mathbb{Z}$ sol $\mathbb{Z}$ -modülünün alt modüllerini $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $n\mathbb{Z}$ şeklinde olduğunu biliyoruz. Ayrıca bir $n\mathbb{Z}$ alt modülünün maksimal olması için gerek ve yeter şart $n \in \mathbb{Z}$ sayısının asal olmasıdır. $1 < n$ tam sayısının asal çarpanlarına ayrılışı, $i = 1, \dots, k$ için p_i ler farklı asallar, $1 \leq m_i \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k}$ olsun. Bu durumda $\mathbb{Z}$ nin $n\mathbb{Z}$ alt modülünü kapsayan maksimal alt modülleri $i = 1, \dots, k$ için $p_i\mathbb{Z}$ alt modülleridir ve $\bigcap_{i=1}^k p_i\mathbb{Z} = (p_1 p_2 \dots p_k)\mathbb{Z}$ dir. Buna göre Sonuç 2.3.2 gereği $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ nin maksimal alt modülleri $p_i\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ler dir. Böylece

$$Rad(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \bigcap_{i=1}^k (p_i\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \left(\bigcap_{i=1}^k p_i\mathbb{Z} \right) / n\mathbb{Z} = (p_1 p_2 \dots p_k)\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

dir. O halde $Rad(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $n = p_1 p_2 \dots p_k$ olmasıdır. Özel olarak $n = 0$ ve $n = 1$ için $Rad(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0$ dir.

Şimdi $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ nin desteğini belirleyelim. $n = 0$ ve $n = 1$ için

$$Des(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0$$

dir. Öncelikle; $n = p$ asal sayı ise, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ $\mathbb{Z}$ -modül olarak basittir. Dolayısıyla, $Des(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ dir. n tamsayısı asal değilse $1 < q < n$ olacak şekilde en az bir q tamsayı böleni vardır ve $q\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ nin sıfırdan farklı öz alt modülüdür. Bu durumda n nin asal çarpanlara ayrılışı yine $n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k}$ olmak üzere her $i = 1, 2, \dots, k$ için $\frac{n}{p_i}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z}$ olduğundan $\frac{n}{p_i}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ bölüm modülü $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ nin basit alt modülüdür. O halde

$$\sum_{i=1}^k \left(\frac{n}{p_i}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \right) = \left(\sum_{i=1}^k \frac{n}{p_i}\mathbb{Z} \right) / n\mathbb{Z} = \frac{n}{p_1 \dots p_k}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \leq Des(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

olur. Diğer taraftan $n = qn_1$ olacak şekilde q böleni için $q\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ bölüm modülünün $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ nin basit alt modülü olması için n_1 sayısı $p_1, p_2, \dots, p_k$ asal sayılarından biri olmak zorundadır. Aksi takdirde, $q\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ nin mertebesi asal olmaz ve böylece $q\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ basit olamaz. O halde $Des(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \frac{n}{p_1 p_2 \dots p_k}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dir. Özel olarak

$$Des(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

olması için gerek ve yeter şart $n = p_1 p_2 \dots p_k$ olmalıdır.

Örnek 2.7.2: p bir asal olmak üzere $1 \leq m \in \mathbb{Z}$ için

(i)

$$Rad(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}) = p\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/p^{m-1}\mathbb{Z}$$

dir. Örneğin $p = 2$ ve $m = 4$ alınırsa $Rad(\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}) = 2\mathbb{Z}/16\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_8$ dir.

(ii)

$$Des(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}) = \frac{p^m}{p}\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} = p^{m-1}\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_p$$

dir. Örneğin yine $p = 2$ ve $m = 4$ alınırsa $Des(\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_2$ dir.

$Rad(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}) = (2.5)\mathbb{Z}/10\mathbb{Z} = 10\mathbb{Z}/10\mathbb{Z} = 0$ ve $n = 50 = 2.5^2$ için

$$Des(\mathbb{Z}/50\mathbb{Z}) = \frac{50}{2.5}\mathbb{Z}/50\mathbb{Z} = 5\mathbb{Z}/50\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_{10} \text{ olur.}$$

Örnek 2.7.3: p bir asal olmak üzere $M = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_p$ sol $\mathbb{Z}$ -modülünü alalım. Teorem 2.7.3

(iv) gereği

$$Rad(M) = Rad(\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_p) = Rad(\mathbb{Q}) \oplus Rad(\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Q} \oplus 0$$

ve Önerme 2.6.2 gereği

$$Des(M) = Des(\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_p) = Des(\mathbb{Q}) \oplus Des(\mathbb{Z}_p) = 0 \oplus \mathbb{Z}_p$$

olup $Rad(M) \cap Des(M) = 0$ dir.

Önerme 2.7.4: M bir modül ve $N \leq M$ olsun. Bu takdirde,

(i) M eş atom ise, M/N eş atomdur.

(ii) N ve M/N eş atom ise, M eş atomdur (Zöschinger, 1974).

İspat: (i) K, M nin bir öz alt modülü olsun. M eş atom olduğundan K yı kapsayan bir U maksimal alt modülü vardır. Sonuç 2.3.1 gereği $K/N, M/N$ nin bir öz alt modülüdür. Ayrıca Sonuç 2.3.2 ile $U/N, M/N$ nin bir maksimal alt modülüdür. $K \subseteq U$ olduğundan $K/N \subseteq U/N$ olduğu açıktır. Dolayısıyla M/N eş atomdur.

(ii) K, M nin bir öz alt modülü olsun. Bu takdirde, $\pi: M \rightarrow M/N$ doğal homomorfizması için $\pi(K) = (K + N)/N$ olup $(K + N)/N = M/N$ ise $K + N = M$ olur. N eş atom modül olduğundan $N \cap K$ öz alt modülü için $N \cap K \leq X \leq N$ olacak şekilde N nin bir X maksimal alt modülü vardır. Buradan

$$M/(K + X) = (K + N)/(K + X)$$

$$= (K + N + X)/(K + X)$$

$$\cong N/(N \cap (K + X))$$

$$\cong N/((N \cap K) + X) = N/X$$

olur. Böylece Teorem 2.3.7 gereği N/X basit modül olduğundan, $K + X$ modülü M nin K yı kapsayan bir maksimal alt modüldür. Eğer $(K + N)/N \neq M/N$ ise M/N eş atom olduğundan $(K + N)/N \leq P/N$ olacak şekilde M nin bir P maksimal alt modülü vardır. $K + N \leq P$ olduğundan $K \leq P$ olup M eş atomdur.



3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde, tezde çalıştığımız konuya temel teşkil eden tümlenmiş modül ve Rad-tümlenmiş modül kavramlarının önemli özellikleri verildi. Daha sonra çalışmamızda ss-tümlenmiş modüllerin Dedekind bölgeleri üzerinde karakterizasyonu için kullanacağımız injektif ve projektif modül kavramlarına ve her alt modülü tümlenmiş olan mükemmel modüllerin bazı özellikleri ispatlandı. Artinian ve Noetherian modüllerinin tanımı ve özelliklerine yer verildi.

3.1. Tümlenmiş ve Rad-Tümlenmiş Modüller

Tanım 3.1.1: M bir modül ve $U \leq M$ olsun. $M = U + V$ olacak şekilde bir $V \leq M$ var ve V bu şarta göre minimal ise, yani $U + L = M$ koşulunu gerçekleyen her $L \leq V$ için $L = V$ ise, V ye M de U nun toplama göre tümleyeni veya kısaca tümleyeni ve U ya M de tümleyene sahiptir denir. Eğer $M = U + K$ koşulunu sağlayan her K alt modülü için M de U nun K tarafından kapsanan bir tümleyeni mevcutsa, U ya M de bol tümleyene sahiptir denir (Wisbauer, 1991).

M bir modül ve $N \ll M$ olsun. Bu takdirde, küçük alt modül tanımı gereği M , N alt modülünün tümleyenidir. Dolayısıyla modülün kendisi sıfır alt modülünün tek tümleyenidir.

Tanım 3.1.2: M bir modül olsun. M nin her alt modülü tümleyene sahip ise, M ye tümlenmiş modül denir. M modülünün her alt modülü bol tümleyene sahip ise, M modülüne bol tümlenmiş modül denir. (Wisbauer, 1991).

Önerme 3.1.1: M modül ve $U, V \leq M$ olsun. V alt modülünün U nun M de tümleyeni olması için gerek ve yeter şart $M = U + V$ ve $U \cap V \ll V$ olmasıdır. (Wisbauer, 1991).

İspat: V, U nun M de bir tümleyeni olsun. Bu takdirde, $M = U + V$ dir. Bir $N \leq V$ için $V = U \cap V + N$ olsun. Bu durumda

$$M = U + V = U + U \cap V + N = U + N$$

olup V, U nun tümleyeni olduğundan $N = V$ elde edilir. Dolayısıyla $U \cap V \ll V$ dir. Tersine; $M = U + V$ ve $U \cap V \ll V$ olsun. Bir $N \leq V$ için $M = U + N$ ise Önerme 2.2.2 den $V = U \cap V + N$ olup $U \cap V \ll V$ olduğundan $N = V$ elde edilir.

Sonuç 3.1.1: Her yarı basit modül tümlenmiştir.

Önerme 3.1.2: (i) M bir modül ve $U, N \leq M$ olmak üzere N tümlenmiş ve $N + U, M$ de bir tümleyene sahip ise U, M de bir tümleyene sahiptir;

(ii) Sonlu sayıda tümlenmiş modülün toplamı tümlenmiştir;

(iii) M tümlenmiş ise, M modülünün her bölüm modülünde tümlenmiştir; (Wisbauer, 1991).

Önerme 3.1.3: M bir modül ve $U, V \leq M$ ve V, U nun M de bir tümleyeni olsun. Bu durumda

(i) $K \ll M$ ise $K \cap V \ll V$ ve $Rad(V) = V \cap Rad(M)$ dir.

(ii) $Rad(M) \ll M$ ise U, M nin bir maksimal alt modül tarafından kapsanır (Wisbauer, 1991).

İspat: (i) $K \ll M$ ve $(K \cap V) + X = V$ olacak şekilde $X \leq V$ olsun. O halde Teorem 2.5.1 (i) den $K \cap V \ll M$ olup $M = U + V = U + (K \cap V) + X = U + X$ elde edilir. V, U nun tümleyeni olduğundan $X = V$ dir. O halde $K \cap V \ll V$ dir. Böylece $V \cap Rad(M) \subseteq Rad(V)$ dir. Diğer taraftan $Rad(V) \subseteq V \cap Rad(M)$ olduğu açıktır. Sonuç olarak $Rad(V) = V \cap Rad(M)$ elde edilir.

(ii) $U \subseteq Rad(M)$ için iddianın doğruluğu açıktır. $U \not\subseteq Rad(M)$ olsun. Bir $K \leq V$ için $V \cap Rad(M) + K = V$ olsun. Önerme 2.2.2 den $(K + Rad(M)) \cap V = V$ ve buradan $V \leq K + Rad(M)$ elde edilir. O halde $M = U + V = U + K + Rad(M)$ ve $Rad(M) \ll M$ olduğundan $M = U + K$ olur. V, U nun tümleyeni olduğundan $K = V$ olup $V \cap Rad(M) \ll V$ dir. (i) den $Rad(V) \ll V$ dir. $Rad(V) \neq V$ olduğundan V nin en az bir V' maksimal alt modülü vardır. Her $a \in U$, her $b \in V$ için

$$f(a + b) = b + V'$$

ile tanımlı $f: M \rightarrow V/V'$ fonksiyonu bir epimorfizma olup $\text{Çek}(f) = U + V'$ dür. Teorem 2.3.3 ile $M/(U + V') \cong V/V'$ dür. V/V' basit olduğundan $U + V', M$ nin bir maksimal alt modülüdür. $U \leq U + V'$ olduğu açıktır.

Önerme 3.1.4: M modül ve V, U nun M de tümleyeni olsun. Bu takdirde, $Rad(M/U) = (Rad(M) + U)/U$ dur (Zöschinger, 1974).

İspat. V, U nun M de tümleyeni olduğundan $M = U + V$ ve $U \cap V \ll V$ dir. Teorem 2.7.1 den $U \cap V \leq \text{Rad}(V)$ dir. Teorem 2.7.3 (iii) gereği $\text{Rad}(V) \leq \text{Rad}(M)$ olduğundan $U \cap V \leq \text{Rad}(M)$ dir. Teorem 2.3.4 den

$$M/U = (U + V)/U \cong V/(U \cap V)$$

olup

$$\text{Rad}(M/U) = \text{Rad}(V/(U \cap V))$$

dir. $U \cap V \leq \text{Rad}(V)$ olduğundan $\text{Rad}(V/(U \cap V)) = \text{Rad}(V)/(U \cap V)$ olur. Önerme 3.1.3 (i) şikkından $\text{Rad}(V) = V \cap \text{Rad}(M)$ ve $U \cap V \leq \text{Rad}(M)$ olduğundan

$$(\text{Rad}(V))/(U \cap V) = (V \cap \text{Rad}(M))/(U \cap (V \cap \text{Rad}(M)))$$

$$\cong U + (V \cap \text{Rad}(M))/U \leq (\text{Rad}(M) + U)/U$$

olup $\text{Rad}(M/U) \leq (\text{Rad}(M) + U)/U$ bulunur. Tersine $n + U \in (\text{Rad}(M) + U)/U$ olup $n = m + u$ olacak şekilde $m \in \text{Rad}(M)$ ve $u \in U$ vardır. Dolayısıyla $n + U = m + U$ biçimindedir. $m \in \text{Rad}(M)$ olduğundan $Rm \ll M$ dir. $\pi: M \rightarrow M/U$ doğal homomorfizmasını göz önüne alalım. Teorem 2.5.1 (iv) den

$$\pi(Rm) \ll \pi(M) = M/U$$

olup $R\pi(m) \ll M/U$ dur. Buradan Teorem 2.7.1 gereğince $\pi(m) = m + U \in \text{Rad}(M/U)$ olur. Böylece $n + U \in \text{Rad}(M/U)$ olduğundan $(\text{Rad}(M) + U)/U \leq \text{Rad}(M/U)$ bulunur.

Önerme 3.1.5: M oyuk modüllerin direkt toplamı ve $\text{Rad}(M) \ll M$ olsun. Bu takdirde, M tümlenmiştir (Zöschinger, 1974).

İspat: Her $i \in I$ için M_i ler oyuk modüller, $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ ve $\text{Rad}(M) \ll M$ olsun. $\bar{M}_i = (M_i + \text{Rad}(M))/\text{Rad}(M) \cong M_i/(M_i \cap \text{Rad}(M)) = M_i/\text{Rad}(M_i)$ olur. O halde her $i \in I$ için M_i oyuk olduğundan $\text{Rad}(M_i) = M_i$ veya $\text{Rad}(M_i) \ll M_i$ dir. $\text{Rad}(M_i) = M_i$ ise $\bar{M}_i = 0$ dir. $\{M_i | i \in I\}$ ailesinde radikali kendisine eşit olmayan modüllerin alt ailesi $K \subseteq I$ olmak üzere $\{M_i | i \in K\}$ olsun. Bu takdirde her $i \in K$ için $\text{Rad}(M_i) \ll M_i$ olup $\bar{M}_i = M_i/\text{Rad}(M_i)$ basittir. O halde

$$M/\text{Rad}(M) = \bar{M} \cong \bigoplus_{i \in I} \bar{M}_i$$

yarı basit modüldür. O halde $U \leq M$ için $\bar{U} = (U + \text{Rad}(M))/\text{Rad}(M)$ olmak üzere Lemma 2.6.2 (i) ile $\bar{M} = (\bigoplus_{i \in J} \bar{M}_i) \oplus \bar{U}$ olacak şekilde bir $J \subseteq I$ indis kümesi vardır.

$V = \bigoplus_{i \in J} M_i$ diyelim. Bu takdirde, $\bar{M} = \bar{U} \oplus \bar{V}$ ve $U \cap V \leq \text{Rad}(M)$ olup $\text{Rad}(M) \ll M$ olduğundan $U \cap V \ll M$ dir. V, M nin direkt toplam terimi olduğundan Teorem 2.5.1 (v) gereği $U \cap V \ll V$ olur. Böylece V, U nun M de tümleyenidir.

Tanım 3.1.3: M modül ve $U \leq M$ olsun. $M = U + V$ ve $U \cap V \leq \text{Rad}(V)$ olacak şekilde M nin bir V alt modülü varsa V ye U nun Rad-tümleyeni ve U ya M de Rad-tümleyene sahiptir denir. (Xue, 1996).

Tanım 3.1.4: M modül ve $U \leq M$ olsun. $M = U + V$ olacak şekildeki her $V \leq M$ için M de U nun V ile kapsanan bir Rad-tümleyeni varsa, U ya M de bol Rad-tümleyene sahiptir denir (Xue, 1996).

Tanım 3.1.5: M modül olsun. M modülünün her alt modülü Rad-tümleyene sahip ise, M modülüne Rad-tümlelenmiş modül denir. M modülünün her alt modülü bol Rad-tümleyene sahip ise, M ye bol Rad-tümlelenmiş modül denir (Xue, 1996).

Önerme 3.1.6: (i) M Rad-tümlelenmiş modül ve $\text{Rad}(M) = 0$ ise, M yarı basittir;

(ii) M Rad-tümlelenmiş modül ise, M nin her bölüm modülü Rad-tümlelenmiştir;

(iii) Rad-tümlelenmiş modüllerin her sonlu toplamı Rad-tümlelenmiştir (Wang ve Ding, 2006).

3.2. Projektif ve İnjektif Modüller

Tanım 3.2.1: $\{ M_n \mid n \in \mathbb{Z} \}$ modüllerin ailesinden ve bunların

$$\{ f_n: M_n \rightarrow M_{n-1} \mid n \in \mathbb{Z} \}$$

homomorfizmalarının ailesinden oluşan

$$\dots \rightarrow M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \rightarrow \dots$$

dizisinde her $n \in \mathbb{Z}$ için $\text{Gör}(f_{n+1}) = \text{Çek}(f_n)$ ise bu diziye tam dizi denir.

$$0 \rightarrow M_3 \rightarrow M_2 \rightarrow M_1 \rightarrow 0$$

şeklindeki tam diziye kısa tam dizi denir (Alizade ve Pancar, 1999).

Teorem 3.2.1: $0 \rightarrow A \xleftarrow[h]{f} B \xleftarrow[k]{g} C \rightarrow 0$ kısa tam dizisi için aşağıdaki koşullar denktir:

(i) $hf = 1_A$ olacak şekilde bir $h: B \rightarrow A$ homomorfizması bulunur;

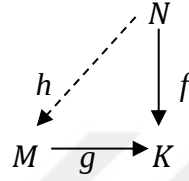
(ii) $Gör(f)$, B nin bir direkt toplam terimidir;

(iii) $gk = 1_C$ şeklinde bir $k: C \rightarrow B$ homomorfizması bulunur.

Bu durumda $B \cong A \oplus C$ dır.

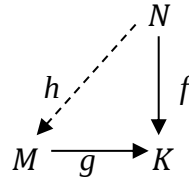
Bu denk koşullardan herhangi birini sağlayan kısa tam diziye parçalanmış kısa tam dizi denir (Kasch, 1982).

Tanım 3.2.2: (i) M ve N birer modül olsun. Her $g: M \rightarrow K$ epimorfizması ve her $f: N \rightarrow K$ homomorfizmaları için



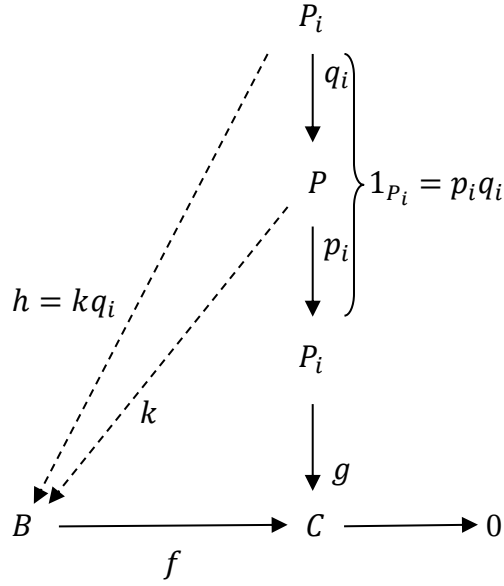
diyagramı değişmeli ise yani $f = gh$ olacak şekilde bir $h: N \rightarrow M$ homomorfizması varsa N ye bir M -projektif modül denir.

(ii) N bir modül olsun. Her $g: M \rightarrow K$ epimorfizması ve her $f: N \rightarrow K$ homomorfizması için aşağıdaki diyagram değişmeli ise, N ye bir projektif modül denir.



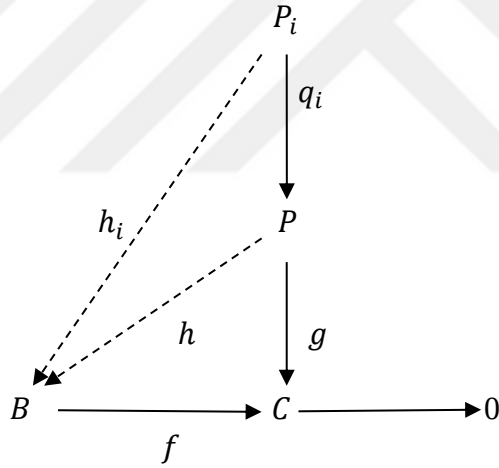
Teorem 3.2.2: $\{P_i\}_{i \in I}$ modüller ailesi olsun. $P = \bigoplus_{i \in I} P_i$ modülünün projektif olması için gerek ve yeter koşul her $i \in I$ için P_i lerin projektif olmasıdır (Kasch, 1982).

İspat: ($\Rightarrow$) P projektif olmak üzere herhangi bir $f: B \rightarrow C$ epimorfizmasını ve $i \in I$ için $g: P_i \rightarrow C$ homomorfizmasını ele alalım. p_i i. projeksiyon, q_i i. injeksiyon olsun. P projektif olduğundan $gp_i: P \rightarrow C$ homomorfizması için $gp_i = fk$ olacak şekilde $k: P \rightarrow B$ homomorfizması vardır.



Bu takdirde $g = g1_{P_i} = gp_i q_i = fkq_i = fh$ olur. Böylece her $i \in I$ için P_i modülleri projektiftir.

($\Leftarrow$) Tersine her $i \in I$ için P_i modülleri projektif olsun.



$f: B \rightarrow C$ bir epimorfizma ve $g: P \rightarrow C$ bir homomorfizma olsun. Her $i \in I$ için P_i modülleri projektif olduğundan $gq_i: P_i \rightarrow C$ homomorfizması için $gq_i = fh_i$ olacak şekilde $h_i: P_i \rightarrow B$ homomorfizması vardır. Bu şartlar altında her $(a_i) \in P = \bigoplus_{i \in I} P_i$ için $h(a_i) = \sum h_i(a_i)$ ile tanımlı $h: P \rightarrow B$ fonksiyonu bir homomorfizmadır ve $h_i = hq_i$ dir. Şimdi $g = fh$ olduğunu gösterelim. $gq_i = fh_i$ ve $h_i = hq_i$ olduğundan $gq_i = fhq_i$ olup $g = fh$ elde edilir.

Teorem 3.2.3: R halka olsun. Bu takdirde, her serbest R -modül projektiftir (Kasch,1982).

İspat: I indis kümesi olmak üzere $F = R^{(I)}$ serbest modül verilsin. R halkasının projektif olduğu gösterilirse Teorem 3.2.2 den F serbest modül projektif olur. $f: A \rightarrow C$ epimorfizmasını ve $g: R \rightarrow C$ homomorfizmasını alalım. Buradan 1_R , R halkasının birim elemanı olmak üzere f epimorfizma olduğundan $g(1_R) = f(a)$ olacak şekilde $a \in A$ elemanı vardır. Bu takdirde her $r \in R$ için $h(r) = ra$ ile tanımlı $h: R \rightarrow A$ dönüşümü homomorfizmadır. Şimdi $fh = g$ olduğunu gösterelim. Her $r \in R$ için $g(r) = g(r1_R) = rg(1_R) = rf(a) = f(ra) = (fh)(r)$ olduğundan $g = fh$ eşitliği elde edilir. Dolayısıyla F serbest modül projektiftir.

Teorem 3.2.4: C modülü için aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) C projektiftir;

(ii) $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ biçimindeki her kısa tam dizi parçalanandır;

(iii) C bir serbest modülün direkt toplam terimine izomorftur (Alizade ve Pancar, 1999).

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii) $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ dizisi tam olsun. Bu takdirde $g: B \rightarrow C$ epimorfizmasıdır. 1_C , C nin birim homomorfizması olmak üzere C projektif olduğundan $gk = 1_C$ olacak şekilde bir $k: C \rightarrow B$ homomorfizması vardır. Dolayısıyla Teorem 3.2.1 den verilen kısa dizi parçalanandır.

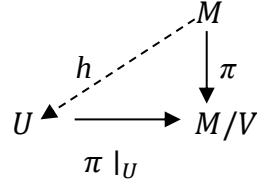
(ii) $\Rightarrow$ (iii) Teorem 2.4.2 den bir $g: F \rightarrow C$ epimorfizması ve F serbest modül vardır. Bu durumda kabulümüzden $0 \rightarrow \text{Çek}(g) \xrightarrow{i} F \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ kısa tam dizisi parçalanandır. Teorem 3.2.1 den $F \cong \text{Çek}(g) \oplus C$ dir. Dolayısıyla C , F nin direkt toplam terimidir.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Teorem 3.2.2 ve Teorem 3.2.3 den görülür.

Tanım 3.2.3: R halka ve M bir R -modül olsun. $M = U + V$ koşulunu sağlayan her U, V alt modülleri için $\text{Gör}(f) \leq U$ ve $\text{Gör}(1_M - f) \leq V$ olacak şekilde bir $f \in \text{End}(M)$ varsa, M ye π -projektif modül denir (Wisbauer, 1991).

Teorem 3.2.5: Her projektif modül π -projektiftir (Kasch, 1982).

İspat: M projektif modül, U ve V , M nin alt modülleri olmak üzere $M = U + V$ olsun. Bu durumda $\pi: M \rightarrow M/V$ doğal homomorfizmasının $\pi|_U: U \rightarrow M/V$ kısıtlanması bir epimorfizma olup M projektif olduğundan



diyagramı değişmelidir. Yani $\pi|_U h = \pi$ olacak şekilde $h: M \rightarrow U$ homomorfizması vardır, $\text{Gör}(h) \leq U$ olduğu açıktır. Her $a \in \text{Gör}(1_M - h)$ olsun. Bu durumda $m \in M$ için $a = m - h(m)$ yazılabilir.

$$\begin{aligned}
 \pi(a) &= \pi(m - h(m)) = \pi(m) - (\pi h)(m) \\
 &= \pi(m) - (\pi|_U h)(m) \\
 &= \pi(m) - \pi(m) = 0
 \end{aligned}$$

olup $a \in \text{Çek}(\pi) = V$ elde edilir. Böylece $\text{Gör}(1_M - h) \leq V$ olup M π -projektiftir.

Teorem 3.2.6: M bir R -modül olsun. Bu takdirde M nin π -projektif olması için gerek ve yeter şart $M = U + V$ olacak şekilde her $U, V \leq M$ için $(u, v) \rightarrow \psi(u, v) = u + v$ ile tanımlı $\psi: U \times V \rightarrow M$ epimorfizmasının parçalanabilir olmasıdır (Wisbauer, 1991).

İspat: ($\Rightarrow$) $M = U + V$ olacak şekilde her $U, V \leq M$ için $\psi h = 1_M$ olacak şekilde bir $h: M \rightarrow U \times V$ homomorfizmasının var olduğunu gösterelim. M , π -projektif olduğundan $\text{Gör}(f) \leq U$ ve $\text{Gör}(1_M - f) \leq V$ olacak şekilde bir $f \in \text{End}(M)$ vardır. $h(m) = (f(m), (1_M - f)(m))$ ile $h: M \rightarrow U \times V$ homomorfizmasını tanımlayalım. Her $m \in M$ için

$$\begin{aligned}
 (\psi h)(m) &= \psi(h(m)) = \psi(f(m), (1_M - f)(m)) \\
 &= f(m) + (1_M - f)(m) \\
 &= f(m) + 1_M - f(m) = 1_M(m)
 \end{aligned}$$

bulunur.

($\Leftarrow$) $M = U + V$ olacak şekilde her $U, V \leq M$ için ψ parçalanabilir olduğundan $\psi h = 1_M$ olacak şekilde bir $h: M \rightarrow U \times V$ homomorfizmasının vardır. Her $m \in M$ için $h(m) = (u_m, v_m)$ olsun. Bu durumda $f(m) = u_m$ ile tanımlı $f: M \rightarrow M$ fonksiyonu bir homomorfizmadır. $\text{Gör}(f) \leq U$ olduğu açıktır. $a \in \text{Gör}(1_M - f)$ alalım. Böylece $a = m - f(m)$ olacak şekilde bir $m \in M$ vardır.

$$a = m - u_m = (\psi h)(m) - u_m = \psi(u_m, v_m) - u_m = u_m + v_m - u_m = v_m \in V$$

olur. O halde $\text{Gör}(1_M - f) \leq V$ dir. Böylece M π -projektiftir.

Teorem 3.2.7: M π -projektif modül, U ve V ise M de birbirinin tümleyeni olan iki alt modül olsun. Bu takdirde $U \cap V = 0$ ve $M = U \oplus V$ dir (Wisbauer, 1991).

İspat: $U \times V$ nin $K = \{(u, -u) | u \in U \cap V\}$ alt modülünü ele alalım. $K = 0$ olduğunu gösterelim. $K = \{(u, -u) | u \in U \cap V\} \leq ((U \cap V) \times 0) + (0 \times (U \cap V))$ dir. U ve V , M de birbirinin tümleyeni olduğundan $U \cap V \ll U$ ve $U \cap V \ll V$ dir. Öyleyse $(U \cap V) \times 0 \ll U \times 0$ ve $0 \times (U \cap V) \ll 0 \times V$ dir. O halde

$$K \ll (U \times 0) + (0 \times V) = U \times V$$

olur. M , π -projektif olduğundan Teorem 3.2.6 gereği $f(u, v) = u + v$ ile tanımlı $f: U \times V \rightarrow M$ homomorfizması parçalanabilir. $K = \text{Çek}(f)$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $fg = 1_M$ olacak şekilde $g: M \rightarrow U \times V$ homomorfizması bulunabilir. Teorem 2.4.1 gereği $U \times V = \text{Gör}(g) \oplus \text{Çek}(f) = \text{Gör}(g) \oplus K$ dir. $K \ll U \times V$ olduğundan $K = 0$ elde edilir.

Teorem 3.2.8: M tümlenmiş ve π -projektif modül ise, M bol tümlenmiştir ve her tümleyen bir direkt toplam terimidir (Wisbauer, 1991).

İspat: $M = U + V$ olacak şekilde M nin U ve V alt modüllerini ele alalım. U nun $V' \leq V$ olacak şekilde V' tümleyeninin varlığını göstermeliyiz. M tümlenmiş olduğundan U nun bir X tümleyeni vardır. Aynı zamanda M π -projektif olduğundan $\text{Gör}(f) \leq V$ ve $\text{Gör}(1_M - f) \leq U$ olacak şekilde $f \in \text{End}(M)$ vardır. Buradan her $u \in U$ için $u - f(u) \in U$ olup $f(u) \in U$ ve dolayısıyla $f(U) \leq U$ olur. Böylece

$$\begin{aligned} M &= (1_M - f)(M) + f(M) \\ &= (1_M - f)(M) + f(U + X) \\ &= (1_M - f)(M) + f(U) + f(X) \end{aligned}$$

olur. $(1_M - f)(M) \leq U$ ve $f(U) \leq U$ olduğundan $M = U + f(X)$ olur. $f(X) \leq V$ in U nun tümleyeni olduğunu gösterirsek M bol tümlenmiş olur. Kabul edelim ki bir $K \leq f(X)$ için $U + K = M$ olsun. O halde her $m \in M$ için $m = u + f(x)$ olacak şekilde $u \in U$ ve $f(x) \in K$ olan $x \in X$ vardır.

$$m = u + f(x) - x + x = u - (1_M - f)(x) + x$$

olup $x \in f^{-1}(K) \cap X$ ve $(1_M - f)(x) \in U$ olduğundan $m \in U + (f^{-1}(K) \cap X)$ bulunur. Dolayısıyla $M = U + (f^{-1}(K) \cap X)$ dir. X , U nun tümleyeni olduğundan

$f^{-1}(K) \cap X = X$ ve buradan $X \leq f^{-1}(K)$ dir. Böylece $f(X) \leq K$ olup $f(X) = K$ dir. Sonuç olarak $f(X)$, M de U nun bir tümleyenidir. Böylece M bol tümlenmiştir. Şimdi M de her tümleyeninin bir direkt toplam terimi olduğunu gösterelim. V , M de U nun bir tümleyeni olsun. O halde $M = U + V$ ve $U \cap V \ll V$ dir. M bol tümlenmiş olduğundan $M = U' + V$, $U' \cap V \ll U'$ olacak şekilde $U' \leq U$ vardır. Teorem 2.5.1 (i) ile $U' \cap V \ll V$ olup U' ve V birbirinin tümleyenidir. Teorem 3.2.7 ile $M = U' \oplus V$ dir. Yani V , M nin bir direkt toplam terimidir.

Tanım 3.2.4: M, N modüller ve $f: M \rightarrow N$ epimorfizma olsun. Eğer $\text{Çek}(f) \ll M$ ise, f ye bir örtü denir (Wisbauer, 1991; Kasch, 1982).

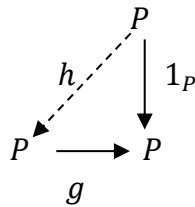
Tanım 3.2.5: (i) $f: M \rightarrow N$ bir epimorfizma olsun. $\text{Çek}(f) \subseteq \text{Rad}(M)$ ise, f genelleştirilmiş örtü denir (Xue, 1996)

(ii) M projektif modülüne, $f: M \rightarrow N$ örtü ile birlikte N modülünün projektif örtüsü denir (Alizade ve Pancar, 1999).

$\text{Rad}(M)$, M nin tüm küçük alt modüllerinin toplamı olduğundan her örtü genelleştirilmiş örtüdür.

Lemma 3.2.1: P projektif modül ve $S = \text{End}(P)$ olsun. Bu takdirde $\text{Rad}(S) = \{f \in S \mid \text{Gör}(f) \ll P\}$ dir (Wisbauer, 1991).

İspat: $f \in S$ ve $\text{Gör}(f) \ll P$ olsun. Şimdi $fS \ll S$ olduğunu gösterelim (fS , S halkasında f elemanı tarafından üretilen sağ idealdir). S endomorfizmalar halkasının bir I sağ ideali için $fS + I = S$ olsun. $I = S$ olduğunu göstermeliyiz. S birimli bir halka ve birimi 1_P olduğundan $1_P = fs + g$ olacak şekilde $s \in S$ ve $g \in I$ elemanları vardır. Buradan $P = (fs)(P) + g(P)$ yazılabilir. Ayrıca $\text{Gör}(f) \ll P$ olduğundan Teorem 2.5.1 (ii) den $f(s(P)) \ll P$ olup $P = g(P)$ elde edilir. Dolayısıyla g bir epimorfizmadır. P projektif olduğundan



diyagramı değişmeli olup $1_P = gh$ olacak şekilde $h: P \rightarrow P$ endomorfizması vardır. Bu takdirde $1_P \in I$ olup $I = S$ elde edilir $fs \ll S$ bulunur. Dolayısıyla Sonuç 2.7.1 den $f \in \text{Rad}(S)$ elde edilir.

Tersine, $f \in \text{Rad}(S)$ ve $K \leq P$ olmak üzere $\text{Gör}(f) + K = P$ olsun. π doğal homomorfizma olmak üzere P projektif olduğundan aşağıdaki diyagramı değişmeli yapacak şekilde bir $h: P \rightarrow P$ endomorfizması vardır.

$$\begin{array}{ccccc} & & & P & \\ & & & \downarrow \pi & \\ P & \xrightarrow{f} & P & \xrightarrow{\pi} & P/K \\ & & \nwarrow h & & \end{array}$$

Bu takdirde; $\pi = \pi f h$ olup $0 = \pi(1_P - fh)$ yazılır. Önerme 2.7.2 den $1_P - fh$ terslenebilir olup $\pi = 0$ olur. Bu ise $K = P$ olması ile mümkündür. Böylece $\text{Gör}(f) \ll P$ dır.

Teorem 3.2.9: R halka ve P sıfırdan farklı projektif bir R -modül olsun. Bu takdirde;

(i) P maksimal alt modüle sahiptir.

(ii) $P_2 \leq \text{Rad}(P)$ için $P = P_1 \oplus P_2$ ise, $P_2 = 0$ dır (Wisbauer, 1991).

İspat.: (i) $\text{Rad}(P) = P$ olsun. Bu takdirde Teorem 2.7.3 (vi) dan P nin sonlu üretilmiş her alt modülü P de küçüktür. $\{Rp\}_{p \in P}$ devirli R -modüllerin bir ailesi olmak üzere bu ailenin dış direkt toplamını $N = \bigoplus_{p \in P}^w Rp$ ile gösterelim. Bu takdirde Önerme 2.4.1 den her $(rp)_{p \in P} \in N$ için $(f(rp)_{p \in P}) = rp_1 + rp_2 + \dots + rp_n$ ile tanımlı $f: N \rightarrow \sum_{p \in P} Rp = P$ epimorfizması vardır. (Burada p_i ler sıfırdan farklı elemanlardır). P projektif olduğundan $fh = 1_P$ olacak şekilde bir $h: P \rightarrow N$ homomorfizması vardır. K , P nin herhangi bir sonlu üretilmiş alt modülü olsun. Bu takdirde N nin $h(K)$ alt modülü de sonlu üretilmiştir. Buradan $p_1, p_2, \dots, p_n \in P$ elemanları için $I = \{1, 2, \dots, n\}$ olmak üzere $h(K) \leq \bigoplus_{i \in I}^w Rp_i \leq N$ şeklindedir. $p: N \rightarrow \bigoplus_{i \in I}^w Rp_i$ epimorfizmasını alalım. $fh = 1_P$ olmak üzere $g = fph$ olarak alalım. Bu takdirde her $n \in K$ için $g(n) = (fph)(n) = (fh)(n) = n$ olup $g(P) \leq h(\bigoplus_{i \in I}^w Rp_i)$ ve $\text{Rad}(P) = P$ olduğundan $g(P) \ll P$ elde edilir. Lemma 3.2.1 den $g \in \text{Rad}(\text{End}(P))$ elde edilir. Önerme 2.7.2 den $(1_P - g)$ izomorfizmadır. $K \leq \text{Çek}(1_P - g)$ ve $\text{Çek}(1_P - g) = 0$ olduğundan $K = 0$ bulunur. Böylece P nin sonlu üretilmiş her alt modülü sıfır olup Sonuç 2.7.1 den $0 = \text{Rad}(P) = P$ çelişkisi elde edilir.

(ii) $P_2 \leq \text{Rad}(P)$ için $P = P_1 \oplus P_2$ ve $\pi_2: P \rightarrow P_2$ projeksiyon olsun. Bu takdirde Teorem 2.7.3 (i) ile $P_2 = \pi_2(P_2) \subseteq \pi_2(\text{Rad}(P)) \leq \text{Rad}(P_2)$ yani $P_2 = \text{Rad}(P_2)$ dir. Teorem 3.2.2 ile P_2 projektif olup (i) den $P_2 = 0$ dir.

Tanım 3.2.6: Aşağıdaki denk durumları sağlayan P modülüne yerel projektif modül denir.

(i) A ve B modüller $g: A \rightarrow B$ epimorfizma ve $f: P \rightarrow B$ homomorfizma olsun. Bu takdirde P nin her sonlu üretilmiş P_0 alt modülü için $f|_{P_0} = gh|_{P_0}$ olacak şekilde $h: P \rightarrow A$ homomorfizması vardır.

(ii) M modül ve $f: M \rightarrow P$ epimorfizma ise P nin her sonlu üretilmiş P_0 alt modülü için $fg|_{P_0} = 1_{P_0}$ olacak şekilde $g: P \rightarrow M$ homomorfizması vardır (Zimmermann, 1976).

Tanımdan görüldüğü gibi her sonlu üretilmiş projektif modül yerel projektiftir.

Önerme 3.2.1: M yerel projektif R -modül olsun. Bu takdirde her $x \in M$ için $x = f_1(x)y_1 + f_2(x)y_2 + \dots + f_n(x)y_n$, $i = 1, 2, \dots, n$ olacak şekilde $y_i \in M$ ve $f_i: M \rightarrow R$ homomorfizmaları vardır (Azumaya, 1990).

Önerme 3.2.2: R halka ve P sıfırdan farklı projektif bir R -modül olsun. Bu takdirde $\text{Rad}(R)P = \text{Rad}(P)$ ve $\text{Des}(R)P = \text{Des}(P)$ dir (Kasch, 1982).

İspat: Teorem 3.2.4 den dolayı P bir $F = R^{(I)}$ serbest modülünün direkt toplam terimidir. Öyleyse $F = P \oplus N$ biçiminde bir N modülü mevcuttur. Bu takdirde

$$\begin{aligned} \text{Rad}(R)F &= \text{Rad}(R)(R^{(I)}) = (\text{Rad}(R))^{(I)} \\ &= (\text{Rad}(R)P) \oplus (\text{Rad}(R)N) \end{aligned}$$

yazılabilir. Teorem 2.7.3 (iii) den $\text{Rad}(P) \leq (\text{Rad}(R))^{(I)}$ dir. $\text{Rad}(R)M \leq \text{Rad}(P)$ olduğundan Önerme 2.2.2 ile

$$\begin{aligned} \text{Rad}(P) &= \text{Rad}(P) \cap (\text{Rad}(R))^{(I)} \\ &= \text{Rad}(R)P \cap (\text{Rad}(P) \cap \text{Rad}(R)N) \end{aligned}$$

olup $\text{Rad}(R)P = \text{Rad}(P)$ elde edilir. Şimdi $\text{Des}(R)P = \text{Des}(P)$ eşitliğini gösterelim. Uyarı 2.6.1 den $\text{Des}({}_R R)P \subseteq \text{Des}(P)$ olduğunu biliyoruz. $x \in \text{Des}(P)$ olsun. P projektif olduğundan yerel projektif olup

$$f_1(x)y_1 + f_2(x)y_2 + \cdots + f_n(x)y_n = x$$

olacak şekilde $f_i: P \rightarrow R$ homomorfizmaları ve $y_i \in P$ vardır. Ayrıca

$$f_i(Des(P)) \subseteq Des({}_R R)$$

olduğundan $f_i(x) \in Des({}_R R)$ dir. O halde $x \in Des({}_R R)P$ dir. Böylece

$$Des(P) \subseteq Des({}_R R)P$$

bulunur. Sonuç olarak $Des({}_R R)P = Des(P)$ eşitliği elde edilir.

Tanım 3.2.7: (i) M ve N birer modül olsun. Her $g: K \rightarrow N$ monomorfizması ve her $f: K \rightarrow M$ homomorfizması için

$$\begin{array}{ccc} & g & \\ K & \xrightarrow{\quad} & N \\ f \downarrow & \nearrow h & \\ M & & \end{array}$$

diagramı değişmeli ise yani $f = hg$ olacak şekilde bir $h: N \rightarrow M$ homomorfizması varsa M modülüne N -injektiftir denir.

(ii) M bir modül olsun. Her satır tam dizi için her $g: K \rightarrow N$ monomorfizması ve her $f: K \rightarrow M$ homomorfizması verildiğinde $f = hg$ olacak şekilde bir $h: N \rightarrow M$ homomorfizması varsa M modülüne injektif modül denir (Kasch, 1982).

Tanım 3.2.8: R tamlık bölgesi ve M bir R -modül olsun. R halkasının sıfırdan farklı her r elemanı için $rM = M$ ise, M modülüne bölünebilir modül denir (Alizade ve Pancar, 1999).

Tanım 3.2.9: R tamlık bölgesi ve M bir R -modül olsun. Bir $m \in M$ için $rm = 0$ olacak şekilde bir $r \in R$ varsa m ye M nin bir burulmalı elemanı denir. M nin tüm burulma elemanlarının kümesi $T(M)$ ile gösterilir. $T(M)$, M nin bir alt modülü olup $T(M)$ ye M nin burulma alt grubu denir. $T(M) = M$ ise M ye bir burulma modülü, $T(M) = 0$ ise M ye bir burulmasız modül denir (Alizade ve Pancar, 1999).

Tanım 3.2.10: $f: M \rightarrow N$ monomorfizma olsun. Eğer $Görf \trianglelefteq N$ ise, f homomorfizmasına büyük monomorfizma denir (Kasch, 1982).

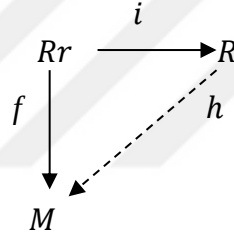
Tanım 3.2.11: M modül ve N injektif modül olsun. N ye, $f: M \rightarrow N$ büyük monomorfizması ile birlikte M nin injektif bürümü denir ve $E(M)$ ile gösterilir (Wisbauer, 1991).

Aşağıdaki Teorem bir modülün injektif olduğunu gösterirken sıklıkla kullanılan bir Teoremdir ve Baer Kriteri olarak bilinmektedir.

Teorem 3.2.10: Bir M R -modülünün injektif olması için gerek ve yeter şart R nin her sol I ideali ve her $h: I \rightarrow M$ homomorfizması için $h(a) = au$, $a \in I$ olacak şekilde $u \in M$ nin olmasıdır (Wisbauer, 1991).

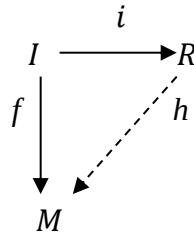
Teorem 3.2.11: R tamlık bölgesi olsun. Bu takdirde; her injektif R -modül bölünebilirdir. Tersine; M modülü bölünebilir ve burulmasız ise, injektiftir (Sharpe ve Vamos, 1972).

İspat: M injektif R -modül $0_R \neq r \in R$ ve $m \in M$ olsun. Bu takdirde Teorem 3.2.10 dan her $s \in R$ için $f(sr) = sm$ ile tanımlı $f: Rr \rightarrow M$ homomorfizması için



diyagramı değişmelidir. Buradan $s = 1_R$ için $m = f(r) = h(r) = rh(1_R)$ olup M bölünebilirdir.

Tersine; M bölünebilir ve burulmasız modül olsun. I, R nin herhangi bir ideali olmak üzere,



diyagramını ele alalım. Sıfırdan farklı bir $s \in I$ için M bölünebilir olduğundan $f(s) = sm$ olacak şekilde bir $m \in M$ vardır. O halde her $k \in I$ için

$$sf(k) = f(sk) = f(ks) = kf(s) = k(sm) = s(km)$$

olup M burulmasız olduğundan $f(k) = km$ dir. Her $r \in R$ için $h(r) = rm$ ile tanımlı $h: R \rightarrow M$ dönüşümü bir homomorfizmadır. Ayrıca $hi = f$ olduğu açıktır. Böylece Teorem 3.2.10 dan M injektif modüldür.

Teorem 3.2.12: Bir M R -modülünün injektif olması için gerek ve yeter şart M nin kendini kapsayan her R -modülde bir direkt toplam terimi olmasıdır.

3.3. Yerel, Yarı Yerel Modüller ve Halkalar

Tanım 3.3.1: M bir modül olsun. Eğer M nin tüm öz alt modüllerinin toplamı yine M nin bir öz alt modülü ise, M ye yerel modül denir. ${}_R R$ yerel ise R halkasına yerel halka denir (Wisbauer, 1991).

Teorem 3.3.1: Sıfırdan farklı bir M R -modülünün yerel olması için gerek ve yeter şart M nin sonlu üretilmiş (devirli) ve bir tek maksimal alt modüle sahip olmasıdır. Bu durumda M modülünün maksimal alt modülü $Rad(M)$ olup $Rad(M) \ll M$ dir (Wisbauer, 1991).

İspat: M yerel bir modül ve M nin tüm öz alt modüllerinin toplamı K ise $K \neq M$ dir. Bu takdirde, en az bir $m \in M$ vardır ki $m \notin K$ olup $Rm \not\subseteq K$ dir. K nin tanımı gereği $Rm = M$ olup M devirlidir. Ayrıca K alt modülünün tek maksimal alt modül olduğu açıktır. Tersine, M devirli ve M bir tek K maksimal alt modülüne sahip olsun. M sonlu üretilmiş olduğundan Teorem 2.3.8 ile M modülünün her öz alt modülü K tarafından kapsanır. Dolayısıyla M nin tüm öz alt modüllerinin toplamı K olup M yerel modüldür. Bir modülün radikali tanımı gereği $Rad(M) = K$ olup M devirli olduğundan Sonuç 2.7.2 den $Rad(M) \ll M$ olduğu açıktır.

Sonuç 3.3.1: M modülünün yerel olması için gerek ve yeter şart M nin oyuk ve $Rad(M) \neq M$ olmasıdır (Wisbauer, 1991).

Önerme 3.3.1: M bir modül U , M nin bir maksimal alt modülü olsun. U , M de bir V tümleyenine sahipse V yereldir (Wisbauer, 1991).

İspat: V , U nun tümleyeni olsun. O halde $M = U + V$ ve $U \cap V \ll V$ dir. U maksimal olduğundan $M/U \cong V/(U \cap V)$ basit modül olup $U \cap V$ V nin maksimal alt modülüdür. Böylece $Rad(V) \subseteq U \cap V$ dir. Tersine $U \cap V \ll V$ olduğundan $U \cap V \subseteq Rad(V)$ olup $Rad(V) = U \cap V$, V nin tek maksimal alt modülüdür. Ayrıca U M nin bir maksimal alt modülü olduğundan en az bir $a \in V - U$ vardır ve buradan

$M = U + Ra$ dır. V nin minimalliğinden $V = Ra$ olup Teorem 3.3.1 ile V bir yerel modüldür.

Tanım 3.3.2: R bir halka ve M bir R -modül olsun. $M/Rad(M)$ yarı basit ise, M ye yarı yerel modül denir. R halkası sol (sağ) R -modül olarak yarı yerel ise, R halkasına yarı yerel halka denir (Facchini, 1998).

Teorem 3.3.2: (i) Bir yarı yerel modülün her bölüm modülü de yarı yereldir.

(ii) Keyfi sayıda yarı yerel modülün direkt toplamı da yarı yereldir (Kasch, 1982).

İspat: (i) M yarı yerel modül ve $f: M \rightarrow N$ epimorfizma olsun. Bu takdirde her $m + Rad(M) \in M/Rad(M)$ için $\bar{f}(m + Rad(M)) = f(m) + Rad(N)$ ile tanımlı $\bar{f}: M/Rad(M) \rightarrow N/Rad(N)$ dönüşümü epimorfizmadır. M yarı yerel olduğundan $M/Rad(M)$ yarı basit olup Sonuç 2.6.2 (ii) gereği $N/Rad(N)$ yarı basittir. Buradan N yarı yereldir. Böylece yarı yerel M modülünün her epimorf görüntüsü yarı yereldir. O halde her $N \leq M$ için $\pi: M \rightarrow M/N$ doğal epimorfizması ile M yarı yerel ise M/N de yarı yereldir.

(ii) Her $i \in I$ için $M_i/Rad(M_i)$ yarı basittir. Teorem 2.7.3 (vii) ve Sonuç 2.6.2 (iii) gereği $M/Rad(M) \cong \bigoplus_{i \in I} (M_i/Rad(M_i))$ yarı basit olup M yarı yereldir.

Tanım 3.3.3: R bir halka, M bir R -modül ve $A \subseteq M$ olsun. Bu takdirde $\{r \in R \mid \text{her } m \in A \text{ için } rm = 0\}$ kümesi R halkasının bir sol idealidir. Bu sol ideale A kümesinin sıfırlayanı (annihilatörü) denir ve $Ann(A)$ ile gösterilir.

Eğer A , M modülünün bir alt modülü ise $Ann(A)$, R halkasının bir idealidir (Sharpe ve Vamos, 1972).

R bir tamlık bölgesi ve M bir R -modül olsun. $Ann(M) \neq 0$ ise, M modülüne sınırlı modül denir (Wisbauer, 1991).

R bir halka ve I , R halkasının bir ideali olsun. M bir R -modül ve $Ann(M) \neq 0$ olmak üzere $I \leq Ann(M)$ ise, her $m \in M$ ve $r + I \in R/I$ için $(r + I)m = rm$ ile tanımlı $R/I \times M \rightarrow M$ iyi tanımlı olup M bu işlemine göre bir (R/I) -modül yapısına sahiptir ve M modülünün her R -alt modülü (R/I) -alt modüldür. Tersine; M bir (R/I) -modül ve $I \leq Ann(M)$ ise, her $m \in M$ ve $r \in R$ elemanları için $rm = (r + I)m$ ile tanımlı $R \times M \rightarrow M$ işlemine göre bir R -modül yapısına sahiptir ve M nin her (R/I) -alt modülü R -alt modüldür (Sharpe ve Vamos, 1972).

$$\{m | m \in M \text{ ve } Rad(R)m = 0\}$$

kümesi $Rad(R)I_M$ ile gösterilsin. Buna göre bir yerel halka için aşağıdaki geçerlidir:

Teorem 3.3.3: R yarı yerel halka ve M bir sol R -modül olsun. Bu takdirde,

- (i) M yarı yereldir.
- (ii) $Rad(M) = Rad(R)M$ dir.
- (iii) $Des(M) = Rad(R)I_M$ dir (Kasch, 1982).

İspat: (i) Her modül bir serbest modülün homomorfik görüntüsü olduğundan $f: R^{(I)} \rightarrow M$ olacak şekilde I indis kümesi vardır. R yarı yerel olduğundan Teorem 3.3.2 (ii) gereği $R^{(I)}$ yarı yerel R -modüldür. Dolayısıyla Teorem 3.3.2 (i) gereği M yarı yereldir.

(ii) $Rad(R)M \leq Rad(M)$ olduğu Uyarı 2.7.1 den bilinmektedir. R yarı yerel olduğundan $R/Rad(R)$ yarı basit halkadır. Dolayısıyla $M/Rad(R)M$ bir sol $R/Rad(R)$ -modül olup Sonuç 2.6.3 gereği $M/Rad(R)M$ yarı basittir. Buradan $Rad(M/Rad(R)M) = 0$ olup $Rad(R)M \subseteq Rad(M)$ olduğundan Teorem 2.7.3 (v) gereği

$$0 = Rad(M/Rad(R)M) = Rad(M)/Rad(R)M$$

dir. Böylece $Rad(M) = Rad(R)M$ eşitliği elde edilir.

(iii) Önerme 2.7.3 den $Des(M) \leq Rad(R)I_M$ dir. Ayrıca $Rad(R)I_M$ yarı basit R -modül olduğundan $Rad(R)I_M \leq Des(M)$ olur. Böylece $Des(M) = Rad(R)I_M$ elde edilir.

3.4. Yarı Mükemmel Modüller ve Halkalar

Tanım 3.4.1: M modülünün her bölüm modülü projektif örtüye sahip ise, M ye yarı mükemmel modül denir (Kasch, 1982).

Lemma 3.4.1:(i) Yarı mükemmel modüllerin her bölüm modülü de yarı mükemmeldir.

(ii) Basit modüllerin her projektif örtüsü yarı mükemmeldir.

İspat: (i) Tanım 3.4.1 den elde edilir.

(ii) E basit modülünün projektif örtüsü $f: P \rightarrow E$ olsun. Bu takdirde $\text{Çek}(f) \ll P$ ve Teorem 2.3.3 ve Teorem 2.3.7 ile $\text{Çek}(f)$, P nin tek maksimal alt modülüdür. Ayrıca

P devirli olup Teorem 3.3.1 ile P yerel modüldür. Buradan P nin her U öz alt modülü için $U \leq \text{Çek}(f)$ dir. Böylece $\pi: P \rightarrow P/U$ doğal epimorfizması bir projektif örtüdür. Dolayısıyla P nin sıfırdan farklı her bölüm modülü projektif örtüye sahip olur. Yani P yarı mükemmeldir.

Teorem 3.4.1: M projektif modül ve $U \leq M$ olsun. Bu takdirde, aşağıdakiler denktir:

(i) U nun M de direkt toplam terimi olan bir tümleyeni vardır;

(ii) M/U bir projektif örtüye sahiptir (Wisbauer, 1991);

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii) V, U nun M de direkt toplam terimi olan bir tümleyeni ve $M = V \oplus U$ olsun. M projektif olduğundan Teorem 3.2.2 den V de projektiftir. $M = U + V$ olduğundan $f(v) = v + U$ ile tanımlı $f: V \rightarrow M/U = (V + U)/U$ bir epimorfizmadır. $\text{Çek}(f) = U \cap V \ll V$ olduğundan $V, M/U$ nun bir projektif örtüsüdür.

(ii) $\Rightarrow$ (i) $\pi: P \rightarrow M/U$ bir projektif örtü olsun. M projektif olduğundan

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ & \downarrow p & \\ P & \xrightarrow{\pi} & M/U \end{array}$$

f (dashed arrow from M to P)

diyagramını değişmeli kılan bir $f: M \rightarrow P$ homomorfizması vardır. Böylece $\pi(f(M)) = p(M) = M/U$ olup

$$P = \pi^{-1}(M/U) = \pi^{-1}(\pi(f(M))) = f(M) + \text{Çek}(\pi)$$

olur. $\text{Çek}(\pi) \ll P$ olduğundan $f(M) = P$ olup f örtendir. P projektif olduğundan

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ & \downarrow 1_P & \\ M & \xrightarrow{f} & P \end{array}$$

g (dashed arrow from P to M)

diyagramını değişmeli yapan $g: P \rightarrow M$ homomorfizması vardır. Buradan $fg = 1_P$ olduğundan Teorem 2.4.1 den $M = g(P) \oplus \text{Çek}(f)$ dir. Yine $fg = 1_P$ olduğundan $\pi = \pi 1_P = \pi fg = pg$ eşitliği yazılabilir. O halde

$$M/U = \pi(P) = p(g(P)) = (g(P) + U)/U$$

den $g(P) + U = M$ elde edilir. $x \in g(P) \cap U$ alalım. Bu takdirde $x = g(y)$ olacak şekilde $y \in P$ vardır.

$$\pi(y) = p(g(y)) = (g(y) + U)/U = (x + U)/U = 0$$

olduğundan $y \in \text{Çek}(\pi)$ bulunur. Yani $x = g(y) \in g(\text{Çek}(\pi))$ dir. $\text{Çek}(\pi) \ll P$ olduğundan Teorem 2.5.1 (iv) den $g(P) \cap U \leq g(\text{Çek}(\pi)) \ll g(P)$ olur. Dolayısıyla U nun tümleyenini olan $g(P)$, M de bir direkt toplam terimidir.

Önerme 3.4.1: M yarı mükemmel modül olsun. Bu takdirde $\text{Rad}(M) \ll M$ dir. (Wisbauer, 1991).

İspat: M yarı mükemmel ve $N \leq M$ için $\text{Rad}(M) + N = M$ olsun. $N \neq M$ olduğunu kabul edelim. X/N nin M/N nin bir maksimal alt modülü olduğunu kabul edelim. O halde X, M de N yi kapsayan bir maksimal alt modül olup. $\text{Rad}(M) \subseteq X$ dir. Buradan $N \subseteq X$ olduğundan $M = \text{Rad}(M) + N \subseteq X$ çelişkisi elde edilir. Böylece M/N maksimal alt modüle sahip değildir. Yani, $\text{Rad}(M/N) = M/N$ dir. Diğer taraftan M yarı mükemmel olduğundan bir $f: P \rightarrow M/N$ projektif örtüsü vardır. O halde $P/\text{Çek}(f) \cong M/N$, $\text{Çek}(f) \ll P$ ve Teorem 3.2.9 (i) den $\text{Çek}(f) \subseteq \text{Rad}(P) \neq P$ dir. Dolayısıyla $P/\text{Çek}(f)$ maksimal alt modüle sahip olup Teorem 2.7.3 (v) den M/N bir maksimal alt modüle sahiptir. Bu ise çelişkidir. Sonuç olarak $N = M$ olmalıdır.

Önerme 3.4.2: M, N ve K modüller olmak üzere $f: M \rightarrow N$ ve $g: N \rightarrow K$ birer epimorfizma olsun. Bu takdirde,

- (i) f ve g nin birer örtü olması için gerek ve yeter koşul gf nin örtü olmasıdır;
- (ii) f ve g nin birer genelleştirilmiş örtü olması için gerek ve yeter şart gf epimorfizmasının genelleştirilmiş örtü olmasıdır (Xue, 1996).

Teorem 3.4.2: M bir modül ve $U \leq M$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

- (i) M/U bölüm modülü projektif örtüye sahiptir;
- (ii) M nin $M = U + V$ koşulunu sağlayan her V alt modülü U nun bir tümleyenini kapsar ve bu tümleyen projektif örtüye sahiptir;
- (iii) U, M de projektif örtüye sahip olan bir tümleyene sahiptir (Xue, 1996).

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii) P projektif modül ve $f: P \rightarrow M/U$ bir örtü olmak üzere $M = U + V$ olsun. Bu takdirde her $v \in V$ için $g(v) = v + U$ ile tanımlı $g: V \rightarrow M/U$ dönüşümü

bir epimorfizmadır. P projektif olduğundan aşağıdaki diyagramda $gh = f$ olacak şekilde bir $h: P \rightarrow V$ homomorfizması mevcuttur.

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ & \downarrow f & \\ V & \xrightarrow{g} & M/U \end{array}$$

h (dashed arrow from P to V)

f örten olduğundan her $m \in M$ ve $p \in P$ olduğundan

$$f(p) = m + U = (gh)(p) = g(h(p)) = h(p) + U$$

olacak şekilde $m - h(p) \in U$ olup $M = U + h(P)$ dir. $h(P) \leq V$ olduğu açıktır.

Şimdi $h(\text{Çek}(f)) = U \cap h(P) \ll h(P)$ olduğunu gösterelim. Bir $u \in U \cap h(P)$ alalım. O halde $u = h(p) \in U$ olacak şekilde bir $p \in P$ vardır. Buradan

$$0 = g(u) = g(h(p)) = f(p)$$

olup $p \in \text{Çek}(f)$ bulunur. Böylece $u = h(p) \in h(\text{Çek}(f))$ olur. Tersine; bir $m \in h(\text{Çek}(f))$ alalım. O halde bir $p \in \text{Çek}(f)$ için $m = h(p)$ dir. Buradan

$$0 = f(p) = (gh)(p) = g(h(p)) = g(m)$$

olup $m \in U \cap h(P)$ bulunur. Dolayısıyla $h(\text{Çek}(f)) = U \cap h(P)$ olup, Teorem 2.5.1 (iv) den $U \cap h(P) \ll h(P)$ elde edilir. Sonuç olarak $h(P) \leq V$, U nun M de bir tümleyenidir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Açıktır.

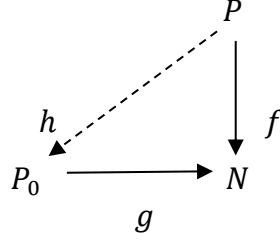
(iii) $\Rightarrow$ (i) V , U nun M de tümleyeni ve $f: P \rightarrow V$ projektif örtü olsun. Bu durumda $M = U + V$ ve $U \cap V \ll V$ dir. Teorem 2.3.4 den $h: V/(U \cap V) \rightarrow M/U$ izomorfizması vardır. Bu takdirde $\pi: V \rightarrow V/(U \cap V)$ doğal homomorfizma olmak üzere $h\pi: V \rightarrow M/U$ dönüşümü bir örtüdür. Önerme 3.4.2 (i) den P , M/U nun projektif örtüsüdür.

Sonuç 3.4.1: M modülünün yarı mükemmel modül olması için gerek ve yeter şart tümlenmiş ve her tümleyeninin projektif örtüye sahip olmasıdır (Xue, 1996).

İspat: Teorem 3.4.2 den açıktır.

Teorem 3.4.3: N projektif örtüye sahip bir modül olsun. P projektif olacak şekilde $f: P \rightarrow N$ epimorfizması varsa, $P_2 \leq \text{Çek}(f)$ ve $f|_{P_1}: P_1 \rightarrow N$ projektif örtü olacak şekilde $P = P_1 \oplus P_2$ yazılışı mevcuttur (Kasch, 1982).

İspat: N nin projektif örtüsü $g: P_0 \rightarrow N$ olsun. Bu takdirde



biçiminde değişmeli diyagram vardır. $a \in P_0$ ise $g(a) \in N$ ve f epimorfizma olduğundan $g(a) = f(p)$ olacak şekilde bir $p \in P$ vardır.

$$g(a) = (gh)(p) = g(h(p))$$

ve buradan $a - h(p) \in \text{Çek}(g)$ olup $a \in \text{Gör}(h) + \text{Çek}(g)$ dir. Böylece $P_0 = \text{Gör}(h) + \text{Çek}(g)$ dir. $\text{Çek}(g) \ll P_0$ olduğundan $P_0 = \text{Gör}(h)$ olur. Böylece h epimorfizmadır. Ayrıca P_0 projektif olduğundan bir $P_1 \leq P$ için $P = P_1 \oplus \text{Çek}(h)$ ve buradan $h_1 = h|_{P_1}: P_1 \rightarrow P_0$ izomorfizmadır. Teorem 2.3.2 (v) den

$$\text{Çek}(gh_1) = h_1^{-1}(\text{Çek}(g))$$

ve Önerme 3.4.2 (ii) den $\text{Çek}(gh_1) \ll P_1$ dir. O halde $gh_1: P_1 \rightarrow N$ fonksiyonu N nin bir projektif örtüsüdür. $\text{Çek}(h) \leq \text{Çek}(f)$ olduğundan $P_2 = \text{Çek}(h)$ alınarak $P = P_1 \oplus P_2$ yazılışı elde edilmiş olur.

Teorem 3.4.4: $g: P \rightarrow M$ bir projektif örtü olsun. Bu takdirde aşağıdakiler denktir:

- (i) M yarı mükemmeldir;
- (ii) P yarı mükemmeldir;
- (iii) P tümlenmiştir. (Kasch, 1982).

İspat: (iii) $\Rightarrow$ (ii) Teorem 3.2.8 ve Teorem 3.4.1 den açıktır.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Lemma 3.4.1 (i) de açıktır.

(i) $\Rightarrow$ (iii) $A \leq P$ olsun. Bu takdirde $f = \pi g: P \xrightarrow{g} M \xrightarrow{\pi} M/g(A)$ epimorfizmasını ele alalım. Teorem 3.4.3 gereği $f_1 = f|_{P_1}: P_1 \rightarrow M/g(A)$ projektif

örtü olacak şekilde P nin bir P_1 direkt toplam terimi vardır. Şimdi P_1 in P de A nın tümleyeni olduğunu gösterelim. $f(P_1) = M/g(A)$ olduğundan $P = P_1 + \text{Çek}(f)$ dir.

$$\text{Çek}(f) = \text{Çek}(\pi g) = g^{-1}(\text{Çek}(\pi))$$

$$= g^{-1}(g(A)) = A + \text{Çek}(g)$$

olup $P = P_1 + A + \text{Çek}(g)$ dir. $\text{Çek}(g) \ll P$ olduğundan $P = P_1 + A$ dir. Şimdi bir $U \leq P_1$ için $P = U + A$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde $f(A) = \pi g(A) = 0$ olduğundan

$$f(P) = f(P_1 + A) = f(P_1) + f(A) = f(P_1) = f_1(P_1)$$

ve $f(P) = f(U + A) = f(U) = f_1(U)$ olup buradan $f_1(P_1) = f_1(U)$ elde edilir. Böylece

$$P_1 = f_1^{-1}(f_1(P_1)) = f_1^{-1}(f_1(U)) = U + \text{Çek}(f_1)$$

olur. Buradan $\text{Çek}(f_1) \ll P_1$ olduğundan $P_1 = U$ olur. Böylece P_1, P de A nın tümleyenidir.

Teorem 3.4.5: M tümlenmiş modül ise, M yarı yereldir (Kasch, 1982).

İspat: $U/\text{Rad}(M) \leq M/\text{Rad}(M)$ olsun. M tümlenmiş olduğundan $M = U + V$ ve $U \cap V \ll V$ olacak şekilde $V \leq M$ vardır.

$$M/\text{Rad}(M) = U/\text{Rad}(M) + (V + \text{Rad}(M))/\text{Rad}(M)$$

ve

$$U/\text{Rad}(M) \cap (V + \text{Rad}(M))/\text{Rad}(M) = (U \cap V + \text{Rad}(M))/\text{Rad}(M) = 0$$

olup $M/\text{Rad}(M)$ yarı basittir. Dolayısıyla M yarı yereldir.

Tanım 3.4.2: (i) $f: A \rightarrow M$ homomorfizma ve $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ olsun. Her $i \in I$ için $f(A_i) = M_i$ olacak şekilde $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$ parçalanışı varsa M modülü f homomorfizmasına göre yükseltilebilir denir.

(ii) $B \leq A$ ve $A/B = \bigoplus_{i \in I} M_i$ olsun. A/B bölüm modülü $\pi: A \rightarrow A/B$ doğal homomorfizmasına göre yükseltilebilirse $A/B, A$ ya yükseltilebilir denir (Kasch, 1982).

Teorem 3.4.6: M herhangi bir modül $f: P \rightarrow M$ projektif örtü ve $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ olsun. Her $i \in I$ için A_i projektif ve $\text{Çek}(h_i) \leq \text{Rad}(A_i)$ olacak şekilde $h_i: A_i \rightarrow M_i$

genelleştirilmiş örtüsü verilsin. Bu takdirde, M f homomorfizmasına göre yükseltilebilirdir (Kasch, 1982).

İspat: Her $i \in I$ için A_i projektif modül olduğundan Teorem 3.2.2 ile $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$ bir projektif modüldür. Her $(a_i)_{i \in I} \in A$ için $h(a_i) = (h(a_i))$ ile tanımlı $h: A \rightarrow M$ fonksiyonu bir homomorfizmadır. h homomorfizmasını $h = \bigoplus_{i \in I} h_i$ ile gösterelim. Bu takdirde

$$\begin{array}{ccc} & A = \bigoplus_{i \in I} A_i & \\ & \downarrow \bigoplus_{i \in I} h_i = h & \\ P & \xrightarrow{f} & M = \bigoplus_{i \in I} M_i \\ & \nwarrow g & \end{array}$$

değişmeli diyagramı elde edilir. h epimorfizma olduğundan $P = \text{Gör}(g) + \text{Çek}(f)$ dir. $\text{Çek}(f) \ll P$ olduğundan $P = \text{Gör}(g)$ dir. Dolayısıyla g epimorfizmadır. P projektif olduğundan Teorem 3.2.4 gereği

$$0 \rightarrow \text{Çek}(g) \xrightarrow{i} A \xrightarrow{g} P \rightarrow 0$$

tam dizisi parçalanabilir ve bir $P_0 \leq A$ olmak üzere $A = P_0 \oplus \text{Çek}(g)$ parçalanışı yazılabilir. Diyagram değişmeli olduğundan ve Teorem 2.7.3 (iv) den

$$\begin{aligned} \text{Çek}(g) &\leq \text{Çek}(\bigoplus_{i \in I} h_i) = \bigoplus \text{Çek}(\bigoplus_{i \in I} h_i) \\ &\leq \bigoplus \text{Rad}(A_i) = \text{Rad}(A) \end{aligned}$$

olur. Teorem 3.2.9 (ii) den $\text{Çek}(g) = 0$ dir. O halde g izomorfizmadır. Böylece $i \in I$ için $(fg)(A_i) = h_i(A_i) = M_i P = \bigoplus_{i \in I} g(A_i)$ dir. Sonuç olarak f homomorfizmasına göre $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ yükseltilebilirdir.

Sonuç 3.4.2: M yarı mükemmel modül ve $f: P \rightarrow M$ projektif örtü olsun. M nin her direkt toplam terimi f homomorfizmasına göre yükseltilebilirdir (Kasch, 1982).

İspat: M nin her direkt toplam terimi projektif örtüye sahip olduğundan Teorem 3.4.6 dan istenen elde edilir.

Sonuç 3.4.3: P yarı mükemmel ve projektif bir modül olsun. Bu takdirde $P/\text{Rad}(P)$ yarı basit modülünün her parçalanışı P ye yükseltilebilirdir (Kasch, 1982).

İspat: P yarı mükemmel modül olduğundan Önerme 3.4.1 gereği $Rad(P) \ll P$ dir. Dolayısıyla $g: P \rightarrow P/Rad(P)$ doğal homomorfizması bir projektif örtüdür. P yarı mükemmel modül olduğundan $P/Rad(P)$ nin her alt modülü P nin bölüm modülü olup projektif örtüye sahip olur. Dolayısıyla Teorem 3.4.6 gereği $P/Rad(P)$ nin her parçalanışı P ye yükseltilebilirdir.

Teorem 3.4.7: P projektif modülü için aşağıdakiler denktir:

- (i) P yarı mükemmeldir;
- (ii) P tümlenmiştir;
- (iii) (1) $P/Rad(P)$ yarı basittir.

(2) $P/Rad(P)$ nin her direkt toplam terimi $P \rightarrow P/Rad(P)$ ye göre P nin bir direkt toplam teriminin görüntüsüdür.

(3) $Rad(P) \ll P$ dir (Kasch, 1982).

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii) Sonuç 3.4.1 den görülür.

(ii) $\Rightarrow$ (i) P tümlenmiş ve π -projektif olduğundan Teorem 3.2.8 gereği P nin her tümleyen alt modülü direkt toplam terimidir. Böylece Teorem 3.4.1 gereği P yarı mükemmeldir.

(i) $\Rightarrow$ (iii) Sonuç 3.4.1 ve Teorem 3.4.5 gereği $P/Rad(P)$ yarı basittir. Önerme 3.4.1 den $Rad(P) \ll P$ dir. (2) ise Sonuç 3.4.3 den görülür.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) $\pi: P \rightarrow P/Rad(P) = \bar{P}$ doğal homomorfizma ve $A \leq P$ olsun. $\bar{P}$ yarı basit olduğundan $\bar{P} = \pi(A) \oplus K$ olacak şekilde $K \leq \bar{P}$ vardır. (2) den $\pi(P_2) = K$ olacak şekilde $P_2 \leq P$ direkt toplam terimi vardır. Şimdi P_2 nin P de A nın tümleyeni olduğunu gösterelim. $\bar{P} = \pi(A) \oplus \pi(P_2)$ olduğundan $P = A + P_2 + Rad(P)$ ve $A \cap P_2 \leq Rad(P)$ olur. $Rad(P) \ll P$ olduğundan $P = A + P_2$ ve $A \cap P_2 \ll P$ dir. P_2 , P nin direkt toplam terimi olduğundan Teorem 2.5.1 (v) den $A \cap P_2 \ll P_2$ olur.

Sonuç 3.4.4: R herhangi bir halka olsun. Bu durumda ${}_R R$ nin yarı mükemmel olması için gerek ve yeter şart

(1) $\bar{R} = R/Rad(R)$ nin yarı basit ve

(2) Her $t \in \bar{R}$ idempotent elemanı için $t = \bar{e}$ olacak şekilde bir $e \in R$ idempotent elemanının var olmasıdır. (Kasch, 1982).

İspat: ($\Rightarrow$) Teorem 3.4.7 gereği $\bar{R} = R/Rad(R)$ yarı basittir. $t \in \bar{R}$ idempotent olsun. $\overline{{}_R R} = \bar{R}t \oplus \bar{R}(\bar{1} - t)$ parçalanışını ele alalım. Bu takdirde Sonuç 3.4.3 den $\overline{{}_R R}$ yarı basit modülü R ye yükseltilebilir olup $e \in R$ idempotent elemanı ve $\bar{R}\bar{e} = \bar{R}t$, $\bar{R}(\bar{1} - \bar{e}) = \bar{R}(\bar{1} - t)$ olmak üzere ${}_R R = Re \oplus R(1 - e)$ parçalanışı vardır. Böylece $\bar{R}\bar{e}^2 = \bar{R}\bar{e}t \Rightarrow \bar{R}\bar{e} = \bar{R}\bar{e}t \Rightarrow \bar{e}t = \bar{e}$ ve benzer şekilde $(\bar{1} - \bar{e})(\bar{1} - t) = \bar{1} - \bar{e}$ olup $t = \bar{e}$ bulunur.

($\Leftarrow$) $\overline{{}_R R}$ nin her direkt toplam terimi $t \in \bar{R}$ idempotent elemanı için $\bar{R}t$ biçimindedir. Şimdi $\bar{e} = t$ olacak şekilde $e \in R$ idempotent olsun. Bu takdirde $\overline{Re} = \bar{R}\bar{e} = \bar{R}t$ olacak şekilde Re , ${}_R R$ nin direkt toplam terimidir. Böylece Teorem 3.4.7 den ${}_R R$ yarı mükemmeldir.

Teorem 3.4.8: $\{P_i | i \in I\}$ yarı mükemmel projektif R -modüllerin bir ailesi olsun. Bu takdirde $P = \bigoplus_{i \in I} P_i$ direkt toplamının yarı mükemmel modül olması için gerek ve yeter şart $Rad(P) \ll P$ olmasıdır (Kasch, 1982).

İspat: $P = \bigoplus_{i \in I} P_i$ yarı mükemmel ise Önerme 3.4.1 den $Rad(P) \ll P$ elde edilir. Tersine, Teorem 3.4.7 (iii) nin 3. koşulu sağlanır. (1) ve (2) koşullarının sağlandığını göstermek ispat için yeterlidir.

(1) Teorem 2.7.3 (vii) den $P/Rad(P) \cong \bigoplus_{i \in I} P_i/Rad(P_i)$ dir. Her $i \in I$ için P_i yarı mükemmel ve projektif olduğundan Teorem 3.4.7 gereği $P_i/Rad(P_i)$ yarı basittir. Dolayısıyla Teorem 2.6.2 den $P/Rad(P)$ yarı basittir.

(2) $P/Rad(P)$ nin her E basit alt modülünün bir projektif örtüye sahip olduğunu gösterelim. $P/Rad(P) \cong \bigoplus_{i \in I} P_i/Rad(P_i)$ olduğundan E basit alt modülü $\bigoplus_{i \in I} P_i/Rad(P_i)$ nin bir E' basit alt modülüne izomorftur. $P_i/Rad(P_i)$ ler yarı basit olduğundan basit alt modüllerin direkt toplamı olup Lemma 2.6.2 (ii) den E' , $P_i/Rad(P_i)$ lerden birinin bir basit alt modülüne izomorftur. $P_i/Rad(P_i)$ yarı mükemmel modülünün direkt toplam terimi olarak E' bir projektif örtüye sahip olduğundan buna izomorf olan E modülü de projektif örtüye sahiptir. $U_1, P/Rad(P)$ nin bir direkt toplam terimi olsun. O halde $P/Rad(P) = U_1 \oplus U_2$ olacak şekilde $U_2 \leq P/Rad(P)$ vardır. $P/Rad(P)$ yarı basit olduğundan U_1 ve U_2 basit modüllerin direkt toplamıdır. O halde E_j^k basit alt modül olmak üzere Lemma 2.6.2 den $k = 1, 2$ için $U_k = \bigoplus_{j \in J_k} E_j^k$ dir. $E_j^k, P/Rad(P)$ nin basit alt modülü olduğundan $f_j^k: A_j^k \rightarrow E_j^k$ projektif örtüsü vardır. O halde $h_k = \bigoplus_{j \in J_k} f_j^k, A_k = \bigoplus_{j \in J_k} A_j^k$

projektif modül, $U_k = \bigoplus_{j \in J_k} E_j^k$ olmak üzere $h_k := A_k \rightarrow U_k$ bir epimorfizmadır. Diğer taraftan $\text{Çek}(f_j^k) \ll A_j^k$ olduğundan $\text{Çek}(f_j^k) \leq \text{Rad}(A_j^k)$ dır. Böylece $k = 1, 2$ için $\text{Çek}(h_k) = \bigoplus_{j \in J_k} \text{Çek}(f_j^k) \leq \text{Rad}(A_k)$ olur. Teorem 3.4.6 da f epimorfizması yerine $\pi: P \rightarrow P/\text{Rad}(P)$ doğal epimorfizması alınırsa $P/\text{Rad}(P) = U_1 \oplus U_2$ parçalanışı P ye yükseltilebilir. Böylece Tanım 3.4.2 den 2. şart da sağlanır. Sonuç olarak Teorem 3.4.7 den $P = \bigoplus_{i \in I} P_i$ yarı mükemmel modül elde edilir.

Sonuç 3.4.5: $M_1, M_2, \dots, M_n$ yarı mükemmel R -modüller ise,

- (i) $M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$ yarı mükemmel modüldür.
- (ii) ${}_R R$ yarı mükemmel ise, her sonlu üretilmiş R modül yarı mükemmeldir. (Kasch, 1982).

İspat: (i) $M_1, M_2, \dots, M_n$ yarı mükemmel modül ve $i = 1, 2, \dots, n$ için $f_i: P_i \rightarrow M_i$ projektif örtü olsun. Teorem 3.4.4 den P_i yarı mükemmel modüldür. $P = \bigoplus_{i \in I} P_i$ dersek, $\text{Rad}(P) = \bigoplus_{i=1}^n \text{Rad}(P_i)$ dir. Önerme 3.4.1 gereği her $i = 1, 2, \dots, n$ için $\text{Rad}(P_i) \ll P_i$ olup Teorem 2.5.1 (iii) ile $\text{Rad}(P) = \sum_{i=1}^n \text{Rad}(P_i) \ll P = \bigoplus_{i \in I} P_i$ olur. Teorem 3.4.8 den $P = \bigoplus_{i \in I} P_i$ yarı mükemmeldir. Böylece Lemma 3.4.1 gereği $M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$ yarı mükemmel modüldür.

- (ii) ${}_R R$ yarı mükemmel ise, (i) den I sonlu olmak üzere $R^{(I)}$ yarı mükemmeldir. Böylece Lemma 3.4.1 gereği $R^{(I)}$ nın epimorfik görüntüsü de yarı mükemmeldir.

3.5. Mükemmel Modüller ve Halkalar

Tanım 3.5.1: M modül olsun. Her I indis kümesi için $M^{(I)}$ yarı mükemmel ise, M ye mükemmel modül denir.

Teorem 3.5.1: M projektif modülü için aşağıdakiler denktir:

- (i) M mükemmeldir;
- (ii) Her M -üretilmiş modül tümlenmiştir;
- (iii) Her M -üretilmiş modül projektif örtüye sahiptir (Wisbauer, 1991).

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii) M mükemmel olduğundan her I indis kümesi için $N = M^{(I)}$ modülü yarı mükemmeldir. Böylece Sonuç 3.4.1 den N tümlenmiş olup Önerme 3.1.2 (iii) gereği N nin her bölüm modülü tümlenmiştir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Teorem 3.2.2 den her I indis kümesi için $N = M^{(I)}$ projektif olup Teorem 3.4.7 gereği N yarı mükemmeldir. Dolayısıyla N nin her bölüm modülü projektif örtüye sahiptir.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Her I indis kümesi için $N = M^{(I)}$ sol R -modülünü alalım. Hipotezden N tümlenmiştir. Buradan Teorem 3.2.2 ve Teorem 3.4.7 gereği N yarı mükemmeldir. Sonuç olarak M mükemmeldir.

Teorem 3.5.1 de $M = R$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.5.1: R halkası için aşağıdakiler denktir:

- (i) ${}_R R$ mükemmeldir;
- (ii) Her sol R -modül tümlenmiştir;
- (iii) Her sol R -modül projektif örtüye sahiptir (Wisbauer, 1991).

İspat: Teorem 2.4.2 gereği her sol R -modül R -üretilmiştir. Bundan dolayı Teorem 3.5.1 den istenen elde edilir.

Tanım 3.5.2: R bir halka ve $A \subseteq R$ olsun. A nın elemanlarından oluşan her $a_1, a_2, a_3, \dots$ dizisi için $a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k = 0$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ varsa, A ya sağ t - nilpotent denir (Wisbauer, 1991).

Teorem 3.5.2: R bir halka ve K , R nin bir sol ideal olsun. Bu takdirde aşağıdakiler denktir:

- (i) K sağ t -nilpotenttir;
- (ii) Sıfırdan farklı her M sol R -modülü için $KM \neq M$ dir;
- (iii) Sıfırdan farklı her M sol R -modülü için $KM \ll M$;
- (iv) $KR^{(\mathbb{N})} \ll R^{(\mathbb{N})}$ dir (Wisbauer, 1991).

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii) $0 \neq M$ modülü için $KM = M$ olsun. Bu takdirde $a_1 m_1 \neq 0$ olacak şekilde $a_1 \in K$ ve $m_1 \in M$ vardır. $M = KM$ olduğundan $m_1 = \sum a'_i m'_i$ olacak şekilde $a'_i \in K$ ve $m'_i \in M$ vardır. Bu durumda $a_1 m_1 = \sum a_1 a'_i m'_i = m_2$ ve böylece

$a_1 a_2 m_2 \neq 0$ olacak şekilde $a_2 \in K$ ve $m_2 \in M$ vardır. $m_2 \in M$ olduğundan $m_2 = \sum a_i'' m_i''$ olacak şekilde $a_i'' \in K$ ve $m_i'' \in M$ vardır. O zaman

$$a_1 a_2 m_2 = \sum a_1 a_2 a_i'' m_i'' \neq 0$$

ve böylece $a_1 a_2 a_3 m_3 \neq 0$ olacak şekilde $a_3 \in K$ ve $m_3 \in M$ vardır. Tümevarımla her $n \in \mathbb{N}$ için $a_1 a_2 \dots a_n \neq 0$ olacak şekilde K nın bir $a_1, a_2, a_3, \dots$ dizisi elde ederiz. Bu ise K nın sağ t-nilpotent olmasıyla çelişir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Herhangi bir $U \leq M$ için $KM + U = M$ olsun Bu takdirde

$$M/U = (KM + U)/U = K(M/U)$$

dur. (ii) den $M/U = 0$ olup $U = M$ bulunur. Böylece $KM \ll M$ elde edilir.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Açıktır.

(iv) $\Rightarrow$ (i) $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$, $F = R^{(\mathbb{N})}$ serbest modülünün bir tabanı ve $K \subseteq R$ olsun. K nın elemanlarından oluşan $a_1, a_2, a_3 \dots$ dizisiyle birlikte her $i \in \mathbb{N}$ için

$$u_i = x_i - a_i x_{i+1}$$

olmak üzere F nin $U = \sum_{i=1}^{\infty} R u_i$ alt modülünü alalım. Her $i \in \mathbb{N}$ için

$x_i = a_i x_{i+1} + u_i \in K F + U$ olup $K F + U = F$ dir. O halde Kabulden $U = F$ dir.

Buradan $x_1 \in U$ olup

$$\begin{aligned} x_1 &= \sum_{i=1}^k r_i u_i = r_1 x_1 + (r_2 - r_1 a_1) x_2 + (r_3 - r_2 a_2) x_3 + \\ &\dots + (r_k - r_{k-1} a_{k-1}) x_k - r_k a_k x_{k+1} \end{aligned}$$

olacak şekilde $r_i \in R$ vardır. $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ F nin bir tabanı olduğundan, yazılışın tekliğinden $r_1 = 1$, $r_2 = r_1 a_1 = a_1$, $r_3 = r_2 a_2 = a_1 a_2$, ..., $r_k = a_1 a_2 \dots a_{k-1}$ ve böylece $0 = r_k a_k = a_1 a_2 \dots a_k$ elde edilir.

Sonuç 3.5.2: Bir R halkası için aşağıdakiler denktir:

(i) $Rad(R)$ sağ t-nilpotenttir;

(ii) Her projektif sol R -modül küçük radikale sahiptir;

(iii) Bir sol R -modül olarak $R^{(\mathbb{N})}$ küçük radikale sahiptir (Kasch, 1982).

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii) P projektif R -modül olsun. Önerme 3.2.2 den $Rad(P) = Rad(R)P$ dir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Teorem 3.2.3 ile $R^{(\mathbb{N})}$ bir projektif modüldür.

(iii) $\Rightarrow$ (i) $Rad(R)R^{(\mathbb{N})} = Rad(R^{(\mathbb{N})}) \ll R^{(\mathbb{N})}$ olduğundan $Rad(R)R^{(\mathbb{N})} \ll R^{(\mathbb{N})}$ dır.

Sonuç 3.5.3: Herhangi bir R halkası için aşağıdakiler denktir:

(i) ${}_R R$ mükemmeldir;

(ii) $R^{(\mathbb{N})}$ sol R -modül olarak yarı mükemmeldir;

(iii) R yarı mükemmeldir ve her serbest sol R -modül küçük radikale sahiptir (Kasch, 1982).

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii) Tanımdan açıktır.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Lemma 3.4.1 (i) gereği R yarı mükemmeldir. Önerme 3.4.1 ve kabulden $Rad(R^{(\mathbb{N})}) \ll R^{(\mathbb{N})}$ dır. Böylece Sonuç 3.5.2 ile her projektif sol R -modül küçük radikale sahiptir. Teorem 3.2.3 ile her serbest R -modül projektif olduğundan istenen elde edilir.

(iii) $\Rightarrow$ (i) R yarı mükemmel ve her serbest sol R -modül küçük radikale sahipse Teorem 3.2.3 ve Teorem 3.4.8 den her serbest sol R -modül yarı mükemmeldir. Dolayısıyla Lemma 3.4.1 ve Teorem 2.4.2 ile her sol R -modül yarı mükemmeldir. Sonuç 3.5.1 den ${}_R R$ mükemmel halkadır.

Teorem 3.5.3: Bir R halkası için aşağıdakiler denktir:

(i) ${}_R R$ mükemmeldir;

(ii) Her sol R -modül tümlenmiştir;

(iii) R yarı yereldir ve $Rad(R)$ sağ t -nilpotenttir;

(iv) R yarı yereldir ve sıfırdan farklı her R -modül bir maksimal alt modüle sahiptir (Wisbauer, 1991).

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii) M bir R -modül olsun. Bu takdirde Teorem 2.4.2 gereği $f: R^{(I)} \rightarrow M$ epimorfizması vardır. R sol mükemmel olduğundan $R^{(I)}$ yarı mükemmeldir. Lemma 3.4.1 ve Sonuç 3.4.1 den $R^{(I)}$ tümlenmiştir. Önerme 3.1.2 den M tümlenmiştir.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Teorem 3.2.3 ve Teorem 3.4.7 den $R^{(I)}$ yarı mükemmeldir.

(i) $\Rightarrow$ (iii) ${}_R R$ mükemmel ise ${}_R R$ yarı mükemmel olup Teorem 3.4.7 gereği R yarı yereldir. M herhangi bir sıfırdan farklı R -modül olsun. Bu takdirde Teorem 3.3.3 (ii)

gereği $Rad(R)M = Rad(M)$ eşitliği vardır. O halde $Rad(R)$ nin sağ t -nilpotent olduğunu göstermemiz için Teorem 3.5.2 gereği $Rad(M) \ll M$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. Teorem 2.4.2 ile $\varphi: R^{(I)} \rightarrow M$ epimorfizma olacak şekilde bir I indis kümesi mevcuttur. ${}_R R$ mükemmel olduğundan $R^{(I)}$ yarı mükemmel olup Lemma 3.4.1 (i) gereği M yarı mükemmeldir. Böylece Önerme 3.4.1 den $Rad(M) \ll M$ olduğu görülür.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Sonuç 3.4.4 gereği ${}_R R$ yarı mükemmel modüldür. $Rad(R)$ sağ t -nilpotent olduğundan Sonuç 3.5.2 gereği $Rad(R^{(I)}) \ll R^{(I)}$ olur. Böylece Teorem 3.4.8 den $R^{(I)}$ yarı mükemmel olup ${}_R R$ mükemmeldir.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) M sıfırdan farklı bir R -modül olsun. $Rad(R)$ sağ t -nilpotent ve R yarı yerel olduğundan Teorem 3.3.3 (ii) ve Teorem 3.5.2 gereği $Rad(R)M = Rad(M) \ll M$ olup $M \neq Rad(M)$ dir. Dolayısıyla M maksimal alt modüle sahiptir.

(iv) $\Rightarrow$ (iii) M sıfırdan farklı herhangi bir R -modül olsun. R yarı yerel olduğundan Teorem 3.3.3 (ii) gereği $Rad(R)M = Rad(M)$ dir. $Rad(M) + V = M$ ise $Rad(M/V) = M/V$ olup hipotez gereği $V = M$ dir. O halde $Rad(M) \ll M$ dir. Böylece Teorem 3.5.2 gereği $Rad(R)$ sağ t -nilpotenttir.

3.6. Artinian ve Noetherian Modüller

Tanım 3.6.1: M bir R -modül olsun. M nin alt modüllerinin boştan farklı her Ω ailesi bir maksimal (minimal) elemana sahipse, yani Ω , kendisi dışında K_0 ı kapsayan (K_0 tarafından kapsanan) bir elemanı olmayacak şekilde bir K_0 elemanına sahipse, M ye alt modülleri için maksimal (minimal) koşulunu sağlar denir (Sharpe ve Vamos, 1972).

Tanım 3.6.2: M bir modül olsun. M nin alt modüllerinin

$$K_1 \subseteq K_2 \subseteq \dots (K_1 \supseteq K_2 \supseteq \dots)$$

şeklindeki her artan (azalan) zinciri için öyle bir $m \in \mathbb{Z}^+$ ve $n \geq m$ koşulunu sağlayan her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $K_n = K_m$ oluyorsa, M ye artan (azalan) zincir koşulunu sağlar denir (Sharpe ve Vamos, 1972).

Önerme 3.6.1: M bir modül olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) M alt modülleri için maksimal (minimal) koşulunu sağlar;

(ii) M artan (azalan) zincir koşulunu sağlar (Sharpe ve Vamos, 1972).

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii) M nin alt modüllerinin $K_1 \subseteq K_2 \subseteq K_3 \subseteq \dots$ artan zincirini ele alalım. Kabulden $\{K_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ ailesi bir $m \in \mathbb{Z}^+$ için K_m maksimal elemanına sahiptir. Buradan her $m \leq n \in \mathbb{Z}^+$ için $K_n = K_m$ olur. Dolayısıyla M artan zincir koşulunu sağlar.

(ii) $\Rightarrow$ (i) M alt modülleri için maksimal koşulunu sağlamasın. Maksimal elemanı olmayan M nin alt modüllerinin boştan farklı bir ailesine Ω diyelim. Herhangi bir $K_1 \in \Omega$ elemanını alalım. K_1 maksimal olmadığından $K_1 \subsetneq K_2$ olacak şekilde Ω kümesinin bir K_2 elemanı vardır. K_2 maksimal olmadığından $K_2 \subsetneq K_3$ olacak şekilde Ω kümesinin bir K_3 elemanı vardır. Bu şekilde devam edilerek M nin alt modüllerinin sonsuz çoklukta kesin artan zinciri bulunur. Böylece M artan zincir koşulunu sağlamaz.

Benzer şekilde M nin alt modülleri için minimal koşulu ile M nin azalan zincir koşulunun denkliği gösterilebilir.

Tanım 3.6.3: Alt modülleri için maksimal koşulunu sağlayan veya buna denk olarak artan zincir koşulunu sağlayan modüle Noetherian modül denir. Kendi üzerinde bir sol R -modül olarak Noetherian olan R halkasına sol Noetherian halka denir (Sharpe ve Vamos, 1972).

Tanım 3.6.4: Alt modülleri için minimal koşulunu sağlayan veya buna denk olarak azalan zincir koşulunu sağlayan modüle Artinian modül denir. Kendi üzerinde bir sol R -modül olarak Artinian olan R halkasına sol Artinian halka denir (Sharpe ve Vamos, 1972).

Benzer şekilde sağ Artinian ve Noetherian halkaların tanımı verilebilir.

Teorem 3.6.1: M bir modül ve $A \leq M$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler denktir:

(i) M Artinian modüldür;

(ii) A ve M/A Artinian modüldürler (Sharpe ve Vamos, 1972).

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii) A nın alt modüllerinin boştan farklı her ailesi M nin de bir alt modülleri ailesi olduğundan minimal elemana sahiptir. Dolayısıyla A Artiniandır. Şimdi $\pi: M \rightarrow M/A$ homomorfizma ve $\{B_i\}_{i \in I}$ M/A nın alt modüllerinin bir ailesi olsun. O halde $\{\pi^{-1}(B_i)\}_{i \in I}$ M nin alt modüllerinin bir ailesidir. Kabulden bir $i_0 \in I$ için $\pi^{-1}(B_{i_0})$ bu ailenin bir minimal elemanıdır. Bu durumda B_{i_0} da $\{B_i\}_{i \in I}$ ailesinin bir

minimal elemanıdır. Gerçekten bir $i \in I$ için $B_i \leq B_{i_0}$ olsa $\pi^{-1}(B_i) \leq \pi^{-1}(B_{i_0})$ ve $\pi^{-1}(B_{i_0})$ nun minimalliğinden $\pi^{-1}(B_i) = \pi^{-1}(B_{i_0})$ bulunur. π epimorfizma olduğundan Teorem 2.3.2 (v) den $B_i = \pi(\pi^{-1}(B_i)) = \pi(\pi^{-1}(B_{i_0})) = B_{i_0}$ dır.

(ii) $\Rightarrow$ (i) $0 \rightarrow A \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M/A \rightarrow 0$ kısa tam dizisini ele alalım. A ve M/A modüllerinin Artinian olduğunu kabul edelim. M modülünün alt modüllerinin bir azalan zinciri $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$ olsun. Şimdi $A_1 \cap A \supseteq A_2 \cap A \supseteq A_3 \cap A \supseteq \dots$ ve $(A_1 + A)/A \supseteq (A_2 + A)/A \supseteq (A_3 + A)/A \supseteq \dots$ sırasıyla A ve M/A modüllerinin azalan zincirleri olur. A ve M/A modülleri Artinian olduğundan öyle bir $m \in \mathbb{Z}^+$ vardır ki her $n \leq m$ için $A_m \cap A = A_n \cap A$ ve $(A_m + A)/A = (A_n + A)/A$ dir. Aynı m tamsayısı ve her $n > m$ için Önerme 2.2.2 den

$$\begin{aligned} A_m &= A_m \cap (A_m + A) = A_m \cap (A_n + A) \\ &= A_n + (A_m \cap A) = A_n + (A_n \cap A) \\ &= A_n \end{aligned}$$

olduğundan M azalan zincir koşulunu sağlar. O halde M Artiniandır.

Teorem 3.6.2: M herhangi bir modül ve $A \leq M$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler denktir:

- (i) M Noetherian modüldür;
- (ii) A ve M/A Noetherian modüldür (Sharpe ve Vamos, 1972).

İspat: Teorem 3.6.1 in ispatına benzer şekilde elde edilir.

Sonuç 3.6.1: (i) M modülünün Artinian (Noetherian) alt modüllerinin sonlu toplamı Artinian (Noetherian) modüldür.

(ii) R sol Artinian (Noetherian) halka ve M sonlu üretilmiş sol R -modül olsun. Bu takdirde M Artinian (Noetherian) modüldür.

(iii) Artinian (Noetherian) halkanın her bölüm halkası Artinian (Noetherian) halkadır (Sharpe ve Vamos, 1972).

İspat: (i) Her $i = 1, 2, \dots, n$ için $A_i \leq M$ Artinian alt modül olmak üzere $N = \sum_{i=1}^n A_i$ olsun. İspatı tümevarım yöntemiyle yapalım. $n = 1$ için iddianın doğruluğu açıktır. $n - 1$ için doğruluğunu kabul edelim. Her $i \in I$ için A_i Artinian (Noetherian) olacak şekilde $N = \sum_{i=1}^n A_i$ olsun. Kabulden $L = \sum_{i=1}^{n-1} A_i$ Artinian (Noetherian) dir. Teorem

2.3.4 den $N/A_n = (L + A_n)/A_n \cong L/(L \cap A_n)$ dir. L Artinian (Noetherian) modül olduğundan Teorem 3.6.1 den $L/(L \cap A_n)$ de Artinian (Noetherian) dir. Dolayısıyla N/A_n Artinian (Noetherian) modüldür. Yine Teorem 3.6.1 gereği A_n Artinian (Noetherian) olduğundan N Artinian modül bulunur.

(ii) Her $x \in M$ için $\varphi_x(r) = rx$ ile tanımlı $\varphi_x: R \rightarrow M$ homomorfizmasını ele alalım. Teorem 2.3.3 den $R/\text{Çek}(\varphi_x) \cong Rx$ dir. ${}_R R$ Artinian (Noetherian) olduğundan Teorem 3.6.1 gereği Rx Artinian modüldür. $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ kümesi M nin üreteç kümesi olmak üzere (i) den $M = \sum_{i=1}^n Rx_i$ Artinian modüldür.

(iii) R nin her A sol ideali için ${}_R R$ Artinian (Noetherian) modül olduğundan Teorem 3.6.1 ile ${}_R(R/A)$ Artinian (Noetherian) modüldür. $(R/A)A = 0$ olup $A \leq \text{Ann}(R/A)$ dır. Dolayısıyla R/A , R -modülü R/A -modüdür. Böylece ${}_R(R/A)$ modülünün alt modülleri ile R/A nın idealleri aynıdır. Sonuç olarak R/A Artinian (Noetherian) modüldür.

Önerme 3.6.2: Artinian modüller bol tümlenmiştir (Wisbauer, 1991).

İspat: Bir $U \leq M$ için $M = U + V$ olacak şekilde $V \leq M$ alt modülünü alalım. V minimal değilse M Artinian olduğundan alt modülleri minimal koşulunu sağlar. $M = U + V_0$ olacak şekilde $V_0 \leq V$ vardır. V_0 minimal değil ise, $M = U + V_1$ olacak şekilde $V_1 \leq V_0$ vardır. Bu şekilde devam edilirse $\dots \subseteq V_1 \subseteq V_0 \subseteq V$ azalan zincirinin minimal elemanı U nun tümleyenidir. Dolayısıyla M bol tümlenmiştir.

Önerme 3.6.3: R sol Artinian halka ise, R sol mükemmeldir (Kasch, 1982).

İspat: R sol Artinian halka olsun. O halde Önerme 3.6.3 gereği ${}_R R$ tümlenmiş olup Teorem 3.4.5 den ${}_R R$ yarı yereldir. ${}_R R$ Artinian olduğundan

$$\text{Rad}(R) \supseteq (\text{Rad}(R))^2 \supseteq (\text{Rad}(R))^3 \supseteq \dots$$

azalan zinciri için öyle bir $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır ki $(\text{Rad}(R))^n = (\text{Rad}(R))^{n+1}$ dir. $(\text{Rad}(R))^n \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde $A = \{I \subseteq {}_R R \mid (\text{Rad}(R))^n I \neq 0\}$ sol ideallerinin ailesi için $\text{Rad}(R) \in A$ olup $A \neq \emptyset$ dir. ${}_R R$ Artinian olduğundan A , I_0 minimal elemanına sahiptir. $(\text{Rad}(R))^n a \neq 0$ olacak şekilde $a \in I_0$ için

$$\text{Rad}(R)a \subseteq Ra \subseteq I_0$$

ve

$$\begin{aligned} (Rad(R))^n Rad(R)a &= (Rad(R))^{n+1}a \\ &= (Rad(R))^n a \neq 0 \end{aligned}$$

olur. I_0 in minimalliğinden $Rad(R)a = Ra$ olup bu ise, Uyarı 2.7.1 ile çelişir. Dolayısıyla $(Rad(R))^n = 0$ olmalıdır. Böylece $Rad(R)$ nilpotenttir. Sonuç olarak Teorem 3.5.3 gereği R mükemmeldir.

3.7. Dedekind Bölgeleri

Tanım 3.7.1: R tamlık bölgesi olsun. R halkasının sıfırdan ve kendisinden farklı her ideali sonlu sayıda asal ideallerin çarpımı biçiminde tek türlü yazılabiliyorsa R ye Dedekind bölgesi denir. Esas ideal bölgeleri Dedekind bölgesidir (Hungerford, 1973).

Lemma 3.7.1: R cisim olmayan Dedekind bölgesi ve M bir R -modül olsun. Bu takdirde aşağıdakiler denktir:

- (i) M injektiftir;
- (ii) M bölünebilirdir;
- (iii) M radikal modüldür;
- (iv) R halkasının her P maksimal ideali için $M = PM$ dir (Alizade vd, 2001).

Önerme 3.7.1: R tamlık bölgesi ve K , R nin kesir cismi olsun. Bu takdirde, K sol R -modül olarak burulmasız, bölünebilir ve parçalanamaz modüldür (Sharpe ve Vamos, 1972).

İspat: Her $m \in K$ için $m = a/b$ olacak şekilde $a, b \in R$ ve $(b \neq 0)$ elemanları vardır. R tamlık bölgesi olduğundan her $0 \neq r \in R$ için $rb \neq 0$ olup $n = a/rb \in K$ dır. Dolayısıyla $rn = r a/rb = a/b = m$ olup $K = rK$ dır. Böylece K bölünebilirdir. Şimdi $T(K) = 0$ olduğunu gösterelim. Herhangi bir $m = a/b \in T(K)$ ve $0 \neq r \in R$ için $0 = rm = (ra)/b$ olduğundan $ra = 0$ dır. $0 \neq r \in R$, $a \in R$ ve R tamlık bölgesi olduğundan $a = 0$ olup $m = a/b = 0$ dır. Dolayısıyla $T(K) = 0$ dır. Son olarak K , R -modülünün parçalanamaz olup olmadığını inceleyelim. K nın $0 \neq A, B$ öz alt modüllerini alalım. $0 \neq A$ ve $0 \neq B$ olduğundan $0 \neq a/b \in A$ ve $0 \neq c/d \in B$ elemanları mevcut olup $a, b, c, d \neq 0$ dır. R tamlık bölgesi olduğundan $b^2cd \neq 0$ ve $abd^2 \neq 0$ dır. A ve B , R -modül olduğundan $b^2cd(a/b) = abcd \in A$ ve

$abd^2(c/d) = abcd \in B$ olup $0 \neq abcd \in A \cap B \neq \emptyset$ dir. Dolayısıyla K parçalanamazdır.

Sonuç 3.7.1: R Dedekind bölgesi ve K, R nin kesir cismi olsun. Bu takdirde, K sol R -modül olarak injektiftir (Sharpe ve Vamos, 1972).

İspat: ${}_R K$ bölünebilir olduğundan Lemma 3.7.1 gereği ${}_R K$ injektiftir.

Teorem 3.7.1: R Dedekind bölgesi ve M bir R -modül olsun. Bu takdirde; K, R halkasının kesir cismi ve I, J indis kümeleri olmak üzere $P(M) \cong K^{(I)} \oplus (K/R)^{(J)}$ dir (Wisbauer, 1991).

Önerme 3.7.2: R Dedekind bölgesi ve M sınırlı R -modül olsun. Bu takdirde, M modülü tümlenmiştir (Wisbauer, 1991).

İspat: M sınırlı modül olduğundan $rM = 0$ olacak şekilde $0 \neq r \in R$ elemanı vardır. $I = \langle r \rangle = rR = Rr$ esas ideali olsun. Bu takdirde

$$IM = \langle r \rangle M = (rR)M = r(RM) = rM = 0$$

olduğundan $I \leq \text{Ann}(M)$ dir. Bundan dolayı M nin R -modül yapısıyla R/I -modül yapısı aynıdır. R Dedekind bölgesi olduğundan R/I Artinian halka olup Önerme 3.6.3 ve Sonuç 3.5.1 gereği M tümlenmiş R/I -modüldür. Böylece M tümlenmiştir.

Önerme 3.7.3: R Dedekind bölgesi ve ${}_R K$ tümlenmiş olsun. ${}_R K$ oyuktur (Zöschinger, 1974).

İspat: $0 \neq U \leq {}_R K$ olsun. ${}_R K$ tümlenmiş olduğundan $U + V = {}_R K$ ve $U \cap V \ll V$ olacak şekilde $V \leq {}_R K$ vardır. V tümleyen alt modül olduğundan Önerme 3.1.3 (i) gereği $\text{Rad}(V) = V \cap \text{Rad}({}_R K)$ dir. Burada Sonuç 3.7.1 ve Lemma 3.7.1 den $\text{Rad}({}_R K) = {}_R K$ dir. Öyleyse $\text{Rad}(V) = V \cap {}_R K = V$ olup Lemma 3.7.1 den V injektiftir. Dolayısıyla Teorem 3.2.12 den $V \oplus N = {}_R K$ olacak şekilde $N \leq {}_R K$ vardır. Önerme 3.7.1 ile ${}_R K$ parçalanamaz olduğundan $N = {}_R K$ olup $V = {}_R K$ dir. O halde

$$U \cap V = U \cap {}_R K = U \ll V = {}_R K$$

olur. Sonuç olarak ${}_R K$ oyuktur.

Teorem 3.7.2: R Dedekind bölgesi ve R nin tüm maksimal ideallerinin kümesi Λ olsun. M burulmalı R - modül ise, $T_p(M) = \{a \in M \mid \exists n \in \mathbb{Z}^+, p^n a = 0\}$ olmak üzere $T(M) = M = \bigoplus_{p \in \Lambda} T_p(M)$ dir (Wisbauer, 1991).

İspat: $\sum_{p \in \Lambda} T_p(M) \leq M$ olduğu açıktır. Tersini göstermek için herhangi bir $m \in M$ alalım. M burulmalı bir modül olduğundan $rm = 0$ olacak şekilde bir $0 \neq r \in R$ elemanı vardır. O halde $r \in \text{Ann}(m) \neq 0$ olup R Dedekind bölgesi olduğundan $\text{Ann}(m) = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$ $i = 1, 2, \dots, k$ olacak şekilde p_i asal idealleri ve $n_i \in \mathbb{N}$ vardır.

$$Rm \cong R/\text{Ann}(m) \cong (R/p_1^{n_1}) \oplus (R/p_2^{n_2}) \oplus \dots \oplus (R/p_k^{n_k})$$

olduğundan izomorfizma farkıyla $m = m_1 + m_2 + \dots + m_k$, $p_i^{n_i} m_i = 0$ olacak şekilde m_i elemanları tek türlü olarak belirlidir. Her $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ için $m_i \in T_{p_i}(M)$ olduğundan $m \in \sum_{p \in \Lambda} T_p(M)$ dir.

Şimdi herhangi bir m elemanı için $m \in T_p(M) \cap (\sum_{p \neq q} T_q(M))$ olsun. Bu takdirde $p^n m = 0$ ve $m = m_1 + m_2 + \dots + m_k$ olmak üzere her $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ için $q_i^{n_i} m_i = 0$ olacak şekilde $p \neq q_i$ asal idealleri, $m_i \in T_{q_i}(M)$ elemanları ve $n, n_1, \dots, n_k$ doğal sayıları vardır. Buradan $q_1^{n_1} q_2^{n_2} \dots q_k^{n_k} m = 0$ dır. Şimdi $R = p^n + q_1^{n_1} q_2^{n_2} \dots q_k^{n_k}$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki

$$R \neq p^n + q_1^{n_1} q_2^{n_2} \dots q_k^{n_k}$$

olsun. Bu durumda Teorem 2.3.8 dan $p^n + q_1^{n_1} q_2^{n_2} \dots q_k^{n_k} \leq r$ olacak şekilde R halkasının bir r asal (maksimal) ideali vardır. Bu takdirde $p^n \leq r$ ve

$$q_1^{n_1} q_2^{n_2} \dots q_k^{n_k} \leq r$$

olup r asal ideal olduğundan $p \leq r$ ve bir $n_0 \in \{n_0, n_1, \dots, n_k\}$ için $q_{n_0} \leq r$ olup $p = q_{n_0} = r$ çelişkisi elde edilir. Sonuç olarak $R = p^n + q_1^{n_1} q_2^{n_2} \dots q_k^{n_k}$ olup $1 = r + s$ olacak şekilde $r \in p^n$ ve $s \in q_1^{n_1} q_2^{n_2} \dots q_k^{n_k}$ elemanları vardır. Dolayısıyla $m = 1.m = (r + s).m = rm + sm = 0$ olup $M = \bigoplus_{p \in \Lambda} T_p(M)$ elde edilir.

Önerme 3.7.4: R Dedekind bölgesi ve ${}_R K$ tümlenmiş olsun. R yereldir (Zöschinger, 1974).

İspat: R halkasının tüm asal (maksimal) ideallerinin ailesi Ω olsun. K/R burulmalı bir R -modül olduğundan Teorem 3.7.2 ile $K/R = T(K/R) = \bigoplus_{p \in \Omega} T_p(K/R)$ şeklindedir. ${}_R K$ tümlenmiş ise, Önerme 3.7.3 gereği ${}_R K$ oyuktur. Oyuk modüllerin bölüm modülleri de oyuktur. Oyuk modüller parçalanamaz olduğundan $|\Omega| = 1$ olup R tek maksimal ideale sahiptir.

Önerme 3.7.5: R Dedekind bölgesi, M bir R -modül olsun. $N \ll M$ ise N eş atomdur (Leonard, 1966).

İspat: N modülünün herhangi bir K alt modülü için $Rad(N/K) = N/K$ olsun. Lemma 3.7.1 den N/K injektiftir. O halde Teorem 3.2.12 den $M/K = (U/K) \oplus (N/K)$ olacak şekilde $N/K \leq M/K$ vardır. Diğer taraftan $N \ll M$ olduğundan Teorem 2.5.1 (iv) den $\pi: M \rightarrow M/K$ doğal homomorfizması için $\pi(N) = N/K \ll M/K$ olur. Buradan $U/K = M/K$ dır. O halde $0 = (N/K) \cap (U/K) = (N/K) \cap (M/K) = N/K$ ve buradan $K = N$ olur. Böylece N nin her K öz alt modülü için $Rad(N/K) \neq N/K$ dır. Sonuç 2.3.2 ile N nin K yı kapsayan bir maksimal alt modülü vardır.

Önerme 3.7.6: R Dedekind bölgesi ve M bir eş atom R -modül olsun. Bu takdirde $M \ll E(M)$ dir (Leonard, 1966).

İspat: Bir $X \leq E(M)$ için $M + X = E(M)$ olsun. Buradan Teorem 2.3.4 den $E(M)/X \cong M/(M \cap X)$ yazılır. R Dedekind bölgesi olduğundan $E(M)/X$ injektif olup Lemma 3.7.1 den $E(M)/X$ radikal modüldür. Dolayısıyla $M/(M \cap X)$ radikal modüldür. M eş atom olduğundan $Rad(M/(M \cap X)) = M/(M \cap X)$ iken $M \cap X = M$ olup $X = M + X = E(M)$ olur. Böylece $M \ll E(M)$ bulunur.

Teorem 3.7.3: R herhangi bir halka ve M bir R -modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) $M \ll E(M)$ dir;

(ii) $M \ll N$ olacak şekilde bir N R -modülü vardır (Leonard, 1966).

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii) Açıktır.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Bir N R -modülü için $M \ll N$ olsun. O halde $M \leq N \leq E(N)$ dir. Buradan Teorem 2.5.1 (ii) den $M \ll E(N)$ olur. $E(M)$ injektif olduğundan $E(N)$ nin bir direkt toplam terimidir. $M \ll E(N)$ olması sebebiyle Teorem 2.5.1 (v) gereği $M \ll E(M)$ elde edilir.

Sonuç 3.7.2: R Dedekind bölgesi ve M bir R -modül olsun. $M \ll E(M)$ olması için gerek ve yeter koşul M nin eş atom olmasıdır (Leonard, 1966).

İspat: Önerme 3.7.5 ve Önerme 3.7.6 dan görülür.

Teorem 3.7.4: R yerel Dedekind bölgesi, M bir R -modül olsun. Her $N \leq M$ için aşağıdakiler denktir:

(i) $N \ll M$ dir;

(ii) $Rad(N) \ll N$ dir;

(iii) B sınırlı R -modül ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $N = R^{(n)} \oplus B$ şeklindedir (Leonard, 1966).

Teorem 3.7.5: R yerel Dedekind bölgesi olmak üzere M bir R -modül ve N , M nin bir eş atom alt modül olsun. Bu takdirde, $N = R^{(n)} \oplus B$ olacak şekilde sonlu üretilmiş serbest modül ve sınırlı B modülü vardır (Zöschinger, 1974).

İspat: N eş atom olduğundan Önerme 3.7.6 gereği $N \ll E(N)$ olup Teorem 3.7.3 den $N \ll M$ dir. Böylece Teorem 3.7.4 den istenen elde edilir.

Lemma 3.7.2: R yerel Dedekind bölgesi ve M bir R -modül olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

(i) $Rad(M) \ll M$ dir;

(ii) M eş atomdur;

(iii) M sonlu üretilmiş serbest modül ve sınırlı bir alt modülün direkt toplamıdır. Yani, $n \in \mathbb{N}$ sonlu olmak üzere $M = R^{(n)} \oplus N$ dir;

(iv) M indirgenmiş ve tümlenmiştir (Zöschinger, 1974).

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii) Herhangi bir $U \leq M$ için $Rad(M/U) = M/U$ olsun. Lemma 3.7.1 gereği M/U injektiftir. R yerel halka olduğundan $Rad(M/U) = (Rad(M) + U)/U$ olup Teorem 2.5.1 (iv) gereği $Rad(M/U) = M/U = (Rad(M) + U)/U \ll E(M/U)$ dur. $M/U = E(M/U)$ ve $M/U \ll E(M/U)$ olduğundan $M/U = 0$ olup $U = M$ elde edilir. Sonuç olarak M eş atomdur.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) M eş atom modül ise, Teorem 3.7.5 den istenilen elde edilir.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Önerme 3.7.2 gereği N tümlenmiştir. $n \in \mathbb{N}$ sonlu ve R yerel olduğundan Önerme 3.1.2 (ii) gereği $R^{(n)}$ tümlenmiş olup $M = R^{(n)} \oplus N$ tümlenmiştir. Ayrıca $rN = 0$, $r \neq 0$, $r \in R$ olacak şekilde $I = \langle r \rangle$ esas idealdir. R Dedekind bölgesi olduğundan R/I Artinian esas ideal halkasıdır. Dolayısıyla Önerme 3.6.3 gereği R/I mükemmel olup Teorem 3.5.3 den her R/I -modül maksimal alt modüle sahiptir. $IN = 0$ olduğundan N , R/I -modül olup N indirgenmiştir. Dolayısıyla $P(N) = 0$ dir. $P(M) = P(R^{(n)}) \oplus P(N) = 0$ olur. Böylece M indirgenmiştir.

(iv) $\Rightarrow$ (ii) Herhangi bir $U \leq M$ için $U + V = M$ ve $U \cap V \ll V$ olacak şekilde $V \leq M$ vardır. M indirgenmiş olduğundan $V \neq \text{Rad}(V)$ olup V nin K maksimal alt modülü vardır. $U \cap V \ll V \subseteq \text{Rad}(V) \subseteq K$ olur. Buradan $U \cap V \subseteq K$ ve

$$M = U + V = (U + K) + V$$

dir. Teorem 2.3.4 kullanarak

$$M/(U + K) \cong V/V \cap (U + K) = V/(U \cap V) + K = V/K$$

izomorfizması elde edilir. V/K basit modül olduğundan M nin öz alt modülü olarak $U + K$, M nin maksimal alt modülüdür. Böylece M eş atomdur.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Teorem 2.7.2 den açıktır.



4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde, güçlü yerel modüllerin tanımı ve özellikleri, tümlenmiş modüllerin daha özel bir biçimi olan ss-tümlenmiş modüllerin tanımı ve özellikleri detaylı bir şekilde verildi. Modülleri ss-tümlenmiş olan halkaların yapısı belirlendi. Ayrıca ss-tümlenmiş modüllerin Dedekind bölgeleri üzerindeki yapıları incelendi.

4.1. Güçlü Yerel Modüller

Teorem 3.3.1 ile sıfırdan farklı bir modülün yerel olması için gerek ve yeter şart M devirli ve $Rad(M) \ll M$ olmasıdır. Bu bölümde radikali yarı basit olan yerel modülü güçlü yerel modül olarak adlandıracamız ve yerel modüllerin bu özel sınıfının özelliklerini inceleyeceğiz. Tanıma geçmeden önce bir modülün desteğinin aşağıda tanımı verilen alt modülünü vererek başlayalım.

Tanım 4.1.1: M modülünün basit ve küçük alt modüllerinin toplamı

$$Des_s(M) = \sum \{N \ll M \mid N, M \text{ nin basit alt modülü}\}$$

olarak tanımlanır (Zhou ve Zhang, 2011).

Önerme 4.1.1: M modül olsun. Bu takdirde, $Des_s(M) = Rad(M) \cap Des(M)$ dir.

İspat: $Des_s(M) \subseteq Rad(M)$ ve $Des_s(M) \subseteq Des(M)$ olduğundan

$$Des_s(M) \subseteq Rad(M) \cap Des(M)$$

dir. Şimdi $a \in Rad(M) \cap Des(M)$ alalım. Bu takdirde, Ra yarı basittir. O halde $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere Sonuç 2.6.1 den $Ra = S_1 \oplus S_2 \oplus \dots \oplus S_n$ olacak şekilde $1 \leq i \leq n$ olan M nin S_i basit alt modülleri vardır. $Ra \ll M$ olduğundan Teorem 2.5.1 (i) den $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere $S_i \ll M$ dir. Böylece $a \in Ra \subseteq Des_s(M)$ bulunur.

Sonuç 4.1.1: M basit olmayan yerel modül ise, $Des_s(M) = Des(M)$ dir.

Önerme 4.1.2: M modül ve $N \leq Rad(M)$ olsun. N yarı basit ise, $N \ll M$ dir.

İspat: M modülünün herhangi bir K alt modülü için $M = N + K$ olsun. N yarı basit olduğundan $N = (N \cap K) \oplus N'$ şeklinde N nin N' direkt toplam terimi vardır. O halde bu iki eşitlikten $M = N + K = [(N \cap K) \oplus N'] + K = N' + K$ olur. Ayrıca

$N' \cap K = (N' \cap N) \cap K = N' \cap (N \cap K) = 0$ olup $M = N' \oplus K$ elde edilir. Teorem 2.7.3 den ve $Rad(N') \subseteq Rad(N) = 0$ olduğundan

$$Rad(M) = Rad(N') \oplus Rad(K) = Rad(K)$$

olduğu görülür. Hipotezden

$$M = N + K \subseteq Rad(M) + K = Rad(K) + K \subseteq K$$

olur. Böylece $M = K$ olup $N \ll M$ elde edilir.

Önerme 4.1.3: M parçalanamaz modül olsun. Bu takdirde M basittir veya $Des(M) \subseteq Rad(M)$ dir.

İspat: M parçalanamaz modül olsun. M nin basit olmadığını kabul edelim. $M = Des(M) + X$ olacak şekilde M nin X alt modülünü ele alalım. $Des(M)$ yarı basit olduğundan $Des(M) = (Des(M) \cap X) \oplus Y$ olacak şekilde $Des(M)$ in bir Y alt modülü vardır. Bu iki eşitlikten

$$M = Des(M) + X = [(Des(M) \cap X) \oplus Y] + X = X \oplus Y$$

olur. M basit olmayan parçalanamaz modül olduğundan $Y = 0$ dir. O halde $M = X$ bulunur. Böylece $Des(M) \ll M$ olup $Des(M) \subseteq Rad(M)$ elde edilir.

Tanım 4.1.2: M bir modül olsun. M yerel ve $Rad(M)$ yarı basit ise, M ye güçlü yerel modül denir. R halkası sol R -modül olarak güçlü yerel modül ise, R ye sol güçlü yerel halka denir. Buna göre aşağıdaki diyagram sağlanır.

$$\text{basit modül} \Rightarrow \text{güçlü yerel modül} \Rightarrow \text{yerel modül}$$

Aşağıdaki örnek, yukarıdaki diyagramdaki gerektirmelerinin karşıtlarının her zaman geçerli olmadığını göstermektedir.

Örnek 4.1.1: $M = \mathbb{Z}_4$ yerel sol $\mathbb{Z}$ -modülü için $Rad(M) = Des(M) = \{\bar{0}, \bar{2}\} = \langle \bar{2} \rangle$ olduğundan M güçlü yerel modüldür fakat basit değildir. Diğer taraftan; $M = \mathbb{Z}_8$ yerel sol $\mathbb{Z}$ -modülü için $\{\bar{0}, \bar{2}\} = Des(M) \subseteq Rad(M) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$ olduğundan M güçlü yerel modül değildir.

Önerme 4.1.4: M güçlü yerel modül olsun. Bu takdirde, M indirgenmiş modüldür.

İspat: Önerme 2.7.1 den $P(M) = Rad(P(M)) \subseteq Rad(M)$ dir. M güçlü yerel olduğundan $P(M) \subseteq Des(M)$ olup $P(M)$ bir yarı basit modüldür. Böylece Sonuç 2.7.3 den $P(M) = Rad(P(M)) = 0$ olup M nin indirgenmiş modül olduğu elde edilir.

Önerme 4.1.5: M güçlü yerel modül olsun. Bu takdirde, M nin her bölüm modülü güçlü yerel modüldür.

İspat: M güçlü yerel modül ve N , M nin alt modülü olsun. O halde M/N bölüm modülü yerel modüldür ve $Rad(M)$, M nin tek maksimal alt modülüdür. Ayrıca Teorem 2.7.3 (iv) den $Rad(M/N) = Rad(M)/N$ olup $Rad(M) \subseteq Des(M)$ olduğundan $Rad(M)/N \subseteq Des(M)/N$ olur. Üstelik $\pi: M \rightarrow M/N$ doğal homomorfizma olmak üzere $\pi(Des(M)) = Des(M)/N \subseteq Des(M/N)$ dir. M/N yerel modülü için $Rad(M/N) \subseteq Des(M/N)$ olup M/N nin güçlü yerel modül olduğu görülür.

Önerme 4.1.6: R güçlü yerel halka olsun. Bu takdirde $(Rad(R))^2 = 0$ dir. Özellikle, $Rad(R)$ nilpotenttir.

İspat: R güçlü yerel olduğundan $Rad(R) \subseteq Des({}_R R)$ dir. O halde Önerme 2.7.3 den $(Rad(R))^2 = 0$ bulunur.

Önerme 4.1.7: Güçlü yerel tamlık bölgesi cisimdir.

İspat: R güçlü yerel tamlık bölgesi olsun. Bir $0 \neq a \in R$ alalım. $a \in R - Rad(R)$ ise $Rad(R)$, R nin maksimal alt modülü olduğundan $Rad(R) + Ra = R$ dir. R yerel olduğundan $Rad(R) \ll R$ olup $Rad(R) + Ra = R$ dir. Buradan a , R nin terslenebilir elemanıdır. $a \in Rad(R)$ olsun. O halde Önerme 4.1.6 den $a^2 \in (Rad(R))^2 = 0$ dir. Dolayısıyla $a = 0$ olup R cisimdir.

4.2. SS-Tümlemiş Modüller

Daha önce tanımlanan Rad-tümleyen alt modül tanımını hatırlanırsa: M modül, U ve V alt modüller olsun. $M = U + V$ ve $U \cap V \leq Rad(V)$ ise, V ye U nun Rad-tümleyeni denir. Şimdi V alt modülü için $Des_s(V) \subseteq Rad(V)$ olduğundan da Rad-tümleyen özel bir hali olan ss-tümleyen kavramını veriyoruz.

Tanım 4.2.1: M modül ve $U, V \leq M$ olsun. Eğer $M = U + V$ ve $U \cap V \subseteq Des_s(V)$ ise V ye U nun M de ss-tümleyeni denir.

Lemma 4.2.1: M bir modül ve $U, V \leq M$ olsun. Bu takdirde, aşağıdakiler denktir:

- (i) V , U nun M de ss-tümleyenidir;
- (ii) $M = U + V$, $U \cap V \subseteq Rad(V)$ ve $U \cap V$ yarı basittir;
- (iii) $M = U + V$, $U \cap V \ll V$ ve $U \cap V$ yarı basittir.

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii) V, U nun ss-tümleyeni olsun. Bu takdirde $M = U + V$ ve $U \cap V \subseteq Des_s(V)$ dir. Önerme 4.1.1 ile $U \cap V \subseteq Rad(M) \cap Des(M)$ dir. $U \cap V$ basit alt modüllerin toplamı olup $U \cap V$ yarı basittir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $M = U + V$ ve $U \cap V \subseteq Rad(V)$ ve $U \cap V$ yarı basit olsun. Önerme 4.1.2 den $U \cap V \ll V$ olur.

(iii) $\Rightarrow$ (i) $M = U + V, U \cap V \ll V$ ve $U \cap V$ yarı basit olsun. $U \cap V \subseteq Des_s(V)$ olup istenen elde edilir.

Lemma 4.2.1 den görüldüğü gibi ss-tümleyen alt modül kavramı tümleyen alt modül kavramının bir özel halidir. Böylece aşağıdaki diyagrama vardır.

$$ss\text{-tümleyen} \Rightarrow tümleyen \Rightarrow Rad\text{-tümleyen}$$

Tanım 4.2.2: M modül ve $U \leq M$ olsun. $M = U + V$ koşulunu sağlayan her $V \leq M$ için U nun $V' \leq V$ olacak şekilde bir V' ss-tümleyeni varsa U, M de bol ss-tümleyene sahiptir denir.

Tanım 4.2.3: M bir modül olsun. Eğer M nin her alt modülü (bol) ss-tümleyene sahipse, M ye (bol) ss-tümlemiş modül denir.

Önerme 3.3.1 ile bir maksimal alt modülün varsa tümleyeninin yerel olduğunu biliyoruz. Benzer ilişki ss-tümleyen için aşağıdaki Önermede verilmiştir.

Önerme 4.2.1: M modül ve U, M nin maksimal alt modülü olsun. V, U nun M de bir ss-tümleyeni ise, V güçlü yerel modüldür.

İspat: V, U nun M de ss-tümleyeni olsun. Bu takdirde Lemma 4.2.1 ile $M = U + V$, $U \cap V \ll V$ ve $U \cap V$ yarı basittir. U maksimal alt modülü ve V, U nun tümleyeni olduğundan Önerme 3.3.1 gereği V yerel modüldür. Hatta $Rad(V) = U \cap V$, V nin tek maksimal alt modülüdür.

1. Durum: $U \cap V = 0$ ise, $Rad(V) = 0$ ve V yerel modül olduğundan V basittir. $Rad(V) \subseteq Des(V)$ kapsaması sağlanır.

2. Durum: $U \cap V \neq 0$ ise, V yerel modül olduğundan $Des(V) \subseteq Rad(V) = U \cap V$ ve $U \cap V$ yarı basit olduğundan $U \cap V \subseteq Des(V)$ olur. Böylece $Des(V) = Rad(V)$ bulunur. Böylece V güçlü yerel modüldür.

Önerme 4.2.2: M bir ss-tümlemiş modül ve $N \ll M$ olsun. Bu takdirde $N \subseteq Des_s(M)$ dir.

İspat: $N \ll M$ olduğundan N nin ss-tümleyeni sadece M dir. O halde $N \cap M = N$ yarı basit olup $N \subseteq Des(M)$ dir. Ayrıca $N \cap M = N \subseteq Rad(M)$ olup Önerme 4.1.1 den $N \subseteq Des_s(M)$ elde edilir.

Sonuç 4.2.1: M ss-tümlenmiş modül ve $Rad(M) \ll M$ olsun. Bu takdirde

$$Rad(M) \subseteq Des(M)$$

dir.

İspat: M ss-tümlenmiş ve $Rad(M) \ll M$ ise $M, Rad(M)$ nin ss-tümleyenidir. Dolayısıyla

$$M = M + Rad(M), M \cap Rad(M) = Rad(M) \ll M$$

ve $M \cap Rad(M) = Rad(M)$ yarı basit olup $Rad(M) \subseteq Des(M)$ elde edilir.

Lemma 4.2.2: M tümlenmiş modül ve $Rad(M) \subseteq Des(M)$ olsun. Bu takdirde, M ss-tümlenmiştir.

İspat: N, M nin bir alt modülü olsun. Hipotez gereğince M nin $M = N + K$ ve $N \cap K \ll K$ koşullarını sağlayan K alt modülü vardır. $N \cap K \ll K$ olduğundan $N \cap K \subseteq Rad(K) \subseteq Rad(M) \subseteq Des(M)$ kapsamı yardımıyla, $N \cap K$ nın M nin yarı basit alt modülü olduğu görülür. Böylece $N \cap K \subseteq Des_s(M)$ olup M ss-tümlenmiştir.

Önerme 4.2.3: Her güçlü yerel modül ss-tümlenmiştir.

İspat: M güçlü yerel modül olsun. Bu takdirde, M yereldir ve $Rad(M) \subseteq Des(M)$ dir. M yerel olduğundan Sonuç 3.3.1 ile oyuk olu M tümalt modüllerinin tek tümleyenidir. Böylece M tümlenmiştir. Lemma 4.2.2 den M ss-tümlenmiştir.

Aşağıdaki önerme tümlenmişlikten farklı olarak oyuk modüllerin her zaman ss-tümlenmiş olmayabileceğini göstermektedir.

Önerme 4.2.4: M oyuk modül olsun. Bu takdirde, M nin ss-tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul M nin güçlü yerel modül olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ M ss-tümlenmiş modül olsun. Herhangi bir $m \in Rad(M)$ için $Rm \ll M$ dir. M ss-tümlenmiş olduğundan Önerme 4.2.2 den $Rm \subseteq Des_s(M)$ dir. Böylece $m \in Des(M)$ olup $Rad(M) \subseteq Des(M)$ olur. Şimdi $M = Rad(M)$ olduğunu kabul edelim. O halde $M = Rad(M) = Des(M)$ olduğundan M yarı basittir. Teorem 2.7.3 (iv) ile yarı basit bir modülün radikali sıfır olduğundan $M = Rad(M) = 0$ bulunur.

Bu ise M nin oyuk olmasıyla çelişir. O halde $M \neq Rad(M)$ olmalıdır. M oyuk ve $M \neq Rad(M)$ olduğundan Sonuç 3.3.1 ile M yereldir. $Rad(M) \subseteq Des(M)$ olduğundan M güçlü yerel modüldür.

($\Leftarrow$) Önerme 4.2.3 den açıktır.

Örnek 4.2.1: p asal tamsayı olmak üzere $\mathbb{Z}_p^\infty = \bigcup_{n=1}^\infty \mathbb{Z}_{p^n}$ yerel olmayan oyuk $\mathbb{Z}$ -modülünü ele alalım. Her n doğal sayısı için $c_n = \frac{1}{p^n} + \mathbb{Z} \in \mathbb{Z}_p^\infty$ olsun.

$$pc_1 = 0, pc_2 = c_1, \dots, pc_{n+1} = c_n$$

Buradan $\{c_1, c_2, c_3, \dots, c_n, \dots\}$ kümesinin $\mathbb{Z}_p^\infty$ modülünü ürettiği açıktır. Hatta $\mathbb{Z}_p^\infty = \bigcup_{n=1}^\infty \langle c_n \rangle$ dir. $\langle c_1 \rangle \subseteq \langle c_2 \rangle \subseteq \dots$ olup $\langle c_1 \rangle = \langle \frac{1}{p} + \mathbb{Z} \rangle = Des(\mathbb{Z}_p^\infty)$ dır. Ayrıca $\mathbb{Z}_p^\infty$ maksimal alt modüle sahip değildir. $Rad(\mathbb{Z}_p^\infty) = \mathbb{Z}_p^\infty$ olup

$$Rad(\mathbb{Z}_p^\infty) \not\subseteq Des(\mathbb{Z}_p^\infty)$$

olur. Böylece $\mathbb{Z}_p^\infty$ ss-tümlenmiş modül değildir.

Teorem 4.2.1: M modül ve $Rad(M) \ll M$ olsun. Bu durumda, aşağıdakiler denktir:

- (i) M ss-tümlenmiştir;
- (ii) M tümlenmiştir ve $Rad(M)$ ss-tümleyene sahiptir;
- (iii) M tümlenmiş ve $Rad(M) \subseteq Des(M)$ dir.

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii) $Rad(M) \ll M$ ve M ss-tümlenmiş olsun. O halde M tümlenmiştir. M ss-tümlenmiş olduğundan her alt modülü ss-tümleyene sahiptir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) M tümlenmiş ve $Rad(M)$ ss-tümleyene sahip olsun. $Rad(M) \ll M$ olduğundan $Rad(M)$ in ss-tümleyeni M dir. $M \cap Rad(M) = Rad(M)$ yarı basit olup $Rad(M) \subseteq Des(M)$ olur.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Lemma 4.2.2 den açıktır.

Sonuç 4.2.2: M sonlu üretilmiş modül olsun. Bu durumda, M modülünün ss-tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul M nin tümlenmiş ve $Rad(M) \subseteq Des(M)$ olmasıdır.

Örnek 4.2.2: p asal tamsayı olmak üzere $M = \mathbb{Z}_{p^k}$ ($1 \leq k \in \mathbb{Z}$) yerel $\mathbb{Z}$ -modülünü ele alalım.

1.Durum: $k = 1$ ise, M basit olup M ss-tümlenmiştir.

2.Durum: $k = 2$ ise, M basit değildir ve $Rad(\mathbb{Z}_{p^2}) = Des(\mathbb{Z}_{p^2}) \cong \mathbb{Z}_p$ olup M ss-tümlenmiştir.

Örneğin; $k = 2$ ve $p = 2$ için $\mathbb{Z}_4$ ss-tümlenmiştir. Çünkü bu durumda $\mathbb{Z}_4$ 'e ait alt modül diyagramı

$$\begin{array}{c} \mathbb{Z}_4 \\ \uparrow \\ \{\bar{0}, \bar{2}\} \\ \uparrow \\ \{\bar{0}\} \end{array}$$

formunda olup $Des(\mathbb{Z}_4) = Rad(\mathbb{Z}_4) = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ dir.

3.Durum: $k \geq 3$ olsun. $\mathbb{Z}_{p^{k-1}} \cong Rad(\mathbb{Z}_{p^k}) \neq Des(\mathbb{Z}_{p^k}) \cong \mathbb{Z}_p$ olduğundan Sonuç 4.2.2 den M ss-tümlenmiş değildir. Bunu örneğin; $k = 3$ ve $p = 2$ için daha açık ifade edelim. $\mathbb{Z}_8$ 'e ait alt modül diyagramı

$$\begin{array}{c} \mathbb{Z}_8 \\ \uparrow \\ \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\} \\ \uparrow \\ \{\bar{0}, \bar{4}\} \\ \uparrow \\ \{\bar{0}\} \end{array}$$

formunda olduğundan $Des(\mathbb{Z}_8) = \{\bar{0}, \bar{4}\} \cong \mathbb{Z}_2$ ve $Rad(\mathbb{Z}_8) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\} \cong \mathbb{Z}_4$ olup $Des(\mathbb{Z}_8) \neq Rad(\mathbb{Z}_8)$ dir. Ayrıca $Des_s(\mathbb{Z}_8) = Des(\mathbb{Z}_8) \cap Rad(\mathbb{Z}_8) = \{\bar{0}, \bar{4}\}$ dir. Böylece $\mathbb{Z}_8$ yerel $\mathbb{Z}$ -modülü tümlenmiştir, fakat ss-tümlenmiş değildir. Diğer taraftan $\mathbb{Z}_4$ yerel $\mathbb{Z}$ -modülü ss-tümlenmiştir, fakat yarı basit değildir. Böylece ss-tümlenmiş modüller yarı basit modüllerin öz genellemesidir. Dolayısıyla aşağıdaki diyagramı elde ederiz.

$$\text{yarı basit modül} \Rightarrow \text{ss-tümlenmiş modül} \Rightarrow \text{tümlenmiş modül}$$

Lemma 4.2.3: M modül, M_1 ve U , M nin alt modülleri ve M_1 ss-tümlenmiş olsun. Eğer $M_1 + U$ nun M de bir ss-tümleyeni mevcut ise, U nun M de bir ss-tümleyeni vardır.

İspat: X , $M_1 + U$ nun M de bir ss-tümleyeni olsun. M_1 ss-tümlenmiş olduğundan $(X + U) \cap M_1$, M_1 de bir Y ss-tümleyenine sahiptir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
M &= X + M_1 + U = U + X + M_1 \\
&= U + X + (X + U) \cap M_1 + Y \\
&= U + X + Y
\end{aligned}$$

olur. Şimdi $(X + Y) \cap U \ll X + Y$ olduğunu gösterelim.

$$(X + Y) \cap U \leq X \cap (Y + U) + Y \cap (X + U)$$

olduğu açıktır. Ayrıca $X, M_1 + U$ nun M de bir ss-tümleyeni ve $Y \leq M_1$ olduğundan $X \cap (Y + U) \leq X \cap (M_1 + U) \ll X$ olup $X \cap (Y + U) \ll X$ olduğu görülür. Benzer şekilde Y alt modülü $M_1 \cap (X + U)$ nun M_1 de ss-tümleyeni olduğundan

$$Y \cap (X + U) = Y \cap [(X + U) \cap M_1] \ll Y$$

olur. $(X + Y) \cap U \leq X \cap (Y + U) + Y \cap (X + U)$ olduğundan Teorem 2.5.1 (iii) gereğince $(X + Y) \cap U \ll X + Y$ olur. Diğer taraftan X alt modülü $M_1 + U$ nun M de ss-tümleyeni olduğundan $X \cap (M_1 + U)$ yarı basittir ve $Y \leq M_1$ olduğundan

$$X \cap (Y + U) \leq X \cap (M_1 + U)$$

olup $X \cap (Y + U)$ yarı basittir. Benzer şekilde Y alt modülü $(X + U) \cap M_1$ in ss-tümleyeni olduğundan $Y \cap [(X + U) \cap M_1] = Y \cap (X + U)$ yarı basittir. Sonuç 2.6.2 (i) ve (iii) den $(X + Y) \cap U$ yarı basittir. Böylece $X + Y, U$ nun M de bir ss-tümleyenidir.

Önerme 4.2.5: M bir modül $M_1, M_2 \leq M$ için $M = M_1 + M_2$ olsun. M_1 ve M_2 ss-tümlenmiş ise, M ss-tümlenmiştir.

İspat: $U \leq M$ olsun. 0 modülü $M = M_1 + (M_2 + U)$ nun ss-tümleyenidir. M_1 ss-tümlenmiş olduğundan Lemma 4.2.3 ile $M_2 + U$ nun M de bir ss-tümleyeni vardır. M_2 ss-tümlenmiş olduğundan tekrar Lemma 4.2.3 ile U nun M de bir ss-tümleyeni olduğu görülür. Bu M nin her U alt modülü için geçerli olduğundan M ss-tümlenmiştir.

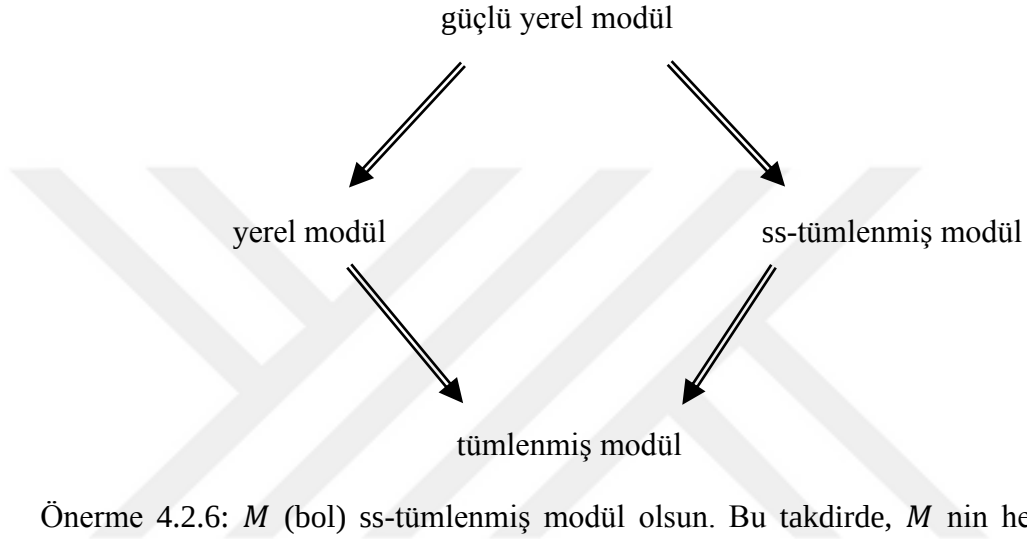
Sonuç 4.2.3: $M_1, M_2, \dots, M_n$ modülleri M R -modülünün ss-tümlenmiş alt modülleri ise $M_1 + M_2 + \dots + M_n$ sonlu toplamı da ss-tümlenmiştir.

İspat: İspatı n üzerine tümevarım uygulayarak yapalım. $k = 1$ için $M = M_1$ olup M_1 ss-tümlenmiştir. $k = n - 1$ için $M = M_1 + M_2 + \dots + M_{n-1}$ ss-tümlenmiş olsun. $k = n$ için $M = (M_1 + M_2 + \dots + M_{n-1}) + M_n$ modülünün ss-tümlenmiş olup olmadığına bakalım. U, M nin herhangi bir alt modülü olsun. 0 alt modülü

$$M = (M_1 + M_2 + \cdots + M_{n-1}) + M_n + U$$

modülünün bir ss-tümleyenidir. $M_1 + M_2 + \cdots + M_{n-1}$ ss-tümlenmiş olduğundan $M_n + U$, M de ss-tümleyene sahip olup Lemma 4.2.3 den U alt modülü M de ss-tümleyene sahiptir. Dolayısıyla $M = M_1 + M_2 + \cdots + M_{n-1} + M_n$ ss-tümlenmiştir.

Örnek 4.2.3: $M = \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$ $\mathbb{Z}$ -modülü güçlü yerel modüllerin toplamı olarak ss-tümlenmiş modüldür. Fakat M modülü güçlü yerel modül değildir. O halde aşağıdaki diyagram elde edilir.



Önerme 4.2.6: M (bol) ss-tümlenmiş modül olsun. Bu takdirde, M nin her bölüm modülü (bol) ss-tümlenmiştir.

İspat: M ss-tümlenmiş modül ve bir $L \leq M$ için $U/L \leq M/L$ olsun. Bu durumda M ss-tümlenmiş olduğundan $M = U + V$, $U \cap V \ll V$ ve $U \cap V$ yarı basit olacak şekilde M nin bir V alt modülü vardır. Buradan $M/L = (U/L) + ((V + L)/L)$ ve Teorem 2.5.1 (iv) den $\pi: M \rightarrow M/L$ doğal homomorfizması için

$$\begin{aligned} U/L \cap (V + L)/L &= ((U \cap V) + L)/L \\ &= \pi(U \cap V) \ll \pi(V) \\ &= (V + L)/L \end{aligned}$$

olur. $U \cap V$ yarı basit olduğundan Sonuç 2.6.2 (ii) den

$$\begin{aligned} \pi(U \cap V) &= ((U \cap V) + L)/L \\ &= U/L \cap (V + L)/L \end{aligned}$$

yarı basittir. Yani $(V + L)/L$, M/L de U/L nin ss-tümleyenidir. Benzer şekilde M nin bol ss-tümlenmiş modül olması durumunda $L \leq M$ olmak üzere M/L bölüm modülünün de bol ss-tümlenmiş olduğu gösterilebilir.

Teorem 4.2.2: Her $i \in I$ için M_i güçlü yerel modül olmak üzere $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ modülü ss-tümlenmiş ve eş atomdur.

İspat: Herhangi bir $i \in I$ için M_i güçlü yerel modül olduğundan M_i yereldir ve $Rad(M_i) \subseteq Des(M_i)$ dir. Sırasıyla Teorem 2.7.3 (iv) den ve Önerme 2.6.2 den $Rad(M) = \bigoplus_{i \in I} Rad(M_i) \subseteq \bigoplus_{i \in I} Des(M_i) = Des(M)$ bulunur. Dolayısıyla $Rad(M)$ yarı basittir. Önerme 4.1.2 gereğince $Rad(M) \ll M$ dir. Önerme 3.1.5 ve Teorem 4.2.1 gereğince M ss-tümlenmiştir.

U , M nin öz alt modülü olsun. Önerme 3.1.3 (ii) den U , M nin bir maksimal alt modülünde kapsanır. Sonuç olarak, M eş atomdur.

Sonuç 4.2.4: M güçlü yerel modül olsun. Bu takdirde, her M -üretilmiş modül ss-tümlenmiş ve eş atomdur.

İspat: N modülü, M -üretilmiş olsun. Bu takdirde bir I indis kümesi için $f: M^{(I)} \rightarrow N$ epimorfizması vardır. Teorem 4.2.2 den $M^{(I)}$ ss-tümlenmiş ve eş atomdur. Önerme 4.2.6 dan N ss-tümlenmiş ve Önerme 2.7.4 (i) den N eş atomdur.

Sonuç 4.2.5: R sol güçlü yerel halka olsun. Bu takdirde, her sol R -modül ss-tümlenmiştir.

İspat: Her sol R -modül R -üretilmiş olduğundan Sonuç 4.2.4 gereği her sol R -modül ss-tümlenmiştir.

Tanım 4.2.4: M bir modül $U \leq M$ olsun. Eğer M/U sonlu üretilmiş ise U ya M nin bir eş sonlu alt modülü denir (Alizade vd, 2001).

Teorem 4.2.3: Bir M modülü için aşağıdakiler denktir:

- (i) M tüm güçlü yerel alt modüllerinin toplamıdır;
- (ii) M ss-tümlenmiş ve eş atomdur;
- (iii) M eş atom ve M nin her eş sonlu alt modülü M de bir ss-tümleyene sahiptir;
- (iv) M eş atom ve M nin her maksimal alt modülü M de bir ss-tümleyene sahiptir.

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii) Her $i \in I$ için M_i modülleri güçlü yerel alt modül olmak üzere $M = \sum_{i \in I} M_i$ olsun. Bu takdirde, $N = \bigoplus_{i \in I} M_i$ modülü Teorem 4.2.2 den ss-tümlenmiştir ve eş atomdur. Şimdi her $(m_i)_{i \in I} \in N$ için $f((m_i)_{i \in I}) = \sum_{i \in I} m_i$ ile tanımlı $f: N \rightarrow M$ epimorfizmasını düşünelim. Önerme 4.2.6 ve Önerme 2.7.4 (i) den M ss-tümlenmiş ve eş atomdur.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) Açıktır.

(iv) $\Rightarrow$ (i) S, M nin tüm güçlü yerel alt modüllerinin toplamı olsun. $S \neq M$ olduğunu kabul edelim. M eş atom olduğundan $S \subseteq K$ olacak şekilde M nin bir K maksimal alt modülü vardır. Hipotezden K, M de bir V ss-tümleyenine sahiptir. Önerme 4.2.1 den V güçlü yereldir. Böylece $V \subseteq S \subseteq K$ kapsamassından $M = S + K = K$ bulunur. Bu ise, K nin maksimal olmasıyla çelişir.

Sonuç 4.2.6: M eş atom modülü için aşağıdakiler denktir:

- (i) M güçlü yerel modüllerin toplamıdır;
- (ii) M ss-tümlenmiştir;
- (iii) M nin her maksimal alt modülü M de bir ss-tümleyene sahiptir.

Tanım 4.2.5: R bir halka olsun. Sıfırdan farklı her sol R -modül maksimal alt modüle sahip ise, R ye sol maksimal halka denir (Faith, 1995).

Buna göre R bir sol maksimal halka ise her sol R -modül eş atomdur. Böylece Teorem 4.2.3 ün bir sonucu olarak aşağıdaki gerçeği de elde ederiz.

Sonuç 4.2.7: R sol maksimal halka ve M sıfırdan farklı sol R -modül olsun. Bu takdirde, M nin tüm güçlü yerel alt modüllerinin toplamı olması için gerek ve yeter şart M nin ss-tümlenmiş olmasıdır.

İspat: Teorem 4.2.3 den açıktır.

Önerme 4.2.7: M bir modül olsun. M nin her alt modülü ss-tümlenmiş ise, M bol ss-tümlenmiştir.

İspat: $M = U + V$ olacak şekilde $U, V \leq M$ alt modüllerini alalım. V ss-tümlenmiş olduğundan $V = (U \cap V) + V'$, $U \cap V' \ll V'$ ve $U \cap V'$ yarı basit olacak şekilde $V' \leq V$ vardır. Buradan $M = U + V = U + ((U \cap V) + V') = U + V'$ eşitliği elde edilir. Dolayısıyla V', U nun M de bir ss-tümleyenidir. O halde U, M de bol ss-tümleyene sahip olur. Böylece M bol ss-tümlenmiştir.

Lemma 4.2.4: M bol ss-tümlenmiş modül ve V ss-tümleyen alt modül olsun. Bu takdirde, V bol ss-tümlenmiştir.

İspat: V, M de U alt modülünün ss-tümleyeni olsun. $X, Y \leq V$ olmak üzere $V = X + Y$ olsun. Bu takdirde $M = U + V = U + (X + Y) = (U + X) + Y$ dir. M bol ss-tümlenmiş olduğundan $U + X, M$ de $Y' \leq Y$ ss-tümleyenine sahiptir. Buradan $X + Y' \leq V$ dir. O halde V nin minimalliğinden $V = X + Y'$ olmalıdır. Ayrıca $X \cap Y' \leq (U + X) \cap Y' \ll Y'$, yani $X \cap Y' \ll Y'$ dür. $(U + X) \cap Y'$ yarı basit olduğundan Sonuç 2.6.2 den $X \cap Y'$ de yarı basittir. Böylece Y', V de X in bir ss-tümleyenidir. Dolayısıyla V bol ss-tümlenmiştir.

Teorem 4.2.4. M bir modül olsun. Bu takdirde, M modülünün bol ss-tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul, X ss-tümlenmiş ve $Y \leq Des_s(M)$ olmak üzere M nin her U alt modülünün $U = X + Y$ şeklinde yazılabilesidir.

İspat: $(\Rightarrow)$ $U \leq M$ olsun. M ss-tümlenmiş olduğundan U bir V ss-tümleyenine sahiptir. M bol ss-tümlenmiş olduğundan M de V nin $X \subseteq U$ olacak şekilde bir ss-tümleyeni vardır. $U \cap V = Y$ diyelim. V, U nun ss-tümleyeni olduğundan $Y \subseteq Des_s(V) \subseteq Des_s(M)$ dir. Önerme 2.2.2 den

$$U = U \cap M = U \cap (X + V) = X + U \cap V = X + Y$$

elde edilir. Böylece Lemma 4.2.4 gereği X ss-tümlenmiştir.

$(\Leftarrow)$ $U \leq M$ olsun. Hipotezden $U = X + Y$, X ss-tümlenmiş ve $Y \subseteq Des_s(M)$ olacak şekilde $X, Y \leq M$ vardır. $Y \subseteq Des_s(M)$ olduğundan $Y \subseteq Des(M)$ dir. Buradan Y yarı basit olup ss-tümlenmiştir. Önerme 4.2.5 gereği U ss-tümlenmiştir. Önerme 4.2.7 gereği M bol ss-tümlenmiştir.

Sonuç 4.2.8: M modülü için aşağıdakiler denktir:

- (i) M bol ss-tümlenmiştir;
- (ii) M nin her alt modülü ss-tümlenmiştir;
- (iii) M nin her alt modülü bol ss-tümlenmiştir.

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii) Teorem 4.2.4 den X ve Y ss-tümlenmiş alt modüller olmak üzere her U alt modülü $U = X + Y$ toplamı şeklinde yazılır. Önerme 4.2.5 gereği U ss-tümlenmiştir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) U, M nin herhangi bir ss-tümlenmiş alt modülü olsun. U nun her alt modülü yine M nin de alt modülü olduğundan U nun her alt modülü ss-tümlenmiş olur. Dolayısıyla Önerme 4.2.7 gereği U bol ss-tümlenmiştir.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Önerme 4.2.7 den açıktır.

Önerme 4.2.8: M π -projektif ve ss-tümlenmiş modül olsun. Bu takdirde M bol ss-tümlenmiştir.

İspat: $U, V \leq M$ olmak üzere, $M = U + V$ olsun. M π -projektif olduğundan $f(M) \leq U$ ve $(1_M - f)(M) \leq V$ olacak şekilde bir $f: M \rightarrow M$ homomorfizması vardır. $(1_M - f)(U) \leq U$ olduğu açıktır. V', M de U nun ss-tümleyenini olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} M &= f(M) + (1_M - f)(M) \\ &= f(M) + (1_M - f)(U + V') \\ &\leq U + (1_M - f)(V') \end{aligned}$$

olup $M = U + (1_M - f)(V')$ olur. $(1_M - f)(V') \leq V$ olduğu açıktır.

$y \in U \cap (1_M - f)(V')$ alalım. Buradan $y \in U$ ve $y = (1_M - f)(x) = x - f(x)$ olacak şekilde $x \in V'$ vardır. O halde $x = y + f(x) \in U \cap V'$ ve buradan $y = (1_M - f)(x) \in (1_M - f)(U \cap V')$ dir. Böylece

$$U \cap (1_M - f)(V') \subseteq (1_M - f)(U \cap V')$$

dür. $U \cap V' \ll V'$ olduğundan Teorem 2.5.1 (iv) ve (i) den

$$U \cap (1_M - f)(V') \ll (1_M - f)(V')$$

dir. Ayrıca Sonuç 2.6.2 (i) ve (ii) den $U \cap (1_M - f)(V')$ yarı basittir. Buradan $(1_M - f)(V')$, U nun M de ss-tümleyenidir. Böylece M bol ss-tümlenmiş bulunur.

Sonuç 4.2.9: Projektif ss-tümlenmiş modülün her alt modülü ss-tümlenmiştir.

İspat: M projektif ss-tümlenmiş modül olsun. Bu takdirde Teorem 3.2.5 ve Önerme 4.2.8 gereği M bol ss-tümlenmiştir. Sonuç 4.2.8 gereği istenen elde edilir.

4.3. Modülleri SS-Tümlenmiş olan Halkalar

Lemma 4.3.1: M projektif modül olsun. M modülünün ss-tümlenmiş olması için gerek ve yeter şart M nin tümlenmiş ve $Rad(M) \subseteq Des(M)$ olmasıdır.

İspat: M projektif tümlenmiş modül olsun. Teorem 3.4.1 den M yarı mükemmeldir. Buradan Önerme 3.4.1 gereği $Rad(M) \ll M$ dir. O halde Teorem 4.2.1 den istenen elde edilir. Ters Lemma 4.2.2 den açıktır.

Lemma 4.3.2: R bir halka olsun. Her sol R -modülün ss-tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul her sol R -modülün tüm güçlü yerel alt modüllerinin toplamı olmasıdır.

İspat: M bir R -modül olsun. Her sol R -modül ss-tümlenmiş ise Sonuç 3.5.1 den R mükemmeldir. Böylece R sol maksimal halkadır. Sonuç 4.2.7 den M tüm güçlü yerel alt modüllerin toplamıdır. Ters, Teorem 4.2.3 den açıktır.

Teorem 4.3.1: Bir R halkası için aşağıdakiler denktir:

- (i) ${}_R R$ ss-tümlenmiştir;
- (ii) R yarı mükemmeldir ve $Rad(R) \subseteq Des({}_R R)$;
- (iii) R yarı yerel ve $Rad(R) \subseteq Des({}_R R)$;
- (iv) Her projektif sol R modül (bol) ss-tümlenmiştir;
- (v) Her sol R -modül (bol) ss-tümlenmiştir;
- (vi) Her sol R -modül tüm güçlü yerel alt modüllerinin toplamıdır;
- (vii) ${}_R R$ güçlü yerel alt modüllerinin sonlu toplamıdır;
- (viii) R nin her maksimal sol ideali R de ss-tümleyene sahiptir.

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii) ${}_R R$ ss-tümlenmiş olsun. O halde ${}_R R$ tümlenmiş olup Teorem 3.4.7 den R yarı mükemmeldir. Sonuç 4.2.2 gereği $Rad(R) \subseteq Des({}_R R)$ dir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Sonuç 3.4.4 den açıktır.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) M projektif sol R -modül olsun. Bu takdirde Önerme 3.2.2 den

$$Rad(M) = Rad(R)M \subseteq Des({}_R R)M = Des(M)$$

dir. Teorem 3.4.7 den M tümlenmiştir. Lemma 4.3.1 den M ss-tümlenmiştir. M nin her alt modülü yine ss-tümlenmiş olduğundan Önerme 4.2.7 gereği M bol ss-tümlenmiştir.

(iv) $\Rightarrow$ (v) Teorem 2.4.2 ve Önerme 4.2.6 dan görülür.

(v) $\Rightarrow$ (vi) Lemma 4.3.2 den görülür.

(vi) $\Rightarrow$ (vii) $\{L_i\}_{i \in I}$ ${}_R R$ nin tüm güçlü yerel alt modüllerinin ailesi olsun. Kabulden ${}_R R = \sum_{i \in I} L_i$ dir. Böylece $1_R = a_{i_1} + \dots + a_{i_n}$ olacak şekilde $a_{i_j} \in L_{i_j}$, $j = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Buradan ${}_R R = L_{i_1} + \dots + L_{i_n}$ olup ${}_R R$ sonlu sayıda güçlü yerel alt modülün toplamıdır.

(vii) $\Rightarrow$ (viii) Teorem 4.2.3 den görülür.

(viii) $\Rightarrow$ (i) R sol R -modül olarak sonlu üretilmiş olduğundan Teorem 2.3.8 gereğince ${}_R R$ eş atomdur. ${}_R R$ eş atom ve R nin her maksimal sol ideali R de ss-tümleyene sahip olduğundan Sonuç 4.2.6 gereği ${}_R R$ ss-tümlenmiştir.

4.4. Dedekind Bölgeleri Üzerinde SS-Tümlenmiş Modüller

Bu bölümde aksi belirtilmedikçe her halkayı cisim olmayan Dedekind bölgesi olarak alacağız.

Uyarı 4.4.1: R Dedekind bölgesi ve K , R nin kesir cismi olsun. K/R yerel olmayan oyuk modül olduğundan K/R oyuk modülü güçlü yerel modül değildir. Dolayısıyla Önerme 4.2.4 den K/R ss-tümlenmiş değildir. Diğer taraftan K ss-tümlenmiş olsun. Bu takdirde R değişmeli bölgesinin kesir cismi tümlenmiş olup K oyuktur. O halde yine Önerme 4.2.4 gereği K nin güçlü yerel olduğu elde edilir. Bu ise çelişkidir. Böylece K ss-tümlenmiş değildir.

Önerme 4.4.1: R Dedekind bölgesi, K , R nin kesir cismi ve M ss-tümlenmiş R -modül olsun. Bu takdirde M indirgenmiş, eş atom ve $Rad(M) \subseteq Des(M)$ dir.

İspat: M ss-tümlenmiş modül ve N , M nin radikal alt modülü olsun. Lemma 3.7.1 den N injektiftir. Böylece, $M = N \oplus L$ olacak şekilde L indirgenmiş alt modülü vardır. Önerme 4.2.6 dan N ss-tümlenmiştir. Ayrıca N injektif olduğundan Teorem 3.7.1 den I ve J indis kümeleri için $N = K^{(I)} \oplus (K/R)^{(J)}$ dir. Buradan Önerme 4.2.4 gereği K ss-tümlenmiştir. Öyleyse, Uyarı 4.4.1 gereği $I = J = 0$ dır. O halde $N = 0$ olup M indirgenmiş modül bulunur. U , M nin öz alt modülü olsun. Bu takdirde U , M de V ss-tümleyenine sahiptir. M indirgenmiş olduğundan V, P maksimal alt modüle sahiptir. Öyleyse V/P basit modüldür.

$$M/(U + P) = (U + V + P)/(U + P) \cong V/V \cap (U + P)$$

olur. Buradan Önerme 2.2.2 den

$$V/(P + (U \cap V)) \cong (V/P)/(P + (U \cap V)/P)$$

dır. V/P basit olduğundan $P + (U \cap V)/P = P/P$ olup $U \cap V \leq P$ dir. O halde $M/(U + P) \cong V/P$ olur. Dolayısıyla $U + P$, M nin maksimal alt modülüdür. Böylece M eş atomdur. Teorem 2.7.2 ve Önerme 4.2.2 gereği $Rad(M) \subseteq Des(M)$ elde edilir.

Önerme 4.4.2: R Dedekind bölgesi ve M sıfırdan farklı R -modül olsun. Bu durumda M nin ss-tümlemiş olması için gerek ve yeter şart M nin güçlü yerel modüllerin direkt toplamına izomorf olmasıdır.

İspat: M ss-tümlemiş modül olsun. Önerme 4.4.1 gereği M indirgenmiştir. Böylece M tümlemmiştir ve Lemma 3.7.2 den M sonlu üretilmiş serbest modül ve sınırlı bir alt modülün direkt toplamıdır. Yani, $n \in \mathbb{N}$ sonlu olmak üzere $M = R^{(n)} \oplus N$ dir. O halde $R^{(n)}$ sonlu üretilmiş olduğundan ve N sınırlı olduğundan yerel modüllerin direkt toplamına izomorfturlar. Buradan $i \in I$ için L_i yerel olmak üzere $M \cong \bigoplus_{i \in I} L_i$ biçiminde yazılabilir. M ss-tümlemiş olduğundan Önerme 4.2.6 dan her bir L_i ss-tümlemmiştir. Önerme 4.2.4 den her bir L_i güçlü yerel modüldür. Böylece istenen elde edilir. Ters, Teorem 4.2.2 den görülür.

Önerme 4.4.3: R yerel Dedekind bölgesi ve M bir R -modül olsun. Bu durumda M nin ss-tümlemiş olması için gerek ve yeter şart M nin sınırlı ve $Rad(M) \subseteq Des(M)$ olmasıdır.

İspat: M ss-tümlemiş ise Önerme 4.4.1 gereği M eş atomdur ve $Rad(M) \subseteq Des(M)$ dir. Önerme 3.7.5 gereği $M = R^{(n)} \oplus N$ olacak şekilde M nin N sınırlı alt modülü ve $n \in \mathbb{N}$ vardır. Önerme 4.2.6 dan R ss-tümlemmiştir. Önerme 4.2.4 den R güçlü yereldir. Önerme 4.1.7 den R cisimdir. R cisim olmayan Dedekind bölgesi olduğundan $n = 0$ dır. Böylece M sınırlı modüldür. Tersine; M sınırlı ve $Rad(M) \subseteq Des(M)$ olsun. Bu takdirde $IM = 0$ olacak şekilde R nin I ideali vardır. M , R/I -modül olarak düşünülebilir. R/I Artinian halka olduğundan Önerme 3.6.3 den mükemmel olup Sonuç 3.5.1 den M tümlemiş R/I -modüldür. Buradan M tümlemiş R -modüldür. Böylece Lemma 4.2.2 den M ss-tümlemmiştir.

Lemma 4.4.1: R yerel Dedekind bölgesi ve M bir R -modül olsun. Bu durumda M nin güçlü yerel modül olması için gerek ve yeter şart $p \in R$ asal eleman olmak üzere $M \cong R/pR$ veya $M \cong R/p^2R$ olmasıdır.

İspat: M güçlü yerel modül olduğundan yereldir. O halde $n \geq 1$ için $M \cong R/p^n R$ biçiminde yazılır. Buradan $Rad(R/p^n R) = pR/p^n R \subseteq Des(R/p^n R) \cong R/pR$ dir. R/pR basit modül olduğundan

$$pR/p^n R = pR/pR$$

veya

$$pR/p^n R = R/pR \cong pR/p^2 R$$

olmalıdır. Böylece $n = 1$ veya $n = 2$ elde edilir. Tersisi açıktır.

Teorem 4.4.1: R yerel Dedekind bölgesi ve M bir sol R -modül olsun. Aşağıdakiler denktir:

- (i) M ss-tümlenmiştir;
- (ii) M sınırlıdır ve $Rad(M) \subseteq Des(M)$;
- (iii) Herhangi bir $N \leq M$ için N sınırlıdır ve $Rad(N) \subseteq Des(N)$;
- (iv) M nin her alt modülü ss-tümlenmiştir;
- (v) M bol ss-tümlenmiştir;
- (vi) p asal eleman olmak üzere M modülü R/pR ve $R/p^2 R$ nin direkt toplamına izomorftur.

İspat: (i) $\Leftrightarrow$ (ii) Önerme 4.4.3 den görülür.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Herhangi bir $N \subseteq M$ alalım. M sınırlı modül olduğundan N , M nin sınırlı alt modülüdür. Önerme 2.6.3 den

$$Rad(N) \subseteq Rad(M) \cap N \subseteq Des(M) \cap N = Des(N)$$

elde edilir.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Önerme 4.4.3 den görülür.

(iv) $\Rightarrow$ (v) Sonuç 4.2.8 den görülür.

(v) $\Rightarrow$ (vi) Önerme 4.4.2 ve Lemma 4.4.1 den görülür.

(vi) $\Rightarrow$ (i) Önerme 4.4.2 ve Lemma 4.4.1 den görülür.

Teorem 4.4.2: R yerel olmayan Dedekind bölgesi ve M bir R -modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

- (i) M ss-tümelenmiştir;
- (ii) M tümelenmiştir, eş atomdur ve $Rad(M) \subseteq Des(M)$;
- (iii) M güçlü yerel modüllerin direkt toplamına izomorftur.

İspat: (i) $\Leftrightarrow$ (iii) Önerme 4.4.2 den görülür.

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) Önerme 4.4.1 ve Lemma 4.2.2 den görülür.

Lemma 4.4.2: M abel grubunun $\mathbb{Z}$ -modül olarak güçlü yerel olması için gerek ve yeter koşul $p \in \mathbb{P}$ olmak üzere $M \cong \mathbb{Z}_p$ veya $M \cong \mathbb{Z}_{p^2}$ olmasıdır.

İspat: M güçlü yerel grup olsun. Bu takdirde M yereldir ve $M \cong \mathbb{Z}_{p^n}$ olacak şekilde $1 \leq n \in \mathbb{Z}^+$ ve $p \in \mathbb{P}$ vardır. M yerel olduğundan $Rad(M) \cong \mathbb{Z}_{p^{n-1}}$ ve $Des(M) \cong \mathbb{Z}_p$ dir. M güçlü yerel olduğundan $Rad(M) \subseteq Des(M)$ dir. $\mathbb{Z}_{p^{n-1}} \cong Rad(M) \subseteq Des(M) \cong \mathbb{Z}_p$ dir. $\mathbb{Z}_p$ basit olduğundan $n = 1$ veya $n = 2$ olur.

Önerme 4.4.2 ve Lemma 4.4.2 kullanılarak ss-tümelenmiş abel grupların yapısını belirleriz.

Sonuç 4.4.1: M abel grubunun $\mathbb{Z}$ -modül olarak ss-tümelenmiş olması için gerek ve yeter koşul $I, J \subseteq \mathbb{P}$ olmak üzere $M \cong (\bigoplus_{p \in I} \mathbb{Z}_p) \oplus (\bigoplus_{p \in J} \mathbb{Z}_{p^2})$ olmasıdır.

İspat: M ss tümelenmiş olsun. Bu takdirde Önerme 4.4.2 den M güçlü yerel modüllerin direkt toplamına izomorftur. Lemma 4.4.2 den istenen elde edilir. Tersi, Lemma 4.4.2 den görülür.

Uyarı 4.4.2: R yarı yerel bir halka ve M bir R -modül olsun. Bu takdirde, Teorem 3.3.3 den $Rad(M) = Rad(R)M$ şeklinde olduğunu biliyoruz. R yerel Dedekind bölgesi ise, R esas ideal bölgesi olup R nin her asal ideali bir maksimal idealdir ve maksimal idealleri asal eleman tarafından üretilir. Dolayısıyla R yerel olduğundan R halkasının bir tek maksimal (asal) ideali mevcut olup bu ideal $Rad(R)$ dir ve $Rad(R) = Rp = \langle p \rangle$ olacak şekilde bir tek $p \in R$ asal elemanı vardır. Buradan $Rad(M) = Rad(R)M = (Rp)M = (pR)M = pM$ şeklinde yazılır.

Lemma 4.4.3: R yerel Dedekind bölgesi ve M bir R -modül olsun. Herhangi bir $U \leq Rad(M)$ in ss-tümleyene sahip olması için gerek ve yeter şart S yarı basit olmak üzere $U = Rad(U) \oplus S$ olmasıdır.

İspat: ($\Rightarrow$) V, M de U nun ss-tümleyeni olsun. O halde $M = U + V$, $U \cap V \ll V$ ve $U \cap V$ yarı basittir. Önerme 3.1.3 ve Uyarı 4.4.2 den p, R nin tek asal elemanı olmak üzere

$$\begin{aligned} U \cap V + \text{Rad}(U) &= (U \cap V) \cap \text{Rad}(M) + \text{Rad}(U) \\ &= U \cap (V \cap \text{Rad}(M) + \text{Rad}(U)) \\ &= U \cap (\text{Rad}(V) + \text{Rad}(U)) \\ &= U \cap (pV + pU) \\ &= U \cap pM = U \cap \text{Rad}(M) = U \end{aligned}$$

olur. Böylece herhangi bir $S \subseteq U \cap V$ için $U = \text{Rad}(U) \oplus S$ elde edilir.

($\Leftarrow$) $U = \text{Rad}(U) \oplus S$ olduğundan $\text{Rad}(U) = \text{Rad}(\text{Rad}(U))$ olup Lemma 3.7.1 den $\text{Rad}(U)$ injektiftir. O halde herhangi bir $V \leq M$ için $M = \text{Rad}(U) \oplus V$ dir. Önerme 2.2.2 den $U = U \cap M = U \cap (\text{Rad}(U) \oplus V) = \text{Rad}(U) \oplus (U \cap V)$ olur. R yerel halka olduğundan $U \cap V \cong U/\text{Rad}(U)$ yarı basittir. $M = U + V$ ve

$$U \cap V \subseteq U \subseteq \text{Rad}(M)$$

olduğundan Teorem 2.5.1 ve Önerme 4.1.1 den $U \cap V \ll V$ dir. Böylece V, U nun M de ss-tümleyenidir.

Teorem 4.4.3: R yerel Dedekind bölgesi ve M bir R -modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

- (i) $M, E(M)$ de ss-tümleyene sahiptir;
- (ii) K, R nin kesir cismi I ve J indis kümeleri S , yarı basit R -modül olmak üzere $M \cong K^{(I)} \oplus (K/R)^{(J)} \oplus S$ dir;
- (iii) $\text{Rad}(M), M$ de direkt toplam terimidir.

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii) Lemma 3.7.1 den $E(M)$ radikal modüldür. O halde $M \subseteq E(M) = \text{Rad}(E(M))$ dir. $M, E(M)$ de ss-tümleyene sahip olsun. Lemma 4.4.3 gereği S yarı basit olmak üzere $M = \text{Rad}(M) \oplus S$ dir. Teorem 3.7.1 den I ve J indis kümeleri için

$$\text{Rad}(M) = P(M) \cong K^{(I)} \oplus (K/R)^{(J)}$$

olur. Dolayısıyla

$$M \cong K^{(I)} \oplus (K/R)^{(J)} \oplus S$$

dir.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Lemma 4.4.3 den açıktır.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii) Lemma 4.4.3 de $U = \text{Rad}(M)$ alınırsa $M \subseteq E(M) = \text{Rad}(E(M))$ nin ss-tümleyene sahip olması için gerek ve yeter koşul S yarı basit olmak üzere $M = \text{Rad}(M) \oplus S$ olmasıdır.



5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde ss-tümlemiş modüllerin Dedekind Bölgesi üzerindeki yapısı belirlendi. Bu modüllerin Noetherian halkalar üzerindeki yapısı çalışılabilir. Tümlemiş modüllerin hangi şartlar altında ss-tümlemiş olduğu belirlendi. Hangi tümlemiş modüller ss-tümlemiştir araştırılabilir. Artinian modüller tümlemiştir fakat ss-tümlemiş değildir. Artinian modüller hangi şartlarda ss-tümlemiş olduğu araştırılabilir. Zayıf ss-tümlemiş modüllerin halka yapıları hakkında çalışmalar yapılabilir. Dedekind bölgeleri üzerinde zayıf ss-tümlemiş modüller çalışılabilir. Her alt modülü direkt toplam terimi olan bir ss-tümleyene sahip modüllerin özellikleri ve halka yapıları çalışılabilir. Her ss-tümlemiş alt modülü direkt toplam terimi olan modüllerin özellikleri ve halka yapıları çalışılabilir.

KAYNAKLAR

- Alizade, R., Bilhan, G. and Smith, P. F. 2001. Modules whose maximal submodules have supplements. *Communications in Algebra*, 29:6, 2389-2405.
- Alizade, R. ve Pancar, A. 1999. *Homoloji Cebire Giriş*. Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, 176, Samsun.
- Azumaya, G. 1990. Some characterizations of regular modules. *Publicacions Matematiques*, 34, 241–248.
- Bass, H. 1960. Finitistic dimension and a homological generalization of semiprimary rings. *Transactions of the American Mathematical Society*, 95, 466-488.
- Clark, J., Lomp, C., Vanaja, N. and Wisbauer, R. 2006. *Lifting Modules*. Frontiers in Mathematics Birkhauser, 394, Verlag-Basel.
- Facchini, A. 1998. *Module Theory*, Springer Basel, 285, Basel.
- Faith, C. 1995. Rings whose modules have maximal submodules. *Publicacions Matematiques*, 39, 201–214.
- Hungerford, T. W. 1973. *Algebra*. Springer Verlag, 502, New York.
- Kasch, F. 1982. *Modules and Rings*. Published for the London Mathematical Society by Academic Press, 372, Teubner.
- Kasch, F. and Mares, E. 1966. Eine kennzeichnung semi-perfecter moduln. *Nagoya Mathematical Journal*, 27, 525-529.
- Leonard, W. W. 1966. Small modules. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 17, 527-531.
- Sharpe, D. W. and Vamos, P. 1972. *Injective Modules*, Lectures in Pure Mathematics University of Sheffield, 190, The Great Britain.
- Xue, W. 1996. Characterizations of semiperfect and perfect rings. *Publicacions Matematiques*, 40, 115-125.
- Wang, Y. and Ding, N. 2006. Generalized supplemented modules. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 10, 1589-1601.
- Wisbauer, R. 1991. *Foundations of Module and Ring Theory*. Gordon and Breach, 600, Philadelphia.
- Zhou, D. X. and Zhang, X. R. 2011. Small-essential submodules and morita duality. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, 35, 1051-1062.

Zimmermann-Huisgen, B. 1976. Pure submodules of direct products of free modules. *Mathematische Annalen*, 224, 233-245.

Zöschinger, H. 1974. Supplemented modules over Dedekind rings. *Journal of Algebra*, 29, 42-56.



ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Engin KAYNAR
Doğum Yeri : Gümüşhacıköy/AMASYA
Doğum Tarihi : 13.12.1982
Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu

Lise : Gümüşhacıköy Lisesi (1999)
Lisans : Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü (17.06.2005)
Tezsiz Yüksek lisans : Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı (28.02.2007)
Tezli Yüksek lisans : Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı (26.09.2012)

Çalıştığı Kurumlar

Merzifon Dershaneleri (2005-2007).
Amasya Üniversitesi Teknik Bilimler Meslek Yüksekokulu (2008-)

Yayınlar

Kaynar E., Türkmen E. ve Aydın Y. 2018. Generalizations of Rad-Supplemented Modules. *Publications De l'institut Mathématique*, 104:118, 139-148.
Kaynar E., Nişancı Türkmen B. ve Türkmen E. 2019. A Note on Generalizations of Semisimple Modules. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 60:3, 305-312.
Kaynar E., Çalışıcı H. ve Türkmen E. 2020. SS-Tümlenmiş Modüller. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics Statistics*, 69:1, 473-485.