

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



**4-BOYUTLU GALİLEAN UZAYDA EĞRİLERİN YENİ
KARAKTERİZASYONLARI**

Hakan UYSAL

Yüksek Lisans Tezi

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Geometri Bilim Dalı

AĞUSTOS 2020

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

4-BOYUTLU GALİLEAN UZAYDA EĞRİLERİN YENİ KARAKTERİZASYONLARI

Tez Yazarı

Hakan UYSAL

Danışman

Prof. Dr. Handan ÖZTEKİN

AĞUSTOS 2020

ELAZIĞ

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Başlığı: 4-Boyutlu Galilean Uzayda Eğrilerin Yeni Karakterizasyonları
Yazarı: Hakan UYSAL
İlk Teslim Tarihi: 13.07.2020
Savunma Tarihi: 14.08.2020

TEZ ONAYI

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına göre hazırlanan bu tez aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından değerlendirilmiş ve akademik dinleyicilere açık yapılan savunma sonucunda OYBİRLİĞİ ile kabul edilmiştir.

Danışman:	Prof. Dr. Handan ÖZTEKİN Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	<i>İmza</i> Onayladım
Başkan:	Unvan Adı SOYADI ... Üniversitesi, ... Fakültesi	Onayladım
Üye:	Unvan Adı SOYADI ... Üniversitesi, ... Fakültesi	Onayladım

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunun/...../20..... tarihli toplantısında tescillenmiştir.

İmza
Prof. Dr. Soner ÖZGEN
Enstitü Müdürü

BEYAN

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım “4-Boyutlu Galılean Uzayda Eğrilerin Yeni Karakterizasyonları” Başlıklı Yüksek Lisans Tezimin içindeki bütün bilgilerin doğru olduğunu, bilgilerin üretilmesi ve sunulmasında bilimsel etik kurallarına uygun davrandığımı, kullandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi, maddi ve manevi desteği olan tüm kurum/kuruluş ve kişileri belirttiğimi, burada sunduğum veri ve bilgileri unvan almak amacıyla daha önce hiçbir şekilde kullanmadığımı beyan ederim.

14.08.2020

Hakan UYSAL



ÖNSÖZ

Bu çalışmada 4-Boyutlu Galilean uzayda bir regüler eğrinin yer vektörü, frenet vektörlerin bir lineer birleşimi şeklinde ifade edilmiştir. Ayrıca eğrilik fonksiyonları cinsinden bu eğriler karakterize edilmiştir. Ayrıca $\mathbb{G}_4$ de rektifiyan eğri, sabit oranlı eğri, T-sabit ve N-sabit eğriler için bazı sonuçlar verilmiştir.

Böyle bir çalışmanın gerçekleşmesinde değerli zamanını ve desteğini esirgemeyip gerekli bütün imkanları sağlayarak bana yardımcı olan saygıdeğer hocam Sayın Prof. Dr. Handan ÖZTEKİN'e ve çalışmamın başından sonuna desteğini esirgemeyen değerli eşim Emine UYSAL'a teşekkürü borç bilirim.

Hakan UYSAL
ELAZIĞ, 2020

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖNSÖZ.....	iv
İÇİNDEKİLER	v
ÖZET	vi
ABSTRACT	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	viii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	2
2.1. Öklid Uzayı	2
2.2. Öklid Uzayında Eğriler.....	4
3. MATERYAL VE METOT	7
3.1. 4-Boyutlu Galilean Uzayda Eğrilerin Bazı Temel Özellikleri.....	7
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	11
4.1. 4-Boyutlu Galilean Uzayda Eğrilerin Bir Karakterizasyonu	11
5. SONUÇLAR.....	23
KAYNAKLAR.....	24
ÖZGEÇMİŞ	

ÖZET

4-Boyutlu Galilean Uzayda Eğrilerin Yeni Karakterizasyonları

Hakan UYSAL

Yüksek Lisans Tezi

FIRAT ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı
Ağustos 2020, Sayfa viii + 25

Bu tezde, 4-Boyutlu Galilean uzayda eğrilerin yeni karakterizasyonları incelenmiştir. Bir regüler eğrinin Frenet vektörleri kullanılarak yer vektörü elde edilmiştir. Eğrilik fonksiyonları cinsinden bu eğriler karakterize edilmiştir. Son olarak G_4 de rektifiyan, sabit oranlı, T-sabit ve N-sabit eğriler için bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Frenet çatısı, Sabit oranlı Eğriler, Rektifiyan eğri, Öklid Uzay, 4-Boyutlu Galilean uzay.

ABSTRACT

New Characterizations of the Curves in Galilean 4-Space

Hakan UYSAL

Master's Thesis

FIRAT UNIVERSITY
Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics
August 2020, Page viii + 25

In this thesis, new characterizations of curves in Galilean 4-space G_4 are studied. The position vector of a regular curve is obtained using its Frenet vectors. Such curves are characterized in terms of their curvature functions. In addition, some results of rectifying, constant ratio, T-costant and N-costant curve in G_4 are obtained.

Keywords: Frenet Frame, Constant-ratio curves, Rectifying curves, Euclidean Space, Galilean 4-Space G_4 .

SİMGELER

E^n	: n -Boyutlu Öklid uzay
G_4	: 4-Boyutlu Galilean uzay
$T_{E^n}(P)$	: Tanjant uzay
$\mathbf{b}$	: Birinci binormal vektör
$d(x, y)$	: x ile y arasındaki uzaklık
$\mathbf{e}$	: İkinci binormal vektör
$\mathbf{n}$	: Asli normal vektör
$\vec{v}_p$	: Tanjant vektörü
$\mathbf{t}$	: Teğet vektör
κ	: Birinci eğrilik fonksiyonu
τ	: İkinci eğrilik fonksiyonu
σ	: Üçüncü eğrilik fonksiyonu
$\langle, \rangle$	: İç çarpım
$\ \cdot \ $	: Norm
$\times$	: Vektörel çarpım

1. GİRİŞ

Rektifiyan eğriler 3- Boyutlu Öklid uzayda B. Y. Chen tarafından [1]' de ilk olarak incelenmiştir. Yine B. Y. Chen tarafından [2]' da rektifiyan düzlemde teğet ve binormal vektör incelenmiştir.

Bir eğrinin yer vektörün bulunarak sınıflandırılması diferansiyel geometride önemli bir yere sahiptir. Rektifiyan eğriler, Lorentz uzayı ve Galilean uzayında farklı boyutlarda detaylı bir şekilde incelenmiş ve bazı temel sonuçlar elde edilmiştir.

Son yıllarda matematikçiler Galilean uzayda ve psedou-Galilean uzayda eğrilerin yeni karakterizasyonlarını incelemeye başladılar. Galilean uzayda eğriler teorisi geniş bir şekilde Röschel tarafından incelenmiştir [3]. Ayrıca üç boyutlu Galilean uzayda helisler, Involüt-Evolüt eğriler, sabit oranlı eğriler ve bu eğrilerin yer vektörleri incelenmiştir [4,5,6,7,8].

2010 yılında S.Yılmaz tarafından 4-Boyutlu Galilean uzayda eğrilerin Frenet-Serret çatısı inşa edilerek bazı sonuçlar elde edilmiştir [9]. Daha sonra 4-Boyutlu Galilean uzayda bazı özel eğriler detaylı bir şekilde incelenmeye başlanmıştır [10,11,12,13,14].

Bu çalışmada [13] deki makale esas alınarak 4-Boyutlu Galilean uzayda bir regüler eğrinin yer vektörü, frenet vektörlerin bir lineer birleşimi şeklinde ifade edilmiştir. Ayrıca eğrilik fonksiyonları cinsinden bu eğriler karakterize edilmiştir. Son olarak $\mathbb{G}_4$ de rektifiyan, sabit oranlı T-sabit ve N-sabit eğriler için bazı sonuçlar elde edilmiştir [15,16].

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1. Öklid Uzayı

Tanım 2.1.1. X sonlu boyutlu reel vektör uzayı olsun. Bir

$$g: \langle , \rangle: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlarsa g ye X üzerinde bir iç çarpım denir [17].

- i. $\langle , \rangle$ bilineer formdur.
- ii. $\langle , \rangle$ simetrik formdur.
- iii. $\langle , \rangle$ pozitif tanımlıdır.

Tanım 2.1.2. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ sıralı reel sayı n -lileri olsunlar. x ile y arasındaki uzaklık,

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

şeklinde tanımlansın. O halde, bütün sıralı reel sayı n - lilerinin cümlesi ile bu cümle üzerinde tanımlanan uzaklık fonksiyonu bir metrik uzaydır. Bu uzaya, n -boyutlu Öklid uzayı denir. Ayrıca, bu uzay E^n ile gösterilir. $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sıralı reel sayı n -lisine de E^n de Öklid anlamında bir koordinat sistemi denir [17].

Tanım 2.1.3. $x_i: E^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x_i(q_1, q_2, \dots, q_n) = q_i$ reel değerli fonksiyona, E^n uzayında i yinci dik koordinat fonksiyonu denir.

Koordinat fonksiyonlarının oluşturduğu $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n -lisine , E^n üzerinde dik kordinaat sistemi (veya Öklidiyen kordinat sistemi) denir [17].

Tanım 2.1.4. $f: E^n \rightarrow \mathbb{R}$ ve $Q \in E^n$ olsun.

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(q_1, q_2, \dots, q_{i-1}, q_i + s, q_{i+1}, \dots, q_n) - f(q_1, q_2, \dots, q_{i-1}, q_i, q_{i+1}, \dots, q_n)}{s}$$

limiti mevcutsa bu limite f fonksiyonunun i inci bağımsız değişkene göre kısmi türevi denir.

Genel olarak, E^n uzayında dik kordinat sistemi $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ olduğuna göre $1 \leq i \leq n$ için herbir $x_i: E^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun k inci bağımsız değişkene göre kısmi türev

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_k} = \delta_{ik}, \quad 1 \leq i \leq n$$

biçimindedir [18].

Tanım 2.1.5. f fonksiyonunun E^n nin herbir noktasında k inci mertebeden kısmi türevleri var ve bu kısmi türevler sürekli ise “ f fonksiyonu C^k sınıfındandır” denir. E^n den $\mathbb{R}$ ye tanımlı bütün C^k sınıfından fonksiyonların cümlesi $C^k(E^n, \mathbb{R})$ biçiminde gösterilir [18].

Tanım 2.1.6. f fonksiyonunun E^n nin herbir Q noktasında her mertebeden kısmi türevi var ve sürekli ise “ f fonksiyonuna C^∞ sınıfındandır (düzgün fonksiyondur)” denir [18].

Tanım 2.1.7. $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ kümesi için $(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere,

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

şeklinde tanımlı

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

dönüşümüne $\mathbb{R}^n$ üzerinde toplama işlemi denir. Skaler ile çarpma işlemi $\lambda \in \mathbb{R}$ ve

$$\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$$

şeklinde

$$\therefore \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

dönüşümüyle tanımlanır.

Bu işlemler ile $\mathbb{R}^n$ uzayı $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayıdır. Bu vektör uzayına reel vektör uzayı denir [17].

Tanım 2.1.8 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ olmak üzere her $x, y \in \mathbb{R}^n$ için

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

şeklinde tanımlanan

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümü $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir iç çarpımdır. Bu iç çarpıma $\mathbb{R}^n$ uzayında Öklid iç çarpımı denir [17].

Tanım 2.1.9. $\mathbb{R}^n$ reel vektör uzayında herhangi bir $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ elemanı için

$$\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümü ile tanımlı $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ ifadesine x in normu denir [18].

Tanım 2.1.10 $\mathbb{R}^n$ reel vektör uzayı olsun. Herhangi bir $x, y \in \mathbb{R}^n$ vektörü için $d = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$\|x - y\| = d(x, y)$$

biçiminde tanımlıysa, bu fonksiyon $\mathbb{R}^n$ uzayında bir metriktir. Bu metrikle beraber $\mathbb{R}^n$ uzayı bir Öklid uzayıdır ve bu uzay E^n ile gösterilir [18].

2.2. Öklid Uzayında Eğriler

Tanım 2.2.1. $I, \mathbb{R}$ nin bir açık aralık olsun. C^∞ sınıfından bir $\alpha: I \rightarrow E^n$ dönüşümüne E^n uzayında bir eğri denir [18].

Tanım 2.2.2. $\alpha: I \rightarrow E^n$ eğrisi verilsin. I aralığının bir t noktasında

$$\alpha'(s) = (\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n)_{\alpha(s)}$$

biçiminde tanımlı vektöre α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki hız vektörü denir [18].

Tanım 2.2.3. $\alpha: I \rightarrow E^n$ eğrisi verilsin. Her $t \in I$ için $\alpha'(s) \neq 0$ koşulu sağlanırsa α eğrisine düzenli eğri (regüler eğri) denir [18].

Tanım 2.2.4. $\alpha: I \rightarrow E^n$ eğrisi üzerindeki X vektör alanının bileşenlerinin her biri C^∞ sınıfından ise X vektör alanına da C^∞ sınıfından denir [18].

Tanım 2.2.5. X, α eğrisi üzerinde C^∞ sınıfından bir vektör alanı olmak üzere

$$X'(s) = \sum_{j=1}^n (X_j(s))' \frac{\partial}{\partial x_j} (\alpha(s))$$

eşitliği ile tanımlı $X'(s)$ vektör alanına X vektör alanının α eğrisi boyunca $\alpha(s)$ noktasındaki türevi denir [18].

Tanım 2.2.6. $\alpha: I \rightarrow E^3$ biçiminde tanımlı bir eğri birim hızlı olsun.

$$t(s) = \alpha'(s)$$

biçiminde tanımlı vektöre α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki birim teğet vektörü,

$$n = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$$

biçiminde tanımlı vektöre α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki asli normal vektörü,

$$b = t \times n$$

biçiminde tanımlı vektöre α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki binormal vektörü denir.

$\forall s \in I$ için $\kappa(s) = \|t'(s)\|$ şeklinde tanımlı fonksiyona α eğrisinin eğrilik fonksiyonu $\kappa(s) \in \mathbb{R}$ sayısına da α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğriliği denir.

$\forall s \in I$ için $\tau(s) = \|b'(s)\|$ şeklinde tanımlı fonksiyona α eğrisinin burulma fonksiyonu $\tau(s) \in \mathbb{R}$ sayısının da α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki burulması denir.

Bu durumda $\{t, n, b\}$ frenet çatısı için aşağıdaki Serret-Frenet formülleri gerçekleşir [18].

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

Tanım 2.2.7. E^3 öklid uzayında bir eğri α ve bu eğrinin Frenet çatısı $\{t, n, b\}$ olsun. $s \in I$ için $\text{Span}\{T(s), N(s)\}$ düzlemine α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki oskülatör (dokunum) düzlem, $\text{Span}\{T(s), B(s)\}$ düzlemine α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki rektifiyan (doğrultma) düzlem $\text{Span}\{N(s), B(s)\}$ düzlemine α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki normal (dik) düzlem denir [18].



3. MATERYAL VE METOT

Bu tezde temel olarak G.Öztürk, S.Büyükütük ve İ.Kişi'nin "A characterization of curves in Galilean 4-Space" $\mathbb{G}_4$ isimli makalesi çalışılmıştır. Temel kavramlar için H.H.Hacısalihoğlu ve A.Sabuncuoğlu'nun kitapları esas alınmıştır

4-Boyutlu Galilean uzayda yeni karakterizasyonlar, T-sabit, N-sabit ve sabit oranlı eğriler çalışılmıştır.

3.1. 4-Boyutlu Galilean Uzayda Eğrilerin Bazı Temel Özellikleri

Tanım 3.1.1. Afin koordinatlarda galilean uzayındaki iki nokta arasındaki uzaklık,

$$P_i = (p_{i1}, p_{i2}, p_{i3}, p_{i4}), \quad i = 1, 2$$
$$g(P_1, P_2) = \begin{cases} |p_{21} - p_{11}|, & \text{eğer } p_{21} \neq p_{11} \\ ((p_{22} - p_{12}) + (p_{23} - p_{13}) + (p_{24} - p_{14}))^{\frac{1}{2}}, & \text{eğer } p_{21} = p_{11} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [9].

Tanım 3.1.2. 4-boyutlu Galilean uzayda vektörel çarpım $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ ve $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ olmak üzere,

$$\vec{u} \times \vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} 0 & e_2 & e_3 & e_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{vmatrix},$$

şeklindedir. Burada e_i , $1 \leq i \leq 4$, standart baz vektörleridir [9].

Tanım 3.1.3. $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ ve $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ olmak üzere $\vec{u}$ ile $\vec{v}$ arasındaki skaler çarpım,

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \begin{cases} u_1 v_1 & \text{eğer } u_1 \neq 0 \text{ yada } v_1 \neq 0 \\ u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 & \text{eğer } u_1 = 0 \text{ yada } v_1 = 0 \end{cases}$$

şeklinde verilir [9].

Tanım 3.1.4. $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ vektörünün normu,

$$\|\vec{u}\|_{\mathbb{G}_4} = \sqrt{|\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_{\mathbb{G}_4}|}$$

şeklinde tanımlanır [9].

Tanım 3.1.5. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{G}_4$, $\alpha(s) = (s, \varphi(s), \psi(s), \omega(s))$ $\mathbb{G}_4$ de s yay parametresi ile parametrelendirilmiş bir eğri olsun. Frenet-serret çatısının birinci vektörü yani α nın teğet vektörü

$$t = \alpha'(s) = (1, \varphi'(s), \psi'(s), \omega'(s))$$

şeklinde tanımlanır. t birim vektör olduğundan

$$\langle t, t \rangle_{\mathbb{G}_4} = 1$$

yazılabilir. Denklemden her iki tarafın s ye göre türevini alacak olursak,

$$\langle t', t \rangle_{\mathbb{G}_4} = 0$$

elde edilir [9].

Tanım 3.1.6. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{G}_4$ regüler bir eğri olmak üzere α nın birinci eğriliği,

$$\kappa(s) = \|t'(s)\| = \sqrt{(\varphi''(s))^2 + (\psi''(s))^2 + (\omega''(s))^2}$$

şeklinde tanımlanır. $\forall s \in I$ için $\kappa(s) \neq 0$ olduğunu kabul ederiz [18].

Tanım 3.1.7. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{G}_4$ regüler bir eğri olmak üzere α nın asli normal vektörü

$$n(s) = \frac{t'(s)}{\kappa(s)}$$

yada,

$$n(s) = \frac{1}{\kappa(s)} (0, \varphi''(s), \psi''(s), \omega''(s))$$

denklemlerinden biriyle tanımlanır [9].

Tanım 3.1.8. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{G}_4$ regüler bir eğri olmak üzere α nın ikinci eğrilik fonksiyonu, asli normal vektörün türevinin alınmasıyla,

$$\tau(s) = \|n(s)'\|_{\mathbb{G}_4}$$

şeklinde tanımlanır. Buna α eğrisinin torsiyonu denir [9].

Tanım 3.1.9. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{G}_4$ regüler bir eğri olmak üzere α eğrisinin binormal vektör alanı,

$$b(s) = \frac{1}{\tau(s)} \left(0, \left(\frac{\varphi''(s)}{\kappa(s)} \right)', \left(\frac{\psi''(s)}{\kappa(s)} \right)', \left(\frac{\omega''(s)}{\kappa(s)} \right)' \right)$$

şeklinde tanımlanır. Böylece $b(s)$ vektörü hem $t(s)$ ye hemde $n(s)$ ye diktir [9].

Tanım 3.1.10. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{G}_4$ regüler bir eğri olmak üzere α eğrisinin ikinci binormal birim vektörü $e(s)$,

$$e(s) = \mu t(s) \times n(s) \times b(s)$$

şeklinde tanımlanır. Buradaki μ katsayıları $\{t, n, b, e\}$ matrisinin determinantını $+1$ yapmak için ± 1 alınır [9].

Tanım 3.1.11. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{G}_4$ regüler bir eğri olmak üzere α eğrisinin üçüncü eğriliği,

$$\sigma(s) = \langle b', e \rangle_{\mathbb{G}_4}$$

şeklinde tanımlanır. Böylece elde edilen $\{t, n, b, e\}$ vektörleri birbirine ortogonaldir. Yani,

$$\langle t, t \rangle_{\mathbb{G}_4} = \langle n, n \rangle_{\mathbb{G}_4} = \langle b, b \rangle_{\mathbb{G}_4} = \langle e, e \rangle_{\mathbb{G}_4} = 1$$

$$\langle t, n \rangle_{\mathbb{G}_4} = \langle t, b \rangle_{\mathbb{G}_4} = \langle t, e \rangle_{\mathbb{G}_4} = 0$$

$$\langle n, b \rangle_{\mathbb{G}_4} = \langle n, e \rangle_{\mathbb{G}_4} = \langle b, e \rangle_{\mathbb{G}_4} = 0$$

dir [9].

Tanım 3.1.12. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{G}_4$ bir regüler eğri olsun. Eğer α eğrisinin $\kappa(s), \tau(s), \sigma(s)$ eğrilikleri sabit fonksiyonlar ise α ya bir helis adı verilir. Bu eğriler W eğri olarak adlandırılır [19].

Tanım 3.1.13. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{G}_4$ bir regüler eğri olsun. Eğer α eğrisi sabit birim $\vec{u}$ vektörü ile sabit bir açı yaparsa bu taktirde bu eğriye genel helis veya egilim çizgisi denir [19].

Tanım 3.1.14. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{G}_4$ bir regüler eğri olsun. Eğer $H_1(s) = \frac{\kappa}{\tau}$ ve $H_2(s) = \frac{\sigma}{\tau}$ sabit fonksiyonlar ise α eğrisine ccr-eğri denir [20].



4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. 4-Boyutlu Galilean Uzayda Eğrilerin Bir Karakterizasyonu

Tanım 4.1.1. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{G}_4$ regüler bir eğri olmak üzere $\mathbb{G}_4$ de α eğrisi için Frenet-Serret denklemleri:

$$\begin{aligned} t' &= \kappa(s)n(s) \\ n'(s) &= \tau(s)b(s) \\ b'(s) &= -\tau(s)n(s) + \sigma(s)e(s) \\ e'(s) &= -\sigma(s)b(s) \end{aligned} \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlanır [9].

$\mathbb{G}_4$ de $\kappa(s) \geq 0$, $\tau(s)$ ve $\sigma(s)$ eğrilikli birim hızlı regüler eğri α olsun. α eğrisinin yer vektörü $m_i(s)$, $0 \leq i \leq 3$ diferansiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere,

$$\alpha(s) = m_0(s)t(s) + m_1(s)n(s) + m_2(s)b(s) + m_3(s)e(s) \quad (4.2)$$

eşitliğini sağlar. (4.2) denkleminin s ' ye göre türevi alınıp (4.1) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= m_0'(s)t(s) + (m_1'(s) + \kappa(s)m_0(s) - \tau(s)m_2(s))n(s) \\ &\quad + (m_2'(s) + \tau(s)m_1(s) - \sigma(s)m_3(s))b(s) + (m_3'(s) + \sigma(s)m_2(s))e(s) \end{aligned} \quad (4.3)$$

fonksiyonu elde edilir. (4.3) fonksiyonu,

$$\alpha'(s) = t(s)$$

denkleminde dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} m_0'(s) &= 1 \\ m_1'(s) + \kappa(s)m_0(s) - \tau(s)m_2(s) &= 0 \\ m_2'(s) + \tau(s)m_1(s) - \sigma(s)m_3(s) &= 0 \\ m_3'(s) + \sigma(s)m_2(s) &= 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

denklem sistemi elde edilir [13].

Teorem 4.1.1. $\alpha = (s, \varphi(s), \psi(s), \omega(s))$, $\mathbb{G}_4$ de bir yay parametrelili eğri olsun. α nın teğet vektörü dördüncü dereceden

$$\left\{ \frac{1}{\sigma} \left[\frac{1}{\tau} \left(\frac{t'}{\kappa} \right)' \right] \right\}' + \left[\frac{\tau}{\kappa \sigma} \right]' + \frac{\sigma}{\tau} \left(\frac{t'}{\kappa} \right)' = 0$$

denklemini sağlar [9].

Teorem 4.1.2. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{G}_4$, $\kappa > 0$ yay parametrelili bir eğri olsun. eğer α bir W eğri ise bu taktirde eğrilik fonksiyonları c_i , $0 \leq i \leq 4$ integral sabitleri ve $a = \sqrt{\tau^2 + \sigma^2}$ bir reel sabit olmak üzere,

$$\begin{aligned} m_0(s) &= s + c \\ m_1(s) &= \frac{\tau c_1}{a} \sin as - \frac{\tau c_2}{a} \cos as - \frac{\kappa \sigma^2}{a^2} \left(\frac{s^2}{2} + cs + c_3 \right) \\ m_2(s) &= c_1 \cos as + c_2 \sin as + \frac{\kappa \tau}{a^2} (s + c) \\ m_3(s) &= \frac{-\sigma c_1}{a} \sin as + \frac{-\sigma c_2}{a} \cos as - \frac{\kappa \tau \sigma}{a^2} \left(\frac{s^2}{2} + cs + c_4 \right) \end{aligned} \quad (4.5)$$

şeklinde verilir [13].

İspat: $\mathbb{G}_4$ de bir W eğri α olsun. Bu taktirde (4.4) denklem sistemi kullanılarak,

$$m_0'(s) = 1 \quad (4.6)$$

$$m_1'(s) = -\kappa(s)m_0(s) + \tau(s)m_2(s) \quad (4.7)$$

$$m_2'(s) = -\tau(s)m_1(s) + \sigma(s)m_3(s) \quad (4.8)$$

$$m_3'(s) = -\sigma(s)m_2(s) \quad (4.9)$$

denklemleri elde edilir. Yukarıdaki denklem sistemindeki (4.6) denkleminde ,

$$m_0 = s + c \quad (4.10)$$

bulunur. (4.8) denkleminde s 'e göre türevi alınırsa ve gerekli ifadeler yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
m_2''(s) &= -\tau(s)(-\kappa(s)(s+c) + \tau(s)m_2(s)) + \sigma(s)(-\sigma(s)m_2(s)) \\
&= \tau(s)\kappa(s)(s+c) - \tau^2(s)m_2(s) - \sigma^2(s)m_2(s),
\end{aligned}$$

$$m_2''(s) + (\tau^2(s) + \sigma^2(s))m_2(s) = \tau(s)\kappa(s)(s+c) \quad (4.11)$$

homojen olmayan (4.11) diferansiyel denklemi elde edilir.

(4.11) denklemi çözülürse:

Önce homojen kısmın çözümü ,

$$m_2 = a$$

alınıp ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$a^2 + \tau^2 + \sigma^2 = 0$$

$$a^2 = -(\tau^2 + \sigma^2)$$

$$a = \sqrt{i^2(\tau^2 + \sigma^2)}$$

$$a = \pm i\sqrt{\tau^2 + \sigma^2}$$

$$m_2 = c_1 e^{i\sqrt{(\tau^2 + \sigma^2)}s} + c_2 e^{-i\sqrt{(\tau^2 + \sigma^2)}s}$$

$$= c_1 \left[\cos\sqrt{(\tau^2 + \sigma^2)}s + i\sin\sqrt{(\tau^2 + \sigma^2)}s \right]$$

$$+ c_2 \left[\cos\sqrt{(\tau^2 + \sigma^2)}s - i\sin\sqrt{(\tau^2 + \sigma^2)}s \right]$$

$$m_2 = (c_1 + c_2) \cos\sqrt{(\tau^2 + \sigma^2)}s + (c_1 - c_2)i \sin\sqrt{(\tau^2 + \sigma^2)}s$$

Burada homojen kısmın çözümü:

$$m_2 = c_1 \cos as + c_2 i \sin as$$

şeklinde bulunur. Şimdi, homojen olmayan kısmın çözümü yapılırsa:

$$m_2''(s) + (\tau^2(s) + \sigma^2(s))m_2(s) = \tau(s)\kappa(s)(s+c)$$

$$m_2(s) = \frac{\tau(s)\kappa(s)(s+c)}{\tau^2(s) + \sigma^2(s)}$$

Burada $a = \sqrt{\tau^2 + \sigma^2}$ olduğundan yerine yazılırsa homojen olmayan kısmın çözümü:

$$m_2(s) = \frac{\tau(s)\kappa(s)}{a^2}(s+c)$$

(4.11) denklemi aşikar olmayan

$$m_2 = c_1 \cos as + c_2 i \sin as + \frac{\tau(s)\kappa(s)}{a^2}(s+c) \quad (4.12)$$

çözümüne sahiptir. Bu eşitlik (4.9) da yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} m_3'(s) &= -\sigma(s)m_2(s) \\ m_3'(s) &= -\sigma(s) \left(c_1 \cos as + c_2 i \sin as + \frac{\tau(s)\kappa(s)}{a^2}(s+c) \right) \\ \int m_3'(s) ds &= -\sigma(s) \int \left(c_1 \cos as + c_2 i \sin as + \frac{\tau(s)\kappa(s)}{a^2}(s+c) \right) ds \\ m_3(s) &= \frac{-\sigma c_1}{a} \sin as + \frac{-\sigma c_2}{a} \cos as - \frac{\kappa \tau \sigma}{a^2} \left(\frac{s^2}{2} + cs + c_4 \right) \end{aligned} \quad (4.13)$$

çözümüne sahiptir. (4.7) denkleminde (4.10) ve (4.12) yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} m_1'(s) &= -\kappa(s)(s+c) + \tau(s) \left(c_1 \cos as + c_2 i \sin as + \frac{\tau(s)\kappa(s)}{a^2}(s+c) \right) \\ \int m_1'(s) ds &= \int \left(-\kappa(s)(s+c) + \tau(s) \left(c_1 \cos as + c_2 i \sin as + \frac{\tau(s)\kappa(s)}{a^2}(s+c) \right) \right) ds \\ m_1 &= -\kappa(s) \left(\frac{s^2}{2} + cs + c_1 \right) + \frac{\tau(s)c_1}{a} \sin as - \frac{\tau(s)c_2}{a} \cos as \\ &\quad + \frac{\tau(s)^2 \kappa(s)}{a^2} \left(\frac{s^2}{2} + cs + c_4 \right) \end{aligned} \quad (4.14)$$

çözümü elde edilir.

Tanım 4.1.2. $\mathbb{G}_4$ de regüler bir α eğrisinin eğriliği $\kappa = 0$ ise α ya Frenet çatısına $\{t, n, b, e\}$ göre bir doğru denir [4].

Tanım 4.1.3. α eğrisi $\mathbb{G}_4$ de birim hızlı bir eğri olsun. α nın yer vektörü b ve e nin $b^\perp$ veya $e^\perp$ ortogonal tümleyeninde yatıyorsa α ya $\mathbb{G}_4$ de bir oskülatör eğri denir [14].

Tanıma göre bir oskülatör eğri $m_i(s)$, $0 \leq i \leq 3$ sabit fonksiyonlar olmak üzere

$$\alpha(s) = m_0(s)t(s) + m_1(s)n(s) + m_3(s)e(s) \quad (4.15)$$

veya,

$$\alpha(s) = m_0(s)t(s) + m_1(s)n(s) + m_2(s)b(s) \quad (4.16)$$

şeklinde yazılabilir.

Teorem 4.1.3. $\mathbb{G}_4$ de sıfırdan farklı κ , τ ve σ eğrilikli bir birim hızlı eğri α olsun. Bu taktirde α eğrisinin bir oskülatör eğri olması için gerek ve yeter koşul

$$-\frac{d}{\kappa}(H_2') = s + c \quad (4.17)$$

denkleminin sağlanmasıdır. Burada, $H_2(s) = \frac{\sigma(s)}{\tau(s)}$ ve c, d sıfırdan farklı sabitlerdir [14].

İspat: Oskülatör eğri tanımı ve (4.4) denklem sistemi kullanılırsa,

$$m_0'(s) = 1 \quad (4.18)$$

$$m_1'(s) + \kappa(s)m_0(s) = 0 \quad (4.19)$$

$$\tau(s)m_1(s) - \sigma(s)m_3(s) = 0 \quad (4.20)$$

$$m_3'(s) = 0 \quad (4.21)$$

denklemleri elde edilir. (4.18) ve (4.21) denklemlerinden

$$m_0 = s + c$$

$$m_3'(s) = 0 \Rightarrow m_3(s) = d, \quad d: sbt$$

bulunur. Bu değer (4.20) de yerine yazılırsa,

$$\tau(s)m_1(s) - \sigma(s)d = 0$$

$$m_1(s) = \frac{\sigma(s)}{\tau(s)}d$$

$$m_1(s) = H_2(s)d$$

bulunur. Bulunan değerler (4.19) da yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} dH_2'(s) + \kappa(s)(s + c) &= 0 \\ \frac{-dH_2'(s)}{\kappa(s)} &= (s + c) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.1. $\mathbb{G}_4$ de sıfırdan farklı κ , τ ve σ eğrilikli birim hızlı W eğrilerden hiçbiri bir oskülatör eğri değildir [14].

Sonuç 4.1.2. $\mathbb{G}_4$ birim hızlı ccr-eğrilerden hiçbiri bir oskülatör eğri değildir [13].

İspat: $\mathbb{G}_4$ birim hızlı ccr-eğri α olsun. Bu durumda H_2 nin sabit olduğunu biliyoruz. Eğer bu eğri bir oskülatör eğri ise H_2 (4.17) denkleminde bir sabit olamaz. Bu bir çelişkidir. Böylece $\mathbb{G}_4$ deki birim hızlı ccr-eğrilerden hiçbiri bir oskülatör eğri değildir.

[21] benzer olarak aşağıdaki tanımı verebiliriz.

Tanım 4.1.4. $\mathbb{G}_4$ de s yay parametrelili bir eğri $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow G_4$ olsun. Eğer α eğrisinin yer vektörü $\{t, b, e\}$ ile gerilen hiper düzlemde yatıyorsa α ya G_4 de rektifiyan eğri denir.

Tanıma göre bir rektifiyan eğri $m_i(s)$, $0 \leq i \leq 3$ sabit fonksiyonlar olmak üzere

$$\alpha(s) = m_0(s)t(s) + m_2(s)b(s) + m_3(s)e(s) \quad (4.22)$$

şeklinde yazılabilir [13].

Teorem 4.1.4. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow G_4$ eğrisi $\mathbb{G}_4$ de birim hızlı eğri olsun. Bu taktirde α nın bir rektifiyan eğri olabilmesi için gerek ve yeter koşul $H_1(s) = \frac{\kappa}{\tau}(s)$ olmak üzere

$$\alpha(s) = (s + c) + H_1(s + c)b(s) + \frac{1}{\sigma}(H_1'(s + c) + H_1)e(s) \quad (4.23)$$

olmasıdır [13].

İspat: α eğrisinin $\mathbb{G}_4$ de rektifiyan eğri olduğunu kabul edelim. Tanımdan m_1 eğrilik fonksiyonu sıfırdır. (4.3) denklemden

$$\begin{aligned} m_0'(s) &= 1 \\ \kappa(s)m_0(s) - \tau(s)m_2(s) &= 0 \\ m_2'(s) - \sigma(s)m_3(s) &= 0 \\ m_3'(s) + \sigma(s)m_2(s) &= 0 \end{aligned}$$

yazabiliriz. Bu denklem sistemindeki birinci denklemden

$$m_0 = s + c$$

dir. Bu değer ikinci denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \kappa(s)(s + c) - \tau(s)m_2(s) &= 0 \\ \kappa(s)(s + c) &= \tau(s)m_2(s) \\ \frac{\kappa(s)}{\tau(s)}(s + c) &= m_2(s) \\ H_1(s + c) &= m_2(s) \end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan m_2 değeri denklem sistemindeki üçüncü denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} m_2'(s) &= \sigma(s)m_3(s) \\ H_1'(s + c) + H_1 &= \sigma(s)m_3(s) \\ \frac{1}{\sigma(s)}[H_1'(s + c) + H_1] &= m_3(s) \end{aligned}$$

bulunur. Bu değerler (4.22) de yerine yazılırsa (4.23) elde edilir.

Önerme 4.1.1. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{G}_4$ eğrisinin birim hızlı rektifiyan eğriye kongurent olabilmesi için gerek ve yeter koşul $H_1(s) = \frac{\kappa}{\tau}(s)$; c_1 ve $c_2 \in \mathbb{R}$

$$H_1(s + c)^2 + \frac{1}{\sigma^2}(H_1'(s + c) + H_1)^2 = c_1 \quad (4.24)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır [13]. (4.24) ün sonucu olarak aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 4.1.3. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{G}_4$ eğrisi birim hızlı rektifiyan eğri olsun. Eğer α bir ccr-eğri ise bu taktirde c_1 ve $c_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\sigma(s) = \frac{H_1}{\sqrt{c_1 - (H_1(s + c))^2}} \quad (4.25)$$

eşitliği sağlar [13].

İspat: α bir ccr-eğri olduğundan eğrilik fonksiyonları sabittir. (4.24) denklemden

$$H_1(s + c)^2 + \frac{1}{\sigma^2} H_1^2 = c_1$$

$$\frac{1}{\sigma^2} H_1^2 = c_1 - H_1(s + c)^2$$

$$\frac{1}{\sigma^2} = \frac{c_1 - H_1(s + c)^2}{H_1^2}$$

$$\sigma = \frac{H_1}{\sqrt{c_1 - H_1(s + c)^2}}$$

elde ederiz.

[22] dekine benzer olarak aşağıdaki tanımı verebiliriz.

Tanım 4.1.5. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{G}_4$ birim hızlı bir eğri olsun. Bu taktirde $\alpha = \alpha^T + \alpha^N$ şeklinde teğet ve normal bileşenlerine ayrılabilir. Eğer $\|\alpha^T\|: \|\alpha^N\|$, $\alpha(I)$ üzerinde sabit ise bu taktirde α ya sabit oranlıdır denir. $\mathbb{G}_4$ de bir sabit oaranlı eğri için $c_1 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\frac{m_0^2(s)}{m_1^2(s) + m_2^2(s) + m_3^2(s)} = c_1 \quad (4.26)$$

eşitliği mevcuttur [13].

Teorem 4.1.5. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{G}_4$ eğrisi birim hızlı olsun. O halde, α nın birim hızlı bir eğri olması için gerek yeter koşul α eğrisinin yer vektörü,

$$\begin{aligned}\alpha(s) &= (s+c)t(s) - \left(\frac{1}{c_1\kappa}\right)n(s) + \left(\frac{\kappa'}{c_1\kappa^2\tau} + \frac{\kappa}{\tau}(s+c)\right)b(s) \\ &\quad + \frac{1}{\sigma}\left[\left(\frac{\kappa'}{c_1\kappa^2\tau} + \frac{\kappa}{\tau}(s+c)\right)' - \frac{\tau}{c_1\kappa}\right]e(s)\end{aligned}$$

parametrizasyonuna sahip olmasıdır [13].

İspat: $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{G}_4$ birim hızlı bir eğri olsun. (4.26) dan

$$m_1^2(s) + m_2^2(s) + m_3^2(s) = \frac{m_0^2(s)}{c_1}$$

yazılabilir. Her iki tarafın türevi alınırsa,

$$\begin{aligned}2m_1m_1' + 2m_2m_2' + 2m_3m_3' &= \frac{2m_0m_0'}{c_1} \\ m_1m_1' + m_2m_2' + m_3m_3' &= \frac{s+c}{c_1}\end{aligned}\tag{4.27}$$

eşitliğini sağlar. (4.4) ve (4.27) denklemleri kullanılacak olursa;

$$\begin{aligned}&m_1(s)(-\kappa(s)m_0(s) + \tau(s)m_2(s)) + m_2(s)(-\tau(s)m_1(s) + \sigma(s)m_3(s)) \\ &\quad + m_3(s)(-\sigma(s)m_2(s)) = \frac{s+c}{c_1} \\ &-\kappa(s)m_0(s)m_1(s) + \tau(s)m_1(s)m_2(s) - \tau(s)m_1(s)m_2(s) + \sigma(s)m_2(s)m_3(s) \\ &-\sigma(s)m_2(s)m_3(s) = \frac{s+c}{c_1} \\ &-\kappa(s)m_0(s)m_1(s) = \frac{s+c}{c_1} \\ &-\kappa(s)m_1(s) = \frac{1}{c_1} \\ &m_1(s) = -\frac{1}{\kappa(s)c_1} \\ &m_2(s) = \frac{1}{\tau(s)}(m_1'(s) + \kappa(s)m_0(s))\end{aligned}$$

olduğunu biliyoruz . Buradan

$$m_2(s) = \frac{1}{\tau(s)} \left(\left(-\frac{1}{\kappa(s)c_1} \right)' + \kappa(s)(s+c) \right)$$

$$m_2(s) = \frac{\kappa'}{c_1\kappa^2\tau} + \frac{\kappa}{\tau}(s+c)$$

$$m_3(s) = \frac{1}{\sigma(s)} (m_2'(s) + \tau(s)m_1(s))$$

$$m_3(s) = \frac{1}{\sigma} \left(\left[\frac{\kappa'}{c_1\kappa^2\tau} + \frac{\kappa}{\tau}(s+c) \right]' - \frac{\tau}{c_1\kappa} \right)$$

bulunan m_0, m_1, m_2 ve m_3 değerleri (4.1) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \alpha(s) = (s+c)t(s) - \left(\frac{1}{c_1\kappa} \right) n(s) + \left(\frac{\kappa'}{c_1\kappa^2\tau} + \frac{\kappa}{\tau}(s+c) \right) b(s) \\ + \frac{1}{\sigma} \left(\left[\frac{\kappa'}{c_1\kappa^2\tau} + \frac{\kappa}{\tau}(s+c) \right]' - \frac{\tau}{c_1\kappa} \right) e(s) \end{aligned}$$

elde edilir ki buda ispatı tamamlar.

Sonuç 4.1.4. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{G}_4$ eğrisi birim hızlı olsun. α eğrisinin sabit oranlı bir eğri olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$\frac{1}{\sigma} \left(\left[\frac{\kappa'}{c_1\kappa^2\tau} + \frac{\kappa}{\tau}(s+c) \right]' - \frac{\tau}{c_1\kappa} \right) + \frac{\sigma\kappa'}{c_1\kappa^2\tau} + \frac{\sigma\kappa}{\tau}(s+c) = 0$$

olmasıdır [13].

[15] dekinе benzer olarak aşağıdaki tanıımı verebiliriz.

Tanım 4.1.6. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{G}_4$ birim hızlı bir eğri olsun. Eğer $\|\alpha^T\|$ sabit ise α bir T -sabit eğri olarak adlandırılır. Ayrıca $\|\alpha^T\| = 0$ ise α T -sabit eğrisine birinci tiptendir aksi durumunda ikinci tiptendir denir [13]. (4.1) ve (4.3) den aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Önerme 4.1.2 $\mathbb{G}_4$ uzayında birim hızlı T -sabit eğri yoktur [13].

İspat: $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{G}_4$ birim hızlı bir T -sabit eğri olsun. $\|\alpha^T\| = m_0$ sıfırdır veya sıfırdan farklı bir sabittir. Ancak $m_0 = s+c$ olduğundan bu bir çelişkidir ve kabul yanlıştır.

[15] dekinde benzer olarak aşağıdaki tanımı verebiliriz.

Tanım 4.1.7. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{G}_4$ birim hızlı bir eğri olsun. Eğer $\|\alpha^N\|$ normu sabit olması durumunda α bir N -sabit eğri olarak adlandırılır. Bir N -sabit α eğrisi için $\|\alpha^N\| = 0$ veya en az bir sıfıradan farklı μ sabit fonksiyonu için $\|\alpha^N\| = \mu$ dir. Eğer $\|\alpha^N\| = 0$ ise α eğrisine birinci tiptendir aksi taktirde ikinci tiptendir denir.

α N -sabit eğrisi için c_1 bir reel sabit olmak üzere

$$\|\alpha^N(s)\|^2 = m_1^2(s) + m_2^2(s) + m_3^2(s) = c_1 \quad (4.28)$$

yazabiliriz [13].

(4.1), (4.4) ve (4.11) eşitliklerinden aşağıdaki sonucu elde edilir:

Yardımcı Teorem 4.1.1. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{G}_4$ eğrisi birim hızlı olsun. O halde, α eğrisinin N -sabit eğri olması için gerek ve yeter koşul

$$\begin{aligned} m_0'(s) &= 1 \\ m_1'(s) + \kappa(s)m_0(s) - \tau(s)m_2(s) &= 0 \\ m_2'(s) + \tau(s)m_1(s) - \sigma(s)m_3(s) &= 0 \\ m_3'(s) + \sigma(s)m_2(s) &= 0 \\ m_1(s)m_1'(s) + m_2(s)m_2'(s) + m_3(s)m_3'(s) &= 0 \end{aligned} \quad (4.29)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır [13].

Önerme 4.1.3. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{G}_4$ eğrisi birim hızlı olsun. O halde, α eğrisinin N – sabit olması için gerek yeter koşul α nın bir doğruya yada bir rektifiyan eğriye kongruent olmasıdır [13].

İspat: (4.29) denklemindeki

$$\begin{aligned} m_1'(s) &= -\kappa(s)m_0(s) + \tau(s)m_2(s) \\ m_2'(s) &= -\tau(s)m_1(s) + \sigma(s)m_3(s) \\ m_3'(s) &= -\sigma(s)m_2(s) \end{aligned}$$

türevleri aşağıda yerine yazacak olursak

$$m_1(s)m_1'(s) + m_2(s)m_2'(s) + m_3(s)m_3'(s) = 0$$

$$m_1(s)(-\kappa(s)m_0(s) + \tau(s)m_2(s)) + m_2(s)(-\tau(s)m_1(s) + \sigma(s)m_3(s)) \\ + m_3(s)(-\sigma(s)m_2(s)) = 0$$

gerekli işlemler yapılacak olursa

$$-\kappa(s)m_0(s)m_1(s) = 0$$

elde edilir. Burada $m_0(s) = s + c$ olduğundan $\kappa(s) = 0$ veya $m_1(s) = 0$ dır. $\kappa(s) = 0$ ise α bir doğru $m_1(s) = 0$ ise α bir rektiliyan eğridir.



5. SONUÇLAR

Bu tezde 4-Boyutlu Galilean uzayda bazı özel eğriler ve karakterizasyonlar çalışıldı.

$\mathbb{G}_4$ deki regüler eğriler için tanımlanan frenet çatısı kullanılarak eğrilerin frenet vektörleri cinsinden yer vektörü elde edilmiştir. Ayrıca oskülatör eğriler, sabit oranlı eğriler, rektifiye eğriler, N-sabit ve T-sabit eğriler için bazı temel sonuçlar elde edilmiştir.

Bu çalışmadaki metot kullanılarak 4-Boyutlu Galilean uzayda bazı özel eğriler için yeni incelemeler ve karakterizasyonlar elde edilebilir.



KAYNAKLAR

- [1] Chen, B.Y. (2003), When does the position vector of a space curve always lie in its rectifying plane?, *Amer. Math. Monthly* 110, no. 2, 147–152.
- [2] Chen, B.Y.; Dillen ,F. (2005), Rectifying curves as centrodes and extremal curves, *Bull. Inst. Math. Acad. Sin.* 33, no. 2, 77–90.
- [3] Roschel, O.(1986), Die Geometrie des Galileischen Raumes, Forschungszentrum Graz Research Centre, Austria.
- [4] Ahmad, T.A. (2012), Position vectors of curves in Galilean space $\mathbb{G}_3$, *Mat. Vesnik* 64, no. 3, 200–210.
- [5] Azak, A.Z.; Akyigit ,M. and Ersoy, S.(2010), Involute-Evolute curves in Galilean space $\mathbb{G}_3$, *Sci. Magna* 4 , no. 6, 75–80.
- [6] Klein, F. ; Lie ,S. (1871),Uber diejenigen ebenenen kurven welche durch ein geschlossenes system von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich uübergehen. *Math. Ann.* 4 ,50–84.
- [7] Öğrenmiş, A.O.; Ergüt, M.; Bektaş, M.(2007), On the helices in the Galilean space G_3 , *Iran. J. Sci. Technol. Trans. A Sci.* 31, no. 2, 177–181.
- [8] Öztekin, H. B; Tatlıpınar, S. (2012), On some curves in Galilean plane and 3-dimensional Galilean space, *J. Dyn. Syst. Geom. Theor.* 10, no. 2, 189–196.
- [9] Yılmaz , S. (2010), Construction of the Frenet-Serret frame of a curve in 4D Galilean space and some applications, *Int. J. Phys. Sci.* 5, no. 5, 1284–1289.
- [10] Monterde, J. (2007), Curves with constant curvature ratios, *Bol. Soc. Mat. Mex.* 13, no. 1, 177–186.
- [11] Öğrenmiş, A.O.; Oztekin, H.; Ergut, M. (2009), Bertrand curves in Galilean space and their characterizations, *Kragujevac J. Math* 32 139–147.
- [12] Öztekin, H.(2014), Special Bertrand curves in 4D Galilean space, *Math. Probl. Eng.* 2014, Article ID 318458, 7 pages.
- [13] Öztürk, G.; Büyükkütük, S.(2017), A characterization of curves in Galilean 4-Space G_4 , *Bull. Iranian Math. Soc.* Vol.43, no.3, 771–780
- [14] Yoon , D.W.; Lee, J.W. (2015); Lee ,C.W., Osculating curves in the Galilean 4-Space, *Int. J. Pure Appl. Math.* 100, no. 4, 497–506.
- [15] Chen, B.Y. (2002), Geometry of warped products as Riemannian submanifolds and related problems, *Soochow J. Math.* 28, no. 2, 125–156.
- [16] Gurpınar ,S.; Arslan ,K.; Öztürk ,G. (2015), A characterization of constant-ratio curves in Euclidean 3-space E^3 , *Acta Univ. Apulensis Math. Inform.* 44 39–51.
- [17] Hacısalihoğlu, H.H.(2000), Diferensiyel Geometri, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Ankara.
- [18] Sabuncuoğlu, A.(2016), Diferensiyel Geometri ,Nobel Basımevi, Ankara
- [19] Gray, A. (1993), Modern Diferential Geometry of Curves and Surfaces, CRC Press.
- [20] Öztürk, G.; Arslan K.; Hacısalihoğlu(2008), H.H., A characterization of ccr-curves in R^n , *Proc.*

Est. Acad. Sci. 57, no. 4, 217–224.

- [21] Öztekin, H.; Öğrenmiş, A.O. (2012), Normal and rectifying curves in pseudo-Galilean space G_1^3 and their characterizations, *J. Math. Comput. Sci.* 2, no. 1, 91–100.
- [22] Chen, B.Y. (2001), Constant ratio hypersurfaces, *Soochow J. Math.* 28, no. 4, 353–362.



ÖZGEÇMİŞ

Hakan UYSAL

KİŞİSEL BİLGİLER

Doğum Yeri	: Maden
Doğum Yılı	: 1988
Uyruğu	: T.C
Adres	: Bahçelievler mah. Cuma Karadogan sok.Yibo lojmanları MADEN/ELAZIĞ
E-posta	: hknuysl667@gmail.com
Yabancı Diller	: İngilizce

EĞİTİM BİLGİLERİ

Lisans	: Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 2011
Lise	: Gazi Lisesi, Elazığ, 2005

İŞ DENEYİMİ

B. YIL – 2012	:Milli Eğitim Bakanlığı (Öğretmen)
----------------------	------------------------------------