

**T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ÇEŞİTLİ KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN FEJER
TIPLİ EŞİTSİZLİĞİ İLE İLGİLİ YENİ TAHMİN VE
SONUÇLAR**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Öğrencinin Adı SOYADI : **Umut AKILLI**
ORCID : **0000-0003-4329-5905**
Tezin Enstitüye Verildiği Tarih :

Enstitü Anabilim Dalı : **Matematik**

Tez Danışmanı : **Dr. Öğr. Üyesi Sercan TURHAN**
ORCID : **0000-0002-4392-2182**

**Temmuz 2020
GİRESUN**

**T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ÇEŞİTLİ KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN FEJER
TIPLI EŞİTSİZLİĞİ İLE İLGİLİ YENİ TAHMİN VE
SONUÇLAR**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Umut AKILLI

Enstitü Anabilim Dalı : Matematik

Bu tez 01/07/2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

**Prof. Dr.
Selahattin MADEN
Jüri Başkanı**

**Doç. Dr.
İmdat İŞCAN
Üye**

**Dr. Öğr. Üyesi
Sercan TURHAN
Üye**

**Doç. Dr.
Bahadır KOZ
Enstitü Müdürü**

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Umut AKILLI

01/07/2020

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans ders döneminde ve tez çalışmamın hazırlanması süresince gösterdiği her türlü destek ve yardımından dolayı çok değerli danışman hocam Dr. Öğrt. Üyesi Sercan TURHAN' a, en başından bu yana bilgi ve tecrübesini benimle paylaşan bölüm başkanı Doç. Dr. İmdat İŞCAN' a, Prof. Dr. Mahir KADAKAL' a ve ders aldığım matematik bölümü öğretim üyelerine en içten dileklerle teşekkür ederim.

Bu tez çalışması boyunca desteklerini esirgemeyen aileme ve tüm arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	I
TEŞEKKÜR	
İÇİNDEKİLER	II
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ	III
ŞEKİLLER LİSTESİ	IV
ÖZET	V
SUMMARY	VI
BÖLÜM 1. GİRİŞ	1
BÖLÜM 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI	4
2.1. ÖnBilgiler.....	4
2.2. BazıKonveksFonksiyonlarlaİlgili Hermite-Hadamard TipliEşitsizlikler....	11
BÖLÜM 3. MATERYAL VE YÖNTEM	14
3.1.Çeşitli Konveks Fonksiyonlarla İlgili Hermite-Hadamard-Fejér Tipli Eşitsizlikler.....	14
3.2. Konveks Fonksiyolarla İlgili Trapezoidal Tipli Eşitsizlikler	17
3.3. Konveks Fonksiyonlarla İlgili Trapezoidal Tipli Fejér Eşitsizlikleri.....	19
3.4. Harmonik Konveks Fonksiyonlarla İlgili Trapezoidal Tipli Fejér Eşitsizlikleri	26
BÖLÜM 4. ARAŞTIRMA BULGULARI	32
BÖLÜM 5. TARTIŞMA VE SONUÇ	56
KAYNAKLAR	57
ÖZGEÇMİŞ	60

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
$\forall$	: Her
$\exists$	: Bazı
$L[a, b]$	: $[a, b]$ Aralığında İntegrallenebilen Fonksiyonların Kümesi
f'	: f Fonksiyonunun Birinci Mertebeden Türevi
f''	: f Fonksiyonununİinci Mertebeden Türevi
I	: $\mathbb{R}'$ de Herhangi bir aralık
I°	: I' nın içi
$PC(I)$	: p -Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
Σ	: Toplam Sembolü
$\inf$	: İnfimum
$\sup$	: Supremum
$\mathbb{R}^n$	: n-Boyutlu Öklid Uzayı
$ \cdot $	: Mutlak Değer
$\ \cdot\ $	: Norm
$\ \cdot\ _p$	: L_p uzayı üzerindeki norm
$\ \cdot\ _\infty$	: Esaslı supremum
$A_t^{1/p}(a^p, b^p)$	: $[ta^p + (1 - t)b^p]^{1/p}$
M_p	: $\left[\frac{a^p + b^p}{2}\right]^{1/p}$

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1.1 Doğrusal konveks küme

Şekil 2.1.2 Konveks küme

Şekil 2.1.3 Konveks olmayan küme

Şekil 2.1.4 Konveks kümelerin cebirsel birleşimi

Şekil 2.1.5 Konkav(İçbükey) kümeler

Şekil 2.1.6 Konveks fonksiyonun geometrik yorumu

Şekil 2.1.7 Konkav fonksiyonun geometrik yorumu

Şekil 2.1.8 İkinci dereceden konveks fonksiyon

ÇEŞİTLİ KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN FEJER TİPLİ EŞİTSİZLİĞİ İLE İLGİLİ YENİ TAHMİN VE SONUÇLAR

ÖZET

Bu tezde, p -konveks fonksiyonlar için yeni fejér tipli eşitsizlikler ve genelleştirmeler yapılmıştır. Birinci bölümde sırasıyla eşitsizlik teorisi, konveks fonksiyonların tarihçesi, konvekslik teorisi hakkında giriş niteliğinde bilgiler yer almaktadır. İkinci bölümde tezin kuramsal temelleri için gerekli temel kavramlar, tanımlar, teorem verilmiş ayrıca konveks fonksiyon sınıflarının birbiriyle olan ilişkisi literatür çalışmasıyla da desteklenerek aktarılmıştır. Üçüncü bölümde tez çalışmasında kullanılan klasik eşitsizlikleri içeren teoremler, ispatları ve bu çalışmaya kuramsal temel teşkil eden bazı eşitsizlikler verilmiştir. Dördüncü bölümde ise fejér tipli konveks ve harmonik konveks fonksiyonlar sınıfının daha genel bir hali olan fejér tipli p -konveks fonksiyonlarla ilgili yeni eşitsizliklere yer verilmiştir. Elde edilen eşitsizliklerin literatürle uyumlu olduğu gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Konvekslik, Harmonik Konvekslik, Hermite-Hadamard Eşitsizliği, Hermite-Hadamard-Fejér Eşitsizliği, p -Konveks Fonksiyonlar.

ESTIMATION AND RESULTS RELATED TO FEJER TYPE INEQUALITY FOR SOME CONVEX FUNCTIONS

SUMMARY

In this thesis, new fejer type inequalities and generalizations have been made for p -convex functions. In the first part, the inequality theory, the history of convex functions, the theory of convexity are given. In the second part, the basic concepts, definitions, theorems and proofs for the theoretical foundations of the thesis are given and the relation of the convex function classes with each other is supported by the literature. In the third part, theorems which contain the classical inequalities used in the thesis study, the proofs and some inequalities which constitute the theoretical basis are given. In the fourth chapter, new fejer type inequalities related to products of Convex and Harmonic Convex functions which is a more general form of the class of p -convex functions are obtained. The inequalities obtained have been shown to be compatible with the literature.

Key Words: Convexity, Harmonic Convexity, Hermite-Hadamard Inequality, Hermite-Hadamard-Fejér Inequality, p -Convex Functions.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Konvekslik kavramıyla hayatımızın pek çok yerinde sanatta, finans matematiğinde, sağlık alanında, fizikte, endüstri alanında, biyolojide, insan anatomisinde ve günlük yaşantımızın pek çok yerinde bilerek yada bilmeden karşılaşırız. Konveksliği en basit haliyle Archimedes (M.Ö.250) kullanmıştır. Archimedes konveks bir şeklin çevre uzunluğunun onu içine alan başka konveks bir şeklin çevre uzunluğundan daha küçük olduğunu gözlemlemiş ve bu yolla düzgün konveks çokgenleri içine alan en küçük çemberin çevresini bundan faydalanarak bulmaya çalışmış ve bu yolla π sayısının yaklaşık değerini hesaplamıştır [23].

Konveks bir küme üzerinde tanımlı konveks fonksiyonlar bu aralıkta sınırlı ve aralığın içinde süreklidir [5], dolayısıyla görüntü kümesi de konveks olur. Bu sebeple konveks fonksiyon teorisi konveksliğin genel konularından biridir bununla birlikte türevlenebilen fonksiyonlarda ikinci türev testi konveksliği belirlemede çok kullanışlı ve etkili bir yöntemdir. Konveks fonksiyonların tanımı gereği bu fonksiyonlarda eşitsizlikler önemli bir yer tutmaktadır. Eşitsizlikler matematiğin her alanında çok önemli bir yere sahiptir. Genel anlamıyla eşitsizlik konusunda en temel çalışmaları 18. ve 19. yüzyılda C. F. Gauss, P. L. Čebyšhev, A. L. Cauchy yapmışlardır. Bu alanda ilk önemli eser “Inequalities” 1934 yılında Hardy, Littlewood ve Pólya tarafından yazılmıştır [24]. Bu kitap içindeki yeni eşitsizlikler ve uygulamalarla matematiğin birçok dalı için oldukça kullanışlıdır. Bu alanda ikinci önemli eser aynı isimli 1961 yılında E. F. Beckenbach ve R. Bellman tarafından yazılmıştır [25]. Bu kitap daha önce elde edilen eşitsizliklerin farklı sonuçlarını içermektedir. Üçüncü önemli kitap “Analytic Inequalities” 1970 yılında D. S. Mitrinović tarafından yazılmıştır [26]. Bu kaynaklar haricinde D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić, A. M. Fink tarafından yazılan “Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives” [27] ve Classical and new inequalities in analysis” [28]. C. Niculescu, L. Persson “Convex functions and their applications” [23]. B. G. Pachpatte “Mathematical Inequalities” [29]. Bunlar haricinde S. S. Dragomir, V. Lakshmikanthan, R. P. Agarwal gibi birçok matematikçi bu konuda çeşitli makale

kitap monografi yayınlamıştır. Bunlardan en kapsamlısı S. S. Dragomir ve C. E. M. Pearce tarafından yazılan “Selected Topic on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications” kitaptır [30]. Geçmişte yapılan çalışmaların çoğu bu kitapta derlenmiştir. Birçok eşitsizlik türü vardır bunlardan bir tanesi de konveksite eşitsizlikleridir bu eşitsizlik konveks fonksiyonlarla ilgilidir.

Bilinen anlamıyla konvekslik C. Hermite tarafından 1883 yılında Mathesis adlı dergide Sur deux limites d'une intégrale définie adıyla yayınlanmıştır [8]. Bağımsız olarak on yıl sonra J. Hadamard tarafından 1893 yılında Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considerée par Riemann [31], ismiyle yayınlanmıştır, bu nedenle Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak adlandırılmıştır. Bu eşitsizlik konveks fonksiyonun ilk önemli ve temel teşkil eden sonucudur. Konveks fonksiyonlarla ilgili ilk sistematik çalışma J. L. W. V Jensen'in 1905-1906 yılları arasında yaptığı çalışmayla hız kazanmıştır matematikte bilinen ve kullanılan eşitsizliklerin birçoğu aslında Jensen eşitsizliğinin [20]. Değişik konveks fonksiyonlara uygulanmasının bir sonucudur bunlardan bazıları Aritmetik-Geometrik Ortalama, Cauchy-Bunyakovski-Schwartz, Young, Hölder ve Minkovski eşitsizlikleri olarak sıralanabilir [32].

Jensen, “bana öyle geliyor ki konveks fonksiyonlar pozitif ve artan fonksiyonların temelini oluşturur ve eğer yanılmıyorsam reel fonksiyon teorisinde çok önemli bir yere sahiptir” demiştir [23]. Ayrıca eşitsizlik üzerine yazılmış olan aşağıdaki kitaplar; Beckenbach ve R. Bellman [25]. D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić, A. M. Fink [27]. Ayrıca A. W. Roberts, D. E. Varberg [6]. J. E. Pečarić, F. Proschan ve Y. L. Tong [2], C. P. Niculescu, L. E. Persson [23]. Konveks fonksiyonlar için çok sayıda eşitsizlik ve çalışma içermektedir. 1906 yılında Macar matematikçi Lipót Fejér Hermite-Hadamard eşitsizliğinin ağırlıklı bir genellemesini vermiştir [15]. Bu eşitsizlik Hermite-Hadamard-Fejér eşitsizliği olarak da anılmaktadır.

Bu tez çalışmasında konveks ve harmonik konveks fonksiyonlar için verilen Hermite-Hadamard-Fejér ve Hermite-Hadamart-Fejér trapezoidal tipli eşitsizliklerin bir genellemesi p -konveks fonksiyonlar için verilmiş olup bu teorem ve sonuçların

bir kısmının özelde konveks ve harmonik konveks fonksiyonlar için geçerli olduğu gösterilmiştir.



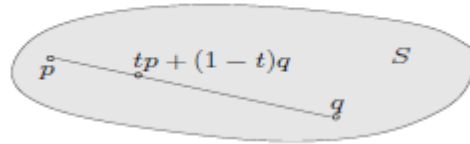
BÖLÜM 2.KAYNAK ARAŞTIRMASI

2.1. Ön Bilgiler

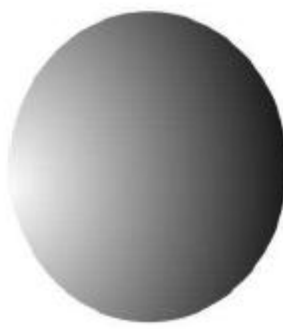
Bu bölümde tez için gerekli olan bazı temel kavramlar, tanımlar, teoremler ve eşitsizliklere yer verilmiştir.

Tanım 2.1.1 (Konveks Küme): E Lineer bir uzay olmak üzere ($\mathbb{R}^n$ Öklid uzayı alabiliriz) $S \subset E$ olsun. Eğer $p, q \in S$ ve $0 \leq t \leq 1$ sağlayan her gerçel t için $tp + (1 - t)q \in S$ ise S ye konveks küme denir [1].

Öklid uzayında düşündüğümüzde geometrik olarak konveks S ’ de alınan iki noktayı birleştiren doğru parçasının yine S ’ ye ait olduğunu görmek zor değildir (Şekil 2.1.1).



Şekil 2.1.1 Doğrusal konveks küme.

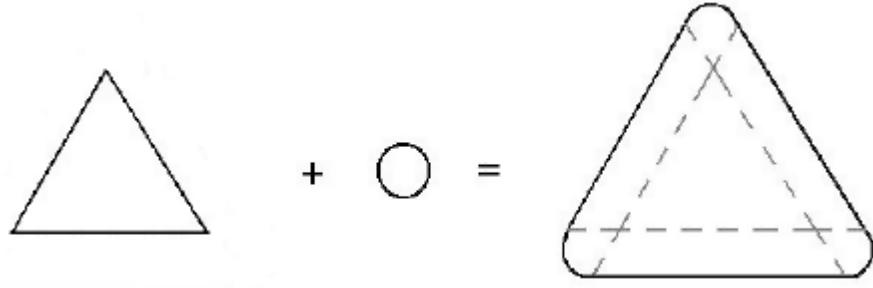


Şekil 2.1.2 Konveks küme.



Şekil 2.1.3 Konveks olmayan küme.

$A, B \subset E$ olmak üzere A, B konveks küme $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$ $\lambda, \alpha \geq 0$ olmak şartıyla $\lambda A + \alpha B = \{\lambda x + \alpha y | x \in A, y \in B\}$ $\lambda A + \alpha B$ ’ de konvektir. Geometrik olarak şekil 2.4’ de kolayca görülebilir [23].



Şekil 2.1.4 Konveks kümelerin cebirsel birleşimi.

Örnek 2.1.1 $\mathbb{R}$ ' de $[a, b]$ konveks bir kümedir [9].

Bir küme konveks değil ise konkav olarak adlandırılır.



Şekil 2.1.5 Konkav(İçbükey) kümeler.

Örnek 2.1.2 $\emptyset$ (Boş küme) konveks bir kümedir [9].

$\{(\forall a, b \in \emptyset) \wedge (\forall t \in [0,1])\} \Rightarrow (ta + (1-t)b) \in \emptyset$ birleşik önermesini ele alırsak, $p \equiv (\forall a, b \in \emptyset)$, $r \equiv (\forall t \in [0,1])$ ve $s \equiv (ta + (1-t)b) \in \emptyset$ alt önermelerinin doğruluk değerleri $p \equiv 0$, $r \equiv 1$ ve $s \equiv 0$ olacağından birleşik önermesinin doğruluk değeri $[(p \wedge r) \Rightarrow s] \equiv 1$ olacaktır. O halde tanıma uygun hipotezin sonucunda doğru bir hükme varmış oluruz. Bu ise $\emptyset$ (Boş küme)' nin konveks olduğunu gösterir.

Tanım 2.1.2 (Konveks Fonksiyon): $I \subset \mathbb{R}$ reel bir aralık ve $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall a, b \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b) \quad (2.1)$$

sağlanıyorsa, f ye konveks fonksiyon denir. f konveks ise $-f$ konkavdır denir ve (2.1)' de ki eşitsizlik ters çevrilir.

Eğer (2.1) eşitsizliği $a \neq b$ ve $t \in (0,1)$ için kesin ise bu durumda f fonksiyonuna kesin konvekstir denir [32].

Bu durumda " $\leq$ " yerine " $<$ " yazılır ve aşağıdaki şekilde gösterilir.

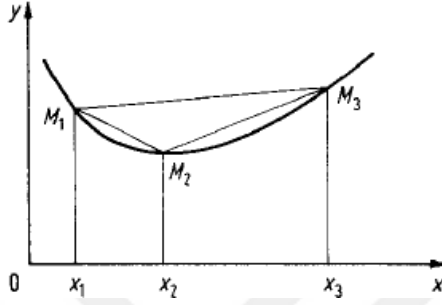
$$f(ta + (1-t)b) < tf(a) + (1-t)f(b)$$

(2.1)' deki eşitsizliğe eş olarak $\forall x_1, x_2, x_3 \in I$ için

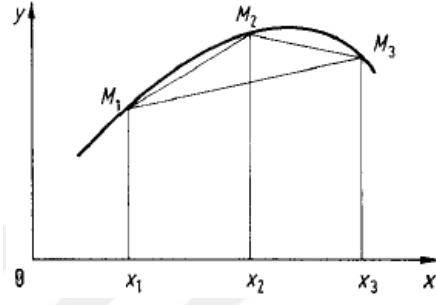
$$\begin{vmatrix} x_1 & f(x_1) & 1 \\ x_2 & f(x_2) & 1 \\ x_3 & f(x_3) & 1 \end{vmatrix} \geq 0$$

determinantını verebiliriz. Bunun $\mathbb{R}^2$ 'de geometrik anlamı;

$$P = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & f(x_1) & 1 \\ x_2 & f(x_2) & 1 \\ x_3 & f(x_3) & 1 \end{vmatrix} \geq 0$$



Şekil 2.1.6 Konveks fonksiyonun geometrik yorumu.

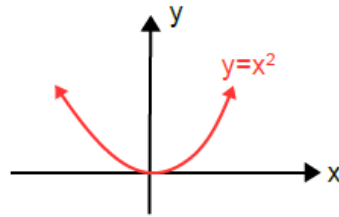


Şekil 2.1.7 Konkav fonksiyonun geometrik yorumu.

köşeleri $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, $(x_3, f(x_3))$ olan üçgenin alanı konveks şekillerde (Şekil 2.1.6.) $P \geq 0$ için konveks ($P > 0$ için kesin konveks), konkav şekillerde (Şekil 2.1.7) $P \leq 0$ için konkav ($P < 0$ için kesin konkav) dır [32].

Eğer f hem konveks hem de konkav bir fonksiyon ise f' ye affine (doğrusal) dönüşüm denir [37].

Örnek 2.1.3 $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$ üzerinde konveks bir fonksiyondur [20].



Şekil 2.1.8 İkinci dereceden konveks fonksiyon ($f(x) = x^2$).

$I = (-\infty, \infty)$ aralığında konveks olduğunu gösterelim.

$m, n \in \mathbb{R}$ için $(m - n)^2 \geq 0$ olduğundan, $2mn \leq m^2 + n^2$ olur. $k, m, n \in I$ için

$k = tm + (1 - t)n$ alınırsa,

$$\begin{aligned} f(k) &= t^2 m^2 + (1 - t)^2 n^2 + t(1 - t)2mn \leq \\ &= t^2 m^2 + (1 - t)^2 n^2 + t(1 - t)(m^2 + n^2) \end{aligned}$$

$$tm^2 + (1-t)n^2 = tf(m) + (1-t)f(n)$$

(2.1) ifadesinden f konveks olur burada $t \in [0,1]$ olduğundan $t(1-t) \geq 0$ olduğuna dikkat edilmelidir aksi halde $t < 0$ ve $t > 1$ durumunda $t(1-t) \leq 0$ olacağından eşitsizlik ters çevrilirdi.

Benzer şekilde $f(x) = ax + b$ şeklindeki doğrusal(affine)fonksiyonların da konveks olduğu gösterilebilir.

Tanım 2.2' de eşitliğin yalnız doğrusal(affine) fonksiyonları tarafından sağlandığı da buradan daha iyi anlaşılır.

Konveks fonksiyonlar aşağıdaki özellikleri sağlar;

Özellik 2.1.1

- f I' da konveks $\Leftrightarrow \exists x_0 \in I$ noktası için $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ I' da artan bir fonksiyondur.
- $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu konveks $\Leftrightarrow \forall c, x \in (a,b)$ için $f(x) - f(c) = \int_c^x w(t)dt$ olacak şekilde $w: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ artan fonksiyonu vardır.
- f diferansiyellenebilir konveks $\Leftrightarrow f'$ artandır.
- f'' , (a,b) aralığında mevcut ve f konveks $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0$ dir.
 $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ f konveks $\Leftrightarrow f(x) \geq f(x_0) + \lambda(x - x_0) \quad \forall x, x_0 \in (a,b)$
 olacak şekilde bir yardımcı destek doğrusu vardır. Burada λ, x_0 ' a bağlıdır ve eğer f' varsa, o zaman $\lambda = f'(x_0)$ ya da $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$ ise $\lambda \in [f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$ dir.
- $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}, f$ konveks $\Leftrightarrow P, Q$ ve R noktaları f fonksiyonunun grafiği üzerinde herhangi üç nokta olmak üzere, $\text{eğim}PQ \leq \text{eğim}PR \leq \text{eğim}PR$ eşitsizlikleri vardır [2].

Yukarıda özellik d' de f' varsadan kasıt konveks fonksiyonların tanımlandığı her noktada diferansiyellenebilir olmasının gerekmediğidir. $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x - 1|$ konveks bir fonksiyon olduğu halde $x_0=1$ noktasında diferansiyellenebilir olmadığına dikkat edilmelidir. Yukarıdaki özellikleri kullanılarak bir fonksiyonun konveks olup olmadığını daha kolay bir şekilde bulabiliriz. Örnek 2.1.3' te f'' mevcut ve $f''(x) = 2 \geq 0$ olduğundan verilen fonksiyonun konveks olduğu rahatlıkla görülebilir.

Tanım 2.1.3 (Harmonik konveks fonksiyon): $I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ olmak üzere $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall a, b \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f\left(\frac{ab}{ta + (1-t)b}\right) \leq tf(b) + (1-t)f(a) \quad (2.2)$$

sağlanıyorsa, f' ye harmonik konveks fonksiyon denir. Eşitsizlik ters çevrilirse f' ye harmonik konkav denir [3].

Örnek 2.1.4 $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$, ve $h: (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = x$, olsun f harmonik konveks h harmonik konkav olur. Aşağıdaki özellikler verilen örnekten aşikar olarak görülebilir [3].

Özellik 2.1.2 $I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bir aralık ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu taktirde

- Eğer $I \subset (0, \infty)$, f konveks ve azalmayan bir fonksiyon ise bu taktirde f fonksiyonu harmonik konvektir.
- Eğer $I \subset (0, \infty)$, f harmonik konveks ve artmayan bir fonksiyon ise bu taktirde f fonksiyonu konkavdır.
- Eğer $I \subset (-\infty, 0)$, f harmonik konveks ve azalmayan bir fonksiyon ise bu taktirde f fonksiyonu konkavdır.
- Eğer $I \subset (-\infty, 0)$, f konveks ve artmayan bir fonksiyon ise bu taktirde harmonik konvektir [3].

Tanım 2.1.4 (p -konveks fonksiyon): $I \subset (0, \infty)$ reel sayılarda p -konveks bir küme olsun $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ olmak üzere. Eğer $\forall a, b \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f([ta^p + (1-t)b^p]^{1/p}) \leq tf(a) + (1-t)f(b) \quad (2.3)$$

sağlanıyorsa, f' ye p -konveks fonksiyon ya da $PC(I)$ sınıfına aittir denir [12].

Eşitsizlik ters çevrilirse f' ye p -konkav fonksiyon denir.

Sonuç 2.1.1

- $p = 1$ alınır (2.1) ifadesi,
 - $p = -1$ alınır (2.2) ifadesi,
- elde edilir.

Örnek 2.1.5 $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^p$, $p \neq 0$ ve $\omega: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $\omega(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f([ta^p + (1-t)b^p]^{1/p}) = \{[ta^p + (1-t)b^p]^{1/p}\}^p = ta^p + (1-t)b^p \leq tf(a) + (1-t)f(b)$ olduğundan f p -konveks fonksiyondur. benzer şekilde ω' de hem p -konveks hem de p -konkav olduğu kolayca gösterilebilir [13].

Tanım 2.1.5 (Bir kümenin içi): Ψ bir topolojik uzay ve $I \subset \Psi$ olsun. $\forall a \in I$ için $N(a; r) \subset I$ olacak şekilde $r > 0$ sayısı varsa a ' ya I kümesinin iç noktası denir. I ' nin iç noktalarının kümesine I ' nin içi denir ve I° ile gösterilir $N(a; r)$ a ' nin r yarıçaplı açık civarıdır [4].

Örnek 2.1.6 $\mathbb{R}$ ' de $a < c < d < b$ için $(c, d) \subset [a, b]$ olacak şekilde seçilen tüm (c, d) açık aralıkları $[a, b]$ ' nin içi olur.

Tanım 2.1.6 (Süreklilik): $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x_0 \in I$ ve $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. Eğer $|x - x_0| < \delta$ iken $\forall x \in I$ için $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f, x_0 da süreklidir denir [4].

Tanım 2.1.7 (Düzgün Süreklilik): $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. Eğer $|x_1 - x_2| < \delta$ Şartını sağlayan $\forall x_1, x_2 \in I$ için $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f, I ' da düzgün süreklidir denir [4].

Diğer bir ifadeyle $y \rightarrow x$ iken $f(y) \rightarrow f(x)$ oluyorsa f, I ' da düzgün süreklidir.

Tanım 2.1.8 (Lipschitz koşulu): $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun $\forall x, y \in I$ için $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa f, I ' da Lipschitz koşulunu sağlıyor denir [6].

Sonuç 2.1.2 f, I ' da Lipschitz koşulunu sağlıyorsa f, I ' da düzgün süreklidir.

İspat: Tanım 2.1.6' da $\forall x, y \in I$ ve $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. $|x - y| \leq \delta = \frac{\varepsilon}{M} > 0$ şartını sağlayan, $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| = \varepsilon > 0$ olacak şekilde $\delta > 0$ var olacağından f, I ' da düzgün süreklidir.

Tanım 2.1.9 (Simetrik fonksiyon): $w: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $\forall x \in [a, b]$ için $w(x) = w(a + b - x)$ (2.4)

sağlanıyorsa $w(x)$ fonksiyonuna $(a + b)/2$ ' ye göre simetrik denir [9].

Tanım 2.1.10 (Harmonik simetrik fonksiyon): $w: [a, b] \subset \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\forall x \in [a, b] \text{ için } w(x) = w\left(\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{x}\right)^{-1}\right) \quad (2.5)$$

sağlanıyorsa $w(x)$ fonksiyonuna $\frac{2ab}{a+b}$, ye göre harmonik simetrik fonksiyon denir [10].

Tanım 2.1.11 (p-simetrik fonksiyon): $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ve $w: [a, b] \subset (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $\forall x \in [a, b]$ için

$$w(x) = \left([a^p + b^p - x^p]^{\frac{1}{p}} \right) \quad (2.6)$$

Sağlanıyorsa $w(x)$ fonksiyonuna $\left[\frac{a^p + b^p}{2} \right]^{\frac{1}{p}}$, ye göre p -simetrik fonksiyon denir [11].

Sonuç 2.1.3 (2.5) ifadesine göre,

- a. $p = 1$ alınır (2.4) ifadesi,
 - b. $p = -1$ alınır (2.5) ifadesi,
- elde edilir.

Örnek 2.1.7 $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ve $w_1, w_2: [a, b] \subset (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ $w_1(x) = c, c \in \mathbb{R}, w_2(x) = \left(x^p - \frac{a^p + b^p}{2} \right)^2$ olmak üzere $w_1(x), w_2(x)$ fonksiyonları $\left[\frac{a^p + b^p}{2} \right]^{\frac{1}{p}}$, ye göre p -simetrik [11].

Tanım 2.1.12 (Sınırlı fonksiyon): $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında tanımlanmış olsun. $\forall x \in [a, b]$ için $|f(x)| \leq M$ olacak şekilde $M > 0$ sayısı varsa $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sınırlıdır denir [4].

Tanım 2.1.13 (İntegraller İçin Hölder Eşitsizliği): $1 < p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g sürekli $[a, b]$ aralığında tanımlı fonksiyonları $|f|^p$ ve $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{1/q}$$

eşitsizliğini sağlar [20].

Tanım 2.1.14 (İntegraller İçin Power Mean Eşitsizliği): $q \geq 1$ olsun. f ve g $[a, b]$ aralığında tanımlı ve sürekli fonksiyonları verilsin $|f|$ ve $|g|^p$ $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)| dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)||g(x)|^q dx \right)^{1/q}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik Hölder eşitsizliğinde $\frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{q}$ yazılmasıyla elde edilir ve $q = 1$ için de sağlanır [20].

Tanım 2.1.15 (Jensen Eşitsizliği): $f: I \subset \mathbb{R}$ aralığında tanımlı konveks bir fonksiyon olsun $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in I^n$ ($n \geq 2$) ve $p(P_k = \sum_{i=1}^k p_i)$ şeklinde tanımlanan pozitif sıralı n -li ise

$$f\left(\frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^n p_i x_i\right) \leq \frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^n p_i f(x_i)$$

eşitsizliği sağlanır [28].

Teorem 2.1.1 f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks ise ;

a. f , (a, b) aralığında süreklidir,

b. f , $[a, b]$ aralığında sınırlıdır,

[5].

Tanım 2.1.16 (Norm)

$$\|w^{(n)}\|_q := \left(\int_a^b |w^{(n)}(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} < \infty, \quad q \geq 1$$

$$\|w^{(n)}\|_\infty = \sup_{t \in [a, b]} |w^{(n)}(x)|$$

[21].

2.2. Bazı Konveks Fonksiyonlarla İlgili Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler

Teorem 2.2.1 (Konveks fonksiyonlarda Hermite-Hadamard Eşitsizliği): $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Eğer $a, b \in I$, $a < b$ ise

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \quad (2.7)$$

sağlanır ve bu eşitsizliğe konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği denir. Eğer f konkav fonksiyon ise eşitsizlik ters çevrilir [7,8].

Teorem 2.2.1 (Harmonik Konveks Fonksiyonlarda Hermite-Hadamard

Eşitsizliği): $f: I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ harmonik konveks fonksiyon olsun, $a < b$ ve $a, b \in I$

olmak üzere eğer $f \in L[a, b]$ ise

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \quad (2.8)$$

sağlanır ve bu eşitsizliğe harmonik konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği denir [7].

Teorem 2.2.3 (p -konveks fonksiyonlarda Hermite-Hadamard Eşitsizliği):

$f: I \subset (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ p -konveks fonksiyon, $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $a < b$ ve $a, b \in I$ olsun. Eğer $f \in L[a, b]$ ise

$$f\left(\left[\frac{a^p + b^p}{2}\right]^{1/p}\right) \leq \frac{p}{b^p - a^p} \int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}} dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \quad (2.9)$$

sağlanır ve bu eşitsizliğe p -konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği denir [14].

İspat: f p -konveks fonksiyon olduğundan (2.3) ifadesinden dolayı

$$f([ta^p + (1-t)b^p]^{1/p}) \leq tf(a) + (1-t)f(b) \quad (2.10)$$

Şeklinde yazılabilir. (2.10) ifadesinde $t = \frac{1}{2}$ yazılırsa

$$f\left(\left[\frac{a^p + b^p}{2}\right]^{1/p}\right) \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \quad (2.11)$$

elde edilir.

(2.10) ifadesinin her iki tarafının t ' ye göre $[0,1]$ üzerinde integralini alıp

$$\int_0^1 f([ta^p + (1-t)b^p]^{1/p}) dt \leq \int_0^1 tf(a) dt + \int_0^1 (1-t)f(b) dt = \frac{f(a) + f(b)}{2} \quad (2.12)$$

biçiminde yazılabiliriz, bu eşitliğin sol tarafında $[ta^p + (1-t)b^p]^{1/p} = x$, $x^p = ta^p + (1-t)b^p$ şeklinde değişken değiştirirsek,

$$t = 0 \text{ için } x = b \text{ ve } t = 1 \text{ için } x = a \text{ ve } dt = \frac{px^{p-1}}{a^p - b^p} dx$$

olacağından verilenleri (2.12) ifadesinde yerine yazıp gerekli işlemleri yaptığımızda aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\frac{p}{b^p - a^p} \int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}} dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \quad (2.13)$$

diğer taraftan (2.11) ifadesinden dolayı

$$f\left(\left[\frac{x^p + y^p}{2}\right]^{1/p}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

yazılabilir, $x^p = ta^p + (1-t)b^p$ ve $y^p = (1-t)a^p + tb^p$ alınırsa $x^p + y^p = a^p + b^p$ olacağından yukarıdaki eşitsizlikte yerine yazarsak,

$$f\left(\left[\frac{a^p + b^p}{2}\right]^{1/p}\right) \leq \frac{f([ta^p + (1-t)b^p]^{1/p}) + f([(1-t)a^p + tb^p]^{1/p})}{2}$$

olacağından elde edilen eşitsizliğin her iki tarafının t ' ye göre $[0,1]$ üzerinde integralini alırsak,

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 f\left(\left[\frac{a^p + b^p}{2}\right]^{1/p}\right) dt \\
& \leq \frac{1}{2} \left[\int_0^1 f([ta^p + (1-t)b^p]^{1/p}) dt \right. \\
& \quad \left. + \int_0^1 f([tb^p + (1-t)a^p]^{1/p}) dt \right]
\end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 f\left(\left[\frac{a^p + b^p}{2}\right]^{1/p}\right) dt = f\left(\left[\frac{a^p + b^p}{2}\right]^{1/p}\right) \\
& \int_0^1 f([ta^p + (1-t)b^p]^{1/p}) dt = \frac{p}{b^p - a^p} \int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}} dx \\
& \int_0^1 f([tb^p + (1-t)a^p]^{1/p}) dt = \frac{p}{b^p - a^p} \int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}} dx
\end{aligned}$$

olduğundan elde edilen eşitlikler (2.14) ifadesinde yerine yazılırsa,

$$f\left(\left[\frac{a^p + b^p}{2}\right]^{1/p}\right) \leq \frac{p}{b^p - a^p} \int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}} dx \tag{2.15}$$

(2.11), (2.13) ve (2.15) ifadelerinden dolayı ispat tamamlanmış olur.

BÖLÜM 3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde tez çalışmasının ana sonuçlarını bulmamıza yardımcı olan ve destekleyen literatürdeki bazı çalışmalara yer verilmiştir.

3.1. Çeşitli Konveks Fonksiyonlar İle İlgili Hermite-Hadamard-Fejér Tipli Eşitsizlikler

Teorem 3.1.1 (Konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejér eşitsizliği):

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. $w : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu $\frac{a+b}{2}$ ye göre simetrik ve $w \in L[a, b]$ ise

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b w(x) dx \leq \int_a^b f(x) w(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b w(x) dx \quad (3.1)$$

sağlanır ve bu eşitsizliğe konveks fonksiyonlarda Hermite-Hadamard eşitsizliğinin ağırlıklı genellemesi olan Hermite-Hadamard-Fejér eşitsizliği denir [15].

Teorem 3.1.2 (Harmonik konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejér eşitsizliği): $f : I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ bir harmonik konveks fonksiyon, $a, b \in I$ ve $a < b$

olsun. Eğer $w : [a, b] \subset \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu $\frac{2ab}{a+b}$ ye göre harmonik-simetrik fonksiyon olmak üzere $f, w \in L[a, b]$ ise

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \int_a^b \frac{w(x)}{x^2} dx \leq \int_a^b \frac{f(x)w(x)}{x^2} dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b \frac{w(x)}{x^2} dx \quad (3.2)$$

sağlanır ve bu eşitsizliğe harmonik konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejér eşitsizliği denir [16].

Teorem 3.1.1 (p -konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejér eşitsizliği):

$f : I \subset (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ p -konveks fonksiyon, $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $a, b \in I$, $a < b$, $w : [a, b] \subset (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ve $w(x) \left[\frac{a^p + b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}$ ye göre negatif olmayan p -simetrik fonksiyon olsun. Eğer $f, w \in L[a, b]$ ise

$$f\left(\left[\frac{a^p + b^p}{2}\right]^{1/p}\right) \int_a^b \frac{w(x)}{x^{1-p}} dx \leq \int_a^b \frac{f(x)w(x)}{x^{1-p}} dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b \frac{w(x)}{x^{1-p}} dx \quad (3.3)$$

sağlanır. Bu eşitsizliğe p -konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejér eşitsizliği denir [17].

İspat: $f: I \subset (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ p -konveks fonksiyon $\forall a, b \in I$ ve (2.3) ifadesinde $t = \frac{1}{2}$ alınır

$$f\left(\left[\frac{x^p + y^p}{2}\right]^{1/p}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

olur. $x^p = ta^p + (1-t)b^p$ ve $y^p = (1-t)a^p + tb^p$ seçilirse $x^p + y^p = a^p + b^p$

$$f\left(\left[\frac{a^p + b^p}{2}\right]^{1/p}\right) \leq \frac{f([ta^p + (1-t)b^p]^{1/p}) + f([tb^p + (1-t)a^p]^{1/p})}{2} \quad (3.4)$$

olup, $w(x)$ p -simetrik olduğundan

$$w([ta^p + (1-t)b^p]^{1/p}) = w([tb^p + (1-t)a^p]^{1/p})$$

dir. (3.4) ifadesinin her iki tarafını $w([ta^p + (1-t)b^p]^{1/p})$ ile çarpıp ($w(x) \geq 0$) t , ye göre $[0,1]$ üzerinde integralini aldıktan sonra değişken değiştirip,

$$\begin{aligned} & f\left(\left[\frac{a^p + b^p}{2}\right]^{1/p}\right) \frac{p}{b^p - a^p} \int_a^b \frac{w(x)}{x^{1-p}} dx \\ &= \int_0^1 f\left(\left[\frac{a^p + b^p}{2}\right]^{1/p}\right) w([ta^p + (1-t)b^p]^{1/p}) dt \\ &= \int_0^1 f\left(\left[\frac{a^p + b^p}{2}\right]^{1/p}\right) w([tb^p + (1-t)a^p]^{1/p}) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & f\left(\left[\frac{a^p + b^p}{2}\right]^{1/p}\right) \int_0^1 w([ta^p + (1-t)b^p]^{1/p}) dt \\ & \leq \int_0^1 \frac{f([ta^p + (1-t)b^p]^{1/p}) w([ta^p + (1-t)b^p]^{1/p})}{2} dt \\ & \quad + \int_0^1 \frac{f([tb^p + (1-t)a^p]^{1/p}) w([tb^p + (1-t)a^p]^{1/p})}{2} dt \\ &= \int_0^1 \frac{f([ta^p + (1-t)b^p]^{1/p}) w([ta^p + (1-t)b^p]^{1/p})}{2} dt \\ & \quad + \int_0^1 \frac{f([tb^p + (1-t)a^p]^{1/p}) w([tb^p + (1-t)a^p]^{1/p})}{2} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{p}{b^p - a^p} \int_a^b \frac{f(x)w(x)}{x^{1-p}} dx + \frac{p}{b^p - a^p} \int_a^b \frac{f(x)w(x)}{x^{1-p}} dx}{2} \\
&= \frac{p}{b^p - a^p} \int_a^b \frac{f(x)w(x)}{x^{1-p}} dx
\end{aligned} \tag{3.5}$$

şeklinde yazıp, (3.5) ifadesinin her iki yanını $\frac{p}{b^p - a^p}$ çarparsak (3.3) ifadesinin sol tarafını elde etmiş oluruz. Diğer taraftan f 'nin p -konveksliğinden yararlanırsak,

$$f([ta^p + (1-t)b^p]^{1/p}) + f([tb^p + (1-t)a^p]^{1/p}) \leq tf(a) + (1-t)f(b) + tf(b) + (1-t)f(a) = f(a) + f(b)$$

$$\frac{f([ta^p + (1-t)b^p]^{1/p}) + f([tb^p + (1-t)a^p]^{1/p})}{2} \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \tag{3.6}$$

(3.6) ifadesinin her iki tarafını $w([ta^p + (1-t)b^p]^{1/p})$ ile çarpar ve t 'ye göre $[0,1]$ üzerinde integralini alırsak ;

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \left[\int_0^1 f([ta^p + (1-t)b^p]^{1/p}) w([ta^p + (1-t)b^p]^{1/p}) dt \right. \\
&\quad \left. + \int_0^1 f([tb^p + (1-t)a^p]^{1/p}) w([ta^p + (1-t)b^p]^{1/p}) dt \right] \\
&w([ta^p + (1-t)b^p]^{1/p}) = w([tb^p + (1-t)a^p]^{1/p}) \\
&= \frac{1}{2} \left[\int_0^1 f([ta^p + (1-t)b^p]^{1/p}) w([ta^p + (1-t)b^p]^{1/p}) dt \right. \\
&\quad \left. + \int_0^1 f([tb^p + (1-t)a^p]^{1/p}) w([tb^p + (1-t)a^p]^{1/p}) dt \right]
\end{aligned}$$

olur. Bununla birlikte değişken değiştirip gerekli düzenlemeleri yaparsak

$$\begin{aligned}
&\frac{\frac{p}{b^p - a^p} \int_a^b \frac{f(x)w(x)}{x^{1-p}} dx + \frac{p}{b^p - a^p} \int_a^b \frac{f(x)w(x)}{x^{1-p}} dx}{2} = \frac{p}{b^p - a^p} \int_a^b \frac{f(x)w(x)}{x^{1-p}} dx \\
&\leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_0^1 w([ta^p + (1-t)b^p]^{1/p}) dt \\
&= \frac{f(a) + f(b)}{2} \frac{p}{b^p - a^p} \int_a^b \frac{w(x)}{x^{1-p}} dx
\end{aligned} \tag{3.7}$$

elde edilir. Burada her iki tarafı $\frac{p}{b^p - a^p}$ ile çarparsak (3.3) ifadesinin sağ tarafını elde etmiş oluruz. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.1.1 (3.3) ifadesinde;

a. $p = 1$ ve $w(x) = 1$ alınırsa (2.7) eşitsizliği,

- b. $p = 1$ alınır (3.1) eşitsizliği,
 - c. $p = 1$ ve $w(x) = 1$ alınır (2.8) eşitsizliği,
 - d. $p = -1$ alınır (3.1) eşitsizliği,
 - e. $w(x) = 1$ alınır (2.9) eşitsizliği,
- elde edilir.

3.2. Konveks Fonksiyolar İle İlgili Trapezoidal Tipli Eşitsizlikler

Teorem 3.2.1 $f: I^\circ \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ I° 'de diferansiyellenebilir bir dönüşüm olsun $a, b \in I^\circ$ ve $a < b$ olmak üzere eğer $f' \in L(a, b)$ ise

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_0^1 (1-2t) f'(ta + (1-t)b) dt \quad (3.8)$$

eşitliği elde edilir [18].

İspat: Kısmî integral alma işlemini kullanarak;

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 (1-2t) f'(ta + (1-t)b) dt \\ &= \left[\frac{f(ta + (1-t)b)}{a-b} (1-2t) \right]_0^1 + 2 \int_0^1 \frac{f(ta + (1-t)b)}{a-b} dt \\ &= \frac{f(a) + f(b)}{b-a} - \frac{2}{(b-a)^2} \int_0^1 f(x) dx \end{aligned}$$

son eşitliği $\frac{b-a}{2}$ ile çarparsak ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.2 $f: I^\circ \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ I° 'de diferansiyellenebilir bir dönüşüm olsun $a, b \in I^\circ$ ve $a < b$ olmak üzere eğer $|f'|$, $[a, b]$ 'de konveks bir fonksiyon ise

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{(b-a)|f'(a)| + |f'(b)|}{8} \quad (3.9)$$

eşitsizliği sağlanır [18].

İspat: (3.8) ifadesini kullanarak;

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| &= \left| \frac{b-a}{2} \int_0^1 (1-2t) f'(ta + (1-t)b) dt \right| \\ &\leq \frac{b-a}{2} \int_0^1 |1-2t| |f'(ta + (1-t)b)| dt \end{aligned}$$

$$\leq \frac{b-a}{2} \int_0^1 |1-2t| [t|f'(a)| + (1-t)|f'(b)|] dt$$

$$\int_0^1 |1-2t|(1-t) dt = \int_0^1 |1-2t|t dt = \int_0^{1/2} |1-2t|t dt + \int_{1/2}^1 |2t-1|t dt = \frac{1}{4}$$

olduğundan bir önceki eşitsizlikte yerine yazılırsa,

$$\leq \frac{(b-a)(|f'(a)| + |f'(b)|)}{2} \int_0^1 |1-2t|t dt \leq \frac{(b-a)(|f'(a)| + |f'(b)|)}{8}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.3 $f: I^\circ \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° ’ de diferansiyellenebilir bir dönüşüm olsun $a, b \in I^\circ$, $a < b$ ve $p > 1$ olmak üzere eğer $|f'|^{p/(p-1)}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $[a, b]$ ’ de konveks bir fonksiyon ise

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right|$$

$$\leq \frac{(b-a)}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}} \left[\frac{|f'(a)|^{\frac{p}{p-1}} + |f'(b)|^{\frac{p}{p-1}}}{2} \right]^{\frac{p}{p-1}} \quad (3.10)$$

eşitsizliği sağlanır [18].

İspat: (3.8) ifadesine Hölder integral eşitsizliğini uygularsak

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right|$$

$$\leq \frac{b-a}{2} \int_0^1 |1-2t| |f'(ta + (1-t)b)| dt \quad (3.11)$$

$$\leq \frac{b-a}{2} \left(\int_0^1 |1-2t|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |f'(ta + (1-t)b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

olur. $|f'|^{p/(p-1)} = |f'|^q$ nun konveksliğini kullanıp

$$\int_0^1 |f'(ta + (1-t)b)|^q dt \leq \int_0^1 [t|f'(a)|^q + (1-t)|f'(b)|^q] dt$$

$$= \frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2} \quad (3.12)$$

$$\int_0^1 |1-2t|^p dt = \int_0^{1/2} (1-2t)^p dt + \int_{1/2}^1 (2t-1)^p dt = 2 \int_0^{1/2} (1-2t)^p dt$$

$$= \frac{1}{p+1} \quad (3.13)$$

(3.12)-(3.13) ifadelerini birleştirecek (3.10) ifadesi elde edilir.

3.3. Konveks Fonksiyonlar İle İlgili Trapezoidal Tipli Fejér Eşitsizlikleri

Teorem 3.3.1 $w: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} [a, b]$ üzerinde integrallenebilir ve $\frac{a+b}{2}$, ye göre simetrik bir fonksiyon olsun;

a. $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ için

$$\begin{aligned} & \int_t^1 w(sa + (1-s)b)ds - \int_0^t w(sa + (1-s)b)ds \\ &= 2 \int_t^{1/2} w(sa + (1-s)b)ds \end{aligned} \quad (3.14)$$

b. $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ için

$$\begin{aligned} & \int_0^t w(sa + (1-s)b)ds - \int_t^1 w(sa + (1-s)b)ds \\ &= 2 \int_{1/2}^t w(sa + (1-s)b)ds \end{aligned} \quad (3.15)$$

sağlanır [19].

İspat:

a. $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ ve w fonksiyonu $\frac{a+b}{2}$, ye göre simetrik ve $\frac{a+b}{2} \leq \varphi \leq b$ olduğundan $x = sa + (1-s)b$ değişken değişimi yapıp,

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{a+b}{2}}^b w(x)dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} w(x)dx \\ & \int_a^{\varphi} w(x)dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} w(x)dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^{\varphi} w(x)dx = \int_{\frac{a+b}{2}}^b w(x)dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^{\varphi} w(x)dx \\ & \int_{\frac{a+b}{2}}^b w(x)dx = \int_{\frac{a+b}{2}}^{\varphi} w(x)dx + \int_{\varphi}^b w(x)dx \\ & \frac{1}{b-a} \left[\int_a^{\varphi} w(x)dx - \int_{\varphi}^b w(x)dx \right] = \frac{2}{b-a} \int_{\frac{a+b}{2}}^{\varphi} w(x)dx \\ &= 2 \int_t^{1/2} w(sa + (1-s)b)ds \end{aligned}$$

olur. Elde edilen eşitliği (3.14) ifadesinde yerine yazarsak ispat tamamlanır. Aynı argümanları kullanarak benzer şekilde (3.15) ifadesini de ispatlayabiliriz.

Sonuç 3.3.1 Eğer w negatif olmayan bir fonksiyon ise aşağıdaki eşitsizlikler geçerlidir.

a. $t \in [0, \frac{1}{2}]$ için

$$\int_t^1 w(sa + (1-s)b)ds - \int_0^t w(sa + (1-s)b)ds \geq 0 \quad (3.16)$$

b. $t \in [\frac{1}{2}, 1]$ için

$$\int_0^t w(sa + (1-s)b)ds - \int_t^1 w(sa + (1-s)b)ds \geq 0 \quad (3.17)$$

eşitsizlikleri elde edilir.

Teorem 3.3.2 $f: I^\circ \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ I° 'de diferansiyellenebilir bir dönüşüm olsun $a, b \in I, a < b, w: [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ diferansiyellenebilir bir dönüşüm olsun

$$\mu(t) = \int_t^1 w(sa + (1-s)b)ds - \int_0^t w(sa + (1-s)b)ds \quad (3.18)$$

olmak üzere, eğer $f' \in L[a, b]$ ise

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a} \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b w(x)dx - \int_a^b f(x)w(x)dx \right) \\ = \frac{b-a}{2} \int_0^1 \mu(t) f'(ta + (1-t)b)dt \end{aligned} \quad (3.19)$$

eşitliği sağlanır [19].

Sonuç 3.3.2 (3.18)' de $\mu(1-t) + \mu(t) = 0$ olacağından,

$$\phi(t) = \mu(1-t) = -\mu(t) \leq 0 \quad (3.20)$$

olur.

Teorem 3.3.3 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ I° 'de diferansiyellenebilir bir dönüşüm $a, b \in I^\circ, a < b$ $w: [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ integrallenebilir (a, b) 'de diferansiyellenebilir ve $\frac{a+b}{2}$ 'ye göre simetrik bir fonksiyon olsun, eğer $|f'|$ $[a, b]$ 'de konveks bir fonksiyon ise

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b w(x)dx - \int_a^b f(x)w(x)dx \right| \\ = [|f'(a)| + |f'(b)|] \int_{\frac{a+b}{2}}^b w(x)(x-b)dx \end{aligned} \quad (3.21)$$

olur [19].

İspat: (3.14)-(3.19) ve $|f'|$ ' ninkonveksliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b w(x) dx - \int_a^b f(x) w(x) dx \right| = \\
& = \frac{(b-a)^2}{2} \left| \int_0^1 \left[\int_t^1 w(sa + (1-s)b) ds \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \int_0^t w(sa + (1-s)b) ds \right] f'(ta + (1-t)b) dt \right| \\
& \leq \frac{(b-a)^2}{2} \left\{ \int_0^{1/2} \left| \int_t^1 w(sa + (1-s)b) ds - \int_0^t w(sa + (1-s)b) ds \right| |f'(ta + (1-t)b)| dt \right. \\
& \quad \left. + \int_{1/2}^1 \left| \int_t^1 w(sa + (1-s)b) ds - \int_0^t w(sa + (1-s)b) ds \right| (ta + (1-t)b) dt \right\} \\
& \leq \frac{(b-a)^2}{2} \left\{ \int_0^{1/2} \left| \int_t^1 w(sa + (1-s)b) ds - \int_0^t w(sa + (1-s)b) ds \right| t |f'(a)| \right. \\
& \quad \left. + (1-t) |f'(b)| dt \right. \\
& \quad \left. + \int_{1/2}^1 \left| \int_t^1 w(sa + (1-s)b) ds - \int_0^t w(sa + (1-s)b) ds \right| t |f'(a)| \right. \\
& \quad \left. + (1-t) |f'(b)| dt \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. $x = sa + (1-s)b$ değişken değiştirip, (3.14) ve (3.15) ifadelerini kullanarak integral sırasını değiştirirsek

$$\begin{aligned}
& = (b-a)^2 \left\{ \int_0^{1/2} \left(\int_t^{1/2} w(sa + (1s)b) ds \right) (t |f'(a)| + (1-t) |f'(b)|) dt \right. \\
& \quad \left. + \int_{1/2}^1 \left(\int_{1/2}^t w(sa + (1s)b) ds \right) (t |f'(a)| + (1-t) |f'(b)|) dt \right\} \\
& = (b-a)^2 \left\{ \int_0^{1/2} \int_0^s w(sa + (1-s)b) (t |f'(a)| + (1-t) |f'(b)|) dt ds \right. \\
& \quad \left. + \int_{1/2}^1 \int_s^1 w(sa + (1-s)b) (t |f'(a)| + (1-t) |f'(b)|) dt ds \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (b-a)^2 \left\{ \int_0^{1/2} w(sa + (1-s)b) \left[\left(|f'(a)| \frac{t^2}{2} + (|f'(b)|)(t - \frac{t^2}{2}) \right) \Big|_0^s \right] ds \right. \\
&\quad \left. + \int_{1/2}^1 w(sa + (1-s)b) \left[\left(|f'(a)| \frac{t^2}{2} + (|f'(b)|)(t - \frac{t^2}{2}) \right) \Big|_s^1 \right] ds \right\} \\
&= (b-a)^2 \left\{ \int_0^{1/2} w(sa + (1-s)b) \left(|f'(a)| \frac{s^2}{2} + (|f'(b)|)(s - \frac{s^2}{2}) \right) ds \right. \\
&\quad + \int_{1/2}^1 w(sa + (1-s)b) \left(|f'(a)| \left(\frac{1}{1} - \frac{s^2}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. \left. + (|f'(b)|) \left(\frac{1}{2} - s + s^2 \right) \right) ds \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $s = \frac{x-b}{a-b}$ yazılırsa;

$$\begin{aligned}
(b-a) \left\{ \int_{(a+b)/2}^b w(x) \left(|f'(a)| \frac{(x-b)^2}{2(a-b)} + (|f'(b)|) \left(\frac{(x-b)}{a-b} - \frac{(x-b)^2}{2(a-b)} \right) \right) dx \right. \\
+ \int_a^{(a+b)/2} w(x) \left(|f'(a)| \left(\frac{1}{2} - \frac{(x-b)^2}{2(a-b)} \right) \right. \\
\left. \left. + (|f'(b)|) \left(\frac{1}{2} - \frac{x-b}{a-b} + \frac{1}{2} \left(\frac{x-b}{a-b} \right)^2 \right) \right) dx \right\}
\end{aligned}$$

olur. $w(x)$ fonksiyonu $\frac{a+b}{2}$, ye göre simetrik olduğundan integral sınırlarını değiştirip $x-b$ ' nin yerine $a-x$ yazılırsa;

$$\begin{aligned}
&\int_a^{\frac{a+b}{2}} w(x) \left(|f'(a)| \left(\frac{1}{2} - \frac{(x-b)^2}{2(a-b)} \right) + (|f'(b)|) \left(\frac{1}{2} - \frac{x-b}{a-b} + \frac{1}{2} \left(\frac{x-b}{a-b} \right)^2 \right) \right) dx \\
&= \int_{(a+b)/2}^b w(x) \left(|f'(a)| \frac{(a-x)^2}{2(a-b)} + (|f'(b)|) \left(\frac{(a-x)}{a-b} - \frac{(a-x)^2}{2(a-b)} \right) \right) dx
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada gerekli sadeleştirme ve düzenlemeleryapıldığında

$$\begin{aligned}
&= \int_{(a+b)/2}^b w(x)(b-x)|f'(a)|dx + \int_{(a+b)/2}^b w(x)(b-x)|f'(b)|dx \\
&= [|f'(a)| + |f'(b)|] \int_{\frac{a+b}{2}}^b w(x)(x-b)dx
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.3.3 (3.20) ifadesini kullanarak (3.19) ifadesini $\mu(1-t) = \phi(t)$ olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a} \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} \int_a^b w(x)dx - \int_a^b f(x)w(x)dx \right) \\ = \frac{b-a}{2} \int_0^1 \phi(t) f'(tb + (1-t)a) dt \end{aligned} \quad (3.22)$$

şeklinde yazabiliriz. (3.22) ifadesini kullanarak (3.21) ifadesinin ikinci kısmı

$$= [|f'(a)| + |f'(b)|] \int_a^{\frac{a+b}{2}} w(x)(x-a)dx$$

şeklinde yazılabilir.

Teorem 3.3.4 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ I° 'de diferansiyellenebilir bir dönüşüm olsun $a < b$ ve $a, b \in I^\circ$ olmak üzere $w: [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ integrallenebilir bir dönüşüm ve $(a, b)'$ de diferansiyellenebilir olsun. $f' \in L(a, b)$ olmak şartıyla $-\infty < m \leq f'(x) \leq M < \infty$ olacak şekilde $m < M$ sabitleri varsa

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(a)+f(b)}{2(b-a)} \int_a^b w(x)dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)w(x)dx - \frac{(b-a)(m+M)}{4} \int_0^1 \mu(t)dt \right| \\ \leq \frac{(M-m)(b-a)}{4} \int_0^1 |\mu(t)| dt \end{aligned} \quad (3.23)$$

sağlanır [19].

İspat: (3.19) ifadesini kullanırsak;

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a} \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} \int_a^b w(x)dx - \int_a^b f(x)w(x)dx \right) \\ = \frac{b-a}{2} \int_0^1 \mu(t) \left[f'(ta + (1-t)b) - \frac{m+M}{2} + \frac{m+M}{2} \right] dt \\ = \left\{ \begin{aligned} & \frac{(m+M)(b-a)}{4} \int_0^1 \mu(t) dt + \\ & \frac{b-a}{2} \int_0^1 \mu(t) \left[f'(ta + (1-t)b) - \frac{m+M}{2} \right] dt \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (3.24)$$

olur.

$$\begin{aligned} R = \frac{1}{b-a} \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} \int_a^b w(x)dx - \int_a^b f(x)w(x)dx \right) \\ - \frac{(m+M)(b-a)}{4} \int_0^1 \mu(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{b-a}{2} \int_0^1 \mu(t) \left[f'(ta + (1-t)b) - \frac{m+M}{2} \right] dt \\
|R| &\leq \frac{b-a}{2} \int_0^1 |\mu(t)| \left| f'(ta + (1-t)b) - \frac{m+M}{2} \right| dt
\end{aligned} \tag{3.25}$$

olur. $m \leq f'(ta + (1-t)b) \leq M$ olduğundan dolayı

$$\begin{aligned}
m - \frac{M-m}{2} &\leq f'(ta + (1-t)b) - \frac{M-m}{2} \leq M - \frac{m+M}{2} = \frac{M-m}{2} \\
\left| f'(ta + (1-t)b) - \frac{M-m}{2} \right| &\leq \frac{M-m}{2}
\end{aligned}$$

son eşitsizlik (3.25) ifadesinde yerine yazılırsa ispat biter.

Sonuç 3.3.4 $w(x)$ fonksiyonunun $\frac{a+b}{2}$, ye göre simetrikliğini ve (3.14) ifadesini kullanırsak,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |\mu(t)| dt &= 2 \int_0^1 \left| \int_t^{1/2} w(sa + (1-t)b) ds \right| dt \\
&\leq 2 \int_0^1 \left| \frac{1}{2} - t \right| \sup_{s \in [t, \frac{1}{2}]} |w(sa + (1-t)b)| dt \leq \frac{1}{2} \|w\|_\infty
\end{aligned} \tag{3.26}$$

elde ederiz. Bu son eşitsizlik (3.23) ifadesinin sağ tarafında yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{f(a) + f(b)}{2(b-a)} \int_a^b w(x) dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) w(x) dx - \frac{(b-a)(m+M)}{4} \int_0^1 \mu(t) dt \right| \\
&\leq \frac{(M-m)(b-a)}{8} \|w\|_\infty
\end{aligned}$$

olur. (3.26) ifadesinin sol tarafına Hölder'in integral eşitsizliğini uygularsak

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |\mu(t)| dt &= 2 \int_0^1 \left| \int_t^{\frac{1}{2}} w(sa + (1-t)b) ds \right| dt \\
&\leq 2 \int_0^1 \left| t - \frac{1}{2} \right|^{\frac{1}{p}} \left(\int_t^{\frac{1}{2}} |w(sa + (1-s)b)|^q ds \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq 2 \|w\|_q \int_0^1 \left| t - \frac{1}{2} \right|^{1/p} dt
\end{aligned} \tag{3.27}$$

elde edilir [19].

Uyarı 3.1.1

$$\|w\|_q := \left(\int_t^{1/2} |w(sa + (1-s)b)|^q ds \right)^{1/q}, \quad \|w\|_\infty := \sup_{x \in [t, \frac{1}{2}]} |w(sa + (1-t)b)|$$

anlamında kullanılmıştır [21].

Sonuç 3.3.5 (3.23) ifadesinde eğer $w(x) = 1$ alınırsa;

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{M(b-a)}{4} \quad (3.28)$$

elde edilir [19].

İspat: $w(x) = 1$ olduğundan $\|w\|_\infty = 1$ dir (3.26) ifadesinden dolayı

$$\int_0^1 |\mu(t)| dt \leq \frac{1}{2} \|w\|_\infty = \frac{1}{2}$$

olacağından (3.24) ifadesini ve üçgen eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \\ & \leq \left| \frac{(b-a)(M+m)}{4} \int_0^1 |\mu(t)| dt \right| + \left| \frac{(b-a)(M-m)}{8} \right| \\ & \leq \frac{(b-a)(M+m)}{8} + \frac{(b-a)(M-m)}{8} = \frac{M(b-a)}{4} \end{aligned}$$

Teorem 3.3.5 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ I° de diferansiyellenebilir bir dönüşüm $a, b \in I^\circ, a < b$ ve $w: [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ integrallenebilir $(a, b)'$ de diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $f' \in L[a, b]$ olmak şartıyla f' bazı $K > 0$ sabiti için lipschitz şartını sağlıyorsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(a) + f(b)}{2(b-a)} \int_a^b w(x) dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) w(x) dx - \frac{1}{2} f' \left(\frac{a+b}{2} \right) \int_0^1 \mu(t) dt \right| \\ & \leq \frac{K(b-a)^2}{2} \int_0^1 \left| t - \frac{1}{2} \right| |\mu(t)| dt \end{aligned} \quad (3.29)$$

olur [19].

İspat: (3.19) ifadesini kullanarak,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{b-a} \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b w(x) dx - \int_a^b f(x) w(x) dx \right) \\ & = \frac{b-a}{2} \int_0^1 \mu(t) \left[f'(ta + (1-t)b) - f' \left(\frac{a+b}{2} \right) + f' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right] dt \\ & = \frac{b-a}{2} \int_0^1 \mu(t) \left[f'(ta + (1-t)b) - f' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right] dt + \frac{b-a}{2} f' \left(\frac{a+b}{2} \right) \int_0^1 \mu(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{b-a} \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} \int_a^b w(x) dx - \int_a^b f(x) w(x) dx \right) - \frac{b-a}{2} f' \left(\frac{a+b}{2} \right) \int_0^1 \mu(t) dt \\ &= \frac{b-a}{2} \int_0^1 \mu(t) \left[f'(ta + (1-t)b) - f' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right] dt \end{aligned} \quad (3.30)$$

f' fonksiyonu bazı $K > 0$ için lipschitz şartını sağladığı için

$$\left| f'(ta + (1-t)b) - f' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right| \leq K \left| ta + (1-t)b - \frac{a+b}{2} \right| = K(b-a) \left| t - \frac{1}{2} \right|$$

bu son eşitlik (3.30) yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

3.4. Harmonik Konveks Fonksiyonlar İle İlgili Trapezoidal Tipli Fejér Eşitsizlikleri

Tanım 3.4.1 $w: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $\mu(t): [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mu(t) = \int_t^1 w \left(\frac{ab}{sb + (1-s)a} \right) ds - \int_0^t w \left(\frac{ab}{sb + (1-s)a} \right) ds \quad (3.31)$$

Teorem 3.4.1 $I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bir aralık $a, b \in I^\circ, a < b$ $w: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ve $w, [a, b]$ üzerinde integrallenebilir bir fonksiyon olsun şu halde aşağıdaki özellikler sağlanır;

a. Eğer $w, 2ab/(a+b)$ ' ye göre harmonik simetrik ise

$$\mu(t) = \begin{cases} 2 \int_t^{1/2} w \left(\frac{ab}{sb + (1-s)a} \right) ds, & t \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \\ -2 \int_t^{1/2} w \left(\frac{ab}{sb + (1-s)a} \right) ds, & t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \end{cases} \quad (3.32)$$

b. $\forall t \in [0,1]$ için $\mu(t) = \mu(1-t)$ (3.33)

c. Eğer w negatif olmayan bir fonksiyon ise

$$\begin{aligned} \mu(t) &\geq 0 & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \mu(t) &\leq 0 & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{aligned} \quad (3.34)$$

d. Eğer w negatif olmayan bir fonksiyon ise

$$\int_0^1 |\mu(t)| dt \leq \frac{1}{2} \|w\|_\infty, \quad \int_0^1 |\mu(t)| dt \leq 2 \|w\|_q \int_0^1 \left| t - \frac{1}{2} \right|^{1/p} dt \quad (3.35)$$

eşitsizlikleri elde edilir.

e. $I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bir aralık $f: I^\circ \rightarrow \mathbb{R}$ ve $w: [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ olmak üzere f ve w fonksiyonları diferansiyellenebilir birer dönüşüm olsun. Eğer $f' \in L[a, b]$ ise

$$\begin{aligned}
& \frac{ab}{b-a} \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} \int_a^b \frac{w(x)}{x^2} dx - \int_a^b \frac{f(x)w(x)}{x^2} dx \right) \\
&= \frac{ab(b-a)}{2} \int_0^1 \mu(t) \frac{f'(ab/(tb+(1-t)a))}{(tb+(1-t)a)^2} dt
\end{aligned} \tag{3.36}$$

eşitliği elde edilir [53].

Teorem 3.4.2 $f: I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ I° da diferansiyellenebilir bir dönüşüm $a, b \in I^\circ$ $a < b$ ve $w: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $f' \in L[a, b]$ olmak şartıyla $\forall x \in [\frac{1}{b}, \frac{1}{a}]$ için $-\infty < m \leq x^2 f'(x) \leq M < \infty$ olacak şekilde $m < M$ var ise

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{ab}{b-a} \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} \int_a^b \frac{w(x)}{x^2} dx - \int_a^b \frac{f(x)w(x)}{x^2} dx \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{(m+M)(b-a)}{4ab} \int_0^1 \mu(t) dt \right| \\
& \leq \frac{(M-m)(b-a)}{4ab} \int_0^1 |\mu(t)| dt
\end{aligned} \tag{3.37}$$

eşitsizliği sağlanır [22].

İspat: (3.36) ifadesindeki eşitliği kullanırsak

$$\begin{aligned}
& \frac{ab}{b-a} \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} \int_a^b \frac{w(x)}{x^2} dx - \int_a^b \frac{f(x)w(x)}{x^2} dx \right) \\
&= \frac{ab(b-a)}{2} \int_0^1 \mu(t) \left[\frac{f'(ab/(tb+(1-t)a))}{(tb+(1-t)a)^2} + \frac{M+m}{2a^2b^2} - \frac{M+m}{2a^2b^2} \right] dt \\
&= \frac{ab(b-a)}{2} \int_0^1 \mu(t) \left[\frac{f'(ab/(tb+(1-t)a))}{(tb+(1-t)a)^2} - \frac{M+m}{2a^2b^2} \right] \\
& \quad + \frac{(b-a)(M+m)}{4ab} \int_0^1 \mu(t) \\
R &= \frac{ab}{b-a} \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} \int_a^b \frac{w(x)}{x^2} dx - \int_a^b \frac{f(x)w(x)}{x^2} dx \right) \\
& \quad - \frac{(m+M)(b-a)}{4ab} \int_0^1 \mu(t) dt \\
&= \frac{(b-a)ab}{2} \int_0^1 \mu(t) \left[\frac{f'(ab/(tb+(1-t)a))}{(tb+(1-t)a)^2} - \frac{M+m}{2a^2b^2} \right] dt \\
|R| &\leq \frac{(b-a)ab}{2} \int_0^1 |\mu(t)| \left| \frac{f'(ab/(tb+(1-t)a))}{(tb+(1-t)a)^2} - \frac{M+m}{2a^2b^2} \right| dt
\end{aligned} \tag{3.38}$$

$m \leq x^2 f'(x) \leq M$ den dolayı $x = (ab/(tb + (1-t)a))$ alırsak

$$m \leq \frac{a^2 b^2 f'((ab/(tb + (1-t)a))}{(tb + (1-t)a)^2} \leq M \text{ her iki tarafı } 1/a^2 b^2 \text{ ile çarparsak}$$

$$\frac{m}{a^2 b^2} \leq \frac{a^2 b^2 f'((ab/(tb + (1-t)a))}{(tb + (1-t)a)^2} \leq \frac{M}{a^2 b^2} \text{ eşitsizliğin iki tarafından } \frac{M+m}{2a^2 b^2}$$

ifadesini çıkarır ve mutlak değerini alırsak

$$\frac{m}{a^2 b^2} - \frac{M+m}{2a^2 b^2} \leq \frac{a^2 b^2 f'((ab/(tb + (1-t)a))}{(tb + (1-t)a)^2} - \frac{M+m}{2a^2 b^2} \leq \frac{M}{a^2 b^2} - \frac{M+m}{2a^2 b^2}$$

$$\left| \frac{a^2 b^2 f'((ab/(tb + (1-t)a))}{(tb + (1-t)a)^2} - \frac{M+m}{2a^2 b^2} \right| \leq \frac{M-m}{2a^2 b^2}$$

elde ederiz. Son eşitsizlik (3.38) ifadesinde yerine yazılırsa ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.4.1

a. Eğer (3.36) ve (3.35) ifadelerindeki eşitsizlikleri kullanırsak,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{ab}{b-a} \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} \int_a^b \frac{w(x)}{x^2} dx - \int_a^b \frac{f(x)w(x)}{x^2} dx \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{(m+M)(b-a)}{4ab} \int_0^1 \mu(t) dt \right| \\ & \leq \frac{(b-a)(M-m)}{8ab} \|w\|_\infty \end{aligned} \quad (3.39)$$

Eşitsizliği elde edilir.

b. Eğer (3.35) ifadesinde elde edilen eşitsizlikleri (3.37) eşitsizliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{ab}{b-a} \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} \int_a^b \frac{w(x)}{x^2} dx - \int_a^b \frac{f(x)w(x)}{x^2} dx \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{(m+M)(b-a)}{4ab} \int_0^1 \mu(t) dt \right| \\ & \leq \frac{(b-a)(M-m)}{2ab} \|w\|_q \int_0^1 \left| t - \frac{1}{2} \right|^q dt \end{aligned} \quad (3.40)$$

eşitsizliği, elde edilir.

Teorem 3.4.3 $f: I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ I° 'da diferansiyellenebilir bir dönüşüm $a, b \in I^\circ$ ve $a < b$ olmak üzere $w: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $2ab/(a+b)$ 'ye göre harmonik-simetrik ve diferansiyellenebilir bir dönüşüm olsun. Eğer $|f'|$ $[a, b]$ üzerinde harmonik konveks bir dönüşüm ise

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{ab}{b-a} \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} \int_a^b \frac{w(x)}{x^2} dx - \int_a^b \frac{f(x)w(x)}{x^2} dx \right) \right| \\
& \leq ab(b-a) \int_a^{2ab/(a+b)} \frac{w(x)}{x^2} [A(x)|f'(a)| + B(x)|f'(b)|] dx
\end{aligned} \tag{3.41}$$

burada; $A(x)$ ve $B(x)$,

$$\begin{aligned}
A(x) &= \int_0^{(\frac{1}{a}-\frac{1}{x})/(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})} \frac{t}{(tb+(1-t)a)^2} dt + \int_0^{(\frac{1}{a}-\frac{1}{x})/(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})} \frac{1-t}{((1-t)b+ta)^2} dt, \\
B(x) &= \int_0^{(\frac{1}{a}-\frac{1}{x})/(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})} \frac{1-t}{(tb+(1-t)a)^2} dt + \int_0^{(\frac{1}{a}-\frac{1}{x})/(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})} \frac{t}{((1-t)b+ta)^2} dt
\end{aligned}$$

olmak üzere, (3.41) eşitsizliği sağlanır [22].

İspat: $\mu(t)$ ' nin tanımı, (3.31), (3.32), (3.34) ve (3.36) ifadelerini kullanırsak

$$\begin{aligned}
& \left| \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} \int_a^b \frac{w(x)}{x^2} dx - \int_a^b \frac{f(x)w(x)}{x^2} dx \right) \right| \\
& \leq \frac{(b-a)^2}{2} \left| \int_0^1 \mu(t) \frac{f'(ab/(tb+(1-t)a))}{(tb+(1-t)a)^2} dt \right| \\
& \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_0^1 |\mu(t)| \left| f' \left(\frac{ab}{(tb+(1-t)a)} \right) \right| \frac{dt}{(tb+(1-t)a)^2} \\
& \leq (b-a)^2 \left[\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_t^{\frac{1}{2}} w \left(\frac{ab}{sb+(1-s)a} \right) ds \right) \frac{t|f'(a)| + (1-t)|f'(b)|}{(tb+(1-t)a)^2} dt \right. \\
& \quad \left. + \int_{1/2}^1 \left(\int_{1/2}^t w \left(\frac{ab}{sb+(1-s)a} \right) ds \right) \frac{t|f'(a)| + (1-t)|f'(b)|}{(tb+(1-t)a)^2} dt \right]
\end{aligned}$$

elde edilir ve bu son ifadede integral sırasını değiştirirsek

$$\begin{aligned}
& \left| \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} \int_a^b \frac{w(x)}{x^2} dx - \int_a^b \frac{f(x)w(x)}{x^2} dx \right) \right| \\
& \leq (b-a)^2 \left[\int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^s w \left(\frac{ab}{sb+(1-s)a} \right) \frac{t|f'(a)| + (1-t)|f'(b)|}{(tb+(1-t)a)^2} dt ds \right. \\
& \quad \left. + \int_{1/2}^1 \int_s^1 w \left(\frac{ab}{sb+(1-s)a} \right) \frac{t|f'(a)| + (1-t)|f'(b)|}{(tb+(1-t)a)^2} dt ds \right]
\end{aligned}$$

olur. Son ifadede $x = \frac{ab}{sb+(1-s)a}$ alınırsa, $\frac{1}{x} = s \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \frac{1}{b}$, $s = (\frac{1}{x} - \frac{1}{b}) / (\frac{1}{a} - \frac{1}{b})$

olup; $s = 0$ için $x = b$, $s = 1$ için $x = a$, $s = \frac{1}{2}$ için $x = \frac{2ab}{a+b}$ ve $ds = \frac{ab}{b-a} \frac{-dx}{x^2}$

olacağından, bu değerler yerine yazıldığında

$$= ab(b-a) \left[\int_a^b \int_0^{\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}} \frac{w(x) t |f'(a)| + (1-t) |f'(b)|}{x^2 (tb + (1-t)a)^2} dt dx \right. \\ \left. + \int_a^{\frac{2ab}{a+b}} \int_{\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}}^1 \frac{w(x) t |f'(a)| + (1-t) |f'(b)|}{x^2 (tb + (1-t)a)^2} dt dx \right] \quad (3.42)$$

elde edilir. Ayrıca $w(x)$ fonksiyonu $2ab/(a+b)$ ' ye göre harmonik simetrik olduğuna göre;

$$\begin{cases} I_1 = \int_a^b \int_0^{(\frac{1}{x}-\frac{1}{b})/(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})} \frac{w(x) t |f'(a)| + (1-t) |f'(b)|}{x^2 (tb + (1-t)a)^2} dt dx \\ I_2 = \int_a^{\frac{2ab}{a+b}} \int_{(\frac{1}{x}-\frac{1}{b})/(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})}^1 \frac{w(x) t |f'(a)| + (1-t) |f'(b)|}{x^2 (tb + (1-t)a)^2} dt dx \end{cases}$$

olur. Burada;

$$I_1 = I_2 \quad (3.43)$$

olduğundan ve t yerine $(1-t)$ yazıldığında

$$\begin{cases} \int_{(\frac{1}{x}-\frac{1}{b})/(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})}^1 \frac{t dt}{(tb + (1-t)a)^2} = \int_0^{(\frac{1}{a}-\frac{1}{x})/(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})} \frac{(1-t) dt}{((1-t)b + ta)^2} \\ \int_{(\frac{1}{x}-\frac{1}{b})/(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})}^1 \frac{(1-t) dt}{(tb + (1-t)a)^2} = \int_0^{(\frac{1}{a}-\frac{1}{x})/(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})} \frac{t dt}{((1-t)b + ta)^2} \end{cases} \quad (3.44)$$

eşitlikleri edilir. (3.43) ve (3.44) ifadelerindeki eşitlikleri (3.42) ifadesinde yerine yazarsak ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.4.4 $f: I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ I° ' de diferansiyellenebilir bir fonksiyon $a, b \in I^\circ$ ve $a < b$ olmak üzere $w: [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ (a, b) ' de diferansiyellenebilir bir fonksiyon, f' ve $w \in L[a, b]$ olmak şartıyla bazı $K > 0$ sabiti için f' lipschitz şartını sağlıyorsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{ab}{b-a} \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b \frac{w(x)}{x^2} dx - \int_a^b \frac{f(x)w(x)}{x^2} dx \right) \right. \\ & \left. - \frac{ab(b-a)}{2} \int_0^1 \frac{\mu(t) f'(2ab/(tb + (1-t)a))}{(tb + (1-t)a)^2} dt \right| \\ & \leq \frac{K(b-a)^2 a^2 b^2}{2|a+b|} \int_0^1 |\mu(t)| \left| \frac{1-2t}{(tb + (1-t)a)^3} \right| dt \end{aligned} \quad (3.45)$$

eşitsizliği sağlanır [22].

İspat: (3.36) ifadesini kullanırsak

$$\begin{aligned}
& \frac{ab}{b-a} \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} \int_a^b \frac{w(x)}{x^2} dx - \int_a^b \frac{f(x)w(x)}{x^2} \right) \\
&= \frac{(b-a)ba}{2} \int_0^1 \frac{\mu(t)}{(tb+(1-t)a)^2} \left[f' \left(\frac{ab}{tb-(1-t)a} \right) + f' \left(\frac{2ab}{a+b} \right) \right. \\
&\quad \left. - f' \left(\frac{2ab}{a+b} \right) \right] dt \\
&= \frac{(b-a)ab}{2} \int_0^1 \frac{\mu(t)}{(tb+(1-t)a)^2} \left[f' \left(\frac{ab}{tb-(1-t)a} \right) - f' \left(\frac{2ab}{a+b} \right) \right] dt \\
&+ \frac{(b-a)ba}{2} \int_0^1 \frac{\mu(t)}{(tb+(1-t)a)^2} f' \left(\frac{2ab}{a+b} \right) dt \\
R_1 &= \frac{ab}{b-a} \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} \int_a^b \frac{w(x)}{x^2} dx - \int_a^b \frac{f(x)w(x)}{x^2} \right) \\
&- \frac{(b-a)ba}{2} \int_0^1 \frac{\mu(t)}{(tb+(1-t)a)^2} + f' \left(\frac{2ab}{a+b} \right) dt \tag{3.46}
\end{aligned}$$

$$R_2 = \frac{(b-a)ab}{2} \int_0^1 \frac{\mu(t)}{(tb+(1-t)a)^2} \left[f' \left(\frac{ab}{tb-(1-t)a} \right) - f' \left(\frac{2ab}{a+b} \right) \right] dt \tag{3.47}$$

olmak üzere, (3.46) ifadesinden dolayı $R_1 = R_2$ olacağından $|R_1| = |R_2|$ dir.

Ayrıca $|f'|$ lipschitz koşulunu sağladığından

$$\begin{aligned}
& \left| f' \left(\frac{ab}{tb-(1-t)a} \right) - f' \left(\frac{2ab}{a+b} \right) \right| \leq K \left| \frac{ab}{tb-(1-t)a} - \frac{2ab}{a+b} \right| \\
&= \frac{K(b-a)|ab||1-2t|}{|(a+b)(tb-(1-t)a)|} \tag{3.48}
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.48) ifadesini (3.47) ifadesinde yerine yazarsak,

$$|R_1| = |R_2| \leq \frac{K(b-a)|ab|}{|(a+b)(tb-(1-t)a)|} \frac{(b-a)|ab|}{2} \int_0^1 \frac{|\mu(t)||1-2t|dt}{(tb+(1-t)a)^2}$$

elde edilir. Böylece,

$$|R_1| \leq \frac{K(b-a)^2 a^2 b^2}{|a+b|} \int_0^1 |\mu(t)| \left| \frac{1-2t}{(tb-(1-t)a)^3} \right| dt$$

olacağından ispat tamamlanmış olur.

BÖLÜM 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde elde edilen teorem ve sonuçlar p -konveks fonksiyonlar için yeni olup, özelinde $p = 1$ ve $p = -1$ alındığında 3. bölümdeki teoremlerin tamamı, ayrıca bu ve benzeri çalışmaların daha genel bir hali p -konveks fonksiyonlar için verilmiştir.

Aşağıda p -konveks fonksiyonların Fejér tipli eşitsizlikleri ve yeni sonuçlarını elde etmek için $w: I \subset (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere, w ile bağlantılı; $\mu(t): [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü,

$$\mu(t) = \int_t^1 w([sa^p + (1-s)b^p]^{1/p}) ds - \int_0^t w([sa^p + (1-s)b^p]^{1/p}) ds$$

verilsin. Bu bölümde $\mu(t)$ dönüşümünün bazı özelliklerini içeren teoremi kullanarak belirli şartlar altında p -konveks fonksiyonların Fejér tipli eşitsizliklerle ilgili yeni tahmin ve sonuçlarını elde edeceğiz.

Bölüm boyunca $\mu(t)$ yukarıdaki tanımda verildiği anlamda kullanılmıştır.

Teorem 4.1.1 $w: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $[a, b]$ üzerinde integrallenebilir ve $\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{1/p}$, ye göre p -simetrik bir fonksiyon olsun. $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ olmak üzere aşağıdaki eşitlik ve eşitsizlikler sağlanır.

$$a. \mu(t) = \begin{cases} 2 \int_t^{1/2} w([sa^p + (1-s)b^p]^{1/p}) ds & , \quad 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ 0 & , \quad t = \frac{1}{2} \\ -2 \int_t^{1/2} w([sa^p + (1-s)b^p]^{1/p}) ds & , \quad \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases} \quad (4.1)$$

$$b. \forall t \in [0,1] \mu(t) + \mu(1-t) = 0 \quad (4.2)$$

c. Eğer w negatif değil ise

$$\begin{cases} \mu(t) \geq 0 & , \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \mu(t) \leq 0 & , \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (4.3)$$

d. Eğer w negatif değil ise

$$\begin{cases} \int_0^1 |\mu(t)| dt \leq \frac{1}{2} \|w\|_\infty \\ \int_0^1 |\mu(t)| dt \leq 2 \|w\|_q \int_0^1 \left|t - \frac{1}{2}\right|^k dt, \quad \frac{1}{k} + \frac{1}{q} = 1, \quad 1 < k < \infty \end{cases} \quad (4.4)$$

İspat:

a. $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ için $u = [ta^p + (1-t)b^p]^{1/p}$ olmak üzere $\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{1/p} \leq u \leq b$

$\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ için $u = [ta^p + (1-t)b^p]^{1/p}$ olmak üzere $a \leq u \leq \left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{1/p}$

olacağından, $x = [sa^p + (1-s)b^p]^{1/p}$ değişken değişimi yapılırsa;

$s = t$ için $x = u$, $s = 1$ için $x = a$, $s = \frac{1}{2}$ için $x = \left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{1/p}$

$s=0$ için $x = b$, $ds = \frac{a^p - b^p}{p} \frac{dx}{x^{1-p}}$ olacağından,

$$\mu(t) = \int_t^1 w([sa^p + (1-s)b^p]^{1/p}) ds - \int_0^t w([sa^p + (1-s)b^p]^{1/p}) ds$$

$w(x)$ fonksiyonu $\left[\frac{a^p + b^p}{2}\right]^{1/p}$, 'ye göre p - simetrik olduğundan

$$w([sa^p + (1-s)b^p]^{1/p}) = w([sb^p + (1-s)a^p]^{1/p}) \quad (4.5)$$

$\int_1^t w([sa^p + (1-s)b^p]^{1/p}) ds$ ifadesinde,

$s = 1 - s'$ yazılırsa,

$$\int_1^t w([sa^p + (1-s)b^p]^{1/p}) ds = \int_{1-t}^0 w([s'b^p + (1-s')a^p]^{1/p}) ds'$$

buradan;

$$\int_1^t w([sa^p + (1-s)b^p]^{1/p}) ds = \int_{1-t}^0 w([sb^p + (1-s)a^p]^{1/p}) ds$$

elde edilir. (4.5) ifadeden dolayı

$$\int_{1-t}^0 w([sb^p + (1-s)a^p]^{1/p}) ds = \int_{1-t}^0 w([sa^p + (1-s)b^p]^{1/p}) ds \quad (4.6)$$

olur. Buradan;

$$\int_1^t w([sa^p + (1-s)b^p]^{1/p}) ds = \int_{1-t}^0 w([sa^p + (1-s)b^p]^{1/p}) ds$$

olur. Bu son ifadede $t = \frac{1}{2}$ yazılırsa

$$\int_{1/2}^1 w([sa^p + (1-s)b^p]^{1/p}) ds = \int_{1/2}^0 w([sa^p + (1-s)b^p]^{1/p}) ds$$

elde edilir. Ayrıca $x = [sa^p + (1-s)b^p]^{1/p}$ değişken değişimi yapılırsa

$$\int_a^{\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{1/p}} \frac{w(x)}{x^{1-p}} dx = \int_{\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{1/p}}^b \frac{w(x)}{x^{1-p}} dx \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} & \int_t^1 w([sa^p + (1-s)b^p]^{1/p}) ds - \int_0^t w([sa^p + (1-s)b^p]^{1/p}) ds \\ &= \frac{b^p - a^p}{p} \left[\int_a^u \frac{w(x)}{x^{1-p}} - \int_u^b \frac{w(x)}{x^{1-p}} dx \right] \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \int_a^u \frac{w(x)}{x^{1-p}} dx &= \int_a^{\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{1/p}} \frac{w(x)}{x^{1-p}} dx + \int_{\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{1/p}}^u \frac{w(x)}{x^{1-p}} dx \\ \int_a^u \frac{w(x)}{x^{1-p}} dx &= \int_{\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{1/p}}^b \frac{w(x)}{x^{1-p}} dx + \int_{\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{1/p}}^u \frac{w(x)}{x^{1-p}} dx \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\int_{\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{1/p}}^b \frac{w(x)}{x^{1-p}} dx = \int_{\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{1/p}}^u \frac{w(x)}{x^{1-p}} + \int_u^b \frac{w(x)}{x^{1-p}} dx \quad (4.10)$$

elde edilir. (4.9) ve (4.10) ifadelerinde verilen eşitlikler (4.8) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{b^p - a^p}{p} \left[\int_a^u \frac{w(x)}{x^{1-p}} - \int_u^b \frac{w(x)}{x^{1-p}} dx \right] &= 2 \frac{b^p - a^p}{p} \int_{\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{1/p}}^u \frac{w(x)}{x^{1-p}} dx \\ &= 2 \int_t^{1/2} w([sa^p + (1-s)b^p]^{1/p}) ds \end{aligned}$$

elde edilir. Aynı argümanları kullanarak (a)'nın ikinci kısmını da benzer şekilde elde ederiz. $\mu\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ olup integral sonucunu etkilemeyeceğinden (a)'nın birinci ve ikinci kısmında $t = \frac{1}{2}$ için sınırlar $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ alınabilir.

b.

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \begin{cases} 2 \int_t^{1/2} w([sa^p + (1-s)b^p]^{1/p}) ds & , \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ -2 \int_{1/2}^t w([sa^p + (1-s)b^p]^{1/p}) ds & , \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \\ \mu(1-t) &= \begin{cases} 2 \int_{1/2}^t w([sa^p + (1-s)b^p]^{1/p}) ds & , \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ -2 \int_t^{1/2} w([sa^p + (1-s)b^p]^{1/p}) ds & , \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

olacağından $\forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ ve $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ için $\mu(t) + \mu(1-t) = 0$ kolayca görülür.

c. w fonksiyonu negatif olmadığından

$$\forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \text{ için } \mu(t) = 2 \int_t^{1/2} w([sa^p + (1-s)b^p]^{1/p}) ds \geq 0$$

$$\forall t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \text{ için } \mu(t) = -2 \int_t^{1/2} w([sa^p + (1-s)b^p]^{1/p}) ds \leq 0$$

eşitsizlikleri kolayca görülür.

d. w fonksiyonu negatif olmadığından

$$\begin{aligned} \int_0^1 |\mu(t)| dt &= \int_0^{1/2} \mu(t) dt - \int_{1/2}^1 \mu(t) dt \left\{ t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \text{ için } \mu(t) \leq 0 \right\} \\ &= 2 \int_0^{1/2} \left(\int_t^{1/2} w([sa^p + (1-s)b^p]^{1/p}) ds \right) dt \\ &\quad + 2 \int_{1/2}^1 \left(\int_{1/2}^t w([sa^p + (1-s)b^p]^{1/p}) ds \right) dt \quad (4.11) \\ &= 2 \int_0^{1/2} \left(\int_t^{1/2} \sup_{s \in [0, \frac{1}{2}]} |w([sa^p + (1-s)b^p]^{1/p})| ds \right) dt \\ &\quad + 2 \int_{1/2}^1 \left(\int_{1/2}^t \sup_{s \in [\frac{1}{2}, 1]} |w([sa^p + (1-s)b^p]^{1/p})| ds \right) dt \\ &\leq 2 \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{2} - t \right) \|w\|_\infty dt + 2 \int_{1/2}^1 \left(t - \frac{1}{2} \right) \|w\|_\infty dt = 2 \|w\|_\infty \int_0^1 \left| t - \frac{1}{2} \right| dt \\ &= \frac{1}{2} \|w\|_\infty \quad (4.12) \end{aligned}$$

e. $\frac{1}{k} + \frac{1}{q} = 1$ ve $1 < q < \infty$ olmak üzere,

$$\int_0^1 |\mu(t)| dt = 2 \int_0^1 \left| \int_t^{1/2} w([sa^p + (1-s)b^p]^{1/p}) ds \right| dt \quad (4.13)$$

$\mu(t)$ ' nin tanımı, (4.11) ifadesi ve Hölder' in integral eşitsizliğini kullanırsak,

$$\begin{aligned} &\left| \int_t^{1/2} \int_{1/2}^t w([sa^p + (1-s)b^p]^{1/p}) ds \right| \\ &\leq \left| \int_t^{1/2} ds \right|^{1/k} \left(\int_t^{1/2} |w([sa^p + (1-s)b^p]^{1/p})|^q dt \right)^{1/q} \end{aligned}$$

$$\leq \left| t - \frac{1}{2} \right|^{1/k} \|w\|_q$$

elde edilir. Bu son eşitsizlik (4.13) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\int_0^1 |\mu(t)| dt \leq 2 \|w\|_q \int_0^1 \left| t - \frac{1}{2} \right|^{1/k} dt \quad (4.14)$$

olur.

Teorem 4.1.2 $f: I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ I° da diferansiyellenebilir bir fonksiyon $a, b \in I^\circ$, $a < b$, $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ olsun. Eğer $f' \in L[a, b]$ ve $w: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrallenebilir birer dönüşüm ise

$$\begin{aligned} & \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b \frac{w(x)}{x^{1-p}} dx - \int_a^b \frac{f(x)w(x)}{x^{1-p}} dx \\ &= \frac{(b^p - a^p)^2}{2p^2} \int_0^1 \frac{\mu(t)}{[ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}} f'([ta^p + (1-t)b^p]^{1/p}) dt \end{aligned} \quad (4.15)$$

eşitliği elde edilir.

İspat: (4.15) ifadesinin sağ tarafını ve $\mu(t)$ 'nin tanımını kullanırsak,

$$\begin{aligned} T &= \frac{(b^p - a^p)^2}{2p^2} \int_0^1 \frac{\mu(t)}{[ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}} f'([ta^p + (1-t)b^p]^{1/p}) dt \\ &= \frac{(b^p - a^p)^2}{2p^2} \int_0^1 \left(\int_t^1 w([sa^p + (1-s)b^p]^{1/p}) ds \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t w([sa^p + (1-s)b^p]^{1/p}) ds \right) \frac{f'([ta^p + (1-t)b^p]^{1/p})}{[ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}} dt \\ T &= \frac{(b^p - a^p)^2}{2p^2} \int_0^1 \left(\int_t^1 w([sa^p + (1-s)b^p]^{1/p}) ds \right) \frac{f'([ta^p + (1-t)b^p]^{1/p})}{[ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}} dt \\ &\quad - \frac{(b^p - a^p)^2}{2p^2} \int_0^1 \left(\int_t^1 w([sa^p + (1-s)b^p]^{1/p}) ds \right) \frac{f'([ta^p + (1-t)b^p]^{1/p})}{[ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}} dt \\ T_1 &= \frac{(b^p - a^p)^2}{2p^2} \int_0^1 \left(\int_t^1 w([sa^p + (1-s)b^p]^{1/p}) ds \right) \frac{f'([ta^p + (1-t)b^p]^{1/p})}{[ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}} dt \\ T_2 &= \frac{(b^p - a^p)^2}{2p^2} \int_0^1 \left(\int_t^1 w([sa^p + (1-s)b^p]^{1/p}) ds \right) \frac{f'([ta^p + (1-t)b^p]^{1/p})}{[ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}} dt \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$T = T_1 - T_2 \text{ olur.} \quad (4.16)$$

Kısmî(parçalı)integrasyon uygularsak;

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{(b^p - a^p)^2}{2p^2} \left[\frac{p}{a^p - b^p} \int_t^1 w \left([sa^p + (1-s)b^p]^{\frac{1}{p}} \right) ds f \left([ta^p + (1-t)b^p]^{\frac{1}{p}} \right) \right] \Bigg|_0^1 \\ &\quad + \frac{p}{a^p - b^p} \int_0^1 w \left([sa^p + (1-s)b^p]^{\frac{1}{p}} \right) \cdot f \left([ta^p + (1-t)b^p]^{\frac{1}{p}} \right) dt \\ T_1 &= \frac{(b^p - a^p)^2}{2p^2} \left[\frac{p^2}{(a^p - b^p)^2} f(b) \int_a^b \frac{w(x)}{x^{1-p}} dx - \frac{p^2}{(a^p - b^p)^2} \int_a^b \frac{f(x)w(x)}{x^{1-p}} dx - \right] \\ T_1 &= \frac{(b^p - a^p)^2}{2p^2} \left[\frac{p^2}{(a^p - b^p)^2} f(b) \int_a^b \frac{w(x)}{x^{1-p}} dx - \frac{p^2}{(a^p - b^p)^2} \int_a^b \frac{f(x)w(x)}{x^{1-p}} dx \right] \\ T_1 &= \frac{1}{2} \left[f(b) \int_a^b \frac{w(x)}{x^{1-p}} dx - \int_a^b \frac{f(x)w(x)}{x^{1-p}} dx \right] \end{aligned} \quad (4.17)$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{(b^p - a^p)^2}{2p^2} \left[\frac{p}{a^p - b^p} \int_0^t w \left([sa^p + (1-s)b^p]^{\frac{1}{p}} \right) ds f \left([ta^p + (1-t)b^p]^{\frac{1}{p}} \right) \right] \Bigg|_0^1 \\ &\quad - \frac{p}{a^p - b^p} \int_0^1 w \left([sa^p + (1-s)b^p]^{\frac{1}{p}} \right) \cdot f \left([ta^p + (1-t)b^p]^{\frac{1}{p}} \right) dt \\ T_2 &= \frac{(b^p - a^p)^2}{2p^2} \left[\frac{p^2}{(a^p - b^p)^2} f(a) \int_a^b \frac{w(x)}{x^{1-p}} dx - \frac{p^2}{(a^p - b^p)^2} \int_a^b \frac{f(x)w(x)}{x^{1-p}} dx \right] \\ T_2 &= \frac{(b^p - a^p)^2}{2p^2} \left[-\frac{p^2}{(a^p - b^p)^2} f(a) \int_a^b \frac{w(x)}{x^{1-p}} dx - \frac{p^2}{(a^p - b^p)^2} \int_a^b \frac{f(x)w(x)}{x^{1-p}} dx \right] \\ T_2 &= \frac{1}{2} \left[-f(a) \int_a^b \frac{w(x)}{x^{1-p}} dx - \int_a^b \frac{f(x)w(x)}{x^{1-p}} dx \right] \end{aligned} \quad (4.18)$$

elde edilir. (4.17) ve (4.18) ifadelerindeki eşitlikleri (4.16) ifadesinde yerine yazarsak ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.3 $f: I \subset (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ I° da diferansiyellenebilir bir fonksiyon $a, b \in I$, $a < b$, $|f'|$, $[a, b]$ üzerinde p -konveks bir fonksiyon ve $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ olsun. Eğer $w: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\left[\frac{a^p + b^p}{2} \right]^{1/p}$, ye göre p -simetrik, integrallenebilir ve negatif olmayan bir dönüşüm ise

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b \frac{w(x)}{x^{1-p}} dx - \int_a^b \frac{f(x)w(x)}{x^{1-p}} dx \right|$$

$$\leq \frac{b^p - a^p}{p} \int_a^{\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{1/p}} \frac{w(x)}{x^{1-p}} [A_1(x)|f'(a)| + A_2(x)|f'(b)|] dx \quad (4.19)$$

olur. Burada, $A_1(x)$ ve $A_2(x)$;

$$\begin{cases} A_1(x) = \int_0^{\frac{x^p-a^p}{b^p-a^p}} \frac{tdt}{[ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}} + \int_0^{\frac{x^p-a^p}{b^p-a^p}} \frac{(1-t)dt}{[tb^p + (1-t)a^p]^{1-\frac{1}{p}}} \\ A_2(x) = \int_0^{\frac{x^p-a^p}{b^p-a^p}} \frac{(1-t)dt}{[ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}} + \int_0^{\frac{x^p-a^p}{b^p-a^p}} \frac{tdt}{[tb^p + (1-t)a^p]^{1-\frac{1}{p}}} \end{cases}$$

alınmıştır.

İspat: (4.15) eşitliğinin her iki tarafının mutlak değerini aldığımızda,

$$\begin{aligned} L &= \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b \frac{w(x)}{x^{1-p}} dx - \int_a^b \frac{f(x)w(x)}{x^{1-p}} dx \right| \\ &= \frac{(b^p - a^p)^2}{2p^2} \left| \int_0^1 \frac{\mu(t)}{[ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}} f'([ta^p + (1-t)b^p]^{1/p}) dt \right| \\ L &\leq \frac{(b^p - a^p)^2}{2p^2} \int_0^1 |\mu(t)| \left| f'([ta^p + (1-t)b^p]^{1/p}) \right| \frac{dt}{[ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}} \end{aligned}$$

elde edilir. (4.11) ifadesi ve $|f'|$ 'nin konveksliğini kullanarak

$$\begin{aligned} L &\leq \left(\frac{b^p - a^p}{p} \right)^2 \\ &\times \left[\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_t^{\frac{1}{2}} w([sa^p + (1-s)b^p]^{1/p}) ds \right) \frac{(t|f'(a)| + (1-t)|f'(b)|)}{[ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}} dt \right. \\ &\left. + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_{\frac{1}{2}}^t w([ta^p + (1-t)b^p]^{1/p}) ds \right) \frac{(t|f'(a)| + (1-t)|f'(b)|)}{[ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}} dt \right] \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu son ifadede integral sırasını değiştirirsek,

$$\begin{aligned} L &\leq \left(\frac{b^p - a^p}{p} \right)^2 \\ &\times \left[\int_0^{1/2} \int_0^s w([sa^p + (1-s)b^p]^{1/p}) \frac{(t|f'(a)| + (1-t)|f'(b)|)}{[ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}} dt ds \right. \\ &\left. + \int_{1/2}^1 \int_s^1 w([sa^p + (1-s)b^p]^{1/p}) \frac{(t|f'(a)| + (1-t)|f'(b)|)}{[ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}} dt ds \right] \end{aligned}$$

$$L \leq \frac{b^p - a^p}{p} \times \left[\int_{\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}}^b \int_0^{\frac{b^p-x^p}{b^p-a^p}} \frac{w(x) (t|f'(a)| + (1-t)|f'(b)|)}{x^{1-p} [ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}} dt ds \right. \\ \left. \int_a^{\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}} \int_{\frac{b^p-x^p}{b^p-a^p}}^1 \frac{w(x) (t|f'(a)| + (1-t)|f'(b)|)}{x^{1-p} [ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}} dt ds \right] \quad (4.20)$$

elde edilir. Son eşitsizlikteki integraller,

$$I_1 = \int_{\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}}^b \int_0^{\frac{b^p-x^p}{b^p-a^p}} \frac{w(x) (t|f'(a)| + (1-t)|f'(b)|)}{x^{1-p} [ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}} ds dt \\ I_2 = \int_a^{\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}} \int_0^{\frac{x^p-a^p}{b^p-a^p}} \frac{w(x) (t|f'(a)| + (1-t)|f'(b)|)}{x^{1-p} [ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}} ds dt \quad (4.21)$$

şeklinde kısaltılıp ve $w(x)$ fonksiyonunun $\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{1/p}$, ye göre p -simetrik olduğunu gözönüne alırsak, $I_1 = I_2$ olduğu kolayca görülebilir. Böylece

$$\int_{\frac{b^p-x^p}{b^p-a^p}}^1 \frac{tdt}{[ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}} = \int_0^{\frac{x^p-a^p}{b^p-a^p}} \frac{(1-t)dt}{[tb^p + (1-t)a^p]^{1-\frac{1}{p}}} \\ \int_{\frac{b^p-x^p}{b^p-a^p}}^1 \frac{(1-t)dt}{[ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}} = \int_0^{\frac{x^p-a^p}{b^p-a^p}} \frac{tdt}{[tb^p + (1-t)a^p]^{1-\frac{1}{p}}} \quad (4.22)$$

elde edilir. Son olarak (4.21), (4.22) ve (4.23) ifadeleri (4.20) ifadesinde yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.1 (4.19) ifadesinde;

- a. $p = 1$ ve $w(x) = 1$ alırsak (3.9) eşitsizliğini,
- b. $p = 1$ alırsak (3.21) eşitsizliğini,
- c. $p = -1$ alırsak (3.41) eşitsizliğini

elde ederiz.

Teorem 4.1.4 $f: I \subset (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ I° da diferansiyellenebilir bir fonksiyon $a, b \in I$, $a < b$, $|f'|$, $[a, b]$ üzerinde p -konveks bir fonksiyon ve $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ olsun. Eğer $w: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrallenebilir ve negatif olmayan bir dönüşüm ise

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b \frac{w(x)}{x^{1-p}} dx - \int_a^b \frac{f(x)w(x)}{x^{1-p}} dx \right| \\ \leq \frac{(b^p - a^p)^2}{2p^2} \|w\|_\infty [B_1(p)|f'(a)| + B_2(p)|f'(b)|] \quad (4.23)$$

dir. Burada, $B_1(p)$ ve $B_2(p)$;

$$\begin{cases} B_1(p) = \int_0^{1/2} \frac{(t - 2t^2)dt}{[ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}} + \int_{1/2}^1 \frac{(2t^2 - t)dt}{[tb^p + (1-t)a^p]^{1-\frac{1}{p}}} \\ B_2(p) = \int_0^{1/2} \frac{(2t^2 - 3t + 1)dt}{[ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}} + \int_{1/2}^1 \frac{(-2t^2 + 3t - 1)dt}{[tb^p + (1-t)a^p]^{1-\frac{1}{p}}} \end{cases}$$

alınmıştır.

İspat: (4.15) ifadesinde her iki tarafın mutak değerini alırsak,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b \frac{w(x)}{x^{1-p}} dx - \int_a^b \frac{f(x)w(x)}{x^{1-p}} dx \right| \\ &= \frac{(b^p - a^p)^2}{2p^2} \left| \int_0^1 \frac{\mu(t)}{[ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}} f'([ta^p + (1-t)b^p]^{1/p}) dt \right| \end{aligned}$$

olur.

$$H = \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b \frac{w(x)}{x^{1-p}} dx - \int_a^b \frac{f(x)w(x)}{x^{1-p}} dx \right| \text{ olmak üzere,}$$

$$H \leq \frac{(b^p - a^p)^2}{2p^2} \int_0^1 |\mu(t)| \left| f'([ta^p + (1-t)b^p]^{1/p}) \right| \frac{dt}{[ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}}$$

olacağından ve (4.12) ifadesinden

$$\int_0^1 |\mu(t)| dt \leq 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - t \right) \|w\|_{\infty} dt + 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(t - \frac{1}{2} \right) \|w\|_{\infty} dt$$

eşitsizliğini elde edebiliriz. Bu ifadeyi bir önceki eşitsizlikte yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} H &\leq \frac{(b^p - a^p)^2}{2p^2} \|w\|_{\infty} \times \\ &\left(\int_0^{1/2} \frac{(1-2t)}{[ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}} \left| f'([ta^p + (1-t)b^p]^{1/p}) \right| dt \right. \\ &\quad \left. + \int_{1/2}^1 \frac{(2t-1)}{[tb^p + (1-t)a^p]^{1-\frac{1}{p}}} \left| f'([tb^p + (1-t)a^p]^{1/p}) \right| dt \right) \quad (4.24) \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $|f'|$ $[a, b]$ üzerinde p -konveks olduğundan gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$H \leq \frac{(b^p - a^p)^2}{2p^2} \|w\|_\infty \times \left[\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1-2t)(t|f'(a)| + (1-t)|f'(b)|)dt}{[ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{(2t-1)(t|f'(a)| + (1-t)|f'(b)|)dt}{[tb^p + (1-t)a^p]^{1-\frac{1}{p}}} \right]$$

$$H \leq \frac{(b^p - a^p)^2}{2p^2} \|w\|_\infty$$

$$\times \left[\left(\int_0^{1/2} \frac{(t-2t^2)dt}{[ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}} \int_{1/2}^1 \frac{(2t^2-t)dt}{[tb^p + (1-t)a^p]^{1-\frac{1}{p}}} \right) |f'(a)| + \left(\int_0^{1/2} \frac{(2t^2-3t+1)dt}{[ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}} \int_{1/2}^1 \frac{(-2t^2+3t-1)dt}{[tb^p + (1-t)a^p]^{1-\frac{1}{p}}} \right) |f'(b)| \right]$$

olacağından ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.2 (4.23) ifadesinde;

a. $p = 1$ ve $w(x) = 1$ alırsak $B_1(1) = \frac{1}{4}$, $B_2(1) = \frac{1}{4}$ olup

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{(b-a)}{8} (|f'(a)| + |f'(b)|)$$

eşitsizliğini,

b. $p = 1$ alırsak

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b w(x)dx - \int_a^b f(x)w(x)dx \right| \leq \frac{(b-a)^2}{8} \|w\|_\infty (|f'(a)| + |f'(b)|)$$

eşitsizliğini,

c. $p = -1$ ve $w(x) = 1$ alırsak

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{ab}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{(b-a)}{2ab} [(B_1(-1)|f'(a)| + B_2(-1)|f'(b)|)]$$

eşitsizliğini,

d. $p = -1$ alırsak

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b \frac{w(x)}{x^2} dx - \int_a^b \frac{f(x)w(x)}{x^2} dx \right|$$

$$\leq \frac{1}{2} \left(\frac{b-a}{ab} \right)^2 \|w\|_{\infty} [(B_1(-1)|f'(a)| + B_2(-1)|f'(b)|)]$$

eşitsizliğini,

e. $w(x) = 1$ alırsak

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{p}{b^p - a^p} \int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}} dx \right|$$

$$\leq \left(\frac{b^p - a^p}{2p} \right) [(B_1(p)|f'(a)| + B_2(p)|f'(b)|)]$$

eşitsizliğini , elde ederiz.

Teorem 4.1.5 $f: I \subset (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, I° da diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $w: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrallenebilir ve negatif olmayan bir dönüşüm $a, b \in I^{\circ}$ $a < b$, $q \geq 1$, $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ olsun. Eğer $|f'|^q$ $[a, b]$ üzerinde p -konveks bir fonksiyon ise

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b \frac{w(x)}{x^{1-p}} dx - \int_a^b \frac{f(x)w(x)}{x^{1-p}} dx \right|$$

$$\leq \frac{(b^p - a^p)^2}{2p^2} \|w\|_{\infty} \left[\left((C_1(p))^{1-\frac{1}{q}} [C_2(p)|f'(a)|^q + C_3(p)|f'(b)|^q]^{1/q} \right. \right.$$

$$\left. \left. + (C_4(p))^{1-\frac{1}{q}} [C_5(p)|f'(a)|^q + C_6(p)|f'(b)|^q]^{1/q} \right) \right] \quad (4.25)$$

dir. Burada, $C_1(p)$, $C_2(p)$, $C_3(p)$, $C_4(p)$, $C_5(p)$, $C_6(p)$;

$$C_1(p) = \int_0^{1/2} \frac{(1-2t)dt}{[ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}}, \quad C_2(p) = \int_0^{1/2} \frac{(t-2t^2)dt}{[ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}}$$

$$C_3(p) = \int_0^{1/2} \frac{(2t^2-3t+1)dt}{[ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}}, \quad C_4(p) = \int_{1/2}^1 \frac{(2t-1)dt}{[tb^p + (1-t)a^p]^{1-\frac{1}{p}}}$$

$$C_5(p) = \int_{1/2}^1 \frac{(2t^2-t)dt}{[tb^p + (1-t)a^p]^{1-\frac{1}{p}}}, \quad C_6(p) = \int_{1/2}^1 \frac{(-2t^2+3t-1)dt}{[tb^p + (1-t)a^p]^{1-\frac{1}{p}}}$$

alınmıştır.

İspat: $|f'|^q$, nin p -konveksliği, Power Mean eşitsizliği ve (4.24) ifadesini kullanırsak,

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b \frac{w(x)}{x^{1-p}} dx - \int_a^b \frac{f(x)w(x)}{x^{1-p}} dx \right|$$

$$\leq \frac{(b^p - a^p)^2}{2p^2} \|w\|_\infty \left[\int_0^{1/2} \frac{(1-2t)}{[ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}} \left| f' \left([ta^p + (1-t)b^p]^{\frac{1}{p}} \right) \right| dt \right. \\ \left. + \int_{1/2}^1 \frac{(2t-1)}{[tb^p + (1-t)a^p]^{1-\frac{1}{p}}} \left| f' \left([ta^p + (1-t)b^p]^{\frac{1}{p}} \right) \right| dt \right]$$

$$\leq \frac{(b^p - a^p)^2}{2p^2} \|w\|_\infty \times$$

$$\left\{ \left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1-2t)dt}{[ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}} \right)^{1-\frac{1}{q}} \times \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1-2t)dt}{[ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}} \left| f' \left([ta^p + (1-t)b^p]^{\frac{1}{p}} \right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right] + \right. \\ \left. \left[\left(\int_{1/2}^1 \frac{(2t-1)dt}{[tb^p + (1-t)a^p]^{1-\frac{1}{p}}} \right)^{1-\frac{1}{q}} \times \left(\int_{1/2}^1 \frac{(2t-1)dt}{[tb^p + (1-t)a^p]^{1-\frac{1}{p}}} \left| f' \left([ta^p + (1-t)b^p]^{\frac{1}{p}} \right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right] \right\}$$

$$\leq \frac{(b^p - a^p)^2}{2p^2} \|w\|_\infty \times$$

$$\left\{ \left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1-2t)dt}{[ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}} \right)^{1-\frac{1}{q}} \times \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1-2t)dt}{[ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}} [t|f'(a)|^q + (1-t)|f'(b)|^q] \right)^{\frac{1}{q}} \right] + \right. \\ \left. \left[\left(\int_{1/2}^1 \frac{(2t-1)dt}{[tb^p + (1-t)a^p]^{1-\frac{1}{p}}} \right)^{1-\frac{1}{q}} \times \left(\int_{1/2}^1 \frac{(2t-1)dt}{[tb^p + (1-t)a^p]^{1-\frac{1}{p}}} [t|f'(a)|^q + (1-t)|f'(b)|^q] \right)^{\frac{1}{q}} \right] \right\}$$

olur. Gerekli düzenleme ve sadeleştirmeler yapılırsa

$$\frac{(b^p - a^p)^2}{2p^2} \|w\|_\infty \times$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1-2t)dt}{[ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}} \right)^{1-\frac{1}{q}} \times \\ & \left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(t-2t^2)dt}{[ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}} \right) |f'(a)|^q + \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(2t^2-3t+1)dt}{[ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}} \right) |f'(b)|^q \right]^{\frac{1}{q}} \\ & + \\ & \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{(2t-1)dt}{[ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}} \right)^{1-\frac{1}{q}} \times \\ & \left[\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{(2t^2-t)dt}{[ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}} \right) |f'(a)|^q + \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{(-2t^2+3t-1)dt}{[ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}} \right) |f'(b)|^q \right]^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \right\}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.3 (4.25) ifadesinde;

a. $p = 1$ ve $w(x) = 1$ alırsak konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli,

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{(b-a)}{8} \left(\frac{1}{6} \right)^{\frac{1}{q}} \left([5|f'(a)|^q + |f'(b)|^q]^{\frac{1}{q}} + [|f'(a)|^q + 5|f'(b)|^q]^{\frac{1}{q}} \right)$$

eşitsizliğini ve bu ifadede $q = 1$ alırsak (3.10) ifadesini elde ederiz.

b. $p = 1$ alırsak konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejer tipli,

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b w(x) dx - \int_a^b f(x) w(x) dx \right| \leq \frac{(b-a)^2}{8} \left(\frac{1}{6} \right)^{\frac{1}{q}} \|w\|_\infty \left([5|f'(a)|^q + |f'(b)|^q]^{\frac{1}{q}} + [|f'(a)|^q + 5|f'(b)|^q]^{\frac{1}{q}} \right)$$

eşitsizliğini elde ederiz.

c. $p = -1$ ve $w(x) = 1$ alırsak harmonik konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli ,

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx \right| \leq$$

$$\frac{(b-a)}{2ab} \left[(C_1(-1))^{1-\frac{1}{q}} [C_2(-1)|f'(a)|^q + C_3(-1)|f'(b)|^q]^{1/q} \right. \\ \left. + (C_4(-1))^{1-\frac{1}{q}} [C_5(-1)|f'(a)|^q + C_6(-1)|f'(b)|^q]^{1/q} \right]$$

eşitsizliğini elde ederiz.

- d. $p = -1$ alırsak harmonik konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejer tipli,

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b \frac{w(x)}{x^2} dx - \int_a^b \frac{w(x)f(x)}{x^2} dx \right| \leq \\ \frac{1}{2} \left(\frac{b-a}{ab} \right)^2 \|w\|_\infty \left[(C_1(-1))^{1-\frac{1}{q}} [C_2(-1)|f'(a)|^q + C_3(-1)|f'(b)|^q]^{1/q} \right. \\ \left. + (C_4(-1))^{1-\frac{1}{q}} [C_5(-1)|f'(a)|^q + C_6(-1)|f'(b)|^q]^{1/q} \right]$$

eşitsizliğini elde ederiz.

- e. $w(x) = 1$ alırsak p -konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli eşitsizliği

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{p}{b^p - a^p} \int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}} dx \right| \leq \\ \left(\frac{b^p - a^p}{2p} \right) \left((C_1(p))^{1-\frac{1}{q}} [C_2(p)|f'(a)|^q + C_3(p)|f'(b)|^q]^{\frac{1}{q}} \right. \\ \left. + (C_4(p))^{1-\frac{1}{q}} [C_5(p)|f'(a)|^q + C_6(p)|f'(b)|^q]^{\frac{1}{q}} \right)$$

elde edilir.

- f. $q = 1$ alırsak (4.23) ifadesini elde ederiz, bu ifade (4.25) ifadesinin özel bir halidir.

Teorem 4.1.6 $f: I \subset (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ I° da diferansiyellenebilir fonksiyon ve $|f'|^q [a, b]$ üzerinde p -konveks fonksiyon olsun. $a, b \in I^\circ, a < b, q > 1, \frac{1}{k} + \frac{1}{q} = 1$ ve $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ olmak üzere, eğer $f', w \in L[a, b]$ ve w negatif olmayan bir dönüşüm ise

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b \frac{w(x)}{x^{1-p}} dx - \int_a^b \frac{f(x)w(x)}{x^{1-p}} dx \right| \\ \leq \frac{(b^p - a^p)^2}{2p^2} \|w\|_\infty \times \left\{ \begin{aligned} &D_1(p, k) \left[\frac{|f'(a)|^q + 3|f'(b)|^q}{8} \right]^{\frac{1}{q}} + \\ &D_2(p, k) \left[\frac{3|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{8} \right]^{1/q} \end{aligned} \right\} \quad (4.26)$$

dir. Burada, $D_1(p, k)$ ve $D_2(p, k)$;

$$D_1(p, k) = \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{(1-2t)}{[ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}} \right)^k dt \right)^{\frac{1}{k}}$$

$$D_2(p, k) = \left(\int_{1/2}^1 \left(\frac{(2t-1)}{[ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}} \right)^k dt \right)^{\frac{1}{k}}$$

alınmıştır.

İspat: (4.24) ifadesinden,

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b \frac{w(x)}{x^{1-p}} dx - \int_a^b \frac{f(x)w(x)}{x^{1-p}} dx \right| \leq$$

$$\frac{(b^p - a^p)^2}{2p^2} \|w\|_{\infty} \left[\int_0^{1/2} \frac{(1-2t)}{[ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}} \left| f' \left([ta^p + (1-t)b^p]^{\frac{1}{p}} \right) \right| dt \right.$$

$$\left. + \int_{1/2}^1 \frac{(2t-1)}{[tb^p + (1-t)a^p]^{1-\frac{1}{p}}} \left| f' \left([ta^p + (1-t)b^p]^{\frac{1}{p}} \right) \right| dt \right]$$

yazılabilir, Hölder'in integral eşitsizliğini kullanırsak,

$$\leq \frac{(b^p - a^p)^2}{2p^2} \|w\|_{\infty} \times$$

$$\left\{ \left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{(1-2t)}{[ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}} \right)^k dt \right)^{\frac{1}{k}} \times \right]^{\frac{1}{q}} + \left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left| f' \left([ta^p + (1-t)b^p]^{\frac{1}{p}} \right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right]^{\frac{1}{k}} \right\}$$

$$\left\{ \left[\left(\int_{1/2}^1 \left(\frac{(2t-1)}{[ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}} \right)^k dt \right)^{\frac{1}{k}} \times \right]^{\frac{1}{q}} + \left[\left(\int_{1/2}^1 \left| f' \left([ta^p + (1-t)b^p]^{\frac{1}{p}} \right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right]^{\frac{1}{k}} \right\}$$

ve $|f'|^q$ 'nin p -konveksliğinden yararlanarak, integral değerlerini hesaplayıp gerekli düzenlemeleri yaptığımızda,

$$\leq \frac{(b^p - a^p)^2}{2p^2} \|w\|_{\infty} \times$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{(1-2t)}{[ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}} \right)^k dt \right)^{\frac{1}{k}} \times \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left(\frac{|f'(a)|^q + 3|f'(b)|^q}{8} \right)^{\frac{1}{q}} \right] + \right. \\
& \quad \left. \left[\left(\int_{1/2}^1 \left(\frac{(2t-1)}{[ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}} \right)^k dt \right)^{\frac{1}{k}} \times \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left(\frac{3|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{8} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \right] \\
& \leq \frac{(b^p - a^p)^2}{2p^2} \|w\|_{\infty} \times \\
& \quad \left[D_1(p, k) \left(\frac{|f'(a)|^q + 3|f'(b)|^q}{8} \right)^{\frac{1}{q}} + D_2(p, k) \left(\frac{3|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{8} \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.1.4

a. $p = 1$ ve $w(x) = 1$ alırsak konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \\
& \frac{(b-a)}{16} \left(\frac{4}{k+1} \right)^{\frac{1}{k}} \left([|f'(a)|^q + 3|f'(b)|^q]^{\frac{1}{q}} + [3|f'(a)|^q + |f'(b)|^q]^{\frac{1}{q}} \right) \\
& \text{eşitsizliğini,}
\end{aligned}$$

b. $p = 1$ alırsak konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejér tipli,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b w(x) dx - \int_a^b f(x) w(x) dx \right| \leq \\
& \frac{(b-a)^2}{16} \left(\frac{4}{k+1} \right)^{\frac{1}{k}} \|w\|_{\infty} \left([|f'(a)|^q + 3|f'(b)|^q]^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + [3|f'(a)|^q + |f'(b)|^q]^{\frac{1}{q}} \right)
\end{aligned}$$

eşitsizliğini,

c. $p = -1$ ve $w(x) = 1$ alırsak harmonik konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli,

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx \right| \leq$$

$$\frac{(b-a)}{2ab} \left(D_1(-1, k) \left(\frac{|f'(a)|^q + 3|f'(b)|^q}{8} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ \left. + D_2(-1, k) \left(\frac{3|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{8} \right)^{\frac{1}{q}} \right)$$

eşitsizliğini,

- d. $p = -1$ alırsak harmonik konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejér tipli,

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx \right| \leq \\ \frac{1}{2} \left(\frac{b-a}{ab} \right)^2 \|w\|_{\infty} \left(D_1(-1, k) \left(\frac{|f'(a)|^q + 3|f'(b)|^q}{8} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ \left. + D_2(-1, k) \left(\frac{3|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{8} \right)^{\frac{1}{q}} \right)$$

eşitsizliğini,

- e. $w(x) = 1$ alırsak p -konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejér tipli,

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{p}{b^p - a^p} \int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}} dx \right| \leq \\ \left(\frac{b^p - a^p}{2p} \right) \left(D_1(p, k) \left(\frac{|f'(a)|^q + 3|f'(b)|^q}{8} \right)^{\frac{1}{q}} \right) \\ + D_2(p, k) \left(\frac{3|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{8} \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliğini, elde ederiz.

Torem 4.1.7 $f: I \subset (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ I° da diferansiyellenebilir bir fonksiyon $a, b \in I^{\circ}$, $a < b$, $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ olsun $w, f' \in L[a, b]$ ve w negatif olmayan bir dönüşüm olmak üzere, olmak üzere, eğer $|f'|$ dönüşümü bazı $K > 0$ için Lipschitz koşulunu sağlıyorsa

$$\left| \frac{p}{b^p - a^p} \left(\int_a^b \frac{w(x)}{x^{1-p}} dx - \int_a^b \frac{f(x)w(x)}{x^{1-p}} dx \right) - \right. \\ \left. \frac{b^p - a^p}{2p} \int_0^1 \frac{\mu(t) dt}{[ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}} \right) f' \left(\left[\frac{a^p + b^p}{2} \right]^{\frac{1}{p}} \right) \right|$$

$$\leq \frac{K(b^p - a^p)}{2p} \int_0^1 \frac{|\mu(t)|dt}{[ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}} |A_t^{1/p}(a^p, b^p) - M_p| \quad (4.27)$$

dir.

İspat: (4.15) ifadesini kullanıp verilen eşitliği,

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{p}{b^p - a^p} \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b \frac{w(x)}{x^{1-p}} dx - \int_a^b \frac{f(x)w(x)}{x^{1-p}} dx \right) \\ &= \frac{b^p - a^p}{2p} \int_0^1 \frac{\mu(t)dt}{[ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}} f'([ta^p + (1-t)b^p]^{1/p}) \end{aligned}$$

biçiminde yazılabiliriz, ayrıca F_1 eşitliğinin sağ tarafını

$$\begin{aligned} &\frac{b^p - a^p}{2p} \int_0^1 \frac{\mu(t)dt}{[ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}} \left[f'([ta^p + (1-t)b^p]^{1/p}) - f' \left(\left[\frac{a^p + b^p}{2} \right]^{1/p} \right) \right. \\ &\quad \left. + f' \left(\left[\frac{a^p + b^p}{2} \right]^{1/p} \right) \right] \end{aligned}$$

şeklinde yazıp buradan,

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{b^p - a^p}{2p} \times \\ &\int_0^1 \frac{\mu(t)dt}{[ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}} \left[f'([ta^p + (1-t)b^p]^{1/p}) - f' \left(\left[\frac{a^p + b^p}{2} \right]^{1/p} \right) \right] \\ &\quad + \frac{b^p - a^p}{2p} \int_0^1 \frac{\mu(t)dt}{[ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}} f' \left(\left[\frac{a^p + b^p}{2} \right]^{1/p} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitliğin sağ tarafındaki toplamsal kısmı eşitliğinin sol tarafına attığımızda aşağıdaki F_2 eşitliğini elde ederiz.

$$\begin{aligned} F_2 &= \left[\frac{p}{b^p - a^p} \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b \frac{w(x)}{x^{1-p}} dx - \int_a^b \frac{f(x)w(x)}{x^{1-p}} dx \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{b^p - a^p}{2p} \int_0^1 \frac{\mu(t)dt}{[ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}} f' \left(\left[\frac{a^p + b^p}{2} \right]^{1/p} \right) \right] \\ &= \frac{b^p - a^p}{2p} \int_0^1 \frac{\mu(t)dt}{[ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}} \left[f'([ta^p + (1-t)b^p]^{1/p}) \right. \\ &\quad \left. - f' \left(\left[\frac{a^p + b^p}{2} \right]^{1/p} \right) \right] \end{aligned}$$

F_2 eşitliğinin her iki tarafının mutlak değerini alıp,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{p}{b^p - a^p} \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b \frac{w(x)}{x^{1-p}} dx - \int_a^b \frac{f(x)w(x)}{x^{1-p}} dx \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{b^p - a^p}{2p} \int_0^1 \frac{\mu(t)dt}{[ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}} f' \left(\left[\frac{a^p + b^p}{2} \right]^{\frac{1}{p}} \right) \right| \\ &= \left| \frac{b^p - a^p}{2p} \int_0^1 \frac{\mu(t)dt}{[ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}} \left[f'([ta^p + (1-t)b^p]^{1/p}) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - f' \left(\left[\frac{a^p + b^p}{2} \right]^{1/p} \right) \right] \right| \end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Eşitliğin sağ tarafı, f lipschitz koşulunu sağladığından; tanım 2.1.8 kullanarak eşitliği,

$$\begin{aligned} & \left| f'([ta^p + (1-t)b^p]^{1/p}) - f' \left(\left[\frac{a^p + b^p}{2} \right]^{1/p} \right) \right| \\ & \leq K \left| [ta^p + (1-t)b^p]^{\frac{1}{p}} - \left[\frac{a^p + b^p}{2} \right]^{\frac{1}{p}} \right| \end{aligned}$$

biçiminde yazılabiliriz. Bu son eşitsizliği F_2 eşitliğinin sağ tarafında yerine yazıp gerekli düzenlemeleri yaptığımızda,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{p}{b^p - a^p} \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b \frac{w(x)}{x^{1-p}} dx - \int_a^b \frac{f(x)w(x)}{x^{1-p}} dx \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{b^p - a^p}{2p} \int_0^1 \frac{\mu(t)}{[ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}} f' \left(\left[\frac{a^p + b^p}{2} \right]^{\frac{1}{p}} \right) dt \right| \\ & \leq K \left| \frac{b^p - a^p}{2p} \right| \int_0^1 \frac{|\mu(t)|dt}{[ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}} \left| [ta^p + (1-t)b^p]^{1/p} \right. \\ & \quad \left. - \left[\frac{a^p + b^p}{2} \right]^{1/p} \right| \\ &= \frac{K(b^p - a^p)}{2p} \int_0^1 \frac{|\mu(t)|dt}{[ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}} |A_t^{1/p}(a^p, b^p) - M_p| \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.5

a. (4.27) eşitsizliğinin sol tarafını R ile gösterelim bu eşitsizliğin sağ tarafını kullanırsak aşağıdaki biçimde yazabiliriz,

$$\begin{aligned} |R| &\leq \frac{K(b^p - a^p)}{2p} \int_0^1 \frac{|\mu(t)| dt}{[ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}} \left| [ta^p + (1-t)b^p]^{1/p} - \left[\frac{a^p + b^p}{2} \right]^{1/p} \right| \\ &\leq \frac{K(b^p - a^p)}{2p} \int_0^1 \frac{|\mu(t)| dt}{\inf_{t \in [0,1]} [ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}} \left| \sup_{t \in [0,1]} [ta^p + (1-t)b^p]^{1/p} - M_p \right| \end{aligned}$$

buradan,

i. $p > 0$ için $\inf_{t \in [0,1]} [ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}} = a^{p-1}$ ve

$$\sup_{t \in [0,1]} [ta^p + (1-t)b^p]^{\frac{1}{p}} = b$$

olur. (4.12) ifadesini kullanırsak,

$$|R| \leq \frac{K(b^p - a^p) |b - M_p|}{4pa^{p-1}} \|w\|_\infty$$

elde edilir.

ii. $p < 0$ için $\inf_{t \in [0,1]} [ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}} = b^{p-1}$ ve

$$\sup_{t \in [0,1]} [ta^p + (1-t)b^p]^{1/p} = a$$

olur. (4.12) ifadesini kullanırsak,

$$|R| \leq \frac{K(b^p - a^p) |a - M_p|}{4pb^{p-1}} \|w\|_\infty$$

elde edilir.

b. $q > 1$ $\frac{1}{k} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere,

i. $p > 0$ için (4.14) ifadesinden

$$|R| \leq \frac{K(b^p - a^p) |b - M_p|}{pa^{p-1}} \|w\|_q \int_0^1 \left| t - \frac{1}{2} \right|^{1/k} dt$$

elde edilir.

ii. $p < 0$ için (4.14) ifadesinden

$$|R| \leq \frac{K(b^p - a^p)|a - M_p|}{pb^{p-1}} \|w\|_q \int_0^1 \left|t - \frac{1}{2}\right|^{1/k} dt$$

elde edilir.

c. $p = 1$ için (3.29) ifadesini,

d. $p = -1$ için (3.41) ifadesini,

e. $w(x) = 1$ alırsak bununla bağlantılı olarak (4.12) ifadesinden

i. $p > 0$ için

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{p}{b^p - a^p} \int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}} dx \right| \\ & \leq \frac{K(b^p - a^p)[K|b - M_p| + |f'(M_p)|]}{4pa^{p-1}} \end{aligned}$$

ifadesini,

ii. $p < 0$ için

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{p}{b^p - a^p} \int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}} dx \right| \\ & \leq \frac{K(b^p - a^p)[K|a - M_p| + |f'(M_p)|]}{4pb^{p-1}} \end{aligned}$$

ifadesini elde ederiz.

Teorem 4.1.8 $f: I \subset (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ I° da diferansiyellenebilir bir fonksiyon $a, b \in I^\circ$, $a < b$, $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ olsun w , $f' \in L[a, b]$ ve w negatif olmayan bir dönüşüm olmak üzere, eğer $\forall x \in [a, b]$ için $-\infty < m \leq x^{1-p} f'(x) \leq M < \infty$ olacak şekilde $m < M$ sabitleri varsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{p}{b^p - a^p} \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b \frac{w(x)}{x^{1-p}} dx - \int_a^b \frac{f(x)w(x)}{x^{1-p}} dx \right) \right. \\ & \left. - \frac{(b^p - a^p)(M + m)}{4p} \int_0^1 \mu(t) dt \right| \leq \frac{(M - m)(b^p - a^p)}{4p} \int_0^1 |\mu(t)| dt \end{aligned} \quad (4.28)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: (4.15) ifadesinin sağ ve sol tarafını

$$\begin{aligned} L &= \frac{p}{b^p - a^p} \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b \frac{w(x)}{x^{1-p}} dx - \int_a^b \frac{f(x)w(x)}{x^{1-p}} dx \right) \\ T &= \frac{b^p - a^p}{2p} \int_0^1 \frac{\mu(t)}{[ta^p + (1-t)b^p]^{1-\frac{1}{p}}} f'([ta^p + (1-t)b^p]^{1/p}) dt \end{aligned}$$

biçiminde yazılabiliriz. Bu durumda,

$$L = T \quad (4.29)$$

olacağı açıktır.

$$T = \frac{b^p - a^p}{2p} \int_0^1 \mu(t) \left[[(ta^p + (1-t)b^p)^{1/p}]^{1-p} f'([ta^p + (1-t)b^p]^{1/p}) \right] dt$$

$$T = \frac{b^p - a^p}{2p} \int_0^1 \mu(t) \left[[(ta^p + (1-t)b^p)^{1/p}]^{1-p} f'([ta^p + (1-t)b^p]^{1/p}) \right. \\ \left. - \frac{m+M}{2} + \frac{m+M}{2} \right] dt$$

ve bu ifadeyi daha açık bir biçimde yazarsak,

$$T = \left\{ \frac{(b^p - a^p)(m+M)}{4p} \int_0^1 \mu(t) dt + \frac{b^p - a^p}{2p} \times \right. \\ \left. \int_0^1 \mu(t) \left[[(ta^p + (1-t)b^p)^{1/p}]^{1-p} f'([ta^p + (1-t)b^p]^{1/p}) - \frac{m+M}{2} \right] dt \right.$$

olur. Son ifadedeki T 'nin toplamsal sağ tarafını (4.29) ifadesinde L 'nin olduğu tarafa atıp bu yeni ifadeyi H şeklinde kısaltırsak,

$$H = \left[\frac{p}{b^p - a^p} \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b \frac{w(x)}{x^{1-p}} dx - \int_a^b \frac{f(x)w(x)}{x^{1-p}} dx \right) \right. \\ \left. - \frac{(b^p - a^p)(M+m)}{4p} \int_0^1 \mu(t) dt \right]$$

$$= \frac{b^p - a^p}{2p} \int_0^1 \mu(t) \left[[(ta^p + (1-t)b^p)^{1/p}]^{1-p} f'([ta^p + (1-t)b^p]^{1/p}) \right. \\ \left. - \frac{m+m}{2} \right] dt$$

$$H = \frac{b^p - a^p}{2p} \int_0^1 \mu(t) \left[[(ta^p + (1-t)b^p)^{1/p}]^{1-p} f'([ta^p + (1-t)b^p]^{1/p}) \right. \\ \left. - \frac{m+m}{2} \right] dt$$

olacağından, H eşitliğinin her iki tarafının mutlak değerini alıp eşitliğin sağ tarafını düzenlersek,

$$|H| \leq \left| \frac{b^p - a^p}{2p} \right| \int_0^1 |\mu(t)| \left| [(ta^p + (1-t)b^p)^{1/p}]^{1-p} f'([ta^p + (1-t)b^p]^{1/p}) \right. \\ \left. - \frac{m+M}{2} \right| dt \quad (4.30)$$

şeklinde yazabiliriz. Ayrıca teoremden verilen kabulden dolayı

$$m \leq [(ta^p + (1-t)b^p)^{1/p}]^{1-p} f'([ta^p + (1-t)b^p]^{1/p}) \leq M$$

biçiminde yazılabileceğinden, bu ifadede gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} m - \frac{m+M}{2} &= \leq \left[(ta^p + (1-t)b^p)^{\frac{1}{p}} \right]^{1-p} f' \left([ta^p + (1-t)b^p]^{\frac{1}{p}} \right) - \frac{m+M}{2} \\ &\leq M - \frac{m+M}{2} \\ \left| \left[(ta^p + (1-t)b^p)^{\frac{1}{p}} \right]^{1-p} f' \left([ta^p + (1-t)b^p]^{\frac{1}{p}} \right) - \frac{m+M}{2} \right| &\leq \frac{M-m}{2} \end{aligned}$$

elde edilir. Son ifade (4.30) ifadesinde yerine yazılırsa ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.1.6 (4.28) ifadesinde;

a. Eğer $w(x)$, $\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{1/p}$, ye göre p -simetrik bir dönüşüm ise (4.12) ifadesini kullanıp;

i. $p = 1$ alınır (3.27) ifadesini,

ii. $p = -1$ alınır (3.39) ifadesini,

b. Eğer $w(x)$ $\left[\frac{a^p+b^p}{2}\right]^{1/p}$, ye göre p -simetrik bir dönüşüm ise (4.14) ifadesini kullanıp;

i. $p = 1$ alınır (3.27) ifadesini,

ii. $p = -1$ alınır (3.40) ifadesini,

c. $p = 1$ alınır (3.23) ifadesini,

d. $p = -1$ alınır (3.37) ifadesini,

e. Eğer $w(x) = 1$ ise (4.12) ifadesini ve üçgen eşitsizliğini kullanıp;

$p = 1$ alınır (3.28) ifadesini,

f. Eğer $w(x) = 1$ ise (4.12) ve (4.14) ifadelerini kullanırsak;

i.

$$\begin{aligned} &\left| \frac{p}{b^p - a^p} \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b \frac{w(x)}{x^{1-p}} dx - \int_a^b \frac{f(x)w(x)}{x^{1-p}} dx \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{(b^p - a^p)(M + m)}{4p} \int_0^1 \mu(t) dt \right| \leq \frac{(M - m)(b^p - a^p)}{8p} \end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned} &\left| \frac{p}{b^p - a^p} \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b \frac{w(x)}{x^{1-p}} dx - \int_a^b \frac{f(x)w(x)}{x^{1-p}} dx \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{(b^p - a^p)(M + m)}{4p} \int_0^1 \mu(t) dt \right| \end{aligned}$$

$$\leq \frac{(M-m)(b^p - a^p)}{2p} \|w\|_q \int_0^1 \left|t - \frac{1}{2}\right|^{1/k} ds$$

ifadelerini elde ederiz.



BÖLÜM 5.TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasının 4.bölümünde; $w: I \subset (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere, w ile bağlantılı; $\mu(t): [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü ve $\mu(t)$ dönüşümünün bazı özelliklerini içeren yeni teorem, Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sol tarafından orta kısmının çıkarılmasıyla elde edilen teoremlerle birlikte p -konveks fonksiyonlara uygulanmış, sonucunda Hermite-Hadamard-Fejér ve Hermite-Hadamard-Fejér Trapezoidal tipli eşitsizliklerin bir genellemesi p -konveks fonksiyonlar için verilmiştir. Elde edilen tahmin ve sonuçlar yeni olup $p = 1$ ve $p = -1$ alındığında 3. bölümdeki çalışmaların tamamına indirgendiği görülmüştür. Bununla birlikte daha birçok yeni teorem ve sonuç elde edilmiş olup, buradan p ' nin farklı değerleri için kullanışlı birçok yeni eşitsizlik ve ortalama elde edilebilir.

KAYNAKLAR

- [1] Dwilewicz, R.L., A Short History Of Convexity, Differential Geometry-Dynamical Systems, Balkan Society of Geometers, 112, 2009.
- [2] Pečarić, J., Proschan, F., Tong, Y.L., Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications, Academic Press Inc., Boston, 1-3, 1992.
- [3] İşcan, İ., Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex functions, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 43(6), 935-942, 2014.
- [4] Bayraktar, M., Analiz, ISBN 978-605-395-412-5, 2010.
- [5] Azpeitia, A.G., Convex functions and the Hadamard inequality, Revista Colombiana Matematicas, 28, 7-12, 1994.
- [6] Roberts, A.W., Varberg, D.E., Convex Functions, Academic Press, New York and London, 1973.
- [7] Hadamard, J., Etude sur les proprietes des fonctions entieres et en paticular d' une fonction consideree par Riemann, J.math. Pures Appl., 171-215, 1893.
- [8] Hermite, C., Sur deuxlimitesd'une integrale, Mathesis, 3, 82-83, 1883.
- [9] Boyd, S., Convex Optimization, Cambridge University Press, 2004.
<http://www.math.udel.edu/~angell/Opt/convex>
- [10] Latif, M.A, Dragomir, S.S, Momoniat, E., Some Fejér type inequalities for harmonically convex function with application to special means, International Journal of Analysis and Applications, 13 (1), 2015.
- [11] Kunt, M., İşcan, İ., On new Hermite-Hadamard-Fejér type inequalities for p -convex function via fractional integrals, Communication in Mathematical Modeling and Applications, 1, 1-15, 2017.
- [12] İşcan, İ., Turhan, S., Maden, S., Hermite-Hadamard and Simpson-Type Inequalities for Differentiable p -quasi-convex Functions, Filomat 31(19) (201), 5945–5953, 2017.
- [13] İşcan, İ., Hermite-Hadamard Type Inequalities For p -convex function, International Journal of Analysis and Application, 11(2), 137-145, 2016.
- [14] Fang, Z. B., Shi, R., On the (p,h) -convex function and some integral inequalities, Journal of Inequalities and Applications, 2014(45), 2014.

- [15] Fejér, L., Über die Fourierreihen II, Hungarian, 1906.
- [16] Chen, F., Wu, S., Fejér and Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex funtions, Jurnal of Applied Mathematics, 1-6, 2014.
- [17] Kunt, M., İşcan, İ., Hermite-Hadamard-Fejér type inequalities for p -convex function, Arab journal of mathematical sciences, 23, 215-230, 2017.
- [18] Dragomir, S.S, Agarwal, R.P., Two Inequalities for Differentiable Mappings and Applications to Special Means of Real Numbers and toTrapezoidal Formula, Appl.Math.Lett, 11(2), 91-95, 1998.
- [19] Rostamian Delavar, M., Dragomir, S.S., De La Sen, M., Estimation type result related to Fejér inequality with application, Journal of Inequalities and Application, 2018(85), 2018.
- [20] Kaptanoğlu, H.T., Dışbükey Fonksiyonlar, Matematik Dünyası, 1, 11-18, 1996., <http://www.fen.bilkent.edu.tr/~kaptan/Files/Dunya/disbukey.pdf>
- [21] Cerone, P., Dragomir, S.S, Trapezoidal Type From An Inequalities Point Of View, Handbook of Analytic Computational Methods in Applied Mathematics, 2(6), 1996.
<http://vuir.vu.edu.au/17258/1/TrapRulesIneqRep.pdf>
- [22] Turhan, S., Trapezoidal Type Fejér Inequality Related to Harmonically Convex Functions and Application, Hindawi Journal of Function Spaces Article ID 950865,1-8, 2019.
- [23] Niculescu, C.P., Persson, L.E., Convex Function and Their Application, Springer, Berlin Heidelberg NewYork, 2004.
- [24] Hardy, G.H., Littlewood, J.E., Polya, G., Inequalities, 2nd Ed., Cambridge, 1952.
- [25] Beckenbach, E.F., Bellman, R., Inequalities, Springer-Verlag, Berlin, 198, 1961.
- [26] Mitrinović, D. S., Analytic Inequalities, Springer-Verlang, Berlin, 1970.
- [27] Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E., Fink, A.M., Inequalities in volving functions and their integrals and derivatives, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 587 , 1991.
- [28] Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E., Fink, A.M., Classical and new inequalities in Analysis , Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/ Boston/ London, 1993.

- [29] Pachpatte, B.G., Mathematical inequalities, Elsevier B.V., Volume 67, Amsterdam, The Netherlands, 591, 2005.
- [30] Dragomir, S.S., Pearce, C.E.M., Selected topic on Hermite-Hadamard inequalities and applications. Melbourne and Adelaide, Victoria University, Australia, 2002.
- [31] Hadamard, J., Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann, Journal De Mathématiques Pures Et Appliquées, 58, 171-215, 1893.
- [32] Aliyev, İ., Konveks Fonksiyonlar Jensen Eşitsizliği ve Bazı Uygulamaları, Matematik Dünyası, 3, 17-20, 1998.



ÖZGEÇMİŞ

Umut AKILLI 1976 yılında Fatsa’da doğdu. İlk ve orta eğitimini Giresun’da lise eğitimini Antalya’da tamamladı. 1994 yılında Antalya Aksu Anadolu Öğretmen Lisesi’nden mezun oldu. 1994 yılında başladığı Selçuk Üniversitesi Matematik Öğretmenliği Bölümü’nü Şubat-1999 yılında bitirdi. 2018 yılında Giresun Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans eğitimine başladı. Halen Giresun Atatürk Lisesin’de görev yapmaktadır.

