



MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



GENELLEŞTİRİLMİŞ BESSEL - MAITLAND FONKSİYONU ve İNTEGRAL DÖNÜŞÜMÜ

DURMUŞ ALBAYRAK

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Teorik Matematik Programı

DANIŞMAN

Prof. Dr. A. Neşe DERNEK

İSTANBUL, 2020



MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



GENELLEŞTİRİLMİŞ BESSEL - MAITLAND FONKSİYONU ve İNTEGRAL DÖNÜŞÜMÜ

DURMUŞ ALBAYRAK

(721011001)

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Teorik Matematik Programı

DANIŞMAN

Prof. Dr. A. Neşe DERNEK

İSTANBUL, 2020

TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim boyunca çalışmalarımın her aşamasında görüş ve önerilerinden yararlandığım, bilgi ve tecrübeleriyle yardımını ve desteğini hiçbir zaman esirgemyen, bana gösterdikleri her türlü emek ve sabrı hiç bir zaman unutmayacağım tezimi sabır ve titizlikle yöneten danışman hocam Prof. Dr. A. Neşe DERNEK'e, doktora öğrenimim boyunca akademik destekleri ile her zaman yanımda olan ve emeği bulunan değerli hocalarım Prof. Dr. Ahmet DERNEK'e ve Doç Dr. Faruk UÇAR'a teşekkürü bir borç bilirim. Yine manevi desteğiyle ve sabırlarıyla yanımda olan aileme de teşekkürlerimi sunarım.

MART 2020

Durmuş ALBAYRAK



İçindekiler

TEŞEKKÜR	i
ÖZET	v
ABSTRACT	vii
YENİLİK BEYANI	ix
1 GİRİŞ	1
1.1 Özel Fonksiyonların Tarihi Gelişimi	1
1.2 Özel Fonksiyonlar	4
1.3 İntegral Dönüşümlerin Tarihi Gelişimi	12
1.4 İntegral Dönüşümler	14
1.4.1 Fourier Dönüşümünün Tanımı, Özellikleri ve Uygulamaları	15
1.4.2 Laplace Dönüşümü, Özellikleri ve Uygulamaları	17
1.4.3 Mellin Dönüşümü, Özellikleri ve Uygulamaları	19
1.4.4 Hankel Dönüşümü, Özellikleri ve Uygulamaları	20
1.4.5 Bessel Dönüşümü ve Özellikleri	22
1.4.6 Stieltjes Dönüşümü ve Özellikleri	23
1.4.7 Genelleştirilmiş Stieltjes Dönüşümü ve Özellikleri	23
1.4.8 Widder-Potansiyel Dönüşümü ve Özellikleri	24
1.4.9 Kesirli Hesap	24
2 MATERİYAL ve YÖNTEM	26
2.1 Genelleştirilmiş Bessel-Maitland Fonksiyonu	26
3 BULGULAR ve TARTIŞMA	38

3.1	Genelleştirilmiş Bessel-Maitland Fonksiyonu	38
3.2	Genelleştirilmiş Bessel-Maitland İntegral Dönüşümü	47
3.3	Parseval-Goldstein Tipinde Teoremler ve Uygulamaları	111
3.4	Bazı Kesirli Diferansiyel Denklemlere Uygulamalar	143
4	SONUÇLAR	152
	KAYNAKÇA	173
	ÖZGEÇMİŞ	176



ÖZET

GENELLEŞTİRİLMİŞ BESSEL - MAITLAND FONKSİYONU ve İNTEGRAL DÖNÜŞÜMÜ

Özel fonksiyonlar ve integral dönüşümler, pür ve uygulamalı matematiğin yanı sıra, fizik, mühendislik, bilgisayar bilimleri, tıp gibi birçok farklı disiplinde görülmektedir. Bu disiplinlerde ortaya çıkan belirli türde diferansiyel veya integral denklemlerin çözümü olan özel fonksiyonlar ile çözüm yöntemlerinden biri olan integral dönüşümler birçok araştırmacı tarafından ilgi görmektedir.

Tezin birinci bölümünde özel fonksiyonların ve integral dönüşümlerin kısa bir tarihçesine değinilmiş ve tez boyunca kullanılacak özel fonksiyonlar ve integral dönüşümlerin temel tanım ve özellikleri ile örneklere yer verilmiştir.

Tezin ikinci bölümünde araştırma konusu olan integral dönüşümün çekirdeğinde yer alan genelleştirilmiş Bessel-Maitland fonksiyonu ile ilgili kaynak olabilecek makaleler taranmış ve bu makalelerdeki temel tanım, teorem ve sonuçlar incelenmiştir.

Tezin üçüncü bölümünde ilk olarak genelleştirilmiş Bessel-Maitland fonksiyonunun özellikleri genişletilip, yeni teoremler oluşturulmuş, sonuçlar elde edilmiş ve özel durumlar incelenmiştir. Daha sonra genelleştirilmiş Bessel-Maitland integral dönüşümü bu tezde ilk kez tanımlanıp, temel özellikleri incelenmiş ve örneklere yer verilmiştir. Ek olarak, genelleştirilmiş Bessel-Maitland dönüşümü ile daha önceden bilinen önemli integral dönüşümleri arasındaki ilişkiler araştırılarak, Parseval-Goldstein tipi teoremler elde edilmiştir. Bu teoremler kullanılarak Fox-Wright fonksiyonlarını içeren bazı genelleştirilmiş integraller hesaplanmıştır. Son olarak, genelleştirilmiş Bessel-Maitland integral dönüşümünün bir özel hali ile belirli türden kesirli diferansiyel denklemler çözülmüştür.

Tezin dördüncü bölümünde tez boyunca verilen temel tanımlar, elde edilen teorem ve sonuçlar sıralanmıştır.



ABSTRACT

GENERALIZED BESSEL - MAITLAND FUNCTIONS and INTEGRAL TRANSFORM

Special functions and integral transforms are encountered in various disciplines such as physics, engineering, computer science and medicine, as well as pure and applied mathematics. Integral transforms, which constitute one of the solution methods and special functions that come as a solution of certain types of differential or integral equations appearing in these disciplines, are constituting an attraction center for many researchers.

In the first part of the thesis, a brief historical background of special functions and integral transforms is given and the basic definitions and properties of some special functions and integral transforms are given.

In the second part of the thesis, articles that may be the source of the generalized Bessel-Maitland function in the core of the integral transform, which is the subject of the research, have been scanned and some basic definitions, theorems and results in these articles have been examined.

In the third part of the thesis, firstly, properties of generalized Bessel-Maitland function are expanded and some theorems, results and their special cases are examined. Secondly, generalized Bessel-Maitland integral transform is introduced, its basic properties are proved and examples are given. Thirdly, the relations between generalized Bessel-Maitland transform and some known integral transforms are investigated and Parseval-Goldstein type theorems are given. Some generalized integrals including Fox-Wright functions are calculated with these theorems. Finally, by using a special form of the generalized Bessel-Maitland integral transforms certain types of fractional differential equations are solved.

In the fourth part of the thesis, the basic definitions, theorems and results obtained during the thesis are listed.

MARCH 2020

Durmuş ALBAYRAK



YENİLİK BEYANI

Bu tezde ilk olarak genelleştirilmiş Bessel-Maitland fonksiyonu için yeni özellikler elde edilmiş ve daha sonra çekirdeğinde bu fonksiyonu içeren ve genelleştirilmiş Bessel-Maitland integral dönüşümü adını alan yeni bir integral dönüşüm tanımlanmıştır. Tanımlanan bu dönüşümün temel özellikleri incelenmiştir. Elemanter ve özel fonksiyonların bu dönüşüm altındaki görüntüleri bulunmuştur. Genelleştirilmiş Bessel-Maitland integral dönüşümü ile daha önceden bilinen ve tez içerisinde kullanılan integral dönüşümleri arasında bağıntılar bulunmuş ve bu bağıntılar yardımıyla yeni integraller hesaplanıp literatüre katkı sağlanmıştır. Son olarak, dönüşümün özel bir hali ile belirli tipte kesirli diferansiyel denklemler çözülmüştür.

Bu çalışmalar aşağıdaki sempozyumlarda sunulmuş ve tezin bir bölümü makale olarak derlenip SCI-E kapsamında taranan Applications of Mathematics isimli dergide yayınlanmıştır:

- Bozkurt G., Dernek A. N., Albayrak D., Theorems on some families of fractional differential equations and their applications, Applications of Mathematics, 64, 557-579, 2019.
- Dernek A. N., Albayrak D., Genelleştirilmiş Bessel-Maitland İntegral Dönüşümü Üzerine Notlar. 32. Ulusal Matematik Sempozyumu 31 Ağustos-03 Eylül 2019, Samsun, Türkiye (sunum)
- Dernek A. N., Albayrak D., Genelleştirilmiş Kesirli İntegraller ile İlgili Bazı Bağıntılar. 14. Ankara Matematik Günleri(AMG2019) 28-29 Haziran 2019, Ankara, Türkiye (poster)
- Dernek A. N., Albayrak D., Some Parseval-Goldstein type relations for generalized Bessel-Maitland Transform. VI. Kadın Matematikçiler Derneği Çalıştayı 26-28 Nisan 2019, Konya, Türkiye (poster).

KISALTMALAR

$(\alpha)_n$	: Pochhammer sembolü
$\Gamma(z)$	: Gamma fonksiyonu
$B(z, v)$	: Beta fonksiyonu
${}_rF_s$	: Genelleştirilmiş Hipergeometrik fonksiyon
$\mathcal{J}_\nu(z)$	: Birinci tür Bessel fonksiyonu
$\mathcal{I}_\nu(z)$	: Birinci tür Modifiye Bessel fonksiyonu
$M(a; c; x)$	: Kummer fonksiyonu
$L_\nu^{(\mu)}(z)$	: Laguerre fonksiyonu
$U(a; c; x)$	: Tricomi fonksiyonu
$M_{\kappa, \mu}(z)$	: Whittaker fonksiyonu
$W_{\kappa, \mu}(z)$	: Whittaker fonksiyonu
$D_\nu(z)$	: Parabolik Silindir fonksiyon
$k_{2\nu}(z)$	: Bateman fonksiyonu
$s_{\mu, k}(z)$	: Lommel fonksiyonu
$U_\nu(w, z)$	: Lommel'in iki değişkenli fonksiyonu
$U_\nu(z, 0)$	: Lommel'in iki değişkenli fonksiyonu
$V_\nu(w, z)$	: Lommel'in iki değişkenli fonksiyonu
$H_{p, q}^{m, n}$	: H -fonksiyonu
${}_p\Psi_q$	: Fox-Wright fonksiyonu
$\mathcal{Y}_\nu(z)$	: İkinci tür Bessel fonksiyonu
$\mathcal{K}_\nu(z)$	: İkinci tür modifiye Bessel fonksiyonu
$H_\nu^{(1)}(z)$	: Üçüncü tür Bessel fonksiyonu
$H_\nu^{(2)}(z)$	: Üçüncü tür Bessel fonksiyonu
$\gamma(a, x)$	: Eksik Gamma fonksiyonu
$\Gamma(a, x)$	: Tümleyen Eksik Gamma fonksiyonu
$\text{Ei}(x)$	: Üstel integral
$\text{Si}(x)$	: Sinüs integrali
$\text{si}(x)$	: Sinüs integrali

$Ci(x)$	: Kosinüs integrali
$ci(x)$	: Kosinüs integrali
$erf(z)$	: Hata fonksiyonu
$erfc(z)$	: Tümleyen Hata fonksiyonu
$\mathcal{J}_\nu^\mu(z)$	: Bessel-Maitland fonksiyonu
$E_\mu(z)$	: Mittag-Leffler fonksiyonu
$E_{\mu,\nu}(z)$	: Wiman fonksiyonu
$E_{\mu,\nu}^\gamma(z)$	: Prabhakar fonksiyonu
$E_{\mu,\nu}^{\gamma,\rho}(z)$	: Genelleştirilmiş Mittag-Leffler fonksiyonu
$\mathcal{F}$	: Fourier integral dönüşümü
$\mathcal{F}^{-1}$	: Ters Fourier integral dönüşümü
$\mathcal{F}_s$	: Fourier Sinüs integral dönüşümü
$\mathcal{F}_s^{-1}$	: Ters Fourier Sinüs integral dönüşümü
$\mathcal{F}_c$	: Fourier Kosinüs integral dönüşümü
$\mathcal{F}_c^{-1}$	: Ters Fourier Kosinüs integral dönüşümü
$\mathcal{L}$	: Laplace dönüşümü
$\mathcal{L}^{-1}$	: Ters Laplace dönüşümü
$\mathcal{M}$	: Mellin dönüşümü
$\mathcal{M}^{-1}$	: Ters Mellin dönüşümü
$\mathcal{H}_\nu$	: Hankel dönüşümü
$\mathcal{H}_\nu^{-1}$	: Ters Hankel dönüşümü
$\mathcal{K}_\nu$	: Bessel dönüşümü
$\mathcal{K}_\nu^{-1}$	: Ters Bessel dönüşümü
$\mathcal{S}$	: Stieltjes dönüşümü
$\mathcal{S}_\rho$	: Genelleştirilmiş Stieltjes dönüşümü
$\mathcal{P}$	: Widder-Potansiyel dönüşümü
$D_{RL}^{-\mu}$	: Riemann-Liouville kesirli integrali
D_{RL}^μ	: Riemann-Liouville kesirli türevi
D_C^μ	: Caputo kesirli türevi
W_μ	: Weyl kesirli integrali

$\mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(z)$: Genelleştirilmiş Bessel-Maitland fonksiyonu

${}_{\alpha}\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}$: Genelleştirilmiş Bessel-Maitland integral dönüşümü





1 GİRİŞ

1.1 Özel Fonksiyonların Tarihi Gelişimi

Özel fonksiyonların tarihi antik Babillilere kadar uzanmaktadır. 4000 yıl kadar önce Babilliler tüm hesaplama ve aritmetik işlemlerini 60 sayı tabanına göre yapmışlardır. Bu sayı tabanına göre yapılan toplama ve çıkarma işlemleri oldukça kolay olmasına rağmen, çarpma ve bölme işlemleri o kadar kolay yapılamamaktadır. Bu işlemleri yapmak için ortaya çıkan sonuçların özünde özel fonksiyonların basit bir versiyonu bulunmaktadır. Babillilere ait külçe halindeki kil tabletlerde o yıllarda yapılan ve düzenlenmiş her türlü farklı hesaplamaları bulmak mümkündür. Bu sebeple külçe bloklarının keşifleri ile özel fonksiyonların tarihi birbirleriyle örtüşmektedir. Babillilerin tabletlerinde trigonometri ile de ilgilendikleri görülmektedir. Hatta sekant fonksiyonuna ait bir takım tablolar bulunmaktadır. M.Ö. 1650 yıllarına ait Mısır Rhind papirüsünde, inşası trigonometrik fonksiyonların kullanımını gerektiren piramitlerle ilgili problemler olduğu bilinmektedir. Gökbilimciler trigonometrik fonksiyonların ciddi kullanıcıları olmuşlar ve birçok özel sonuç elde etmişlerdir. Özellikle kiriş ve yaylar üzerine çalışmalar yapmışlar, "Bir çemberin merkez açısı verildiğinde, merkez açıyı gören kirişin uzunluğu nedir?" ve "Kirişin uzunluğu verildiğinde, kirişi gören yayın uzunluğu nedir?" gibi sorulara cevap aramışlardır. Yunan gökbilimcilerin bu konu üzerine yaptığı en önemli çalışma, Ptomely'nin Almagest isimli eseridir. Kiriş kelimesinin kökeni Hintçe olup ilk olarak Arapçaya daha sonra Latince'ye çevrilmiştir. Sinüs kelimesi 1100 yıllarında ortaya çıkmış ve daha sonra 1200 yıllarında Fibonacci tarafından kullanılmıştır. Bundan 100 yıl sonrada trigonometrinin temelleri iyice sağlamlaştırılmıştır. 16. yüzyılın ortalarında Copernicus'un "De Revolutionibus" isimli eserinin temel taşlarından biri trigonometrik fonksiyonlardır. Trigonometrik fonksiyonlardan sonra en çok ses getiren fonksiyon logaritmadır. Logaritma 1614 yılında ortaya çıkmış ve yapılan hesaplamalar ile büyük logaritma tabloları oluşturulmuştur. Bu konuda yapılan çalışmalar sonucunda doğal logaritma ve üstel fonksiyonların modern biçimlerini almaları bir kaç yılı bul-

muştur. Daha sonra 17. yüzyılın ortalarında, temel fonksiyonların tümü sağlam bir biçimde yerine oturmuştur. 17. yüzyılın sonunda ortaya çıkan matematik hesabında ise bugünkü özel fonksiyonların tanımları verilmeye başlanılmıştır.

18. yüzyılda Daniel Bernoulli herhangi bir temel fonksiyonun integralinin de bir temel fonksiyon olabileceği hipotezini ortaya atmıştır. Leibniz ise karşı bir örneğe sahip olmasına rağmen bunu hiç ortaya çıkarmamıştır. Birkaç yıl sonra seri halde eliptik integraller ve ardından Bessel fonksiyonları tanımlanmıştır. 1720'lerde, Euler, birçok standart özel fonksiyon hakkında yaptığı çalışmalar sayesinde matematik dünyasına büyük bir katkı sağlamıştır. Örneğin, Gamma fonksiyonunu faktoriyel fonksiyonunun bir devamı olarak tanımlamıştır. Daha sonra dairesel dalga hareketini araştırmak için Bessel fonksiyonlarını tanımlamış ve sistematik olarak eliptik integraller ile zeta fonksiyonunu ve polilogaritma fonksiyonunu incelemiştir. İlk zamanlarda fonksiyonların açık bir ismi olmamış fakat bu fonksiyonlar birkaç kişi tarafından kullanılmaya başlayınca ve biraz yinelemelerden sonra kesin notasyon ve isimleri ortaya çıkmaya başlamıştır.

18. yüzyılın sonlarında potansiyel teori ve gök mekaniğinin varlığı, özel fonksiyonların gelişimini hızlandırmıştır. 1780'li yıllarda uzun süredir Laplace fonksiyonu olarak adlandırılan Legendre fonksiyonları tanımlanmıştır. 1820 yıllarında karmaşık analizde yaşanan gelişmeler ile çift periyodik fonksiyonlar tanımlanmış ve zamanla notasyonlar yerine oturmuştur. Birkaç sene sonra harmonik analiz gelişmiş ve Hermite, Laguerre gibi çeşitli ortogonal polinomlar üzerine çalışmalar yapılmıştır. Özel fonksiyonların sayıları arttıkça Gauss bu fonksiyonları nasıl birleştirilebileceğini düşünmüş ve 1650 yıllarında Wallis tarafından tanımlanmış ve adlandırılmış olan hipergeometrik serileri incelemeye başlamıştır. Yaptığı incelemeler sonucunda ${}_2F_1$ veya Gauss hipergeometrik fonksiyonu olarak adlandırılan fonksiyonun birçok özel fonksiyonu kapsadığını belirtmiştir.

19. yüzyılın ortalarına gelindiğinde, özellikle Almanya'da birçok bilimsel kitabın yazıldığı özel fonksiyonlarla ilgili ciddi bir araştırma grubu ortaya çıkmıştır. Bu yüzden Maxwell, 1870'lerde elektromanyetik teori üzerine kitaplarını yazar-

ken özel fonksiyonlara çok fazla değinmeyip diğer kaynaklardan alıntılar yapmıştır. Fonksiyonların özelliklerini listeleyen bilimsel çalışmaların yanı sıra, değerlerini listeleyen tablolarda oluşturulmuştur. 19. yüzyılın son çeyreğinde özel fonksiyonlar ile ilgili çok sayıda bilim adamı çalışmış ve bu konuda hatırı sayılır bir bilgi akışı olmuştur. Viktorya dönemi matematikçileri bu konuda çalışabilecekken, pür matematikte mutlak değerlendirmeye gitmeleri sonucu özel fonksiyonlar kişisel bir tercih haline gelmiştir. Fizikte mekanik, esneklik teorisi, elektromanyetik teori üzerine yapılan çalışmalar özel fonksiyonlara olan ilgiyi yeniden canlandırmıştır. 1920'lerde kuantum mekaniğindeki en temel problemlerin Laguerre ve Hermite polinomları gibi özel fonksiyonlar içerdiği bilinmektedir. Bu durum bilim insanlarının herhangi bir problemi özel fonksiyonlar aracılığıyla çözülebilecekleri fikrini oluşturmuştur, ortaya çıkan ders kitapları da bu fikri teşvik etmiştir. Çünkü tartışılan problemler her zaman özel fonksiyonlar açısından örnek teşkil etmiştir.

Özel fonksiyonlarla çalışmak bilim dünyasına büyük bir yenilik getirmiştir. Özellikle İngiltere başta olmak üzere, tablo yapımları önemli bir hükümet projesi haline gelmiş ve navigasyon gibi birçok mühendislik ve fiziksel problemlerde stratejik önem kazanmıştır. 1820 yılında Babbage, özel fonksiyonlar için doğru değer tabloları geliştirmek amacıyla bir fark makinesi yapmıştır. Mekanik hesap makinelerinin yaygınlaşmaya başlamasıyla İngiltere ve ABD'de özel fonksiyon tabloları için projeler ortaya çıkmıştır. 1930'larda Büyük Buhran sırasında insanlara iş vermek için oluşturulan WPA projesi bu çalışmalara örnek verilebilir.

20. yüzyılda özel fonksiyonların özelliklerine dair sistematik referans çalışmaları ortaya çıkmaya başlamıştır. İlk olarak 1909'da daha sonra 1930'da Eugene Jahnke ve Fritz Emde tarafından grafikler, formüller ve sayısal tabloları içeren "Funktionentafeln mit Formeln und Kurven" adı altında özel fonksiyonların ilk el kitabı ABD'de basılmıştır. 1943 yılında Magnus ve Oberhettinger tarafından "Formeln und Lehrsätze für die speziellen Funktionen der Mathematischen Physik" adı altında özel fonksiyonları içeren en eksiksiz formül kitabının ilk baskısı yayımlanmıştır. 1946 yılında Harry Bateman'ın ölümünden sonra özel fonksiyonlar ile ilgili

ayakkabı kutularında sakladığı düzinelerce kart bulunmuş ve bu çalışmalar "Bateman El Yazması Projesi" adı altında toplanmış ve basılmıştır. Bu projede sadece tablolar değil, fonksiyonların türevleri, fonksiyonel bağıntıları teorem ve ispatlarla açıkça belirtilmiştir. Manhattan ve H-bomba geliştirme projeleri için özel fonksiyonlardan yararlanılmıştır. Örneğin, 1951 yılında Ulusal Standartlar Bürosunda çalışan Milt Abramowitz nükleer fizik için gerekli olan Coulomb Dalga Fonksiyonlarının tablolarını hazırlamış ve 1965 yılında Abramowitz-Stegun çalışmayı genişletip basmıştır. 1960-1970 bilgisayarlara sayısal algoritmalar yerleştirmek için çalışmalar yapılmaya başlanmış ve özel fonksiyonlar en çok ilgi gören çalışma sahası haline gelmiştir. Yapılan projelerle 20. yüzyılda referans olarak gösterilen çalışmalar arasında W. Gröbner, N. Hofreiter, A. Erdelyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, I. S. Gradshteyn, I.H. Ryshik, H. Exton, H.M. Srivastava, A.P. Prudnikov, Ya. A. Brychkov ve O. I. Marichev gibi yazarların eserleri dikkat çekicidir. Bu şekilde günümüze kadar birçok özel fonksiyon çalışmaları yapılmış, örnek ve uygulamaları elde edilmiştir. Bugün de özel fonksiyonlar yaygın kullanım alanı bulmuştur.

1.2 Özel Fonksiyonlar

Özel fonksiyonlar genellikle kuvvet serileri ve integral gösterilişleri ile tanımlıdır. Yapılan çalışmalar sonucunda bu tanımlamaların farklı şekilde yapılabileceği de görülmüştür. Bu bölümde tez boyunca kullanılacak olan özel fonksiyonların tanımları ve özellikleri verilecektir.

Tanım 1.1 $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere, Pochhammer sembolü

$$(\alpha)_n = \begin{cases} \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1) & n = 1, 2, 3, \dots \\ 1 & n = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

biçimde tanımlıdır ve

$$(\alpha)_{m+n} = (\alpha)_m (\alpha+m)_n \quad (1.2)$$

bağıntısına ve Vandermonde's teoremi olarak adlandırılan

$$(a+b)_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a)_k (b)_{n-k} \quad (1.3)$$

bağıntısına sahiptir [15].

Tanım 1.2 Euler, Gamma fonksiyonunu,

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0 \quad (1.4)$$

biçimde integral gösterilişi ile tanımlamıştır [7, 15].

Bu tanımdan kısmi integrasyonla

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad \operatorname{Re} z > 0 \quad (1.5)$$

bağıntısı elde edilir. Bu fonksiyonel bağıntıya ek olarak Gamma fonksiyonu, Euler'in Yansıma Formülü

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \quad \operatorname{Re} z > 0 \quad (1.6)$$

ve Legendre Katlı Formülü

$$\Gamma(2z) = 2^{2z-1} \pi^{-1/2} \Gamma(z) \Gamma\left(\frac{1}{2} + z\right) \quad \operatorname{Re} z > 0 \quad (1.7)$$

olarak adlandırılan fonksiyonel bağıntılarını gerçekler [7, 15].

Pochhammer sembolü ile Gamma fonksiyonu arasında

$$(\alpha)_n = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}, \quad \alpha \neq 0, 1, 2, \dots \quad (1.8)$$

bağıntısı gerçekleşir [7, 15].

Tanım 1.3 Euler, Beta fonksiyonunu

$$B(z, v) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{v-1} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Re} v > 0 \quad (1.9)$$

veya

$$B(z, v) = \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{(1+t)^{v+z}} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Re} v > 0. \quad (1.10)$$

biçiminde integral gösterilişleri ile tanımlanmıştır [7, 15].

Beta fonksiyonu ile Gamma fonksiyonu arasında

$$B(z, v) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(v)}{\Gamma(z+v)} \quad (1.11)$$

bağıntısı gerçekleşir [7, 15].

Tanım 1.4 r ve s negatif olmayan tamsayılar ve α_i ($i = 1, 2, \dots, r$), $\beta_j \neq 0, -1, -2, \dots$ ($j = 1, 2, \dots, s$) olmak üzere, genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyon

$${}_rF_s \left[\begin{matrix} \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \\ \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s \end{matrix} ; z \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n (\alpha_2)_n \dots (\alpha_r)_n}{(\beta_1)_n (\beta_2)_n \dots (\beta_s)_n} \frac{z^n}{n!} \quad (1.12)$$

biçiminde seri gösterilişi ile tanımlıdır [7, 15].

Genelleştirilmiş hipergeometrik seri $r \leq s$ ise bütün sonlu z değerleri için yakınsak, $r = s + 1$ ise $|z| < 1$ için yakınsak ve $r > s + 1$ ise tüm $z \neq 0$ için ıraksaktır. Bazı fonksiyonların genelleştirilmiş hipergeometrik seri cinsinden yazılışı aşağıdaki biçimdedir [7, 15]:

$$e^z = {}_0F_0(-; -; z) \quad (1.13)$$

$$\frac{1}{(1-z)^v} = {}_1F_0(v; -; z) \quad (1.14)$$

$$\mathcal{J}_v(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^v \frac{e^{iz}}{\Gamma(v+1)} {}_1F_1\left(\frac{1}{2} + v; 1 + 2v; -2iz\right) \quad (1.15)$$

$$\mathcal{I}_v(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^v \frac{e^{-z}}{\Gamma(v+1)} {}_1F_1\left(\frac{1}{2} + v; 1 + 2v; 2z\right) \quad (1.16)$$

Ek olarak, ${}_2F_0$ ile ${}_1F_1$ hipergeometrik fonksiyonları arasında

$${}_1F_1(a; c; -z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} \frac{1}{z^a} {}_2F_0\left(a, 1+c-a; -; \frac{1}{z}\right) \quad (1.17)$$

veya

$${}_2F_0(a, c; -; z) = \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(1-c+a)} \frac{1}{z^a} {}_1F_1\left(a; 1-c+a; -\frac{1}{z}\right) \quad (1.18)$$

bağıntıları gerçekleşir.

Tanım 1.5 Genelleştirilmiş hipergeometrik seri de $r = s = 1$ seçimiyle oluşan seriye Kummer fonksiyonu denir ve aşağıdaki biçimde gösterilir [15].

$$M(a; c; x) = {}_1F_1(a; c; x)$$

Kummer fonksiyonu şu özelliklere sahiptir:

$$M(a; c; x) = e^{-x} M(c-a; c; x) \quad (1.19)$$

$$M(a; c; x) = M(a-1; c; x) + \frac{x}{c} M(a; c+1; x) \quad (1.20)$$

$$M(a; c; x) = \frac{a}{a-c+1} M(a+1; c; x) + \frac{1-c}{a-c+1} M(a; c-1; x) \quad (1.21)$$

Tanım 1.6 Genelleştirilmiş Laguerre fonksiyonunun Kummer fonksiyonu cinsinden yazılışı

$$L_v^{(\mu)}(z) = \frac{\Gamma(1+\nu+\mu)}{\Gamma(1+\nu)\Gamma(1+\mu)} {}_1F_1(-\nu; 1+\mu; z) \quad (1.22)$$

biçimindedir [15].

Tanım 1.7 Genelleştirilmiş hipergeometrik seri de $r = 2, s = 0$ seçimiyle oluşan seriye Tricomi fonksiyonu denir ve aşağıdaki biçimde gösterilir [15]:

$$U(a; c; x) = \frac{1}{x^a} {}_2F_0\left(a, c; -; -\frac{1}{x}\right) \quad (1.23)$$

Tanım 1.8 Whittaker fonksiyonları,

$$M_{\kappa, \mu}(z) = z^{1/2+\mu} e^{-z/2} {}_1F_1(1/2+\mu-\kappa; 2\mu+1; z) \quad (1.24)$$

ve

$$W_{\kappa, \mu}(z) = \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(1/2-\mu-\kappa)} M_{\kappa, \mu}(z) + \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(1/2+\mu-\kappa)} M_{\kappa, -\mu}(z) \quad (1.25)$$

biçiminde tanımlıdır [15]. Whittaker fonksiyonunun tanımından

$$W_{\kappa,\mu}(z) = W_{\kappa,-\mu}(z) \quad (1.26)$$

özelliğinin geçerli olduğu açıktır.

Tanım 1.9 Whittaker fonksiyonu yardımıyla parabolik silindir ve Bateman fonksiyonları sırasıyla

$$D_v(z) = 2^{v/2+1/4} z^{-1/2} W_{v/2+1/4,1/4}(1/2z^2) \quad (1.27)$$

ve

$$k_{2v}(z) = \frac{1}{\Gamma(v+1)} W_{v,1/2}(2z) = \frac{e^{-z}}{\Gamma(v+1)} U(-v, 0, 2z) \quad (1.28)$$

biçiminde tanımlıdır [7, 15].

Tanım 1.10 Lommel'in fonksiyonu

$$s_{\mu,k}(z) = \frac{z^{\mu+1}}{(\mu-v+1)(\mu+v+1)} {}_1F_2\left(1; \frac{\mu-v+3}{2}, \frac{\mu+v+3}{2}; -\frac{z^2}{4}\right) \quad (1.29)$$

biçimde tanımlıdır [7, 15].

Tanım 1.11 Lommel'in iki değişkenli fonksiyonları aşağıdaki biçimde tanımlıdır [7, 15]:

$$U_v(w, z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{w}{z}\right)^{v+2k} \mathcal{J}_{v+2k}(z) \quad (1.30)$$

$$U_v(z, 0) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{1/2}}{\Gamma(v-1)} s_{v-3/2,1/2}\left(\frac{z}{2}\right) \quad (1.31)$$

$$V_v(w, z) = \cos\left(\frac{w}{2} + \frac{z^2}{2w} + \frac{\pi v}{2}\right) + U_{2-v}(w, z). \quad (1.32)$$

Tanım 1.12 $0 \leq m \leq q$, $0 \leq n \leq p$, $\alpha_i, \beta_j > 0$ ve a_i, b_i kompleks sayılar ve $\Gamma(b_j - \beta_j s)$ ($j = 1, 2, 3, \dots$)'nin kutupları C kontörünün sağında ve $\Gamma(1 - a_j + \alpha_j s)$ ($j = 1, 2, \dots, n$)'nin kutupları C kontörünün solunda olmak üzere Fox H -fonksiyonu aşağıdaki biçimde tanımlıdır [13]:

$$H_{p,q}^{m,n} \left[\begin{matrix} (a_1, \alpha_1), (a_2, \alpha_2), \dots, (a_p, \alpha_p) \\ (b_1, \beta_1), (b_2, \beta_2), \dots, (b_q, \beta_q) \end{matrix} \middle| z \right] \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j - \beta_j s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j + \alpha_j s)}{\prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j - \alpha_j s) \prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j + \beta_j s)} z^s ds.$$

Tanım 1.13 Fox-Wright fonksiyonu aşağıdaki biçimde tanımlıdır [28]:

$${}_p\Psi_q \left[\begin{matrix} (a_1, \alpha_1), (a_2, \alpha_2), \dots, (a_p, \alpha_p) \\ (b_1, \beta_1), (b_2, \beta_2), \dots, (b_q, \beta_q) \end{matrix} \middle| z \right] \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a_1 + \alpha_1 n) \Gamma(a_2 + \alpha_2 n) \dots \Gamma(a_p + \alpha_p n)}{\Gamma(b_1 + \beta_1 n) \Gamma(b_2 + \beta_2 n) \dots \Gamma(b_q + \beta_q n)} \frac{z^n}{n!} \quad (1.33)$$

Fox-Wright fonksiyonu genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonun bir genellemesidir ve genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyon ile arasında

$${}_p\Psi_q \left[\begin{matrix} (a_1, 1), (a_2, 1), \dots, (a_p, 1) \\ (b_1, 1), (b_2, 1), \dots, (b_q, 1) \end{matrix} \middle| z \right] = \frac{\Gamma(a_1) \Gamma(a_2) \dots \Gamma(a_p)}{\Gamma(b_1) \Gamma(b_2) \dots \Gamma(b_q)} {}_pF_q \left[\begin{matrix} \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \\ \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q \end{matrix} \middle| z \right] \quad (1.34)$$

bağıntısı geçerlidir [5].

Tanım 1.14 Birinci tür Bessel fonksiyonu aşağıdaki seri gösterilişine sahiptir [6, 15]:

$$\mathcal{J}_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z/2)^{2n+\nu}}{n! \Gamma(\nu + n + 1)}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty), \quad \operatorname{Re} \nu \geq 0. \quad (1.35)$$

Bu fonksiyonun seri gösterilişi yardımıyla aşağıdaki özellik kolayca gözlenebilir:

$$\mathcal{J}_\nu(-z) = (-1)^\nu \mathcal{J}_\nu(z). \quad (1.36)$$

Tanım 1.15 Birinci tür Bessel fonksiyonu cinsinden, ikinci tür Bessel fonksiyonu aşağıdaki biçimde tanımlıdır [6, 15]:

$$\mathcal{Y}_\nu(z) = \frac{\cos(\nu\pi) \mathcal{J}_\nu(z) - \mathcal{J}_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty), \quad \operatorname{Re} \nu \geq 0. \quad (1.37)$$

Tanım 1.16 Birinci tür modifiye Bessel fonksiyonu aşağıdaki seri gösterilişine sahiptir [6, 15]:

$$\mathcal{I}_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2n+\nu}}{n! \Gamma(\nu + n + 1)}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty), \quad \operatorname{Re} \nu \geq 0. \quad (1.38)$$

Tanım 1.17 Birinci tür modifiye Bessel fonksiyonu cinsinden, ikinci tür modifiye Bessel fonksiyonu aşağıdaki biçimde tanımlıdır [6, 15]:

$$\mathcal{K}_\nu(z) = \frac{\pi}{2} \frac{\mathcal{I}_{-\nu}(z) - \mathcal{I}_\nu(z)}{\sin(\nu\pi)}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty), \quad \operatorname{Re} \nu \geq 0. \quad (1.39)$$

Tanım 1.18 Birinci ve ikinci tür Bessel fonksiyonları cinsinden üçüncü tür Bessel fonksiyonları,

$$H_\nu^{(1)}(z) = \mathcal{J}_\nu(z) + i\mathcal{Y}_\nu(z) \quad (1.40)$$

ve

$$H_\nu^{(2)}(z) = \mathcal{J}_\nu(z) - i\mathcal{Y}_\nu(z) \quad (1.41)$$

biçiminde tanımlıdır [6, 15].

Tanım 1.19 Eksik Gamma ve Tümlleyen Eksik Gamma fonksiyonları,

$$\gamma(a, x) = \int_0^x e^{-t} t^{a-1} dt = \frac{1}{a} x^a {}_1F_1(a; a+1; -x) \quad (1.42)$$

ve

$$\Gamma(a, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{a-1} dt \quad (1.43)$$

biçimde tanımlıdır [15, syf465, (45:6:2)]. Öte yandan bu iki fonksiyonun toplamı

$$\gamma(a, x) + \Gamma(a, x) = \Gamma(a) \quad (1.44)$$

Gamma fonksiyonuna eşittir.

Tanım 1.20 Tümlleyen Eksik Gamma fonksiyonunun özel bir hali olan üstel integral fonksiyonu aşağıdaki biçimde tanımlıdır [6]:

$$\text{Ei}(-x) = - \int_x^\infty e^{-t} t^{-1} dt = -\Gamma(0, x) \quad (1.45)$$

Tanım 1.21 Sinüs ve Kosinüs integralleri,

$$\text{si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \quad (1.46)$$

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2} + \text{si}(x) \quad (1.47)$$

ve

$$\text{Ci}(x) = \int_0^x \frac{\cos t}{t} dt = -\text{ci}(x) \quad (1.48)$$

biçiminde tanımlıdır [6].

Tanım 1.22 Hata ve Tümlen Hata fonksiyonunun integral ve hipergeometrik seriler cinsinden gösterilişi aşağıdaki gibidir [6]:

$$\text{erf}(z) = \int_0^z e^{-t^2} dt = z {}_1F_1\left(1/2, 3/2; -z^2\right), \quad (1.49)$$

$$\text{erfc}(z) = \int_z^\infty e^{-t^2} dt = e^{-z^2} {}_1\Psi_1\left(1/2, 1/2; z^2\right), \quad (1.50)$$

Tanım 1.23 Bessel-Maitland veya Genelleştirilmiş Wright Fonksiyonu olarak bilinen fonksiyon aşağıdaki seri gösterilişine sahiptir [12, 18]:

$$\mathcal{J}_\nu^\mu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n! \Gamma(\mu n + \nu + 1)} = {}_0\Psi_1\left[\begin{matrix} - \\ (\mu, \nu + 1) \end{matrix}; -z\right]. \quad (1.51)$$

Tanım 1.24 $z, \mu \in \mathbb{C}; \text{Re}(\mu) \geq 0$ olmak üzere 1903 yılında Gosta Mittag-Leffler tarafından tanımlanan Mittag-Leffler fonksiyonu aşağıdaki seri gösterilişe sahiptir [11]:

$$E_\mu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\mu n + 1) n!}. \quad (1.52)$$

Tanım 1.25 $z, \mu, \nu \in \mathbb{C}; \text{Re}(\mu) \geq 0$ ve $\text{Re}(\nu) \geq 0$ olmak üzere 1905 yılında Wiman tarafından tanımlanan Mittag-Leffler fonksiyonunun bir genellemesi olan Wiman

fonksiyonu veya genelleştirilmiş Mittag-Leffler fonksiyonu aşağıdaki seri gösterilişe sahiptir [26]:

$$E_{\mu,\nu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\mu n + \nu) n!}. \quad (1.53)$$

Tanım 1.26 $z, \mu, \nu, \gamma \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(\mu) \geq 0, \operatorname{Re}(\nu) \geq 0, \operatorname{Re}(\gamma) \geq 0$ ve $(\gamma)_0 = 1, (\gamma)_n = \frac{\Gamma(\gamma+n)}{\Gamma(\gamma)}$ biçiminde olmak üzere, 1971 yılında Prabhakar tarafından tanımlanan üstel fonksiyonun bir genellemesi olan $E_{\mu,\nu}^{\gamma}$ fonksiyonu aşağıdaki seri gösterilişine sahiptir [17]:

$$E_{\mu,\nu}^{\gamma}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_n z^n}{\Gamma(\mu n + \nu) n!}. \quad (1.54)$$

Tanım 1.27 $z, \mu, \nu, \gamma \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(\mu) \geq 0, \operatorname{Re}(\nu) \geq 0, \operatorname{Re}(\gamma) \geq 0$ ve $p \in (0, 1) \cup \mathbb{N}$ ve $(\gamma)_0 = 1, (\gamma)_{pn} = \frac{\Gamma(\gamma+pn)}{\Gamma(\gamma)}$ biçiminde olmak üzere 2007 yılında Shukla ve Prajapati tarafından tanımlanan Mittag-Leffler fonksiyonunun bir genellemesi olan $E_{\mu,\nu}^{\gamma,p}$ fonksiyonu aşağıdaki seri gösterilişine sahiptir [21]:

$$E_{\mu,\nu}^{\gamma,p}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{pn} z^n}{\Gamma(\mu n + \nu) n!}. \quad (1.55)$$

1.3 İntegral Dönüşümlerin Tarihi Gelişimi

Yaklaşık iki yüz yıldır integral dönüşümleri farklı disiplinlerdeki birçok problemin çözümünde kullanılmaktadır. Özellikle diferansiyel denklemler, integral denklemler, kısmi türevli denklemler gibi birçok problemi çözmek için kullanılan integral dönüşüm, reel veya karmaşık değerli bir f fonksiyonunu bir x integral operatörü yardımıyla yeni bir $F = \mathcal{I}f$ fonksiyonuna dönüştürme işlemidir. Bir integral dönüşümü öncelikle çözülmesi zor olan denklemi çözülmesi daha kolay bir cebirsel denkleme dönüştürür. Cebirsel denklem çözüldükten sonra elde edilen çözüme ters dönüşüm uygulanarak orijinal denklemin çözümü elde edilir. Literatürde ilk çalışılan integral dönüşümler Laplace ve Fourier dönüşümleridir.

Laplace dönüşümü, Pierre Simon Marquis de Laplace (1749-1827) tarafından 1780 yılında olasılık teorisi çalışmasında tanımlanmıştır. Laplace, "La Theorie Analytique des Probabilities" isimli çalışmasında Laplace dönüşümünün temel özelliklerle

rini incelemiş ve birçok uygulamasını vermiştir. Fakat Laplace dönüşümünü popüler hale getiren kişi bir elektrik mühendisi, matematikçi ve aynı zamanda fizikçi olan İngiliz Oliver Heaviside(1850-1925)'dir. Heaviside elektrik devrelerini veren denklemlerde karmaşık sayılarla karşılaşmış ve çözüm kolaylığı sağlayan operasyonel hesabı geliştirmek için ortaya çıkan diferansiyel denklemi Laplace dönüşümü yardımıyla çözmüştür. Daha sonra Laplace dönüşümü, diferansiyel denklemler, başlangıç ve sınır değer problemlerinin çözümü için alternatif bir metot sağladığı için geniş bir uygulama alanı bulmuştur.

Fourier dönüşümü, Joseph Fourier(1768-1830) tarafından 1822 yılında "Analytical Theory of Heat, La Theorie Analytique de la Chaleur" isimli eserinde ilk kez tanımlanmıştır. 1807 yılında Fourier'in saygın Fransız Bilim Akademisi'ne sunduğu ısı iletimi problemi konusundaki çalışması, Laplace, Lagrange ve Legendre gibi dönemin önde gelen matematikçileri tarafından yeterince titiz çalışılmadığından dolayı rededilmiştir. Dört yıl sonra Fourier çalışmayı gözden geçirip göndermiş ve akademi tarafından ödüle layık görülmüştür. Herşeye rağmen Akademi, Fourier'in sonuçları açık olmadığı görüşüne sahip olduğundan yayınlanmasını reddetmiştir. Fourier'in en önemli bulgusu, sonlu bir aralıkta tanımlı keyfi bir fonksiyonun trigonometrik seriler türünden açılımıdır. Daha sonra bu bulgusunu $(0, \infty)$ yarı sonsuz aralığına genişletmek için çalışmalar yapmıştır. Bu çalışmanın sonucunda Fourier tarafından Fourier dönüşümü tanımlanmış ve Fourier Kosinüs ve Fourier Sinüs dönüşümlerini ve ters dönüşümlerin kapalı bir formulünü vermiştir. Fourier integral dönüşümü fikrinin Cauchy ve Laplace tarafından bilindiği ve bazı çalışmalarında ortaya çıktığı belirtilmektedir. Ayrıca Fourier dönüşümünün farklı bir şekli de Poisson tarafından su dalgalarının yayılımı üzerine yazılan bir makalede görülmüştür.

Laplace ve Fourier integral dönüşümlerinin dışında literatürde sıkça kullanılan dönüşümler Mellin, Bessel, Hankel, Stieltjes dönüşümleridir.

Mellin dönüşüm çifti yani Mellin ve ters Mellin dönüşümü, Riemann'ın asal sayılar üzerine yaptığı çalışmalarda kullanılmış ve daha sonra Cahen tarafından daha açık bir şekilde formülize edilmiştir. Ancak dönüşümü titizlikle çalışan ve bazı uy-

gulamalarına dikkat çeken ilk kişi Fin matematikçi Hjalmar Mellin(1854-1933)dir. Bu yüzden dönüşüm onun adı ile anılmaktadır. Mellin dönüşümü, iki yanlı Laplace dönüşümünde bir değişken dönüşümü yardımıyla elde edilebildiğinden, dönüşümün birçok özelliği de yine iki yanlı Laplace dönüşümü yardımıyla bulunur.

Stieltjes dönüşümü, ilk olarak Hollandalı matematikçi Thomas Joannes Stieltjes(1856-1894)'in sürekli kesirler hakkındaki makalesinde görülmektedir. Stieltjes'in matematiğe en önemli katkısı Lebesgue ile yaptığı ve yirminci yüzyılda en önemli tanımlarından biri olan Lebesgue-Stieltjes integralidir. Stieltjes dönüşümü, yarı sonsuz bir aralık için Stieltjes'in moment problemiyle bağlantılı olarak da ortaya çıkmıştır.

Hankel dönüşümü, adını Riemann'ın öğrencisi olan Alman matematikçi Hermann-Effef Hankel(1839-1873)'den almıştır. Çekirdeğinde, adını Alman gökbilimci Friedrich Wilhelm Bessel(1784-1846)'in tanımladığı ν . mertebeden birinci tür Bessel fonksiyonunu bulundurur. ν . mertebeden Hankel dönüşümü, bir lineer integral dönüşümüdür. Çekirdeğinde Bessel fonksiyonlarını içeren Hankel tipi dönüşümlerde mevcuttur. Bu dönüşümlere örnek olarak $\mathcal{Y}_\nu$, $\mathcal{I}_\nu$, $\mathbf{H}_\nu$ ve $\mathcal{K}_\nu$ dönüşümleri gösterilebilir. Hankel dönüşümü silindirik koordinatlarda formülize edilmiş bir sınır-değer probleminin çözümünde ortaya çıkmıştır. Aynı zamanda bu dönüşümün formülünde dairesel simetri sağlandığında n -boyutlu Fourier dönüşümü ile ilgili bağlantıdan da elde edilebilir.

1.4 İntegral Dönüşümler

Bu bölümde tez boyunca kullanılacak olan integral dönüşümlerin tanımları, özellikleri ve bazı uygulamaları verilecektir.

Verilen bir f fonksiyonunun, bir integral yardımıyla yeni bir fonksiyona dönüştürülmesine integral dönüşümü denir. f , t 'nin reel veya kompleks değişkenli bir fonksiyonu, s reel veya kompleks değerli bir parametre olmak üzere

$$D(s) = \int_a^b C(s, t) f(t) dt \quad (1.56)$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona f in integral dönüşümü, $C(s, t)$ fonksiyonuna da

dönüşümün çekirdeği denir. Çekirdek ve sınırlar değiştikçe farklı integral dönüşümleri elde edilir. Literatürde çok sık kullanılan integral dönüşümleri Fourier, Laplace, Mellin, Hankel ve K -dönüşümü gibi dönüşümlerdir.

1.4.1 Fourier Dönüşümünün Tanımı, Özellikleri ve Uygulamaları

Tanım 1.28 Bir $f(t)$ fonksiyonunun Fourier integral dönüşümü, integralin varlığı koşulu altında

$$F(y) = \mathcal{F}\{f(t); y\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyt} f(t) dt$$

ve ters Fourier dönüşümü

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(y); t\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iyt} F(y) dy$$

biçiminde tanımlıdır.

Tanım 1.29 Bir $f(t)$ fonksiyonunun Fourier Sinüs dönüşümü, integralin varlığı koşulu altında

$$F_s(y) = \mathcal{F}_s\{f(t); y\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \sin(yt) f(t) dt \quad \text{Re } y > 0$$

ve ters Fourier Sinüs dönüşümü

$$f(t) = \mathcal{F}_s^{-1}\{F_s(y); t\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \sin(yt) F_s(y) dy$$

biçiminde tanımlıdır.

Tanım 1.30 Bir $f(t)$ fonksiyonunun Fourier Kosinüs dönüşümü, integralin varlığı koşulu altında

$$F_c(y) = \mathcal{F}_c\{f(t); y\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \cos(yt) f(t) dt \quad \text{Re } y > 0$$

ve ters Fourier Kosinüs dönüşümü

$$f(t) = \mathcal{F}_c^{-1}\{F_c(y); t\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \cos(yt) F_c(y) dy$$

biçiminde tanımlıdır.

Fourier, Fourier Sinüs ve Fourier Kosinüs dönüşümleri ve ters Fourier dönüşümleri lineer dönüşümlerdir ve aşağıdaki özellikleri sağlarlar:

1. $\operatorname{Re} a > 0$ için

$$(a) \mathcal{F}\{f(at); y\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{y}{a}\right),$$

$$(b) \mathcal{F}_s\{f(at); y\} = \frac{1}{a} F_s\left(\frac{y}{a}\right),$$

$$(c) \mathcal{F}_c\{f(at); y\} = \frac{1}{a} F_c\left(\frac{y}{a}\right)$$

eşitlikleri geçerlidir.

2. $f(t)$ sürekli, türevlenebilir ve $t \rightarrow \infty$ iken $f(t) \rightarrow 0$ olsun. Bu durumda

$$(a) \mathcal{F}\{f'(t); y\} = iyF(y),$$

$$(b) \mathcal{F}_s\{f'(t); y\} = -yF_c(y),$$

$$(c) \mathcal{F}_c\{f'(t); y\} = -yF_s(y) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f(0)$$

eşitlikleri geçerlidir.

3. $f(t)$ ve $f'(t)$ sürekli, türevlenebilir ve $t \rightarrow \infty$ iken $f(t) \rightarrow 0$ ve $f'(t) \rightarrow 0$ olsun.

Bu durumda

$$(a) \mathcal{F}\{f''(t); y\} = -y^2 F(y),$$

$$(b) \mathcal{F}_s\{f''(t); y\} = -y^2 F_s(y) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} y f(0),$$

$$(c) \mathcal{F}_c\{f''(t); y\} = -y^2 F_c(y) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f'(0)$$

eşitlikleri doğrudur.

Örnek 1.1 Bazı elemanter ve özel fonksiyonların Fourier dönüşümleri altındaki görüntüleri aşağıdaki gibidir:

1. $\mathcal{F}_c\{t^{-a}; y\} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sec\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) y^{\alpha-1}, \quad 0 < \operatorname{Re} \alpha < 1.$
2. $\mathcal{F}_s\{t^{-a}; y\} = \Gamma(1 - \alpha) \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) y^{\alpha-1}, \quad 0 < \operatorname{Re} \alpha < 2.$
3. $\mathcal{F}_c\left\{\frac{1}{a+t}; y\right\} = -\operatorname{si}(ay) \sin(ay) - \operatorname{Ci}(ay) \cos(ay), \quad |\arg a| < \pi.$
4. $\mathcal{F}_s\left\{\frac{1}{a+t}; y\right\} = \operatorname{Ci}(ay) \sin(ay) - \operatorname{si}(ay) \cos(ay), \quad |\arg a| < \pi.$
5. $\mathcal{F}_c\left\{\frac{1}{a^2+t^2}; y\right\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-ay}}{a}, \quad \operatorname{Re} a > 0.$
6. $\mathcal{F}_s\left\{\frac{1}{a^2+t^2}; y\right\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-ay}, \quad \operatorname{Re} a > 0.$
7. $\mathcal{F}_c\{e^{-at}; y\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2+y^2}, \quad \operatorname{Re} a > 0.$
8. $\mathcal{F}_s\{e^{-at}; y\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{y}{a^2+y^2}, \quad \operatorname{Re} a > 0.$
9. $\mathcal{F}_c\{\sin(at); y\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{y^2-a^2}.$
10. $\mathcal{F}_s\{\cos(at); y\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{y}{y^2-a^2}.$
11. $\mathcal{F}_c\left\{\mathcal{J}_\beta(2\sqrt{at}); y\right\} = -\sqrt{\frac{a}{2}} y^{3/2} \left[\sin\left(\frac{a}{2y} - \frac{\pi\beta}{4}\right) J_{\frac{\beta-1}{2}}\left(\frac{a}{2y}\right) + \cos\left(\frac{a}{2y} - \frac{\pi\beta}{4}\right) J_{\frac{\beta+1}{2}}\left(\frac{a}{2y}\right) \right],$
 $\operatorname{Re} \beta > -2, a > 0.$
12. $\mathcal{F}_s\left\{\mathcal{J}_\beta(2\sqrt{at}); y\right\} = \sqrt{\frac{a}{2}} y^{3/2} \left[\cos\left(\frac{a}{2y} - \frac{\pi\beta}{4}\right) J_{\frac{\beta-1}{2}}\left(\frac{a}{2y}\right) - \sin\left(\frac{a}{2y} - \frac{\pi\beta}{4}\right) J_{\frac{\beta+1}{2}}\left(\frac{a}{2y}\right) \right],$
 $\operatorname{Re} \beta > -4, a > 0.$

1.4.2 Laplace Dönüşümü, Özellikleri ve Uygulamaları

Tanım 1.31 Bir $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü, integralin varlığı koşulu altında

$$L(s) = \mathcal{L}\{f(x); s\} = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx \quad \operatorname{Re} s > 0$$

ve ters Laplace dönüşümü

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}\{L(s); x\} = \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{sx} L(s) ds \quad \text{Re } s > 0$$

biçiminde tanımlıdır.

Laplace ve ters Laplace dönüşümü lineer dönüşümlerdir ve aşağıdaki özellikleri sağlarlar:

1. $\text{Re } a > 0$ için, $\mathcal{L}\{f(at); y\} = \frac{1}{a} L\left(\frac{y}{a}\right)$ geçerlidir.
2. $f(t)$ sürekli, türevlenebilir ve $t \rightarrow \infty$ iken $f(t) \rightarrow 0$ olsun. Bu durumda $\mathcal{L}\{f'(t); y\} = yL(y) - f(0)$ biçiminde gerçekleşir.
3. $f(t)$ ve $f'(t)$ sürekli, türevlenebilir ve $t \rightarrow \infty$ iken $f(t) \rightarrow 0$ olsun. Bu durumda $\mathcal{L}\{f''(t); y\} = y^2 L(y) - yf(0) - f'(0)$ eşitliği geçerlidir.

Örnek 1.2 Bazı elemanter ve özel fonksiyonların Laplace dönüşümü altındaki görüntüleri aşağıdaki gibidir:

1. $\mathcal{L}\{t^\beta; y\} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{y^{\beta+1}}, \quad \text{Re } \beta > -1.$
2. $\mathcal{L}\left\{\frac{t^\alpha}{a+t}; y\right\} = \Gamma(\alpha+1) a^\alpha e^{ay} \Gamma(-\alpha, ay), \quad |\arg a| < \pi, \text{Re } \alpha > -1.$
3. $\mathcal{L}\left\{\frac{t^{\alpha-1}}{1+t^2}; y\right\} = \pi \csc(\pi\alpha) V_\alpha(2y, 0), \quad \text{Re } \alpha > 0, \text{Re } y > 0.$
4. $\mathcal{L}\left\{\frac{t^{\nu-1}}{(t+a)^{\nu-1/2}}; y\right\} = 2^{\nu-1/2} \Gamma(\nu) y^{-1/2} e^{ay/2} D_{1-2\nu}(\sqrt{2ay}), \quad \text{Re } \nu > 0, |\arg a| < \pi, \text{Re } y > 0.$
5. $\mathcal{L}\left\{\frac{t^{\nu-1}}{(t+a)^{\nu+1/2}}; y\right\} = 2^\nu \Gamma(\nu) a^{-1/2} e^{ay/2} D_{-2\nu}(\sqrt{2ay}), \quad \text{Re } \nu > 0, |\arg a| < \pi, \text{Re } y > 0.$
6. $\mathcal{L}\{t^{\nu-1} e^{-at}; y\} = \frac{\Gamma(\nu)}{(a+y)^\nu}, \quad \text{Re } y > -\text{Re } a, \text{Re } \nu > 0.$
7. $\mathcal{L}\{t^{\nu-1} \sin at; y\} = \frac{\Gamma(\nu)}{2} \left[\frac{1}{(y-ia)^\nu} + \frac{1}{(y+ia)^\nu} \right], \quad \text{Re } \nu > 0, \text{Re } y > |\text{Im } a|.$

$$8. \mathcal{L}\{t^{\nu-1} \cos at; y\} = \frac{\Gamma(\nu)}{2} \left[\frac{1}{(y-ia)^\nu} - \frac{1}{(y+ia)^\nu} \right], \quad \operatorname{Re} \nu > -1, \operatorname{Re} y > |\operatorname{Im} a|.$$

$$9. \mathcal{L}\{t^\beta \mathcal{J}_\nu(2\sqrt{at}); y\} = \frac{a^{\beta/2}}{y^{\alpha+1+\beta/2}} \frac{\Gamma(\alpha+1+\beta/2)}{\Gamma(1+\beta)} {}_1F_1\left(\alpha+1+\beta/2; 1+\beta; -\frac{a}{y}\right),$$

$$\operatorname{Re}\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) > -1.$$

$$10. \mathcal{L}\{t^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}^\ell(\lambda t^\alpha); y\} = \frac{1}{y^\beta (1 - \lambda y^{-\alpha})^\ell}, \quad \operatorname{Re} y \geq 0, |y| > |\lambda|^{\operatorname{Re} \alpha}.$$

1.4.3 Mellin Dönüşümü, Özellikleri ve Uygulamaları

Tanım 1.32 Bir $f(t)$ fonksiyonunun Mellin dönüşümü, integralin varlığı koşulu altında

$$M(y) = \mathcal{M}\{f(x); y\} = \int_0^\infty x^{y-1} f(x) dx \quad \operatorname{Re} y > 0$$

ve Ters Mellin dönüşümü

$$f(x) = \mathcal{M}^{-1}\{M(y); x\} = \int_{-i\infty}^{i\infty} M(y) x^{-y} dy \quad \operatorname{Re} y > 0$$

biçiminde tanımlıdır.

Mellin ve ters Mellin dönüşümleri lineer dönüşümlerdir ve aşağıdaki özellikleri sağlarlar:

1. $\operatorname{Re} a > 0$ için, $\mathcal{M}\{f(at); y\} = a^{-y} M(y)$ geçerlidir.
2. $\mathcal{M}\{x^a f(t); y\} = M(y+a)$ ve $\mathcal{M}\{f(x^a); y\} = \frac{1}{a} M\left(\frac{y}{a}\right)$.
3. $x \rightarrow 0$ ve $x \rightarrow \infty$ iken $|x^{y-1} f(x)| \rightarrow 0$ sağlanıyorsa $\mathcal{M}\{f'(t); y\} = -(y-1)M(y-1)$ gerçekleşir.
4. $x \rightarrow 0$ ve $x \rightarrow \infty$ iken $|x^{y-1} f(x)| \rightarrow 0$ ve $|x^{y-1} f'(x)| \rightarrow 0$ sağlanıyorsa $\mathcal{M}\{f'(t); y\} = (y-1)(y-2)M(y-2)$ gerçekleşir.

Örnek 1.3 Bazı elemanter ve özel fonksiyonların Mellin dönüşümü altındaki görüntüleri aşağıdaki gibidir:

1. $\mathcal{M}\left\{\frac{1}{a+t};s\right\} = \frac{\pi a^{s-1}}{\sin(\pi s)}, \quad |\arg a| < \pi, 0 < \operatorname{Re} s < 1.$
2. $\mathcal{M}\left\{\frac{1}{a^2+t^2};s\right\} = \frac{\pi a^{s-2}}{2 \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)}, \quad |\arg a| < \pi, 0 < \operatorname{Re} s < 2.$
3. $\mathcal{M}\left\{\frac{1}{(1+at)^\beta};s\right\} = a^{-s} B(s, \beta-s), \quad |\arg a| < \pi, 0 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} \beta.$
4. $\mathcal{M}\{e^{-as};s\} = a^{-s} \Gamma(s), \quad \operatorname{Re} a > 0, \operatorname{Re} s > 0.$
5. $\mathcal{M}\{\sin(at);s\} = a^{-s} \Gamma(s) \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right), \quad \operatorname{Re} a > 0, -1 < \operatorname{Re} s < 1.$
6. $\mathcal{M}\{\cos(at);s\} = a^{-s} \Gamma(s) \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right), \quad \operatorname{Re} a > 0, 0 < \operatorname{Re} s < 1.$
7. $\mathcal{M}\left\{\mathcal{J}_\beta(at);s\right\} = \frac{2^{s-1} \Gamma(s/2 + \beta/2)}{a^s \Gamma(\beta/2 - s/2 + 1)}, \quad -\operatorname{Re} \beta < \operatorname{Re} s < 3/2.$
8. $\mathcal{M}\left\{\mathcal{Y}_\beta(at);s\right\} = -2^{s-1} a^{-s} \pi^{-1} \Gamma(s/2 + \beta/2) \Gamma(s/2 - \beta/2) \cos(1/2(s - \beta)\pi),$
 $|\operatorname{Re} \beta| < \operatorname{Re} s < 3/2.$
9. $\mathcal{M}\left\{\mathcal{K}_\beta(at);s\right\} = a^{-s} 2^{s-2-1} \Gamma(s/2 + \beta/2) \Gamma(s/2 - \beta/2), \quad \operatorname{Re} s > |\operatorname{Re} \beta|.$
10. $\mathcal{M}\left\{H_\beta^{(j)}(at);s\right\} = \frac{(1 \mp i) 2^{s-1} \Gamma(s/2 + \beta/2)}{a^s \Gamma(\beta/2 - s/2 + 1)}, \quad |\operatorname{Re} \beta| < \operatorname{Re} s < 3/2, a > 0.$

1.4.4 Hankel Dönüşümü, Özellikleri ve Uygulamaları

Tanım 1.33 Bir $f(t)$ fonksiyonunun Hankel dönüşümü, integralin varlığı koşulu altında

$$H(s, \nu) = \mathcal{H}_\nu\{f(x);s\} = \int_0^\infty (st)^{1/2} \mathcal{J}_\nu(st) f(t) dt \quad \operatorname{Re} s > 0$$

ve ters Hankel dönüşümü

$$f(x) = \mathcal{H}_\nu^{-1}\{H(s, \nu);x\} = \int_0^\infty (st)^{1/2} \mathcal{J}_\nu(st) H(s, \nu) ds \quad \operatorname{Re} s > 0$$

biçiminde tanımlıdır.

Hankel ve ters Hankel dönüşümleri lineer dönüşümlerdir ve aşağıdaki özellikleri sağlarlar:

1. $\operatorname{Re} a > 0$ için, $\mathcal{H}\{f(at); s\} = \frac{1}{a} H\left(\frac{s}{a}; \nu\right)$ geçerlidir.
2. $\mathcal{H}_\nu\left\{\frac{f(x)}{x}; s\right\} = \frac{1}{2\nu} [sH(s; \nu - 1) + sH(s; \nu + 1)]$ gerçeklenir.
3. $\mathcal{H}_\nu\{f'(x); s\} = \frac{1}{2\nu} \left[\left(\nu - \frac{1}{2}\right) sH(s; \nu + 1) - \left(\nu + \frac{1}{2}\right) sH(s; \nu - 1) \right]$ gerçeklenir.

Örnek 1.4 Bazı elemanter ve özel fonksiyonların Hankel dönüşümü altındaki görüntüleri aşağıdaki gibidir:

1. $\mathcal{H}_\nu\{t^\beta; y\} = 2^{\beta+1/2} y^{-\beta-1} \frac{\Gamma(\beta/2 + \nu/2 + 3/4)}{\Gamma(\nu/2 - \beta/2 + 1/4)}, \quad -\operatorname{Re}(\nu - 3/2) < \operatorname{Re} \beta < -1/2.$
2. $\mathcal{H}_\nu\{t^{\rho-3/2} (x+a)^{-\mu-1}; y\} = \frac{y^{1/2} \pi a^{\rho-\mu-1}}{\sin(\pi(\rho + \nu - \mu)) \Gamma(\mu + 1)} \times \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (ay/2)^{\nu+2m} \Gamma(\rho + \nu + 2m)}{m! \Gamma(\nu + m + 1) \Gamma(\rho + \nu - \mu + 2m)} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ay/2)^{\mu+1-\rho+m} \Gamma(\mu + m + 1) \sin(\pi(\rho + \nu - \mu - m)/2)}{m! \Gamma((\mu + \nu - \rho + m + 3)/2) \Gamma((\mu - \nu - \rho + m + 3)/2)} \right],$
 $|\arg a| < \pi, \operatorname{Re}(\rho + \nu) > 0, \operatorname{Re}(\rho - \mu) < 5/2.$
3. $\mathcal{H}_\nu\{t^{\lambda-3/2} (x^2 + a^2)^{-\mu-1}; y\} = \frac{y^{\nu+1/2} \Gamma(\lambda/2 + \nu/2) \Gamma(\mu - \lambda/2 - \nu/2 + 1)}{2^{\nu+1} a^{2\mu-\lambda-\nu+2} \Gamma(\mu + 1) \Gamma(\nu + 1)} {}_1F_2\left(\lambda/2 + \nu/2; \lambda/2 + \nu/2 - \mu, \nu + 1; \frac{a^2 y^2}{4}\right) + \frac{y^{2\mu-\lambda+5/2} \Gamma(\lambda/2 + \nu/2 - \mu - 1)}{2^{2\mu-\lambda+3} \Gamma(\nu/2 - \lambda/2 + \mu + 2)} {}_1F_2\left(\mu + 1; \mu + 2 - \lambda/2 + \nu/2; \mu + 2 - \lambda/2 - \nu/2; \frac{a^2 y^2}{4}\right)$
 $\operatorname{Re} a > 0, -\operatorname{Re} \nu < \operatorname{Re} \lambda < 2 \operatorname{Re} \mu + 7/2.$
4. $\mathcal{H}_\nu\{t^{\mu-1/2} e^{-at^2}; y\} = \frac{s^{\nu+1/2} \Gamma\left(\frac{\nu}{2} + \frac{\mu}{2} + \frac{1}{2}\right)}{2^{\nu+1} a^{\nu/2+\mu/2+1/2} \Gamma(1 + \nu)} {}_1F_1\left(\frac{\nu}{2} + \frac{\mu}{2} + \frac{1}{2}; 1 + \nu; -\frac{s^2}{4a}\right),$
 $\operatorname{Re} a > 0, \operatorname{Re}(\mu + \nu) > -1.$
5. $\mathcal{H}_\nu\{t^{-1/2} \cos(at^2); y\} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi y}{a}} \cos\left(\frac{\pi}{2} \left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}\right) - \frac{y^2}{8a}\right) \mathcal{J}_{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{y^2}{8a}\right), \quad a > 0, \operatorname{Re} \nu > -1.$
6. $\mathcal{H}_\nu\{t^{-1/2} \sin(at^2); y\} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi y}{a}} \sin\left(\frac{\pi}{2} \left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}\right) - \frac{y^2}{8a}\right) \mathcal{J}_{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{y^2}{8a}\right), \quad a > 0, \operatorname{Re} \nu > -3.$
7. $\mathcal{H}_\nu\{t^{1/2} \cos(at^2); y\} = \frac{\pi^{1/2} y^{3/2}}{2^3 a^{3/2}} \left[\cos\left(\frac{y^2}{8a} - \frac{\pi \nu}{4}\right) \mathcal{J}_{\frac{\nu+1}{2}}\left(\frac{y^2}{8a}\right) + \sin\left(\frac{y^2}{8a} - \frac{\pi \nu}{4}\right) \mathcal{J}_{\frac{\nu-1}{2}}\left(\frac{y^2}{8a}\right) \right],$
 $a > 0, \operatorname{Re} \nu > -2.$

$$8. \mathcal{H}_\nu \left\{ t^{1/2} \sin(at^2); y \right\} = \frac{\pi^{1/2} y^{3/2}}{2^3 a^{3/2}} \left[\cos\left(\frac{y^2}{8a} - \frac{\pi\nu}{4}\right) \mathcal{J}_{\frac{\nu-1}{2}}\left(\frac{y^2}{8a}\right) - \sin\left(\frac{y^2}{8a} - \frac{\pi\nu}{4}\right) \mathcal{J}_{\frac{\nu+1}{2}}\left(\frac{y^2}{8a}\right) \right],$$

$a > 0, \operatorname{Re} \nu > -4.$

$$9. \mathcal{H}_\nu \left\{ t^{\nu+1/2} \cos(at^2); y \right\} = \frac{y^{\nu+1/2}}{2^{\nu+1} a^{\nu+1}} \sin\left(\frac{y^2}{4a} - \frac{\pi\nu}{2}\right), \quad -1 < \operatorname{Re} \nu < 1/2.$$

$$10. \mathcal{H}_\nu \left\{ t^{\nu+1/2} \sin(at^2); y \right\} = \frac{y^{\nu+1/2}}{2^{\nu+1} a^{\nu+1}} \cos\left(\frac{y^2}{4a} - \frac{\pi\nu}{2}\right), \quad a > 0, -2 < \operatorname{Re} \nu < 1/2.$$

$$11. \mathcal{H}_\nu \left\{ t^{-2\lambda-1/2} \mathcal{J}_\nu(at); s \right\} = \frac{s^{\nu+1/2} 2^{-2\lambda}}{a^{\nu-2\lambda+1}} \frac{\Gamma\left(\nu - \lambda + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \Gamma(\nu+1)} {}_2F_1\left(\nu - \lambda + \frac{1}{2}, -\lambda + \frac{1}{2}; 1 + \nu; \frac{s^2}{a^2}\right),$$

$a > 0, \operatorname{Re}(\nu + 1/2) > \operatorname{Re} \lambda > -1/2.$

1.4.5 Bessel Dönüşümü ve Özellikleri

Tanım 1.34 Bir $f(t)$ fonksiyonunun Bessel dönüşümü, integralin varlığı koşulu altında

$$K(s, \nu) = \mathcal{K}_\nu \{f(t); s\} = \int_0^\infty (st)^{1/2} \mathcal{K}_\nu(st) f(t) dt, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

ve Ters Bessel dönüşümü

$$f(t) = \mathcal{K}_\nu^{-1} \{K(s, \nu); t\} = \int_0^\infty (st)^{1/2} \mathcal{K}_\nu(st) K(s, \nu) ds, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

biçiminde tanımlıdır.

Bessel ve ters Bessel dönüşümleri lineer dönüşümlerdir ve aşağıdaki özellikleri sağlarlar:

1. $\operatorname{Re} a > 0$ için, $\mathcal{K}_\nu \{f(at); s\} = \frac{1}{a} K\left(\frac{s}{a}; \nu\right)$ geçerlidir.
2. $\mathcal{K}_\nu \left\{ \frac{f(x)}{x}; s \right\} = \frac{1}{2\nu} [sK(s; \nu-1) + sK(s; \nu+1)]$ gerçekleşir.
3. $\mathcal{K}_\nu \{f'(x); s\} = \frac{1}{2\nu} \left[\left(\nu - \frac{1}{2}\right) sK(s; \nu+1) - \left(\nu + \frac{1}{2}\right) sK(s; \nu-1) \right]$ gerçekleşir.

1.4.6 Stieltjes Dönüşümü ve Özellikleri

Tanım 1.35 Bir $f(t)$ fonksiyonunun Stieltjes dönüşümü, integralin varlığı koşulu altında

$$S(y) = \mathcal{S}\{f(t); y\} = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t+y} dt, \quad |\arg y| < \pi$$

biçiminde tanımlıdır.

Stieltjes dönüşümü bir lineer dönüşümdür ve aşağıdaki özellikleri sağlar.

1. $\mathcal{S}\{f(at); y\} = S(ay), \quad a > 0,$
2. $\mathcal{S}\left\{\frac{f(t)}{t+a}; y\right\} = \frac{S(a) - S(y)}{y-a}, \quad |\arg y| < \pi,$
3. $\mathcal{S}\{f'(t); y\} = -y^{-1}f(0) - S'(y).$

1.4.7 Genelleştirilmiş Stieltjes Dönüşümü ve Özellikleri

Tanım 1.36 Bir $f(t)$ fonksiyonunun genelleştirilmiş Stieltjes dönüşümü, integralin varlığı koşulu altında

$$S(y, \rho) = \mathcal{S}_\rho\{f(t); y\} = \int_0^\infty \frac{f(t)}{(t+y)^\rho} dt, \quad |\arg y| < \pi$$

biçiminde tanımlıdır.

Genelleştirilmiş Stieltjes dönüşümü bir lineer dönüşümdür ve aşağıdaki özellikleri sağlar.

1. $\mathcal{S}_\rho\{f(at); y\} = a^{\rho-1} S(ay, \rho), \quad a > 0,$
2. $\mathcal{S}_\rho\{tf(t); y\} = S(y, \rho-1) - yS(y, \rho),$
3. $\mathcal{S}_\rho\{f'(t); y\} = \rho S(y, \rho+1) - y^{-\rho}f(0).$

1.4.8 Widder-Potansiyel Dönüşümü ve Özellikleri

Tanım 1.37 Bir $f(t)$ fonksiyonunun Widder-Potansiyel dönüşümü, integralin varlığı koşulu altında

$$P(y) = \mathcal{P}\{f(t); y\} = \int_0^\infty \frac{tf(t)}{t^2 + y^2} dt, \quad |\arg y| < \pi$$

biçiminde tanımlıdır.

Widder-Potansiyel dönüşümü lineer bir dönüşümdür ve aşağıdaki özellikleri sağlar:

1. $\mathcal{P}\{f(at); y\} = P(ay),$
2. $\mathcal{P}\{f(t); y\} = \frac{1}{2} \mathcal{S}\{f(t^{1/2}); y^2\}.$

1.4.9 Kesirli Hesap

Son yüzyıllarda ortaya çıkan kesirli hesap, birçok fizik ve mühendislik problemlerinin modelleme sürecinde kullanılmaktadır. Bu modellemeyi yapabilmek için kesirli mertebeden diferansiyel denklemlere ve bunun içinde kesirli türev ve integrale ihtiyaç vardır. Riemann-Liouville ve Caputo anlamında kesirli türev en çok bilinenlerdir. Bu bölümde bazı kesirli türev ve integrallerin tanımları ve özellikleri verilecektir.

Tanım 1.38 Bir $f(t)$ fonksiyonunun Riemann-Liouville kesirli integrali, integralin varlığı koşulu altında

$$R(y, \mu) = D_{RL}^{-\mu}\{f(t); y\} = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^y (y-t)^{\mu-1} f(t) dt \quad (1.57)$$

biçiminde tanımlıdır.

Tanım 1.39 Bir $f(t)$ fonksiyonunun Riemann-Liouville anlamında kesirli türevi,

$$D_{RL}^\mu\{f(t)\} = D^m(D_{RL}^{-\nu}f(t)), \quad \mu > 0, t > 0, m \geq \operatorname{Re} \mu \geq m-1 \text{ ve } \nu = m - \mu \quad (1.58)$$

biçimde tanımlıdır.

Tanım 1.40 Bir $f(t)$ fonksiyonunun Caputo anlamında kesirli türevi,

$$D_C^\mu \{f(t)\} = D_{RL}^{-\nu} (D^m f(t)), \quad \mu > 0, t > 0, m \geq \operatorname{Re} \mu \geq m-1 \text{ ve } \nu = m - \mu \quad (1.59)$$

biçimde tanımlıdır.

Tanım 1.41 Bir $f(t)$ fonksiyonunun Weyl kesirli integrali, integralin varlığı koşulu altında

$$W(y, \mu) = W_\mu \{f(t); y\} = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_y^\infty f(t) (t-y)^{\mu-1} dt \quad (1.60)$$

biçiminde tanımlıdır.

Riemann-Liouville kesirli türevi ve kesirli integrali, Caputo kesirli türevi ve Weyl kesirli integrali lineer dönüşümlerdir ve aşağıdaki özellikleri sağlarlar:

1. $D_{RL}^{-\mu} \{f(at); y\} = a^{-\mu} R(ay, \mu)$ ve $W_\mu \{f(at); y\} = a^{-\mu} W(ay, \mu)$,
2. $D_{RL}^{-\mu} \{f'(t); y\} = R(y, \mu-1) - f(0) y^{\mu-1} / \Gamma(\mu)$ ve $W_\mu \{f'(t); y\} = -W(y, \mu-1)$,
3. $D_{RL}^{-\mu} \left\{ \int_0^t f(x) dx; y \right\} = R(y, \mu+1)$ ve $W_\mu \left\{ \int_t^\infty f(x) dx, y \right\} = W(y, \mu+1)$,
4. $\mathcal{L} \left\{ D_{RL}^\mu f(t); y \right\} = y^\mu \mathcal{L} \{f(t); y\} - \sum_{k=0}^{m-1} y^k D_{RL}^{(\mu-k-1)} f(0) \quad \mu > 0, t > 0, m \geq \operatorname{Re} \mu \geq m-1 \text{ ve } \nu = m - \mu$,
5. $\mathcal{L} \left\{ D_C^\mu f(t); y \right\} = y^\mu \mathcal{L} \{f(t); y\} - \sum_{k=1}^m y^{\mu-k} D_C^{k-1} f(0) \quad \mu > 0, t > 0, m \geq \operatorname{Re} \mu \geq m-1 \text{ ve } \nu = m - \mu$.

2 MATERİYAL ve YÖNTEM

2.1 Genelleştirilmiş Bessel-Maitland Fonksiyonu

Bu bölümde Singh tarafından tanımlanan genelleştirilmiş Bessel-Maitland fonksiyonunun özel halleri ve Singh tarafından elde edilen bazı Teorem ve Sonuçlar incelenecektir.

Tanım 2.1 Genelleştirilmiş Bessel-Maitland fonksiyonu $\mu, \nu, \gamma \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} \mu \geq 0, \operatorname{Re} \nu \geq -1, \operatorname{Re} \gamma \geq 0$ ve $p \in (0, 1) \cup \mathbb{N}$ ve $(\gamma)_0 = 1, (\gamma)_{pn} = \frac{\Gamma(\gamma + pn)}{\Gamma(\gamma)}$ olmak üzere, 2011 yılında Singh tarafından aşağıdaki seri gösterilişiyle tanımlanmıştır:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\nu, p}^{\mu, \gamma}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{pn} (-z)^n}{n! \Gamma(\mu n + \nu + 1)} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\gamma)} {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (\gamma, p); \\ (\nu + 1, \mu); \end{matrix} \middle| z \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(\gamma)} H_{1,2}^{1,1} \left[\begin{matrix} (1 - \gamma, p) \\ (0, 1), (-\nu, \mu) \end{matrix} \middle| z \right]. \end{aligned} \quad (2.1)$$

(2.1) ile tanımlanan seri gösterilişinden yararlanarak bazı özel fonksiyonlar aşağıdaki biçimde gösterilebilir [19]:

1. (2.1) tanımında $p = 0$ alınırsa, (1.51) ile tanımlanan Bessel-Maitland fonksiyonu elde edilir:

$$\mathcal{J}_{\nu, 0}^{\mu, \gamma}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n! \Gamma(\mu n + \nu + 1)} = \mathcal{J}_{\nu}^{\mu}(z). \quad (2.2)$$

2. (2.1) tanımında $p = 0, \nu = \nu - 1, z = -z$ alınırsa, Wright fonksiyonu elde edilir [27]:

$$\mathcal{J}_{\nu-1, 0}^{\mu, \gamma}(-z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n! \Gamma(\mu n + \nu)} = \phi(\mu, \nu; z). \quad (2.3)$$

3. (2.1) tanımında $\mu = 1, p = 0, z = z^2/4$ alınırsa, Bessel fonksiyonu elde edilir [5]:

$$\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} \mathcal{J}_{\nu,0}^{1,\gamma}\left(\frac{z^2}{4}\right) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z^2/4)^n}{n! \Gamma(n + \nu + 1)} = \mathcal{J}_{\nu}(z). \quad (2.4)$$

4. $\mu, \nu, \gamma \in \mathbb{C}$; $\operatorname{Re} \mu > 0$, $\operatorname{Re} \nu > 0$, $\operatorname{Re} \gamma > 0$ ve $p \in (0, 1) \cup \mathbb{N}$ olmak üzere (2.1) ile tanımlanan seri gösterilişinde $\nu = \nu - 1$ alınırsa Shukla ve Prajapati tarafından tanımlanan

$$\mathcal{J}_{\nu-1,p}^{\mu,\gamma}(-z) = E_{\mu,\nu}^{\gamma,p}(z) \quad (2.5)$$

fonksiyonu elde edilir [21].

5. (2.5) bağıntısında $p = 1$ alınırsa, Prabhakar tarafından tanımlanan

$$\mathcal{J}_{\nu-1,1}^{\mu,\gamma}(-z) = E_{\mu,\nu}^{\gamma}(z) \quad (2.6)$$

fonksiyonu elde edilir [17].

6. (2.6) ile verilen bağıntıda ek olarak, $\gamma = 1$ yazılırsa, Wiman tarafından tanımlanan

$$\mathcal{J}_{\nu-1,1}^{\mu,1}(-z) = E_{\mu,\nu}(z) \quad (2.7)$$

fonksiyonu elde edilir [26].

7. (2.7) bağıntısında ek olarak, $\nu = 1$ yazılırsa, Mittag-Leffler tarafından tanımlanan

$$\mathcal{J}_{0,1}^{\mu,1}(-z) = E_{\mu}(z) \quad (2.8)$$

fonksiyonu elde edilir [11].

Singh (2.1) ile tanımlanan genelleştirilmiş Bessel-Maitland Fonksiyonu ile ilgili aşağıdaki temel özellikleri ispatlamıştır:

Teorem 2.1 $\mu, \nu, \gamma \in \mathbb{C}$; $\operatorname{Re} \mu \geq 0$, $\operatorname{Re} \nu \geq -1$, $\operatorname{Re} \gamma \geq 0$ ve $p \in (0, 1) \cup \mathbb{N}$ olmak üzere $m \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki bağıntılar geçerlidir:

$$\frac{d^m}{dz^m} \left(\mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(z) \right) = (-1)^m (\gamma)_{pm} \mathcal{J}_{\nu+\mu m,p}^{\mu,\gamma+pm}(z) \quad (2.9)$$

$$\mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(z) = (\nu+1) \mathcal{J}_{\nu+1,p}^{\mu,\gamma}(z) + \mu z \frac{d}{dz} \mathcal{J}_{\nu+1,p}^{\mu,\gamma}(z) \quad (2.10)$$

$$\mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(z) - \mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma-1}(z) = -zp \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{pn+p-1}}{\Gamma(\mu n + \mu + \nu + 1)} \frac{(-z)^n}{n!} \quad (2.11)$$

Özel olarak $p = 1$ yazılırsa

$$\mathcal{J}_{\nu,1}^{\mu,\gamma-1}(z) - \mathcal{J}_{\nu,1}^{\mu,\gamma}(z) = z \mathcal{J}_{\nu+\mu,1}^{\mu,\gamma}(z) \quad (2.12)$$

bağıntısı gerçekleşir [19].

İspat: (2.1) ile verilen genelleştirilmiş Bessel-Maitland fonksiyonunun tanımından

$$\frac{d^m}{dz^m} \left(\mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(z) \right) = \frac{d^m}{dz^m} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{pn} (-1)^n z^n}{\Gamma(\mu n + \nu + 1) n!} \right)$$

bulunur, toplam ile türev operatörleri yer değiştirdiğinde

$$\frac{d^m}{dz^m} \left(\mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(z) \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{pn} (-1)^n}{\Gamma(\mu n + \nu + 1)} \frac{d^m}{dz^m} \frac{z^n}{n!}$$

elde edilir. Burada

$$\frac{d^m}{dz^m} z^n = \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \dots = \frac{z^{n-m}}{(n-m)!}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dz^m} \left(\mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(z) \right) &= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(\gamma)_{pn} (-1)^n}{\Gamma(\mu n + \nu + 1)} \frac{z^{n-m}}{(n-m)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{pn+pm} (-1)^{n+m}}{\Gamma(\mu n + \mu m + \nu + 1)} \frac{z^n}{n!} \end{aligned}$$

seri gösterilişi elde edilir. Pochhammer sembolünün tanımından

$$\frac{d^m}{dz^m} \left(\mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(z) \right) = (-1)^m (\gamma)_{pm} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma + pm)_{pn} (-1)^n}{\Gamma(\mu n + \mu m + \nu + 1)} \frac{z^n}{n!},$$

ve buradan genelleştirilmiş Bessel-Maitland fonksiyonunun tanımı kullanılarak

$$\frac{d^m}{dz^m} \left(\mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(z) \right) = (-1)^m (\gamma)_{pm} \mathcal{J}_{\nu+\mu m,p}^{\mu,\gamma+pm}(z)$$

(2.9) sonucuna ulaşılır. (2.10) bağıntısının ispatına eşitliğin sağ tarafından başlanır ve (2.9) bağıntısında $m = 1$ ve $\nu = \nu + 1$ alınırsa,

$$(\nu + 1) \mathcal{J}_{\nu+1,p}^{\mu,\gamma}(z) + \mu z \frac{d}{dz} \mathcal{J}_{\nu+1,p}^{\mu,\gamma}(z) = (\nu + 1) \mathcal{J}_{\nu+1,p}^{\mu,\gamma}(z) - \mu z (\gamma)_p \mathcal{J}_{\nu+\mu+1,p}^{\mu,\gamma+p}(z)$$

bulunur. (2.1) ile verilen genelleştirilmiş Bessel-Maitland fonksiyonunun tanımından

$$\begin{aligned} (\nu + 1) \mathcal{J}_{\nu+1,p}^{\mu,\gamma}(z) + \mu z \frac{d}{dz} \mathcal{J}_{\nu+1,p}^{\mu,\gamma}(z) &= (\nu + 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{pn} (-z)^n}{n! \Gamma(\mu n + \nu + 2)} \\ &\quad - \mu z (\gamma)_p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma + p)_{pn} (-z)^n}{n! \Gamma(\mu n + \nu + \mu + 2)} \end{aligned}$$

elde edilir. (1.2) ile verilen Pochhammer sembolünün özelliğinden

$$\begin{aligned} (\nu + 1) \mathcal{J}_{\nu+1,p}^{\mu,\gamma}(z) + \mu z \frac{d}{dz} \mathcal{J}_{\nu+1,p}^{\mu,\gamma}(z) &= (\nu + 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{pn} (-z)^n}{n! \Gamma(\mu n + \nu + 2)} \\ &\quad + \mu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{pn+p} (-z)^{n+1}}{n! \Gamma(\mu n + \mu + \nu + 2)}, \end{aligned}$$

ve buradan eşitliğin sağ tarafındaki ilk toplam yeniden düzenlenirse,

$$\begin{aligned} &(\nu + 1) \mathcal{J}_{\nu+1,p}^{\mu,\gamma}(z) + \mu z \frac{d}{dz} \mathcal{J}_{\nu+1,p}^{\mu,\gamma}(z) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu + 1)} + (\nu + 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\gamma)_{pn} (-z)^n}{n! \Gamma(\mu n + \nu + 2)} + \mu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{pn+p} (-z)^{n+1}}{n! \Gamma(\mu n + \mu + \nu + 2)} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu + 1)} + (\nu + 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{pn+p} (-z)^{n+p}}{(n+1)! \Gamma(\mu n + \mu + \nu + 2)} + \mu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{pn+p} (-z)^{n+1}}{n! \Gamma(\mu n + \mu + \nu + 2)} \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre eşitliğin sağ tarafı tek bir toplam altında yazıldığında

$$\begin{aligned}
(\nu + 1) \mathcal{J}_{\nu+1,p}^{\mu,\gamma}(z) + \mu z \frac{d}{dz} \mathcal{J}_{\nu+1,p}^{\mu,\gamma}(z) &= \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{(\gamma)_{pn+p} (-z)^{n+1} (\mu n + \mu + \nu + 1)}{(n+1)! \Gamma(\mu n + \mu + \nu + 2)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{pn} (-z)^n}{n! \Gamma(\mu n + \nu + 1)} \\
&= \mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(z)
\end{aligned}$$

(2.10) sonucuna ulaşılır. (2.11) bağıntısının ispatı için (2.1) ile verilen genelleştirilmiş Bessel-Maitland fonksiyonunun tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(z) - \mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma-1}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{pn} (-z)^n}{n! \Gamma(\mu n + \nu + 1)} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma-1)_{pn} (-z)^n}{n! \Gamma(\mu n + \nu + 1)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n! \Gamma(\mu n + \nu + 1)} [(\gamma)_{pn} - (\gamma-1)_{pn}]
\end{aligned}$$

elde edilir. Ek olarak, Pochhammer sembolünün (1.1) tanımı ve (1.2) özelliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(z) - \mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma-1}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n! \Gamma(\mu n + \nu + 1)} (\gamma)_{pn-1} p n \\
&= p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\gamma)_{pn-1} (-z)^n}{(n-1)! \Gamma(\mu n + \nu + 1)} \\
&= -zp \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{pn+p-1} (-z)^n}{n! \Gamma(\mu n + \mu + \nu + 1)}
\end{aligned}$$

(2.11) sonucuna ulaşılır. (2.11) bağıntısında $p = 1$ alınırsa (2.12) bağıntısına kolayca ulaşılır. ■

Teorem 2.2 $\mu, \nu, \gamma, \delta, \alpha, \lambda \in \mathbb{C}$; $\operatorname{Re} \mu \geq 0$, $\operatorname{Re} \nu \geq -1$, $\operatorname{Re} \gamma \geq 0$, $\operatorname{Re} \delta \geq 0$, $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ ve $p \in (0, 1) \cup \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^1 (\omega)^\nu (1-\omega)^{\delta-1} \mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(z\omega^\mu) d\omega = \mathcal{J}_{\nu+\delta,p}^{\mu,\gamma}(z), \quad (2.13)$$

$$\frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_t^x (x-s)^{\delta-1} (s-t)^\nu \mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(\alpha(s-t)^\mu) ds = (x-t)^{\delta+\nu} \mathcal{J}_{\nu+\delta,p}^{\mu,\gamma}(\alpha(x-t)^\mu), \quad (2.14)$$

$$\int_0^x t^\lambda (x-t)^\nu \mathcal{J}_{\nu,1}^{\mu,\gamma}(\omega(x-t)^\mu) \mathcal{J}_{\nu,1}^{\mu,\gamma}(\omega t^\mu) dt = x^{\lambda+\nu+1} \mathcal{J}_{\nu+\lambda+1,1}^{\mu,\gamma+\delta}(\omega x^\mu), \quad (2.15)$$

$$\int_0^z t^\nu \mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(zt^\mu) dt = z^{\nu+1} \mathcal{J}_{\nu+1,p}^{\mu,\gamma}(\omega z^\mu) \quad (2.16)$$

bağıntıları geçerlidir [19].

İspat: (2.13) bağıntısının ispatı için (2.1) ile verilen genelleştirilmiş Bessel-Maitland fonksiyonunun tanımından

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^1 (\omega)^\nu (1-\omega)^{\delta-1} \mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(z\omega^\mu) d\omega \\ &= \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^1 (\omega)^\nu (1-\omega)^{\delta-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{pn} (-z\omega^\mu)^n}{n! \Gamma(\mu n + \nu + 1)} d\omega \end{aligned}$$

bulunur. Burada integral ile toplamın yeri değiştirilirse ve Beta fonksiyonunun (1.9) tanımı ile Gamma fonksiyonu ile ilişkisi olan (1.11) özelliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^1 (\omega)^\nu (1-\omega)^{\delta-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{pn} (-z\omega^\mu)^n}{n! \Gamma(\mu n + \nu + 1)} d\omega \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{pn} (-z)^\mu}{n! \Gamma(\mu n + \nu + 1)} \left(\frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^1 \omega^{\nu+\mu n} (1-\omega)^{\delta-1} d\omega \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{pn} (-z)^\mu}{n! \Gamma(\mu n + \nu + \delta + 1)} \end{aligned}$$

bulunur. Daha sonra (2.1) ile verilen genelleştirilmiş Bessel-Maitland fonksiyonu tanımı kullanılırsa (2.13) sonucuna ulaşılır. Benzer biçimde (2.14) bağıntısının ispatı için (2.1) ile verilen genelleştirilmiş Bessel-Maitland fonksiyonunun tanımından ve integral ile toplam operatörlerinin yer değişiminden

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_t^x (x-s)^{\delta-1} (s-t)^\nu \mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(\alpha(s-t)^\mu) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_t^x (x-s)^{\delta-1} (s-t)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{pn} (-\alpha(s-t)^\mu)^n}{n! \Gamma(\mu n + \nu + 1)} ds \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{pn} (-\alpha)^\mu}{n! \Gamma(\mu n + \nu + 1)} \left(\frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_t^x (x-s)^{\delta-1} (s-t)^{\nu+\mu n} ds \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradaki integralde $u = \frac{s-t}{x-t}$ değişken dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_t^x (x-s)^{\delta-1} (s-t)^v \mathcal{J}_{v,p}^{\mu,\gamma}(\alpha(s-t)^\mu) ds \\ &= (x-t)^{\delta+v} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{pn} (-\alpha(x-t)^\mu)^n}{n! \Gamma(\mu n + v + 1)} \left(\frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^1 u^{v+\mu n} (1-u)^{\delta-1} du \right) \end{aligned}$$

bulunur. Beta fonksiyonunun (1.9) tanımı ile Gamma fonksiyonu ile ilişkisi olan (1.11) özelliği ve (2.1) ile verilen genelleştirilmiş Bessel-Maitland fonksiyonu tanımı kullanılırsa,

$$\frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_t^x (x-s)^{\delta-1} (s-t)^v \mathcal{J}_{v,p}^{\mu,\gamma}(\alpha(s-t)^\mu) ds = (x-t)^{\delta+v} \mathcal{J}_{v+\delta,p}^{\mu,\gamma}(\alpha(x-t)^\mu)$$

(2.14) sonucuna ulaşılır.

(2.15) bağıntısının ispatı için (2.1) ile verilen genelleştirilmiş Bessel-Maitland fonksiyonunun tanımı kullanılır ve integral ile toplam operatörleri yer değiştirirse,

$$\begin{aligned} & \int_0^x t^\lambda (x-t)^v \mathcal{J}_{v,p}^{\mu,\gamma}(\omega(x-t)^\mu) \mathcal{J}_{v,1}^{\mu,\gamma}(\omega t^\mu) dt \\ &= \sum_{n,k=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{pn} (\delta)_{pk}}{\Gamma(\mu n + v + 1) \Gamma(\mu k + \lambda + 1)} \frac{(-\omega)^{n+k}}{n!k!} \int_0^x t^{\lambda+\mu n} (x-t)^{v+\mu k} dt \end{aligned}$$

bulunur. Burada $t = xu$ değişken dönüşümü yapılır ve Beta fonksiyonunun (1.9) tanımı ile Gamma fonksiyonu ile ilişkisi olan (1.11) özelliği ve (2.1) ile verilen genelleştirilmiş Bessel-Maitland fonksiyonu tanımı kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & \int_0^x t^\lambda (x-t)^v \mathcal{J}_{v,p}^{\mu,\gamma}(\omega(x-t)^\mu) \mathcal{J}_{v,1}^{\mu,\gamma}(\omega t^\mu) dt \\ &= \sum_{n,k=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{pn} (\delta)_{pk}}{\Gamma(\mu n + v + 1) \Gamma(\mu k + \lambda + 1)} \frac{(-\omega)^{n+k}}{n!k!} \int_0^1 (xu)^{\lambda+\mu n} (x-xu)^{v+\mu k} x du \\ &= \sum_{n,k=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{pn} (\delta)_{pk}}{\Gamma(\mu n + v + 1) \Gamma(\mu k + \lambda + 1)} \frac{(-\omega)^{n+k}}{n!k!} x^{\lambda+\mu n+v+\mu k+1} B(\lambda + \mu n + 1, v + \mu k + 1) \\ &= \sum_{n,k=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{pn} (\delta)_{pk}}{\Gamma(\mu(n+k) + v + \lambda + 2)} \frac{(-\omega)^{n+k}}{n!k!} x^{\lambda+\mu n+v+\mu k+1} \end{aligned}$$

elde edilir. Daha sonra seriler için Cauchy çarpımı ve $p = 1$ için Pochhammer sembolü için (1.3) özdeşliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
& \int_0^x t^\lambda (x-t)^\nu \mathcal{J}_{\nu,1}^{\mu,\gamma}(\omega(x-t)^\mu) \mathcal{J}_{\nu,1}^{\mu,\gamma}(\omega t^\mu) dt \\
&= x^{\lambda+\nu+1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(\gamma)_{n-k} (\delta)_k}{\Gamma(\mu n + \nu + \lambda + 2)} \frac{(-\omega x^\mu)^n}{n!} \\
&= x^{\lambda+\nu+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma + \delta)_n}{\Gamma(\mu n + \nu + \lambda + 2)} \frac{(-\omega x^\mu)^n}{n!} \\
&= x^{\lambda+\nu+1} \mathcal{J}_{\nu+\lambda+1,1}^{\mu,\gamma+\delta}(\omega x^\mu)
\end{aligned}$$

(2.15) sonucuna ulaşılır.

(2.16) bağıntısının ispatı için (2.1) ile verilen genelleştirilmiş Bessel-Maitland fonksiyonunun tanımı kullanılır ve integral ile toplam operatörü yer değiştirirse,

$$\int_0^z t^\nu \mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(\omega t^\mu) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{pn}}{\Gamma(\mu n + \nu + 1)} \frac{(-\omega)^n}{n!} \int_0^z t^{\mu n + \nu} dt$$

elde edilir. Gerekli hesaplamalar yapıldığında

$$\begin{aligned}
\int_0^z t^\nu \mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(\omega t^\mu) dt &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{pn}}{\Gamma(\mu n + \nu + 1)} \frac{(-\omega)^n}{n!} \frac{z^{\mu n + \nu + 1}}{(\mu n + \nu + 1)} \\
&= z^{\nu+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{pn}}{\Gamma(\mu n + \nu + 2)} \frac{(-\omega z^\mu)^n}{n!} \\
&= z^{\nu+1} \mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(\omega z^\mu)
\end{aligned}$$

(2.16) sonucuna ulaşılır. ■

Teorem 2.3 $\mu, \nu, \gamma \in \mathbb{C}$; $\operatorname{Re} \mu \geq 0$, $\operatorname{Re} \nu \geq -1$, $\operatorname{Re} \gamma \geq 0$ ve $p \in (0, 1) \cup \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda $\mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(z)$ fonksiyonunun Mellin-Barnes integral gösterilişi aşağıdaki gibidir:

$$\mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i \Gamma(\gamma)} \int_L \frac{\Gamma(s) \Gamma(\gamma - ps)}{\Gamma(1 + \nu - \mu s)} z^{-s} ds, \quad (|\arg z| < \pi). \quad (2.17)$$

Burada L , $-i\infty$ 'dan $+i\infty$ 'a bir doğru parçasını göstermektedir.

İspat: Mellin-Barnes gösterilişini ispatlamak için, $s = 0, -1, -2, \dots$ noktalarındaki rezidülerin toplaması gerekmektedir. Buna göre,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i \Gamma(\gamma)} \int_L \frac{\Gamma(s) \Gamma(\gamma - ps)}{\Gamma(1 + v - \mu s)} z^{-s} ds &= \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \sum_{n=0}^{\infty} \text{Res}_{s=-n} \left\{ \frac{\Gamma(s) \Gamma(\gamma - ps)}{\Gamma(1 + v - \mu s)} z^{-s} \right\} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{s \rightarrow -n} \left[(s + n) \frac{\Gamma(s) \Gamma(\gamma - ps)}{\Gamma(1 + v - \mu s)} z^{-s} \right] \end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır. Gamma fonksiyonunun özellikleri (1.6) ile verilen Euler'in Yan-sıma Formülü kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i \Gamma(\gamma)} \int_L \frac{\Gamma(s) \Gamma(\gamma - ps)}{\Gamma(1 + v - \mu s)} z^{-s} ds &= \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{s \rightarrow -n} \left[\frac{\pi(s + n)}{\sin \pi s} \frac{\Gamma(\gamma - ps)}{\Gamma(1 + v - \mu s)} z^{-s} \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\Gamma(\gamma + pn)}{\Gamma(1 + v + \mu n)} z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{pn}}{\Gamma(1 + v + \mu n)} \frac{(-z)^n}{n!} \\ &= \mathcal{J}_{v,p}^{\mu,\gamma}(z) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Signh yaptığı çalışmada genelleştirilmiş Bessel-Maitland fonksiyonunun bazı in-tegral dönüşümleri altındaki görüntüsünü ve özel durumlarını incelemiştir ([19],[20]).

Teorem 2.4 $\mu, \nu, \gamma, \delta, \alpha, s \in \mathbb{C}; \text{Re } \mu \geq 0, \text{Re } \nu \geq -1, \text{Re } \gamma \geq 0, \text{Re } \delta \geq 0, \text{Re } \alpha \geq 0, \text{Re } s \geq 0$ ve $p \in (0, 1) \cup \mathbb{N}$ olmak üzere;

$$\mathcal{L} \left\{ z^{\alpha-1} \mathcal{J}_{v,p}^{\mu,\gamma}(xz^\delta); s \right\} = \frac{s^{-\alpha}}{\Gamma(\gamma)} {}_2\Psi_1 \left[\begin{matrix} (\gamma, p), (\alpha, \delta) \\ (\nu + 1, \mu) \end{matrix} \middle| -\frac{x}{s^\delta} \right] \quad (2.18)$$

biçimindedir [19].

İspat: Laplace dönüşümünün tanımı ve genelleştirilmiş Bessel-Maitland fonksi-yonunun (2.1) ile verilen seri açılımı yardımıyla

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{z^{\alpha-1} \mathcal{J}_{v,p}^{\mu,\gamma}(xz^\delta); s\} &= \int_0^\infty e^{-sz} z^{\alpha-1} \mathcal{J}_{v,p}^{\mu,\gamma}(xz^\delta) dz \\ &= \int_0^\infty e^{-sz} z^{\alpha-1} \sum_{n=0}^\infty \frac{(\gamma)_{pn}}{\Gamma(\mu n + v + 1)} \frac{(-xz^\delta)^n}{n!} dz\end{aligned}$$

elde edilir. İntegral ile toplam operatörleri yer değiştirdiğinde,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{z^{\alpha-1} \mathcal{J}_{v,p}^{\mu,\gamma}(xz^\delta); s\} &= \sum_{n=0}^\infty \frac{(\gamma)_{pn}}{\Gamma(\mu n + v + 1)} \frac{(-x)^n}{n!} \left(\int_0^\infty e^{-sz} z^{\alpha+\delta n-1} dz \right) \\ &= \sum_{n=0}^\infty \frac{(\gamma)_{pn}}{\Gamma(\mu n + v + 1)} \frac{(-x)^n}{n!} \mathcal{L}\{z^{\alpha+\delta n-1}; s\}\end{aligned}$$

bulunur. Örnek1.2’de verilen 1 numaralı formülde $\beta = \alpha + \delta n - 1$ seçimi yapılırsa

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{z^{\alpha-1} \mathcal{J}_{v,p}^{\mu,\gamma}(xz^\delta); s\} &= \sum_{n=0}^\infty \frac{(\gamma)_{pn}}{\Gamma(\mu n + v + 1)} \frac{(-x)^n}{n!} \frac{\Gamma(\delta n + \alpha)}{s^{\alpha+\delta n}} \\ &= \frac{1}{s^\alpha} \sum_{n=0}^\infty \frac{(\gamma)_{pn}}{\Gamma(\mu n + v + 1)} \frac{\Gamma(\delta n + \alpha)}{n!} \frac{(-x/s^\delta)^n}{n!}\end{aligned}$$

bulunur. Buradan, (1.33) ile verilen Fox-Wright fonksiyonunun tanımından

$$\mathcal{L}\{z^{\alpha-1} \mathcal{J}_{v,p}^{\mu,\gamma}(xz^\delta); s\} = \frac{s^{-\alpha}}{\Gamma(\gamma)} {}_2\Psi_1 \left[\begin{matrix} (\gamma, p), (\alpha, \delta) \\ (\nu + 1, \mu) \end{matrix} \middle| -\frac{x}{s^\delta} \right]$$

elde edilir. ■

SONUÇ: $p = 1$, $\alpha = \nu + 1$ ve $\delta = \mu$ için (2.18) formülü,

$$\mathcal{L}\{z^\nu \mathcal{J}_{v,1}^{\mu,\gamma}(xz^\mu); s\} = \frac{s^{-\nu-1}}{\Gamma(\gamma)} {}_1\Psi_0 \left[\begin{matrix} (\gamma, 1) \\ - \end{matrix} \middle| -\frac{x}{s^\mu} \right] \quad (2.19)$$

biçimini alır. Fox-Wright fonksiyonu ile genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyon arasındaki (1.34) ile verilen bağıntı yardımıyla

$$\mathcal{L}\left\{z^v \mathcal{J}_{v,1}^{\mu,\gamma}(xz^\mu); s\right\} = \frac{s^{-v-1}}{\Gamma(\gamma)} {}_1F_0\left(\gamma; -; -\frac{x}{s^\mu}\right)$$

olarak yazılabilir. Genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonun (1.14) özel durumundan

$$\mathcal{L}\left\{z^v \mathcal{J}_{v,1}^{\mu,\gamma}(xz^\mu); s\right\} = \frac{s^{-v-1}}{\Gamma(\gamma)} (1 + xs^{-\mu})^{-\gamma}$$

sonucuna ulaşılır.

Benzer biçimde $\alpha = v + 1$, $\delta = \mu$, $\gamma = p = 1$, $x = \pm t$ için (2.18) formülü,

$$\mathcal{L}\left\{z^v \mathcal{J}_{v,1}^{\mu,1}(\mp tz^\mu); s\right\} = s^{-v-1} {}_1\Psi_0\left[\begin{matrix} (1,1) \\ - \end{matrix} \middle| \mp \frac{x}{s^\mu}\right]$$

biçimini alır. Fox-Wright fonksiyonu ile genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyon arasındaki (1.34) ile verilen bağıntı yardımıyla,

$$\mathcal{L}\left\{z^v \mathcal{J}_{v,1}^{\mu,\gamma}(xz^\mu); s\right\} = s^{-v-1} {}_1F_0\left(1; -; -\frac{x}{s^\mu}\right)$$

olarak yazılabilir. Genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonun (1.14) özel durumundan

$$\mathcal{L}\left\{z^v \mathcal{J}_{v,1}^{\mu,\gamma}(xz^\mu); s\right\} = s^{-v-1} (1 \pm xs^{-\mu})^{-1} = \frac{s^{\mu-v-1}}{s^\mu \pm t}, \quad \left|\frac{t}{s^\mu}\right| < 1,$$

sonucuna ulaşılır.

Teorem 2.5 $\mu, v, \gamma, s \in \mathbb{C}$; $\operatorname{Re} \mu \geq 0$, $\operatorname{Re} v \geq -1$, $\operatorname{Re} \gamma \geq 0$, $\operatorname{Re} \alpha \geq 0$, $\operatorname{Re} s \geq 0$ ve $p \in \mathbb{N}$ olmak üzere, genelleştirilmiş Bessel-Maitland fonksiyonunun Mellin dönüşümü,

$$\mathcal{M}\left\{\mathcal{J}_{v,p}^{\mu,\gamma}(\omega z); s\right\} = \frac{\Gamma(s)\Gamma(\gamma - ps)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(1 + v - \mu s)} \omega^s \quad (2.20)$$

bağıntısı ile verilir [19].

İspat: (2.17) ile verilen Mellin-Barnes integral gösterilişi yardımıyla

$$\mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(\omega z) = \frac{1}{2\pi i \Gamma(\gamma)} \int_L \frac{\Gamma(s) \Gamma(\gamma - ps)}{\Gamma(1 + \nu - \mu s)} \omega^{-s} z^{-s} ds$$

olarak yazılabilir. Öte yandan, Ters Mellin dönüşümü tanımını kullanılırsa

$$\mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(\omega z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \mathcal{M}\{\mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(\omega z); s\} z^{-s} ds$$

biçiminde ifade edilir. Buradan

$$\mathcal{M}\{\mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(\omega z); s\} = \frac{\Gamma(s) \Gamma(\gamma - ps)}{\Gamma(\gamma) \Gamma(1 + \nu - \mu s) \omega^s}$$

eşitliği gerçekleşir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

3 BULGULAR ve TARTIŞMA

3.1 Genelleştirilmiş Bessel-Maitland Fonksiyonu

Bu bölümde, genelleştirilmiş Bessel-Maitland fonksiyonunun tanımı ile bazı özel halleri incelenerek birkaç elemanter ve özel fonksiyona indirgenecektir. Daha sonra teoremler yardımıyla fonksiyonun özellikleri genişletilecek ve parametrelerin özel seçimi ile literatürde iyi bilinen Bessel fonksiyonunun özelliklerine indirgenecektir.

(2.1) ile verilen genelleştirilmiş Bessel-Maitland fonksiyonunda parametrelerin özel seçimi ile indirgendiği elemanter ve özel fonksiyonları aşağıdaki biçimde sıralayabiliriz.

1. $p = 1, \gamma = 1, \mu = 0, \nu = 0$ ve $|z| < 1$ için

$$\mathcal{J}_{0,1}^{0,1}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n = \frac{1}{1+z} \quad (3.1)$$

eşitliği gerçekleşir.

2. $\mu = p, \gamma = 1, \nu = 0$ için

$$\mathcal{J}_{0,p}^{p,1}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{\Gamma(n+1)} = e^{-z} \quad (3.2)$$

gerçeklenir.

3. $p = 1, \gamma = 1, \mu = 2, \nu = 1$ için

$$z\mathcal{J}_{1,1}^{2,1}(z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{\Gamma(2n+2)} = \sin z \quad (3.3)$$

ve

$$z\mathcal{J}_{1,1}^{2,1}(-z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{\Gamma(2n+2)} = \sinh z \quad (3.4)$$

sonuçlarına ulaşılır.

4. $p = 1, \gamma = 1, \mu = 2, \nu = 0$ için

$$\mathcal{J}_{0,1}^{2,1}(z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{\Gamma(2n+1)} = \cos z \quad (3.5)$$

ve

$$\mathcal{J}_{0,1}^{2,1}(-z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{\Gamma(2n+1)} = \cosh z$$

eşitlikleri gerçekleşir.

5. $\mu = 1, p = 0, z = z^2/4$ için

$$\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \mathcal{J}_{\nu,0}^{1,\gamma}\left(\frac{z^2}{4}\right) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z^2/4)^n}{n! \Gamma(n+\nu+1)} = \mathcal{J}_\nu(z) \quad (3.6)$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin(\pi\nu)} \left[\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \mathcal{J}_{\nu,0}^{1,\gamma}\left(\frac{z^2}{4}\right) \cos(\pi\nu) - \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} \mathcal{J}_{-\nu,0}^{1,\gamma}\left(\frac{z^2}{4}\right) \right] = \\ \frac{1}{\sin(\pi\nu)} [\mathcal{J}_\nu(z) \cos(\pi\nu) - \mathcal{J}_{-\nu}(z)] = \mathcal{Y}_\nu(z) \end{aligned} \quad (3.7)$$

sonuçlarına ulaşılır.

6. $\mu = 1, p = 0, z = -z^2/4$ için

$$\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \mathcal{J}_{\nu,0}^{1,\gamma}\left(\frac{-z^2}{4}\right) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^2/4)^n}{n! \Gamma(n+\nu+1)} = \mathcal{I}_\nu(z) \quad (3.8)$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\pi}{\sin(\pi\nu)} \left[\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \mathcal{J}_{\nu,0}^{1,\gamma}\left(\frac{-z^2}{4}\right) - \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} \mathcal{J}_{-\nu,0}^{1,\gamma}\left(\frac{-z^2}{4}\right) \right] = \\ \frac{1}{2} \frac{\pi}{\sin(\pi\nu)} [\mathcal{I}_\nu(z) - \mathcal{I}_{-\nu}(z)] = \mathcal{K}_\nu(z) \end{aligned} \quad (3.9)$$

eşitlikleri gerçekleşir.

Önerme 3.1 $\mu, \nu, \gamma \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} \mu \geq 0, \operatorname{Re} \nu \geq -1, \operatorname{Re} \gamma \geq 0$ ve $p \in (0, 1) \cup \mathbb{N}$ olmak üzere

$m \in \mathbb{N}$ için

$$\mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(z) = \frac{1}{\nu} \mathcal{J}_{\nu-1,p}^{\mu,\gamma}(z) + \frac{(\gamma)_p \mu z}{\nu} \mathcal{J}_{\nu+\mu,p}^{\mu,\gamma+p}(z) \quad (3.10)$$

bağıntısı geçerlidir.

İspat: (2.9) ve (2.10) bağıntıları göz önüne alınsın. (2.9) Bağıntısında $m = 1$ seçilirse,

$$\frac{d}{dz} \left(\mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(z) \right) = (-1)(\gamma)_p \mathcal{J}_{\nu+\mu,p}^{\mu,\gamma+p}(z) \quad (3.11)$$

elde edilir. Benzer biçimde (2.10) bağıntısında $\nu = \nu - 1$ alınır ve bağıntı $\frac{d}{dz} \left(\mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(z) \right)$ için yeniden düzenlenirse

$$\frac{d}{dz} \left(\mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(z) \right) = \frac{1}{\mu z} \mathcal{J}_{\nu-1,p}^{\mu,\gamma}(z) - \frac{\nu}{\mu z} \mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(z) \quad (3.12)$$

bulunur. (3.11) ve (3.12) bağıntıları birlikte düşünüldüğünde

$$(-1)(\gamma)_p \mathcal{J}_{\nu+\mu,p}^{\mu,\gamma+p}(z) = \frac{1}{\mu z} \mathcal{J}_{\nu-1,p}^{\mu,\gamma}(z) - \frac{\nu}{\mu z} \mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(z)$$

bağıntısı elde edilir. Bu bağıntı $\mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(z)$ için yeniden düzenlendiğinde

$$\mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(z) = \frac{1}{\nu} \mathcal{J}_{\nu-1,p}^{\mu,\gamma}(z) + \frac{(\gamma)_p \mu z}{\nu} \mathcal{J}_{\nu+\mu,p}^{\mu,\gamma+p}(z)$$

bulunur. ■

Sonuç 3.1 (3.10) ilk olarak $\mu = 1$, $p = 0$, $z = z^2/4$ seçilirse

$$\mathcal{J}_{\nu,0}^{1,\gamma} \left(\frac{z^2}{4} \right) = \frac{1}{\nu} \mathcal{J}_{\nu-1,0}^{1,\gamma} \left(\frac{z^2}{4} \right) + \frac{z^2}{2^2 \nu} \mathcal{J}_{\nu+1,0}^{1,\gamma} \left(\frac{z^2}{4} \right)$$

bağıntısı elde edilir. Eşitliğin her iki tarafı $\left(\frac{z}{2} \right)^{\nu-1}$ ile çarpılırsa,

$$\left(\frac{z}{2} \right)^{\nu-1} \mathcal{J}_{\nu,0}^{1,\gamma} \left(\frac{z^2}{4} \right) = \left(\frac{z}{2} \right)^{\nu-1} \frac{1}{\nu} \mathcal{J}_{\nu-1,0}^{1,\gamma} \left(\frac{z^2}{4} \right) + \left(\frac{z}{2} \right)^{\nu+1} \frac{1}{\nu} \mathcal{J}_{\nu+1,0}^{1,\gamma} \left(\frac{z^2}{4} \right)$$

bulunur. Burada, genelleştirilmiş Bessel-Maitland fonksiyonunun özel durumu olan

(3.6) eşitliğinden

$$\frac{2\nu}{z} \mathcal{J}_\nu(z) = \mathcal{J}_{\nu-1}(z) - \mathcal{J}_{\nu+1}(z)$$

bağıntısı elde edilir ([6], s.12, (56)).

Önerme 3.2 $\mu, \nu, \gamma \in \mathbb{C}$; $\operatorname{Re} \mu \geq 0$, $\operatorname{Re} \nu \geq -1$, $\operatorname{Re} \gamma \geq 0$ ve $p \in (0, 1) \cup \mathbb{N}$ olmak üzere $m \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki bağıntı doğrudur:

$$\frac{d^m}{dz^m} \left(z^\nu \mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(z^\mu) \right) = z^{\nu-m} \mathcal{J}_{\nu-m,p}^{\mu,\gamma}(z^\mu) \quad (3.13)$$

İspat: (2.1) ile verilen genelleştirilmiş Bessel-Maitland fonksiyonunun seri gösterilişinden

$$\frac{d^m}{dz^m} \left(z^\nu \mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(z^\mu) \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{pn} (-1)^n}{n! \Gamma(\mu n + \nu + 1)} \frac{d^m}{dz^m} (z^{\mu n + \nu})$$

bulunur. Buradan türev alma işlemi yapıldığında

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dz^m} \left(z^\nu \mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(z^\mu) \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{pn} (-1)^n}{n! \Gamma(\mu n + \nu + 1)} (\mu n + \nu) \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z^{\mu n + \nu - 1}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{pn} (-1)^n}{n! \Gamma(\mu n + \nu + 1)} (\mu n + \nu) (\mu n + \nu - 1) \frac{d^{m-2}}{dz^{m-2}} (z^{\mu n + \nu - 2}) \end{aligned}$$

ve bu şekilde devam edildiğinde

$$\begin{aligned} &\frac{d^m}{dz^m} \left(z^\nu \mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(z^\mu) \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{pn} (-1)^n}{n! \Gamma(\mu n + \nu + 1)} (\mu n + \nu) (\mu n + \nu - 1) \dots (\mu n + \nu - m + 1) z^{\mu n + \nu - m} \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre (1.1) Pochhammer sembolü tanımı ve (1.8) ile verilen Pochhammer sembolü ile Gamma fonksiyonu arasındaki bağıntı yardımıyla

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dz^m} \left(z^\nu \mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(z^\mu) \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{pn} (-1)^n}{n! \Gamma(\mu n + \nu + 1)} (\mu n + \nu - m + 1)_m z^{\mu n + \nu - m} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{pn} (-1)^n}{n! \Gamma(\mu n + \nu + 1)} \frac{\Gamma(\mu n + \nu + 1)}{\Gamma(\mu n + \nu - m + 1)} z^{\mu n + \nu - m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{pn} (-1)^n}{n! \Gamma(\mu n + \nu - m + 1)} z^{\mu n + \nu - m} \\
&= z^{\nu - m} \mathcal{J}_{\nu - m, p}^{\mu, \gamma}(z^\mu)
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Tanım 3.1 $\operatorname{Re} \alpha \geq 0$ için D_α türev oparetörü aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$$D_\alpha \equiv -\frac{1}{\alpha z^{\alpha-1}} \frac{d}{dz}$$

Bu tanıma göre

$$\begin{aligned}
D_\alpha^2 &\equiv -\frac{1}{\alpha z^{\alpha-1}} \frac{d}{dz} \left(-\frac{1}{\alpha z^{\alpha-1}} \frac{d}{dz} \right), \\
D_\alpha^3 &\equiv -\frac{1}{\alpha z^{\alpha-1}} \frac{d}{dz} \left(-\frac{1}{\alpha z^{\alpha-1}} \frac{d}{dz} \left(-\frac{1}{\alpha z^{\alpha-1}} \frac{d}{dz} \right) \right)
\end{aligned}$$

türev oparetörleri yukarıdaki biçimde ifade edilebilir. Böylece D_α -türev oparetörü ard arda uygulanarak herhangi bir pozitif tamsayı kuvveti elde edilebilir.

Önerme 3.3 $\mu, \nu, \gamma \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} \mu \geq 0, \operatorname{Re} \nu \geq -1, \operatorname{Re} \gamma \geq 0, p \in (0, 1) \cup \mathbb{N}$ ve D_μ -türev oparetörü olmak üzere $m \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki bağıntı geçerlidir:

$$\left(\prod_{n=0}^{m-1} \frac{1}{(\gamma + pn)_p} \right) D_\mu^m \left(\mathcal{J}_{\nu, p}^{\mu, \gamma}(z^\mu) \right) = \mathcal{J}_{\nu + \mu m, p}^{\mu, \gamma + pm}(z^\mu). \quad (3.14)$$

İspat: İspat için tümevarım yöntemi kullanılırsa $m = 1$ için

$$\frac{1}{(\gamma)_p} D_\mu \left(\mathcal{J}_{\nu, p}^{\mu, \gamma}(z^\mu) \right) = \frac{1}{(\gamma)_p} \left(-\frac{1}{\mu z^{\mu-1}} \frac{d}{dz} \right) \mathcal{J}_{\nu, p}^{\mu, \gamma}(z^\mu)$$

bulunur. Burada (2.1) ile verilen genelleştirilmiş Bessel-Maitland fonksiyonunun tanımı kullanılır, daha sonra türev oparetörü ile toplam oparetörü yer değiştirirse,

$$\frac{1}{(\gamma)_p} D_\mu \left(\mathcal{J}_{\nu, p}^{\mu, \gamma}(z^\mu) \right) = -\frac{1}{(\gamma)_p} \frac{1}{\mu z^{\mu-1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{pn} (-1)^n}{n! \Gamma(\mu n + \nu + 1)} \left(\frac{d}{dz} \right) (z^{\mu n})$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{(\gamma)_p} \frac{1}{\mu z^{\mu-1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{pn} (-1)^n (\mu n)}{n! \Gamma(\mu n + \nu + 1)} (z^{\mu n-1}) \\
&= -\frac{1}{(\gamma)_p} \frac{1}{z^{\mu-1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\gamma)_{pn} (-1)^n}{(n-1)! \Gamma(\mu n + \nu + 1)} (z^{\mu n-1}) \\
&= -\frac{1}{(\gamma)_p} \frac{1}{z^{\mu-1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{pn+p} (-1)^{n+1}}{n! \Gamma(\mu n + \mu + \nu + 1)} (z^{\mu n + \mu - 1})
\end{aligned}$$

elde edilir. (1.2) ile verilen Pochhammer sembolünün özelliğinden

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(\gamma)_p} D_{\mu}^m \left(\mathcal{J}_{\nu, p}^{\mu, \gamma} (z^{\mu}) \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma + p)_{pn} (-1)^n}{n! \Gamma(\mu n + \mu + \nu + 1)} (z^{\mu})^n \\
&= \mathcal{J}_{\nu + \mu, p}^{\mu, \gamma + p} (z^{\mu})
\end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak $m = 1$ için önerme doğrudur. Diğer taraftan $m = k - 1$ için

$$\left(\prod_{n=0}^{k-2} \frac{1}{(\gamma + pn)_p} \right) D_{\mu}^{k-1} \left(\mathcal{J}_{\nu, p}^{\mu, \gamma} (z^{\mu}) \right) = \mathcal{J}_{\nu + \mu(k-1), p}^{\mu, \gamma + p(k-1)} (z^{\mu})$$

bağıntı doğru olsun. Bu durumda bağıntı $m = k$ için doğrudur. Gerçekten D_{μ} -türev operatörünün tanımından ve ard arda uygulanmasından

$$\begin{aligned}
&\left(\prod_{n=0}^{k-1} \frac{1}{(\gamma + pn)_p} \right) D_{\mu}^k \left(\mathcal{J}_{\nu, p}^{\mu, \gamma} (z^{\mu}) \right) \\
&= \frac{1}{(\gamma + p(k-1))_p} \left(\prod_{n=0}^{k-2} \frac{1}{(\gamma + pn)_p} \right) D_{\mu} \left(D_{\mu}^{k-1} \left(\mathcal{J}_{\nu, p}^{\mu, \gamma} (z^{\mu}) \right) \right) \\
&= \frac{1}{(\gamma + p(k-1))_p} D_{\mu} \left(\left(\prod_{n=0}^{k-2} \frac{1}{(\gamma + pn)_p} \right) D_{\mu}^{k-1} \left(\mathcal{J}_{\nu, p}^{\mu, \gamma} (z^{\mu}) \right) \right)
\end{aligned}$$

bulunur. Önerme $m = k$ için doğru olduğundan

$$\left(\prod_{n=0}^{k-1} \frac{1}{(\gamma + pn)_p} \right) D_{\mu}^k \left(\mathcal{J}_{\nu, p}^{\mu, \gamma} (z^{\mu}) \right) = \frac{1}{(\gamma + p(k-1))_p} D_{\mu} \left(\mathcal{J}_{\nu + \mu(k-1), p}^{\mu, \gamma + p(k-1)} (z^{\mu}) \right)$$

eşitliği gerçekleşir. D_{μ} -türev operatörü tanımı ve (2.1) ile verilen genelleştirilmiş

Bessel-Maitland fonksiyonunun tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \left(\prod_{n=0}^{k-1} \frac{1}{(\gamma + pn)_p} \right) D_\mu^k \left(\mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma} (z^\mu) \right) \\
&= \left(-\frac{1}{(\gamma + p(k-1))_p \mu z^{\mu-1}} \right) \frac{d}{dz} \left(\mathcal{J}_{\nu+\mu(k-1),p}^{\mu,\gamma+p(k-1)} (z^\mu) \right) \\
&= -\frac{1}{\mu z^{\mu-1} (\gamma + p(k-1))_p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma + p(k-1))_{pn} (-1)^n}{n! \Gamma(\mu n + \mu(k-1) + \nu + 1)} \frac{d}{dz} (z^{\mu n}) \\
&= -\frac{1}{z^\mu (\gamma + p(k-1))_p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\gamma + p(k-1))_{pn} (-1)^n}{(n-1)! \Gamma(\mu n + \mu(k-1) + \nu + 1)} z^{\mu n} \\
&= -\frac{1}{z^\mu (\gamma + p(k-1))_p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma + p(k-1))_{pn+p} (-1)^{n+1}}{n! \Gamma(\mu n + \mu + \mu(k-1) + \nu + 1)} z^{\mu n + \mu}
\end{aligned}$$

bulunur. (1.2) ile verilen Pochhammer sembolünün özelliğinden

$$\begin{aligned}
\left(\prod_{n=0}^{k-1} \frac{1}{(\gamma + pn)_p} \right) D_\mu^k \left(\mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma} (z^\mu) \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma + pk)_{pn} (-1)^n}{n! \Gamma(\mu n + \mu k + \nu + 1)} z^{\mu n} \\
&= \mathcal{J}_{\nu+\mu k,p}^{\mu,\gamma+pk} (z^\mu)
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için önerme doğrudur ve tümevarım yöntemi ile ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.1 Genelleştirilmiş Bessel-Maitland fonksiyonu aşağıdaki integral gösterilişlerine sahiptir:

$$\mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,k} (z) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \nu\right)} \int_0^1 t^{-1/2} (1-t)^{\nu-1/2} \mathcal{J}_{-1/2,p}^{\mu,k} (t^\mu z) dt \quad (3.15)$$

$$\mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,k} (z) = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \nu\right)} \int_0^{\pi/2} \sin^{2\nu} \theta \mathcal{J}_{-1/2,p}^{\mu,k} (\cos^2 \theta z) d\theta \quad (3.16)$$

İspat: Genelleştirilmiş Bessel-Maitland fonksiyonunun (2.1) ile verilen seri gösterilişi genişletilerek ve Beta ile Gamma fonksiyonları arasındaki (1.11) ile verilen bağıntı da kullanılarak

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{v,p}^{\mu,k}(z) &= \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma + pn) \Gamma\left(\frac{1}{2} + v\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \mu n\right)}{n! \Gamma(1 + v + \mu n) \Gamma\left(\frac{1}{2} + v\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \mu n\right)} (-z)^n \\
&= \frac{1}{\Gamma(\gamma) \Gamma\left(\frac{1}{2} + v\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma + pn)}{n! \Gamma\left(\frac{1}{2} + \mu n\right)} B\left(\frac{1}{2} + v, \frac{1}{2} + \mu n\right) (-z)^n
\end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. Beta fonksiyonunun (1.9) ile verilen integral gösterilişinden genelleştirilmiş Bessel-Maitland fonksiyonu,

$$\mathcal{J}_{v,p}^{\mu,k}(z) = \frac{1}{\Gamma(\gamma) \Gamma\left(\frac{1}{2} + v\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma + pn)}{n! \Gamma\left(\frac{1}{2} + \mu n\right)} \left(\int_0^1 t^{\mu n - 1/2} (1-t)^{v-1/2} dt \right) (-z)^n$$

biçiminde yazılışa sahiptir. Burada integral ile toplam operatörünün yeri değiştirilir ve genelleştirilmiş Bessel-Maitland fonksiyonunun (2.1) ile verilen tanımını kullanırsa

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{v,p}^{\mu,k}(z) &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + v\right)} \int_0^1 t^{-1/2} (1-t)^{v-1/2} \left(\frac{1}{\Gamma(\gamma)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma + pn)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \mu n\right)} \frac{(-t^\mu z)^n}{n!} \right) dt \\
&= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + v\right)} \int_0^1 t^{-1/2} (1-t)^{v-1/2} \mathcal{J}_{-1/2,p}^{\mu,k}(t^\mu z) dt
\end{aligned}$$

bulunur. Öte yandan, $1-t = \sin^2 \theta$, $-dt = 2 \cos \theta \sin \theta d\theta$ değişken dönüşümü yapıldığında

$$\mathcal{J}_{v,p}^{\mu,k}(z) = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + v\right)} \int_0^{\pi/2} \sin^{2v} \theta \mathcal{J}_{-1/2,p}^{\mu,k}(\cos^{2\mu} \theta z) d\theta$$

biçiminde ikinci bir integral gösterilişi elde edilir. ■

Sonuç 3.2 (3.15) integral gösterilişinde $\mu = 1$, $p = 0$, $z = z^2/4$ seçilirse

$$\mathcal{J}_{v,0}^{1,k}\left(\frac{z^2}{4}\right) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + v\right)} \int_0^1 t^{-1/2} (1-t)^{v-1/2} \mathcal{J}_{-1/2,0}^{1,k}\left(t \frac{z^2}{4}\right) dt$$

elde edilir. Eşitliğin her iki yanını $\left(\frac{z}{2}\right)^v$ ile çarpılırsa

$$\left(\frac{z}{2}\right)^v \mathcal{J}_{\nu,0}^{1,k}\left(\frac{z^2}{4}\right) = \left(\frac{z}{2}\right)^v \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+v\right)} \int_0^1 t^{-1/2} (1-t)^{v-1/2} \left(\frac{t^{1/2}z}{2}\right)^{1/2} \left(\frac{t^{1/2}z}{2}\right)^{-1/2} \mathcal{J}_{-1/2,0}^{1,k}\left(t\frac{z^2}{4}\right) dt$$

bulunur. Genelleştirilmiş Bessel-Maitland fonksiyonunun özel durumu olan (3.6) eşitliğinden

$$\mathcal{J}_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{v+1/2} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+v\right)} \int_0^1 t^{-1/4} (1-t)^{v-1/2} \mathcal{J}_{-1/2}(t^{1/2}z) dt$$

elde edilir. Bessel fonksiyonunun

$$\mathcal{J}_{-1/2}(z) = \frac{2^{1/2}}{\pi^{1/2} z^{1/2}} \cos(z) \quad (3.17)$$

özel hali kullanıldığında

$$\mathcal{J}_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^v \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}+v\right)} \int_0^1 t^{-1/2} (1-t)^{v-1/2} \cos(t^{1/2}z) dt$$

bulunur. Burada $t = u^2$, $dt = 2u du$ değişken dönüşümü yapıldığında

$$\mathcal{J}_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^v \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}+v\right)} \int_0^1 (1-u^2)^{v-1/2} \cos(uz) du$$

integral gösterilişi elde edilir. Benzer biçimde (3.15) integral gösterilişinde $\mu = 1$, $p = 0$, $z = z^2/4$ seçilir ve eşitliğin her iki yanını $\left(\frac{z}{2}\right)^v$ ile çarpılırsa

$$\left(\frac{z}{2}\right)^v \mathcal{J}_{\nu,0}^{1,k}\left(\frac{z^2}{4}\right) = \left(\frac{z}{2}\right)^v \frac{2}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+v\right)} \int_0^{\pi/2} \sin^{2v} \theta \left(\frac{z \cos \theta}{2}\right)^{1/2} \left(\frac{z \cos \theta}{2}\right)^{-1/2} \mathcal{J}_{-1/2,0}^{1,k}\left(\cos^2 \theta \frac{z^2}{4}\right) d\theta$$

bulunur. Genelleştirilmiş Bessel-Maitland fonksiyonunun özel durumu olan (3.6)

eşitliğinden ve Bessel fonksiyonunun (3.17) ile verilen özel halinden

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_\nu(z) &= \left(\frac{z}{2}\right)^{v+1/2} \frac{2}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+v\right)} \int_0^{\pi/2} \sin^{2v} \theta \cos^{1/2} \theta \mathcal{J}_{-1/2}(z \cos \theta) d\theta \\
&= \left(\frac{z}{2}\right)^{v+1/2} \frac{2}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+v\right)} \int_0^{\pi/2} \sin^{2v} \theta \cos^{1/2} \theta \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi} \sqrt{z \cos \theta}} \cos(z \cos \theta) d\theta \\
&= \left(\frac{z}{2}\right)^v \frac{2}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+v\right)} \int_0^{\pi/2} \sin^{2v} \theta \cos(z \cos \theta) d\theta
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

3.2 Genelleştirilmiş Bessel-Maitland İntegral Dönüşümü

Bu bölümde genelleştirilmiş Bessel-Maitland integral dönüşümü tanıtılıp temel özellikleri incelenecektir.

Tanım 3.2 $\alpha, \mu, \nu, \gamma, s \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} \alpha \geq 0, \operatorname{Re} \mu \geq 0, \operatorname{Re} \gamma \geq 0, \operatorname{Re} \nu \geq -1, \operatorname{Re} s \geq 0$ ve $p \in (0, 1) \cup \mathbb{N}$ olmak üzere, Genelleştirilmiş Bessel-Maitland integral dönüşümü veya ${}_\alpha \mathcal{H}_{\nu, p}^{\mu, \gamma}$ ile gösterdiğimiz dönüşüm aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$${}_\alpha \mathcal{H}_{\nu, p}^{\mu, \gamma} \{f(t); s\} = \int_0^\infty (st)^\alpha \mathcal{J}_{\nu, p}^{\mu, \gamma}(st) f(t) dt. \quad (3.18)$$

Önerme 3.4 Genelleştirilmiş Bessel-Maitland fonksiyonunun özel durumları ve integralin özelliklerine göre genelleştirilmiş Bessel-Maitland integral dönüşümünün Laplace ve Hankel integral dönüşümleri ile arasındaki ilişki aşağıdaki bağıntı ile verilir:

$${}_\alpha \mathcal{H}_{0, p}^{p, 1} \{f(t); s\} = s^\alpha \mathcal{L} \{t^\alpha f(t); s\}, \quad (3.19)$$

$$\frac{\nu}{2} - \frac{1}{4} \mathcal{H}_{\nu, 0}^{1, \gamma} \{f(t); s^2\} = \frac{1}{s \sqrt{2}} \mathcal{H}_\nu \left\{ f\left(\frac{t^2}{4}\right); s \right\}. \quad (3.20)$$

İspat: (3.18) tanımında $\mu = p, \nu = 0$ seçimi ve genelleştirilmiş Bessel-Maitland fonksiyonunun (3.2) özel durumu ile (3.19) elde edilir. (3.20) bağıntısının ispatı için,

ilk olarak (3.18) tanımında $t = u^2/4$ değişken dönüşümü uygulanırsa

$${}_α\mathcal{H}_{ν,p}^{μ,γ}\{f(t);s\} = \int_0^\infty \left(s\frac{u^2}{4}\right)^\alpha \mathcal{J}_{ν,p}^{μ,γ}\left(s\frac{u^2}{4}\right) f\left(\frac{u^2}{4}\right) \frac{u}{2} du$$

bulunur. Buradan $μ = 1$, $p = 0$, $s = s^2$ ve $α = \frac{ν}{2} - \frac{1}{4}$ seçilirse, (3.6) eşitliği yardımıyla

$$\begin{aligned} \frac{ν}{2}-\frac{1}{4} \mathcal{H}_{ν,0}^{1,γ}\{f(t);s^2\} &= \int_0^\infty \left(s^2\frac{u^2}{4}\right)^{\frac{ν}{2}-\frac{1}{4}} \mathcal{J}_{ν,0}^{1,γ}\left(s^2\frac{u^2}{4}\right) f\left(\frac{u^2}{4}\right) \frac{u}{2} du \\ &= \frac{1}{s} \int_0^\infty \left(s\frac{u}{2}\right)^{ν+\frac{1}{2}} \mathcal{J}_{ν,0}^{1,γ}\left(s^2\frac{u^2}{4}\right) f\left(\frac{u^2}{4}\right) du \\ &= \frac{1}{s\sqrt{2}} \int_0^\infty (su)^{1/2} \mathcal{J}_ν(su) f\left(\frac{u^2}{4}\right) du \\ &= \frac{1}{s\sqrt{2}} \mathcal{H}_ν\left\{f\left(\frac{t^2}{4}\right);s\right\} \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Önerme 3.5 ${}_α\mathcal{H}_{ν,p}^{μ,γ}$ -dönüşümü için aşağıdakiler doğrudur:

$${}_α\mathcal{H}_{ν,p}^{μ,γ}\{f(t)+g(t);s\} = {}_α\mathcal{H}_{ν,p}^{μ,γ}\{f(t);s\} + {}_α\mathcal{H}_{ν,p}^{μ,γ}\{g(t);s\}, \quad (3.21)$$

$${}_α\mathcal{H}_{ν,p}^{μ,γ}\{f(at);s\} = \frac{1}{a} {}_α\mathcal{H}_{ν,p}^{μ,γ}\left\{f(t);\frac{s}{a}\right\}. \quad (3.22)$$

İspat: ${}_α\mathcal{H}_{ν,p}^{μ,γ}$ -dönüşümünün tanımından ve integralin doğrusallık özelliğinden

$$\begin{aligned} {}_α\mathcal{H}_{ν,p}^{μ,γ}\{f(t)+g(t);s\} &= \int_0^\infty (st)^\alpha \mathcal{J}_{ν,p}^{μ,γ}(st) (f(t)+g(t)) dt \\ &= \int_0^\infty (st)^\alpha \mathcal{J}_{ν,p}^{μ,γ}(st) f(t) dt + \int_0^\infty (st)^\alpha \mathcal{J}_{ν,p}^{μ,γ}(st) g(t) dt \\ &= {}_α\mathcal{H}_{ν,p}^{μ,γ}\{f(t);s\} + {}_α\mathcal{H}_{ν,p}^{μ,γ}\{g(t);s\} \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan ${}_α\mathcal{H}_{ν,p}^{μ,γ}$ -dönüşümünün tanımından

$${}_α\mathcal{H}_{ν,p}^{μ,γ}\{f(at);s\} = \int_0^\infty (st)^\alpha \mathcal{J}_{ν,p}^{μ,γ}(st) f(at) dt$$

bulunur. Burada $at = u$ değişken dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned}
{}_a\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}\{f(at);s\} &= \int_0^\infty \left(s\frac{u}{a}\right)^\alpha \mathcal{J}_{v,p}^{\mu,\gamma}\left(s\frac{u}{a}\right) f(u) \frac{du}{a} \\
&= \frac{1}{a} \int_0^\infty \left(\frac{s}{a}u\right)^\alpha \mathcal{J}_{v,p}^{\mu,\gamma}\left(\frac{s}{a}u\right) f(u) du \\
&= \frac{1}{a} {}_a\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}\left\{f(t); \frac{s}{a}\right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Sonuç 3.3 (3.22) bağıntısında, $\mu = p$, $v = 0$, $\alpha = 0$ seçilir ve (3.19) bağıntısı kullanılırsa,

$$\mathcal{L}\{f(at);s\} = \frac{1}{a} \mathcal{L}\left\{f(t); \frac{s}{a}\right\}$$

Laplace dönüşümünün bilinen özelliği elde edilir ([2], s.142, (3.4.8)). Ek olarak, (3.22) bağıntısında, $f(at) = f(2a\sqrt{t})$ seçilirse

$${}_a\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}\{f(2a\sqrt{t});s\} = \frac{1}{a^2} {}_a\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}\left\{f(2\sqrt{t}); \frac{s}{a^2}\right\}$$

eşitliği gerçekleşir. Burada $\mu = 1$, $p = 0$, $s = s^2$ ve $\alpha = \frac{v}{2} - \frac{1}{4}$ için

$$\frac{v}{2} - \frac{1}{4} \mathcal{H}_{v,0}^{1,\gamma}\{f(2a\sqrt{t});s^2\} = \frac{1}{a^2} \frac{v}{2} - \frac{1}{4} \mathcal{H}_{v,0}^{1,\gamma}\left\{f(2\sqrt{t}); \frac{s^2}{a^2}\right\}$$

bulunur. (3.20) bağıntısı yardımıyla

$$\mathcal{H}_v\{f(at);s\} = \frac{1}{a} \mathcal{H}_v\left\{f(t); \frac{s}{a}\right\}$$

biçiminde Hankel dönüşümünün bilinen özelliği elde edilir ([8], s.5, (2)).

Önerme 3.6 ${}_a\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}$ -dönüşümü için

$${}_a\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}\{f(t);s\} = \frac{1}{v} {}_a\mathcal{H}_{v-1,p}^{\mu,\gamma}\{f(t);s\} + \frac{(\gamma)_p \mu}{v} {}_{\alpha+1}\mathcal{H}_{v+\mu,p}^{\mu,\gamma+p}\{f(t);s\} \quad (3.23)$$

bağıntısı gerçekleşir.

İspat: (3.18) ile verilen ${}_a\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}$ -dönüşümünün tanımı ve (3.10) bağıntısı yardımıyla

$$\begin{aligned} {}_a\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}\{f(t);s\} &= \int_0^\infty (st)^\alpha \mathcal{J}_{v,p}^{\mu,\gamma}(st) f(t) dt \\ &= \frac{1}{v} \int_0^\infty (st)^\alpha \mathcal{J}_{v-1,p}^{\mu,\gamma}(st) f(t) dt \\ &\quad + \frac{(\gamma)_p \mu}{v} \int_0^\infty (st)^{\alpha+1} \mathcal{J}_{v+\mu,p}^{\mu,\gamma+p}(st) f(t) dt \end{aligned}$$

elde edilir. Burada yeniden ${}_a\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}$ -dönüşümünün tanımı kullanılırsa (3.23) bağıntısına ulaşılır. ■

Önerme 3.7 ${}_a\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}$ -dönüşümü için

$${}_a\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}\{t^\beta f(t);s\} = s^{-\beta} {}_{\alpha+\beta}\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}\{f(t);s\} \quad (3.24)$$

ve

$${}_a\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}\{t^\beta f(t);s\} = \frac{s^{-\beta}}{v} {}_{\alpha+\beta}\mathcal{H}_{v-1,p}^{\mu,\gamma}\{f(t);s\} + \frac{s^{-\beta}(\gamma)_p \mu}{v} {}_{\alpha+\beta+1}\mathcal{H}_{v+\mu,p}^{\mu,\gamma+p}\{f(t);s\} \quad (3.25)$$

bağıntıları gerçekleşir.

İspat: ${}_a\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}$ -dönüşümünün tanımından

$$\begin{aligned} {}_a\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}\{t^\beta f(t);s\} &= \int_0^\infty (st)^\alpha t^\beta f(t) \mathcal{J}_{v,p}^{\mu,\gamma}(st) dt \\ &= s^{-\beta} \int_0^\infty (st)^{\alpha+\beta} f(t) \mathcal{J}_{v,p}^{\mu,\gamma}(st) dt \end{aligned}$$

elde edilir. Burada, ${}_a\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}$ -dönüşümünün tanımı yeniden kullanılırsa (3.24) bağıntısına ulaşılır. Öte yandan, ${}_a\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}$ -dönüşümünün tanımı yerine (3.23) bağıntısı kullanılırsa

$${}_a\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}\{t^\beta f(t);s\} = \frac{1}{v} {}_{\alpha}\mathcal{H}_{v-1,p}^{\mu,\gamma}\{t^\beta f(t);s\} + \frac{(\gamma)_p \mu}{v} {}_{\alpha+1}\mathcal{H}_{v+\mu,p}^{\mu,\gamma+p}\{t^\beta f(t);s\}$$

bulunur. Son olarak (3.24) bağıntısı kullanılırsa (3.25) bağıntısı ispatlanmış olur. ■

Sonuç 3.4 (3.25) bağıntısında $\beta = -\frac{1}{2}$, $f(t) = f(2\sqrt{t})$, $\mu = 1$, $p = 0$, $s = s^2$ ve $\alpha = \frac{\nu}{2} - \frac{1}{4}$ seçilirse,

$$\begin{aligned} \frac{\nu}{2} - \frac{1}{4} \mathcal{H}_{\nu,0}^{1,\gamma} \left\{ \frac{f(2\sqrt{t})}{\sqrt{t}}; s^2 \right\} &= \frac{s}{\nu} \frac{\nu-1}{2} - \frac{1}{4} \mathcal{H}_{\nu-1,0}^{1,\gamma} \{f(2\sqrt{t}); s^2\} \\ &+ \frac{s}{\nu} \frac{\nu+1}{2} - \frac{1}{4} \mathcal{H}_{\nu+1,0}^{1,\gamma} \{f(2\sqrt{t}); s^2\} \end{aligned} \quad (3.26)$$

elde edilir. Buradan, (3.20) bağıntısı yardımıyla

$$\frac{1}{s\sqrt{2}} \mathcal{H}_{\nu} \left\{ \frac{2f(t)}{t}; s \right\} = \frac{s}{\nu} \frac{1}{s\sqrt{2}} \mathcal{H}_{\nu-1} \{f(t); s\} + \frac{s}{\nu} \frac{1}{s\sqrt{2}} \mathcal{H}_{\nu+1} \{f(t); s\}$$

bulunur. Bu eşitlik düzenlendiğinde

$$\mathcal{H}_{\nu} \left\{ \frac{2\nu f(t)}{t}; s \right\} = s \mathcal{H}_{\nu-1} \{f(t); s\} + s \mathcal{H}_{\nu+1} \{f(t); s\}$$

biçiminde Hankel dönüşümünün bilinen özelliği elde edilir ([8], s.5, (5)).

Önerme 3.8 ${}_a \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}$ -dönüşümü için

$$\begin{aligned} {}_a \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma} \{f'(t); s\} &= s \left(\frac{\nu}{\mu} - \alpha \right) {}_{\alpha-1} \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma} \{f(t); s\} \\ &- \frac{s}{\mu} {}_{\alpha-1} \mathcal{H}_{\nu-1,p}^{\mu,\gamma} \{f(t); s\} \end{aligned} \quad (3.27)$$

ve

$$\begin{aligned} {}_a \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma} \{f'(t); s\} &= s \left((\gamma)_p - \frac{(\gamma)_p \mu \alpha}{\nu} \right) {}_a \mathcal{H}_{\nu+\mu,p}^{\mu,\gamma+p} \{f(t); s\} \\ &- \left(\frac{s\alpha}{\nu} \right) {}_{\alpha-1} \mathcal{H}_{\nu-1,p}^{\mu,\gamma} \{f(t); s\} \end{aligned} \quad (3.28)$$

bağıntıları gerçekleşir.

İspat: ${}_α\mathcal{H}_{ν,p}^{μ,γ}$ -dönüşümü tanımından

$${}_α\mathcal{H}_{ν,p}^{μ,γ}\{f'(t);s\} = \int_0^\infty (st)^\alpha \mathcal{J}_{ν,p}^{μ,γ}(st) f'(t) dt \quad (3.29)$$

elde edilir. Burada (3.29) integraline kısmi integrasyon uygulandığında

$$\begin{aligned} {}_α\mathcal{H}_{ν,p}^{μ,γ}\{f'(t);s\} &= (st)^\alpha \mathcal{J}_{ν,p}^{μ,γ}(st) f(t) \Big|_{t=0}^\infty - \int_0^\infty f(t) \frac{d}{dt} \left((st)^\alpha \mathcal{J}_{ν,p}^{μ,γ}(st) \right) dt \\ &= - \int_0^\infty f(t) \frac{d}{dt} \left((st)^\alpha \mathcal{J}_{ν,p}^{μ,γ}(st) \right) dt \\ &= -\alpha \int_0^\infty f(t) s^\alpha t^{\alpha-1} \mathcal{J}_{ν,p}^{μ,γ}(st) dt - \int_0^\infty f(t) (st)^\alpha \frac{d}{dt} \left(\mathcal{J}_{ν,p}^{μ,γ}(st) \right) dt \end{aligned}$$

bağıntısı çıkar. Eşitliğin sağ tarafındaki ikinci integralde (3.12) bağıntısı kullanılırsa,

$$\begin{aligned} {}_α\mathcal{H}_{ν,p}^{μ,γ}\{f'(t);s\} &= -\alpha \int_0^\infty f(t) s^\alpha t^{\alpha-1} \mathcal{J}_{ν,p}^{μ,γ}(st) dt \\ &\quad - \int_0^\infty f(t) (st)^\alpha s \left(\frac{1}{\mu st} \mathcal{J}_{ν-1,p}^{μ,γ}(st) - \frac{\nu}{\mu st} \mathcal{J}_{ν,p}^{μ,γ}(st) \right) dt \\ &= s \left(\frac{\nu}{\mu} - \alpha \right) \int_0^\infty f(t) (st)^{\alpha-1} \mathcal{J}_{ν,p}^{μ,γ}(st) dt \\ &\quad - \frac{s}{\mu} \int_0^\infty f(t) (st)^{\alpha-1} \mathcal{J}_{ν-1,p}^{μ,γ}(st) dt \\ &= s \left(\frac{\nu}{\mu} - \alpha \right) {}_{\alpha-1}\mathcal{H}_{ν,p}^{μ,γ}\{f(t);s\} - \frac{s}{\mu} {}_{\alpha-1}\mathcal{H}_{ν-1,p}^{μ,γ}\{f(t);s\} \end{aligned}$$

bulunur ve (3.27) bağıntısına ulaşılır. Bu bağıntıda eşitliğin sağındaki ilk terime (3.23) bağıntısı kullanılırsa (3.28) bağıntısına ulaşılır. ■

Sonuç 3.5 (3.28) bağıntısında $f(t) = f(2\sqrt{t})$, $\mu = 1$, $p = 0$ ve $s = s^2$ seçilirse,

$$\begin{aligned} {}_α\mathcal{H}_{ν,0}^{1,γ}\left\{\frac{f'(2\sqrt{t})}{\sqrt{t}};s^2\right\} &= s^2 \left(1 - \frac{\alpha}{\nu}\right) {}_α\mathcal{H}_{ν+1,0}^{1,γ}\{f(2\sqrt{t});s^2\} \\ &\quad - \frac{s^2\alpha}{\nu} {}_{\alpha-1}\mathcal{H}_{ν-1,0}^{1,γ}\{f(t);s^2\} \end{aligned} \quad (3.30)$$

elde edilir. Ek olarak, (3.24) bağıntısında $\beta = -1/2$, $p = 0$, $\mu = 1$ ve $s = s^2$ seçilerek

$${}_a\mathcal{H}_{\nu,0}^{1,\gamma}\left\{\frac{f'(2\sqrt{t})}{\sqrt{t}};s^2\right\}=s\, {}_{\alpha-1/2}\mathcal{H}_{\nu,0}^{1,\gamma}\{f'(2\sqrt{t});s^2\} \quad (3.31)$$

bulunur. (3.30) ve (3.31) bağıntıları birlikte düşünüldüğünde

$$\begin{aligned} {}_{\alpha-1/2}\mathcal{H}_{\nu,0}^{1,\gamma}\{f'(2\sqrt{t});s^2\} &= s\left(1-\frac{\alpha}{\nu}\right) {}_{\alpha}\mathcal{H}_{\nu+1,0}^{1,\gamma}\{f(2\sqrt{t});s^2\} \\ &\quad -\frac{s\alpha}{\nu} {}_{\alpha-1}\mathcal{H}_{\nu-1,0}^{1,\gamma}\{f(2\sqrt{t});s^2\} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\alpha = \frac{\nu}{2} + \frac{1}{4}$ yazılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{\nu}{2}-\frac{1}{4} {}_{\alpha}\mathcal{H}_{\nu,0}^{1,\gamma}\{f'(2\sqrt{t});s^2\} &= s\left(1-\frac{1}{\nu}\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}\right)\right) \frac{\nu}{2}+\frac{1}{4} {}_{\alpha}\mathcal{H}_{\nu+1,0}^{1,\gamma}\{f(2\sqrt{t});s^2\} \\ &\quad -\left(\frac{s}{\nu}\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}\right)\right) \frac{\nu}{2}-\frac{3}{4} {}_{\alpha}\mathcal{H}_{\nu-1,0}^{1,\gamma}\{f(t);s^2\} \\ &= s\left(\frac{2\nu-1}{4\nu}\right) \frac{\nu}{2}+\frac{1}{4} {}_{\alpha}\mathcal{H}_{\nu+1,0}^{1,\gamma}\{f(2\sqrt{t});s^2\} \\ &\quad -s\left(\frac{2\nu+1}{4\nu}\right) \frac{\nu}{2}-\frac{3}{4} {}_{\alpha}\mathcal{H}_{\nu-1,0}^{1,\gamma}\{f(t);s^2\} \end{aligned}$$

bulunur. Buna göre, (3.20) bağıntısı yardımıyla

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{s}}\mathcal{H}_{\nu}\{f'(t);s\} &= s\left(\frac{2\nu-1}{4\nu}\right)\frac{1}{2\sqrt{s}}\mathcal{H}_{\nu+1}\{f(t);s\} \\ &\quad -s\left(\frac{2\nu+1}{4\nu}\right)\frac{1}{2\sqrt{s}}\mathcal{H}_{\nu-1}\{f(t);s\}, \end{aligned}$$

ve buradan

$$\mathcal{H}_{\nu}\{2\nu f'(t);s\}=s\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\mathcal{H}_{\nu+1}\{f(t);s\}-s\left(\nu+\frac{1}{2\nu}\right)\mathcal{H}_{\nu-1}\{f(t);s\}$$

biçiminde Hankel dönüşümünün özelliği elde edilir ([8],s.6,(10)).

Önerme 3.9 ${}_a\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}$ -dönüşümü için

$$\frac{d}{ds}\left({}_{\alpha}\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{f(t);s\}\right)=\frac{\alpha}{s} {}_{\alpha}\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{f(t);s\}-\frac{(\gamma)_p}{s} {}_{\alpha+1}\mathcal{H}_{\nu+\mu,p}^{\mu,\gamma+p}\{f(t);s\} \quad (3.32)$$

ve

$$\frac{d}{ds} \left({}_{\alpha} \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma} \{f(t); s\} \right) = \alpha {}_{\alpha-1} \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma} \{tf(t); s\} - (\gamma)_p {}_{\alpha} \mathcal{H}_{\nu+\mu,p}^{\mu,\gamma+p} \{tf(t); s\} \quad (3.33)$$

bağıntıları gerçekleşir.

İspat: ${}_{\alpha} \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}$ -dönüşümü tanımından

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left({}_{\alpha} \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma} \{f(t); s\} \right) &= \frac{d}{ds} \left(\int_0^{\infty} (st)^{\alpha} \mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(st) f(t) dt \right) \\ &= \int_0^{\infty} \frac{d}{ds} \left((st)^{\alpha} \mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(st) \right) f(t) dt \end{aligned}$$

elde edilir. Türev alma işlemi gerçekleştirildiğinde

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left({}_{\alpha} \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma} \{f(t); s\} \right) &= \int_0^{\infty} \left(\alpha s^{\alpha-1} t^{\alpha} \mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(st) + s^{\alpha} t^{\alpha+1} (-1)(\gamma)_p \mathcal{J}_{\nu+\mu,p}^{\mu,\gamma+p}(st) \right) f(t) dt \\ &= \frac{\alpha}{s} \int_0^{\infty} (st)^{\alpha} \mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(st) f(t) dt - \frac{(\gamma)_p}{s} \int_0^{\infty} (st)^{\alpha+1} \mathcal{J}_{\nu+\mu,p}^{\mu,\gamma+p}(st) f(t) dt \\ &= \frac{\alpha}{s} {}_{\alpha} \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma} \{f(t); s\} - \frac{(\gamma)_p}{s} {}_{\alpha+1} \mathcal{H}_{\nu+\mu,p}^{\mu,\gamma+p} \{f(t); s\} \end{aligned}$$

elde edilir. Ek olarak, (3.32) bağıntısı için eşitliğin sağ tarafında $\beta = 1$ için (3.24)

bağıntısı uygulanırsa (3.33) bağıntısına ulaşılır. ■

Bu önermenin genel hali aşağıda gibi verilir:

Önerme 3.10 ${}_{\alpha} \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}$ -dönüşümü için

$$\frac{d^m}{ds^m} \left({}_{\alpha} \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma} \{f(t); s\} \right) = s^{-m} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-(m-k-1))} (-1)^k (\gamma)_{pk} {}_{\alpha+k} \mathcal{H}_{\nu+\mu k,p}^{\mu,\gamma+pk} \{f(t); s\}$$

bağıntısı gerçekleşir.

İspat: ${}_a\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}$ -dönüşümü tanımından ve türev ile integral operatörlerinin yer değişiminden

$$\begin{aligned}\frac{d^m}{ds^m}({}_a\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}\{f(t);s\}) &= \frac{d^m}{ds^m}\left(\int_0^\infty (st)^\alpha \mathcal{J}_{v,p}^{\mu,\gamma}(st) f(t) dt\right) \\ &= \int_0^\infty \frac{d^m}{ds^m}((st)^\alpha \mathcal{J}_{v,p}^{\mu,\gamma}(st)) f(t) dt\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$(f(t)g(t))^{(m)} = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} f^{(m-k)}(t) g^{(k)}(t)$$

Leibniz türev formülü kullanıldığında

$$\frac{d^m}{ds^m}({}_a\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}\{f(t);s\}) = \int_0^\infty \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{d^{m-k}}{ds^{m-k}}((st)^\alpha) \frac{d^k}{ds^k}(\mathcal{J}_{v,p}^{\mu,\gamma}(st)) f(t) dt$$

elde edilir. (2.9) bağıntısı yardımıyla ve $m-k$ defa türev alma işleminden sonra,

$$\frac{d^m}{ds^m}({}_a\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}\{f(t);s\}) = \int_0^\infty \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{(-1)^k (\gamma)_{pk} \Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-(m-k-1))} s^{\alpha-(m-k)} t^{\alpha+k} \mathcal{J}_{v+\mu k,p}^{\mu,\gamma+pk}(st) f(t) dt$$

bulunur. Toplam sembolü ile integral operatörü yer değiştirdiğinde ve ${}_a\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}$ -dönüşümünün tanımı kullanıldığında,

$$\begin{aligned}\frac{d^m}{ds^m}({}_a\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}\{f(t);s\}) &= s^{-m} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-(m-k-1))} (-1)^k (\gamma)_{pk} \int_0^\infty (st)^{\alpha+k} \mathcal{J}_{v+\mu k,p}^{\mu,\gamma+pk}(st) f(t) dt \\ &= s^{-m} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-(m-k-1))} (-1)^k (\gamma)_{pk} {}_{\alpha+k}\mathcal{H}_{v+\mu k,p}^{\mu,\gamma+pk}\{f(t);s\}\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Önerme 3.11 D_μ -türev operatörü

$$D_\mu = -\frac{1}{\mu s^{\mu-1}} \frac{d}{ds}$$

biçiminde tanımlanmak üzere ${}_{{}_\alpha}\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}$ -dönüşümü için

$$\frac{d^m}{ds^m} \left(s^{v-\mu\alpha} {}_{{}_\alpha}\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{f(t); s^\mu\} \right) = s^{v-\mu\alpha-m} {}_{{}_\alpha}\mathcal{H}_{v-m,p}^{\mu,\gamma} \{f(t); s^\mu\}$$

ve

$$s^{-\mu\alpha} \left(\prod_{n=0}^{m-1} \frac{1}{(\gamma + pn)_p} \right) D_\mu^m \left({}_{{}_\alpha}\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{f(t); s^\mu\} \right) = s^{-\mu(\alpha+m)} {}_{\alpha+m}\mathcal{H}_{v+\mu m,p}^{\mu,\gamma+pm} \{f(t); s^\mu\}$$

bağıntıları gerçelenir.

İspat: ${}_{{}_\alpha}\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}$ -dönüşümü tanımından ve türev ile integral operatörlerinin yer değişiminden,

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{ds^m} \left(s^{-\mu\alpha+v} {}_{{}_\alpha}\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{f(t); s^\mu\} \right) &= \frac{d^m}{ds^m} \left(s^{-\mu\alpha+v} \int_0^\infty (s^\mu t)^\alpha \mathcal{J}_{v,p}^{\mu,\gamma} (s^\mu t) f(t) dt \right) \\ &= \int_0^\infty t^\alpha f(t) \frac{d^m}{ds^m} \left(s^v \mathcal{J}_{v,p}^{\mu,\gamma} (s^\mu t) \right) dt \end{aligned}$$

elde edilir. (3.13) bağıntısı yardımıyla

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{ds^m} \left(s^{-\mu\alpha+v} {}_{{}_\alpha}\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{f(t); s^\mu\} \right) &= s^{v-\mu\alpha-m} \int_0^\infty (s^\mu t)^\alpha \mathcal{J}_{v-m,p}^{\mu,\gamma} (s^\mu t) f(t) dt \\ &= s^{v-\mu\alpha-m} {}_{{}_\alpha}\mathcal{H}_{v-m,p}^{\mu,\gamma} \{f(t); s^\mu\} \end{aligned}$$

bulunur. Ek olarak (3.14) bağıntısı yardımıyla ve ${}_{{}_\alpha}\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}$ -dönüşümü tanımından

$$\begin{aligned} &s^{-\mu\alpha} \left(\prod_{n=0}^{m-1} \frac{1}{(\gamma + pn)_p} \right) D_\mu^m \left({}_{{}_\alpha}\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{f(t); s^\mu\} \right) \\ &= \int_0^\infty t^\alpha f(t) \left(\prod_{n=0}^{m-1} \frac{1}{(\gamma + pn)_p} \right) D_\mu^m \left(\mathcal{J}_{v,p}^{\mu,\gamma} (s^\mu t) \right) dt \\ &= s^{-\mu(\alpha+m)} \int_0^\infty (s^\mu t)^{\alpha+m} f(t) \mathcal{J}_{v+\mu m,p}^{\mu,\gamma+pm} (s^\mu t) dt \\ &= s^{-\mu(\alpha+m)} {}_{\alpha+m}\mathcal{H}_{v+\mu m,p}^{\mu,\gamma+pm} \{f(t); s^\mu\} \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Şimdi, (3.18) tanımında $f(t)$ fonksiyonlarının uygun seçimi ile bazı elemanter ve özel fonksiyonların genelleştirilmiş Bessel-Maitland integral dönüşümü altındaki görüntüleri incelenecektir.

Örnek 3.1 (3.18) tanımında $f(t) = 1$ seçilirse

$${}_a\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{1;s\} = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\gamma-p(\alpha+1))}{\Gamma(\gamma)\Gamma(1+\nu-\mu(\alpha+1))} \frac{1}{s} \quad (3.34)$$

formülü elde edilir.

Gerçekten, ${}_a\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}$ -dönüşümü ve Mellin dönüşümü tanımından

$$\begin{aligned} {}_a\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{1;s\} &= \int_0^\infty s^\alpha t^\alpha \mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(st) dt \\ &= s^\alpha \int_0^\infty t^\alpha \mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(st) dt \\ &= s^\alpha \mathcal{M}\{\mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(st); \alpha+1\} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan (2.20) bağıntısında $\omega = s$, $s = \alpha+1$ alınırsa

$${}_a\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{1;s\} = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\gamma-p(\alpha+1))}{\Gamma(\gamma)\Gamma(1+\nu-\mu(\alpha+1))} \frac{1}{s}$$

bulunur.

Sonuç 3.6 (3.34) formülünde, $\alpha = 0$ için (3.19) bağıntısı kullanılırsa, bilinen

$$\mathcal{L}\{1;s\} = \frac{1}{s}$$

sonucuna ulaşılır ([7], s.133, (1)).

Örnek 3.2 (3.18) tanımında $f(t) = t^\beta$ ($\text{Re } \beta > -1$) seçilirse

$${}_a\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{t^\beta;s\} = \frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)\Gamma(\gamma-p(\alpha+\beta+1))}{\Gamma(\gamma)\Gamma(1+\nu-\mu(\alpha+\beta+1))} \frac{1}{s^{\beta+1}} \quad (3.35)$$

formülü elde edilir.

Gerçekten (3.24) bağıntısında $f(t) = 1$ ve (3.34) formülünde $\alpha = \alpha + \beta$ seçilirse

$$\begin{aligned} {}_{\alpha}\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{t^{\beta};s\} &= s^{-\beta} {}_{\alpha+\beta}\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{1;s\} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 1)\Gamma(\gamma - p(\alpha + \beta + 1))}{\Gamma(\gamma)\Gamma(1 + \nu - \mu(\alpha + \beta + 1))} \frac{1}{s^{\beta+1}} \end{aligned}$$

bulunur.

Sonuç 3.7 (3.35) formülünde $\alpha = 0$ için (3.19) bağıntısı kullanılırsa

$$\mathcal{L}\{t^{\beta};s\} = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{s^{\beta+1}}$$

formülü elde edilir ([7], s.137, (1)). Diğer taraftan (3.35) formülünde sırasıyla $\beta = -\frac{1}{4}$ ve $\beta = \frac{\beta}{4}$ seçilirse, (3.20) bağıntısı yardımıyla

$$\mathcal{H}_{\nu}\{t^{-1/2};s\} = s^{-1/2}$$

ve

$$\mathcal{H}_{\nu}\{t^{\beta};s\} = \frac{2^{\beta+1/2}}{s^{\beta+1}} \frac{\Gamma(\beta/2 + \nu/2 + 3/4)}{\Gamma(\nu/2 - \beta/2 + 1/4)}$$

Hankel dönüşümü bağıntıları elde edilir ([8], s.22, (3) ve (7)).

Örnek 3.3 (3.18) tanımında $f(t) = \frac{1}{a+t}$ ($|\arg a| < \pi$) seçilirse

$$\begin{aligned} {}_{\alpha}\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\left\{\frac{1}{a+t};s\right\} &= \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)\Gamma(\gamma)} {}_2\Psi_2\left[\begin{matrix} (\gamma - p\alpha, p), (1, 1) \\ (1 + \nu - \mu, \mu), (1 - \alpha, 1) \end{matrix} \middle| as\right] \\ &\quad - \frac{\pi(as)^{\alpha}}{\sin(\pi\alpha)\Gamma(\gamma)} {}_1\Psi_1\left[\begin{matrix} (\gamma, p) \\ (1 + \nu, \mu) \end{matrix} \middle| as\right] \end{aligned} \quad (3.36)$$

formülü elde edilir.

Gerçekten ${}_a\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}$ -dönüşümü tanımından ve $\mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(st)$ fonksiyonunun Mellin-Barnes integral gösterilişi yardımıyla

$$\begin{aligned} {}_a\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\left\{\frac{1}{a+t};s\right\} &= \int_0^\infty (st)^\alpha \mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(st) \frac{1}{a+t} dt \\ &= \int_0^\infty (st)^\alpha \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(u)\Gamma(\gamma-pu)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(1+\nu-\mu u)} (st)^{-u} du \right) \frac{1}{a+t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(u)\Gamma(\gamma-pu)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(1+\nu-\mu u)} s^{\alpha-u} \left(\int_0^\infty t^{\alpha-u} \frac{1}{a+t} dt \right) du \end{aligned}$$

elde edilir. Mellin dönüşümünün tanımından yararlanılarak,

$${}_a\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\left\{\frac{1}{a+t};s\right\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(u)\Gamma(\gamma-pu)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(1+\nu-\mu u)} s^{\alpha-u} \mathcal{M}\left\{\frac{1}{a+t};\alpha-u+1\right\} du$$

bulunur. Buna göre, Örnek1.3 de 1. formülde ([7],s.308,(2)), $s = \alpha - u + 1$ seçilerek ve gamma fonksiyonunun (1.6) özelliği kullanılarak

$$\begin{aligned} {}_a\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\left\{\frac{1}{a+t};s\right\} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(u)\Gamma(\gamma-pu)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(1+\nu-\mu u)} s^{\alpha-u} \frac{\pi a^{\alpha-u}}{\sin(\pi(\alpha-u+1))} du \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(u)\Gamma(\gamma-pu)\Gamma(\alpha-u+1)\Gamma(u-\alpha)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(1+\nu-\mu u)} (as)^{\alpha-u} du \end{aligned}$$

elde edilir. Burada integral $u_1 = -n$ ve $u_2 = \alpha - n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) noktalarında rezidüye sahiptir. İntegraldeki fonksiyon, Gamma fonksiyonunun (1.6) özelliğinden

$$\Gamma(u) = \frac{\pi}{\sin(\pi u)\Gamma(1-u)} \quad \text{ve} \quad \Gamma(\alpha-u+1)\Gamma(u-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\pi(\alpha-u+1))}$$

eşitliklerini yardımıyla

$$g(u) = \frac{\pi}{\sin(\pi u)} \frac{\Gamma(\gamma-pu)(as)^{\alpha-u}}{\Gamma(1-u)\Gamma(\gamma)\Gamma(1+\nu-\mu u)} \frac{\pi}{\sin(\pi(\alpha-u+1))}$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda

$${}_a\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\left\{\frac{1}{a+t};s\right\}=\sum_{k=1}^2\text{Res}\{g(u);u_k\} \quad (3.37)$$

olur. u_k ($k=1,2$) noktalarındaki rezidüler hesaplanırsa, $u_1=-n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) noktalarında $g(u)$ fonksiyonunun rezidüsü

$$\begin{aligned} \text{Res}_{u_1=-n}g(u) &= \lim_{u \rightarrow -n} (u+n)g(u) \\ &= \lim_{u \rightarrow -n} \frac{\pi(u+n)}{\sin(\pi u)} \frac{\Gamma(\gamma-pu)(as)^{\alpha-u}}{\Gamma(1-u)\Gamma(\gamma)\Gamma(1+\nu-\mu u)} \frac{\pi}{\sin(\pi(\alpha-u+1))} \\ &= \frac{(-1)^n \Gamma(\gamma+pn)(as)^{\alpha+n}}{\Gamma(\gamma)\Gamma(1+n)\Gamma(1+\nu+\mu n)} \frac{\pi}{\sin(\pi(\alpha+n+1))} \end{aligned}$$

dır. Burada $\sin(\pi(\alpha+n+1))=(-1)^{n+1}\sin(\pi\alpha)$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) olduğundan

$$\text{Res}_{u_1=-n}g(u) = \frac{-\pi}{\sin(\pi\alpha)} \frac{\Gamma(\gamma+pn)(as)^{\alpha+n}}{\Gamma(\gamma)\Gamma(1+n)\Gamma(1+\nu+\mu n)} \quad (3.38)$$

bulunur. Öte yandan $u_2=\alpha-n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) noktasındaki rezidüsü,

$$\begin{aligned} \text{Res}_{u_2=\alpha-n}g(u) &= \lim_{u \rightarrow \alpha-n} (u-\alpha+n)g(u) \\ &= \lim_{u \rightarrow \alpha-n} \frac{\pi(u-\alpha+n)}{\sin(\pi(\alpha-u+1))} \frac{\Gamma(\gamma-pu)(as)^{\alpha-u}}{\Gamma(1-u)\Gamma(\gamma)\Gamma(1+\nu-\mu u)} \frac{\pi}{\sin(\pi u)} \\ &= \frac{(-1)^n \Gamma(\gamma-p\alpha+pn)(as)^n}{\Gamma(1-\alpha+n)\Gamma(\gamma)\Gamma(1+\nu-\mu\alpha+\mu n)} \frac{\pi}{\sin(\pi(\alpha-n))} \end{aligned}$$

bağıntısıyla elde edilir. Burada $\sin(\pi(\alpha-n))=(-1)^n\sin(\pi\alpha)$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) olduğundan

$$\text{Res}_{u_2=\alpha-n}g(u) = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \frac{\Gamma(\gamma-p\alpha+pn)(as)^n}{\Gamma(1-\alpha+n)\Gamma(\gamma)\Gamma(1+\nu-\mu\alpha+\mu n)} \quad (3.39)$$

bulunur. Buradan (3.38) ve (3.39) rezidüleri (3.37) toplamında yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} {}_{\alpha}\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\left\{\frac{1}{a+t};s\right\} &= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}\frac{\Gamma(\gamma+pn)(as)^{\alpha+n}}{\Gamma(\gamma)\Gamma(1+n)\Gamma(1+\nu+\mu n)} \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}\frac{\Gamma(\gamma-p\alpha+pn)(as)^n}{\Gamma(1-\alpha+n)\Gamma(\gamma)\Gamma(1+\nu-\mu\alpha+\mu n)} \end{aligned}$$

elde edilir. (1.33) ile verilen Fox-Wright fonksiyonunun tanımından

$$\begin{aligned} {}_{\alpha}\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\left\{\frac{1}{a+t};s\right\} &= \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)\Gamma(\gamma)} {}_2\Psi_2\left[\begin{matrix} (\gamma-p\alpha,p), (1,1) \\ (1+\nu-\mu\alpha,\mu), (1-\alpha,1) \end{matrix} \middle| as\right] \\ &- \frac{\pi(as)^{\alpha}}{\sin(\pi\alpha)\Gamma(\gamma)} {}_1\Psi_1\left[\begin{matrix} (\gamma,p) \\ (1+\nu,\mu) \end{matrix} \middle| as\right] \end{aligned}$$

bağıntısı bulunur.

Sonuç 3.8 (3.36) formülünde $\gamma = 1$, $\mu = p$ ve $\nu = 0$ seçilir ve (3.19) bağıntısı kullanılırsa

$${}_{\alpha}\mathcal{H}_{\nu,p}^{p,1}\left\{\frac{1}{a+t};s\right\} = \frac{-\pi(as)^{\alpha}}{\sin(\pi\alpha)} {}_0\Psi_0\left[\begin{matrix} - \\ - \end{matrix} \middle| as\right] + \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} {}_1\Psi_1\left[\begin{matrix} (1,1) \\ (1-\alpha,1) \end{matrix} \middle| as\right]$$

elde edilir. Burada (3.19) özel durumundan ve (1.34) ile verilen Fox-Wright fonksiyonu ile genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyon arasındaki bağıntı yardımıyla

$$s^{\alpha}\mathcal{L}\left\{\frac{t^{\alpha}}{a+t};s\right\} = \frac{-\pi(as)^{\alpha}}{\sin(\pi\alpha)} {}_0F_0(-,-,as) + \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)\Gamma(1-\alpha)} {}_1F_1(1;1-\alpha;as)$$

elde edilir. $-\sin(\pi\alpha) = \sin(\pi(-\alpha))$ trigonometrik fonksiyonun ve gamma fonksiyonunun (1.6) ile verilen özelliğinden

$$\mathcal{L}\left\{\frac{t^{\alpha}}{a+t};s\right\} = \Gamma(\alpha+1)\Gamma(-\alpha)a^{\alpha}e^{as} + \Gamma(\alpha)s^{-\alpha} {}_1F_1(1;1-\alpha;as)$$

dır. Buradan, Kummer fonksiyonunun tanımı ve (1.19) özelliğinden

$$\mathcal{L}\left\{\frac{t^\alpha}{a+t};s\right\}=\Gamma(\alpha+1)\Gamma(-\alpha)a^\alpha e^{as}+\Gamma(\alpha)s^{-\alpha}e^{as}{}_1F_1(-\alpha;1-\alpha;-as)$$

elde edilir. Ek olarak Eksik Gamma fonksiyonunun (1.42) ve Gamma fonksiyonun (1.5) tanımından

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\frac{t^\alpha}{a+t};s\right\} &= \Gamma(\alpha+1)\Gamma(-\alpha)a^\alpha e^{as}-\Gamma(\alpha+1)a^\alpha e^{as}\frac{1}{-\alpha}(as)^{-\alpha}{}_1F_1(-\alpha;1-\alpha;-as) \\ &= \Gamma(\alpha+1)\Gamma(-\alpha)a^\alpha e^{as}-\Gamma(\alpha+1)a^\alpha e^{as}\gamma(-\alpha,as) \\ &= \Gamma(\alpha+1)a^\alpha e^{as}(\Gamma(-\alpha)-\gamma(-\alpha,as)) \\ &= \Gamma(\alpha+1)a^\alpha e^{as}\Gamma(-\alpha,as)\end{aligned}$$

bulunur ([7], s.137, (7)).

Sonuç 3.9 (3.36) formülünde $\alpha = \frac{\nu}{2} - \frac{1}{4}$, $\mu = 1$, $p = 0$, $s = s^2$ ve $a = a^2/4$ seçilir ve (3.20) bağıntısı kullanılırsa

$$\begin{aligned}\frac{1}{s\sqrt{2}}\mathcal{H}_\nu\left\{\frac{4}{a^2+t^2};s\right\} &= \frac{-\pi\left(a^2s^2/4\right)^{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}}}{\sin\left(\pi\left(\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}\right)\right)\Gamma(\gamma)}{}_0\Psi_1\left[\begin{matrix}-\\(1+\nu,1)\end{matrix}\left|\frac{a^2s^2}{4}\right.\right] \\ &\quad + \frac{\pi}{\sin\left(\pi\left(\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}\right)\right)\Gamma(\gamma)}{}_1\Psi_2\left[\begin{matrix}(1,1)\\(\frac{\nu}{2}+\frac{5}{4},1),\left(-\frac{\nu}{2}+\frac{5}{4},1\right)\end{matrix}\left|\frac{a^2s^2}{4}\right.\right]\end{aligned}$$

elde edilir. $-\sin\left(\pi\left(\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}\right)\right)=\sin\left(\pi\left(\frac{\nu}{2}+\frac{3}{4}\right)\right)$ eşitliği ile Gamma fonksiyonunun (1.6) ile verilen özelliği ve (1.34) ile verilen Fox-Wright fonksiyonu ile genelleştirilmiş

hipergeometrik fonksiyon arasındaki bağıntı yardımıyla

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_v\left\{\frac{1}{a^2+t^2};s\right\} &= \frac{a^{v-\frac{1}{2}}s^{v+\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{v}{2}+\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(-\frac{v}{2}+\frac{1}{4}\right)}{2^{v+1}\Gamma(1+v)} {}_0F_1\left(-;1+v;\frac{a^2s^2}{4}\right) \\ &\quad + \frac{\Gamma\left(\frac{v}{2}-\frac{1}{4}\right)s}{\Gamma\left(\frac{v}{2}+\frac{5}{4}\right)2^{3/2}} {}_1F_2\left(1;\frac{v}{2}+\frac{5}{4},-\frac{v}{2}+\frac{5}{4};\frac{a^2s^2}{4}\right)\end{aligned}$$

bulunur $\left([8], \text{s.24, (21)}, \lambda = \frac{3}{2}, \mu = 0\right)$.

Örnek 3.4 (3.18) tanımında $f(t) = \frac{1}{a^2+t^2}$ ($\text{Re } a > 0$) seçilirse

$$\begin{aligned}& {}_\alpha\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}\left\{\frac{1}{a^2+t^2};s\right\} \\ &= \frac{\pi a^{\alpha-1}s^\alpha}{2\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\Gamma(\gamma)} {}_2\Psi_2\left[\begin{matrix}(\gamma, 2p), (1, 1) \\ (1+v, 2\mu), (1, 2)\end{matrix}\middle| -a^2s^2\right] \\ &\quad + \frac{\pi a^\alpha s^{\alpha+1}}{2\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\Gamma(\gamma)} {}_2\Psi_2\left[\begin{matrix}(\gamma+p, 2p), (1, 1) \\ (1+v+\mu, 2\mu), (2, 2)\end{matrix}\middle| -a^2s^2\right] \\ &\quad - \frac{\pi s}{\sin(\pi\alpha)\Gamma(\gamma)} {}_2\Psi_2\left[\begin{matrix}(\gamma-p\alpha+p, 2p), (1, 1) \\ (1+v-\mu\alpha+\mu, 2\mu), (2-\alpha, 2)\end{matrix}\middle| -a^2s^2\right] \quad (3.40)\end{aligned}$$

formülü elde edilir.

Gerçekten ${}_\alpha\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}$ -dönüşümü tanımından ve $\mathcal{J}_{v,p}^{\mu,\gamma}(st)$ fonksiyonunun integral gösterilişi yardımıyla

$$\begin{aligned}{}_\alpha\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}\left\{\frac{1}{a^2+t^2};s\right\} &= \int_0^\infty (st)^\alpha \mathcal{J}_{v,p}^{\mu,\gamma}(st) \frac{1}{a+t} dt \\ &= \int_0^\infty (st)^\alpha \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(u)\Gamma(\gamma-pu)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(1+v-\mu u)} (st)^{-u} du \right) \frac{1}{a^2+t^2} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(u)\Gamma(\gamma-pu)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(1+v-\mu u)} s^{\alpha-u} \left(\int_0^\infty t^{\alpha-u} \frac{1}{a^2+t^2} dt \right) du\end{aligned}$$

bağıntısı yazılabilir. Mellin dönüşümünün tanımı kullanılırsa

$${}_a\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\left\{\frac{1}{a^2+t^2};s\right\}=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\Gamma(u)\Gamma(\gamma-pu)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(1+\nu-\mu u)}s^{\alpha-u}\mathcal{M}\left\{\frac{1}{a^2+t^2};\alpha-u+1\right\}du$$

bulunur. Buradan Örnek1.3'deki 2 numaralı formülde ([7],s.309,(11)), $s = \alpha - u + 1$ seçilerek ve Gamma fonksiyonunun (1.6) özelliği kullanılarak

$$\begin{aligned} {}_a\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\left\{\frac{1}{a^2+t^2};s\right\} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\Gamma(u)\Gamma(\gamma-pu)s^{\alpha-u}}{\Gamma(\gamma)\Gamma(1+\nu-\mu u)}\frac{\pi a^{\alpha-u-1}}{2\sin\left(\frac{\pi}{2}(\alpha-u+1)\right)}du \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\Gamma(u)\Gamma(\gamma-pu)\Gamma\left(\frac{\alpha-u+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{u-\alpha+1}{2}\right)a^{\alpha-u-1}s^{\alpha-u}}{\Gamma(\gamma)\Gamma(1+\nu-\mu u)}\frac{1}{2}du \end{aligned}$$

bağıntısı elde edilir. İntegral $u_1 = -n$ ve $u_2 = \alpha - 1 - 2n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) noktalarında rezidüye sahiptir. İntegraldeki fonksiyon, Gamma fonksiyonunun (1.6) özelliğinden

$$\Gamma(u) = \frac{\pi}{\sin(\pi u)\Gamma(1-u)} \quad \text{ve} \quad \Gamma\left(\frac{\alpha-u+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{u-\alpha+1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\left(\pi\left(\frac{\alpha-u+1}{2}\right)\right)}$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu bağıntılardan yararlanarak

$$g(u) = \frac{\pi}{\sin(\pi u)}\frac{\Gamma(\gamma-pu)}{\Gamma(1-u)\Gamma(\gamma)\Gamma(1+\nu-\mu u)}\frac{a^{\alpha-u-1}s^{\alpha-u}}{2}\frac{\pi}{\sin\left(\pi\left(\frac{\alpha-u+1}{2}\right)\right)}$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda

$${}_a\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\left\{\frac{1}{a^2+t^2};s\right\} = \sum_{k=1}^2 \text{Res}\{g(u), u_k\} \quad (3.41)$$

olur. u_k ($k = 1, 2$) noktalarındaki rezidüler hesaplanırsa, $u_1 = -n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) noktasında $g(u)$ fonksiyonunun rezidüsü,

$$\begin{aligned} \text{Res}_{u_1=-n} g(u) &= \lim_{u \rightarrow -n} (u+n) g(u) \\ &= \lim_{u \rightarrow -n} \frac{\pi(u+n)}{\sin(\pi u)} \frac{\Gamma(\gamma - pu)}{\Gamma(1-u)\Gamma(\gamma)\Gamma(1+v-\mu u)} \frac{a^{\alpha-u-1} s^{\alpha-u}}{2} \frac{\pi}{\sin\left(\pi\left(\frac{\alpha-u+1}{2}\right)\right)} \\ &= \frac{(-1)^n \Gamma(\gamma + pn)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(1+n)\Gamma(1+v+\mu n)} \frac{a^{\alpha+n-1} s^{\alpha+n}}{2} \frac{\pi}{\sin\left(\pi\left(\frac{\alpha+n+1}{2}\right)\right)} \end{aligned}$$

bağıntısı ile verilir. Burada

$$\sin\left(\pi\left(\frac{\alpha+n+1}{2}\right)\right) = \begin{cases} (-1)^k \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right), & n = 2k \\ (-1)^{k+1} \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right), & n = 2k+1 \end{cases} \quad (\forall k \in \mathbb{N})$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \text{Res}_{u_1=-n} g(u) &= \frac{\pi}{\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} \frac{(-1)^n \Gamma(\gamma + 2pn)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(1+2n)\Gamma(1+v+2\mu n)} \frac{a^{\alpha+2n-1} s^{\alpha+2n}}{2} \\ &\quad + \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} \frac{(-1)^n \Gamma(\gamma + p + 2pn)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(2+2n)\Gamma(1+v+\mu+2\mu n)} \frac{a^{\alpha+2n} s^{\alpha+2n+1}}{2} \end{aligned} \quad (3.42)$$

bulunur. Öte yandan $u_2 = \alpha - 1 - 2n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) noktasındaki rezidüsü hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \text{Res}_{u_2=\alpha-1-2n} g(u) &= \lim_{u \rightarrow \alpha-1-2n} (u-\alpha+1+2n) g(u) \\ &= \lim_{u \rightarrow \alpha-1-2n} \frac{\pi(u-\alpha+1+2n)}{\sin\left(\pi\left(\frac{\alpha-u+1}{2}\right)\right)} \frac{\Gamma(\gamma - pu) a^{\alpha-u-1} s^{\alpha-u}}{2\Gamma(1-u)\Gamma(\gamma)\Gamma(1+v-\mu u)} \frac{\pi}{\sin(\pi u)} \\ &= \frac{(-1)^n \Gamma(\gamma - p\alpha + p + 2pn) a^{2n} s^{2n+1}}{\Gamma(2-\alpha+2n)\Gamma(\gamma)\Gamma(1+v-\mu\alpha+\mu+2\mu n)} \frac{\pi}{\sin(\pi(\alpha-2n-1))} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\sin(\pi(\alpha-2n-1)) = -\sin(\pi\alpha)$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) olduğundan

$$\text{Res}_{u_2=\alpha-1-2n} g(u) = \frac{-\pi}{\sin(\pi\alpha)} \frac{(-1)^n \Gamma(\gamma - p\alpha + p + 2pn) a^{2n} s^{2n+1}}{\Gamma(2-\alpha+2n)\Gamma(\gamma)\Gamma(1+v-\mu\alpha+\mu+2\mu n)} \quad (3.43)$$

bulunur. O halde

$$\begin{aligned}
& {}_{\alpha}\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\left\{\frac{1}{a^2+t^2};s\right\} \\
&= \frac{\pi}{\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(\gamma+2pn)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(1+2n)\Gamma(1+\nu+2\mu n)} \frac{a^{\alpha+2n-1}s^{\alpha+2n}}{2} \\
&+ \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(\gamma+p+2pn)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(2+2n)\Gamma(1+\nu+\mu+2\mu n)} \frac{a^{\alpha+2n}s^{\alpha+2n+1}}{2} \\
&- \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(\gamma-p\alpha+p+2pn)a^{2n}s^{2n+1}}{\Gamma(2-\alpha+2n)\Gamma(\gamma)\Gamma(1+\nu-\mu\alpha+\mu+2\mu n)}
\end{aligned}$$

ve (1.33) ile verilen Fox-Wright fonksiyonunun tanımından yararlanılarak

$$\begin{aligned}
& {}_{\alpha}\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\left\{\frac{1}{a^2+t^2};s\right\} \\
&= \frac{\pi a^{\alpha-1}s^{\alpha}}{2\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\Gamma(\gamma)} {}_2\Psi_2\left[\begin{matrix}(\gamma,2p),(1,1) \\ (1+\nu,2\mu),(1,2)\end{matrix}\middle| -a^2s^2\right] \\
&+ \frac{\pi a^{\alpha}s^{\alpha+1}}{2\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\Gamma(\gamma)} {}_2\Psi_2\left[\begin{matrix}(\gamma+p,2p),(1,1) \\ (1+\nu+\mu,2\mu),(2,2)\end{matrix}\middle| -a^2s^2\right] \\
&- \frac{\pi s}{\sin(\pi\alpha)\Gamma(\gamma)} {}_2\Psi_2\left[\begin{matrix}(\gamma-p\alpha+p,2p),(1,1) \\ (1+\nu-\mu\alpha+\mu,2\mu),(2-\alpha,2)\end{matrix}\middle| -a^2s^2\right]
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

Sonuç 3.10 (3.40) formülünde $\nu = 0$, $\gamma = 1$, $\mu = p$ seçilir ve (3.19) bağıntısı kullanılırsa

$$\begin{aligned}
{}_a\mathcal{H}_{0,p}^{\mu,1}\left\{\frac{1}{a^2+t^2};s\right\} &= \frac{\pi a^{\alpha-1}s^\alpha}{2\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} {}_1\Psi_1\left[\begin{matrix}(1,1) \\ (1,2)\end{matrix}\middle| -a^2s^2\right] \\
&+ \frac{\pi a^\alpha s^{\alpha+1}}{2\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} {}_1\Psi_1\left[\begin{matrix}(1,1) \\ (2,2)\end{matrix}\middle| -a^2s^2\right] \\
&- \frac{\pi s}{\sin(\pi\alpha)} {}_1\Psi_1\left[\begin{matrix}(1,1) \\ (2-\alpha,2)\end{matrix}\middle| -a^2s^2\right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafındaki ilk iki terim sırayla $\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)$ ve $\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)$ ile genişletilip, $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$ eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
s^\alpha \mathcal{L}\left\{\frac{t^\alpha}{a^2+t^2};s\right\} &= \frac{\pi a^{\alpha-1}s^\alpha \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}{\sin(\pi\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a^2s^2)^n}{\Gamma(1+2n)} \\
&+ \frac{\pi a^\alpha s^{\alpha+1} \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}{\sin(\pi\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a^2s^2)^n}{\Gamma(2+2n)} \\
&- \frac{\pi s}{\sin(\pi\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a^2s^2)^n}{\Gamma(2-\alpha+2n)}
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının seri açılımlarından ve

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\frac{t^\alpha}{a^2+t^2};s\right\} &= \frac{\pi a^{\alpha-1}}{\sin(\pi\alpha)} \left(\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \cos(as) - \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \sin(as) \right) \\
&- \frac{\pi s^{1-\alpha}}{\sin(\pi\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a^2s^2)^n}{\Gamma(2-\alpha+2n)} \\
&= \frac{\pi a^{\alpha-1}}{\sin(\pi\alpha)} \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2} + as\right) - \frac{\pi s^{1-\alpha}}{\sin(\pi\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a^2s^2)^n}{\Gamma(2-\alpha+2n)}
\end{aligned}$$

bulunur. Ek olarak, (1.7) ile verilen Gamma fonksiyonunun Legendre katlı formülü ve (1.12) genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyon tanımından

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L} \left\{ \frac{t^\alpha}{a^2 + t^2}; s \right\} \\
&= \frac{\pi a^{\alpha-1}}{\sin(\pi\alpha)} \left[\sin \left(\frac{\pi\alpha}{2} + as \right) - \frac{(as)^{1-\alpha}}{2^{1-\alpha} \pi^{-1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+n) (-a^2 s^2)^n}{\Gamma \left(1 - \frac{\alpha}{2} + n \right) \Gamma \left(\frac{3}{2} - \frac{\alpha}{2} + n \right) 4^n n!} \right] \\
&= \frac{\pi a^{\alpha-1}}{\sin(\pi\alpha)} \left[\sin \left(\frac{\pi\alpha}{2} + as \right) - \frac{(as)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} {}_1F_2 \left(1; 1 - \frac{\alpha}{2}, \frac{3}{2} - \frac{\alpha}{2}; \frac{-a^2 s^2}{4} \right) \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Öte yandan, (1.5) ile verilen Gamma fonksiyonunun özelliğinden, (1.29) ile verilen Lommel fonksiyonunun, $\mu = -\alpha - \frac{1}{2}$, $k = \frac{1}{2}$ seçimi ile elde edilen özel durumu ve $\sin \left(\frac{\pi\alpha}{2} + as \right) = \cos \left(\pi \left(\frac{\alpha+1}{2} \right) + as \right)$ ile $-\sin(\pi\alpha) = \sin(\pi(\alpha+1))$ trigonometrik fonksiyonun özelliklerinden

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L} \left\{ \frac{t^\alpha}{a^2 + t^2}; s \right\} \\
&= \frac{\pi a^{\alpha-1}}{\sin(\pi(\alpha+1))} \left[\cos \left(\pi \left(\frac{\alpha+1}{2} \right) + as \right) + \frac{(as)^{1/2} (as)^{1/2-\alpha}}{\Gamma(-\alpha)(1-\alpha)(-\alpha)} {}_1F_2 \left(1; 1 - \frac{\alpha}{2}, \frac{3}{2} - \frac{\alpha}{2}; \frac{-a^2 s^2}{4} \right) \right] \\
&= \frac{\pi a^{\alpha-1}}{\sin(\pi(\alpha+1))} \left[\cos \left(\pi \left(\frac{\alpha+1}{2} \right) + as \right) + \frac{(as)^{1/2}}{\Gamma(-\alpha)} s_{-\alpha-1/2, 1/2}(as) \right]
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan (1.31) ile verilen Lommel'in iki değişkenli fonksiyonunun $\nu = -\alpha + 1$ için özel durumundan,

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{t^\alpha}{a^2 + t^2}; s \right\} = \frac{\pi a^{\alpha-1}}{\sin(\pi(\alpha+1))} \left[\cos \left(\pi \left(\frac{\alpha+1}{2} \right) + as \right) + U_{-\alpha+1}(2as, 0) \right]$$

elde edilir. (1.32) ile verilen Lommel'in iki değişkenli fonksiyonunun $\nu = \alpha + 1$ için özel durumundan,

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{t^\alpha}{a^2 + t^2}; s \right\} = \frac{\pi a^{\alpha-1}}{\sin(\pi(\alpha+1))} V_{\alpha+1}(2as, 0)$$

olduğu görülür. Burada $a = 1$ seçilirse bilinen

$$\mathcal{L}\left\{\frac{t^\alpha}{1+t^2};s\right\} = \frac{\pi}{\sin(\pi(\alpha+1))} V_{\alpha+1}(2s, 0)$$

formülü elde edilir ([7], s.139, (8)).

Sonuç 3.11 (3.40) formülünde $\alpha = \frac{\nu}{2} - \frac{1}{4}$, $\mu = 1$, $p = 0$, $s = s^2$, $a = a^2/2$ seçilirse ve (3.20) bağıntısı kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{\nu}{2} - \frac{1}{4} \mathcal{H}_{\nu,0}^{1,\gamma} \left\{ \frac{4}{a^4 + 4t^2}; s^2 \right\} \\ &= \frac{\pi a^{\nu-\frac{5}{2}} s^{\nu-\frac{1}{2}}}{2^{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}} \cos\left(\pi\left(\frac{\nu}{4} - \frac{1}{8}\right)\right)} {}_1\Psi_2 \left[\begin{matrix} (1,1) \\ (1+\nu, 2), (1,2) \end{matrix} \middle| -\frac{a^4 s^4}{4} \right] \\ &+ \frac{\pi a^{\nu-\frac{5}{2}} s^{\nu+\frac{3}{2}}}{2^{\frac{\nu}{2}+\frac{3}{4}} \sin\left(\pi\left(\frac{\nu}{4} - \frac{1}{8}\right)\right)} {}_1\Psi_2 \left[\begin{matrix} (1,1) \\ (2+\nu, 2), (2,2) \end{matrix} \middle| -\frac{a^4 s^4}{4} \right] \\ &- \frac{\pi s^2}{\sin\left(\pi\left(\frac{\nu}{2} - \frac{1}{4}\right)\right)} {}_1\Psi_2 \left[\begin{matrix} (1,1) \\ \left(\frac{9}{4} + \frac{\nu}{2}, 2\right), \left(\frac{9}{4} - \frac{\nu}{2}, 2\right) \end{matrix} \middle| -\frac{a^4 s^4}{4} \right] \end{aligned}$$

elde edilir. (1.33) ile verilen Fox-Wright fonksiyonunun seri açılımından

$$\begin{aligned} & \frac{1}{s\sqrt{2}} \mathcal{H}_\nu \left\{ \frac{16}{4a^4 + t^4}; s \right\} \\ &= \frac{\pi a^{\nu-\frac{5}{2}} s^{\nu-\frac{1}{2}}}{2^{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}} \cos\left(\pi\left(\frac{\nu}{4} - \frac{1}{8}\right)\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{\Gamma(1+\nu+2n)\Gamma(1+2n)(-1)^n} \left(\frac{a^2 s^2}{2}\right)^{2n} \\ &+ \frac{\pi a^{\nu-\frac{5}{2}} s^{\nu-\frac{1}{2}}}{2^{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}} \sin\left(\pi\left(\frac{\nu}{4} - \frac{1}{8}\right)\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{\Gamma(2+\nu+2n)\Gamma(2+2n)(-1)^n} \left(\frac{a^2 s^2}{2}\right)^{2n+1} \\ &- \frac{\pi s^2}{\sin\left(\pi\left(\frac{\nu}{2} - \frac{1}{4}\right)\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma\left(\frac{9}{4} + \frac{\nu}{2} + 2n\right)\Gamma\left(\frac{9}{4} - \frac{\nu}{2} + 2n\right)} \left(\frac{a^2 s^2}{2}\right)^{2n} \end{aligned}$$

bulunur. Her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\sin\left(\pi\left(\frac{\nu}{4} - \frac{1}{8} + \frac{n}{2}\right)\right) = \begin{cases} (-1)^k \cos\left(\pi\left(\frac{\nu}{4} - \frac{1}{8}\right)\right), & n = 2k \\ (-1)^{k+1} \sin\left(\pi\left(\frac{\nu}{4} - \frac{1}{8}\right)\right), & n = 2k+1 \end{cases}$$

olduğundan ilk iki seri, tek bir toplam işareti altında

$$\begin{aligned} \frac{1}{s\sqrt{2}} \mathcal{H}_\nu\left\{\frac{16}{4a^4+t^4}; s\right\} &= \frac{a^{v-\frac{5}{2}}s^{v-\frac{1}{2}}}{2^{\frac{v}{2}-\frac{1}{4}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(1+v+n)\Gamma(1+n)} \left(\frac{a^2s^2}{2}\right)^n \frac{\pi}{\sin\left(\pi\left(\frac{\nu}{4} - \frac{1}{8} + \frac{n}{2}\right)\right)} \\ &\quad - \frac{\pi s^2}{\sin\left(\pi\left(\frac{\nu}{2} - \frac{1}{4}\right)\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma\left(\frac{9}{4} + \frac{\nu}{2} + 2n\right)\Gamma\left(\frac{9}{4} - \frac{\nu}{2} + 2n\right)} \left(\frac{a^2s^2}{2}\right)^{2n} \end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir.

$$\sin 2z = 2 \sin z \cos z$$

özdeşliğinden,

$$\begin{aligned} \frac{1}{s\sqrt{2}} \mathcal{H}_\nu\left\{\frac{16}{4a^4+t^4}; s\right\} &= \frac{a^{v-\frac{5}{2}}s^{v-\frac{1}{2}}}{2^{\frac{v}{2}-\frac{5}{4}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(1+v+n)n!} \frac{\pi \cos\left(\pi\left(\frac{\nu}{4} - \frac{1}{8} + \frac{n}{2}\right)\right)}{\sin\left(\pi\left(\frac{\nu}{2} - \frac{1}{4} + n\right)\right)} \left(\frac{a^2s^2}{2}\right)^n \\ &\quad - \frac{\pi s^2}{\sin\left(\pi\left(\frac{\nu}{2} - \frac{1}{4}\right)\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma\left(\frac{9}{4} + \frac{\nu}{2} + 2n\right)\Gamma\left(\frac{9}{4} - \frac{\nu}{2} + 2n\right)} \left(\frac{a^2s^2}{2}\right)^n \end{aligned}$$

elde edilir. $\sin\left(\pi\left(\frac{\nu}{2} - \frac{1}{4} + n\right)\right) = (-1)^{n-1} \sin\left(\pi\left(\frac{\nu}{2} + \frac{3}{4}\right)\right)$ ve $\sin\left(\pi\left(\frac{\nu}{2} - \frac{1}{4}\right)\right) = -\sin\left(\pi\left(\frac{\nu}{2} + \frac{3}{4}\right)\right)$ eşitliklerinden de yararlanarak aşağıdaki bilinen formül elde edilir ([24], s.439):

$$\begin{aligned} &\mathcal{H}_\nu\left\{\frac{16}{4a^4+t^4}; s\right\} \\ &= \frac{\pi a^{v-\frac{5}{2}}s^{v+\frac{1}{2}}}{\sin\left(\pi\left(\frac{\nu}{2} + \frac{3}{4}\right)\right) 2^{\frac{v}{2}-\frac{7}{4}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(1+v+n)n!} \left(\frac{a^2s^2}{2}\right)^n \cos\left(\pi\left(\frac{\nu}{4} + \frac{3}{4} + \frac{n}{2}\right)\right) \\ &\quad + \frac{\pi s^3 \sqrt{2}}{\sin\left(\pi\left(\frac{\nu}{2} + \frac{3}{4}\right)\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma\left(\frac{9}{4} + \frac{\nu}{2} + 2n\right)\Gamma\left(\frac{9}{4} - \frac{\nu}{2} + 2n\right)} \left(\frac{as}{\sqrt{2}}\right)^{4n}. \end{aligned}$$

Örnek 3.5 (3.18) tanımında $f(t) = \frac{1}{(1+at)^\beta}$ ($|\arg a| < \pi$) seçilirse

$$\begin{aligned}
& {}_\alpha \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma} \left\{ \frac{1}{(1+at)^\beta}; s \right\} \\
&= \frac{-\pi}{\sin(\pi(\beta-\alpha))\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta)} \frac{s^{\alpha+1}}{a^{\alpha+1}} {}_2\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma,p), (\alpha+1,1) \\ (1+\nu,\mu), (2-\beta+\alpha,1) \end{matrix} \middle| \frac{s}{a} \right] \\
&+ \frac{1}{a} \frac{\pi}{\sin(\pi(\beta-\alpha))\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta)} \left(\frac{s}{a} \right)^{\beta-1} {}_2\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma-p(-\beta+\alpha+1),p), (\beta,1) \\ (1+\nu-\mu(-\beta+\alpha+1),\mu), (\beta-\alpha,1) \end{matrix} \middle| \frac{s}{a} \right]
\end{aligned} \tag{3.44}$$

formülü elde edilir.

Gerçekten ${}_{{}_\alpha} \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}$ -dönüşümü tanımından ve $\mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(st)$ fonksiyonunun integral gösterilişi yardımıyla

$$\begin{aligned}
& {}_\alpha \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma} \left\{ \frac{1}{(1+at)^\beta}; s \right\} \\
&= \int_0^\infty (st)^\alpha \mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(st) \frac{1}{(1+at)^\beta} dt \\
&= \int_0^\infty (st)^\alpha \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(u)\Gamma(\gamma-pu)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(1+\nu-\mu u)} (st)^{-u} du \right) \frac{1}{(1+at)^\beta} dt \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(u)\Gamma(\gamma-pu)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(1+\nu-\mu u)} s^{\alpha-u} \left(\int_0^\infty t^{\alpha-u} \frac{1}{(1+at)^\beta} dt \right) du \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(u)\Gamma(\gamma-pu)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(1+\nu-\mu u)} s^{\alpha-u} \mathcal{M} \left\{ \frac{1}{(1+at)^\beta}; \alpha-u+1 \right\} du
\end{aligned}$$

bağıntısı yazılabilir. Buradan Örnek 1.3'deki 3 numaralı formül $s = \alpha - u + 1$ için kullanılırsa Mellin dönüşümü yardımıyla,

$$\begin{aligned}
& {}_\alpha \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma} \left\{ \frac{1}{(1+at)^\beta}; s \right\} \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(u)\Gamma(\gamma-pu)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(1+\nu-\mu u)} \frac{s^{\alpha-u}}{a^{\alpha-u+1}} \frac{\Gamma(\alpha-u+1)\Gamma(\beta-\alpha+u-1)}{\Gamma(\beta)} du
\end{aligned}$$

bulunur. İntegral $u_1 = -n$ ve $u_2 = -\beta + \alpha + 1 - n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) noktalarında rezidüye sahiptir. İntegral işareti altındaki fonksiyon, Gamma fonksiyonunun (1.6) özelliğinden,

$$\Gamma(u) = \frac{\pi}{\sin(\pi u) \Gamma(1-u)} \quad \text{ve} \quad \Gamma(\beta - \alpha + u - 1) = \frac{\pi}{\sin(\pi(\beta - \alpha + u - 1)) \Gamma(2 - \beta + \alpha - u)}$$

eşitliklerini yardımıyla

$$g(u) = \frac{1}{a} \frac{\pi}{\sin(\pi u)} \frac{\Gamma(u) \Gamma(\gamma - pu) \Gamma(\alpha - u + 1)}{\Gamma(1-u) \Gamma(\gamma) \Gamma(1 + \nu - \mu u) \Gamma(\beta) \Gamma(2 - \beta + \alpha - u)} \frac{\pi}{\sin(\pi(\beta - \alpha + u - 1))} \left(\frac{s}{a}\right)^{\alpha-u}$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda

$${}_a\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma} \left\{ \frac{1}{(1+at)^\beta}; s \right\} = \sum_{k=1}^2 \text{Res} \{g(u); u_k\} \quad (3.45)$$

olur. u_k ($k = 1, 2$) noktalarındaki rezidüler hesaplanırsa, $u_1 = -n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) noktalarındaki $g(u)$ fonksiyonunun rezidüsü,

$$\begin{aligned} \text{Res}_{u_1=-n} g(u) &= \lim_{u \rightarrow -n} (u+n) g(u) \\ &= \lim_{u \rightarrow -n} \frac{1}{a} \frac{\pi(u+n)}{\sin(\pi u)} \frac{\Gamma(\gamma - pu) \Gamma(\alpha - u + 1)}{\Gamma(1-u) \Gamma(\gamma) \Gamma(1 + \nu - \mu u) \Gamma(\beta) \Gamma(2 - \beta + \alpha - u)} \frac{\pi}{\sin(\pi(\beta - \alpha + u))} \left(\frac{s}{a}\right)^{\alpha-u} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{a} \frac{\Gamma(\gamma + pn) \Gamma(\alpha + n + 1)}{\Gamma(1+n) \Gamma(\gamma) \Gamma(1 + \nu + \mu n) \Gamma(\beta) \Gamma(2 - \beta + \alpha + n)} \frac{\pi}{\sin(\pi(\beta - \alpha - n))} \left(\frac{s}{a}\right)^{\alpha+n} \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Burada $\sin(\pi(\beta - \alpha - n - 1)) = (-1)^{n+1} \sin(\pi(\beta - \alpha))$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) bağıntısı kullanılarak,

$$\text{Res}_{u_1=-n} g(u) = \frac{1}{a} \frac{-\pi}{\sin(\pi(\beta - \alpha))} \frac{\Gamma(\gamma + pn) \Gamma(\alpha + n + 1)}{\Gamma(\gamma) \Gamma(\beta) \Gamma(1+n) \Gamma(1 + \nu + \mu n) \Gamma(2 - \beta + \alpha + n)} \left(\frac{s}{a}\right)^{\alpha+n} \quad (3.46)$$

bulunur. Öte yandan $u_2 = -\beta + \alpha + 1 - n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) noktalarındaki rezidü,

$$\begin{aligned} \text{Res}_{u_2=-\beta+\alpha+1-n} g(u) &= \lim_{u \rightarrow -\beta+\alpha+1-n} (u + \beta - \alpha - 1 + n) g(u) \\ &= \lim_{u_2 \rightarrow -\beta+\alpha+1-n} \frac{1}{a} \frac{\pi(u + \beta - \alpha - 1 + n)}{\sin(\pi(\beta - \alpha - 1 + u))} \frac{\Gamma(\gamma - pu) \Gamma(\alpha - u + 1) s^{\alpha-u} a^{-\alpha+u}}{\Gamma(1-u) \Gamma(\gamma) \Gamma(1 + \nu - \mu u) \Gamma(\beta) \Gamma(2 - \beta + \alpha - u)} \frac{\pi}{\sin(\pi u)} \end{aligned}$$

$$= \frac{(-1)^n}{a} \frac{\Gamma(\gamma - p(-\beta + \alpha + 1) + pn)\Gamma(\beta + n)}{\Gamma(\beta - \alpha + n)\Gamma(\gamma)\Gamma(1 + \nu - \mu(-\beta + \alpha + 1) + \mu n)\Gamma(\beta)\Gamma(1 + n)} \frac{\pi}{\sin(\pi(-\beta + \alpha + 1 - n))} \left(\frac{s}{a}\right)^{\beta-1}$$

bağıntısıyla elde edilir. Burada $\sin(\pi(-\beta + \alpha + 1 - n)) = (-1)^{n+1} \sin(\pi(\alpha - \beta))$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \text{Res}_{u_2=-\beta+\alpha+1-n} g(u) &= \frac{1}{a} \frac{-\pi}{\sin(\pi(\alpha - \beta))} \\ &\times \frac{\Gamma(\gamma - p(-\beta + \alpha + 1) + pn)\Gamma(\beta + n)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta)\Gamma(\beta - \alpha + n)\Gamma(1 + \nu - \mu(-\beta + \alpha + 1) + \mu n)\Gamma(1 + n)} \left(\frac{s}{a}\right)^{\beta-1+n} \end{aligned} \quad (3.47)$$

bulunur. (3.46) ve (3.47) rezidüleri (3.45) toplamında yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} {}_{\alpha} \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma} \left\{ \frac{1}{(1+at)^{\beta}}; s \right\} &= -\frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi}{\sin(\pi(\alpha - \beta))} \frac{\Gamma(\gamma + pn)\Gamma(\alpha + n + 1)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta)\Gamma(1 + \nu + \mu n)\Gamma(2 - \beta + \alpha + n)n!} \left(\frac{s}{a}\right)^{\alpha+n} \\ &+ \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi}{\sin(\pi(\alpha - \beta))} \frac{\Gamma(\gamma - p(-\beta + \alpha + 1) + pn)\Gamma(\beta + n)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta)\Gamma(\beta - \alpha + n)\Gamma(1 + \nu - \mu(-\beta + \alpha + 1) + \mu n)n!} \left(\frac{s}{a}\right)^{\beta-1+n} \end{aligned}$$

olur. (1.33) ile verilen Fox-Wright fonksiyonunun tanımında kullanılırsa,

$$\begin{aligned} {}_{\alpha} \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma} \left\{ \frac{1}{(1+at)^{\beta}}; s \right\} &= \frac{1}{a} \frac{-\pi}{\sin(\pi(\beta - \alpha))\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta)} \left(\frac{s}{a}\right)^{\alpha} {}_2\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma, p), (\alpha + 1, 1) \\ (1 + \nu, \mu), (2 - \beta + \alpha, 1) \end{matrix} \middle| \frac{s}{a} \right] \\ &+ \frac{1}{a} \frac{\pi}{\sin(\pi(\beta - \alpha))\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta)} \left(\frac{s}{a}\right)^{\beta-1} {}_2\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma - p(-\beta + \alpha + 1), p), (\beta, 1) \\ (1 + \nu - \mu(-\beta + \alpha + 1), \mu), (\beta - \alpha, 1) \end{matrix} \middle| \frac{s}{a} \right] \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Sonuç 3.12 (3.44) formülünde $\nu = 0$, $\gamma = 1$ ve $\mu = p$ seçilirse (3.19) bağıntısı yardımıyla

$$\begin{aligned} s^{\alpha} \mathcal{L} \left\{ \frac{t^{\alpha}}{(1+at)^{\beta}}; s \right\} &= \frac{-1}{a} \frac{\pi}{\sin(\pi(\beta - \alpha))\Gamma(\beta)} \left(\frac{s}{a}\right)^{\alpha} {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (\alpha + 1, 1) \\ (2 - \beta + \alpha, 1) \end{matrix} \middle| \frac{s}{a} \right] \\ &+ \frac{1}{a} \frac{\pi}{\sin(\pi(\beta - \alpha))\Gamma(\beta)} \left(\frac{s}{a}\right)^{\beta-1} {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (\beta, 1) \\ (\beta - \alpha, 1) \end{matrix} \middle| \frac{s}{a} \right] \end{aligned}$$

bulunur. (1.34) ile verilen Fox-Wright fonksiyonu ile genelleştirilmiş hipergeomet-

rik fonksiyon arasındaki bağıntı yardımıyla

$$\mathcal{L}\left\{\frac{t^\alpha}{(1+at)^\beta};s\right\} = \frac{-\pi a^{-\alpha-1}}{\sin(\pi(\beta-\alpha-1))\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(2-\beta+\alpha)} {}_1F_1\left(\alpha+1;2-\beta+\alpha;\frac{s}{a}\right) \\ - \frac{\pi s^{-\alpha+\beta-1}a^{-\beta}}{\sin(\pi(\beta-\alpha-1))\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} {}_1F_1\left(\beta;\beta-\alpha;\frac{s}{a}\right)$$

elde edilir. (1.24) Whittaker fonksiyonunun tanımında $\kappa = -\frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2}$, $\mu = \frac{1}{2} - \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2}$ ve $z = \frac{s}{a}$ seçilirse

$$M_{-\frac{\beta}{2}-\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}-\frac{\beta}{2}+\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{s}{a}\right) = \left(\frac{s}{a}\right)^{1-\frac{\beta}{2}+\frac{\alpha}{2}} e^{-s/2a} {}_1F_1\left(\alpha+1;2-\beta+\alpha;\frac{s}{a}\right)$$

ve $\kappa = -\frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2}$, $\mu = -\frac{1}{2} + \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2}$ ve $z = \frac{s}{a}$ seçilirse

$$M_{-\frac{\beta}{2}-\frac{\alpha}{2}, -\frac{1}{2}+\frac{\beta}{2}-\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{s}{a}\right) = \left(\frac{s}{a}\right)^{\frac{\beta}{2}-\frac{\alpha}{2}} e^{-s/2a} {}_1F_1\left(\beta;\beta-\alpha;\frac{s}{a}\right)$$

bulunur. O halde

$$\mathcal{L}\left\{\frac{t^\alpha}{(1+at)^\beta};s\right\} = \frac{-\pi e^{s/2a} s^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}-1}}{\sin(\pi(\beta-\alpha))\Gamma(\beta)} \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{\beta}{2}+\frac{\alpha}{2}} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(2-\beta+\alpha)} M_{-\frac{\beta}{2}-\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}-\frac{\beta}{2}+\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{s}{a}\right) \\ + \frac{\pi e^{s/2a} s^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}-1}}{\sin(\pi(\beta-\alpha))\Gamma(\beta)} \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{\beta}{2}+\frac{\alpha}{2}} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} M_{-\frac{\beta}{2}-\frac{\alpha}{2}, -\frac{1}{2}+\frac{\beta}{2}-\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{s}{a}\right)$$

biçiminde yazılabilir. İlk terimde $\sin(\pi(\beta-\alpha)) = -\sin(\pi(\beta-\alpha+1))$ özdeşliği ve (1.6) Gamma fonksiyonunun özelliğinden

$$\mathcal{L}\left\{\frac{t^\alpha}{(1+at)^\beta};s\right\} = e^{s/2a} s^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}-1} \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{\beta}{2}+\frac{\alpha}{2}} \\ \times \left[\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(-1-\beta+\alpha)}{\Gamma(\beta)} M_{-\frac{\beta}{2}-\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}-\frac{\beta}{2}+\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{s}{a}\right) + \Gamma(1-\beta+\alpha) M_{-\frac{\beta}{2}-\frac{\alpha}{2}, -\frac{1}{2}+\frac{\beta}{2}-\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{s}{a}\right) \right] \\ = e^{s/2a} s^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}-1} \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{\beta}{2}+\frac{\alpha}{2}} \Gamma(\alpha+1)^{-1+\frac{\beta}{2}+\frac{\alpha}{2}} \\ \times \left[\frac{\Gamma(-1-\beta+\alpha)}{\Gamma(\beta)} M_{-\frac{\beta}{2}-\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}-\frac{\beta}{2}+\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{s}{a}\right) + \frac{\Gamma(1-\beta+\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)} M_{-\frac{\beta}{2}-\frac{\alpha}{2}, -\frac{1}{2}+\frac{\beta}{2}-\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{s}{a}\right) \right]$$

elde edilir. (1.25) Whittaker fonksiyonunun tanımında $\kappa = -\frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2}$, $\mu = \frac{1}{2} - \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2}$ ve $z = \frac{s}{a}$ seçilirse

$$W_{-\frac{\beta}{2}-\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}-\frac{\beta}{2}+\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{s}{a}\right) = \frac{\Gamma(-1+\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)} M_{-\frac{\beta}{2}-\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}-\frac{\beta}{2}+\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{s}{a}\right) + \frac{\Gamma(1-\beta+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)} M_{-\frac{\beta}{2}-\frac{\alpha}{2}, -\frac{1}{2}+\frac{\beta}{2}-\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{s}{a}\right) \quad (3.48)$$

bulunur. O halde

$$\mathcal{L}\left\{\frac{t^\alpha}{(1+at)^\beta}; s\right\} = e^{s/2a} s^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}-1} \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{\beta}{2}+\frac{\alpha}{2}} \Gamma(\alpha+1) W_{-\frac{\beta}{2}-\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}-\frac{\beta}{2}+\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{s}{a}\right)$$

biçimindedir. Burada $a = \frac{1}{a}$ alınır

$$\mathcal{L}\left\{\frac{t^\alpha}{(a+t)^\beta}; s\right\} = e^{as/2} s^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}-1} a^{-\frac{\beta}{2}+\frac{\alpha}{2}} \Gamma(\alpha+1) W_{-\frac{\beta}{2}-\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}-\frac{\beta}{2}+\frac{\alpha}{2}}(as) \quad (3.49)$$

elde edilir. $\alpha = v-1$, $\beta = v - \frac{1}{2}$ seçilirse

$$\mathcal{L}\left\{\frac{t^{v-1}}{(a+t)^{v-1/2}}; s\right\} = e^{as/2} s^{-\frac{3}{4}} a^{-\frac{1}{4}} \Gamma(v) W_{\frac{3}{4}-v, \frac{1}{4}}(as)$$

bulunur. (1.27) parabolik silindirik fonksiyonunun tanımında $v = 1 - 2v$ alınır

$$D_{1-2v}(\sqrt{2as}) = 2^{-v+1/2} a^{-1/4} s^{-1/4} W_{\frac{3}{4}-v, \frac{1}{4}}(as)$$

elde edilir. O halde

$$\mathcal{L}\left\{\frac{t^{v-1}}{(a+t)^{v-1/2}}; s\right\} = \Gamma(v) e^{as/2} s^{-1/2} 2^{v-1/2} D_{1-2v}(\sqrt{2as})$$

biçiminde yazılabilir ([7],s.139,(20)). Öte yandan (3.49) eşitliğinde $\alpha = v-1$, $\beta = v + 1/2$ seçilirse

$$\mathcal{L}\left\{\frac{t^{v-1}}{(a+t)^{v+1/2}};s\right\}=\Gamma(v)e^{as/2}a^{-\frac{3}{4}}s^{-\frac{1}{4}}W_{\frac{1}{4}-v,-\frac{1}{4}}(as)$$

bulunur. Whittaker fonksiyonunun (1.26) özelliğinden

$$\mathcal{L}\left\{\frac{t^{v-1}}{(a+t)^{v+1/2}};s\right\}=\Gamma(v)a^{-\frac{3}{4}}s^{-\frac{1}{4}}e^{as/2}W_{\frac{1}{4}-v,\frac{1}{4}}(as)$$

biçiminde yazılabilir. (1.27) parabolik silindirik fonksiyonunun tanımında $v = 1-2v$ alınır

$$D_{-2v}(\sqrt{2as})=2^{-v}a^{-1/4}s^{-1/4}W_{\frac{1}{4}-v,\frac{1}{4}}(as)$$

elde edilir. O halde

$$\mathcal{L}\left\{\frac{t^{v-1}}{(a+t)^{v+1/2}};s\right\}=2^v\Gamma(v)a^{-1/2}e^{as/2}D_{-2v}(\sqrt{2as})$$

biçiminde yazılabilir ([7], s.139, (21)).

Sonuç 3.13 (3.44) formülünde $\alpha = \frac{\nu}{2} - \frac{1}{4}$, $s = s^2$, $p = 0$, $\mu = 1$, $a = \frac{4}{a^2}$ ve $\beta = \beta + 1$ seçilirse (3.20) bağıntısı yardımıyla

$$\begin{aligned} & \mathcal{H}_\nu\left\{\frac{1}{(a^2+t^2)^{\beta+1}};s\right\} \\ &= \frac{-\pi a^{-2\beta+v-1/2}s^{v+1/2}2^{-v-1}}{\sin\left(\pi\left(\beta-\frac{\nu}{2}+\frac{5}{4}\right)\right)\Gamma(\beta+1)} {}_1\Psi_2\left[\begin{matrix} \left(\frac{3}{4}+\frac{\nu}{2},1\right) \\ (1+v,1),\left(\frac{3}{4}+\frac{\nu}{2}-\beta,1\right) \end{matrix} \middle| \frac{a^2s^2}{4}\right] \\ &+ \frac{\pi s^{1+2\beta}2^{-3/2-2\beta}}{\sin\left(\pi\left(\beta-\frac{\nu}{2}+\frac{5}{4}\right)\right)\Gamma(\beta+1)} {}_1\Psi_2\left[\begin{matrix} (\beta+1,1) \\ \left(\frac{5}{4}+\frac{\nu}{2}+\beta,1\right),\left(\frac{5}{4}-\frac{\nu}{2}+\beta,1\right) \end{matrix} \middle| \frac{a^2s^2}{4}\right] \end{aligned}$$

bulunur. (1.34) ile verilen Fox-Wright fonksiyonu ile genelleştirilmiş hipergeometrik seri arasındaki bağıntı kullanılarak ve (1.6) Gamma fonksiyonunun özelliğinden,

$$\begin{aligned}
& \mathcal{H}_\nu \left\{ \frac{1}{(a^2 + t^2)^{\beta+1}}; s \right\} \\
&= \frac{a^{-2\beta+v-1/2} s^{v+1/2} 2^{-v-1} \Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\beta - \frac{\nu}{2} + \frac{1}{4}\right)}{\Gamma(\beta+1) \Gamma(1+v)} {}_1F_2\left(\frac{3}{4} + \frac{\nu}{2}; 1+v, \frac{3}{4} + \frac{\nu}{2} - \beta; \frac{a^2 s^2}{4}\right) \\
&+ \frac{s^{1+2\beta} 2^{-3/2-2\beta} \Gamma\left(-\frac{1}{4} + \frac{\nu}{2} - \beta\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{4} + \frac{\nu}{2} + \beta\right)} {}_1F_2\left(\beta+1; \frac{5}{4} + \frac{\nu}{2} + \beta, \frac{5}{4} - \frac{\nu}{2} + \beta; \frac{a^2 s^2}{4}\right)
\end{aligned}$$

bilinen eşitliği bulunur ([8], s.24, (21)).

Örnek 3.6 (3.18) tanımında $f(t) = e^{-at}$ seçilirse

$${}_a \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma} \{e^{-at}; s\} = \frac{s^\alpha}{a^{\alpha+1} \Gamma(\gamma)} {}_2\Psi_1 \left[\begin{matrix} (\gamma, p), (\alpha+1, 1) \\ (1+\nu, \mu) \end{matrix} \middle| \frac{-s}{a} \right] \quad (3.50)$$

formülü elde edilir.

Gerçekten ${}_a \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}$ -dönüşümü tanımı ve $\mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(st)$ fonksiyonunun integral gösterilişi yardımıyla

$$\begin{aligned}
{}_a \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma} \{e^{-at}; s\} &= \int_0^\infty (st)^\alpha \mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(st) e^{-at} dt \\
&= \int_0^\infty (st)^\alpha \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(u) \Gamma(\gamma - pu)}{\Gamma(\gamma) \Gamma(1+\nu - \mu u)} (st)^{-u} du \right) e^{-at} dt \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(u) \Gamma(\gamma - pu)}{\Gamma(\gamma) \Gamma(1+\nu - \mu u)} s^{\alpha-u} \left(\int_0^\infty t^{\alpha-u} e^{-at} dt \right) du \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(u) \Gamma(\gamma - pu)}{\Gamma(\gamma) \Gamma(1+\nu - \mu u)} s^{\alpha-u} \mathcal{M}\{e^{-at}; \alpha - u + 1\} du
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada Örnek 1.3'deki 4 numaralı formül ([7], s.312, (1)), $s = \alpha - u + 1$ için kullanılırsa

$${}_a \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma} \{e^{-at}; s\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(u) \Gamma(\gamma - pu) \Gamma(\alpha - u + 1)}{\Gamma(\gamma) \Gamma(1+\nu - \mu u)} \frac{s^{\alpha-u}}{a^{\alpha-u+1}} du$$

eşitliği bulunur. Burada integral $u = -n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) noktalarında rezidüye sahiptir. İntegraldeki fonksiyon, Gamma fonksiyonunun (1.6) özelliğinden

$$\Gamma(u) = \frac{\pi}{\sin(\pi u) \Gamma(1-u)}$$

bağıntısı yardımıyla

$$g(u) = \frac{\pi}{\sin(\pi u)} \frac{\Gamma(\gamma - pu) \Gamma(\alpha - u + 1)}{\Gamma(1-u) \Gamma(\gamma) \Gamma(1 + \nu - \mu u)} \frac{s^{\alpha-u}}{a^{\alpha-u+1}}$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda

$${}_a\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{e^{-at};s\} = \sum_{n=0}^{\infty} \text{Res}\{g(u), -n\}$$

olur. $g(u)$ fonksiyonu için $u = -n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) noktalarında rezidü hesaplandığında,

$$\begin{aligned} \text{Res}_{u=-n} g(u) &= \lim_{u \rightarrow -n} (u+n) g(u) \\ &= \lim_{u \rightarrow -n} \frac{\pi(u+n)}{\sin(\pi u)} \frac{1}{a} \frac{\Gamma(\gamma - pu) \Gamma(\alpha - u + 1)}{\Gamma(1-u) \Gamma(\gamma) \Gamma(1 + \nu - \mu u)} \left(\frac{s}{a}\right)^{\alpha-u} \\ &= \frac{(-1)^n}{a} \frac{\Gamma(\gamma + pn) \Gamma(\alpha + n + 1)}{\Gamma(1+n) \Gamma(\gamma) \Gamma(1 + \nu + \mu n)} \left(\frac{s}{a}\right)^{\alpha+n} \end{aligned}$$

elde edilir. O halde (1.33) ile verilen Fox-Wright fonksiyonun tanımından

$$\begin{aligned} {}_a\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{e^{-at};s\} &= \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma(\gamma + pn) \Gamma(\alpha + n + 1)}{\Gamma(1+n) \Gamma(\gamma) \Gamma(1 + \nu + \mu n)} \left(\frac{s}{a}\right)^{\alpha+n} \\ &= \frac{1}{a^{\alpha+1}} \frac{s^{\alpha}}{\Gamma(\gamma)} {}_2\Psi_1 \left[\begin{matrix} (\gamma, p), (\alpha + 1, 1) \\ (1 + \nu, \mu) \end{matrix} \middle| -\frac{s}{a} \right] \end{aligned}$$

eşitliği bulunur.

Sonuç 3.14 (3.50) formülünde $\nu = 0$, $\gamma = 1$ ve $\mu = p$ seçilirse (3.19) bağıntısı yardımıyla

$$s^{\alpha} \mathcal{L}\{t^{\alpha} e^{-at};s\} = \frac{s^{\alpha}}{a^{\alpha+1}} {}_1\Psi_0 \left[\begin{matrix} (\alpha + 1, 1) \\ - \end{matrix} \middle| -\frac{s}{a} \right]$$

bulunur. Burada, (1.34) ile verilen Fox-Wright fonksiyonu ile genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyon arasındaki bağıntı kullanılırsa

$$\mathcal{L}\{t^\alpha e^{-at}; s\} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{a^{\alpha+1}} {}_1F_0\left(\alpha+1; -; -\frac{s}{a}\right)$$

biçiminde elde edilir. Genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonunun (1.14) özel durumundan ise

$$\mathcal{L}\{t^\alpha e^{-at}; s\} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(a+s)^{\alpha+1}}$$

bulunur ([7], s.144, (3)). Öte yandan burada $\alpha = 0$ ve $\alpha = 1$ seçilirse sırasıyla

$$\mathcal{L}\{e^{-at}; s\} = \frac{1}{a+s}$$

([7], s.143, (1)) ve

$$\mathcal{L}\{te^{-at}; s\} = \frac{1}{(a+s)^2}$$

([7], s.144, (2)) eşitlikleri bulunur.

Sonuç 3.15 (3.50) formülünde (3.24) bağıntısı kullanılırsa,

$$\begin{aligned} {}_\alpha \mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{t^\beta e^{-at}; s\} &= s^{-\beta} {}_{\alpha+\beta} \mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{e^{-at}; s\} \\ &= \frac{1}{a^{\alpha+\beta+1}} \frac{s^\alpha}{\Gamma(\gamma)} {}_2\Psi_1 \left[\begin{matrix} (\gamma, p), (\alpha+\beta+1, 1) \\ (1+v, \mu) \end{matrix} \middle| -\frac{s}{a} \right] \end{aligned}$$

eşitliği yazılabilir. Burada $\alpha = \frac{\nu}{2} - \frac{1}{4}$, $s = s^2$, $p = 0$, $\mu = 1$, $a = 4a$ ve $\beta = \frac{\mu}{2} - \frac{1}{4}$ seçilirse (3.20) bağıntısı yardımıyla

$$\begin{aligned} \frac{1}{s\sqrt{2}} \mathcal{H}_v \left\{ \left(\frac{t^2}{4} \right)^{\frac{\mu}{2}-\frac{1}{4}} e^{-at^2}; s \right\} &= \frac{s^{v-1/2}}{(4a)^{v/2+\mu/2+1/2}} {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} \left(\frac{\nu}{2} + \frac{\mu}{2} + \frac{1}{2}, 1 \right) \\ (1+v, 1) \end{matrix} \middle| -\frac{s^2}{4a} \right] \\ \mathcal{H}_v \{t^{\mu-1/2} e^{-at^2}; s\} &= \frac{s^{v+1/2}}{2^{v+1} a^{v/2+\mu/2+1/2}} {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} \left(\frac{\nu}{2} + \frac{\mu}{2} + \frac{1}{2}, 1 \right) \\ (1+v, 1) \end{matrix} \middle| -\frac{s^2}{4a} \right] \end{aligned}$$

elde edilir. (1.34) ile verilen Fox-Wright fonksiyonu ile genelleştirilmiş hipergeomet-

rik fonksiyonunun arasındaki bağıntı yardımıyla

$$\mathcal{H}_v \left\{ t^{\mu-1/2} e^{-at^2}; s \right\} = \frac{s^{v+1/2} \Gamma\left(\frac{v}{2} + \frac{\mu}{2} + \frac{1}{2}\right)}{2^{v+1} a^{v/2+\mu/2+1/2} \Gamma(1+v)} {}_1F_1\left(\frac{v}{2} + \frac{\mu}{2} + \frac{1}{2}; 1+v; -\frac{s^2}{4a}\right)$$

biçiminde bulunur ([8], s.30, (14)).

Örnek 3.7 (3.18) formülünde $f(t) = \cos(at)$ ve $f(t) = \sin(at)$ fonksiyonları için

$${}_a\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{\cos(at); s\} = \frac{s^\alpha}{a^{\alpha+1} \Gamma(\gamma)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma+pn) \Gamma(\alpha+n+1)}{n! \Gamma(1+v+\mu n)} \left(-\frac{s}{a}\right)^n \cos\left(\frac{\pi}{2}(n+\alpha+1)\right) \quad (3.51)$$

ve

$${}_a\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{\sin(at); s\} = \frac{s^\alpha}{a^{\alpha+1} \Gamma(\gamma)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma+pn) \Gamma(\alpha+n+1)}{n! \Gamma(1+v+\mu n)} \left(-\frac{s}{a}\right)^n \sin\left(\frac{\pi}{2}(n+\alpha+1)\right) \quad (3.52)$$

formülleri elde edilir.

Gerçekten (3.50) formülünde $a = -ia$ alınırsa,

$$\begin{aligned} {}_a\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{e^{-iat}; s\} &= \frac{s^\alpha}{(-ia)^{\alpha+1} \Gamma(\gamma)} {}_2\Psi_1 \left[\begin{matrix} (\gamma, p), (\alpha+1, 1) \\ (1+v, \mu) \end{matrix} \middle| -\frac{s}{ia} \right] \\ &= \frac{s^\alpha}{(-ia)^{\alpha+1} \Gamma(\gamma)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma+pn) \Gamma(\alpha+n+1)}{n! \Gamma(1+v+\mu n)} \left(-\frac{s}{ia}\right)^n \\ &= \frac{s^\alpha}{a^{\alpha+1} \Gamma(\gamma)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma+pn) \Gamma(\alpha+n+1)}{n! \Gamma(1+v+\mu n)} \left(-\frac{s}{a}\right)^n \frac{1}{i^{n+\alpha+1}} \end{aligned}$$

bulunur. Ek olarak

$$\frac{1}{i^{n+\alpha+1}} = e^{-i\frac{\pi}{2}(n+\alpha+1)} = \cos\left(\frac{\pi}{2}(n+\alpha+1)\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{2}(n+\alpha+1)\right)$$

eşitliğinden

$${}_a\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{e^{-iat}; s\} = \frac{s^\alpha}{a^{\alpha+1} \Gamma(\gamma)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma+pn) \Gamma(\alpha+n+1)}{n! \Gamma(1+v+\mu n)} \left(-\frac{s}{a}\right)^n e^{-i\frac{\pi}{2}(n+\alpha+1)}$$

elde edilir. Buradan $e^{-iat} = \cos(at) - i \sin(at)$ reel ve sanal kısımlara ayrıldığında

$${}_a\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{\cos(at);s\} = \frac{s^\alpha}{a^{\alpha+1}\Gamma(\gamma)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma+pn)\Gamma(\alpha+n+1)}{n!\Gamma(1+\nu+\mu n)} \left(-\frac{s}{a}\right)^n \cos\left(\frac{\pi}{2}(n+\alpha+1)\right)$$

ve

$${}_a\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{\sin(at);s\} = \frac{s^\alpha}{a^{\alpha+1}\Gamma(\gamma)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma+pn)\Gamma(\alpha+n+1)}{n!\Gamma(1+\nu+\mu n)} \left(-\frac{s}{a}\right)^n \sin\left(\frac{\pi}{2}(n+\alpha+1)\right)$$

bağıntılarına ulaşılır.

Sonuç 3.16 (3.51) ve (3.52) formülünde $\nu = \alpha = 0$, $\gamma = 1$ ve $\mu = p$ seçilirse (3.19) bağıntısı yardımıyla

$$\mathcal{L}\{\cos(at);s\} = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{s}{a}\right)^n \cos\left(\frac{\pi}{2}(n+1)\right)$$

ve

$$\mathcal{L}\{\sin(at);s\} = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{s}{a}\right)^n \sin\left(\frac{\pi}{2}(n+1)\right)$$

bağıntıları bulunur. Burada $n = 2k + 1$ için $\cos\left(\frac{\pi}{2}(2k+2)\right) = (-1)^{k+1}$ ve $n = 2k$ için $\sin\left(\frac{\pi}{2}(2k+1)\right) = (-1)^k$ değerleri yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\cos(at);s\} &= \frac{s}{a^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{s^2}{a^2}\right)^k \\ &= \frac{s}{a^2 + s^2}, \quad |s| < |a| \end{aligned}$$

([7], s.154, (43)) ve

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\sin(at);s\} &= \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{s^2}{a^2}\right)^k \\ &= \frac{a}{a^2 + s^2}, \quad |s| < |a| \end{aligned}$$

bilinen eşitlikleri elde edilir ([7], s.150, (1)). Ek olarak (3.51) ve (3.52) formülünde

$\nu = 0, \gamma = 1, \alpha = \nu - 1$ ve $\mu = p$ seçilirse (3.19) bağıntısı yardımıyla sırasıyla

$$\mathcal{L}\{t^{\nu-1} \cos(at); s\} = \frac{1}{a^\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+n)}{n!} \left(-\frac{s}{a}\right)^n \cos\left(\frac{\pi}{2}(n+\nu)\right)$$

ve

$$\mathcal{L}\{t^{\nu-1} \sin(at); s\} = \frac{1}{a^\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+n)}{n!} \left(-\frac{s}{a}\right)^n \sin\left(\frac{\pi}{2}(n+\nu)\right)$$

bulunur. Sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının üstel fonksiyonlar yardımıyla

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}(n+\nu)\right) = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}(n+\nu)} + e^{-i\frac{\pi}{2}(n+\nu)}}{2} = \frac{i^{n+\nu} + i^{-(n+\nu)}}{2}$$

ve

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}(n+\nu)\right) = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}(n+\nu)} - e^{-i\frac{\pi}{2}(n+\nu)}}{2i} = \frac{i^{n+\nu} - i^{-(n+\nu)}}{2i}$$

tanımlarından sırasıyla

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t^{\nu-1} \cos(at); s\} &= \frac{1}{a^\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+n)}{n!} \left(-\frac{s}{a}\right)^n \frac{i^{n+\nu} + i^{-(n+\nu)}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{i^\nu}{a^\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+n)}{n!} \left(-\frac{is}{a}\right)^n + \frac{1}{2} \frac{i^{-\nu}}{a^\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+n)}{n!} \left(-\frac{s}{ia}\right)^n \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t^{\nu-1} \sin(at); s\} &= \frac{1}{a^\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+n)}{n!} \left(-\frac{s}{a}\right)^n \frac{i^{n+\nu} - i^{-(n+\nu)}}{2i} \\ &= \frac{i^\nu}{2ia^\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+n)}{n!} \left(-\frac{is}{a}\right)^n - \frac{i^{-\nu}}{2ia^\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+n)}{n!} \left(-\frac{s}{ia}\right)^n \end{aligned}$$

eşitlikleri yazılabilir. Genelleştirilmiş hipergeometrik seri tanımından yararlanılırsa,

$$\mathcal{L}\{t^{\nu-1} \cos(at); s\} = \frac{1}{2} \frac{i^\nu}{a^\nu} \Gamma(\nu) {}_1F_0\left(\nu; -; \frac{-is}{a}\right) + \frac{1}{2} \frac{i^{-\nu}}{a^\nu} \Gamma(\nu) {}_1F_0\left(\nu; -; \frac{-s}{ia}\right)$$

ve

$$\mathcal{L}\{t^{\nu-1} \sin(at); s\} = \frac{1}{2i} \frac{i^\nu}{a^\nu} \Gamma(\nu) {}_1F_0\left(\nu; -; \frac{-is}{a}\right) - \frac{1}{2i} \frac{i^{-\nu}}{a^\nu} \Gamma(\nu) {}_1F_0\left(\nu; -; \frac{-s}{ia}\right)$$

bağıntılarına ulaşılır. Genelleştirilmiş hipergeometrik serinin (1.14) özel durumundan

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t^{\nu-1} \cos(at); s\} &= \frac{1}{2} \Gamma(\nu) \frac{i^\nu}{(a+is)^\nu} + \frac{1}{2} \Gamma(\nu) \frac{i^{-\nu}}{(a-is)^\nu} \\ &= \frac{\Gamma(\nu)}{2} \left[\frac{1}{(s-ia)^\nu} + \frac{1}{(s+ia)^\nu} \right]\end{aligned}$$

([7], s.157, (58)) ve

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t^{\nu-1} \sin(at); s\} &= \frac{1}{2i} \Gamma(\nu) \frac{i^\nu}{(a+is)^\nu} - \frac{1}{2i} \Gamma(\nu) \frac{i^{-\nu}}{(a-is)^\nu} \\ &= \frac{\Gamma(\nu)}{2i} \left[\frac{1}{(s-ia)^\nu} - \frac{1}{(s+ia)^\nu} \right]\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir ([7], s.152, (15)).

Sonuç 3.17 (3.51) ve (3.52) formülünde (3.24) bağıntısı kullanılırsa sırasıyla

$$\begin{aligned}{}_a\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{t^\beta \cos(at); s\} &= s^{-\beta} {}_{\alpha+\beta}\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{\cos(at); s\} \\ &= \frac{s^\alpha}{a^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\gamma)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma+pn)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{n!\Gamma(1+\nu+\mu n)} \left(-\frac{s}{a}\right)^n \cos\left(\frac{\pi}{2}(n+\alpha+\beta+1)\right)\end{aligned}\quad (3.53)$$

ve

$$\begin{aligned}{}_a\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{t^\beta \sin(at); s\} &= s^{-\beta} {}_{\alpha+\beta}\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{\sin(at); s\} \\ &= \frac{s^\alpha}{a^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\gamma)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma+pn)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{n!\Gamma(1+\nu+\mu n)} \left(-\frac{s}{a}\right)^n \sin\left(\frac{\pi}{2}(n+\alpha+\beta+1)\right)\end{aligned}\quad (3.54)$$

eşitlikleri bulunur. Burada $\alpha = \frac{\nu}{2} - \frac{1}{4}$, $s = s^2$, $p = 0$, $\mu = 1$, $a = 4a$ ve $\beta = -\frac{1}{4}$ seçilirse (3.20) bağıntısı yardımıyla sırasıyla

$$\begin{aligned}\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}\mathcal{H}_{\nu,0}^{1,\gamma}\{t^{-1/4} \cos(4at); s^2\} &= \frac{(s^2)^{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}}}{(4a)^{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}+n\right)}{n!\Gamma(1+\nu+n)} \left(-\frac{s^2}{4a}\right)^n \cos\left(\frac{\pi}{2}\left(n+\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)\right), \\ \mathcal{H}_{\nu}\{t^{-1/2} \cos(at^2); s\} &= \frac{s^{\nu+\frac{1}{2}}}{2^{\nu+1}a^{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}+n\right)}{n!\Gamma(1+\nu+n)} \left(-\frac{s^2}{4a}\right)^n \cos\left(\frac{\pi}{2}\left(n+\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)\right),\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} {}^{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}}\mathcal{H}_{\nu,0}^{1,\gamma}\{t^{-1/4}\sin(4at);s^2\} &= \frac{(s^2)^{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}}}{(4a)^{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}+n\right)}{n!\Gamma(1+\nu+n)} \left(-\frac{s^2}{4a}\right)^n \sin\left(\frac{\pi}{2}\left(n+\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)\right), \\ \mathcal{H}_{\nu}\{t^{-1/2}\sin(at^2);s\} &= \frac{s^{\nu+\frac{1}{2}}}{2^{\nu+1}a^{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}+n\right)}{n!\Gamma(1+\nu+n)} \left(-\frac{s^2}{4a}\right)^n \sin\left(\frac{\pi}{2}\left(n+\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)\right), \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının üstel fonksiyonlar yardımıyla verilen aşağıdaki tanımları göz önüne alınsın.

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2}\left(n+\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)\right) &= \frac{e^{i\frac{\pi}{2}\left(n+\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)} + e^{-i\frac{\pi}{2}\left(n+\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)}}{2} = \frac{i^{n+\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}} + i^{-(n+\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2})}}{2}, \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\left(n+\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)\right) &= \frac{e^{i\frac{\pi}{2}\left(n+\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)} - e^{-i\frac{\pi}{2}\left(n+\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)}}{2i} = \frac{i^{n+\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}} - i^{-(n+\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2})}}{2i}. \end{aligned}$$

Buradan

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\nu}\{t^{-1/2}\cos(at^2);s\} &= \frac{s^{\nu+\frac{1}{2}}i^{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}}}{2^{\nu+2}a^{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}+n\right)}{n!\Gamma(1+\nu+n)} \left(-\frac{is^2}{4a}\right)^n \\ &\quad + \frac{s^{\nu+\frac{1}{2}}i^{-(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2})}}{2^{\nu+2}a^{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}+n\right)}{n!\Gamma(1+\nu+n)} \left(\frac{is^2}{4a}\right)^n \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\nu}\{t^{-1/2}\sin(at^2);s\} &= \frac{s^{\nu+1}i^{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}}}{2^{\nu+2}a^{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}}i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}+n\right)}{n!\Gamma(1+\nu+n)} \left(-\frac{is^2}{4a}\right)^n \\ &\quad - \frac{s^{\nu+\frac{1}{2}}i^{-(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2})}}{2^{\nu+2}a^{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}}i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}+n\right)}{n!\Gamma(1+\nu+n)} \left(\frac{is^2}{4a}\right)^n \end{aligned}$$

bağıntılarına ulaşılır. Genelleştirilmiş hipergeometrik seri tanımı da kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\nu\left\{t^{-1/2}\cos\left(at^2\right);s\right\} &= \frac{s^{v+\frac{1}{2}}i^{\frac{v}{2}+\frac{1}{2}}}{2^{v+2}a^{\frac{v}{2}+\frac{1}{2}}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{v}{2}\right)}{\Gamma(1+\nu)}{}_1F_1\left(\frac{1}{2}+\frac{v}{2};1+\nu;-\frac{is^2}{4a}\right) \\ &+ \frac{s^{v+\frac{1}{2}}i^{-\left(\frac{v}{2}+\frac{1}{2}\right)}}{2^{v+2}a^{\frac{v}{2}+\frac{1}{2}}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{v}{2}\right)}{\Gamma(1+\nu)}{}_1F_1\left(\frac{1}{2}+\frac{v}{2};1+\nu;\frac{is^2}{4a}\right)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\nu\left\{t^{-1/2}\sin\left(at^2\right);s\right\} &= \frac{s^{v+\frac{1}{2}}i^{\frac{v}{2}+\frac{1}{2}}}{2^{v+2}a^{\frac{v}{2}+\frac{1}{2}}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{v}{2}\right)}{\Gamma(1+\nu)}{}_1F_1\left(\frac{1}{2}+\frac{v}{2};1+\nu;-\frac{is^2}{4a}\right) \\ &- \frac{s^{v+\frac{1}{2}}i^{-\left(\frac{v}{2}+\frac{1}{2}\right)}}{2^{v+2}a^{\frac{v}{2}+\frac{1}{2}}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{v}{2}\right)}{\Gamma(1+\nu)}{}_1F_1\left(\frac{1}{2}+\frac{v}{2};1+\nu;\frac{is^2}{4a}\right)\end{aligned}$$

bağıntılarına elde edilir. Genelleştirilmiş hipergeometrik serinin (1.15) özel durumunda $z = \frac{s^2}{8a}$ ve $v = \frac{\nu}{2}$ seçilirse

$$\mathcal{J}_{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{s^2}{8a}\right) = \left(\frac{s^2}{16a}\right)^{\frac{\nu}{2}} \frac{e^{i\frac{s^2}{8a}}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+1\right)}{}_1F_1\left(\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2};1+\nu;-i\frac{s^2}{4a}\right)$$

ya da $z = -\frac{s^2}{8a}$ ve $v = \frac{\nu}{2}$ seçilirse

$$\mathcal{J}_{\frac{\nu}{2}}\left(-\frac{s^2}{8a}\right) = \left(-\frac{s^2}{16a}\right)^{\frac{\nu}{2}} \frac{e^{-i\frac{s^2}{8a}}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+1\right)}{}_1F_1\left(\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2};1+\nu;i\frac{s^2}{4a}\right)$$

eşitlikleri bulunur. Buradan sırasıyla

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\nu\left\{t^{-1/2}\cos\left(at^2\right);s\right\} &= \frac{s^{\frac{1}{2}}}{2^{-v+2}a^{\frac{1}{2}}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{v}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v}{2}+1\right)}{\Gamma(1+\nu)} \\ &\times \left[i^{\frac{v}{2}+\frac{1}{2}}e^{-i\frac{s^2}{8a}}\mathcal{J}_{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{s^2}{8a}\right) + i^{-\left(\frac{v}{2}+\frac{1}{2}\right)}e^{i\frac{s^2}{8a}}(-1)^{-\frac{v}{2}}\mathcal{J}_{\frac{\nu}{2}}\left(-\frac{s^2}{8a}\right)\right]\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\nu\left\{t^{-1/2}\sin(at^2);s\right\} &= \frac{s^{\frac{1}{2}}}{2^{-\nu+2}a^{\frac{1}{2}}i} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+1\right)}{\Gamma(1+\nu)} \\ &\times \left[i^{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}} e^{-i\frac{s^2}{8a}} \mathcal{J}_{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{s^2}{8a}\right) - i^{-\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)} e^{i\frac{s^2}{8a}} (-1)^{-\frac{\nu}{2}} \mathcal{J}_{\frac{\nu}{2}}\left(-\frac{s^2}{8a}\right) \right]\end{aligned}$$

eşitlikleri yazılabilir. Birinci tür Bessel fonksiyonunun (1.36) özelliğinden

$$(-1)^{\nu/2} \mathcal{J}_{-\frac{\nu}{2}}\left(-\frac{s^2}{8a}\right) = \mathcal{J}_{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{s^2}{8a}\right)$$

eşitliği geçerlidir. Bu eşitliğe ek olarak $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ gösterilişinden ve (1.7) Gamma fonksiyonunun Legendre katlı formülünde $z = \frac{1}{2} + \frac{\nu}{2}$ seçimi ile sırasıyla

$$\mathcal{H}_\nu\left\{t^{-1/2}\cos(at^2);s\right\} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi s}{a}} \left(\frac{e^{i\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)-\frac{s^2}{8a}\right)} + e^{-i\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)-\frac{s^2}{8a}\right)}}{2} \right) \mathcal{J}_{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{s^2}{8a}\right)$$

ve

$$\mathcal{H}_\nu\left\{t^{-1/2}\sin(at^2);s\right\} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi s}{a}} \left(\frac{e^{i\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)-\frac{s^2}{8a}\right)} - e^{-i\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)-\frac{s^2}{8a}\right)}}{2i} \right) \mathcal{J}_{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{s^2}{8a}\right)$$

bağıntıları yazılabilir. Sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının üstel fonksiyonları cinsinden yazımından sırasıyla

$$\mathcal{H}_\nu\left\{t^{-1/2}\cos(at^2);s\right\} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi s}{a}} \cos\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)-\frac{s^2}{8a}\right) \mathcal{J}_{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{s^2}{8a}\right)$$

([8], s.38, (38)) ve

$$\mathcal{H}_\nu\left\{t^{-1/2}\sin(at^2);s\right\} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi s}{a}} \sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)-\frac{s^2}{8a}\right) \mathcal{J}_{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{s^2}{8a}\right)$$

bilinen eşitlikleri elde edilir ([8], s.34, (13)).

Sonuç 3.18 (3.53) ve (3.54) bağıntılarında $\alpha = \frac{\nu}{2} - \frac{1}{4}$, $s = s^2$, $p = 0$, $\mu = 1$, $a = 4a$ ve $\beta = \frac{1}{4}$ seçilirse (3.20) bağıntısı yardımıyla sırasıyla

$$\mathcal{H}_\nu \left\{ t^{1/2} \cos(at^2); s \right\} = \frac{s^{\nu+\frac{1}{2}}}{2^{\nu+1} a^{\frac{\nu}{2}+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\nu}{2} + n\right)}{n! \Gamma(1 + \nu + n)} \left(-\frac{s^2}{4a}\right)^n \cos\left(\frac{\pi}{2} \left(n + \frac{\nu}{2} + 1\right)\right)$$

ve

$$\mathcal{H}_\nu \left\{ t^{1/2} \sin(at^2); s \right\} = \frac{s^{\nu+\frac{1}{2}}}{2^{\nu+1} a^{\frac{\nu}{2}+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\nu}{2} + n\right)}{n! \Gamma(1 + \nu + n)} \left(-\frac{s^2}{4a}\right)^n \sin\left(\frac{\pi}{2} \left(n + \frac{\nu}{2} + 1\right)\right)$$

eşitlikleri bulunur. Sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının üstel fonksiyonlar yardımıyla aşağıda verilen tanımlarından yararlanılırsa,

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} \left(n + \frac{\nu}{2} + 1\right)\right) &= \frac{e^{i\frac{\pi}{2}(n+\frac{\nu}{2}+1)} + e^{-i\frac{\pi}{2}(n+\frac{\nu}{2}+1)}}{2} = \frac{i^{n+\frac{\nu}{2}+1} + i^{-(n+\frac{\nu}{2}+1)}}{2} \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} \left(n + \frac{\nu}{2} + 1\right)\right) &= \frac{e^{i\frac{\pi}{2}(n+\frac{\nu}{2}+1)} - e^{-i\frac{\pi}{2}(n+\frac{\nu}{2}+1)}}{2i} = \frac{i^{n+\frac{\nu}{2}+1} - i^{-(n+\frac{\nu}{2}+1)}}{2i} \end{aligned}$$

sırasıyla,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\nu \left\{ t^{1/2} \cos(at^2); s \right\} &= \frac{s^{\nu+\frac{1}{2}} i^{\frac{\nu}{2}+1}}{2^{\nu+2} a^{\frac{\nu}{2}+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\nu}{2} + n\right)}{n! \Gamma(1 + \nu + n)} \left(-\frac{is^2}{4a}\right)^n \\ &\quad + \frac{s^{\nu+\frac{1}{2}} i^{-(\frac{\nu}{2}+1)}}{2^{\nu+2} a^{\frac{\nu}{2}+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\nu}{2} + n\right)}{n! \Gamma(1 + \nu + n)} \left(\frac{is^2}{4a}\right)^n \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\nu \left\{ t^{1/2} \sin(at^2); s \right\} &= \frac{s^{\nu+\frac{1}{2}} i^{\frac{\nu}{2}+1}}{2^{\nu+2} a^{\frac{\nu}{2}+1} i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\nu}{2} + n\right)}{n! \Gamma(1 + \nu + n)} \left(-\frac{is^2}{4a}\right)^n \\ &\quad - \frac{s^{\nu+\frac{1}{2}} i^{-(\frac{\nu}{2}+1)}}{2^{\nu+2} a^{\frac{\nu}{2}+1} i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\nu}{2} + n\right)}{n! \Gamma(1 + \nu + n)} \left(\frac{is^2}{4a}\right)^n \end{aligned}$$

eşitlikleri bulunur. (1.12) ile verilen genelleştirilmiş hipergeometrik seri tanımı kullanıldığında ise sırasıyla,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\nu\{t^{1/2}\cos(at^2);s\} &= \frac{s^{v+\frac{1}{2}}i^{\frac{v}{2}+1}}{2^{v+2}a^{\frac{v}{2}+1}} \frac{\Gamma(1+\frac{v}{2})}{\Gamma(1+\nu)} {}_1F_1\left(1+\frac{\nu}{2};1+\nu;-\frac{is^2}{4a}\right) \\ &+ \frac{s^{v+\frac{1}{2}}i^{-(\frac{v}{2}+1)}}{2^{v+2}a^{\frac{v}{2}+1}} \frac{\Gamma(1+\frac{v}{2})}{\Gamma(1+\nu)} {}_1F_1\left(1+\frac{\nu}{2};1+\nu;\frac{is^2}{4a}\right)\end{aligned}\quad (3.55)$$

ve

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\nu\{t^{1/2}\sin(at^2);s\} &= \frac{s^{v+\frac{1}{2}}i^{\frac{v}{2}+1}}{2^{v+2}a^{\frac{v}{2}+1}} \frac{\Gamma(1+\frac{v}{2})}{\Gamma(1+\nu)} {}_1F_1\left(1+\frac{\nu}{2};1+\nu;-\frac{is^2}{4a}\right) \\ &- \frac{s^{v+\frac{1}{2}}i^{-(\frac{v}{2}+1)}}{2^{v+2}a^{\frac{v}{2}+1}} \frac{\Gamma(1+\frac{v}{2})}{\Gamma(1+\nu)} {}_1F_1\left(1+\frac{\nu}{2};1+\nu;\frac{is^2}{4a}\right)\end{aligned}\quad (3.56)$$

bağıntılarına ulaşılır. (1.21) bağıntısında $a = a - 1$ alınırsa

$$M(a-1;c;x) = \frac{a-1}{a-c}M(a;c;x) + \frac{1-c}{a-c}M(a-1;c-1;x)$$

bulunur. Bu bağıntıyı (1.20) bağıntısında yerine yazıldığında

$$M(a;c;x) = \frac{a-1}{a-c}M(a;c;x) + \frac{1-c}{a-c}M(a-1;c-1;x) + \frac{x}{c}M(a;c+1;x)$$

ve buradan

$$M(a;c;x) = M(a-1;c-1;x) + \frac{x(a-c)}{c(1-c)}M(a;c+1;x)$$

bağıntısı elde edilir. Bu bağıntı, (3.55) ve (3.56) bağıntıları yardımıyla ise

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\nu\{t^{1/2}\cos(at^2);s\} &= \frac{s^{v+\frac{1}{2}}i^{\frac{v}{2}+1}}{2^{v+2}a^{\frac{v}{2}+1}} \frac{\Gamma(1+\frac{v}{2})}{\Gamma(1+\nu)} {}_1F_1\left(\frac{\nu}{2};\nu;-\frac{is^2}{4a}\right) \\ &+ \frac{s^{v+\frac{1}{2}}i^{\frac{v}{2}+1}}{2^{v+2}a^{\frac{v}{2}+1}} \frac{\Gamma(1+\frac{v}{2})}{\Gamma(2+\nu)} \left(-\frac{is^2}{8a}\right) {}_1F_1\left(1+\frac{\nu}{2};2+\nu;-\frac{is^2}{4a}\right) \\ &+ \frac{s^{v+\frac{1}{2}}i^{-(\frac{v}{2}+1)}}{2^{v+2}a^{\frac{v}{2}+1}} \frac{\Gamma(1+\frac{v}{2})}{\Gamma(1+\nu)} {}_1F_1\left(\frac{\nu}{2};\nu;\frac{is^2}{4a}\right)\end{aligned}$$

$$+ \frac{s^{v+\frac{1}{2}} i^{-(\frac{v}{2}+1)}}{2^{v+2} a^{\frac{v}{2}+1}} \frac{\Gamma(1+\frac{v}{2})}{\Gamma(2+v)} \frac{is^2}{8a} {}_1F_1\left(1+\frac{v}{2}; 2+v; \frac{is^2}{4a}\right)$$

ve

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_v\{t^{1/2} \sin(at^2); s\} &= \frac{s^{v+\frac{1}{2}} i^{\frac{v}{2}+1}}{2^{v+2} a^{\frac{v}{2}+1}} \frac{\Gamma(1+\frac{v}{2})}{\Gamma(1+v)} {}_1F_1\left(\frac{v}{2}; v; -\frac{is^2}{4a}\right) \\ &+ \frac{s^{v+\frac{1}{2}} i^{\frac{v}{2}+1}}{2^{v+2} a^{\frac{v}{2}+1}} \frac{\Gamma(1+\frac{v}{2})}{\Gamma(2+v)} \left(-\frac{is^2}{8a}\right) {}_1F_1\left(1+\frac{v}{2}; 2+v; -\frac{is^2}{4a}\right) \\ &- \frac{s^{v+\frac{1}{2}} i^{-(\frac{v}{2}+1)}}{2^{v+1} a^{\frac{v}{2}+1}} \frac{\Gamma(1+\frac{v}{2})}{\Gamma(1+v)} {}_1F_1\left(\frac{v}{2}; v; \frac{is^2}{4a}\right) \\ &- \frac{s^{v+\frac{1}{2}} i^{-(\frac{v}{2}+1)}}{2^{v+2} a^{\frac{v}{2}+1}} \frac{\Gamma(1+\frac{v}{2})}{\Gamma(2+v)} \left(\frac{is^2}{8a}\right) {}_1F_1\left(1+\frac{v}{2}; 2+v; \frac{is^2}{4a}\right) \end{aligned}$$

bağımtıllarına ulaşılır. Genelleştirilmiş hipergeometrik serinin (1.15) özel durumunda

$z = \pm \frac{s^2}{8a}$ ve $v = \frac{v}{2} - \frac{1}{2}$ seçilirse

$$\mathcal{J}_{\frac{v}{2}-\frac{1}{2}}\left(\pm \frac{s^2}{8a}\right) = \left(\pm \frac{s^2}{16a}\right)^{\frac{v}{2}-\frac{1}{2}} \frac{e^{\pm i \frac{s^2}{8a}}}{\Gamma\left(\frac{v}{2} + \frac{1}{2}\right)} {}_1F_1\left(\frac{v}{2}; v; \mp i \frac{s^2}{4a}\right)$$

ya da $z = \pm \frac{s^2}{8a}$ ve $v = \frac{v}{2} + \frac{1}{2}$ seçilirse

$$\mathcal{J}_{\frac{v}{2}+\frac{1}{2}}\left(\pm \frac{s^2}{8a}\right) = \left(\pm \frac{s^2}{16a}\right)^{\frac{v}{2}+\frac{1}{2}} \frac{e^{\pm i \frac{s^2}{8a}}}{\Gamma\left(\frac{v}{2} + \frac{3}{2}\right)} {}_1F_1\left(1+\frac{v}{2}; 2+v; \mp i \frac{s^2}{4a}\right)$$

bulunur. O halde

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_v\{t^{1/2} \cos(at^2); s\} &= \frac{s^{\frac{3}{2}} i^{\frac{v}{2}+1}}{2^{-v+4} a^{3/2}} \frac{\Gamma(1+\frac{v}{2})\Gamma(\frac{v}{2}+\frac{1}{2})}{\Gamma(1+v)} e^{-i \frac{s^2}{8a}} \mathcal{J}_{\frac{v}{2}-\frac{1}{2}}\left(\frac{s^2}{8a}\right) \\ &+ \frac{s^{3/2} i^{\frac{v}{2}+1}}{2^{-v+3} a^{3/2}} \frac{\Gamma(1+\frac{v}{2})\Gamma(\frac{v}{2}+\frac{3}{2})}{\Gamma(2+v)} (-i) e^{-i \frac{s^2}{8a}} \mathcal{J}_{\frac{v}{2}+\frac{1}{2}}\left(\frac{s^2}{8a}\right) \\ &+ \frac{s^{3/2} i^{-(\frac{v}{2}+1)}}{2^{-v+4} a^{3/2}} \frac{\Gamma(1+\frac{v}{2})\Gamma(\frac{v}{2}+\frac{1}{2})}{\Gamma(1+v)} e^{i \frac{s^2}{8a}} (-1)^{-\frac{v}{2}+\frac{1}{2}} \mathcal{J}_{\frac{v}{2}-\frac{1}{2}}\left(-\frac{s^2}{8a}\right) \end{aligned}$$

$$+ \frac{s^{3/2} i^{-(\frac{\nu}{2}+1)}}{2^{-\nu+3} a^{3/2}} \frac{\Gamma(1+\frac{\nu}{2})\Gamma(\frac{\nu}{2}+\frac{3}{2})}{\Gamma(2+\nu)} i (-1)^{-\frac{\nu}{2}-\frac{1}{2}} e^{-i\frac{s^2}{8a}} \mathcal{J}_{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}}\left(-\frac{s^2}{8a}\right)$$

ve

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\nu\{t^{1/2}\sin(at^2);s\} &= \frac{s^{\frac{3}{2}} i^{\frac{\nu}{2}+1}}{2^{-\nu+4} a^{3/2} i} \frac{\Gamma(1+\frac{\nu}{2})\Gamma(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2})}{\Gamma(1+\nu)} e^{-i\frac{s^2}{8a}} \mathcal{J}_{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{2}}\left(\frac{s^2}{8a}\right) \\ &+ \frac{s^{3/2} i^{\frac{\nu}{2}+1}}{2^{-\nu+4} a^{3/2} i} \frac{\Gamma(1+\frac{\nu}{2})\Gamma(\frac{\nu}{2}+\frac{3}{2})}{\Gamma(2+\nu)} (-i) e^{-i\frac{s^2}{8a}} \mathcal{J}_{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}}\left(\frac{s^2}{8a}\right) \\ &- \frac{s^{3/2} i^{-(\frac{\nu}{2}+1)}}{2^{-\nu+3} a^{3/2} i} \frac{\Gamma(1+\frac{\nu}{2})\Gamma(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2})}{\Gamma(1+\nu)} e^{i\frac{s^2}{8a}} (-1)^{-\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}} \mathcal{J}_{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{2}}\left(-\frac{s^2}{8a}\right) \\ &- \frac{s^{3/2} i^{-(\frac{\nu}{2}+1)}}{2^{-\nu+3} a^{3/2} i} \frac{\Gamma(1+\frac{\nu}{2})\Gamma(\frac{\nu}{2}+\frac{3}{2})}{\Gamma(2+\nu)} i (-1)^{-\frac{\nu}{2}-\frac{1}{2}} e^{-i\frac{s^2}{8a}} \mathcal{J}_{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}}\left(-\frac{s^2}{8a}\right) \end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. Birinci tür Bessel fonksiyonunun (1.36) özelliğinden

$$(-1)^{-\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)} \mathcal{J}_{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}}\left(-\frac{s^2}{8a}\right) = \mathcal{J}_{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}}\left(\frac{s^2}{8a}\right)$$

eşitliği geçerlidir. Bu eşitliğe ek olarak $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ gösterilişinden ve (1.7) Gamma fonksiyonunun Legendre katlı formülünde $z = \frac{1}{2} + \frac{\nu}{2}$ ve $z = 1 + \frac{\nu}{2}$ seçimi ile sırasıyla

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\nu\{t^{1/2}\cos(at^2);s\} &= \frac{\pi^{1/2} s^{3/2}}{2^3 a^{3/2}} \left(\frac{e^{i\left(\frac{\pi}{2}(\frac{\nu}{2}+1)-\frac{s^2}{8a}\right)} + e^{-i\left(\frac{\pi}{2}(\frac{\nu}{2}+1)-\frac{s^2}{8a}\right)}}{2} \right) \mathcal{J}_{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{2}}\left(\frac{s^2}{8a}\right) \\ &+ \frac{\pi^{1/2} s^{3/2}}{2^3 a^{3/2}} \left(\frac{e^{i\left(\frac{\pi}{2}(\frac{\nu}{2}+1)-\frac{s^2}{8a}\right)} - e^{-i\left(\frac{\pi}{2}(\frac{\nu}{2}+1)-\frac{s^2}{8a}\right)}}{2i} \right) \mathcal{J}_{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}}\left(\frac{s^2}{8a}\right) \end{aligned}$$

ve

$$\mathcal{H}_\nu\{t^{1/2}\sin(at^2);s\} = \frac{\pi^{1/2} s^{\frac{3}{2}}}{2^3 a^{3/2}} \left(\frac{e^{i\left(\frac{\pi}{2}(\frac{\nu}{2}+1)-\frac{s^2}{8a}\right)} - e^{-i\left(\frac{\pi}{2}(\frac{\nu}{2}+1)-\frac{s^2}{8a}\right)}}{2i} \right) \mathcal{J}_{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{2}}\left(\frac{s^2}{8a}\right)$$

$$-\frac{\pi^{1/2}s^{3/2}}{2^3a^{3/2}} \left(\frac{e^{i\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{\nu}{2}+1\right)-\frac{s^2}{8a}\right)} + e^{-i\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{\nu}{2}+1\right)-\frac{s^2}{8a}\right)}}{2} \right) e^{-is^2/8a} \mathcal{J}_{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}}\left(\frac{s^2}{8a}\right)$$

bulunur. Sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının üstel fonksiyonları cinsinden yazımından sırasıyla

$$\begin{aligned} & \mathcal{H}_\nu \{t^{1/2} \cos(at^2); s\} \\ &= \frac{\pi^{1/2}s^{3/2}}{2^3a^{3/2}} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{\nu}{2}+1\right)-\frac{s^2}{8a}\right) \mathcal{J}_{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{2}}\left(\frac{s^2}{8a}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{\nu}{2}+1\right)-\frac{s^2}{8a}\right) \mathcal{J}_{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}}\left(\frac{s^2}{8a}\right) \right] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & \mathcal{H}_\nu \{t^{1/2} \sin(at^2); s\} \\ &= \frac{\pi^{1/2}s^{3/2}}{2^3a^{3/2}} \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{\nu}{2}+1\right)-\frac{s^2}{8a}\right) \mathcal{J}_{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{2}}\left(\frac{s^2}{8a}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{\nu}{2}+1\right)-\frac{s^2}{8a}\right) \mathcal{J}_{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}}\left(\frac{s^2}{8a}\right) \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+z\right) = -\sin z = \sin(-z) \text{ ve } \sin\left(\frac{\pi}{2}+z\right) = \cos z$$

özdeşlikleri yardımıyla

$$\mathcal{H}_\nu \{t^{1/2} \cos(at^2); s\} = \frac{\pi^{1/2}s^{3/2}}{2^3a^{3/2}} \left[\sin\left(\frac{s^2}{8a} - \frac{\pi\nu}{4}\right) \mathcal{J}_{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{2}}\left(\frac{s^2}{8a}\right) + \cos\left(\frac{s^2}{8a} - \frac{\pi\nu}{4}\right) \mathcal{J}_{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}}\left(\frac{s^2}{8a}\right) \right]$$

([8], s.38, (39)) ve

$$\mathcal{H}_\nu \{t^{1/2} \sin(at^2); s\} = \frac{\pi^{1/2}s^{3/2}}{2^3a^{3/2}} \left[\cos\left(\frac{s^2}{8a} - \frac{\pi\nu}{4}\right) \mathcal{J}_{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{2}}\left(\frac{s^2}{8a}\right) - \sin\left(\frac{s^2}{8a} - \frac{\pi\nu}{4}\right) \mathcal{J}_{\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}}\left(\frac{s^2}{8a}\right) \right]$$

sonuçlarına ulaşılır ([8], s.34, (14)).

Sonuç 3.19 (3.53) ve (3.54) bağıntılarında $\alpha = \frac{\nu}{2} - \frac{1}{4}$, $s = s^2$, $p = 0$, $\mu = 1$, $a = 4a$ ve $\beta = \frac{\nu}{2} - \frac{1}{4}$ seçilirse (3.20) bağıntısı yardımıyla sırasıyla

$$\begin{aligned}\frac{v}{2}-\frac{1}{4}\mathcal{H}_{v,0}^{1,\gamma}\left\{t^{\frac{v}{2}+\frac{1}{4}}\cos(4at);s^2\right\}&=\frac{s^{v-\frac{1}{2}}}{(4a)^{v+1}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{s^2}{4a}\right)^n\cos\left(\frac{\pi}{2}(n+v+1)\right)\\ \mathcal{H}_v\left\{t^{v+\frac{1}{2}}\cos(at^2);s\right\}&=\frac{s^{v+\frac{1}{2}}}{2^{v+1}a^{v+1}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{s^2}{4a}\right)^n\cos\left(\frac{\pi}{2}(n+v+1)\right)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\frac{v}{2}-\frac{1}{4}\mathcal{H}_{v,0}^{1,\gamma}\left\{t^{\frac{v}{2}+\frac{1}{4}}\sin(4at);s^2\right\}&=\frac{s^{v-\frac{1}{2}}}{(4a)^{v+1}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{s^2}{4a}\right)^n\sin\left(\frac{\pi}{2}(n+v+1)\right)\\ \mathcal{H}_v\left\{t^{v+\frac{1}{2}}\sin(at^2);s\right\}&=\frac{s^{v+\frac{1}{2}}}{2^{v+1}a^{v+1}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{s^2}{4a}\right)^n\sin\left(\frac{\pi}{2}(n+v+1)\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının üstel fonksiyonlar yardımıyla

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2}(n+v+1)\right)&=\frac{e^{i\frac{\pi}{2}(n+v+1)}+e^{-i\frac{\pi}{2}(n+v+1)}}{2}=\frac{i^n e^{i\frac{\pi}{2}(v+1)}+i^{-n} e^{-i\frac{\pi}{2}(v+1)}}{2},\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}(n+v+1)\right)&=\frac{e^{i\frac{\pi}{2}(n+v+1)}-e^{-i\frac{\pi}{2}(n+v+1)}}{2i}=\frac{i^n e^{i\frac{\pi}{2}(v+1)}-i^{-n} e^{-i\frac{\pi}{2}(v+1)}}{2i}\end{aligned}$$

tanımlarından yararlanılırsa sırasıyla

$$\mathcal{H}_v\left\{t^{v+\frac{1}{2}}\cos(at^2);s\right\}=\frac{s^{v+\frac{1}{2}}}{2^{v+1}a^{v+1}}\frac{1}{2}\left[e^{i\frac{\pi}{2}(v+1)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{is^2}{4a}\right)^n+e^{-i\frac{\pi}{2}(v+1)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{is^2}{4a}\right)^n\right]$$

ve

$$\mathcal{H}_v\left\{t^{v+\frac{1}{2}}\sin(at^2);s\right\}=\frac{s^{v+\frac{1}{2}}}{2^{v+1}a^{v+1}}\frac{1}{2i}\left[e^{i\frac{\pi}{2}(v+1)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{is^2}{4a}\right)^n-e^{-i\frac{\pi}{2}(v+1)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{is^2}{4a}\right)^n\right]$$

bulunur. Burada üstel fonksiyonun seri gösterilişi ile sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının üstel fonksiyonlar cinsinden gösterilişinden

$$\mathcal{H}_v\left\{t^{v+\frac{1}{2}}\cos(at^2);s\right\}=\frac{s^{v+\frac{1}{2}}}{2^{v+1}a^{v+1}}\cos\left(\frac{\pi}{2}(v+1)-\frac{s^2}{4a}\right)$$

ve

$$\mathcal{H}_\nu \left\{ t^{v+\frac{1}{2}} \sin(at^2); s \right\} = \frac{s^{v+\frac{1}{2}}}{2^{v+1} a^{v+1}} \sin \left(\frac{\pi}{2} (v+1) - \frac{s^2}{4a} \right)$$

sonuçlarına ulaşılır. Son olarak, $\cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \sin x$ ve $\sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \cos x$ trigonometrik özdeşlikleri kullanılarak, bilinen

$$\mathcal{H}_\nu \left\{ t^{v+\frac{1}{2}} \cos(at^2); s \right\} = \frac{s^{v+\frac{1}{2}}}{2^{v+1} a^{v+1}} \sin \left(\frac{s^2}{4a} - \frac{\pi v}{2} \right)$$

bağıntısı ([8], s.38, (40)) ve

$$\mathcal{H}_\nu \left\{ t^{v+\frac{1}{2}} \sin(at^2); s \right\} = \frac{s^{v+\frac{1}{2}}}{2^{v+1} a^{v+1}} \cos \left(\frac{s^2}{4a} - \frac{\pi v}{2} \right)$$

bilinen bağıntısına ulaşılır ([8], s.38, (15)).

Örnek 3.8 (3.18) integral dönüşümü tanımında $f(t) = \mathcal{J}_\beta(2\sqrt{at})$ seçilirse

$$\begin{aligned} {}_\alpha \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma} \left\{ \mathcal{J}_\beta(2\sqrt{at}); s \right\} &= \frac{s^\alpha}{a^{\alpha+1}} \frac{\sin \left(\pi \left(1 - \frac{\beta}{2} + \alpha \right) \right)}{\pi \Gamma(\gamma)} \\ &\times {}_3\Psi_1 \left[\begin{matrix} (\gamma, p), \left(\alpha + 1 + \frac{\beta}{2}, 1 \right), \left(\alpha + 1 - \frac{\beta}{2}, 1 \right) \\ (1 + \nu, \mu) \end{matrix} \middle| \frac{s}{a} \right] \end{aligned} \quad (3.57)$$

elde edilir.

Gerçekten ${}_\alpha \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}$ -dönüşümü ile Mellin dönüşümü tanımı ve $\mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(st)$ fonksiyonunun integral gösterilişi yardımıyla

$$\begin{aligned} {}_\alpha \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma} \left\{ \mathcal{J}_\beta(2\sqrt{at}); s \right\} &= \int_0^\infty (st)^\alpha \mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(st) e^{-at} dt \\ &= \int_0^\infty (st)^\alpha \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(u)\Gamma(\gamma-pu)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(1+\nu-\mu u)} (st)^{-u} du \right) \mathcal{J}_\beta(2\sqrt{at}) dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(u)\Gamma(\gamma-pu)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(1+\nu-\mu u)} s^{\alpha-u} \left(\int_0^\infty t^{\alpha-u} \mathcal{J}_\beta(2\sqrt{at}) dt \right) du \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(u)\Gamma(\gamma - pu)s^{\alpha-u}}{\Gamma(\gamma)\Gamma(1+\nu-\mu u)} \mathcal{M}\{\mathcal{J}_\beta(2\sqrt{at}); \alpha-u+1\} du$$

elde edilir. Burada

$$\mathcal{M}\{\mathcal{J}_\beta(at); s\} = \frac{2^{s-1}\Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{\beta}{2}\right)}{a^s\Gamma\left(\frac{\beta}{2} - \frac{s}{2} + 1\right)}$$

bilinen formülü ([7], s.326,(1)) ve Mellin dönüşümünün ([7], s.307,(5))

$$\mathcal{M}\{f(x^h); s\} = \frac{1}{h} \mathcal{M}\left\{f(x); \frac{s}{h}\right\}$$

ile verilen özelliğinden

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\{\mathcal{J}_\beta(2\sqrt{at}); s\} &= 2\mathcal{M}\{\mathcal{J}_\beta(2\sqrt{at}); 2s\} \\ &= \frac{\Gamma\left(s + \frac{\beta}{2}\right)}{a^s\Gamma\left(\frac{\beta}{2} - s + 1\right)} \end{aligned}$$

elde edilir. $s = \alpha - u + 1$ için elde edilen bu formül yardımıyla

$$\begin{aligned} {}_\alpha\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{\mathcal{J}_\beta(2\sqrt{at}); s\} \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(u)\Gamma(\gamma - pu)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(1+\nu-\mu u)} \frac{\Gamma\left(\alpha - u + 1 + \frac{\beta}{2}\right)s^{\alpha-u}}{\Gamma\left(\frac{\beta}{2} - \alpha + u\right)a^{\alpha-u+1}} du \end{aligned}$$

bulunur. $\alpha - \frac{\beta}{2} \notin \mathbb{N}$ için, integral $u = -n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) noktalarında rezidüye sahiptir.

İntegraldeki fonksiyon, Gamma fonksiyonunun (1.6) özelliğinden

$$\Gamma(u) = \frac{\pi}{\sin(\pi u)\Gamma(1-u)} \quad \text{ve} \quad \Gamma\left(\frac{\beta}{2} - \alpha + u\right) = \frac{\pi}{\Gamma\left(1 - \frac{\beta}{2} + \alpha - u\right)\sin\left(\pi\left(1 - \frac{\beta}{2} + \alpha - u\right)\right)}$$

bağıntıları yardımıyla

$$g(u) = \frac{\pi}{\sin(\pi u)} \frac{\Gamma(\gamma - pu)\Gamma\left(\alpha - u + 1 + \frac{\beta}{2}\right)\Gamma\left(1 - \frac{\beta}{2} + \alpha - u\right)\sin\left(\pi\left(1 - \frac{\beta}{2} + \alpha - u\right)\right)}{\Gamma(1-u)\Gamma(\gamma)\Gamma(1+\nu-\mu u)} \frac{\pi}{\pi} \left(\frac{s}{a}\right)^{\alpha-u} \frac{1}{a}$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda

$${}_a\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}\left\{\mathcal{J}_\beta\left(2\sqrt{at}\right);s\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}\text{Res}\{g(u);-n\}$$

olur. $u = -n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) noktalarında $g(u)$ fonksiyonunun rezidüsü hesaplandığında

$$\begin{aligned}\text{Res}_{u=-n}g(u) &= \lim_{u \rightarrow -n} (u+n)g(u) \\ &= \lim_{u \rightarrow -n} \frac{\pi(u+n)}{\sin(\pi u)} \frac{\Gamma(\gamma-pu)\Gamma\left(\alpha-u+1+\frac{\beta}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\beta}{2}+\alpha-u\right)\sin\left(\pi\left(1-\frac{\beta}{2}+\alpha-u\right)\right)}{\Gamma(1-u)\Gamma(\gamma)\Gamma(1+v-\mu u)} \frac{1}{\pi} \left(\frac{s}{a}\right)^{\alpha-u} \frac{1}{a} \\ &= \frac{1}{a} \frac{\Gamma(\gamma+pn)\Gamma\left(\alpha+n+1+\frac{\beta}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\beta}{2}+\alpha+n\right)\sin\left(\pi\left(1-\frac{\beta}{2}+\alpha\right)\right)}{\Gamma(1+n)\Gamma(\gamma)\Gamma(1+v-\mu n)} \frac{1}{\pi} \left(\frac{s}{a}\right)^{\alpha+n}\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}{}_a\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}\left\{\mathcal{J}_\beta\left(2\sqrt{at}\right);s\right\} \\ &= \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma+pn)\Gamma\left(\alpha+n+1+\frac{\beta}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\beta}{2}+\alpha+n\right)\sin\left(\pi\left(1-\frac{\beta}{2}+\alpha\right)\right)}{\Gamma(1+n)\Gamma(\gamma)\Gamma(1+v-\mu n)} \frac{1}{\pi} \left(\frac{s}{a}\right)^{\alpha+n} \\ &= \frac{s^\alpha}{a^{\alpha+1}} \frac{\sin\left(\pi\left(1-\frac{\beta}{2}+\alpha\right)\right)}{\pi\Gamma(\gamma)} {}_3\Psi_1 \left[\begin{matrix} (\gamma,p), \left(\alpha+1+\frac{\beta}{2},1\right), \left(\alpha+1-\frac{\beta}{2},1\right) \\ (1+v,\mu) \end{matrix} \middle| \frac{s}{a} \right]\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Sonuç 3.20 (3.57) formülünde $v = 0$, $\gamma = 1$, $\mu = p$ seçilirse (3.19) bağıntısı yardımıyla

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{t^\alpha \mathcal{J}_\beta\left(2\sqrt{at}\right);s\right\} &= \frac{1}{a^{\alpha+1}} \frac{1}{\Gamma\left(-\frac{\beta}{2}+\alpha+1\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{2}-\alpha\right)} \\ &\quad \times {}_2\Psi_0 \left[\begin{matrix} \left(\alpha+1+\frac{\beta}{2},1\right), \left(\alpha+1-\frac{\beta}{2},1\right) \\ - \end{matrix} \middle| \frac{s}{a} \right]\end{aligned}$$

elde edilir. Fox-Wright fonksiyonu ile genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyon arasındaki (1.34) bağıntısı yardımıyla,

$$\mathcal{L}\{t^\alpha \mathcal{J}_\beta(2\sqrt{at}); s\} = \frac{1}{a^{\alpha+1}} \frac{\Gamma(1+\alpha+\frac{\beta}{2})}{\Gamma(\frac{\beta}{2}-\alpha)} {}_2F_0\left(\frac{\beta}{2}+\alpha+1, -\frac{\beta}{2}+\alpha+1; -; \frac{s}{a}\right)$$

elde edilir. Öte yandan, (1.18) ilişkisi kullanılarak bu bağıntı,

$$\mathcal{L}\{t^\alpha \mathcal{J}_\beta(2\sqrt{at}); s\} = \frac{a^{\beta/2}}{s^{\alpha+1+\beta/2}} \frac{\Gamma(\alpha+1+\frac{\beta}{2})}{\Gamma(1+\beta)} {}_1F_1\left(\frac{\beta}{2}+\alpha+1; 1+\beta; -\frac{a}{s}\right) \quad (3.58)$$

biçiminde yazılabilir. (3.58) formülünde $\alpha = \mu - 1$, $\beta = 2v$ seçilirse

$$\mathcal{L}\{t^{\mu-1} \mathcal{J}_{2v}(2\sqrt{at}); s\} = \frac{a^v}{s^{\mu+v}} \frac{\Gamma(\mu+v)}{\Gamma(1+2v)} {}_1F_1\left(v+\mu; 1+2v; -\frac{a}{s}\right)$$

elde edilir ([7],s.186,(35)). Benzer biçimde (3.58) formülünde $\alpha = \mu - 1/2$, $\beta = 2v$ seçilirse

$$\mathcal{L}\{t^{\mu-1/2} \mathcal{J}_{2v}(2\sqrt{at}); s\} = \frac{a^v}{s^{\mu+1/2+v}} \frac{\Gamma(\mu+v+\frac{1}{2})}{\Gamma(1+2v)} {}_1F_1\left(\mu+v+\frac{1}{2}; 1+2v; -\frac{a}{s}\right)$$

bulunur. Burada (1.19) ile verilen Kummer dönüşümü kullanılırsa

$$\mathcal{L}\{t^{\mu-1/2} \mathcal{J}_{2v}(2\sqrt{at}); s\} = \frac{a^v}{s^{\mu+1/2+v}} \frac{\Gamma(\mu+\frac{1}{2}+v)}{\Gamma(1+2v)} e^{-a/s} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}+v-\mu; 1+2v; \frac{a}{s}\right)$$

elde edilir. Ek olarak, Whittaker fonksiyonunun tanımında $\kappa = \mu$, $\mu = v$ ve $z = \frac{a}{s}$ seçilirse

$$M_{\mu,v}\left(\frac{a}{s}\right) = \left(\frac{a}{s}\right)^{1/2+v} e^{-a/2s} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}+v-\mu; 1+2v; \frac{a}{s}\right)$$

bulunur. Buna göre

$$\mathcal{L}\{t^{\mu-1/2} \mathcal{J}_{2v}(2\sqrt{at}); s\} = \frac{a^{-1/2}}{s^\mu} \frac{\Gamma(\mu+\frac{1}{2}+v)}{\Gamma(1+2v)} e^{-a/2s} M_{\mu,v}\left(\frac{a}{s}\right)$$

biçiminde yazılabilir ([7],s.185,(34)). (3.58) formülünde $\alpha = v/2 + n$, $\beta = v$ seçilirse

$$\mathcal{L}\{t^{v/2+n} \mathcal{J}_v(2\sqrt{at}); s\} = \frac{a^{v/2}}{s^{v+n+1}} \frac{\Gamma(v+n+1)}{\Gamma(1+v)} {}_1F_1\left(v+n+1; 1+v; -\frac{a}{s}\right)$$

bulunur. Burada (1.19) ile verilen Kummer dönüşümü kullanılırsa

$$\mathcal{L}\left\{t^{v/2+n} \mathcal{J}_v(2\sqrt{at}); s\right\} = \frac{a^{v/2}}{s^{v+n+1}} \frac{\Gamma(v+n+1)}{\Gamma(1+v)} e^{-a/s} {}_1F_1\left(-n; 1+v; \frac{a}{s}\right)$$

yazılabilir. Ek olarak, Genelleştirilmiş Laguerre fonksiyonunun (1.22) ile verilen tanımında $v = n$, $\mu = v$ ve $z = \frac{a}{s}$ seçimi kullanılarak

$$\mathcal{L}\left\{t^{v/2+n} \mathcal{J}_v(2\sqrt{at}); s\right\} = n! \frac{a^{v/2}}{s^{v+n+1}} e^{-a/s} L_n^v\left(\frac{a}{s}\right)$$

elde edilir ([7],s.185,(33)). (3.58) formülünde $\alpha = v/2 - 1$, $\beta = v$ seçilirse

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{t^{v/2-1} \mathcal{J}_v(2\sqrt{at}); s\right\} &= \frac{a^{v/2}}{s^v} \frac{\Gamma(v)}{\Gamma(1+v)} {}_1F_1\left(v; 1+v; -\frac{a}{s}\right) \\ &= a^{-v/2} \frac{1}{v} \left(\frac{a}{s}\right)^v {}_1F_1\left(v; 1+v; -\frac{a}{s}\right) \end{aligned}$$

bulunur. Eksik Gamma fonksiyonunun tanımından

$$\mathcal{L}\left\{t^{v/2-1} \mathcal{J}_v(2\sqrt{at}); s\right\} = a^{-v/2} \gamma\left(v; \frac{a}{s}\right)$$

elde edilir ([7],s.185,(32)). (3.58) formülünde $\alpha = -v/2$, $\beta = v$ seçilirse,

$$\mathcal{L}\left\{t^{-v/2} \mathcal{J}_v(2\sqrt{at}); s\right\} = \frac{a^{v/2}}{s} \frac{1}{\Gamma(1+v)} {}_1F_1\left(1; 1+v; -\frac{a}{s}\right)$$

bulunur. (1.19) ile verilen Kummer dönüşümünden yararlanılırsa,

$$\mathcal{L}\left\{t^{-v/2} \mathcal{J}_v(2\sqrt{at}); s\right\} = (-1)^{-v} \frac{a^{-v/2}}{s^{1-v}} \frac{e^{-a/s}}{\Gamma(v)} \left(-\frac{a}{s}\right)^v \frac{1}{v} {}_1F_1\left(v; 1+v; \frac{a}{s}\right)$$

yazılabilir. Öte yandan Eksik Gamma fonksiyonunun tanımından

$$\mathcal{L}\left\{t^{-v/2} \mathcal{J}_v(2\sqrt{at}); s\right\} = e^{i\pi v} \frac{a^{-v/2}}{s^{1-v}} \frac{e^{-a/s}}{\Gamma(v)} \gamma\left(v; -\frac{a}{s}\right)$$

bilinen bağıntısı elde edilir ([7],s.185,(31)). (3.58) formülünde $\alpha = v/2$, $\beta = v$ seçi-

lirse,

$$\mathcal{L}\left\{t^{v/2} \mathcal{J}_v(2\sqrt{at}); s\right\} = \frac{a^{v/2}}{s^{1+v}} {}_1F_1\left(-; -; -\frac{a}{s}\right) = \frac{a^{v/2}}{s^{1+v}} e^{-a/s}$$

bulunur ([7],s.185,(30)). (3.58) formülünde $\alpha = -1/2$, $\beta = v$ seçilirse,

$$\mathcal{L}\left\{t^{-1/2} \mathcal{J}_v(2\sqrt{at}); s\right\} = \frac{a^{v/2}}{s^{(1+v)/2}} \frac{\Gamma((1+v)/2)}{\Gamma(1+v)} {}_1F_1\left(\frac{1+v}{2}; 1+v; -\frac{a}{s}\right)$$

bulunur. Birinci tür modifiye Bessel fonksiyonunun (1.16) tanımına göre,

$$\mathcal{L}\left\{t^{-1/2} \mathcal{J}_v(2\sqrt{at}); s\right\} = \frac{\sqrt{\pi}}{s^{1/2}} e^{-a/2s} \mathcal{I}_{v/2}\left(\frac{a}{2s}\right)$$

bilinen bağıntısı elde edilir ([7],s.185,(29)). (3.58) formülünde $\alpha = n - 1/2$, $\beta = 1$ seçilirse,

$$\mathcal{L}\left\{t^{n-1/2} \mathcal{J}_1(2\sqrt{at}); s\right\} = \frac{a^{1/2}}{s^{n+1}} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(2)} {}_1F_1\left(n+1; 2; -\frac{a}{s}\right)$$

bulunur. Burada (1.19) ile verilen Kummer dönüşümü kullanılırsa,

$$\mathcal{L}\left\{t^{n-1/2} \mathcal{J}_1(2\sqrt{at}); s\right\} = \frac{a^{1/2}}{s^{n+1}} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(2)} e^{-a/s} {}_1F_1\left(1-n; 2; \frac{a}{s}\right)$$

elde edilir. (1.17) ile verilen ${}_2F_0$ ile ${}_1F_1$ hipergeometrik fonksiyonların arasındaki bağıntı yardımıyla

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{t^{n-1/2} \mathcal{J}_1(2\sqrt{at}); s\right\} &= \frac{a^{1/2}}{s^{n+1}} \left(-\frac{a}{s}\right)^{n-1} e^{-a/s} {}_2F_0\left(1-n, -n; -; -\frac{s}{a}\right) \\ &= \frac{a^{-1/2}}{s^n} (-1)^{n-1} e^{-a/s} \left(\frac{s}{a}\right)^{-n} {}_2F_0\left(-n, 1-n; -; -\frac{s}{a}\right) \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Tricomi fonksiyonunun (1.23) ile verilen tanımından ve Bateman fonksiyonunun (1.28) ile verilen tanımından yararlanılırsa,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{t^{n-1/2} \mathcal{J}_1(2\sqrt{at}); s\right\} &= \frac{a^{-1/2}}{s^n} (-1)^{n-1} e^{-a/s} U\left(-n, 0, \frac{a}{s}\right) \\ &= \frac{a^{-1/2}}{s^n} (-1)^{n-1} e^{-a/2s} n! k_{2n}\left(\frac{a}{2s}\right) \end{aligned}$$

elde edilir ([7], s.185, (28)). (3.58) formülünde $\alpha = 1/2$, $\beta = 1$ seçilirse

$$\mathcal{L}\{t^{1/2} \mathcal{J}_1(2\sqrt{at}); s\} = \frac{a^{1/2}}{s^2} {}_1F_1\left(2; 2; -\frac{a}{s}\right) = a^{1/2} s^{-2} e^{-a/s}$$

bulunur ([7], s.185, (27)). (3.58) formülünde $\alpha = 0$, $\beta = v$ seçilirse

$$\mathcal{L}\{\mathcal{J}_v(2\sqrt{at}); s\} = \frac{a^{v/2}}{s^{1+v/2}} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{v}{2}\right)}{\Gamma(1+v)} {}_1F_1\left(\frac{v}{2} + 1; 1+v; -\frac{a}{s}\right)$$

elde edilir. Ek olarak, Kummer fonksiyonunun (1.20) özelliğinden

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}\{\mathcal{J}_v(2\sqrt{at}); s\} \\ &= \frac{a^{v/2}}{s^{1+v/2}} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{v}{2}\right)}{\Gamma(1+v)} \left({}_1F_1\left(\frac{v}{2}; v; -\frac{a}{s}\right) + \frac{-\frac{a}{s}}{2(1+v)} {}_1F_1\left(\frac{v}{2} + 1; 2+v; -\frac{a}{s}\right) \right) \\ &= \frac{a^{v/2}}{s^{1+v/2}} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{v}{2}\right)}{\Gamma(1+v)} {}_1F_1\left(\frac{v}{2}; v; -\frac{a}{s}\right) - \frac{a^{1+v/2}}{2s^{2+v/2}} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{v}{2}\right)}{\Gamma(2+v)} {}_1F_1\left(\frac{v}{2} + 1; 2+v; -\frac{a}{s}\right) \end{aligned}$$

bulunur. Buna göre (1.16) ile verilen birinci tür modifiye Bessel fonksiyonunun tanımını yardımıyla

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}\{\mathcal{J}_v(2\sqrt{at}); s\} \\ &= \frac{a^{1/2} \sqrt{\pi}}{2s^{3/2}} e^{-a/2s} \mathcal{I}_{(v-1)/2}\left(\frac{a}{2s}\right) - \frac{a^{1/2} \sqrt{\pi}}{2s^{3/2}} e^{-a/2s} \left(\frac{a}{s}\right)^{-(v+1)/2} \mathcal{I}_{(v+1)/2}\left(\frac{a}{2s}\right) \\ &= \frac{a^{1/2} \sqrt{\pi}}{2s^{3/2}} e^{-a/2s} \left[\mathcal{I}_{(v-1)/2}\left(\frac{a}{2s}\right) - \mathcal{I}_{(v+1)/2}\left(\frac{a}{2s}\right) \right] \end{aligned}$$

bilinen bağıntıya ulaşılır ([7], s.185, (26)). (3.58) formülünde $\alpha = 0$, $\beta = 0$ seçilirse

$$\mathcal{L}\{\mathcal{J}_0(2\sqrt{at}); s\} = \frac{1}{s} {}_1F_1\left(-; -; -\frac{a}{s}\right) = \frac{1}{s} e^{-a/s}$$

elde edilir ([7], s.185, (25)).

Sonuç 3.21 (3.57) formülünde (3.24) bağıntısı kullanılırsa

$$\begin{aligned} {}_{\alpha}\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}\{t^{\delta}\mathcal{J}_{\beta}(2\sqrt{at});s\} &= s^{-\delta} {}_{\alpha+\delta}\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}\{\mathcal{J}_{\beta}(2\sqrt{at});s\} \\ &= \frac{s^{\alpha}}{a^{\alpha+\delta+1}} \frac{\sin\left(\pi\left(1-\frac{\beta}{2}+\alpha+\delta\right)\right)}{\pi\Gamma(\gamma)} \\ &\quad \times {}_3\Psi_1\left[\begin{matrix} (\gamma,p), \left(\alpha+\delta+1+\frac{\beta}{2},1\right), \left(\alpha+\delta+1-\frac{\beta}{2},1\right) \\ (1+v,\mu) \end{matrix} \left| \frac{s}{a} \right.\right] \end{aligned}$$

bulunur. Burada $\alpha = \frac{v}{2} - \frac{1}{4}$, $s = s^2$, $p = 0$, $\mu = 1$, $a = a^2$, $\delta = -\lambda - \frac{1}{4}$, $\beta = v$ seçimiyle

$$\begin{aligned} {}_{\frac{v}{2}-\frac{1}{4}}\mathcal{H}_{v,0}^{1,\gamma}\{t^{-\lambda-1/4}\mathcal{J}_v(2\sqrt{at});s\} &= \frac{(s^2)^{\frac{v}{2}-\frac{1}{4}} \sin\left(\pi\left(-\lambda+\frac{1}{2}\right)\right)}{(a^2)^{\frac{v}{2}+\frac{1}{2}-\lambda} \pi} \\ &\quad \times {}_2\Psi_1\left[\begin{matrix} \left(v-\lambda+\frac{1}{2},1\right), \left(-\lambda+\frac{1}{2},1\right) \\ (1+v,1) \end{matrix} \left| \frac{s^2}{a^2} \right.\right] \end{aligned}$$

elde edilir. Burada (3.20) ve (1.34) bağıntıları kullanılırsa,

$$\mathcal{H}_v\{t^{-2\lambda-1/2}\mathcal{J}_v(at);s\} = \frac{s^{v+1/2}2^{-2\lambda}}{a^{v-2\lambda+1}} \frac{\Gamma\left(v-\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma(v+1)} {}_2F_1\left(v-\lambda+\frac{1}{2}, -\lambda+\frac{1}{2}; 1+v; \frac{s^2}{a^2}\right)$$

sonucuna ulaşılır ([8], s.47, (4)).

Örnek 3.9 (3.18) integral dönüşümü tanımında $f(t) = \mathcal{Y}_{\beta}(2\sqrt{at})$ seçilirse

$$\begin{aligned} {}_{\alpha}\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}\{\mathcal{Y}_{\beta}(2\sqrt{at});s\} &= \frac{s^{\alpha}}{a^{\alpha+1}\Gamma(\gamma)} \\ &\quad \times {}_2\Psi_4\left[\begin{matrix} (\gamma,p), \left(\alpha+1+\frac{\beta}{2},1\right) \\ (1+v,\mu), \left(\alpha+1-\frac{\beta}{2},1\right), \left(\alpha+\frac{1}{2}-\frac{\beta}{2},1\right), \left(\alpha+\frac{3}{2}-\frac{\beta}{2},1\right) \end{matrix} \left| \frac{s}{a} \right.\right] \end{aligned} \quad (3.59)$$

formülü elde edilir.

Gerçekten ${}_a\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}$ -dönüşümü tanımı ve $\mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(st)$ fonksiyonunun integral gösterilişi yardımıyla

$$\begin{aligned} {}_a\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{\mathcal{Y}_\beta(2\sqrt{at});s\} &= \int_0^\infty (st)^\alpha \mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(st) \mathcal{Y}_\beta(2\sqrt{at}) dt \\ &= \int_0^\infty (st)^\alpha \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(u)\Gamma(\gamma-pu)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(1+\nu-\mu u)} (st)^{-u} du \right) \mathcal{Y}_\beta(2\sqrt{at}) dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(u)\Gamma(\gamma-pu)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(1+\nu-\mu u)} s^{\alpha-u} \left(\int_0^\infty t^{\alpha-u} \mathcal{Y}_\beta(2\sqrt{at}) dt \right) du \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\mathcal{M}\{\mathcal{Y}_\beta(at);s\} = -\frac{2^{s-1}\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{\beta}{2}\right)\cos(\pi(s-\beta)/2)}{a^s\Gamma\left(\frac{s}{2}-\frac{\beta}{2}\right)\pi}, \quad |\operatorname{Re}\beta| < \operatorname{Re}s < \frac{3}{2}, \quad a > 0$$

formülü ([7], s.329, (17)) ve Mellin dönüşümünün ([7], s.307, (5))

$$\mathcal{M}\{f(x^h);s\} = \frac{1}{h}\mathcal{M}\left\{f(x);\frac{s}{h}\right\}$$

özelliklerinden

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\{\mathcal{Y}_\beta(2\sqrt{at});s\} &= 2\mathcal{M}\{\mathcal{Y}_\beta(2\sqrt{at});2s\} \\ &= -\frac{\Gamma\left(s+\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}(s-\beta)\right)}{a^s\Gamma\left(s-\frac{\beta}{2}\right)\pi} \\ &= -\frac{\Gamma\left(s+\frac{\beta}{2}\right)}{a^s\Gamma\left(s-\frac{\beta}{2}\right)\Gamma\left(s-\frac{\beta}{2}-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(s-\frac{\beta}{2}+\frac{1}{2}\right)} \end{aligned}$$

bulunur. Bu formül ve özellikler yardımıyla

$$\begin{aligned} {}_a\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{\mathcal{Y}_\beta(2\sqrt{at});s\} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(u)\Gamma(\gamma-pu)s^{\alpha-u}}{\Gamma(\gamma)\Gamma(1+\nu-\mu u)} \mathcal{M}\{\mathcal{Y}_\beta(2\sqrt{at});\alpha-u+1\} du \end{aligned}$$

$$= \frac{-1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(u)\Gamma(\gamma-pu)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(1+\nu-\mu u)} \frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{\beta}{2}+1-u\right)s^{\alpha-u}a^{-\alpha+u-1}}{\Gamma\left(\alpha+1-\frac{\beta}{2}-u\right)\Gamma\left(\alpha+\frac{1-\beta}{2}-u\right)\Gamma\left(\alpha+\frac{3-\beta}{2}-u\right)}$$

integrali elde edilir. Sağ yanda $u = -n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) noktalarında rezidüye sahiptir. İntegral altındaki terim, Gamma fonksiyonunun (1.6) özelliğinden

$$\Gamma(u) = \frac{\pi}{\sin(\pi u)\Gamma(1-u)}$$

eşitliği kullanılarak

$$g(u) = \frac{\pi}{\sin(\pi u)} \frac{\Gamma(\gamma-pu)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(1-u)\Gamma(1+\nu-\mu u)} \times \frac{\Gamma\left(\alpha+1+\frac{\beta}{2}-u\right)s^{\alpha-u}a^{-(\alpha-u+1)}}{\Gamma\left(\alpha+1-\frac{\beta}{2}-u\right)\Gamma\left(\alpha+\frac{1-\beta}{2}-u\right)\Gamma\left(\alpha+\frac{3-\beta}{2}-u\right)}$$

olur. $g(u)$ fonksiyonu yukardaki integral yerine yazılırsa,

$${}_a\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\left\{\mathcal{Y}_\beta\left(2\sqrt{at}\right);s\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \text{Res}\{g(u);-n\}$$

elde edilir. $u = -n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) noktalarında $g(u)$ fonksiyonunun rezidüsü hesaplandı-
ğında

$$\begin{aligned} \text{Res}_{u=-n}g(u) &= \lim_{u \rightarrow -n} (u+n)g(u) \\ &= \lim_{u \rightarrow -n} \frac{\pi(u+n)}{\sin(\pi u)} \frac{\Gamma(\gamma-pu)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(1-u)\Gamma(1+\nu-\mu u)} \\ &\quad \times \frac{\Gamma\left(\alpha+1+\frac{\beta}{2}-u\right)s^{\alpha-u}}{\Gamma\left(\alpha+1-\frac{\beta}{2}-u\right)\Gamma\left(\alpha+\frac{1-\beta}{2}-u\right)\Gamma\left(\alpha+\frac{3-\beta}{2}-u\right)a^{\alpha-u+1}} \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\Gamma(\gamma+pn)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(1+\nu+\mu n)} \frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{\beta}{2}+1+n\right)s^{\alpha+n}a^{-(\alpha+n+1)}}{\Gamma\left(\alpha-\frac{\beta}{2}+1+n\right)\Gamma\left(\alpha+\frac{1-\beta}{2}+n\right)\Gamma\left(\alpha+\frac{3-\beta}{2}+n\right)} \end{aligned}$$

bulunur. O halde Fox-Wright fonksiyonunun (1.33) ile verilen tanımından da yararlanıldığında,

$$\begin{aligned}
& {}_{\alpha}\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\left\{\mathcal{Y}_{\beta}\left(2\sqrt{at}\right);s\right\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\Gamma(\gamma+pn)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(1+\nu+\mu n)} \frac{\Gamma\left(1+\alpha+\frac{\beta}{2}+n\right)s^{\alpha+n}}{\Gamma\left(\frac{1-\beta}{2}+\alpha+n\right)\Gamma\left(1-\frac{\beta}{2}+\alpha+n\right)\Gamma\left(\frac{3-\beta}{2}+\alpha+n\right)a^{\alpha+n+1}} \\
&= \frac{-s^{\alpha}}{a^{\alpha+1}\Gamma(\gamma)} {}_2\Psi_4 \left[\begin{matrix} (\gamma,p), \left(1+\alpha+\frac{\beta}{2},1\right) \\ (1+\nu,\mu), \left(\frac{1-\beta}{2}+\alpha,1\right), \left(1-\frac{\beta}{2}+\alpha,1\right), \left(\frac{3-\beta}{2}+\alpha,1\right) \end{matrix} \middle| -\frac{s}{a} \right]
\end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 3.22 (3.59) formülünde $\nu = 0$, $\gamma = 1$, $\mu = p$ seçilirse, (3.19) bağıntısı yardımıyla

$$\mathcal{L}\left\{t^{\alpha}\mathcal{Y}_{\beta}\left(2\sqrt{at}\right);s\right\} = \frac{-1}{a^{\alpha+1}} {}_1\Psi_3 \left[\begin{matrix} \left(1+\alpha+\frac{\beta}{2},1\right) \\ \left(\frac{1-\beta}{2}+\alpha,1\right), \left(1-\frac{\beta}{2}+\alpha,1\right), \left(\frac{3-\beta}{2}+\alpha,1\right) \end{matrix} \middle| -\frac{s}{a} \right]$$

bulunur. Fox-Wright fonksiyonu ile geneleştirilmiş hipergeometrik fonksiyon arasındaki (1.34) bağıntısı yardımıyla,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{t^{\alpha}\mathcal{Y}_{\beta}\left(2\sqrt{at}\right);s\right\} &= \frac{-1}{a^{\alpha+1}} \frac{\Gamma\left(1+\alpha+\frac{\beta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\beta}{2}+\alpha\right)\Gamma\left(1-\frac{\beta}{2}+\alpha\right)\Gamma\left(\frac{3-\beta}{2}+\alpha\right)} \\
&\quad \times {}_1F_3\left(1+\alpha+\frac{\beta}{2}; \frac{1-\beta}{2}+\alpha, 1-\frac{\beta}{2}+\alpha, \frac{3-\beta}{2}+\alpha; -\frac{s}{a}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 3.23 (3.59) formülünde $\alpha = \frac{\nu}{2} - \frac{1}{4}$, $s = s^2$, $p = 0$, $\mu = 1$, $a = a^2$ seçilirse

$$\begin{aligned} & \frac{\nu}{2} - \frac{1}{4} \mathcal{H}_{\nu,0}^{1,\gamma} \{ \mathcal{Y}_\beta(2\sqrt{at}); s \} \\ &= \frac{-(s^2)^{\frac{\nu}{2} - \frac{1}{4}}}{(a^2)^{\frac{\nu}{2} + \frac{3}{4}}} {}_1\Psi_4 \left[\begin{matrix} \left(\frac{3}{4} + \frac{\nu + \beta}{2}, 1 \right) \\ (1 + \nu; 1), \left(\frac{1}{4} + \frac{\nu - \beta}{2}, 1 \right), \left(\frac{3}{4} + \frac{\nu - \beta}{2}, 1 \right), \left(\frac{5}{4} + \frac{\nu - \beta}{2}, 1 \right) \end{matrix} \middle| -\frac{s^2}{a^2} \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre, (3.20) ve (1.34) bağıntıları kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \mathcal{H}_\nu \{ t^{-2\lambda-1/2} \mathcal{Y}_\beta(at); s \} \\ &= \frac{-2^{1/2} s^{\nu-1/2}}{a^{\nu+3/2}} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{\nu + \beta}{2}\right)}{\Gamma(\nu + 1) \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{\nu - \beta}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{\nu - \beta}{2}\right) \Gamma\left(\frac{5}{4} + \frac{\nu - \beta}{2}\right)} \\ & \times {}_1F_4 \left(\frac{3}{4} + \frac{\nu + \beta}{2}; 1 + \nu, \frac{1}{4} + \frac{\nu - \beta}{2}, \frac{3}{4} + \frac{\nu - \beta}{2}, \frac{5}{4} + \frac{\nu - \beta}{2}; -\frac{s^2}{a^2} \right) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

Örnek 3.10 (3.18) integral dönüşümü tanımında $f(t) = \mathcal{K}_\beta(2\sqrt{at})$ seçilirse

$$\begin{aligned} & {}_\alpha \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma} \{ \mathcal{K}_\beta(2\sqrt{at}); s \} \\ &= \frac{s^\alpha}{2a^{\alpha+1} \Gamma(\gamma)} {}_3\Psi_1 \left[\begin{matrix} (\gamma, p), (\alpha + 1 + \beta/2, 1), (\alpha + 1 - \beta/2, 1) \\ (1 + \nu, \mu) \end{matrix} \middle| -\frac{s}{a} \right] \end{aligned} \quad (3.60)$$

formülü elde edilir.

Gerçekten ${}_\alpha \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}$ -dönüşümü tanımından ve $\mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(st)$ fonksiyonunun integral gösterilişi yardımıyla

$$\begin{aligned} {}_\alpha \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma} \{ \mathcal{K}_\beta(2\sqrt{at}); s \} &= \int_0^\infty (st)^\alpha \mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(st) \mathcal{K}_\beta(2\sqrt{at}) dt \\ &= \int_0^\infty (st)^\alpha \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(u) \Gamma(\gamma - pu)}{\Gamma(\gamma) \Gamma(1 + \nu - \mu u)} (st)^{-u} du \right) \mathcal{K}_\beta(2\sqrt{at}) dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(u) \Gamma(\gamma - pu)}{\Gamma(\gamma) \Gamma(1 + \nu - \mu u)} s^{\alpha-u} \left(\int_0^\infty t^{\alpha-u} \mathcal{K}_\beta(2\sqrt{at}) dt \right) du \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\mathcal{M}\{\mathcal{K}_\beta(at);s\} = \frac{2^{s-2}}{a^s} \Gamma\left(\frac{s+\beta}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s-\beta}{2}\right), \quad |\operatorname{Re} \beta| < \operatorname{Re} s, \operatorname{Re} a > 0$$

formülü ([7], s.331, (26)) ve Mellin dönüşümünün ([7], s.307, (5)) aşağıdaki özelliği göz önüne alınıp,

$$\mathcal{M}\{f(x^h);s\} = \frac{1}{h} \mathcal{M}\left\{f(x); \frac{s}{h}\right\}$$

kullanılırsa

$$\mathcal{M}\{\mathcal{K}_\beta(2\sqrt{at});s\} = 2\mathcal{M}\{\mathcal{K}_\beta(2\sqrt{at});2s\} = \frac{1}{2a^s} \Gamma\left(s + \frac{\beta}{2}\right) \Gamma\left(s - \frac{\beta}{2}\right)$$

bulunur. Bu formül ve özellikler yardımıyla

$$\begin{aligned} & {}_\alpha \mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{\mathcal{K}_\beta(2\sqrt{at});s\} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(u)\Gamma(\gamma-pu)s^{\alpha-u}}{\Gamma(\gamma)\Gamma(1+v-\mu u)} \mathcal{M}\{\mathcal{K}_\beta(2\sqrt{at});\alpha-u+1\} du \\ &= \frac{-1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(u)\Gamma(\gamma-pu)s^{\alpha-u}}{\Gamma(\gamma)\Gamma(1+v-\mu u)} \frac{1}{2a^{\alpha-u+1}} \Gamma\left(1+\alpha+\frac{\beta}{2}-u\right) \Gamma\left(1+\alpha-\frac{\beta}{2}-u\right) du \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $u = -n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) noktalarında rezidüye sahiptir. İntegral işareti altındaki fonksiyon, Gamma fonksiyonunun (1.6) özelliğinden,

$$\Gamma(u) = \frac{\pi}{\sin(\pi u)\Gamma(1-u)}$$

eşitliği kullanılarak

$$g(u) = \frac{\pi}{\sin(\pi u)} \frac{\Gamma(\gamma-pu)\Gamma\left(1+\alpha+\frac{\beta}{2}-u\right)\Gamma\left(1+\alpha-\frac{\beta}{2}-u\right)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(1-u)\Gamma(1+v-\mu u)} \frac{s^{\alpha-u}}{2a^{\alpha-u+1}}$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda

$${}_\alpha \mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{\mathcal{K}_\beta(2\sqrt{at});s\} = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Res}\{g(u);-n\}$$

olur. $g(u)$ fonksiyonu için $u = -n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) noktalarında rezidü hesaplandığında

$$\begin{aligned} \text{Res}_{u=-n} g(u) &= \lim_{u \rightarrow -n} (u+n) g(u) \\ &= \lim_{u \rightarrow -n} \frac{\pi(u+n)}{\sin(\pi u)} \frac{\Gamma(\gamma - pu) \Gamma\left(1 + \alpha + \frac{\beta}{2} - u\right) \Gamma\left(1 + \alpha - \frac{\beta}{2} - u\right)}{\Gamma(\gamma) \Gamma(1-u) \Gamma(1+v-\mu u)} \frac{s^{\alpha-u}}{2a^{\alpha-u+1}} \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\Gamma(\gamma + pn) \Gamma\left(1 + \alpha + \frac{\beta}{2} + n\right) \Gamma\left(1 + \alpha - \frac{\beta}{2} + n\right)}{\Gamma(\gamma) \Gamma(1+v+\mu n)} \frac{s^{\alpha+n}}{2a^{\alpha+n+1}} \end{aligned}$$

bulunur. O halde Fox-Wright fonksiyonunun (1.33) ile verilen tanımından

$$\begin{aligned} {}_a\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}\{\mathcal{K}_\beta(2\sqrt{at});s\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\Gamma(\gamma + pn) \Gamma\left(1 + \alpha + \frac{\beta}{2} + n\right) \Gamma\left(1 + \alpha - \frac{\beta}{2} + n\right)}{\Gamma(\gamma) \Gamma(1+v+\mu n)} \frac{s^{\alpha+n}}{2a^{\alpha+n+1}} \\ &= \frac{s^\alpha}{2a^{\alpha+1}\Gamma(\gamma)} {}_3\Psi_1 \left[\begin{matrix} (\gamma, p), \left(\alpha + 1 + \frac{\beta}{2}, 1\right), \left(\alpha + 1 - \frac{\beta}{2}, 1\right) \\ (1+v, \mu) \end{matrix} \middle| -\frac{s}{a} \right] \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 3.24 (3.60) formülünde $v = 0$, $\gamma = 1$, $\mu = p$ seçilirse (3.19) bağıntısı yardımıyla

$$\mathcal{L}\{t^\alpha \mathcal{K}_\beta(2\sqrt{at});s\} = \frac{1}{2a^{\alpha+1}} {}_2\Psi_0 \left[\begin{matrix} \left(\alpha + 1 + \frac{\beta}{2}, 1\right), \left(\alpha + 1 - \frac{\beta}{2}, 1\right) \\ - \end{matrix} \middle| -\frac{s}{a} \right]$$

bulunur. Fox-Wright fonksiyonu ile genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyon arasındaki (1.34) bağıntısı da kullanılarak,

$$\mathcal{L}\{t^\alpha \mathcal{K}_\beta(2\sqrt{at});s\} = \frac{\Gamma\left(1 + \alpha + \frac{\beta}{2}\right) \Gamma\left(1 + \alpha - \frac{\beta}{2}\right)}{2a^{\alpha+1}} {}_2F_0\left(1 + \alpha + \frac{\beta}{2}, 1 + \alpha - \frac{\beta}{2}; -; -\frac{s}{a}\right)$$

elde edilir. Burada, Tricomi fonksiyonunun (1.23) ile verilen tanımı kullanılırsa,

$$\mathcal{L}\{t^\alpha \mathcal{K}_\beta(2\sqrt{at}); s\} = \frac{\Gamma\left(1+\alpha+\frac{\beta}{2}\right)\Gamma\left(1+\alpha-\frac{\beta}{2}\right)a^{\beta/2}}{2s^{\alpha+1+\beta/2}} U\left(1+\alpha+\frac{\beta}{2}, 1+\alpha-\frac{\beta}{2}, \frac{a}{s}\right)$$

biçiminde yazılabilir.

Sonuç 3.25 (3.60) formülünde $\alpha = \frac{\nu}{2} - \frac{1}{4}$, $s = s^2$, $p = 0$, $\mu = 1$, $a = a^2$ seçilirse

$$\begin{aligned} & \frac{\nu}{2} - \frac{1}{4} \mathcal{H}_{\nu,0}^{1,\gamma}\{\mathcal{K}_\beta(2\sqrt{at}); s^2\} \\ &= \frac{(s^2)^{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}}}{2(a^2)^{\frac{\nu}{2}+\frac{3}{4}}} {}_2\Psi_1\left[\begin{matrix} \left(\frac{3}{4}+\frac{\nu}{2}+\frac{\beta}{2}, 1\right), \left(\frac{3}{4}+\frac{\nu}{2}-\frac{\beta}{2}, 1\right) \\ (1+\nu; 1) \end{matrix} \middle| -\frac{s^2}{a^2}\right] \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre, (3.20) ve (1.34) bağıntıları kullanılırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\nu\{\mathcal{K}_\nu(at); s\} &= \frac{s^{\nu+1/2}}{\sqrt{2}a^{\nu+3/2}} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{\nu}{2}+\frac{\beta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{\nu}{2}-\frac{\beta}{2}\right)}{\Gamma(\nu+1)} \\ &\times {}_2F_1\left(\frac{3}{4}+\frac{\nu}{2}+\frac{\beta}{2}, \frac{3}{4}+\frac{\nu}{2}-\frac{\beta}{2}; 1+\nu; -\frac{s^2}{a^2}\right) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

Örnek 3.11 (3.18) tanımında $f(t) = H_\beta^{(j)}(at)$, ($a > 0$, $j = 1, 2$) seçilirse

$$\begin{aligned} {}_\alpha \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{H_\beta^{(j)}(at); s\} &= \frac{(1+(-1)^j i)s^\alpha \sin\left(\pi\left(1-\frac{\beta}{2}+\alpha\right)\right)}{a^{\alpha+1}} \frac{\pi\Gamma(\gamma)}{\pi\Gamma(\gamma)} \\ &\times {}_3\Psi_1\left[\begin{matrix} (\gamma, p), \left(\alpha+1+\frac{\beta}{2}, 1\right), \left(\alpha+1-\frac{\beta}{2}, 1\right) \\ (1+\nu, \mu) \end{matrix} \middle| \frac{s}{a}\right] \end{aligned} \quad (3.61)$$

formülü elde edilir.

Gerçekten ${}_\alpha \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}$ -dönüşümü tanımından ve $\mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(st)$ fonksiyonunun integral gösterilişi yardımıyla

$$\begin{aligned}
{}_a\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}\left\{H_{\beta}^{(j)}(2\sqrt{at});s\right\} &= \int_0^{\infty} (st)^{\alpha} \mathcal{J}_{v,p}^{\mu,\gamma}(st) H_{\beta}^{(j)}(2\sqrt{at}) dt \\
&= \int_0^{\infty} (st)^{\alpha} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(u)\Gamma(\gamma-pu)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(1+v-\mu u)} (st)^{-u} du \right) H_{\beta}^{(j)}(2\sqrt{at}) dt \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(u)\Gamma(\gamma-pu)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(1+v-\mu u)} s^{\alpha-u} \left(\int_0^{\infty} t^{\alpha-u} H_{\beta}^{(j)}(2\sqrt{at}) dt \right) du
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $j = 1, 2$ için

$$\mathcal{M}\left\{H_{\beta}^{(j)}(at);s\right\} = \frac{(1+(-1)^j i) 2^{s-1} \Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{\beta}{2}\right)}{a^s \Gamma\left(\frac{\beta}{2} - \frac{s}{2}\right)}, \quad |\operatorname{Re} \beta| < \operatorname{Re} s < 3/2, \operatorname{Re} a > 0$$

formülü ([7], s.330,(20)) ve Mellin dönüşümünün ([7], s.307,(5))

$$\mathcal{M}\left\{f(x^h);s\right\} = \frac{1}{h} \mathcal{M}\left\{f(x); \frac{s}{h}\right\}$$

özelliklerinden

$$\mathcal{M}\left\{H_{\beta}^{(j)}(2\sqrt{at});s\right\} = 2\mathcal{M}\left\{H_{\beta}^{(j)}(2\sqrt{at});2s\right\} = \frac{(1+(-1)^j i) \Gamma\left(\frac{\beta}{2} + s\right)}{a^s \Gamma\left(\frac{\beta}{2} - s + 1\right)}$$

bulunur. Bu formül ve özellikler yardımıyla

$$\begin{aligned}
&{}_a\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}\left\{H_{\beta}^{(j)}(2\sqrt{at});s\right\} \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(u)\Gamma(\gamma-pu)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(1+v-\mu u)} s^{\alpha-u} \mathcal{M}\left\{H_{\beta}^{(j)}(2\sqrt{at});\alpha-u+1\right\} du \\
&= \frac{(1+(-1)^j i)}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(u)\Gamma(\gamma-pu)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(1+v-\mu u)} \frac{s^{\alpha-u}}{a^{\alpha-u+1}} \frac{\Gamma\left(1+\frac{\beta}{2}+\alpha-u\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta}{2}-\alpha+u\right)} du
\end{aligned}$$

elde edilir. $\alpha - \frac{\beta}{2} \notin \mathbb{N}$ için integral $u = -n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) noktalarında rezidüye sahiptir.

İntegraldeki fonksiyonu, Gamma fonksiyonunun (1.6) özelliğinden

$$\Gamma(u) = \frac{\pi}{\sin(\pi u) \Gamma(1-u)} \text{ ve } \Gamma\left(\frac{\beta}{2} - \alpha + u\right) = \frac{\pi}{\sin\left(\pi\left(1 - \frac{\beta}{2} + \alpha - u\right)\right) \Gamma\left(1 - \frac{\beta}{2} + \alpha - u\right)}$$

eşitlikleri kullanılarak

$$g(u) = \frac{\pi}{\sin(\pi u)} \frac{\Gamma(\gamma - pu) \Gamma\left(\alpha - u + 1 + \frac{\beta}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{\beta}{2} + \alpha - u\right) \sin\left(\pi\left(1 - \frac{\beta}{2} + \alpha - u\right)\right)}{\Gamma(1-u) \Gamma(\gamma) \Gamma(1+v-\mu u)} \frac{\pi}{\pi} \left(\frac{s}{a}\right)^{\alpha-u} \frac{1}{a}$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda $j = 1, 2$ için

$${}_a \mathcal{H}_{\nu, p}^{\mu, \gamma} \left\{ H_{\beta}^{(j)}(2\sqrt{at}); s \right\} = (1 + (-1)^j i) \sum_{k=1}^2 \text{Res} \{g(u); u_k\}$$

olur. $u_1 = -n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) noktalarında rezidü, $g(u)$ fonksiyonu için hesaplandığında

$$\begin{aligned} \text{Res}_{u_1=-n} g(u) &= \lim_{u \rightarrow -n} (u+n) g(u) \\ &= \lim_{u \rightarrow -n} \frac{\pi(u+n)}{\sin(\pi u)} \frac{\Gamma(\gamma - pu) \Gamma\left(\alpha - u + 1 + \frac{\beta}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{\beta}{2} + \alpha - u\right) \sin\left(\pi\left(1 - \frac{\beta}{2} + \alpha - u\right)\right)}{\Gamma(1-u) \Gamma(\gamma) \Gamma(1+v-\mu u)} \frac{\pi}{\pi} \left(\frac{s}{a}\right)^{\alpha-u} \frac{1}{a} \\ &= \frac{1}{a} \frac{\Gamma(\gamma + pn) \Gamma\left(\alpha + n + 1 + \frac{\beta}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{\beta}{2} + \alpha + n\right) \sin\left(\pi\left(1 - \frac{\beta}{2} + \alpha\right)\right)}{\Gamma(1+n) \Gamma(\gamma) \Gamma(1+v-\mu n)} \frac{\pi}{\pi} \left(\frac{s}{a}\right)^{\alpha+n} \end{aligned}$$

bulunur. O halde $j = 1, 2$ için

$$\begin{aligned} &{}_a \mathcal{H}_{\nu, p}^{\mu, \gamma} \left\{ H_{\beta}^{(j)}(2\sqrt{at}); s \right\} \\ &= \frac{(1 + (-1)^j i)}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma + pn) \Gamma\left(\alpha + n + 1 + \frac{\beta}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{\beta}{2} + \alpha + n\right) \sin\left(\pi\left(1 - \frac{\beta}{2} + \alpha\right)\right)}{\Gamma(1+n) \Gamma(\gamma) \Gamma(1+v-\mu n)} \frac{\pi}{\pi} \left(\frac{s}{a}\right)^{\alpha+n} \\ &= \frac{(1 + (-1)^j i) s^{\alpha} \sin\left(\pi\left(1 - \frac{\beta}{2} + \alpha\right)\right)}{a^{\alpha+1} \pi \Gamma(\gamma)} {}_3\Psi_1 \left[\begin{matrix} (\gamma, p), \left(\alpha + 1 + \frac{\beta}{2}, 1\right), \left(\alpha + 1 - \frac{\beta}{2}, 1\right) \\ (1+v, \mu) \end{matrix} \middle| \frac{s}{a} \right] \end{aligned}$$

olur.

Sonuç 3.26 (3.61) formülünde $v = 0$, $\gamma = 1$, $\mu = p$ seçilirse (3.19) bağıntısı yardımıyla $j = 1, 2$ için

$$\mathcal{L}\left\{t^\alpha H_\beta^{(j)}(2\sqrt{at}); s\right\} = \frac{(1+(-1)^j i)}{a^{\alpha+1}} \frac{1}{\Gamma\left(-\frac{\beta}{2} + \alpha + 1\right) \Gamma\left(\frac{\beta}{2} - \alpha\right)} \\ \times {}_2\Psi_0\left[\begin{matrix} \left(\alpha + 1 + \frac{\beta}{2}, 1\right), \left(\alpha + 1 - \frac{\beta}{2}, 1\right) \\ - \end{matrix} \middle| \frac{s}{a}\right]$$

elde edilir. Fox-Wright fonksiyonu ile genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyon arasındaki (1.34) bağıntısı yardımıyla $j = 1, 2$ için,

$$\mathcal{L}\left\{t^\alpha H_\beta^{(j)}(2\sqrt{at}); s\right\} = \frac{(1+(-1)^j i)}{a^{\alpha+1}} \frac{\Gamma\left(1 + \alpha + \frac{\beta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta}{2} - \alpha\right)} {}_2F_0\left(\frac{\beta}{2} + \alpha + 1, -\frac{\beta}{2} + \alpha + 1; -; \frac{s}{a}\right)$$

bulunur. Öte yandan, (1.18) ilişkisi kullanılarak

$$\mathcal{L}\left\{t^\alpha H_\beta^{(j)}(2\sqrt{at}); s\right\} = (1+(-1)^j i) \frac{a^{\beta/2}}{s^{\alpha+1+\beta/2}} \frac{\Gamma(\alpha + 1 + \beta/2)}{\Gamma(1 + \beta)} {}_1F_1\left(\beta/2 + \alpha + 1; 1 + \beta; -\frac{a}{s}\right)$$

biçiminde yazılabilir.

Sonuç 3.27 (3.61) formülünde (3.24) bağıntısı kullanılırsa $j = 1, 2$ için

$${}_a\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}\left\{t^\delta H_\beta^{(j)}(2\sqrt{at}); s\right\} = s^{-\delta} {}_{\alpha+\delta}\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}\left\{H_\beta^{(j)}(2\sqrt{at}); s\right\} \\ = (1+(-1)^j i) \frac{s^\alpha}{a^{\alpha+\delta+1}} \frac{\sin\left(\pi\left(1 - \frac{\beta}{2} + \alpha + \delta\right)\right)}{\pi\Gamma(\gamma)} \\ \times {}_3\Psi_1\left[\begin{matrix} (\gamma, p), \left(\alpha + \delta + 1 + \frac{\beta}{2}, 1\right), \left(\alpha + \delta + 1 - \frac{\beta}{2}, 1\right) \\ (1 + v, \mu) \end{matrix} \middle| \frac{s}{a}\right]$$

bulunur. Öte yandan $\alpha = \frac{v}{2} - \frac{1}{4}$, $s = s^2$, $p = 0$, $\mu = 1$, $a = a^2$, $\delta = -\lambda - \frac{1}{4}$, $\beta = v$ seçilirse $j = 1, 2$ için

$$\begin{aligned} \frac{v}{2}-\frac{1}{4} \mathcal{H}_{v,0}^{1,\gamma} \left\{ t^{-\lambda-1/4} \mathcal{J}_v \left(2 \sqrt{at} \right); s \right\} &= \left(1 + (-1)^j i \right) \frac{(s^2)^{\frac{v}{2}-\frac{1}{4}} \sin \left(\pi \left(-\lambda + \frac{1}{2} \right) \right)}{(a^2)^{\frac{v}{2}+\frac{1}{2}-\lambda} \pi} \\ &\times {}_2\Psi_1 \left[\begin{matrix} \left(v - \lambda + \frac{1}{2}, 1 \right), \left(-\lambda + \frac{1}{2}, 1 \right) \\ (1 + v, 1) \end{matrix} \middle| \frac{s^2}{a^2} \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Ek olarak burada (3.20) ve (1.34) bağıntıları kullanılırsa

$$\mathcal{H}_v \left\{ t^{-2\lambda-1/2} \mathcal{J}_v (at); s \right\} = \left(1 + (-1)^j i \right) \frac{s^{v+1/2} 2^{-2\lambda}}{a^{v-2\lambda+1}} \frac{\Gamma \left(v - \lambda + \frac{1}{2} \right)}{\Gamma \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) \Gamma (v + 1)} {}_2F_1 \left(v - \lambda + \frac{1}{2}, -\lambda + \frac{1}{2}; 1 + v; \frac{s^2}{a^2} \right)$$

sonucuna ulaşılır.

3.3 Parseval-Goldstein Tipinde Teoremler ve Uygulamaları

Bu bölümde genelleştirilmiş Bessel-Maitland integral dönüşümü ile Laplace, Mellin, Fourier Kosinüs ve Sinüs, Hankel integral dönüşümleri [7, 8, 9] arasında Parseval-Goldstein tipi teoremler incelenmiştir. Daha sonra bu ilişkiler kullanılarak, Fox-Wright fonksiyonlarını içeren bazı genelleştirilmiş integraller hesaplanmıştır.

Tanım 3.3 (1.56) ile verilen integral dönüşüm tanımında $a = 0$, $b = \infty$ seçimi ile elde edilen

$$\mathcal{D}\{f(t); y\} = \int_0^\infty C(y, t) f(t) dt, \quad (3.62)$$

fonksiyonuna sonsuz integral dönüşümü denir. Burada dönüşümün çekirdeği olarak adlandırılan $C(y, t)$ fonksiyonunda, y dönüşümün parametresi ve t integral değişkenidir. Çekirdeğin farklı seçimleriyle literatürdeki farklı integral dönüşümleri elde edildiği bilinmektedir [2, 7, 8].

Yardımcı Teorem 3.1 İntegrallerin mutlak yakınsak olması koşulu altında,

$${}_a\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{ \mathcal{D}\{f(t); x\}; y \} = \int_0^\infty f(t) {}_a\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{ C(t, x); y \} dt, \quad (3.63)$$

bağıntısı geçerlidir. Burada sağ taraftaki integraldeki $C(t, x)$ fonksiyonunda x , ${}_a\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}$ -dönüşümünün integral değişkeni ve y bir parametredir.

İspat: (3.62) ile verilen integral dönüşümünün ve (3.18) ile verilen genelleştirilmiş Bessel-Maitland integral dönüşümü tanımı kullanıldığında,

$${}_a\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}\{\mathcal{D}\{f(t); x\}; y\} = \int_0^\infty (yx)^\alpha \mathcal{J}_{v,p}^{\mu,\gamma}(yx) \left(\int_0^\infty C(x, t) f(t) dt \right) dx$$

elde edilir. İntegrallerin mutlak yakınsaklık koşulu altında integrasyon sırası yer değiştirdiğinde ve genelleştirilmiş Bessel-Maitland integral dönüşümünün (3.18) ile verilen tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned} {}_a\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}\{\mathcal{D}\{f(t); x\}; y\} &= \int_0^\infty f(t) \left(\int_0^\infty (yx)^\alpha \mathcal{J}_{v,p}^{\mu,\gamma}(yx) C(t, x) dx \right) dt \\ &= \int_0^\infty f(t) {}_a\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}\{C(t, x); y\} dt \end{aligned}$$

bulunur. Böylece (3.63) bağıntısının ispatı tamamlanmış olur. ■

Yardımcı Teorem 3.2 İntegrallerin mutlak yakınsak olması koşulu altında,

$$\mathcal{D}\{{}_a\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}\{f(t); x\}; y\} = \int_0^\infty f(t) {}_a\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}\{C(y, x); t\} dt \quad (3.64)$$

bağıntısı geçerlidir. Burada sağ taraftaki integralde $C(y, x)$ fonksiyonunda x , ${}_a\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}$ -dönüşümünde integral değişkeni ve y bir parametredir.

İspat: (3.62) ile verilen integral dönüşüm tanımı ve (3.18) ile verilen genelleştirilmiş Bessel-Maitland integral dönüşümü tanımı kullanıldığında

$$\mathcal{D}\{{}_a\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}\{f(t); x\}; y\} = \int_0^\infty C(y, x) \left(\int_0^\infty (xt)^\alpha \mathcal{J}_{v,p}^{\mu,\gamma}(xt) f(t) dt \right) dx$$

elde edilir. İntegrallerin mutlak yakınsaklık koşulu altında integrasyon sırası yer değiştirdiğinde ve genelleştirilmiş Bessel-Maitland integral dönüşümünün (3.18) ile verilen tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned}\mathcal{D}\left\{{}_\alpha\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{f(t);x\};y\right\}&= \int_0^\infty f(t)\left(\int_0^\infty (tx)^\alpha \mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(tx)C(y,x)dx\right)dt \\ &= \int_0^\infty f(t){}_\alpha\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{C(y,x);t\}dt\end{aligned}$$

bulunur. Böylece (3.64) bağıntısının ispatı tamamlanmış olur. ■

Teorem 3.2 İntegrallerin mutlak yakınsaklık koşulu altında

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty {}_\alpha\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{f(t);x\}\mathcal{D}\{g(y);x\}dx \\ &= \int_0^\infty g(y)\left(\int_0^\infty f(t){}_\alpha\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{C(y,x);t\}dt\right)dy\end{aligned}\quad (3.65)$$

ve

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty {}_\alpha\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{f(t);x\}\mathcal{D}\{g(y);x\}dx \\ &= \int_0^\infty f(t)\left(\int_0^\infty g(y){}_\alpha\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{C(y,x);t\}dy\right)dt\end{aligned}\quad (3.66)$$

bağıntıları geçerlidir. Burada sağ taraftaki integralde $C(y,x)$ fonksiyonunda x , ${}_ \alpha\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}$ -dönüşümünde integral değişkeni ve y bir parametredir.

İspat: (3.62) ile verilen integral dönüşüm tanımı kullanılır ve mutlak yakınsaklık koşulu altında integrasyon sırası yer değiştirilirse,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty {}_\alpha\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{f(t);x\}\mathcal{D}\{g(y);x\}dx &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty g(y)C(x,y)dy\right){}_\alpha\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{f(t);x\}dx \\ &= \int_0^\infty g(y)\left(\int_0^\infty C(y,x){}_\alpha\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{f(t);x\}dx\right)dy\end{aligned}$$

bulunur. Burada (3.62) ile verilen genelleştirilmiş Bessel-Maitland integral dönüşümünün tanımı ve daha sonra (3.64) bağıntısı kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty {}_\alpha \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma} \{f(t); x\} \mathcal{D}\{g(y); x\} dx &= \int_0^\infty g(y) \mathcal{D}\left\{{}_\alpha \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma} \{f(t); x\}; y\right\} dy \\ &= \int_0^\infty g(y) \left(\int_0^\infty f(t) {}_\alpha \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma} \{C(y, x); t\} dt \right) dy\end{aligned}$$

bulunur. Böylece (3.65) bağıntısının ispatı tamamlanmış olur. Öte yandan, ilk olarak (3.18) ile verilen genelleştirilmiş Bessel-Maitland integral dönüşümünün tanımı kullanılır ve mutlak yakınsaklık koşulu altında integrasyon sırası yer değiştirilirse,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty {}_\alpha \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma} \{f(t); x\} \mathcal{D}\{g(y); x\} dx &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty (xt)^\alpha \mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(xt) f(t) dt \right) \mathcal{D}\{g(y); x\} dx \\ &= \int_0^\infty f(t) \left(\int_0^\infty (tx)^\alpha \mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(tx) \mathcal{D}\{g(y); x\} dx \right) dt\end{aligned}$$

elde edilir. (3.18) tanımı ve (3.63) bağıntısı birlikte kullanıldığında,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty {}_\alpha \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma} \{f(t); x\} \mathcal{D}\{g(y); x\} dx &= \int_0^\infty f(t) {}_\alpha \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma} \{\mathcal{D}\{g(y); x\}; t\} dt \\ &= \int_0^\infty f(t) \left(\int_0^\infty g(y) {}_\alpha \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma} \{C(y, x); t\} dy \right) dt\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Böylece (3.66) bağıntısının ispatı tamamlanmış olur. ■

Yardımcı Teorem 3.3 İntegrallerin mutlak yakınsaklık koşulu altında,

$${}_ \alpha \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma} \{\mathcal{M}\{f(t); x\}; y\} = \int_0^\infty \frac{y^\alpha f(t)}{t(-\ln t)^{1+\alpha}} {}_2\Psi_1 \left[\begin{matrix} (\gamma, p), (\alpha+1, 1) \\ (1+\nu, \mu) \end{matrix} \middle| \frac{y}{\ln t} \right] dt \quad (3.67)$$

ve

$$\mathcal{M}\left\{{}_\alpha \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma} \{f(t); x\}; y\right\} = \frac{\Gamma(\alpha+y)\Gamma(\gamma-p(\alpha+y))}{\Gamma(\gamma)\Gamma(1+\nu-\mu(\alpha+y))} \mathcal{M}\{f(t); 1-y\} \quad (3.68)$$

bağıntıları gerçekleşir.

İspat: (3.63) bağıntısında $C(x, t) = t^{x-1}$ olsun. Bu durumda $C(t, x) = t^{x-1}$, x 'e bağlı bir fonksiyonu göstermek üzere (3.50) formülü yardımıyla $\text{Re}(-\ln t) > 0$ için

$$\begin{aligned}
{}_a \mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{t^{x-1}; y\} &= {}_a \mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{e^{(x-1)\ln t}; y\} = \frac{1}{t} {}_a \mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{e^{x\ln t}; y\} \\
&= \frac{1}{t} \frac{y^\alpha}{(-\ln t)^{\alpha+1} \Gamma(\gamma)} {}_2\Psi_1 \left[\begin{matrix} (\gamma, p), (\alpha+1, 1) \\ (1+v, \mu) \end{matrix} \middle| \frac{y}{\ln t} \right]
\end{aligned} \quad (3.69)$$

bulunur. Ek olarak $C(x, t) = t^{x-1}$ için

$$\mathcal{D}\{f(t); x\} = \mathcal{M}\{f(t); x\} \quad (3.70)$$

dır. Buna göre, (3.69) ve (3.70) bağıntıları (3.63) bağıntısında yerine yazılırsa,

$${}_a \mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{\mathcal{M}\{f(t); x\}; y\} = y^\alpha \int_0^\infty \frac{f(t)}{t(-\ln t)^{1+\alpha}} {}_2\Psi_1 \left[\begin{matrix} (\gamma, p), (\alpha+1, 1) \\ (1+v, \mu) \end{matrix} \middle| \frac{y}{\ln t} \right] dt,$$

sonucuna ulaşılır. Böylece (3.67) bağıntısı ispatlanmış olur. Benzer biçimde, (3.64) bağıntısında $C(y, x) = x^{y-1}$, x 'e bağlı bir fonksiyon olsun. Bu durumda, $\mathcal{D} = \mathcal{M}$ olur ve

$$\mathcal{M}\{{}_a \mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{f(t); x\}; y\} = \int_0^\infty f(t) {}_a \mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{x^{y-1}; t\} dt$$

sonucuna ulaşılır. O halde, (3.35) formülü ve Mellin dönüşümünün tanımı kullanılarak,

$$\mathcal{M}\{{}_a \mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{f(t); x\}; y\} = \frac{\Gamma(\alpha+y)\Gamma(\gamma-p(\alpha+y))}{\Gamma(\gamma)\Gamma(1+v-\mu(\alpha+y))} \mathcal{M}\{f(t); 1-y\}$$

bağıntısı elde edilir. Böylece (3.68) bağıntısı ispat edilmiş olur. ■

Uyarı 3.1 (3.68) bağıntısında $v = 0$, $\mu = p$, $\gamma = 1$, $\alpha = 0$ seçilirse ve (3.19) bağıntısı kullanılırsa

$$\mathcal{M}\{\mathcal{L}\{f(t); x\}; y\} = \Gamma(y) \mathcal{M}\{f(t); 1-y\}$$

eşitliğine ulaşılır [9, s.3, (c')].

Sonuç 3.28 İntegrallerin mutlak yakınsaklıkları koşulu altında

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty {}_\alpha \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma} \{f(t); x\} \mathcal{M}(g(y); x) dx \\ &= \int_0^\infty \frac{g(y)}{y(-\ln y)^{1+\alpha}} \left[\int_0^\infty t^\alpha f(t) {}_2\Psi_1 \left[\begin{matrix} (\gamma, p), (\alpha+1, 1) \\ (1+\nu, \mu) \end{matrix} \middle| \frac{t}{\ln y} \right] dt \right] dy \end{aligned} \quad (3.71)$$

ve

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty {}_\alpha \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma} \{f(t); x\} \mathcal{M}(g(y); x) dx \\ &= \int_0^\infty t^\alpha f(t) \left(\int_0^\infty \frac{g(y)}{y(-\ln y)^{1+\alpha}} {}_2\Psi_1 \left[\begin{matrix} (\gamma, p), (\alpha+1, 1) \\ (1+\nu, \mu) \end{matrix} \middle| \frac{t}{\ln y} \right] dy \right) dt \end{aligned} \quad (3.72)$$

bağıntıları gerçekleşir.

İspat: (3.65) ve (3.66) bağıntılarında $C(x, y) = y^{x-1}$, y değişkenine bağlı bir fonksiyon seçildiğinde, $C(y, x) = y^{x-1}$, x değişkenine bağlı bir fonksiyon ve $\mathcal{D} = \mathcal{M}$ olur. Böylece sırasıyla,

$$\int_0^\infty {}_\alpha \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma} \{f(t); x\} \mathcal{M}\{g(y); x\} dx = \int_0^\infty g(y) \left(\int_0^\infty f(t) {}_\alpha \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma} \{y^{x-1}; t\} dt \right) dy \quad (3.73)$$

ve

$$\int_0^\infty {}_\alpha \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma} \{f(t); x\} \mathcal{M}\{g(y); x\} dx = \int_0^\infty f(t) \left(\int_0^\infty g(y) {}_\alpha \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma} \{y^{x-1}; t\} dy \right) dt \quad (3.74)$$

bulunur. Buna göre (3.69) formülünden

$$\begin{aligned} {}_\alpha \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma} \{y^{x-1}; t\} &= {}_\alpha \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma} \{e^{(x-1)\ln y}; t\} = \frac{1}{y} {}_\alpha \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma} \{e^{x\ln y}; t\} \\ &= \frac{1}{y} \frac{t^\alpha}{(-\ln y)^{\alpha+1} \Gamma(\gamma)} {}_2\Psi_1 \left[\begin{matrix} (\gamma, p), (\alpha+1, 1) \\ (1+\nu, \mu) \end{matrix} \middle| \frac{t}{\ln y} \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Bu sonuç (3.73) ve (3.74) bağıntılarında yerine yazılırsa sırasıyla (3.71) ve (3.72) bağıntılarına ulaşılır. ■

Yardımcı Teorem 3.4 İntegrallerin mutlak yakınsaklık koşulu altında

$${}_a\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}\{\mathcal{L}\{f(t);x\};y\} = \frac{y^\alpha}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}} {}_2\Psi_1 \left[\begin{matrix} (\gamma,p), (\alpha+1,1) \\ (1+v,\mu) \end{matrix} \middle| \frac{-y}{t} \right] dt \quad (3.75)$$

ve

$$\mathcal{L}\{{}_a\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}\{f(t);x\};y\} = \frac{1}{y^{\alpha+1}\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty t^\alpha f(t) {}_2\Psi_1 \left[\begin{matrix} (\gamma,p), (\alpha+1,1) \\ (1+v,\mu) \end{matrix} \middle| \frac{-t}{y} \right] dt \quad (3.76)$$

bağıntıları gerçekleşir.

İspat: (3.63) bağıntısında, $C(x,t) = e^{-xt}$, t değişkenine bağlı fonksiyonu seçilsin. Bu durumda $\mathcal{D}=\mathcal{L}$ olur. Öte yandan $C(t,x) = e^{-tx}$, aynı zamanda x değişkenine bağlı bir fonksiyondur. Bu durumda (3.63) bağıntısı bulunur:

$${}_a\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}\{\mathcal{L}\{f(t);x\};y\} = \int_0^\infty f(t) {}_a\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}\{e^{-tx};y\} dt.$$

Burada (3.50) formülü $a = t$ ve $s = y$ için kullanılırsa (3.75) bağıntısına ulaşılır ve ispat tamamlanmış olur. Öte yandan (3.63) bağıntısında, $C(y,x) = e^{-yx}$, x değişkenine bağlı alınırsa (3.64) bağıntısı, aşağıdaki formda

$$\mathcal{L}\{{}_a\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}\{f(t);x\};y\} = \int_0^\infty f(t) {}_a\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}\{e^{-yx};t\} dt$$

elde edilir. Burada (3.50) formülü, $a = u$ ve $s = t$ için kullanılırsa (3.76) bağıntısına ulaşılır ve ispat tamamlanmış olur. ■

Uyarı 3.2 (3.75) ve (3.76) bağıntılarında $v = 0$, $\mu = p$, $\gamma = 1$ seçilirse ve (3.19) bağıntısı kullanılırsa,

$$\mathcal{L}\{x^\alpha \mathcal{L}\{f(t);x\};y\} = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}} {}_1\Psi_0 \left[\begin{matrix} (\alpha+1,1) \\ - \end{matrix} \middle| \frac{-y}{t} \right] dt \quad (3.77)$$

ve

$$\mathcal{L}\{x^\alpha \mathcal{L}\{t^\alpha f(t); x\}; y\} = \frac{1}{y^{\alpha+1} \Gamma(\gamma)} \int_0^\infty t^\alpha f(t) {}_1\Psi_0 \left[\begin{matrix} (\alpha+1, 1) \\ - \end{matrix} \middle| \frac{-t}{y} \right] dt \quad (3.78)$$

eşitlikleri bulunur. Burada (1.34) ile verilen Fox-Wright fonksiyonu ile genelleştirilmiş hipergometrik fonksiyon arasındaki bağıntı ve (1.14) özel durumu kullanılırsa aşağıdaki sonuçlar bulunur [23, s.65, (13)]:

$$\mathcal{L}\{x^\alpha \mathcal{L}\{f(t); x\}; y\} = \Gamma(\alpha+1) \mathcal{S}_{\alpha+1}\{f(t); y\}, \quad (3.79)$$

$$\mathcal{L}\{x^\alpha \mathcal{L}\{t^\alpha f(t); x\}; y\} = \Gamma(\alpha+1) \mathcal{S}_{\alpha+1}\{t^\alpha f(t); y\}. \quad (3.80)$$

Uyarı 3.3 (3.79) ve (3.80) bağıntılarında $\alpha = 0$ seçilirse aşağıdaki bağıntı bulunur [25, s.7]:

$$\mathcal{L}\{\mathcal{L}\{f(t); x\}; y\} = \mathcal{S}\{f(t); y\}.$$

Sonuç 3.29 İntegrallerin mutlak yakınsaklık koşulu altında

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty {}_\alpha \mathcal{H}_{\nu, p}^{\mu, \gamma} \{f(t); x\} \mathcal{L}\{g(u); x\} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty \frac{g(y)}{y^{\alpha+1}} \left(\int_0^\infty t^\alpha f(t) {}_2\Psi_1 \left[\begin{matrix} (\gamma, p), (\alpha+1, 1) \\ (1+\nu, \mu) \end{matrix} \middle| \frac{-t}{y} \right] dt \right) dy \end{aligned} \quad (3.81)$$

ve

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty {}_\alpha \mathcal{H}_{\nu, p}^{\mu, \gamma} \{f(t); x\} \mathcal{L}\{g(u); x\} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty t^\alpha f(t) \left(\int_0^\infty \frac{g(y)}{y^{\alpha+1}} {}_2\Psi_1 \left[\begin{matrix} (\gamma, p), (\alpha+1, 1) \\ (1+\nu, \mu) \end{matrix} \middle| \frac{-t}{y} \right] dy \right) dt \end{aligned} \quad (3.82)$$

bağıntıları gerçekleşir.

İspat: (3.65) ve (3.66) bağıntılarında $C(x, y) = e^{-xy}$, y değişkenine bağlı bir fonksiyon olarak seçilirse $\mathcal{D} = \mathcal{L}$ olur. Buradan $C(y, x) = e^{-yx}$, x değişkenine bağlı bir fonksiyon olmak üzere,

$$\int_0^\infty {}_\alpha \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma} \{f(t); x\} \mathcal{L} \{g(y); x\} dx = \int_0^\infty g(y) \left(\int_0^\infty f(t) {}_\alpha \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma} \{e^{-yx}; t\} dt \right) dy$$

ve

$$\int_0^\infty {}_\alpha \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma} \{f(t); x\} \mathcal{L} \{g(y); x\} dx = \int_0^\infty f(t) \left(\int_0^\infty g(y) {}_\alpha \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma} \{e^{-yx}; t\} dy \right) dt$$

bulunur. (3.50) formülü ile sırasıyla (3.81) ve (3.82) bağıntılarına ulaşılır. ■

Uyarı 3.4 (3.81) ve (3.82) bağıntılarında $\nu = 0$, $\mu = p$, $\gamma = 1$ seçilir ve (3.19), daha sonra (1.34) ile verilen Fox-Wright fonksiyonu ile genelleştirilmiş hipergometrik fonksiyon arasındaki bağıntı ve (1.14) özel durumu kullanılırsa aşağıdaki Parseval-Golstein tipi bağıntılar elde edilir [23, s.65, (15)]:

$$\int_0^\infty x^\alpha \mathcal{L} \{t^\alpha f(t); x\} \mathcal{L} \{g(y); x\} dx = \Gamma(\alpha + 1) \int_0^\infty g(y) \mathcal{S}_{\alpha+1} \{t^\alpha f(t); y\} dy$$

ve

$$\int_0^\infty x^\alpha \mathcal{L} \{t^\alpha f(t); x\} \mathcal{L} \{g(y); x\} dx = \Gamma(\alpha + 1) \int_0^\infty t^\alpha f(t) \mathcal{S}_{\alpha+1} \{g(y); t\} dt.$$

Burada $\text{Re}(\alpha) > -1$ koşulu geçerlidir.

Uyarı 3.5 Uyarı 3.4 de $\alpha = 0$ seçilirse

$$\int_0^\infty \mathcal{L} \{f(t); x\} \mathcal{L} \{g(y); x\} dx = \int_0^\infty g(y) \mathcal{S} \{f(t); y\} dy$$

ve

$$\int_0^\infty \mathcal{L} \{f(t); x\} \mathcal{L} \{g(y); x\} dx = \int_0^\infty f(t) \mathcal{S} \{g(y); t\} dt$$

bilinen bağıntıları elde edilir [22, s.243, (13)].

Sonuç 3.30 İntegrallerin mutlak yakınsaklığı koşulu altında,

$$\begin{aligned}
& {}_{\alpha}\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}\{\mathcal{F}_s\{f(t);x\};y\} \\
&= \frac{y^{\alpha}}{\Gamma(\gamma)} \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}} {}_3\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma, 2p), (\alpha+1, 2), (1, 1) \\ (1+v, 2\mu), (1, 2) \end{matrix} \middle| \frac{-y^2}{t^2} \right] dt \\
&+ \frac{y^{\alpha+1}}{\Gamma(\gamma)} \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t^{\alpha+2}} {}_3\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma+p, 2p), (\alpha+2, 2), (1, 1) \\ (1+v+\mu, 2\mu), (2, 2) \end{matrix} \middle| \frac{-y^2}{t^2} \right] dt \quad (3.83)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \mathcal{F}_s\left\{{}_{\alpha}\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}\{f(t);x\};y\right\} \\
&= \frac{y^{-\alpha-1}}{\Gamma(\gamma)} \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \int_0^{\infty} t^{\alpha} f(t) {}_3\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma, 2p), (\alpha+1, 2), (1, 1) \\ (1+v, 2\mu), (1, 2) \end{matrix} \middle| \frac{-t^2}{y^2} \right] dt \\
&+ \frac{y^{-\alpha-2}}{\Gamma(\gamma)} \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \int_0^{\infty} t^{\alpha+1} f(t) {}_3\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma+p, 2p), (\alpha+2, 2), (1, 1) \\ (1+v+\mu, 2\mu), (2, 2) \end{matrix} \middle| \frac{-t^2}{y^2} \right] dt \quad (3.84)
\end{aligned}$$

bağıntıları gerçekleşir.

İspat: (3.63) bağıntısında, $C(x, t) = \sin(xt)$, t değişkenine bağlı fonksiyon seçilirse $\mathcal{D} = \mathcal{F}_s$ Fourier Sinüs dönüşümü elde edilir. Buna göre, $C(t, x) = \sin(tx)$, x değişkenine bağlı fonksiyon olmak üzere,

$${}_{\alpha}\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}\{\mathcal{F}_s\{f(t);x\};y\} = \int_0^{\infty} f(t) {}_{\alpha}\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}\{\sin(tx);y\} dt \quad (3.85)$$

bulunur. Öte yandan, (3.52) formülünde

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}(n+\alpha+1)\right) = \begin{cases} (-1)^k \cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right) & , n = 2k \text{ için} \\ (-1)^{k+1} \sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right) & , n = 2k+1 \text{ için} \end{cases}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} {}_{\alpha}\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{\sin(at);s\} &= \frac{s^{\alpha}\cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)}{a^{\alpha+1}\Gamma(\gamma)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\gamma+2pk)\Gamma(\alpha+2k+1)}{(2k)!\Gamma(1+\nu+2\mu k)}\left(-\frac{s^2}{a^2}\right)^k \\ &+ \frac{s^{\alpha+1}\sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)}{a^{\alpha+2}\Gamma(\gamma)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\gamma+2p+2pk)\Gamma(\alpha+2k+2)}{(2k+1)!\Gamma(1+\nu+2\mu+2\mu k)}\left(-\frac{s^2}{a^2}\right)^k \end{aligned}$$

dır ve (1.33) ile verilen Fox-Wright fonksiyonunun tanımından

$$\begin{aligned} & {}_{\alpha}\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{\sin(at);s\} \\ &= \frac{s^{\alpha}}{a^{\alpha+1}\Gamma(\gamma)}\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right){}_3\Psi_2\left[\begin{matrix}(\gamma,2p),(\alpha+1,2),(1,1) \\ (1+\nu,2\mu),(1,2) \end{matrix}\left|\frac{-s^2}{a^2}\right.\right] \\ &+ \frac{s^{\alpha+1}}{a^{\alpha+2}\Gamma(\gamma)}\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right){}_3\Psi_2\left[\begin{matrix}(\gamma+p,2p),(\alpha+2,2),(1,1) \\ (1+\nu+\mu,2\mu),(2,2) \end{matrix}\left|\frac{-s^2}{a^2}\right.\right], \end{aligned} \quad (3.86)$$

bulunur. $\operatorname{Re} a > 0$ koşulu altında (3.86) formülü, (3.85) bağıntısında yerine yazıldığında (3.83) bağıntısına ulaşılır. Ek olarak (3.64) bağıntısında, $C(y,x) = \sin(yx)$, x değişkenine bağlı fonksiyon olarak alınırsa $\mathcal{D} = \mathcal{F}_s$ Fourier Sinüs dönüşümü olmak üzere

$$\mathcal{F}_s\left\{{}_{\alpha}\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{f(t);x\};y\right\} = \int_0^{\infty} f(t){}_{\alpha}\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{\sin(yx);t\}dt \quad (3.87)$$

bulunur. $\operatorname{Re} a > 0$ koşulu altında (3.86) formülü $a = y$ ve $s = t$, (3.87) bağıntısında yerine yazıldığında (3.84) bağıntısına ulaşılır. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Uyarı 3.6 (3.83) ve (3.84) bağıntılarında $\nu = 0$, $\mu = p$, $\gamma = 1$ ve $\alpha = 0$ seçilirse

$$\mathcal{L}\{\mathcal{F}_s\{f(t);x\};y\} = \mathcal{P}\{f(t);y\}$$

ve

$$\mathcal{F}_s\{\mathcal{L}\{f(t);x\};y\} = y\mathcal{P}\left\{\frac{f(t)}{t};y\right\}$$

bilinen bağıntıları bulunur [4, s.4, (23)-(24)].

Sonuç 3.31 İntegrallerin mutlak yakınsaklığı koşulu altında

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty {}_\alpha \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma} \{f(t); x\} \mathcal{F}_s \{g(y); x\} dx \\
&= \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty \frac{g(y)}{y^{\alpha+1}} \left(\int_0^\infty t^\alpha f(t) {}_3\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma, 2p), (\alpha+1, 2), (1, 1) \\ (1+\nu, 2\mu), (1, 2) \end{matrix} \middle| \frac{-t^2}{y^2} \right] dt \right) dy \\
&+ \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty \frac{g(y)}{y^{\alpha+2}} \left(\int_0^\infty t^{\alpha+1} f(t) {}_3\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma+p, 2p), (\alpha+2, 2), (1, 1) \\ (1+\nu+\mu, 2\mu), (2, 2) \end{matrix} \middle| \frac{-t^2}{y^2} \right] dt \right) dy
\end{aligned} \tag{3.88}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty {}_\alpha \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma} \{f(t); x\} \mathcal{F}_s \{g(y); x\} dx \\
&= \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty t^\alpha f(t) \left(\int_0^\infty \frac{g(y)}{y^{\alpha+1}} {}_3\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma, 2p), (\alpha+1, 2), (1, 1) \\ (1+\nu, 2\mu), (1, 2) \end{matrix} \middle| \frac{-t^2}{y^2} \right] dy \right) dt \\
&+ \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty t^{\alpha+1} f(t) \left(\int_0^\infty \frac{g(y)}{y^{\alpha+2}} {}_3\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma+p, 2p), (\alpha+2, 2), (1, 1) \\ (1+\nu+\mu, 2\mu), (2, 2) \end{matrix} \middle| \frac{-t^2}{y^2} \right] dy \right) dt,
\end{aligned} \tag{3.89}$$

bağıntıları gerçekleşir.

İspat: (3.65) ve (3.66) bağıntılarında $C(x, y) = \sin(xy)$, y değişkenine bağlı bir fonksiyon olarak seçilirse $\mathcal{D} = \mathcal{F}_s$ olur. Buradan $C(y, x) = \sin(yx)$, x değişkenine bağlı bir fonksiyon olarak seçildiğinde

$$\int_0^\infty {}_\alpha \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma} \{f(t); x\} \mathcal{F}_s \{g(y); x\} dx = \int_0^\infty g(y) \left(\int_0^\infty f(t) {}_\alpha \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma} \{\sin(yx); t\} dt \right) dy$$

ve

$$\int_0^\infty {}_\alpha \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma} \{f(t); x\} \mathcal{F}_s \{g(y); x\} dx = \int_0^\infty f(t) \left(\int_0^\infty g(y) {}_\alpha \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma} \{\sin(yx); t\} dy \right) dt$$

bulunur. Burada (3.86) formülü $a = y$ ve $s = t$ için kullanılırlarsa (3.88) ve (3.89) bağıntılarına ulaşılır. ■

Uyarı 3.7 (3.88) ve (3.89) bağıntılarında $\nu = 0$, $\mu = p$, $\gamma = 1$ ve $\alpha = 0$ seçilirse

$$\int_0^\infty \mathcal{L}\{f(t); x\} \mathcal{F}_s\{g(y); x\} dx = \int_0^\infty yg(y) \mathcal{P}\left\{\frac{f(t)}{t}; y\right\} dy$$

ve

$$\int_0^\infty \mathcal{L}\{f(t); x\} \mathcal{F}_s\{g(y); x\} dx = \int_0^\infty f(t) \mathcal{P}\{g(y); t\} dt$$

bilinen bağıntıları elde edilir [4, s.7, (43)-(44)].

Yardımcı Teorem 3.5 İntegrallerin mutlak yakınsaklığı koşulu altında,

$$\begin{aligned} & {}_\alpha \mathcal{H}_{\nu, p}^{\mu, \gamma} \{\mathcal{F}_c\{f(t); x\}; y\} \\ &= \frac{y^{\alpha+1}}{\Gamma(\gamma)} \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \int_0^\infty \frac{f(t)}{t^{\alpha+2}} {}_3\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma+p, 2p), (\alpha+2, 2), (1, 1) \\ (1+\nu+\mu, 2\mu), (2, 2) \end{matrix} \middle| \frac{-y^2}{t^2} \right] dt \\ &- \frac{y^\alpha}{\Gamma(\gamma)} \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \int_0^\infty \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}} {}_3\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma, 2p), (\alpha+1, 2), (1, 1) \\ (1+\nu, 2\mu), (1, 2) \end{matrix} \middle| \frac{-y^2}{t^2} \right] dt \end{aligned} \quad (3.90)$$

ve

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}_c\left\{{}_\alpha \mathcal{H}_{\nu, p}^{\mu, \gamma} \{f(t); x\}; y\right\} \\ &= \frac{y^{-\alpha-2}}{\Gamma(\gamma)} \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \int_0^\infty t^{\alpha+1} f(t) {}_3\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma+p, 2p), (\alpha+2, 2), (1, 1) \\ (1+\nu+\mu, 2\mu), (2, 2) \end{matrix} \middle| \frac{-t^2}{y^2} \right] dt \\ &- \frac{y^{-\alpha-1}}{\Gamma(\gamma)} \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \int_0^\infty t^\alpha f(t) {}_3\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma, 2p), (\alpha+1, 2), (1, 1) \\ (1+\nu, 2\mu), (1, 2) \end{matrix} \middle| \frac{-t^2}{y^2} \right] dt \end{aligned} \quad (3.91)$$

bağıntıları gerçekleşir.

İspat: (3.63) bağıntısında, $C(x, t) = \cos(xt)$, t değişkenine bağlı fonksiyon seçilirse $\mathcal{D} = \mathcal{F}_c$ Fourier Kosinüs dönüşümü elde edilir. Buna göre, $C(t, x) = \cos(tx)$, x

değişkenine bağlı fonksiyonu göstermek üzere,

$${}_a\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{\mathcal{F}_c\{f(t);x\};y\} = \int_0^\infty f(t) {}_a\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{\cos(tx);y\} dt \quad (3.92)$$

bulunur. Öte yandan, (3.51) formülünde

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}(n+\alpha+1)\right) = \begin{cases} (-1)^{k+1} \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) & , n = 2k \text{ için} \\ (-1)^{k+1} \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) & , n = 2k+1 \text{ için} \end{cases}$$

değeri yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} & {}_a\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{\cos(at);s\} \\ &= -\frac{s^\alpha \sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)}{a^{\alpha+1}\Gamma(\gamma)} \sum_{k=0}^\infty \frac{\Gamma(\gamma+2pk)\Gamma(\alpha+2k+1)}{(2k)!\Gamma(1+\nu+2\mu k)} \left(-\frac{s^2}{a^2}\right)^k \\ &+ \frac{s^{\alpha+1} \cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)}{a^{\alpha+2}\Gamma(\gamma)} \sum_{k=0}^\infty \frac{\Gamma(\gamma+p+2pk)\Gamma(\alpha+2k+2)}{(2k+1)!\Gamma(1+\nu+\mu+2\mu k)} \left(-\frac{s^2}{a^2}\right)^k \end{aligned}$$

ve (1.33) ile verilen Fox-Wright fonksiyonunun tanımından

$$\begin{aligned} & {}_a\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{\cos(at);s\} = \frac{s^{\alpha+1} \cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)}{a^{\alpha+2}\Gamma(\gamma)} {}_3\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma+p, 2p), (\alpha+2, 2), (1, 1) \\ (1+\nu+\mu, 2\mu), (2, 2) \end{matrix} \middle| \frac{-s^2}{a^2} \right] \\ & - \frac{s^\alpha \sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)}{a^{\alpha+1}\Gamma(\gamma)} {}_3\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma, 2p), (\alpha+1, 2), (1, 1) \\ (1+\nu, 2\mu), (1, 2) \end{matrix} \middle| \frac{-s^2}{a^2} \right] \end{aligned} \quad (3.93)$$

bulunur. Re $a > 0$ koşulu altında (3.93) formülü $a = t$ ve $s = y$ için, (3.92) bağıntısında yerine yazıldığında (3.90) bağıntısına ulaşılır. Ek olarak (3.64) bağıntısında $C(y, x) = \cos(yx)$, x değişkenine bağlı fonksiyon olsun. $\mathcal{D} = \mathcal{F}_c$ Fourier Kosinüs dönüşümü ve $C(x, y) = \cos(xy)$, y değişkenine bağlı fonksiyon olmak üzere

$$\mathcal{F}_c\left\{{}_a\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{f(t);x\};y\right\} = \int_0^\infty f(t) {}_a\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{\cos(xy);t\} dt \quad (3.94)$$

bulunur. $\operatorname{Re} a > 0$ koşulu altında (3.93) formülü, (3.94) bağıntısında yerine yazıldığında (3.91) bağıntısına ulaşılır. Böylece ispat tamamlanmıştır. ■

Uyarı 3.8 (3.90) ve (3.91) bağıntılarında $\nu = 0$, $\mu = p$, $\gamma = 1$ ve $\alpha = 0$ seçilirse

$$\mathcal{L}\{\mathcal{F}_c\{f(t); x\}; y\} = y\mathcal{P}\left\{\frac{f(t)}{t}; y\right\}$$

ve

$$\mathcal{F}_c\{\mathcal{L}\{f(t); x\}; y\} = \mathcal{P}\{f(t); y\}$$

bilinen bağıntıları bulunur [4, s.4, (25)-(26)].

Sonuç 3.32 İntegrallerin mutlak yakınsaklığı koşulu altında,

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty {}_a\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{f(t); x\}\mathcal{F}_c\{g(y); x\}dx \\ &= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty \frac{g(y)}{y^{\alpha+2}} \left(\int_0^\infty t^{\alpha+1} f(t) {}_3\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma+p, 2p), (\alpha+2, 2), (1, 1) \\ (1+\nu+\mu, 2\mu), (2, 2) \end{matrix} \middle| \frac{-t^2}{y^2} \right] dt \right) dy \\ & - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty \frac{g(y)}{y^{\alpha+1}} \left(\int_0^\infty t^\alpha f(t) {}_3\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma, 2p), (\alpha+1, 2), (1, 1) \\ (1+\nu, 2\mu), (1, 2) \end{matrix} \middle| \frac{-t^2}{y^2} \right] dt \right) dy \quad (3.95) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty {}_a\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{f(t); x\}\mathcal{F}_c\{g(y); x\}dx \\ &= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty t^{\alpha+1} f(t) \left(\int_0^\infty \frac{g(y)}{y^{\alpha+2}} {}_3\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma+p, 2p), (\alpha+2, 2), (1, 1) \\ (1+\nu+\mu, 2\mu), (2, 2) \end{matrix} \middle| \frac{-t^2}{y^2} \right] dy \right) dt \\ & - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty t^\alpha f(t) \left(\int_0^\infty \frac{g(y)}{y^{\alpha+1}} {}_3\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma, 2p), (\alpha+1, 2), (1, 1) \\ (1+\nu, 2\mu), (1, 2) \end{matrix} \middle| \frac{-t^2}{y^2} \right] dy \right) dt \quad (3.96) \end{aligned}$$

bağıntıları gerçekleşir.

İspat: (3.65) ve (3.66) bağıntılarında $C(x, y) = \cos(xy)$, y değişkenine bağlı bir fonksiyon olarak seçilirse $\mathcal{D} = \mathcal{F}_c$ olur. Buradan $C(y, x) = \cos(yx)$, x değişkenine

bağı bir fonksiyonu göstermek üzere,

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} {}_{\alpha} \mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{f(t); x\} \mathcal{F}_c \{g(y); x\} dx \\ &= \int_0^{\infty} g(y) \left(\int_0^{\infty} f(t) {}_{\alpha} \mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{\cos(yx); t\} dt \right) dy \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} {}_{\alpha} \mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{f(t); x\} \mathcal{F}_c \{g(y); x\} dx \\ &= \int_0^{\infty} f(t) \left(\int_0^{\infty} g(y) {}_{\alpha} \mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{\cos(yx); t\} dy \right) dt \end{aligned}$$

bulunur. (3.93) formülü ile sırasıyla (3.95) ve (3.96) bağıntılarına ulaşılır. ■

Uyarı 3.9 (3.95) ve (3.96) bağıntılarında $v = 0$, $\mu = p$, $\gamma = 1$ ve $\alpha = 0$ seçilirse

$$\int_0^{\infty} \mathcal{L} \{f(t); x\} \mathcal{F}_c \{g(y); x\} dx = \int_0^{\infty} g(y) \mathcal{P} \{f(t); y\} dy$$

ve

$$\int_0^{\infty} \mathcal{L} \{f(t); x\} \mathcal{F}_c \{g(y); x\} dx = \int_0^{\infty} t f(t) \mathcal{P} \left\{ \frac{g(y)}{y}; t \right\} dt$$

bilinen bağıntıları elde edilir [4, s.7, (45)-(46)].

Yardımcı Teorem 3.6 İntegrallerin mutlak yakınsaklık koşulu altında

$$\begin{aligned} & {}_{\alpha} \mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{ \mathcal{S} \{f(t); x\}; y \} \\ &= \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)\Gamma(\gamma)} \int_0^{\infty} f(t) {}_2\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma - p\alpha, p), (1, 1) \\ (1 + v - \mu\alpha, \mu), (1 - \alpha, 1) \end{matrix} \middle| ty \right] dt \\ &- \frac{\pi y^{\alpha}}{\sin(\pi\alpha)\Gamma(\gamma)} \int_0^{\infty} t^{\alpha} f(t) {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (\gamma, p) \\ (1 + v, \mu) \end{matrix} \middle| ty \right] dt \end{aligned} \quad (3.97)$$

ve

$$\begin{aligned}
& \mathcal{S} \left\{ {}_a \mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{f(t);x\};y \right\} \\
&= \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty f(t) {}_2\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma-p\alpha,p), (1,1) \\ (1+v-\mu\alpha,\mu), (1-\alpha,1) \end{matrix} \middle| ty \right] dt \\
&- \frac{\pi y^\alpha}{\sin(\pi\alpha)\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty t^\alpha f(t) {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (\gamma,p) \\ (1+v,\mu) \end{matrix} \middle| ty \right] dt
\end{aligned} \tag{3.98}$$

bağıntıları gerçekleşir.

İspat: (3.63) bağıntısında, $C(x,t) = \frac{1}{t+x}$, t değişkenine bağlı fonksiyonu seçilsin. Bu durumda $\mathcal{D}=\mathcal{S}$ Stieltjes dönüşümüdür. Öte yandan $C(t,x) = \frac{1}{t+x}$, x değişkenine bağlı bir fonksiyondur. Bu durumda (3.63) bağıntısından

$${}_a \mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{ \mathcal{S} \{f(t);x\};y \} = \int_0^\infty f(t) {}_a \mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \left\{ \frac{1}{t+x};y \right\} dt$$

bulunur. Burada (3.36) formülü $a=t$ ve $s=y$ için kullanılırsa (3.97) bağıntısına ulaşılır ve ispat tamamlanmış olur. Ek olarak, (3.64) bağıntısında, $C(y,x) = \frac{1}{y+x}$ fonksiyonu, x değişkenine bağlı seçilsin. Bu durumda (3.64) bağıntısından

$$\mathcal{S} \left\{ {}_a \mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{f(t);x\};y \right\} = \int_0^\infty f(t) {}_a \mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \left\{ \frac{1}{y+x};t \right\} dt$$

elde edilir. Burada (3.36) formülü $a=y$ ve $s=t$ için kullanılırsa (3.98) bağıntısına ulaşılır ve ispat tamamlanmış olur. ■

Uyarı 3.10 (3.97) ve (3.98) bağıntıları birlikte düşünüldüğünde

$${}_a \mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{ \mathcal{S} \{f(t);x\};y \} = \mathcal{S} \left\{ {}_a \mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{f(t);x\};y \right\}$$

sonucuna ulaşılır.

Uyarı 3.11 (3.97) bağıntısında $v=0$, $\gamma=1$, $\mu=p$ seçilir ve (3.19) bağıntısı kullanı-

lrs

$$\mathcal{L}\{x^\alpha \mathcal{S}\{f(t); x\}; y\} = \frac{\pi y^{-\alpha}}{\sin(\pi\alpha)} \int_0^\infty f(t) {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (1, 1) \\ (1-\alpha, 1) \end{matrix} \middle| ty \right] dt \\ - \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \int_0^\infty t^\alpha f(t) e^{ty} dt$$

elde edilir. (1.34) ile verilen Fox-Wright fonksiyonu ile genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyon arasındaki bağıntı yardımıyla,

$$\mathcal{L}\{x^\alpha \mathcal{S}\{f(t); x\}; y\} = \frac{\pi y^{-\alpha}}{\sin(\pi\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty f(t) {}_1F_1(1; 1-\alpha; ty) dt \\ - \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \int_0^\infty t^\alpha f(t) e^{ty} dt$$

bulunur. Burada (1.19) ile verilen Kummer dönüşümü kullanılırsa,

$$\mathcal{L}\{x^\alpha \mathcal{S}\{f(t); x\}; y\} = \frac{\pi y^{-\alpha}}{\sin(\pi\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty f(t) e^{-ty} {}_1F_1(-\alpha; 1-\alpha; ty) dt \\ - \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \int_0^\infty t^\alpha f(t) e^{ty} dt$$

elde edilir. Eksik Gamma fonksiyonunun (1.42) ile verilen tanımından

$${}_1F_1(1; 1-\alpha; ty) = -\alpha e^{ty} t^\alpha y^\alpha \gamma(-\alpha, ty)$$

bulunur. Buna göre

$$\mathcal{L}\{x^\alpha \mathcal{S}\{f(t); x\}; y\} = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)\Gamma(-\alpha)} \int_0^\infty f(t) e^{ty} t^\alpha \gamma(-\alpha, ty) dt \\ - \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \int_0^\infty t^\alpha f(t) e^{ty} dt$$

biçiminde yazılabilir. Burada (1.44) ile verilen Gamma ve eksik Gamma ve tümlen Gamma fonksiyonları arasındaki ilişki ve (1.44) ile verilen Euler'in Yansıma

Formülü yardımıyla

$$\mathcal{L}\{x^\alpha \mathcal{S}\{f(t); x\}; y\} = \Gamma(1 + \alpha) \int_0^\infty t^\alpha e^{ty} \Gamma(-\alpha, ty) f(t) dt \quad (3.99)$$

sonucuna ulaşılır.

Uyarı 3.12 (3.98) bağıntısında $\nu = 0$, $\gamma = 1$ ve $\mu = p$ seçilir ve (3.19) bağıntısı kullanılırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{S}\{x^\alpha \mathcal{L}\{t^\alpha f(t); x\}; y\} &= \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \int_0^\infty f(t) {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (1, 1) \\ (1 - \alpha, 1) \end{matrix} \middle| ty \right] dt \\ &\quad - \frac{\pi y^\alpha}{\sin(\pi\alpha)} \int_0^\infty t^\alpha f(t) e^{ty} dt \end{aligned}$$

bilinen bağıntısı elde edilir. (1.34) ile verilen Fox-Wright fonksiyonu ve genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyon arasındaki bağıntı, (1.19) Kummer dönüşümü ve Eksik Gamma fonksiyonunun (1.42) ile verilen tanımından yararlanıldığında

$$\mathcal{S}\{x^\alpha \mathcal{L}\{t^\alpha f(t); x\}; y\} = y^\alpha \Gamma(1 + \alpha) \int_0^\infty t^\alpha e^{ty} \Gamma(-\alpha, ty) f(t) dt \quad (3.100)$$

sonucuna ulaşılır.

Uyarı 3.13 (3.99) ve (3.100) bağıntıları birlikte düşünüldüğünde

$$\mathcal{S}\{x^\alpha \mathcal{L}\{t^\alpha f(t); x\}; y\} = y^\alpha \mathcal{L}\{x^\alpha \mathcal{S}\{f(t); x\}; y\} \quad (3.101)$$

bağıntısı elde edilir.

Uyarı 3.14 (3.99) ve (3.100) bağıntıları $\alpha = 0$ için birlikte düşünüldüğünde,

$$\mathcal{L}\{\mathcal{S}\{f(t); x\}; y\} = \mathcal{S}\{\mathcal{L}\{f(t); x\}; y\} = \mathcal{E}_1\{f(t); y\}.$$

elde edilir [1, s.1378, (2.1)]. Burada $E_1(ty) = \Gamma(0, ty)$ ile tanımlanmak üzere $\mathcal{E}_1$, çekirdeği $C(y, t) = e^{ty} E_1(ty)$ olan üstel integral dönüşümüdür [1, s.1377, (1.1)].

Sonuç 3.33 İntegrallerin mutlak yakınsaklık koşulu altında

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty {}_\alpha \mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{f(t); x\} \mathcal{S} \{g(y); x\} dx \\
&= \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty g(y) \left(\int_0^\infty f(t) {}_2\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma - p\alpha, p), (1, 1) \\ (1 + v - \mu\alpha, \mu), (1 - \alpha, 1) \end{matrix} \middle| yt \right] dt \right) dy \\
&- \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty y^\alpha g(y) \left(\int_0^\infty t^\alpha f(t) {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (\gamma, p) \\ (1 + v, \mu) \end{matrix} \middle| yt \right] dt \right) dy \quad (3.102)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty {}_\alpha \mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{f(t); x\} \mathcal{S} \{g(y); x\} dx \\
&= \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty f(t) \left(\int_0^\infty g(y) {}_2\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma - p\alpha, p), (1, 1) \\ (1 + v - \mu\alpha, \mu), (1 - \alpha, 1) \end{matrix} \middle| ty \right] dy \right) dt \\
&- \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty t^\alpha f(t) \left(\int_0^\infty y^\alpha g(y) {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (\gamma, p) \\ (1 + v, \mu) \end{matrix} \middle| ty \right] dy \right) dt \quad (3.103)
\end{aligned}$$

bağıntıları gerçekleşir.

İspat: (3.65) ve (3.66) bağıntılarında $C(x, y) = \frac{1}{x+y}$, y değişkenine bağlı bir fonksiyon olarak seçilirse $\mathcal{D} = \mathcal{S}$ olur. Buradan $C(y, x) = \frac{1}{y+x}$, x değişkenine bağlı bir fonksiyon olmak üzere,

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty {}_\alpha \mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{f(t); x\} \mathcal{S} \{g(y); x\} dx \\
&= \int_0^\infty g(y) \left(\int_0^\infty f(t) {}_\alpha \mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \left\{ \frac{1}{y+x}; t \right\} dt \right) dy
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty {}_\alpha \mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{f(t); x\} \mathcal{S} \{g(y); x\} dx \\
&= \int_0^\infty f(t) \left(\int_0^\infty g(y) {}_\alpha \mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \left\{ \frac{1}{y+x}; t \right\} dy \right) dt
\end{aligned}$$

bulunur. (3.36) formülü $a = y$ ve $s = t$ için kullanılırsa sırasıyla (3.102) ve (3.103) bağıntılarına ulaşılır. ■

Uyarı 3.15 (3.102) ve (3.103) bağıntılarında $\nu = 0$, $\gamma = 1$, $\mu = p$ seçilir ve (3.19) bağıntısı kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty x^\alpha \mathcal{L}\{t^\alpha f(t); x\} \mathcal{S}\{g(y); x\} dx \\ &= \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \int_0^\infty g(y) \left(\int_0^\infty f(t) {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (1, 1) \\ (1-\alpha, 1) \end{matrix} \middle| yt \right] dt \right) dy \\ & - \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \int_0^\infty y^\alpha g(y) \left(\int_0^\infty t^\alpha f(t) e^{yt} dt \right) dy \end{aligned} \quad (3.104)$$

ve

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty x^\alpha \mathcal{L}\{t^\alpha f(t); x\} \mathcal{S}\{g(y); x\} dx \\ &= \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \int_0^\infty f(t) \left(\int_0^\infty g(y) {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (1, 1) \\ (1-\alpha, 1) \end{matrix} \middle| ty \right] dy \right) dt \\ & - \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \int_0^\infty t^\alpha f(t) \left(\int_0^\infty y^\alpha g(y) e^{ty} dy \right) dt, \end{aligned} \quad (3.105)$$

bağıntıları elde edilir. Buradan, Fox-Wright fonksiyonu ile genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyon arasındaki (1.34) bağıntısı, (1.19) Kummer dönüşümü ve eksik Gamma fonksiyonunun (1.42) ile verilen tanımından yararlanıldığında,

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty x^\alpha \mathcal{L}\{t^\alpha f(t); x\} \mathcal{S}\{g(y); x\} dx \\ &= \Gamma(1+\alpha) \int_0^\infty y^\alpha g(y) \left(\int_0^\infty t^\alpha e^{ty} \Gamma(-\alpha, ty) f(t) dt \right) dy \end{aligned} \quad (3.106)$$

ve

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty x^\alpha \mathcal{L}\{t^\alpha f(t); x\} \mathcal{S}\{g(y); x\} dx \\ &= \Gamma(1+\alpha) \int_0^\infty t^\alpha f(t) \left(\int_0^\infty y^\alpha e^{ty} \Gamma(-\alpha, ty) g(y) dy \right) dt \end{aligned} \quad (3.107)$$

bağıntılarına ulaşılır.

Uyarı 3.16 (3.106) ve (3.107) bağıntılarında $\alpha = 0$ seçilirse,

$$\int_0^\infty \mathcal{L}\{f(t); x\} \mathcal{S}\{g(y); x\} dx = \int_0^\infty g(y) \mathcal{E}_1\{f(t); y\} dy \quad (3.108)$$

$$\int_0^\infty \mathcal{L}\{f(t); x\} \mathcal{S}\{g(y); x\} dx = \int_0^\infty f(t) \mathcal{E}_1\{g(y); t\} dt \quad (3.109)$$

sonuçlarına ulaşılır [1, s.1381, (3.1)-(3.2)]. Burada $E_1(ty) = \Gamma(0, ty)$ olmak üzere $\mathcal{E}_1$ dönüşümü çekirdeği $C(y, t) = e^{ty} E_1(ty)$ olan üstel integral dönüşümdür [1, s.1377, (1.1)].

Yardımcı Teorem 3.7 İntegrallerin mutlak yakınsaklığı koşulu altında,

$$\begin{aligned} & {}_\alpha \mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{\mathcal{P}\{f(t); x\}; y\} \\ &= \frac{\pi y^\alpha}{2\Gamma(\gamma) \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} \int_0^\infty t^\alpha f(t) {}_2\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma, 2p), (1, 1) \\ (1+v, 2\mu), (1, 2) \end{matrix} \middle| -y^2 t^2 \right] dt \\ &+ \frac{\pi y^{\alpha+1}}{2\Gamma(\gamma) \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} \int_0^\infty t^{\alpha+1} f(t) {}_2\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma+p, 2p), (1, 1) \\ (1+v+\mu, 2\mu), (2, 2) \end{matrix} \middle| -y^2 t^2 \right] dt \\ &- \frac{\pi y}{\Gamma(\gamma) \sin(\pi\alpha)} \int_0^\infty t f(t) {}_2\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma-p\alpha+p, 2p), (1, 1) \\ (1+v-\mu\alpha+\mu, 2\mu), (2-\alpha, 2) \end{matrix} \middle| -y^2 t^2 \right] dt \end{aligned} \quad (3.110)$$

ve

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}\{ {}_\alpha \mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{f(t); x\}; y\} \\ &= \frac{\pi y^{\alpha+1}}{2\Gamma(\gamma) \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} \int_0^\infty t^{\alpha+1} f(t) {}_2\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma+p, 2p), (1, 1) \\ (1+v+\mu, 2\mu), (2, 2) \end{matrix} \middle| -y^2 t^2 \right] dt \\ &- \frac{\pi y^\alpha}{2\Gamma(\gamma) \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} \int_0^\infty t^\alpha f(t) {}_2\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma, 2p), (1, 1) \\ (1+v, 2\mu), (1, 2) \end{matrix} \middle| -y^2 t^2 \right] dt \\ &+ \frac{\pi}{\Gamma(\gamma) \sin(\pi\alpha)} \int_0^\infty f(t) {}_2\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma-p\alpha, 2p), (1, 1) \\ (1+v-\mu\alpha, 2\mu), (1-\alpha, 2) \end{matrix} \middle| -y^2 t^2 \right] dt \end{aligned} \quad (3.111)$$

bağıntıları gerçekleşir.

İspat: (3.63) bağıntısında, $C(x, t) = \frac{t}{x^2 + t^2}$, t değişkenine bağlı fonksiyonu seçilsin. Bu durumda $\mathcal{D}=\mathcal{P}$ Widder-Potansiyel dönüşümü olur. Öte yandan $C(t, x) = \frac{t}{t^2 + x^2}$, x değişkenine bağlı bir fonksiyondur. Bu durumda (3.63) bağıntısı

$${}_a\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}\{\mathcal{P}\{f(t);x\};y\} = \int_0^\infty f(t) {}_a\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}\left\{\frac{t}{t^2+x^2};y\right\} dt$$

biçimini alır. Burada (3.40) formülü, $a = t$ ve $s = y$ için kullanılırsa (3.110) bağıntısına ulaşılır ve ispat tamamlanmış olur. Öte yandan (3.64) bağıntısında, $C(y, x) = \frac{x}{y^2 + x^2}$, x değişkenine bağlı seçilsin. Bu durumda (3.64) bağıntısından

$$\mathcal{P}\left\{{}_a\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}\{f(t);x\};y\right\} = \int_0^\infty f(t) {}_a\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}\left\{\frac{x}{y^2+x^2};t\right\} dt$$

elde edilir. Son adımda, (3.40) formülü $a = y$ ve $s = t$ için kullanılırsa (3.111) bağıntısına ulaşılır ve ispat tamamlanmış olur. ■

Sonuç 3.34 İntegrallerin mutlak yakınsaklığı koşulu altında,

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty {}_a\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}\{f(t);x\} \mathcal{P}\{g(y);x\} dx \\ &= \frac{\pi}{2\Gamma(\gamma)\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} \int_0^\infty y^\alpha g(y) \left(\int_0^\infty t^\alpha f(t) {}_2\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma, 2p), (1, 1) \\ (1+v, 2\mu), (1, 2) \end{matrix} \middle| -y^2 t^2 \right] dt \right) dy \\ &+ \frac{\pi}{2\Gamma(\gamma)\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} \int_0^\infty y^{\alpha+1} g(y) \left(\int_0^\infty t^{\alpha+1} f(t) {}_2\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma+p, 2p), (1, 1) \\ (1+v+\mu, 2\mu), (2, 2) \end{matrix} \middle| -y^2 t^2 \right] dt \right) dy \\ &- \frac{\pi}{\Gamma(\gamma)\sin(\pi\alpha)} \int_0^\infty y g(y) \left(\int_0^\infty t f(t) {}_2\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma-p\alpha+p, 2p), (1, 1) \\ (1+v-\mu\alpha+\mu, 2\mu), (2-\alpha, 2) \end{matrix} \middle| -y^2 t^2 \right] dt \right) dy \end{aligned} \quad (3.112)$$

ve

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty {}_\alpha \mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{f(t); x\} \mathcal{P}\{g(y); x\} dx \\
&= \frac{\pi}{2\Gamma(\gamma) \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} \int_0^\infty t^\alpha f(t) \left(\int_0^\infty y^\alpha g(y) {}_2\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma, 2p), (1, 1) \\ (1+v, 2\mu), (1, 2) \end{matrix} \middle| -t^2 y^2 \right] dy \right) dt \\
&+ \frac{\pi}{2\Gamma(\gamma) \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} \int_0^\infty t^{\alpha+1} f(t) \left(\int_0^\infty y^{\alpha+1} g(y) {}_2\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma+p, 2p), (1, 1) \\ (1+v+\mu, 2\mu), (2, 2) \end{matrix} \middle| -t^2 y^2 \right] dy \right) dt \\
&- \frac{\pi}{\Gamma(\gamma) \sin(\pi\alpha)} \int_0^\infty t f(t) \left(\int_0^\infty y g(y) {}_2\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma-p\alpha+p, 2p), (1, 1) \\ (1+v-\mu\alpha+\mu, 2\mu), (2-\alpha, 2) \end{matrix} \middle| -t^2 y^2 \right] dy \right) dt
\end{aligned} \tag{3.113}$$

bağıntıları gerçekenir.

İspat: (3.65) ve (3.66) bağıntılarında $C(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$, y değişkenine bağlı bir fonksiyon olarak seçilirse $\mathcal{D} = \mathcal{P}$ olur. Buradan $C(y, x) = \frac{y}{y^2 + x^2}$, x değişkenine bağlı bir fonksiyon göstermek üzere,

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty {}_\alpha \mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{f(t); x\} \mathcal{P}\{g(y); x\} dx \\
&= \int_0^\infty g(y) \left(\int_0^\infty f(t) {}_\alpha \mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \left\{ \frac{y}{y^2 + x^2}; t \right\} dt \right) dy
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty {}_\alpha \mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{f(t); x\} \mathcal{P}\{g(y); x\} dx \\
&= \int_0^\infty f(t) \left(\int_0^\infty g(y) {}_\alpha \mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \left\{ \frac{y}{y^2 + x^2}; t \right\} dy \right) dt
\end{aligned}$$

bulunur. (3.40) formülü $a = y$ ve $s = t$ için kullanılırsa sırasıyla (3.112) ve (3.113) bağıntılarına ulaşılır. ■

Teorem 3.3 İntegrallerin mutlak yakınsaklık koşulu altında,

$$\begin{aligned} & {}_{\alpha} \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma} \left\{ \mathcal{D}_{RL}^{-\beta} \{f(x); t\}; s \right\} \\ &= \frac{\sin(\pi\alpha) s^{\alpha}}{\sin(\pi(\alpha+\beta)) \Gamma(\gamma)} \int_0^{\infty} x^{\alpha+\beta} {}_2\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma, p), (\alpha+1, 1) \\ (1+\nu, \mu), (\alpha+\beta+1, 1) \end{matrix} \middle| -sx \right] f(x) dx \end{aligned} \quad (3.114)$$

ve

$$\begin{aligned} & {}_{\alpha} \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma} \left\{ \mathcal{W}_{\beta} \{f(x); t\}; s \right\} \\ &= \frac{s^{\alpha}}{\Gamma(\gamma)} \int_0^{\infty} x^{\alpha+\beta} {}_2\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma, p), (\alpha+1, 1) \\ (1+\nu, \mu), (\alpha+\beta+1, 1) \end{matrix} \middle| -sx \right] f(x) dx \end{aligned} \quad (3.115)$$

bağıntıları gerçekleşir.

İspat: Genelleştirilmiş Bessel Maitland integral dönüşümünün (3.18) ile verilen tanımını ile Riemann-Liouville kesirli integralin (1.57) ile verilen tanımından,

$${}_{\alpha} \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma} \left\{ \mathcal{D}_{RL}^{-\beta} \{f(x); t\}; s \right\} = \int_0^{\infty} (st)^{\alpha} \mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(st) \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-x)^{\beta-1} f(x) dx \right) dt$$

bulunur. Mutlak yakınsaklık koşulu altında integrasyon sırası değiştirilip ve genelleştirilmiş Bessel-Maitland fonksiyonunun (2.1) ile verilen seri açılımı kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & {}_{\alpha} \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma} \left\{ \mathcal{D}_{RL}^{-\beta} \{f(x); t\}; s \right\} \\ &= \int_0^{\infty} f(x) \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{pn} (-1)^n s^{\alpha+n} x^{\alpha+\beta+n}}{\Gamma(1+\nu+\mu n) n!} \int_x^{\infty} (t-x)^{\beta-1} t^{\alpha+n} dt \right) dx \end{aligned}$$

elde edilir. Burada toplam içindeki integrale $t-x = xu$ değişken dönüşümü uygulanırsa,

$$\begin{aligned} & {}_{\alpha} \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma} \left\{ \mathcal{D}_{RL}^{-\beta} \{f(x); t\}; s \right\} \\ &= \int_0^{\infty} f(x) \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{pn} (-1)^n s^{\alpha+n} x^{\alpha+\beta+n}}{\Gamma(1+\nu+\mu n) n!} \int_0^{\infty} \frac{u^{\beta-1}}{(1+u)^{-\alpha-n}} du \right) dx \end{aligned} \quad (3.116)$$

bulunur. Buna göre (1.10) ile verilen beta fonksiyonunun tanımı, (1.11) bağıntısı ve (1.6) ile verilen Euler'in yansıma formülü birlikte kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{u^{\beta-1}}{(1+u)^{-\alpha-n}} du &= B(\beta; -\alpha - \beta - n) \\ &= \frac{\Gamma(\beta) \Gamma(-\alpha - \beta - n)}{\Gamma(-\alpha - n)} \\ &= \frac{\Gamma(\beta) \sin(\pi(1 + \alpha + \beta + n))}{\sin(\pi(1 + \alpha + n))} \frac{\Gamma(1 + \alpha + \beta + n)}{\Gamma(1 + \alpha + n)} \end{aligned}$$

elde edilir. $\sin(\pi(1 + n + \alpha)) = (-1)^{n+1} \sin(\pi\alpha)$ trigonometrik fonksiyonun özelliğinden

$$\int_0^\infty \frac{u^{\beta-1}}{(1+u)^{-\alpha-n}} du = \frac{\Gamma(\beta) \sin(\pi(\alpha + \beta))}{\sin(\pi\alpha)} \frac{\Gamma(1 + \alpha + \beta + n)}{\Gamma(1 + \alpha + n)} \quad (3.117)$$

biçiminde yazılabilir. Buna göre, (3.117) formülü (3.116) bağıntısında yerine yazılıp, (1.33) ile verilen Fox-Wright fonksiyonunun tanımı kullanılırsa (3.114) bağıntısına ulaşılır. Öte yandan, genelleştirilmiş Bessel Maitland integral dönüşümünün (3.18) ile verilen tanımı ile Weyl kesirli integralin (1.60) ile verilen tanımından

$${}_a \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma} \{ \mathcal{W}_\beta \{ f(x); t \}; s \} = \int_0^\infty (st)^\alpha \mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(st) \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_x^\infty (x-t)^{\beta-1} f(x) dx \right) dt$$

elde edilir. Mutlak yakınsaklık koşulu altında integrasyon sırası değiştirildiğinde

$${}_a \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma} \{ \mathcal{W}_\beta \{ f(x); t \}; s \} = \int_0^\infty f(x) \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^x (st)^\alpha \mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(st) (x-t)^{\beta-1} dt \right) dx$$

bulunur. Burada, genelleştirilmiş Bessel-Maitland fonksiyonunun (2.1) ile verilen seri açılımı kullanılır ve $t = xu$, değişken dönüşümü yapılırsa,

$${}_a \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma} \{ \mathcal{W}_\beta \{ f(x); t \}; s \} = \int_0^\infty f(x) \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^\infty \frac{(\gamma)_{pn} (-1)^n s^{\alpha+n} x^{\alpha+n+\beta}}{\Gamma(1 + \nu + \mu n) n!} \int_0^1 u^{\alpha+n} (1-u)^{\beta-1} du \right) dx$$

elde edilir. Buna göre (1.9) ile verilen beta fonksiyonunun tanımı, (1.11) bağıntısı ve (1.33) Fox-Wright fonksiyonunun tanımı kullanılırsa, (3.115) bağıntısına ulaşılır. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Örnek 3.12 $-1 \leq \operatorname{Re} \beta \leq 0$ koşulu altında

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty t^{\beta-\alpha-1} {}_2\Psi_1 \left[\begin{matrix} (\gamma, p), (\alpha+1, 1) \\ (1+v, \mu) \end{matrix} \middle| -\frac{y}{t} \right] dt \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha-\beta)\Gamma(\gamma-p(\alpha-\beta))}{\Gamma(1+v-\mu(\alpha-\beta))} \frac{1}{y^{\alpha-\beta}} \end{aligned} \quad (3.118)$$

eşitliği gerçekleşir.

Gerçekten, (3.75) bağıntısında $f(t) = t^\beta$ seçilirse

$${}_a\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{ \mathcal{L} \{ t^\beta; x \}; y \} = \frac{y^\alpha}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty t^{\beta-\alpha-1} {}_2\Psi_1 \left[\begin{matrix} (\gamma, p), (\alpha+1, 1) \\ (1+v, \mu) \end{matrix} \middle| -\frac{y}{t} \right] dt$$

bulunur. Burada ilk olarak Örnek1.2'deki 1. formül ve daha sonra (3.35) formülü kullanılırsa (3.118) eşitliğine ulaşılır.

Uyarı 3.17 (3.118) eşitliğinde $\beta = 0$ seçilirse,

$$\int_0^\infty t^{-\alpha-1} {}_2\Psi_1 \left[\begin{matrix} (\gamma, p), (\alpha+1, 1) \\ (1+v, \mu) \end{matrix} \middle| -\frac{y}{t} \right] dt = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-p\alpha)}{\Gamma(1+v-\mu\alpha)} \frac{1}{y^\alpha}$$

eşitliğinin gerçekleşeceği açıktır.

Uyarı 3.18 (3.82) bağıntısında $g(u) = 1$ seçilirse

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty {}_a\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{ f(t); x \} \mathcal{L} \{ 1; x \} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty t^\alpha f(t) \left(\int_0^\infty \frac{1}{y^{\alpha+1}} {}_2\Psi_1 \left[\begin{matrix} (\gamma, p), (\alpha+1, 1) \\ (1+v, \mu) \end{matrix} \middle| -\frac{t}{y} \right] dy \right) dt \end{aligned}$$

bulunur. Burada $\mathcal{L} \{ 1; x \} = \frac{1}{x}$ formülü ve eşitliğin sağ tarafında (3.118) bağıntısı kullanılırsa,

$$\int_0^\infty \frac{1}{x} {}_a\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{ f(t); x \} dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-p\alpha)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(1+v-\mu\alpha)} \int_0^\infty f(t) dt \quad (3.119)$$

sonucuna ulaşılır.

Uyarı 3.19 (3.119) bağıntısında $f(t) = e^{-yt}$ seçilirse,

$$\int_0^\infty \frac{1}{x} {}_\alpha \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma} \{e^{-yt}; x\} dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-p\alpha)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(1+\nu-\mu\alpha)} \int_0^\infty e^{-yt} dt$$

bulunur. Burada $a = y$ ve $s = x$ için (3.50) formülü kullanılır ve eşitliğin sağ tarafındaki integral hesaplanırsa,

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} {}_2\Psi_1 \left[\begin{matrix} (\gamma, p), (\alpha+1, 1) \\ (1+\nu, \mu) \end{matrix} \middle| -\frac{x}{y} \right] dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-p\alpha)}{\Gamma(1+\nu-\mu\alpha)} y^\alpha \quad (3.120)$$

sonucuna ulaşılır.

Örnek 3.13 $|\arg a| < \pi$ koşulu altında

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{e^{-at}}{t^{\alpha+1}} {}_2\Psi_1 \left[\begin{matrix} (\gamma, p), (\alpha+1, 1) \\ (1+\nu, \mu) \end{matrix} \middle| -\frac{y}{t} \right] dt \\ &= \frac{\pi y^{-\alpha}}{\sin(\pi\alpha)} {}_2\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma-p\alpha, p), (1, 1) \\ (1+\nu-\mu\alpha, \mu), (1-\alpha, 1) \end{matrix} \middle| ay \right] \\ & - \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (\gamma, p) \\ (1+\nu, \mu) \end{matrix} \middle| ay \right] \end{aligned} \quad (3.121)$$

eşitliği gerçekleşir.

(3.75) bağıntısında $f(t) = e^{-at}$ seçilirse,

$$\begin{aligned} & {}_\alpha \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma} \{ \mathcal{L}\{e^{-at}; x\}; y \} \\ &= \frac{y^\alpha}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty \frac{e^{-at}}{t^{\alpha+1}} {}_2\Psi_1 \left[\begin{matrix} (\gamma, p), (\alpha+1, 1) \\ (1+\nu, \mu) \end{matrix} \middle| -\frac{y}{t} \right] dt \end{aligned}$$

bulunur. Burada ilk olarak $\operatorname{Re}(x-a) > 0$ koşulu altında $\mathcal{L}\{e^{-at}; x\} = \frac{1}{x+a}$ formülü ve daha sonra $|\arg a| < \pi$ koşulu altında (3.36) formülü kullanılırsa (3.121) bağıntısı elde edilir.

Uyarı 3.20 (3.121) bağıntısında $\gamma = 1$, $p = \mu$ ve $\nu = 0$ seçilirse,

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \frac{e^{-at}}{t^{\alpha+1}} {}_1\Psi_0 \left[\begin{matrix} (\alpha+1, 1) \\ - \end{matrix} \middle| -\frac{y}{t} \right] dt \\
&= \frac{\pi y^{-\alpha}}{\sin(\pi\alpha)} {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (1, 1) \\ (1-\alpha, 1) \end{matrix} \middle| ay \right] \\
&- \frac{\pi a^\alpha}{\sin(\pi\alpha)} {}_0\Psi_0 \left[\begin{matrix} - \\ - \end{matrix} \middle| ay \right]
\end{aligned} \tag{3.122}$$

bulunur. (1.34) ile verilen Fox-Wright fonksiyonu ile genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyon arasındaki bağıntı ile (1.13) özel durumundan,

$${}_0\Psi_0 \left[\begin{matrix} - \\ - \end{matrix} \middle| ay \right] = {}_0F_0(-; -; ay) = e^{ay} \tag{3.123}$$

ve (1.14) özel durumundan,

$$\begin{aligned}
{}_1\Psi_0 \left[\begin{matrix} (\alpha+1, 1) \\ - \end{matrix} \middle| -\frac{y}{t} \right] &= \Gamma(\alpha+1) {}_1F_0\left(\alpha+1; -; -\frac{y}{t}\right) \\
&= \Gamma(\alpha+1) \frac{t^{\alpha+1}}{(t+y)^{\alpha+1}}
\end{aligned} \tag{3.124}$$

ve son olarak

$${}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (1, 1) \\ (1-\alpha, 1) \end{matrix} \middle| ay \right] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} {}_1F_1(1; 1-\alpha; ay)$$

bulunur. (1.19) Kummer dönüşümü ve eksik Gamma fonksiyonunun (1.42) ile verilen tanımından

$$\begin{aligned}
{}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (1, 1) \\ (1-\alpha, 1) \end{matrix} \middle| ay \right] &= \frac{e^{ay}}{\Gamma(1-\alpha)} {}_1F_1(-\alpha; 1-\alpha; -ay) \\
&= \frac{e^{ay}}{\Gamma(-\alpha)} (ay)^\alpha \gamma(\alpha; ay)
\end{aligned} \tag{3.125}$$

elde edilir. (3.123), (3.124) ve (3.125) eşitlikleri (3.122) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} & \Gamma(\alpha + 1) \int_0^\infty \frac{e^{-at}}{(t+y)^{\alpha+1}} dt \\ &= \frac{\pi a^\alpha e^{ay}}{\sin(\pi\alpha)} \left[\frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \gamma(\alpha; ay) - 1 \right] \end{aligned}$$

bulunur. Burada ilk olarak $\sin(\pi\alpha) = -\sin(\pi(\alpha + 1))$ eşitliği, daha sonra (1.6) ile verilen Euler'in Yansıma Formülü ve (1.44) bağıntısı kullanılırsa

$$\mathcal{S}_{\alpha+1} \{e^{-at}; y\} = a^\alpha e^{ay} \Gamma(-\alpha, ay)$$

sonucu elde edilir.

Örnek 3.14 $0 < \operatorname{Re} \beta < 1$ koşulu altında

$$\begin{aligned} & \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha+\beta+1}} {}_3\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma, 2p), (\alpha+1, 2), (1, 1) \\ (1+v, 2\mu), (1, 2) \end{matrix} \middle| -\frac{y^2}{t^2} \right] dt \\ &+ y \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha+\beta+2}} {}_3\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma+p, 2p), (\alpha+2, 2), (1, 1) \\ (1+v+\mu, 2\mu), (2, 2) \end{matrix} \middle| -\frac{y^2}{t^2} \right] dt \\ &= \cos\left(\frac{\pi\beta}{2}\right) \frac{\Gamma(1-\beta) \Gamma(\alpha+\beta) \Gamma(\gamma-p(\alpha+\beta))}{\Gamma(1+v-\mu(\alpha+\beta))} \frac{1}{y^{\beta+\alpha}} \end{aligned} \quad (3.126)$$

eşitliği geçerlidir.

Gerçekten, (3.83) bağıntısında $f(t) = t^{-\beta}$ ($0 < \operatorname{Re} \beta < 1$) seçilirse

$$\begin{aligned} & {}_\alpha \mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{ \mathcal{F}_s \{ t^{-\beta}; x \}; y \} \\ &= \frac{y^\alpha}{\Gamma(\gamma)} \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \int_0^\infty \frac{t^{-\beta}}{t^{\alpha+1}} {}_3\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma, 2p), (\alpha+1, 2), (1, 1) \\ (1+v, 2\mu), (1, 2) \end{matrix} \middle| \frac{-y^2}{t^2} \right] dt \\ &+ \frac{y^{\alpha+1}}{\Gamma(\gamma)} \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \int_0^\infty \frac{t^{-\beta}}{t^{\alpha+2}} {}_3\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma+p, 2p), (\alpha+2, 2), (1, 1) \\ (1+v+\mu, 2\mu), (2, 2) \end{matrix} \middle| \frac{-y^2}{t^2} \right] dt \end{aligned}$$

bulunur. Burada ilk olarak $\mathcal{F}_s\{t^{-\beta}; x\} = x^{\beta-1}\Gamma(1-\beta)\cos\left(\frac{\pi\beta}{2}\right)$ [7, s.68, (1)] ve daha sonra (3.35) formülü kullanılırsa (3.126) bağıntısına ulaşılır.

Uyarı 3.21 (3.126) bağıntısında $\alpha = 0$ seçilirse, $0 < \text{Re } \beta < 1$ koşulu altında

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{1}{t^{\beta+1}} {}_2\Psi_1 \left[\begin{matrix} (\gamma, 2p), (1, 1) \\ (1+v, 2\mu) \end{matrix} \middle| -\frac{y^2}{t^2} \right] dt \\ &= \cos\left(\frac{\pi\beta}{2}\right) \frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-p\beta)}{\Gamma(1+v-\mu\beta)} \frac{1}{y^\beta}. \end{aligned}$$

bulunur. Burada, (1.6) ile verilen Euler'in Yansıma Formülü ve $\sin 2a = 2\sin a \cos a$ trigonometrik özdeşliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{1}{t^{\beta+1}} {}_2\Psi_1 \left[\begin{matrix} (\gamma, 2p), (1, 1) \\ (1+v, 2\mu) \end{matrix} \middle| -\frac{y^2}{t^2} \right] dt \\ &= \csc\left(\frac{\pi\beta}{2}\right) \frac{\Gamma(\gamma-p\beta)}{\Gamma(1+v-\mu\beta)} \frac{\pi}{2y^\beta} \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

Uyarı 3.22 (3.126) bağıntısında $\alpha = 1$ seçilirse, $0 < \text{Re } \beta < 1$ koşulu altında

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{1}{t^{\beta+3}} {}_3\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma+p, 2p), (3, 2), (1, 1) \\ (1+v+\mu, 2\mu), (2, 2) \end{matrix} \middle| -\frac{y^2}{t^2} \right] dt \\ &= \cos\left(\frac{\pi\beta}{2}\right) \frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\beta)\Gamma(\gamma-p(1+\beta))}{\Gamma(1+v-\mu(1+\beta))} \frac{1}{y^{\beta+2}} \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 3.15 $0 < \operatorname{Re} \beta < 1$ koşulu altında aşağıdaki bağıntı doğrudur:

$$\begin{aligned}
& y \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \int_0^\infty t^{\alpha+\beta-1} {}_3\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma, 2p), (1+\alpha, 2), (1, 1) \\ (1+v, 2\mu), (1, 2) \end{matrix} \middle| -\frac{t^2}{y^2} \right] dt \\
& + \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \int_0^\infty t^{\alpha+\beta} {}_3\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma+p, 2p), (2+\alpha, 2), (1, 1) \\ (1+v+\mu, 2\mu), (2, 2) \end{matrix} \middle| -\frac{t^2}{y^2} \right] dt \\
& = \cos\left(\frac{\pi\beta}{2}\right) \frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\gamma-p(\alpha+\beta))}{\Gamma(1+v-\mu(\alpha+\beta))} y^{\alpha+\beta+1}.
\end{aligned} \tag{3.127}$$

Gerçekten, (3.84) bağıntısında $f(t) = t^{\beta-1}$, ($0 < \operatorname{Re} \beta < 1$) seçilirse,

$$\begin{aligned}
& \mathcal{F}_s \left\{ {}_a\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{t^{\beta-1}; x\}; y \right\} \\
& = \frac{y^{-\alpha-1}}{\Gamma(\gamma)} \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \int_0^\infty t^{\alpha+\beta-1} {}_3\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma, 2p), (\alpha+1, 2), (1, 1) \\ (1+v, 2\mu), (1, 2) \end{matrix} \middle| -\frac{t^2}{y^2} \right] dt \\
& + \frac{y^{-\alpha-2}}{\Gamma(\gamma)} \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \int_0^\infty t^{\alpha+\beta} {}_3\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma+p, 2p), (\alpha+2, 2), (1, 1) \\ (1+v+\mu, 2\mu), (2, 2) \end{matrix} \middle| -\frac{t^2}{y^2} \right] dt,
\end{aligned}$$

bulunur. Burada, ilk olarak (3.35) formülü daha sonra $\mathcal{F}_s \{t^{-\beta}; x\} = x^{\beta-1} \Gamma(1-\beta) \cos\left(\frac{\pi\beta}{2}\right)$ [7, s.68, (1)] bilinen formülü kullanılırsa (3.127) bağıntına ulaşılır.

Örnek 3.16 Aşağıdaki eşitlik doğrudur:

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty x^{\alpha+\beta+\delta-1} {}_2\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma, p), (\alpha+1, 1) \\ (1+v, \mu), (\alpha+\beta+1, 1) \end{matrix} \middle| -sx \right] dx \\
& = \frac{\sin(\pi(\alpha+\beta)) \Gamma(\delta) \Gamma(\alpha+\delta+\beta) \Gamma(\gamma-p(\alpha+\delta+\beta))}{\sin(\pi\alpha) \Gamma(\delta+\beta) \Gamma(1+v-\mu(\alpha+\delta+\beta))} \frac{1}{s^{\delta+\beta+\alpha}}.
\end{aligned} \tag{3.128}$$

Gerçekten, (3.114) bağıntısında $f(x) = x^{\delta-1}$ seçilirse

$$\begin{aligned}
& {}_a\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \left\{ \mathcal{D}_{RL}^{-\beta} \{f(x); t\}; s \right\} \\
& = \frac{\sin(\pi\alpha) s^\alpha}{\sin(\pi(\alpha+\beta)) \Gamma(\gamma)} \int_0^\infty x^{\alpha+\beta+\delta-1} {}_2\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma, p), (\alpha+1, 1) \\ (1+v, \mu), (\alpha+\beta+1, 1) \end{matrix} \middle| -sx \right] dx
\end{aligned}$$

bulunur. Burada, ilk olarak

$$\mathcal{D}_{RL}^{-\beta}\{x^{\delta-1}; y\} = \frac{y^{\delta+\beta-1}\Gamma(\delta)}{\Gamma(\delta+\beta)}$$

formülü ve daha sonra (3.35) formülü kullanılırsa, (3.128) sonucuna ulaşılır.

3.4 Bazı Kesirli Diferansiyel Denklemlere Uygulamalar

Bu bölümde, 2019 yılında SCI-Expanded kapsamında taranan Application of Mathematics isimli dergide "Theorems on Some Families of Fractional Differential Equations and Their Applications" başlığı altında yer alan genelleştirilmiş Bessel-Maitland integral dönüşümünün bir özel hali olan ve literatürde çok iyi bilinen Laplace dönüşümü ile bazı kesirli diferansiyel denklemler çözülecektir.

Yardımcı Teorem 3.8 $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0, \alpha, \mu \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} \alpha > \operatorname{Re} \mu > 0$ ve

$$\left| \frac{bs^{-\mu}}{s^{\alpha-\mu} + a} \right| < 1$$

koşulları altında

$$\frac{1}{s^{\alpha} + as^{\mu} + b} = \sum_{k=0}^{\infty} (-b)^k \frac{s^{-\alpha k - \alpha}}{(1 + as^{\mu-\alpha})^{k+1}}, \quad \left| \frac{bs^{-\mu}}{1 + as^{\mu-\alpha}} \right| < 1 \quad (3.129)$$

eşitliği gerçekleşir.

İspat: İlk olarak, eşitliğin sol tarafındaki ifade $s^{-\mu}$ ile genişletilirse

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^{\alpha} + as^{\mu} + b} &= \frac{s^{-\mu}}{s^{\alpha-\mu} + a + bs^{-\mu}} \\ &= \frac{s^{-\mu}}{(s^{\alpha-\mu} + a) \left(1 + \frac{bs^{-\mu}}{s^{\alpha-\mu} + a} \right)} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\left| \frac{bs^{-\mu}}{s^{\alpha-\mu} + a} \right| < 1$$

koşulu altında kuvvet serisi açılımından yararlanılırsa,

$$\begin{aligned}
\frac{s^{-\mu}}{(s^{\alpha-\mu} + a) \left(1 + \frac{bs^{-\mu}}{s^{\alpha-\mu} + a}\right)} &= \frac{s^{-\mu}}{s^{\alpha-\mu} + a} \frac{1}{\left(1 + \frac{bs^{-\mu}}{s^{\alpha-\mu} + a}\right)} \\
&= \frac{s^{-\mu}}{s^{\alpha-\mu} + a} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-bs^{-\mu}}{s^{\alpha-\mu} + a}\right)^k \\
&= \frac{s^{-\mu}}{s^{\alpha-\mu} + a} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-bs^{-\mu}}{s^{\alpha-\mu} + a}\right)^k \\
&= \frac{s^{-\mu}}{s^{\alpha-\mu} (1 + as^{\mu-\alpha})} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-bs^{-\mu}}{s^{\alpha-\mu} (1 + as^{\mu-\alpha})}\right)^k
\end{aligned}$$

bulunur ve gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\frac{1}{s^{\alpha} + as^{\mu} + b} = \sum_{k=0}^{\infty} (-b)^k \frac{s^{-\alpha k - \alpha}}{(1 + as^{\mu-\alpha})^{k+1}}$$

sonucuna ulaşılır. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 3.4 $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, $\alpha, \mu \in \mathbb{C}$, $m, n \in \mathbb{N}$, $n \geq \operatorname{Re} \alpha > n-1 \geq m \geq \operatorname{Re} \mu > m-1 > \operatorname{Re} \mu \geq 0$ ve

$$\left| \frac{bs^{-\mu}}{s^{\alpha-\mu} + a} \right| < 1$$

olsun. $y^{(r)}(0) = c_r$, $r = 0, 1, 2, \dots, n-1$ başlangıç koşulları ile verilen

$$D_C^{\alpha} y(t) + a D_C^{\mu} y(t) + by(t) = f(t) \quad (3.130)$$

kesirli diferansiyel denklemin çözümü,

$$\begin{aligned}
y(t) &= \int_0^t f(x) \sum_{k=0}^{\infty} (-b)^k (t-x)^{\alpha k + \alpha - 1} E_{\alpha-\mu, \alpha k + \alpha}^{k+1} (-a(t-x)^{\alpha-\mu}) dx \\
&+ \sum_{r=0}^{n-1} c_r \sum_{k=0}^{\infty} (-b)^k t^{\alpha k + r} E_{\alpha-\mu, \alpha k + r + 1}^{k+1} (-at^{\alpha-\mu}) \\
&+ a \sum_{j=0}^{m-1} c_j \sum_{k=0}^{\infty} (-b)^k t^{\alpha k + r - \mu + j} E_{\alpha-\mu, \alpha k + r - \mu + j + 1}^{k+1} (-at^{\alpha-\mu}) \quad (3.131)
\end{aligned}$$

biçimindedir. Öte yandan $D_{RL}^{(\alpha-r-1)}(0) = c_r$, $r = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ve $D_{RL}^{(\mu-j-1)}(0) = b_j$, $j = 0, 1, 2, \dots, m-1$ başlangıç koşullarına sahip

$$D_{RL}^\alpha y(t) + aD_{RL}^\mu y(t) + by(t) = f(t) \quad (3.132)$$

kesirli diferansiyel denklemin çözümü,

$$\begin{aligned} y(t) = & \int_0^t f(x) \sum_{k=0}^{\infty} (-b)^k (t-x)^{\alpha k + \alpha - 1} E_{\alpha-\mu, \alpha k + \alpha}^{k+1} (-a(t-x)^{\alpha-\mu}) dx \\ & + \sum_{r=0}^{n-1} c_r \sum_{k=0}^{\infty} (-b)^k t^{\alpha k + \alpha - r - 1} E_{\alpha-\mu, \alpha k + \alpha - r}^{k+1} (-at^{\alpha-\mu}) \\ & + a \sum_{j=0}^{m-1} b_j \sum_{k=0}^{\infty} (-b)^k t^{\alpha k + r - \mu + j} E_{\alpha-\mu, \alpha k + r - \mu + j + 1}^{k+1} (-at^{\alpha-\mu}) \end{aligned} \quad (3.133)$$

biçimindedir.

İspat: (3.130) kesirli diferansiyel denkleme Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$\mathcal{L}\{D_C^\alpha y(t) + aD_C^\mu y(t) + by(t); s\} = \mathcal{L}\{f(t); s\}$$

bulunur. $\mathcal{L}\{y(t); s\} = Y(s)$ ve $\mathcal{L}\{f(t); s\} = F(s)$ olmak üzere $c_r = D^r y(0)$, $r = 0, 1, \dots, n-1$ ile $c_j = D^j y(0)$, $j = 0, 1, \dots, m-1$ başlangıç koşulları altında Caputo anlamında kesirli türevin Laplace dönüşümü formülü kullanıldığında,

$$s^\alpha Y(s) - \sum_{r=0}^{n-1} s^{\alpha-r-1} c_r + as^\mu Y(s) - \sum_{j=0}^{m-1} s^{\alpha-j-1} c_j + bY(s) = F(s)$$

cebirsal denklemi bulunur. Bu cebirsal denklem $Y(s)$ ye göre düzenlendiğinde

$$Y(s) = \frac{F(s) + \sum_{r=0}^{n-1} s^{\alpha-r-1} c_r + \sum_{j=0}^{m-1} s^{\alpha-j-1} c_j}{s^\alpha + as^\mu + b}$$

bulunur. Burada (3.129) eşitliği yardımıyla

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \left(F(s) + \sum_{r=0}^{n-1} s^{\alpha-r-1} c_r + \sum_{j=0}^{m-1} s^{\alpha-j-1} c_j \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-b)^k \frac{s^{-\alpha k - \alpha}}{(1 + as^{\mu-\alpha})^{k+1}} \right) \\
&= F(s) \sum_{k=0}^{\infty} (-b)^k \frac{s^{-\alpha k - \alpha}}{(1 + as^{\mu-\alpha})^{k+1}} \\
&\quad + \sum_{r=0}^{n-1} c_r \sum_{k=0}^{\infty} (-b)^k \frac{s^{-\alpha k - r - 1}}{(1 + as^{\mu-\alpha})^{k+1}} \\
&\quad + a \sum_{j=0}^{m-1} c_j \sum_{k=0}^{\infty} (-b)^k \frac{s^{-\alpha k - r - 1}}{(1 + as^{\mu-\alpha})^{k+1}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak, yukarıdaki eşitliğin iki yanına ters Laplace dönüşümü uygulanırsa konvolüsyon teoremi ve Örnek 1.2 de 10. formülünden,

$$\begin{aligned}
y(t) &= f(t) * \sum_{k=0}^{\infty} (-b)^k t^{\alpha k + \alpha - 1} E_{\alpha-\mu, \alpha k + k}^{k+1}(-at^{\alpha-\mu}) \\
&\quad + \sum_{r=0}^{n-1} c_r \sum_{k=0}^{\infty} (-b)^k t^{\alpha k + r} E_{\alpha-\mu, \alpha k + r + 1}^{k+1}(-at^{\alpha-\mu}) \\
&\quad + a \sum_{j=0}^{m-1} c_j \sum_{k=0}^{\infty} (-b)^k t^{\alpha k + \alpha - \mu + j} E_{\alpha-\mu, \alpha k + \alpha - \mu + j + 1}^{k+1}(-at^{\alpha-\mu})
\end{aligned}$$

bulunur. Konvolüsyon tanımı yardımıyla (3.131) çözümüne ulaşılır. Benzer biçimde (3.132) kesirli diferansiyel denkleme Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$\mathcal{L}\{D_{RL}^{\alpha} y(t) + a D_{RL}^{\mu} y(t) + b y(t); s\} = \mathcal{L}\{f(t); s\}$$

bulunur. $\mathcal{L}\{y(t); s\} = Y(s)$ ve $\mathcal{L}\{f(t); s\} = F(s)$ olmak üzere $c_r = D^{\alpha-r-1} y(0)$, $r = 0, 1, \dots, n-1$ ile $c_j = D^{\mu-j-1} y(0)$, $j = 0, 1, \dots, m-1$ başlangıç koşulları altında Riemann-Liouville anlamında kesirli türevin Laplace dönüşümü formülü kullanıldığında,

$$s^{\alpha} Y(s) - \sum_{r=0}^{n-1} c_r s^r + as^{\mu} Y(s) - \sum_{j=0}^{m-1} b_j s^j + b Y(s) = F(s)$$

cebirsel denklemi bulunur. Bu cebirsel denklem $Y(s)$ ye göre düzenlendiğinde

$$Y(s) = \frac{F(s) + \sum_{r=0}^{n-1} c_r s^r + \sum_{j=0}^{m-1} b_j s^j}{s^\alpha + a s^\mu + b}$$

olur. Burada (3.129) eşitliği yardımıyla

$$\begin{aligned} Y(s) &= \left(F(s) + \sum_{r=0}^{n-1} c_r s^r + \sum_{j=0}^{m-1} b_j s^j \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-b)^k \frac{s^{-\alpha k - \alpha}}{(1 + a s^{\mu - \alpha})^{k+1}} \right) \\ &= F(s) \sum_{k=0}^{\infty} (-b)^k \frac{s^{-\alpha k - \alpha}}{(1 + a s^{\mu - \alpha})^{k+1}} \\ &\quad + \sum_{r=0}^{n-1} c_r \sum_{k=0}^{\infty} (-b)^k \frac{s^{-\alpha k - \alpha + r}}{(1 + a s^{\mu - \alpha})^{k+1}} \\ &\quad + a \sum_{j=0}^{m-1} b_j \sum_{k=0}^{\infty} (-b)^k \frac{s^{-\alpha k - \alpha - j}}{(1 + a s^{\mu - \alpha})^{k+1}} \end{aligned}$$

elde edilir. Son bağıntıya, ters Laplace dönüşümü uygulanır, konvolüsyon teoremi ve Örnek1.2'deki 10. formülü kullanılırsa,

$$\begin{aligned} y(t) &= f(t) * \sum_{k=0}^{\infty} (-b)^k t^{\alpha k + \alpha - 1} E_{\alpha - \mu, \alpha k + \alpha}^{k+1} (-a t^{\alpha - \mu}) \\ &\quad + \sum_{r=0}^{n-1} c_r \sum_{k=0}^{\infty} (-b)^k t^{\alpha k + \alpha - r - 1} E_{\alpha - \mu, \alpha k + \alpha - r}^{k+1} (-a t^{\alpha - \mu}) \\ &\quad + a \sum_{j=0}^{m-1} b_j \sum_{k=0}^{\infty} (-b)^k t^{\alpha k + \alpha - j - 1} E_{\alpha - \mu, \alpha k + \alpha - j}^{k+1} (-a t^{\alpha - \mu}) \end{aligned}$$

bulunur. Konvolüsyon tanımı yardımıyla (3.133) çözümüne ulaşılır. ■

Uyarı 3.23 Teorem 3.4 koşulları altında (3.130) ve (3.132) kesirli denklemlerinde $f(t) = 0$ seçilirse $y^{(r)}(0) = c_r$, $r = 0, 1, 2, \dots, n-1$ başlangıç koşullarına sahip

$$D_C^\alpha y(t) + a D_C^\mu y(t) + b y(t) = 0$$

kesirli diferansiyel denklemin çözümü,

$$y(t) = \sum_{r=0}^{n-1} c_r \sum_{k=0}^{\infty} (-b)^k t^{\alpha k+r} E_{\alpha-\mu, \alpha k+r+1}^{k+1} (-at^{\alpha-\mu}) \\ + a \sum_{j=0}^{m-1} c_j \sum_{k=0}^{\infty} (-b)^k t^{\alpha k+\alpha-\mu+j} E_{\alpha-\mu, \alpha k+\alpha-\mu+j+1}^{k+1} (-at^{\alpha-\mu})$$

biçimindedir. Öte yandan $D_{RL}^{(\alpha-r-1)}(0) = c_r$, $r = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ve $D_{RL}^{(\mu-j-1)}(0) = b_j$, $j = 0, 1, 2, \dots, m-1$ başlangıç koşulları ile verilen

$$D_{RL}^{\alpha} y(t) + a D_{RL}^{\mu} y(t) + b y(t) = 0$$

kesirli diferansiyel denklemin çözümü ise

$$y(t) = \sum_{r=0}^{n-1} c_r \sum_{k=0}^{\infty} (-b)^k t^{\alpha k+\alpha-r-1} E_{\alpha-\mu, \alpha k+\alpha-r}^{k+1} (-at^{\alpha-\mu}) \\ + a \sum_{j=0}^{m-1} b_j \sum_{k=0}^{\infty} (-b)^k t^{\alpha k+\alpha-j-1} E_{\alpha-\mu, \alpha k+\alpha-j}^{k+1} (-at^{\alpha-\mu})$$

biçiminde bulunur.

Uyarı 3.24 Teorem 3.4 koşulları altında (3.130) ve (3.132) kesirli denklemlerinde $a = 0$ seçilirse $y^{(r)}(0) = c_r$, $r = 0, 1, 2, \dots, n-1$ başlangıç koşullarına sahip

$$D_C^{\alpha} y(t) + b y(t) = f(t) \quad (3.134)$$

kesirli diferansiyel denklemin çözümü,

$$y(t) = \int_0^t f(x) \sum_{k=0}^{\infty} (-b)^k (t-x)^{\alpha k+\alpha-1} E_{\alpha-\mu, \alpha k+\alpha}^{k+1}(0) dx \\ + \sum_{r=0}^{n-1} c_r \sum_{k=0}^{\infty} (-b)^k t^{\alpha k+r} E_{\alpha-\mu, \alpha k+r+1}^{k+1}(0)$$

biçiminde bulunur. $E_{\alpha, \beta}^{\ell}(0) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}$ ve (1.53) ile verilen Wiman fonksiyonunun tanı-

mından

$$y(t) = \int_0^t f(x)(t-x)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-b(t-x)) dx + \sum_{r=0}^{n-1} c_r t^r E_{\alpha,r+t}(-bt^\alpha)$$

elde edilir. Öte yandan $D_{RL}^{(\alpha-r-1)}(0) = c_r$, $r = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ve $D_{RL}^{(\mu-j-1)}(0) = b_j$, $j = 0, 1, 2, \dots, m-1$ başlangıç koşulları ile verilen

$$D_{RL}^\alpha y(t) + by(t) = 0 \quad (3.135)$$

kesirli diferansiyel denklemin çözümü,

$$y(t) = \int_0^t f(x) \sum_{k=0}^{\infty} (-b)^k (t-x)^{\alpha k + \alpha - 1} E_{\alpha-\mu, \alpha k + \alpha}^{k+1}(0) dx \\ + \sum_{r=0}^{n-1} c_r \sum_{k=0}^{\infty} (-b)^k t^{\alpha k + \alpha - r - 1} E_{\alpha-\mu, \alpha k + \alpha - r}^{k+1}(0)$$

biçiminde bulunur. $E_{\alpha,\beta}^\ell(0) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}$ olduğundan ve (1.53) ile verilen Wiman fonksiyonunun tanımından

$$y(t) = \int_0^t f(x)(t-x)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-b(t-x)) dx + \sum_{r=0}^{n-1} c_r t^{\alpha-r-1} E_{\alpha+r,\alpha}(-bt^\alpha)$$

elde edilir.

Örnek 3.17 Kesirli mekanik problemlerinde Newton'un ikinci hareket kanunu

$$F = ma = mD_C^\nu v(t)$$

biçiminde modellenmektedir. Burada m cismin kütesini temsil etmektedir. " F " kuvveti sabitse, hareket halindeki cisim F/m 'nin sabit bir kesirli ivmesiyle hareket eder. Şimdi bir cismin dikey hareketini, kesirli hız ile orantılı bir direnç gücüne sahip ortalama dirençli bir ortamda inceleyelim. Cisim, düzgün bir çekim alanında sıfır

başlangıç hızıyla atıldığında hareket denklemi

$$mD_C^\nu v(t) = mg - kv(t), \quad 0 < \nu < 1 \quad (3.136)$$

ile ifade edilir ve bu kesirli denklemin çözümü,

$$v(t) = \frac{gm}{k} \left[1 - E_\nu \left(-\frac{k}{m} t^\nu \right) \right]$$

biçimindedir.

Gerçekten, (3.136) kesirli diferansiyel denklemi m ile bölünürse

$$D_C^\nu v(t) + \frac{k}{m} v(t) = g, \quad 0 < \nu < 1$$

bulunur. (3.134) kesirli diferansiyel denkleminde $\alpha = \nu$, $b = k/m$, $f(t) = g$ ve $y(0) = c_0 = 0$ seçilirse,

$$v(t) = g \int_0^t (t-x)^{\nu-1} E_{\nu,\nu} \left(-\frac{k}{m} (t-x)^\nu \right) dx$$

bulunur. Burada $t-x = u$ değişken dönüşümü yapıldığında

$$v(t) = g \int_0^t u^{\nu-1} E_{\nu,\nu} \left(-\frac{k}{m} u^\nu \right) du$$

elde edilir. (1.53) ile verilen Wiman fonksiyonunun seri açılımı yardımıyla

$$\begin{aligned} v(t) &= g \int_0^t u^{\nu-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\nu n + \nu)} \left(-\frac{k}{m} u^\nu \right)^n du \\ &= g \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\nu n + \nu)} \left(-\frac{k}{m} \right)^n \int_0^t u^{\nu+\nu n-1} du \\ &= -\frac{mg}{k} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{\nu+\nu n}}{\Gamma(\nu n + \nu + 1)} \left(-\frac{k}{m} \right)^{n+1} \right] \\ &= \frac{mg}{k} \left[1 - \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{t^{\nu+\nu n}}{\Gamma(\nu n + \nu + 1)} \left(-\frac{k}{m} \right)^{n+1} \right] \end{aligned}$$

ve buradan

$$v(t) = \frac{mg}{k} \left[1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{\nu n}}{\Gamma(\nu n + 1)} \left(-\frac{k}{m} \right)^n \right]$$

bulunur. Buna göre, Mittag-Leffler fonksiyonunun (1.52) ile verilen tanımından

$$v(t) = \frac{mg}{k} \left[1 - E_{\nu} \left(-\frac{k}{m} t^{\nu} \right) \right]$$

çözümüne ulaşılır.



4 SONUÇLAR

Bu bölümde, tez boyunca elde edilen sonuçlar verilecektir. Genelleştirilmiş Bessel-Maitland fonksiyonundan parametrelerin özel seçimleri ile elde edilen yeni fonksiyonlar, bu fonksiyonların özellikleri ve integral gösterilişleri aşağıdaki sonuçlar ile verilmiştir.

Sonuç 4.1 Genelleştirilmiş Bessel-Maitland fonksiyonunun parametrelerin özel seçimi ile

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{0,1}^{0,1}(z) &= \frac{1}{1+z} \\ \mathcal{J}_{0,p}^{p,1}(z) &= e^{-z} \\ z\mathcal{J}_{1,1}^{2,1}(z^2) &= \sin z \\ z\mathcal{J}_{1,1}^{2,1}(-z^2) &= \sinh z \\ \mathcal{J}_{0,1}^{2,1}(z^2) &= \cos z \\ \mathcal{J}_{0,1}^{2,1}(-z^2) &= \cosh z \\ \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \mathcal{J}_{\nu,0}^{1,\gamma}\left(\frac{z^2}{4}\right) &= \mathcal{J}_\nu(z) \\ \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \mathcal{J}_{\nu,0}^{1,\gamma}\left(\frac{-z^2}{4}\right) &= \mathcal{I}_\nu(z)\end{aligned}$$

funksiyonları elde edildi.

Sonuç 4.2 $\mu, \nu, \gamma \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(\mu) \geq 0, \operatorname{Re}(\nu) \geq -1, \operatorname{Re}(\gamma) \geq 0$ ve $p \in (0, 1) \cup \mathbb{N}$ olmak üzere $m \in \mathbb{N}$ için

$$\mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(z) = \frac{1}{\nu} \mathcal{J}_{\nu-1,p}^{\mu,\gamma}(z) + \frac{(\gamma)_p \mu z}{\nu} \mathcal{J}_{\nu+\mu,p}^{\mu,\gamma+p}(z)$$

bağıntısı ispatlandı ve parametrelerin özel seçimi ile

$$\frac{2\nu}{z} \mathcal{J}_\nu(z) = \mathcal{J}_{\nu-1}(z) - \mathcal{J}_{\nu+1}(z)$$

Bessel fonksiyonunun bilinen özelliği elde edildi.

Sonuç 4.3 $\mu, \nu, \gamma \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(\mu) \geq 0, \operatorname{Re}(\nu) \geq -1, \operatorname{Re}(\gamma) \geq 0$ ve $p \in (0, 1) \cup \mathbb{N}$ olmak üzere $m \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{d^m}{dz^m} \left(z^\nu \mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(z^\mu) \right) = z^{\nu-m} \mathcal{J}_{\nu-m,p}^{\mu,\gamma}(z^\mu)$$

bağıntısı gerçeeklendi.

$\operatorname{Re}(\alpha) \geq 0$ için D_α -türev olarak adlandırılacak türev oparetörü

$$D_\alpha \equiv -\frac{1}{\alpha z^{\alpha-1}} \frac{d}{dz}$$

biçiminde tanımlandı ve

$$D_\alpha^2 \equiv -\frac{1}{\alpha z^{\alpha-1}} \frac{d}{dz} \left(-\frac{1}{\alpha z^{\alpha-1}} \frac{d}{dz} \right)$$

$$D_\alpha^3 \equiv -\frac{1}{\alpha z^{\alpha-1}} \frac{d}{dz} \left(-\frac{1}{\alpha z^{\alpha-1}} \frac{d}{dz} \left(-\frac{1}{\alpha z^{\alpha-1}} \frac{d}{dz} \right) \right)$$

türev oparetörleri yukarıdaki biçimde ifade edildi.

Sonuç 4.4 $\mu, \nu, \gamma \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(\mu) \geq 0, \operatorname{Re}(\nu) \geq -1, \operatorname{Re}(\gamma) \geq 0, p \in (0, 1) \cup \mathbb{N}$ ve D_μ -türev operatörü olmak üzere $m \in \mathbb{N}$ için

$$\left(\prod_{n=0}^{m-1} \frac{1}{(\gamma + pn)_p} \right) D_\mu^m \left(\mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(z^\mu) \right) = \mathcal{J}_{\nu+\mu m,p}^{\mu,\gamma+pm}(z^\mu)$$

bağıntısı ispatlandı.

Sonuç 4.5 Genelleştirilmiş Bessel-Maitland fonksiyonu için

$$\mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,k}(z) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \nu\right)} \int_0^1 t^{-1/2} (1-t)^{\nu-1/2} \mathcal{J}_{-1/2,p}^{\mu,k}(t^\mu z) dt$$

$$\mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,k}(z) = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \nu\right)} \int_0^{\pi/2} \sin^{2\nu} \theta \mathcal{J}_{-1/2,p}^{\mu,k}(\cos^2 \theta z) d\theta$$

integral gösterilişleri elde edildi ve parametrelerin özel seçimi ile

$$\mathcal{J}_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2} + \nu\right)} \int_0^1 (1-u^2)^{\nu-1/2} \cos(uz) du$$

$$\mathcal{J}_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \frac{2}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \nu\right)} \int_0^{\pi/2} \sin^{2\nu} \theta \cos(z \cos \theta) d\theta$$

Bessel fonksiyonuna ait integral gösterilişleri bulundu.

Genelleştirilmiş Bessel-Maitland fonksiyonunun özellikleri incelendikten sonra çekirdeğinde genelleştirilmiş Bessel-Maitland fonksiyonu olan ve genelleştirilmiş Bessel-Maitland integral dönüşümü olarak adlandırılan yeni bir dönüşüm tanımlandı ve özellikleri incelendi. Bu tanım ve özellikler aşağıdaki sonuçlar ile verilmiştir.

$\alpha, \mu, \nu, \gamma, s \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(\alpha) \geq 0, \operatorname{Re}(\mu) \geq 0, \operatorname{Re}(\gamma) \geq 0, \operatorname{Re}(\nu) \geq -1, \operatorname{Re}(\gamma) \geq 0, \operatorname{Re}(s) \geq 0,$
ve $p \in (0, 1) \cup \mathbb{N}$ olmak üzere, Genelleştirilmiş Bessel-Maitland integral dönüşümü ve ${}_a\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}$ ile gösterdiğimiz dönüşüm

$${}_a\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{f(t); s\} = \int_0^\infty (st)^\alpha \mathcal{J}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}(st) f(t) dt$$

biçiminde tanımlandı.

Sonuç 4.6 Genelleştirilmiş Bessel-Maitland fonksiyonunun özel durumları ve integralin özelliklerine göre genelleştirilmiş Bessel-Maitland integral dönüşümünün Laplace ve Hankel integral dönüşümleri ile arasındaki ilişki,

$${}_a\mathcal{H}_{0,p}^{p,1}\{f(t); s\} = s^\alpha \mathcal{L}\{t^\alpha f(t); s\},$$

$$\frac{\nu}{2} - \frac{1}{4} \mathcal{H}_{\nu,0}^{1,\gamma}\{f(t); s^2\} = \frac{1}{s\sqrt{2}} \mathcal{H}_\nu\left\{f\left(\frac{t^2}{4}\right); s\right\}.$$

bağıntıları ile verildi.

Sonuç 4.7 ${}_a\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}$ -dönüşümü için aşağıdaki özellikler ispatlandı:

$$\begin{aligned} {}_a\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{f(t)+g(t);s\} &= {}_a\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{f(t);s\} + {}_a\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{g(t);s\}, \\ {}_a\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{f(at);s\} &= \frac{1}{a} {}_a\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\left\{f(t);\frac{s}{a}\right\}. \end{aligned}$$

Sonuç 4.8 Genelleştirilmiş Bessel-Maitland integral dönüşümü için

$${}_a\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{f(t);s\} = \frac{1}{\nu} {}_a\mathcal{H}_{\nu-1,p}^{\mu,\gamma}\{f(t);s\} + \frac{(\gamma)_p \mu}{\nu} {}_{\alpha+1}\mathcal{H}_{\nu+\mu,p}^{\mu,\gamma+p}\{f(t);s\}$$

bağıntısı elde edildi.

Sonuç 4.9 Genelleştirilmiş Bessel-Maitland integral dönüşümü için integrallerin mutlak yakınsaklığı koşulu altında

$${}_a\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{t^\beta f(t);s\} = s^{-\beta} {}_{\alpha+\beta}\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{f(t);s\}$$

ve

$${}_a\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{t^\beta f(t);s\} = \frac{s^{-\beta}}{\nu} {}_{\alpha+\beta}\mathcal{H}_{\nu-1,p}^{\mu,\gamma}\{f(t);s\} + \frac{s^{-\beta}(\gamma)_p \mu}{\nu} {}_{\alpha+\beta+1}\mathcal{H}_{\nu+\mu,p}^{\mu,\gamma+p}\{f(t);s\}$$

bağıntıları ispatlandı.

Sonuç 4.10 Genelleştirilmiş Bessel-Maitland integral dönüşümü için integrallerin mutlak yakınsaklığı koşulu altında

$$\begin{aligned} {}_a\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{f'(t);s\} &= s\left(\frac{\nu}{\mu} - \alpha\right) {}_{\alpha-1}\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{f(t);s\} \\ &\quad - \frac{s}{\mu} {}_{\alpha-1}\mathcal{H}_{\nu-1,p}^{\mu,\gamma}\{f(t);s\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} {}_{\alpha}\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{f'(t);s\} &= s\left((\gamma)_p - \frac{(\gamma)_p \mu \alpha}{\nu}\right) {}_{\alpha}\mathcal{H}_{\nu+\mu,p}^{\mu,\gamma+p}\{f(t);s\} \\ &\quad - \left(\frac{s\alpha}{\nu}\right) {}_{\alpha-1}\mathcal{H}_{\nu-1,p}^{\mu,\gamma}\{f(t);s\} \end{aligned}$$

bağıntıları ispat edildi.

Sonuç 4.11 Genelleştirilmiş Bessel-Maitland integral dönüşümü için integrallerin mutlak yakınsaklığı koşulu altında

$$\frac{d}{ds}({}_{\alpha}\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{f(t);s\}) = \frac{\alpha}{s} {}_{\alpha}\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{f(t);s\} - \frac{(\gamma)_p}{s} {}_{\alpha+1}\mathcal{H}_{\nu+\mu,p}^{\mu,\gamma+p}\{f(t);s\}$$

ve

$$\frac{d}{ds}({}_{\alpha}\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{f(t);s\}) = \alpha {}_{\alpha-1}\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{tf(t);s\} - (\gamma)_p {}_{\alpha}\mathcal{H}_{\nu+\mu,p}^{\mu,\gamma+p}\{tf(t);s\}$$

bağıntıları ispat edildi ve daha genel hali olarak

$$\frac{d^m}{ds^m}({}_{\alpha}\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{f(t);s\}) = s^{-m} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-(m-k-1))} (-1)^k (\gamma)_{pk} {}_{\alpha+k}\mathcal{H}_{\nu+\mu k,p}^{\mu,\gamma+pk}\{f(t);s\}$$

bağıntısı ispat edildi.

Sonuç 4.12 Genelleştirilmiş Bessel-Maitland integral dönüşümü için integrallerin mutlak yakınsaklığı koşulu altında

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{ds^m}(s^{-\mu\alpha+\nu} {}_{\alpha}\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{f(t);s^{\mu}\}) &= s^{\nu-\alpha-2m} {}_{\alpha+m}\mathcal{H}_{\nu-m,p}^{\mu,\gamma}\{f(t);s^{\mu}\}, \\ s^{-\mu\alpha} \left(\prod_{n=0}^{m-1} \frac{1}{(\gamma+pn)_p} \right) D_{\mu}^m({}_{\alpha}\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{f(t);s^{\mu}\}) &= s^{-\alpha-m} {}_{\alpha+m}\mathcal{H}_{\nu+\mu m,p}^{\mu,\gamma+pm}\{f(t);s^{\mu}\} \end{aligned}$$

bağıntıları ispat edildi.

(2.1) genelleştirilmiş Bessel-Maitland integral dönüşümünde $f(t)$ fonksiyonlarının özel seçimi ile elemanter ve bazı özel fonksiyonların görüntüsü incelendi ve şu sonuçlar elde edildi:

Sonuç 4.13 $f(t) = 1$ için

$${}_a\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}\{1;s\} = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\gamma-p(\alpha+1))}{\Gamma(\gamma)\Gamma(1+v-\mu(\alpha+1))} \frac{1}{s}$$

sonucu ispatlandı.

Sonuç 4.14 $f(t) = t^\beta$ ($\text{Re } \beta > -1$) için

$${}_a\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}\{t^\beta;s\} = \frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)\Gamma(\gamma-p(\alpha+\beta+1))}{\Gamma(\gamma)\Gamma(1+v-\mu(\alpha+\beta+1))} \frac{1}{s^{\beta+1}}$$

sonucu ispatlandı.

Sonuç 4.15 $f(t) = \frac{1}{a+t}$ ($|\arg a| < \pi$) için

$$\begin{aligned} {}_a\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}\left\{\frac{1}{a+t};s\right\} &= \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)\Gamma(\gamma)} {}_2\Psi_2\left[\begin{matrix} (\gamma-p\alpha,p), (1,1) \\ (1+v-\mu,\mu), (1-\alpha,1) \end{matrix} \middle| as\right] \\ &+ \frac{\pi(as)^\alpha}{\sin(\pi\alpha)\Gamma(\gamma)} {}_1\Psi_1\left[\begin{matrix} (\gamma,p) \\ (1+v,\mu) \end{matrix} \middle| as\right] \end{aligned}$$

sonucu ispatlandı.

Sonuç 4.16 $f(t) = \frac{1}{a^2+t^2}$ ($\text{Re } a > 0$) için aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$\begin{aligned} {}_a\mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma}\left\{\frac{1}{a^2+t^2};s\right\} &= \frac{\pi a^{\alpha-1}s^\alpha}{2\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\Gamma(\gamma)} {}_2\Psi_2\left[\begin{matrix} (\gamma,2p), (1,1) \\ (1+v,2\mu), (1,2) \end{matrix} \middle| -a^2s^2\right] \\ &+ \frac{\pi a^\alpha s^{\alpha+1}}{2\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\Gamma(\gamma)} {}_2\Psi_2\left[\begin{matrix} (\gamma+p,2p), (1,1) \\ (1+v+\mu,2\mu), (2,2) \end{matrix} \middle| -a^2s^2\right] \\ &- \frac{\pi s}{\sin(\pi\alpha)\Gamma(\gamma)} {}_2\Psi_2\left[\begin{matrix} (\gamma-p\alpha+p,2p), (1,1) \\ (1+v-\mu\alpha+\mu,2\mu), (2-\alpha,2) \end{matrix} \middle| -a^2s^2\right] \end{aligned}$$

sonucu ispatlandı.

Sonuç 4.17 $f(t) = \frac{1}{(1+at)^\beta}$ ($|\arg a| < \pi$) için

$$\begin{aligned} {}_\alpha \mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \left\{ \frac{1}{(1+at)^\beta}; s \right\} \\ = \frac{-\pi}{\sin(\pi(\beta-\alpha))\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta)} \frac{s^{\alpha+1}}{a^{\alpha+1}} {}_2\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma, p), (\alpha+1, 1) \\ (1+v, \mu), (2-\beta+\alpha, 1) \end{matrix} \middle| \frac{s}{a} \right] \\ + \frac{1}{a} \frac{\pi}{\sin(\pi(\beta-\alpha))\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta)} \left(\frac{s}{a} \right)^{\beta-1} {}_2\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma-p(-\beta+\alpha+1), p), (\beta, 1) \\ (1+v-\mu(-\beta+\alpha+1), \mu), (\beta-\alpha, 1) \end{matrix} \middle| \frac{s}{a} \right] \end{aligned}$$

sonucu ispatlandı.

Sonuç 4.18 $f(t) = e^{-at}$ için

$${}_ \alpha \mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{e^{-at}; s\} = \frac{s^\alpha}{a^{\alpha+1}\Gamma(\gamma)} {}_2\Psi_1 \left[\begin{matrix} (\gamma, p), (\alpha+1, 1) \\ (1+v, \mu) \end{matrix} \middle| -\frac{s}{a} \right]$$

sonucu ispatlandı.

Sonuç 4.19 $f(t) = \cos(at)$ ve $f(t) = \sin(at)$ için

$$\begin{aligned} {}_\alpha \mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{\cos(at); s\} &= \frac{s^\alpha}{a^{\alpha+1}\Gamma(\gamma)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma+pn)\Gamma(\alpha+n+1)}{n!\Gamma(1+v+\mu n)} \left(-\frac{s}{a}\right)^n \cos\left(\frac{\pi}{2}(n+\alpha+1)\right), \\ {}_\alpha \mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{\sin(at); s\} &= \frac{s^\alpha}{a^{\alpha+1}\Gamma(\gamma)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma+pn)\Gamma(\alpha+n+1)}{n!\Gamma(1+v+\mu n)} \left(-\frac{s}{a}\right)^n \sin\left(\frac{\pi}{2}(n+\alpha+1)\right) \end{aligned}$$

sonuçları ispatlandı.

Sonuç 4.20 $f(t) = \mathcal{J}_\beta(2\sqrt{at})$ için

$$\begin{aligned} {}_\alpha \mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \left\{ \mathcal{J}_\beta(2\sqrt{at}); s \right\} &= \frac{s^\alpha}{a^{\alpha+1}} \frac{\sin(\pi(1-\beta/2+\alpha))}{\pi\Gamma(\gamma)} \\ &\times {}_3\Psi_1 \left[\begin{matrix} (\gamma, p), (\alpha+1+\beta/2, 1), (\alpha+1-\beta/2, 1) \\ (1+v, \mu) \end{matrix} \middle| \frac{s}{a} \right] \end{aligned}$$

sonucu ispatlandı.

Sonuç 4.21 $f(t) = \mathcal{Y}_\beta(2\sqrt{at})$ için

$$\begin{aligned} & {}_\alpha \mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \left\{ \mathcal{Y}_\beta(2\sqrt{at}); s \right\} \\ &= \frac{s^\alpha}{a^{\alpha+1} \Gamma(\gamma)} {}_2\Psi_4 \left[\begin{matrix} (\gamma, p), (\alpha+1+\beta/2, 1) \\ (1+v, \mu), (\alpha+1-\beta/2, 1), (\alpha+1/2-\beta/2, 1), (\alpha+3/2-\beta/2, 1) \end{matrix} \middle| \frac{s}{a} \right] \end{aligned}$$

sonucu ispatlandı.

Sonuç 4.22 $f(t) = \mathcal{K}_\beta(2\sqrt{at})$ için

$$\begin{aligned} & {}_\alpha \mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \left\{ \mathcal{K}_\beta(2\sqrt{at}); s \right\} \\ &= \frac{s^\alpha}{2a^{\alpha+1} \Gamma(\gamma)} {}_3\Psi_1 \left[\begin{matrix} (\gamma, p), (\alpha+1+\beta/2, 1), (\alpha+1-\beta/2, 1) \\ (1+v, \mu) \end{matrix} \middle| -\frac{s}{a} \right] \end{aligned}$$

sonucu ispatlandı.

Sonuç 4.23 $f(t) = H_\beta^{(j)}(at)$, $(a > 0, j = 1, 2)$ için

$$\begin{aligned} & {}_\alpha \mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \left\{ H_\beta^{(j)}(at); s \right\} \\ &= \frac{(1+(-1)^j i) s^\alpha}{a^{\alpha+1}} \frac{\sin(\pi(1-\beta/2+\alpha))}{\pi \Gamma(\gamma)} {}_3\Psi_1 \left[\begin{matrix} (\gamma, p), (\alpha+1+\beta/2, 1), (\alpha+1-\beta/2, 1) \\ (1+v, \mu) \end{matrix} \middle| \frac{s}{a} \right] \end{aligned}$$

sonucu ispatlandı.

Bu temel özellikler ve formüllerin yanı sıra, bu tezde genelleştirilmiş Bessel-Maitland integral dönüşümü ile diğer integral dönüşümler arasında aşağıdaki Parseval-Goldstein tipi teoremler elde edilmiştir.

Sonuç 4.24 İntegrallerin mutlak yakınsaklık koşulu altında,

$$\begin{aligned} & {}_\alpha \mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{ \mathcal{M}\{f(t); x\}; y \} \\ &= y^\alpha \int_0^\infty \frac{f(t)}{t(-\ln t)^{1+\alpha}} {}_2\Psi_1 \left[\begin{matrix} (\gamma, p), (\alpha+1, 1) \\ (1+v, \mu) \end{matrix} \middle| \frac{y}{\ln t} \right] dt \end{aligned}$$

ve

$$\mathcal{M}\left\{{}_\alpha \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{f(t);x\};y\right\}=\frac{\Gamma(\alpha+y)\Gamma(\gamma-p(\alpha+y))}{\Gamma(\gamma)\Gamma(1+\nu-\mu(\alpha+y))}\mathcal{M}\{f(t);1-y\}$$

bağıntıları ispat edildi.

Sonuç 4.25 İntegrallerin mutlak yakınsaklıkları koşulu altında

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty {}_\alpha \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{f(t);x\}\mathcal{M}(g(y);x)dx \\ &= \int_0^\infty \frac{g(y)}{y(-\ln y)^{1+\alpha}}\left[\int_0^\infty t^\alpha f(t){}_2\Psi_1\left[\begin{matrix}(\gamma,p),(\alpha+1,1) \\ (1+\nu,\mu) \end{matrix}\left|\frac{t}{\ln y}\right.\right]dt\right]dy \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty {}_\alpha \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{f(t);x\}\mathcal{M}(g(y);x)dx \\ &= \int_0^\infty t^\alpha f(t)\left(\int_0^\infty \frac{g(y)}{y(-\ln y)^{1+\alpha}}{}_2\Psi_1\left[\begin{matrix}(\gamma,p),(\alpha+1,1) \\ (1+\nu,\mu) \end{matrix}\left|\frac{t}{\ln y}\right.\right]dy\right)dt \end{aligned}$$

bağıntısına ulaşıldı.

Sonuç 4.26 İntegrallerin mutlak yakınsaklık koşulu altında

$$\begin{aligned} & {}_\alpha \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{\mathcal{L}\{f(t);x\};y\} \\ &= \frac{y^\alpha}{\Gamma(\gamma)}\int_0^\infty \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}}{}_2\Psi_1\left[\begin{matrix}(\gamma,p),(\alpha+1,1) \\ (1+\nu,\mu) \end{matrix}\left|\frac{-y}{t}\right.\right]dt \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}\left\{{}_\alpha \mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{f(t);x\};y\right\} \\ &= \frac{1}{y^{\alpha+1}\Gamma(\gamma)}\int_0^\infty t^\alpha f(t){}_2\Psi_1\left[\begin{matrix}(\gamma,p),(\alpha+1,1) \\ (1+\nu,\mu) \end{matrix}\left|\frac{-t}{y}\right.\right]dt, \end{aligned}$$

bağıntıları ispat edildi.

Sonuç 4.27 Mutlak yakınsaklık koşulu altında

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty {}_\alpha \mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{f(t); x\} \mathcal{L} \{g(u); x\} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty \frac{g(y)}{y^{\alpha+1}} \left(\int_0^\infty t^\alpha f(t) {}_2\Psi_1 \left[\begin{matrix} (\gamma, p), (\alpha+1, 1) \\ (1+v, \mu) \end{matrix} \middle| \frac{-t}{y} \right] dt \right) dy \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty {}_\alpha \mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{f(t); x\} \mathcal{L} \{g(u); x\} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty t^\alpha f(t) \left(\int_0^\infty \frac{g(y)}{y^{\alpha+1}} {}_2\Psi_1 \left[\begin{matrix} (\gamma, p), (\alpha+1, 1) \\ (1+v, \mu) \end{matrix} \middle| \frac{-t}{y} \right] dy \right) dt \end{aligned}$$

bağıntıları ispat edildi.

Sonuç 4.28 İntegrallerin mutlak yakınsaklığı koşulu altında,

$$\begin{aligned} & {}_\alpha \mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{ \mathcal{F}_s \{f(t); x\}; y \} \\ &= \frac{y^\alpha}{\Gamma(\gamma)} \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \int_0^\infty \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}} {}_3\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma, 2p), (\alpha+1, 2), (1, 1) \\ (1+v, 2\mu), (1, 2) \end{matrix} \middle| \frac{-y^2}{t^2} \right] dt \\ &+ \frac{y^{\alpha+1}}{\Gamma(\gamma)} \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \int_0^\infty \frac{f(t)}{t^{\alpha+2}} {}_3\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma+p, 2p), (\alpha+2, 2), (1, 1) \\ (1+v+\mu, 2\mu), (2, 2) \end{matrix} \middle| \frac{-y^2}{t^2} \right] dt \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}_s \{ {}_\alpha \mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{f(t); x\}; y \} \\ &= \frac{y^{-\alpha-1}}{\Gamma(\gamma)} \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \int_0^\infty t^\alpha f(t) {}_3\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma, 2p), (\alpha+1, 2), (1, 1) \\ (1+v, 2\mu), (1, 2) \end{matrix} \middle| \frac{-t^2}{y^2} \right] dt \\ &+ \frac{y^{-\alpha-2}}{\Gamma(\gamma)} \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \int_0^\infty t^{\alpha+1} f(t) {}_3\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma+p, 2p), (\alpha+2, 2), (1, 1) \\ (1+v+\mu, 2\mu), (2, 2) \end{matrix} \middle| \frac{-t^2}{y^2} \right] dt, \end{aligned}$$

bağıntıları ispatlandı.

Sonuç 4.29 İntegrallerin mutlak yakınsaklığı koşulu altında

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty {}_\alpha \mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{f(t); x\} \mathcal{F}_s \{g(y); x\} dx \\
&= \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty \frac{g(y)}{y^{\alpha+1}} \left(\int_0^\infty t^\alpha f(t) {}_3\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma, 2p), (\alpha+1, 2), (1, 1) \\ (1+v, 2\mu), (1, 2) \end{matrix} \middle| \frac{-t^2}{y^2} \right] dt \right) dy \\
&+ \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty \frac{g(y)}{y^{\alpha+2}} \left(\int_0^\infty t^{\alpha+1} f(t) {}_3\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma+p, 2p), (\alpha+2, 2), (1, 1) \\ (1+v+\mu, 2\mu), (2, 2) \end{matrix} \middle| \frac{-t^2}{y^2} \right] dt \right) dy
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty {}_\alpha \mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{f(t); x\} \mathcal{F}_s \{g(y); x\} dx \\
&= \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty t^\alpha f(t) \left(\int_0^\infty \frac{g(y)}{y^{\alpha+1}} {}_3\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma, 2p), (\alpha+1, 2), (1, 1) \\ (1+v, 2\mu), (1, 2) \end{matrix} \middle| \frac{-t^2}{y^2} \right] dy \right) dt \\
&+ \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty t^{\alpha+1} f(t) \left(\int_0^\infty \frac{g(y)}{y^{\alpha+2}} {}_3\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma+p, 2p), (\alpha+2, 2), (1, 1) \\ (1+v+\mu, 2\mu), (2, 2) \end{matrix} \middle| \frac{-t^2}{y^2} \right] dy \right) dt,
\end{aligned}$$

bağıntıları ispatlandı.

Sonuç 4.30 İntegrallerin mutlak yakınsaklığı koşulu altında,

$$\begin{aligned}
& {}_\alpha \mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{\mathcal{F}_c \{f(t); x\}; y\} \\
&= \frac{y^{\alpha+1}}{\Gamma(\gamma)} \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \int_0^\infty \frac{f(t)}{t^{\alpha+2}} {}_3\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma+p, 2p), (\alpha+2, 2), (1, 1) \\ (1+v+\mu, 2\mu), (2, 2) \end{matrix} \middle| \frac{-y^2}{t^2} \right] dt \\
&- \frac{y^\alpha}{\Gamma(\gamma)} \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \int_0^\infty \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}} {}_3\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma, 2p), (\alpha+1, 2), (1, 1) \\ (1+v, 2\mu), (1, 2) \end{matrix} \middle| \frac{-y^2}{t^2} \right] dt
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}_c \left\{ {}_a \mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{f(t); x\}; y \right\} \\ &= \frac{y^{-\alpha-2}}{\Gamma(\gamma)} \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \int_0^\infty t^{\alpha+1} f(t) {}_3\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma+p, 2p), (\alpha+2, 2), (1, 1) \\ (1+v+\mu, 2\mu), (2, 2) \end{matrix} \middle| \frac{-t^2}{y^2} \right] dt \\ & - \frac{y^{-\alpha-1}}{\Gamma(\gamma)} \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \int_0^\infty t^\alpha f(t) {}_3\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma, 2p), (\alpha+1, 2), (1, 1) \\ (1+v, 2\mu), (1, 2) \end{matrix} \middle| \frac{-t^2}{y^2} \right] dt \end{aligned}$$

bağıntıları ispat edildi.

Sonuç 4.31 İntegrallerin mutlak yakınsaklığı koşulu altında

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty {}_a \mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{f(t); x\} \mathcal{F}_c \{g(y); x\} dx \\ &= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty \frac{g(y)}{y^{\alpha+2}} \left(\int_0^\infty t^{\alpha+1} f(t) {}_3\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma+p, 2p), (\alpha+2, 2), (1, 1) \\ (1+v+\mu, 2\mu), (2, 2) \end{matrix} \middle| \frac{-t^2}{y^2} \right] dt \right) dy \\ & - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty \frac{g(y)}{y^{\alpha+1}} \left(\int_0^\infty t^\alpha f(t) {}_3\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma, 2p), (\alpha+1, 2), (1, 1) \\ (1+v, 2\mu), (1, 2) \end{matrix} \middle| \frac{-t^2}{y^2} \right] dt \right) dy \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty {}_a \mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{f(t); x\} \mathcal{F}_c \{g(y); x\} dx \\ &= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty t^{\alpha+1} f(t) \left(\int_0^\infty \frac{g(y)}{y^{\alpha+2}} {}_3\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma+p, 2p), (\alpha+2, 2), (1, 1) \\ (1+v+\mu, 2\mu), (2, 2) \end{matrix} \middle| \frac{-t^2}{y^2} \right] dy \right) dt \\ & - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty t^\alpha f(t) \left(\int_0^\infty \frac{g(y)}{y^{\alpha+1}} {}_3\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma, 2p), (\alpha+1, 2), (1, 1) \\ (1+v, 2\mu), (1, 2) \end{matrix} \middle| \frac{-t^2}{y^2} \right] dy \right) dt, \end{aligned}$$

bağıntıları ispat edildi.

Sonuç 4.32 İntegrallerin mutlak yakınsaklık koşulu altında

$$\begin{aligned} & {}_{\alpha} \mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{ \mathcal{S} \{ f(t); x \}; y \} \\ &= \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)\Gamma(\gamma)} \int_0^{\infty} f(t) {}_2\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma - p\alpha, p), (1, 1) \\ (1 + v - \mu\alpha, \mu), (1 - \alpha, 1) \end{matrix} \middle| ty \right] dt \\ &- \frac{\pi y^{\alpha}}{\sin(\pi\alpha)\Gamma(\gamma)} \int_0^{\infty} t^{\alpha} f(t) {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (\gamma, p) \\ (1 + v, \mu) \end{matrix} \middle| ty \right] dt \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & \mathcal{S} \{ {}_{\alpha} \mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{ f(t); x \}; y \} \\ &= \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)\Gamma(\gamma)} \int_0^{\infty} f(t) {}_2\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma - p\alpha, p), (1, 1) \\ (1 + v - \mu\alpha, \mu), (1 - \alpha, 1) \end{matrix} \middle| ty \right] dt \\ &- \frac{\pi y^{\alpha}}{\sin(\pi\alpha)\Gamma(\gamma)} \int_0^{\infty} t^{\alpha} f(t) {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (\gamma, p) \\ (1 + v, \mu) \end{matrix} \middle| ty \right] dt, \end{aligned}$$

bağıntıları ispat edildi.

Sonuç 4.33 İntegrallerin mutlak yakınsaklık koşulu altında

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} {}_{\alpha} \mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{ f(t); x \} \mathcal{S} \{ g(y); x \} dx \\ &= \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)\Gamma(\gamma)} \int_0^{\infty} g(y) \left(\int_0^{\infty} f(t) {}_2\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma - p\alpha, p), (1, 1) \\ (1 + v - \mu\alpha, \mu), (1 - \alpha, 1) \end{matrix} \middle| yt \right] dt \right) dy \\ &- \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)\Gamma(\gamma)} \int_0^{\infty} y^{\alpha} g(y) \left(\int_0^{\infty} t^{\alpha} f(t) {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (\gamma, p) \\ (1 + v, \mu) \end{matrix} \middle| yt \right] dt \right) dy \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty {}_\alpha \mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{f(t); x\} \mathcal{S} \{g(y); x\} dx \\
&= \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty f(t) \left(\int_0^\infty g(y) {}_2\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma - p\alpha, p), (1, 1) \\ (1 + v - \mu\alpha, \mu), (1 - \alpha, 1) \end{matrix} \middle| ty \right] dy \right) dt \\
&- \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty t^\alpha f(t) \left(\int_0^\infty y^\alpha g(y) {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (\gamma, p) \\ (1 + v, \mu) \end{matrix} \middle| ty \right] dy \right) dt,
\end{aligned}$$

bağıntıları ispat edildi.

Sonuç 4.34 İntegrallerin mutlak yakınsaklık koşulu altında,

$$\begin{aligned}
& {}_\alpha \mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{ \mathcal{P} \{f(t); x\}; y \} \\
&= \frac{\pi y^\alpha}{2\Gamma(\gamma) \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} \int_0^\infty t^\alpha f(t) {}_2\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma, 2p), (1, 1) \\ (1 + v, 2\mu), (1, 2) \end{matrix} \middle| -y^2 t^2 \right] dt \\
&+ \frac{\pi y^{\alpha+1}}{2\Gamma(\gamma) \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} \int_0^\infty t^{\alpha+1} f(t) {}_2\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma + p, 2p), (1, 1) \\ (1 + v + \mu, 2\mu), (2, 2) \end{matrix} \middle| -y^2 t^2 \right] dt \\
&- \frac{\pi y}{\Gamma(\gamma) \sin(\pi\alpha)} \int_0^\infty t f(t) {}_2\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma - p\alpha + p, 2p), (1, 1) \\ (1 + v - \mu\alpha + \mu, 2\mu), (2 - \alpha, 2) \end{matrix} \middle| -y^2 t^2 \right] dt
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \mathcal{P} \{ {}_\alpha \mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{f(t); x\}; y \} \\
&= \frac{\pi y^{\alpha+1}}{2\Gamma(\gamma) \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} \int_0^\infty t^{\alpha+1} f(t) {}_2\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma + p, 2p), (1, 1) \\ (1 + v + \mu, 2\mu), (2, 2) \end{matrix} \middle| -y^2 t^2 \right] dt \\
&- \frac{\pi y^\alpha}{2\Gamma(\gamma) \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} \int_0^\infty t^\alpha f(t) {}_2\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma, 2p), (1, 1) \\ (1 + v, 2\mu), (1, 2) \end{matrix} \middle| -y^2 t^2 \right] dt \\
&+ \frac{\pi}{\Gamma(\gamma) \sin(\pi\alpha)} \int_0^\infty f(t) {}_2\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma - p\alpha, 2p), (1, 1) \\ (1 + v - \mu\alpha, 2\mu), (1 - \alpha, 2) \end{matrix} \middle| -y^2 t^2 \right] dt,
\end{aligned}$$

bağıntıları ispat edildi.

Sonuç 4.35 İntegrallerin mutlak yakınsaklık koşulu altında,

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty {}_\alpha \mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{f(t); x\} \mathcal{P} \{g(y); x\} dx \\
&= \frac{\pi}{2\Gamma(\gamma) \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} \int_0^\infty y^\alpha g(y) \left(\int_0^\infty t^\alpha f(t) {}_2\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma, 2p), (1, 1) \\ (1+v, 2\mu), (1, 2) \end{matrix} \middle| -y^2 t^2 \right] dt \right) dy \\
&+ \frac{\pi}{2\Gamma(\gamma) \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} \int_0^\infty y^{\alpha+1} g(y) \left(\int_0^\infty t^{\alpha+1} f(t) {}_2\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma+p, 2p), (1, 1) \\ (1+v+\mu, 2\mu), (2, 2) \end{matrix} \middle| -y^2 t^2 \right] dt \right) dy \\
&- \frac{\pi}{\Gamma(\gamma) \sin(\pi\alpha)} \int_0^\infty y g(y) \left(\int_0^\infty t f(t) {}_2\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma-p\alpha+p, 2p), (1, 1) \\ (1+v-\mu\alpha+\mu, 2\mu), (2-\alpha, 2) \end{matrix} \middle| -y^2 t^2 \right] dt \right) dy
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty {}_\alpha \mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \{f(t); x\} \mathcal{P} \{g(y); x\} dx \\
&= \frac{\pi}{2\Gamma(\gamma) \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} \int_0^\infty t^\alpha f(t) \left(\int_0^\infty y^\alpha g(y) {}_2\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma, 2p), (1, 1) \\ (1+v, 2\mu), (1, 2) \end{matrix} \middle| -t^2 y^2 \right] dy \right) dt \\
&+ \frac{\pi}{2\Gamma(\gamma) \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} \int_0^\infty t^{\alpha+1} f(t) \left(\int_0^\infty y^{\alpha+1} g(y) {}_2\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma+p, 2p), (1, 1) \\ (1+v+\mu, 2\mu), (2, 2) \end{matrix} \middle| -t^2 y^2 \right] dy \right) dt \\
&- \frac{\pi}{\Gamma(\gamma) \sin(\pi\alpha)} \int_0^\infty t f(t) \left(\int_0^\infty y g(y) {}_2\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma-p\alpha+p, 2p), (1, 1) \\ (1+v-\mu\alpha+\mu, 2\mu), (2-\alpha, 2) \end{matrix} \middle| -t^2 y^2 \right] dy \right) dt,
\end{aligned}$$

bağıntıları ispat edildi.

Sonuç 4.36 İntegrallerin mutlak yakınsaklık koşulu altında,

$$\begin{aligned}
& {}_\alpha \mathcal{H}_{v,p}^{\mu,\gamma} \left\{ \mathcal{D}_{RL}^{-\beta} \{f(x); t\}; s \right\} \\
&= \frac{\sin(\pi\alpha) s^\alpha}{\sin(\pi(\alpha+\beta)) \Gamma(\gamma)} \int_0^\infty x^{\alpha+\beta} {}_2\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma, p), (\alpha+1, 1) \\ (1+v, \mu), (\alpha+\beta+1, 1) \end{matrix} \middle| -sx \right] f(x) dx
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & {}_{\alpha}\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{\mathcal{W}_{\beta}\{f(x);t\};s\} \\ &= \frac{s^{\alpha}}{\Gamma(\gamma)} \int_0^{\infty} x^{\alpha+\beta} {}_2\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma,p), (\alpha+1,1) \\ (1+\nu,\mu), (\alpha+\beta+1,1) \end{matrix} \middle| -sx \right] f(x) dx \end{aligned}$$

bağıntıları ispat edildi.

Parseval-Goldstein tipi teoremler kullanılarak Fox-Wright fonksiyonunu içeren integraller elde edilmiş ve parametrelerin özel seçimi ile bilinen sonuçlar bulunmuştur.

Sonuç 4.37 $-1 \leq \operatorname{Re} \beta \leq 0$ koşulu altında

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} t^{\beta-\alpha-1} {}_2\Psi_1 \left[\begin{matrix} (\gamma,p), (\alpha+1,1) \\ (1+\nu,\mu) \end{matrix} \middle| -\frac{y}{t} \right] dt \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha-\beta)\Gamma(\gamma-p(\alpha-\beta))}{\Gamma(1+\nu-\mu(\alpha-\beta))} \frac{1}{y^{\alpha-\beta}} \end{aligned}$$

eşitliği elde edildi ve burada $\beta = 0$ seçilerek

$$\int_0^{\infty} t^{-\alpha-1} {}_2\Psi_1 \left[\begin{matrix} (\gamma,p), (\alpha+1,1) \\ (1+\nu,\mu) \end{matrix} \middle| -\frac{y}{t} \right] dt = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-p\alpha)}{\Gamma(1+\nu-\mu\alpha)} \frac{1}{y^{\alpha}}$$

eşitliği ispatlandı.

Sonuç 4.38 İntegrallerin mutlak yakınsaklığı koşulu altında

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x} {}_{\alpha}\mathcal{H}_{\nu,p}^{\mu,\gamma}\{f(t);x\} dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-p\alpha)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(1+\nu-\mu\alpha)} \int_0^{\infty} f(t) dt$$

sonucuna ulaşıldı ve ek olarak $f(t) = e^{-yt}$ seçimi ile

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} {}_2\Psi_1 \left[\begin{matrix} (\gamma,p), (\alpha+1,1) \\ (1+\nu,\mu) \end{matrix} \middle| -\frac{x}{y} \right] dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-p\alpha)}{\Gamma(1+\nu-\mu\alpha)} y^{\alpha}$$

sonucuna ulaşıldı.

Sonuç 4.39 $|\arg a| < \pi$ koşulu altında

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{e^{-at}}{t^{\alpha+1}} {}_2\Psi_1 \left[\begin{matrix} (\gamma, p), (\alpha+1, 1) \\ (1+v, \mu) \end{matrix} \middle| -\frac{y}{t} \right] dt \\ &= \frac{\pi y^{-\alpha}}{\sin(\pi\alpha)} {}_2\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma-p\alpha, p), (1, 1) \\ (1+v-\mu\alpha, \mu), (1-\alpha, 1) \end{matrix} \middle| ay \right] \\ & - \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (\gamma, p) \\ (1+v, \mu) \end{matrix} \middle| ay \right] \end{aligned}$$

eşitliği ispatlandı ve parametrelerin özel seçimi ile

$$\mathcal{S}_{\alpha+1} \{e^{-at}; y\} = a^\alpha e^{ay} \Gamma(-\alpha, ay)$$

sonucu elde edildi.

Sonuç 4.40 $0 < \operatorname{Re} \beta < 1$ koşulu altında

$$\begin{aligned} & \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha+\beta+1}} {}_3\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma, 2p), (\alpha+1, 2), (1, 1) \\ (1+v, 2\mu), (1, 2) \end{matrix} \middle| -\frac{y^2}{t^2} \right] dt \\ & + y \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha+\beta+2}} {}_3\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma+p, 2p), (\alpha+2, 2), (1, 1) \\ (1+v+\mu, 2\mu), (2, 2) \end{matrix} \middle| -\frac{y^2}{t^2} \right] dt \\ & = \cos\left(\frac{\pi\beta}{2}\right) \frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\gamma-p(\alpha+\beta))}{\Gamma(1+v-\mu(\alpha+\beta))} \frac{1}{y^{\beta+\alpha}}. \end{aligned}$$

eşitliği ispatlandı ve $\alpha = 0$ için, $0 < \operatorname{Re} \beta < 1$ koşulu altında

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{1}{t^{\beta+1}} {}_2\Psi_1 \left[\begin{matrix} (\gamma, 2p), (1, 1) \\ (1+v, 2\mu) \end{matrix} \middle| -\frac{y^2}{t^2} \right] dt \\ & = \frac{\Gamma(\gamma-\beta p)}{\Gamma(1+v-\mu\beta)} \frac{\pi}{2y^\beta} \csc\left(\frac{\pi\beta}{2}\right) \end{aligned}$$

ile $\alpha = 1$ için, $0 < \operatorname{Re} \beta < 1$ koşulu altında

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{1}{t^{\beta+3}} {}_3\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma+p, 2p), (3, 2), (1, 1) \\ (1+v+\mu, 2\mu), (2, 2) \end{matrix} \middle| -\frac{y^2}{t^2} \right] dt \\ &= \cos\left(\frac{\pi\beta}{2}\right) \frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1+\beta)\Gamma(\gamma-p(1+\beta))}{\Gamma(1+v-\mu(1+\beta))} \frac{1}{y^{\beta+2}} \end{aligned}$$

sonuçları elde edildi.

Sonuç 4.41 $0 < \operatorname{Re} \beta < 1$ koşulu altında

$$\begin{aligned} & y \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \int_0^\infty t^{\alpha+\beta-1} {}_3\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma, 2p), (1+\alpha, 2), (1, 1) \\ (1+v, 2\mu), (1, 2) \end{matrix} \middle| -\frac{t^2}{y^2} \right] dt \\ &+ \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \int_0^\infty t^{\alpha+\beta} {}_3\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma+p, 2p), (2+\alpha, 2), (1, 1) \\ (1+v+\mu, 2\mu), (2, 2) \end{matrix} \middle| -\frac{t^2}{y^2} \right] dt \\ &= \cos\left(\frac{\pi\beta}{2}\right) \frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\gamma-p(\alpha+\beta))}{\Gamma(1+v-\mu(\alpha+\beta))} y^{\alpha+\beta+1} \end{aligned}$$

sonucu elde edildi.

Sonuç 4.42 İntegrelin mutlak yakınsaklığı koşulu altında

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty x^{\alpha+\beta+\delta-1} {}_2\Psi_2 \left[\begin{matrix} (\gamma, p), (\alpha+1, 1) \\ (1+v, \mu), (\alpha+\beta+1, 1) \end{matrix} \middle| -sx \right] dx \\ &= \frac{\sin(\pi(\alpha+\beta))}{\sin(\pi\alpha)} \frac{\Gamma(\delta)\Gamma(\alpha+\delta+\beta)\Gamma(\gamma-p(\alpha+\delta+\beta))}{\Gamma(\delta+\beta)\Gamma(1+v-\mu(\alpha+\delta+\beta))} \frac{1}{s^{\delta+\beta+\alpha}}. \end{aligned}$$

eşitliği ispat edildi.

Genelleştirilmiş Bessel-Maitland integral dönüşümünde parametrelerin özel seçimi ile elde edilebilen ve literatürde çok iyi bilinen Laplace dönüşümü kullanılarak bazı kesirli diferansiyel denklemler için çözümler elde edildi. Bu sonuçlar SCI-E kapsamında Application of Mathematics isimli dergide "Theorems on Some Families of Fractional Differential Equations and Their Applications" isimli makalede yayınlandı [10]. Bununla ilgili sonuçlar şu şekildedir:

Sonuç 4.43 $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0, \alpha, \mu \in \mathbb{C}, m, n \in \mathbb{N}, n \geq \operatorname{Re} \alpha > n-1 \geq m \geq \operatorname{Re} \mu > m-1 > \operatorname{Re} \mu \geq 0$ ve

$$\left| \frac{bs^{-\mu}}{s^{\alpha-\mu} + a} \right| < 1$$

olsun. $y^{(r)}(0) = c_r, \quad r = 0, 1, 2, \dots, n-1$ başlangıç koşullarına sahip

$$D_C^\alpha y(t) + aD_C^\mu y(t) + by(t) = f(t)$$

kesirli diferansiyel denklemin çözümü,

$$\begin{aligned} y(t) = & \int_0^t f(x) \sum_{k=0}^{\infty} (-b)^k (t-x)^{\alpha k + \alpha - 1} E_{\alpha-\mu, \alpha k + \alpha}^{k+1} (-a(t-x)^{\alpha-\mu}) dx \\ & + \sum_{r=0}^{n-1} c_r \sum_{k=0}^{\infty} (-b)^k t^{\alpha k + r} E_{\alpha-\mu, \alpha k + r + 1}^{k+1} (-at^{\alpha-\mu}) \\ & + a \sum_{j=0}^{m-1} c_j \sum_{k=0}^{\infty} (-b)^k t^{\alpha k + r - \mu + j} E_{\alpha-\mu, \alpha k + r - \mu + j + 1}^{k+1} (-at^{\alpha-\mu}) \end{aligned}$$

biçiminde bulundu ve bununla birlikte $D_{RL}^{(\alpha-r-1)}(0) = c_r, \quad r = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ve $D_{RL}^{(\mu-j-1)}(0) = b_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m-1$ başlangıç koşullarına sahip

$$D_{RL}^\alpha y(t) + aD_{RL}^\mu y(t) + by(t) = f(t)$$

kesirli diferansiyel denklemin çözümü,

$$\begin{aligned} y(t) = & \int_0^t f(x) \sum_{k=0}^{\infty} (-b)^k (t-x)^{\alpha k + \alpha - 1} E_{\alpha-\mu, \alpha k + \alpha}^{k+1} (-a(t-x)^{\alpha-\mu}) dx \\ & + \sum_{r=0}^{n-1} c_r \sum_{k=0}^{\infty} (-b)^k t^{\alpha k + \alpha - r - 1} E_{\alpha-\mu, \alpha k + \alpha - r}^{k+1} (-at^{\alpha-\mu}) \\ & + a \sum_{j=0}^{m-1} b_j \sum_{k=0}^{\infty} (-b)^k t^{\alpha k + r - \mu + j} E_{\alpha-\mu, \alpha k + r - \mu + j + 1}^{k+1} (-at^{\alpha-\mu}) \end{aligned}$$

biçiminde elde edildi ve $f(t)$ ve katsayıların özel seçimi ile özel durumlar elde edildi. Örneğin, $f(t) = 0$ seçilirse $y^{(r)}(0) = c_r, \quad r = 0, 1, 2, \dots, n-1$ başlangıç koşulla-

rına sahip

$$D_C^\alpha y(t) + aD_C^\mu y(t) + by(t) = 0$$

kesirli diferansiyel denklemin çözümü,

$$y(t) = \sum_{r=0}^{n-1} c_r \sum_{k=0}^{\infty} (-b)^k t^{\alpha k+r} E_{\alpha-\mu, \alpha k+r+1}^{k+1} (-at^{\alpha-\mu}) \\ + a \sum_{j=0}^{m-1} c_j \sum_{k=0}^{\infty} (-b)^k t^{\alpha k+\alpha-\mu+j} E_{\alpha-\mu, \alpha k+\alpha-\mu+j+1}^{k+1} (-at^{\alpha-\mu})$$

biçiminde, öte yandan $D_{RL}^{(\alpha-r-1)}(0) = c_r$, $r = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ve $D_{RL}^{(\mu-j-1)}(0) = b_j$, $j = 0, 1, 2, \dots, m-1$ başlangıç koşullarına sahip

$$D_{RL}^\alpha y(t) + aD_{RL}^\mu y(t) + by(t) = 0$$

kesirli diferansiyel denklemin çözümü,

$$y(t) = \sum_{r=0}^{n-1} c_r \sum_{k=0}^{\infty} (-b)^k t^{\alpha k+\alpha-r-1} E_{\alpha-\mu, \alpha k+\alpha-r}^{k+1} (-at^{\alpha-\mu}) \\ + a \sum_{j=0}^{m-1} b_j \sum_{k=0}^{\infty} (-b)^k t^{\alpha k+\alpha-j-1} E_{\alpha-\mu, \alpha k+\alpha-j}^{k+1} (-at^{\alpha-\mu})$$

biçiminde bulundu. Özel olarak $a = 0$ seçilerek $y^{(r)}(0) = c_r$, $r = 0, 1, 2, \dots, n-1$ başlangıç koşullarına sahip

$$D_C^\alpha y(t) + by(t) = f(t)$$

kesirli diferansiyel denklemin çözümü,

$$y(t) = \int_0^t f(x) (t-x)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-b(t-x)) dx + \sum_{r=0}^{n-1} c_r t^r E_{\alpha, r+1}(-bt^\alpha)$$

elde edildi. Öte yandan $D_{RL}^{(\alpha-r-1)}(0) = c_r$, $r = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ve $D_{RL}^{(\mu-j-1)}(0) = b_j$,

$j = 0, 1, 2, \dots, m-1$ başlangıç koşullarına sahip

$$D_{RL}^\alpha y(t) + by(t) = 0$$

kesirli diferansiyel denklemin çözümü,

$$y(t) = \int_0^t f(x)(t-x)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-b(t-x)) dx + \sum_{r=0}^{n-1} c_r t^{\alpha-r-1} E_{\alpha+r,\alpha}(-bt^\alpha)$$

olarak bulundu.

Sonuç 4.44 Kesirli mekanik problemlerinde Newtonun ikinci hareket kanunu

$$F = ma = mD_C^\nu v(t)$$

biçiminde modellenmektedir. Burada m cismin kütesini temsil etmektedir. " F " kuvveti sabitse, hareket halindeki cisim F/m 'nin sabit bir kesirli ivmesiyle hareket eder. Bir cismin dikey hareketi, kesirli hız ile orantılı bir direnç gücüne sahip ortalama dirençli bir ortamda incelendiğinde cisim, düzgün bir çekim alanında sıfır başlangıç hızıyla atıldığında hareket denklemi,

$$mD_C^\nu v(t) = mg - kv(t), \quad 0 < \nu < 1$$

ile ifade edilir. Bu kesirli denklemin çözümü,

$$v(t) = \frac{gm}{k} \left[1 - E_\nu \left(-\frac{k}{m} t^\nu \right) \right]$$

biçiminde elde edildi.

Kaynakça

- [1] Brown, D., Dernek, N., Yürekli, O. (2006) Identities for the exponential integral and the complementary error Transforms: Applied Mathematics and Computation, 182, 1377-1384.
- [2] Debnath, L., Bhatta, D. (2006) Integral Transforms and Their Applications, Chapman and Hall/CRC.
- [3] Dernek, N., Srivastava, H. M., Yürekli, O. (2007) Parseval-Goldstein Type Identities Involving the L4-Transform and the P4-Transform and Their Applications, Integral Transforms Special Functions 18(6), 397-408.
- [4] Dernek, N., Srivastava, H. M., Yürekli, O. (2008) Some Parseval-Goldstein type identities involving the FS,2-transform, the FC,2-transform and the P4-transform and their applications: Application Mathematics and Computation 202(1), 327-337.
- [5] Erdelyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F. Tricomi, F.G. (1981) Higher Transcendental Functions, Vol.I. McGraw-Hill, New York Toronto and London, 1954. Reprinted: Krieger, Melbourne-Florida.
- [6] Erdelyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F. Tricomi, F.G. (1981) Higher Transcendental Functions, Vol II. McGraw-Hill, New York Toronto and London, 1954. Reprinted: Krieger, Melbourne-Florida.
- [7] Erdelyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F. Tricomi, F.G. (1954) Table of Integral Transforms Vol I, Mcgraw Hill, New York.

- [8] Erdelyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F. Tricomi, F.G. (1954) Table of Integral Transforms Vol II, McGraw Hill, New York.
- [9] Oberhettinger, F. (1974) Tables of Mellin Transforms. Springer-Verlag New York.
- [10] Bozkurt, G., Albayrak, D., Dernek, N. (2019) Theorems on Some Families of Fractional Differential Equations and Their Applications: Applications of Mathematics, 64 (5), 557-579.
- [11] Mittag-Leffler, G. M. (1903), Sur la nouvelle fonction $E_\alpha(x)$: Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Paris, 137, 554-558.
- [12] Marichev, O.L. (1983) Handbook of Integral Transform and Higher Transcendental functions, Theory and algorithm tables, Ellis Horwood, Chichester [John Wiley and Sons], New York.
- [13] Mathai, A. M., Saxena, R. K., Haubold, H. J. (2010) The H -Function: Theory and Applications. New York, Dordrecht, Heidelberg and London: Springer.
- [14] Magnus, W., Oberhettinger, F. (1966) Formulas and Theorems for Special Functions of Mathematical Physics.
- [15] Oldham K.B., Spanier J., Myland, J. (2010) An atlas of functions, 2ed., Springer.
- [16] Podlubny, I. (1990) An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of their Solution and Some of their Applications, Academic Press, San Diego and London.
- [17] Prabhakar, T. R. (1971) A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel: Yokohama Mathematical Journal, 19, 7-15.
- [18] Rusev, P., Dimoski, I., Kiryanov, V. (1998) Transform Methods and Special Function", (Proc. Sec. Int. Workshop, August 1996). Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences, Sofia.

- [19] Singh, M. (2011) On Some Problems Of Polynomials and Fractional Calculus: Doctoral Thesis, Aligarh Muslim University, India.
- [20] Singh, M., Khan, M. A., Khan, A. H. (2014) On Some Properties of a Generalization of Bessel-Maitland Function, International Journal of Mathematics Trend and Tecnology, 14(1), 46-54.
- [21] Shukla, A. K., Prajapati, J. C. (2007) On a generalized Mittag-Leffler function and its properties", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 336, 797-811.
- [22] Yürekli, O. (1989) A Parseval-type theorem applied to certain integral transforms, IMA Journal of Applied Mathematics 42, 241-249.
- [23] Yürekli, O. (1992) A Theorem on the Generalized Stieltjes Transform and its Applications, Journal of Mathematical Analysis and Applications: 168, 63-71.
- [24] Watson, G. N. (1966) A treatise on the theory of Bessel functions, 2ed., Cambridge University Press.
- [25] Widder, D. V. (1938) The Stieltjes Transform: Transactions of the American Mathematical Society 43(1), 7-60.
- [26] Wiman, A. (1905) U ber den fundamental Satz in der Theorie der Funktionen $E_{\hat{l}\pm}(x)$, Acta Mathematica, 29, 191-201.
- [27] Wright, E.M. (1933) On the coefficients of power series having exponential singularities: Proceedings of the London Mathematical Society, 8, 71-79.
- [28] Wright, E. M. (1935) The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric function: Proceedings of the London Mathematical Society, 10(4), 286-293.

ÖZGEÇMİŞ

Durmuş ALBAYRAK 1983 yılında İstanbul’da doğdu. 2001 yılında Özel Yunus Emre Koleji’nden, 2006 yılında Marmara Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’nden 2010 yılında Marmara Üniversitesi Fen-Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Teorik Matematik programından mezun oldu. 2011 yılından itibaren Marmara Üniversitesi Fen-Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Teorik Matematik programında doktora eğitimini sürdürmektedir.

