

T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GEÇİCİ SEZGİSEL FUZZY METRİK UZAYLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Kübra TUNÇDEMİR
DANIŞMAN: Dr. Öğr. Üyesi Fatih KUTLU

VAN-2020

T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GEÇİCİ SEZGİSEL FUZZY METRİK UZAYLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Kübra TUNÇDEMİR

VAN-2020

KABUL VE ONAY SAYFASI

Matematik Anabilim Dalı'nda Dr. Öğr. Üyesi Fatih KUTLU danışmanlığında, Kübra Tunçdemir tarafından sunulan “GEÇİCİ SEZGİSEL FUZZY METRİK UZAYLAR” isimli bu çalışma Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili hükümleri gereğince/...../..... tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile başarılı bulunmuş ve yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan:

İmza:

Üye:

İmza:

Üye:

İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun/..... tarih ve sayılı kararı ile onaylanmıştır.

İmza

Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Kübra TUNÇDEMİR



ÖZET

GEÇİCİ SEZGİSEL FUZZY METRİK UZAYLAR

TUNÇDEMİR, Kübra
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Fatih KUTLU
Temmuz 2020, 82 Sayfa

Bu tez çalışmasında, geçici sezgisel fuzzy metrik uzaylar tanımlanmış ve bazı temel topolojik özellikleri incelenmiştir. Atanassov tarafından tanımlanan geçici sezgisel fuzzy kümelerin üye olma ve üye olmama dereceleri zamana bağlı olarak değişmektedir. Benzer bir yaklaşım ile sezgisel fuzzy metrik uzaylar kavramında tanımlanan yakın olma ve yakın olmama derecelerinin de zamana bağlı olarak değişmesi fikrini temel alan bu yeni yaklaşım ile geçici sezgisel fuzzy metrik uzaylar kavramı ortaya çıkmıştır ve bu kavramla geçici sezgisel fuzzy topoloji tanımları incelenmiştir.

Anahtar kelimeler: Fuzzy kümeler, Fuzzy metrik uzay, Sezgisel fuzzy metrik uzay, Geçici sezgisel fuzzy metrik uzay.



ABSTRACT

TEMPORAL INTUITIONISTIC FUZZY METRIC SPACES

TUNÇDEMİR, Kübra
M.Sc. Thesis, Mathematics
Supervisor: Asst. Prof. Dr. Fatih KUTLU
July 2020, 82 pages

In this thesis, temporal intuitionistic fuzzy metric spaces are defined and some basic topological properties are examined. The degree of membership and non-membership of temporal intuitionistic fuzzy sets which is defined by Atanassov varies depending on time. With this similar approach, based on the idea that the degree of closeness and non-proximity, which are defined in the concept of intuitive fuzzy metric spaces, change with time, the concept of temporary intuitive fuzzy metric spaces has emerged and the definitions of temporary intuitive fuzzy topology have been examined with this concept.

Keywords: Fuzzy sets, Fuzzy metric spaces, Intuitionistic fuzzy metric spaces, Temporal intuitionistic fuzzy spaces.

ÖN SÖZ

Çalışmalarım boyunca karşılaştığım her türlü zorlukta beni cesaretlendiren, zaman ayırarak tezimin her aşamasıyla tek tek ilgilenen, bilgi ve tecrübesinden fazlasıyla istifade ettiğim Sayın Dr. Öğr. Üyesi Fatih KUTLU hocama sonsuz teşekkür ederim.

Ayrıca desteğini hiç esirgemeyen aileme ve Yüzüncü Yıl Üniversitesinde başta Prof. Dr. Cemil TUNÇ olmak üzere Yüzüncü Yıl Üniversitesi Matematik Bölümünde görev yapan tüm hocalarıma teşekkür ederim.

2020

Kübra TUNÇDEMİR



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	ii
ABSTRACT	iv
ÖN SÖZ.....	vi
İÇİNDEKİLER.....	viii
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	x
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	xii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	5
2.1 Fuzzy Küme Teorisi	5
2.2. Sezgisel Fuzzy Kümeler.....	12
2.3. Geçici Sezgisel Fuzzy Kümeler	21
3. FUZZY VE SEZGİSEL FUZZY METRİK UZAYLAR.....	23
3.1. Fuzzy Metrik Uzaylar.....	23
3.2 Sezgisel Fuzzy Metrik Uzaylar	31
4. GEÇİCİ SEZGİSEL FUZZY METRİK UZAYLAR.....	37
4.1. Geçici Fuzzy t-norm, Geçici Fuzzy t-conorm ve Geçici Fuzzy Değilleme	37
4.2. Geçici Sezgisel Fuzzy Metrik Uzaylar.....	43
4.3. Geçici Sezgisel Fuzzy Metrik Uzay ile Üretilen Topolojik Uzay ve Temel Özellikleri	50
5. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	59
KAYNAKLAR.....	61
ÖZ GEÇMİŞ	63



ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1. “Genç” fuzzy kümesi	6
Şekil 2.2. “Sıcaklık” kavramını modelleyen fuzzy kümeler	8
Şekil 2.3. Sezgisel fuzzy kümelerin ayrık gösterimi (Atanassov, 2012).....	14
Şekil 2.4. Sezgisel fuzzy kümelerin iki boyutlu gösterimi (Szmidt, 2014).....	15
Şekil 2.5. Sezgisel fuzzy kümelerin üç boyutlu gösterimi (Szmidt, 2014)	15
Şekil 2.6. Sezgisel fuzzy kümelerin küresel gösterimi (Yang ve Chiclana, 2009)	16
Şekil 2.7. Sezgisel fuzzy kümelerin radar kümesi gösterimi (Atanassova, 2012).	17



SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
FS^X	Fuzzy kümelerin ailesi
IFS^X	Sezgisel fuzzy kümeler ailesi
$TIFS^{(X,T)}$	Geçici Sezgisel fuzzy kümeler ailesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$(X, M, *)$	Fuzzy metrik uzay
$(X, M, N, *, \diamond)$	Sezgisel fuzzy metrik uzay
$(X, T, M_t, N_t, *_t, \diamond_t)$	Geçici sezgisel fuzzy metrik uzay

1. GİRİŞ

Matematiğin en temel kavramlarından olan kümeler kavramı Bolzano, Dedekind, Peano gibi birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir. Cantor, klasik küme teorisini aksiyomatik olarak incelemiştir. Bu kurama göre, bir eleman bir kümeye ya aittir ya da değildir. Diğer bir ifade ile ele alınan kümeyi karakterize eden karakteristik fonksiyonu altında bir nesnenin görüntüsü kümeye ait ise 1, ait değilse 0 değerini alır. Böylece, üyelik kavramı kesin sınırlarla ayrılmıştır ve kısmi üyelik söz konusu değildir. Ancak zamanla bu küme teorisinin evrende meydana gelen olayları tam olarak ifade edemediği görülmüştür. Bu eksikliği fark eden Zadeh 1965 yılında ilk olarak fuzzy (bulanık) mantık ve dolayısıyla fuzzy küme kavramını tanımlayarak matematiğe farklı bir yön vermiştir. Fuzzy küme kuramında bir elemanın kümeye aitliği üyelik fonksiyonu adı verilen bir fonksiyon ile derecelendirilir. Bu fonksiyon evrensel kümenin her bir elemanına incelenen kümeye ait olma derecesini $[0,1]$ kapalı aralığında bir sayı atar. Klasik küme teorisini temel alan klasik mantıkta doğru ve yanlış olarak sadece iki durum mevcutken, fuzzy küme teorisini temel alan fuzzy mantıkta doğruluk ve yanlışlık derecelendirilmektedir. Diğer bir ifade ile klasik yaklaşımda sadece siyah ve beyaz durumları mevcutken, fuzzy yaklaşımda ise siyah ve beyaza ek olarak gri tonları da mevcuttur.

Fuzzy küme yaklaşımını bir elma örneğinde anlatmak mümkündür. Ağaçtaki elmaların yeşil olanları “0” kırmızı olanları ise “1” olarak değerlendirilmekte olsun. Bu durumda tüm elmalarımızın sadece yeşil veya kırmızı olduğunun kabullenilmesi gerekmektedir. Fakat tamamen kızarmamış ama tamamen yeşil de olmayan elmaların mevcudiyeti verilen sınıflandırmanın yetersizliğine işaret etmektedir. Doğada kesinlik olmamasından kasıt ise tamamen bunun üzerinden ilerliyor. Bu yaklaşım yeşillik derecesi veya kırmızılık derecesi olarak fuzzy küme teorisi ile daha iyi açıklanabilmektedir. Bu yaklaşıma göre tamamen kırmızı ve tamamen yeşil elmalar aşırı uçları, sınırları belirtirken aradakiler için de etiketler mümkündür. Yeşil elmanın başlangıç olmasından dolayı, biraz kızarmış bir yeşil elma %30, daha kızarmışsa %40, biraz yeşilse de %70 kızarmış elmalar kategorisindedir. Bu örnekle de görülebildiği üzere fuzzy küme teorisi ve fuzzy mantık, insan bilişsel kavrayışını ve semantiğini matematiğe aktarmakta klasik küme teorisine göre daha başarılıdır.

Fuzzy mantık, Aristoteles’ten günümüze gelişerek gelen klasik mantığa çok iyi bir alternatif olması sebebiyle bilim dünyasında da büyük ilgi görmüş ve pek çok alanda

uygulanmıştır. Bu uygulamaların ilki 1974 yılında Mamdani tarafından buhar makinesinin kontrolünde fuzzy mantık kullanmasıyla gerçekleştirilmiştir. 1980 yılında Kopenhag'da F.L. Smidth & Company isimli firma, çimento fırınının sıcaklık kontrolünde fuzzy mantık sistemini kullanmıştır. 1988'de Hitachi firması, dünyanın en rahat metrosu olarak kabul edilen Sendai metrosunun kontrolünü bir fuzzy mantık sistemi ile yapmıştır. Daha sonra birçok elektronik ürününün otomatik kontrolünde, ilaç sanayisinde, kontrol ve karar verme mekanizmalarında, genetik kodlama ve şifrelemede fuzzy mantık yoğun olarak kullanılmıştır.

Diğer taraftan fuzzy küme teorisi ile birlikte matematiğin temel kavramları da yeniden ele alınmıştır. Bu temel kavramlardan biri de metrik kavramının fuzzy mantık çerçevesinde yeniden değerlendirilmesidir. Bu çalışmamızda birçok farklı biçimde tanımlanan fuzzy metrikler ve daha genel manası ile fuzzy uzaklık kavramları arasında 1975 yılında Kramosil ve Michalek tarafından tanımlanan fuzzy metrik uzay incelenecektir. Bu fuzzy metrik uzay, George ve Veeramani (1994) tarafından modifiye edilerek, fuzzy metrik uzaylarda Hausdorffluk, sınırlılık, kompaktlık, yakınsama ve tamlık gibi analiz ve topolojinin önemli kavramlarına uyumlu hale getirilmiştir. Bu araştırmacılar tarafından tanımlanan fuzzy metrik uzayda ele alınan iki nokta arasındaki uzaklık (diğer bir manası ile yakınlık) belirli şartları sağlayan bir fuzzy küme ile derecelendirilmektedir. Dikkate değer önemli bir husus bu manada tanımlanan fuzzy metrik uzayda ele alınan kümeler fuzzy küme olmamasına rağmen metrik kavramının fuzzy mantık ile alınmasıdır. Fuzzy metrik uzay başta toplanabilme teorisi olmak üzere birçok alanda uygulama alanı bulmuştur. Fuzzy metrik uzaylardaki önemli bazı çalışmalar Grabiec (1988), Afrouzi (2011), Lopez ve Romaguera (2004), George ve Veermani (1997), Gregori ve Romaguera (2000) olarak verilebilir.

Fuzzy küme teorisi birçok farklı yaklaşımla genişletilmiştir. Bunlardan biri de Atanassov (1983) tarafından tanımlanan sezgisel fuzzy küme kavramıdır. Bu kavramda, fuzzy küme mantığında bulunan bir elemanın belli bir kümeye üyelik derecesi ile beraber üye olmama derecesini de tanımlanmakta, üyelik ve üye olmama derecelerinin toplamlarının 1'den küçük veya eşit olma şartı getirilmektedir. Bu iki derecelendirmeye ek olarak, üye olma ve üye olmama değerlerinin toplamının birden çıkarılması ile belirsizlik derecesi adı verilen üçüncü bir değer daha elde edilir. Bu üç değer ile beraber sezgisel fuzzy küme teorisinin bipolar durumların (olumlu-olumsuz, siyah-beyaz, vb.) ve kesin olmayan bilgilerin ele alınmasında oldukça etkili bir yöntem olduğu literatürde bu teori ile alakalı uygulama çalışmalarının gün geçtikçe artması ile ispatlanmaktadır.

Bir diğerk genişletme olarak Atanassov (1991) tarafından tanımlanan geçici sezgisel fuzzy küme kavramı ve geçici sezgisel fuzzy metrik uzay tanımları incelenecektir. Bilindiğı üzere gerçek dünyaya ait kavramlar genellikle zamana bağılıdır. Yani bu kavramların incelenen özellikleri zamana bağılı olarak değışiklik gösterebileceğinden kavramların matematiksel olarak daha iyi ele alınması için üyelik ve üye olmama dereceleri tanımlandığı uzayın elemanına ve verilen zaman kümesindeki bir zaman anına bağılı olan yeni sezgisel fuzzy küme tanımının kurulması ihtiyacı doğmuştur. Atanassov bu eksikliği gidermek için 1991 yılında geçici sezgisel fuzzy küme adı verilen yeni bir küme teorisi tanımlamıştır.

Atanassov'un (1991) tanımladığı geçici sezgisel fuzzy kümelerin üye olma ve üye olmama derecelerinin zamana ve konuma bağılı olarak değışmesi fikrinin hava durumu, ekonomi, görüntü ve video işleme gibi dinamik alanlardaki uygulamalarda kullanılması bakımından zengin bir çalışma alanı doğurduğu aşikârdır. Diğerk taraftan uzaklık bahsi geçen konular üzerinde birçok farklı şekilde kullanılmış efektif sonuçlar elde edilmiştir. Bu fikir ile elde edilecek geçici sezgisel ölçülerin literatürde hala tanımlanmamış olması büyük bir eksiklik oluşturmaktadır. Dinamik alanlarda kullanılacak olan ölçülerinde dinamik hale getirilmesi yani zamana bağılı olarak değışmesi fikrinin doğal bir sonucudur.

Uzaklığını ölçtüğümüz noktalar sabit olmayabilir. Yani konumları zamanla değışir bu ise aradaki uzaklığı ölçerken kullandığımız metrik kavramının noktalar ile beraber zaman kavramına da bağılı olması gerektiğini vurgulamaktadır.

Diğerk bir hususta ele aldığımız metrik formülünün zamanla değışmesini isteyebiliriz. Bunun için tanımlayacağımız geçici sezgisel fuzzy metrik uzay kavramı daha genel ve uygulanabilir olacaktır.

Çalışmamızın ilk kısmında fuzzy kümeler, sezgisel fuzzy kümeler ve geçici sezgisel fuzzy kümelere dair temel bilgiler verilecek ikinci kısmında yukarıda belirtilen çalışmalar ışığında fuzzy ve sezgisel fuzzy metrik uzaylar ve fuzzy metrik tarafından üretilen topolojinin özellikleri verilecek ve son kısmında ise geçici fuzzy kümelere dair temel kavramlar ve geçici sezgisel fuzzy kümeler de topolojik uzay kavramı incelenecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu kısımda tez çalışmasında kullanılacak temel kavramlar tanıtılacaktır. Bu bağlamda fuzzy, sezgisel fuzzy ve geçici sezgisel fuzzy küme kavramları incelenecek ve temel özelliklerinden bahsedilecektir.

2.1 Fuzzy Küme Teorisi

Tanım 2.1.1: X boştan farklı bir küme olmak üzere X üzerinde A fuzzy kümesi $\mu_A : X \rightarrow I = [0,1]$ olmak üzere $A = \{(x, \mu_A(x)); x \in X\}$ şeklinde tanımlanır. Burada $\forall x \in X$ için $\mu_A(x)$ değerine x 'in A fuzzy kümesine ait olma (üyelik) derecesi ve μ_A fonksiyonuna da üyelik fonksiyonu denir. Tanımdan anlaşılacağı üzere her A klasik (crisp) kümesi

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

ile tanımlı karakteristik fonksiyonu ile bir fuzzy küme olarak ifade edilebilir. X kümesi üzerinde tanımlı tüm fuzzy kümelerin ailesini FS^X ile gösterelim (Zadeh, 1965).

Örnek 2.1.1: A ve B crisp kümeler olmak üzere bu kümeler üzerinde tanımlı temel küme işlemleri bu kümelerin karakteristik fonksiyonu ile aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

1. $A \cup B = \{x; x \in A \vee x \in B\}$ ile tanımlı birleşme işlemi için karakteristik fonksiyon

$$\chi_{A \cup B}(x) = \max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} = \begin{cases} 1 & x \in A \cup B \\ 0 & x \notin A \cup B \end{cases} \text{ ile tanımlıdır.}$$

2. $A \cap B = \{x; x \in A \wedge x \in B\}$ ile tanımlı kesişme işlemi için karakteristik fonksiyon

$$\chi_{A \cap B}(x) = \min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} = \begin{cases} 1 & x \in A \cap B \\ 0 & x \notin A \cap B \end{cases} \text{ ile tanımlıdır.}$$

3. $\bar{A} = \{x \in X; x \notin A\}$ ile tanımlı tümlleme işlemi için karakteristik fonksiyon

$$\chi_{\bar{A}}(x) = 1 - \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in \bar{A} \\ 0 & x \notin \bar{A} \end{cases} \text{ ile tanımlıdır (Zadeh, 1965).}$$

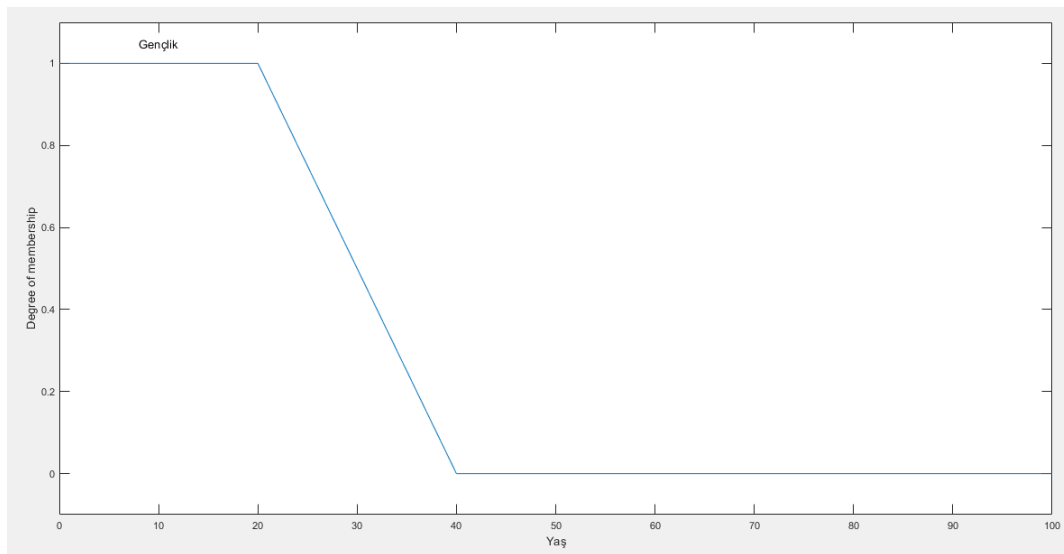
Tanım 2.1.2: X boştan farklı bir küme olmak üzere X üzerinde $\tilde{1} = \{(x, \mu_1(x)); x \in X\}$ ve $\tilde{0} = \{(x, \mu_0(x)); x \in X\}$ fuzzy kümeleri her $x \in X$ için $\mu_1(x) = 1$ ve $\mu_0(x) = 0$ ile tanımlıdır (Zimmermann, 1996).

Örnek 2.1.2: “genç bir insan olmak” manasında “genç” kelimesini ele alalım. Bu dilsel ifade fuzzy küme kavramı kullanılarak aşağıdaki şekilde matematiksel olarak modellenabilir. $genç = \{(x, \mu_{genç}(x)); x \in [0, 150]\}$ fuzzy kümesinin üyelik fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$\mu_{genç}(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 20, \\ \frac{40-x}{20}, & 20 \leq x < 40, \\ 0, & \text{diğer durumlar.} \end{cases}$$

Bu fuzzy kümeye göre bazı yaşların gençlik dereceleri aşağıda verilmiştir.

$$\mu_{genç}(60) = 0, \mu_{genç}(30) = \frac{40-30}{20} = \frac{1}{2} = 0.5, \mu_{genç}(25) = \frac{40-25}{20} = \frac{15}{20} = 0.75$$



Şekil 2.1. “Genç” fuzzy kümesi.

Yukarıdaki örnekte öznel olarak modellenen genç bir insan olma dilsel değişkeni farklı araştırmacılar tarafından daha farklı olarak modellenebilir. Bu öznelilik ilk bakışta fuzzy küme teorisinin bir dezavantajı olarak görülse de uygulamalarda daha adaptif bir yol sağladığından fuzzy küme kavramını bu türden uygulamalarda kullanılması için gayet etkili bir yol kılmaktadır. (Bede, 2013)

Örnek 2.1.3: Fuzzy kümeler ile sübjektif yargıları modelleyebiliriz. $x = [40, 100]$ ($^{\circ}F$) bir odanın sıcaklık aralığı olsun. A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 sırasıyla çok soğuk, soğuk, normal, sıcak, çok sıcak algılarını modellemek için bir uzman tarafından aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$\mu_{A_1}(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 40 \leq x < 50 \\ \frac{60-x}{10} & , \quad 50 \leq x < 60 \\ 0 & , \quad x \geq 60 \end{cases}$$

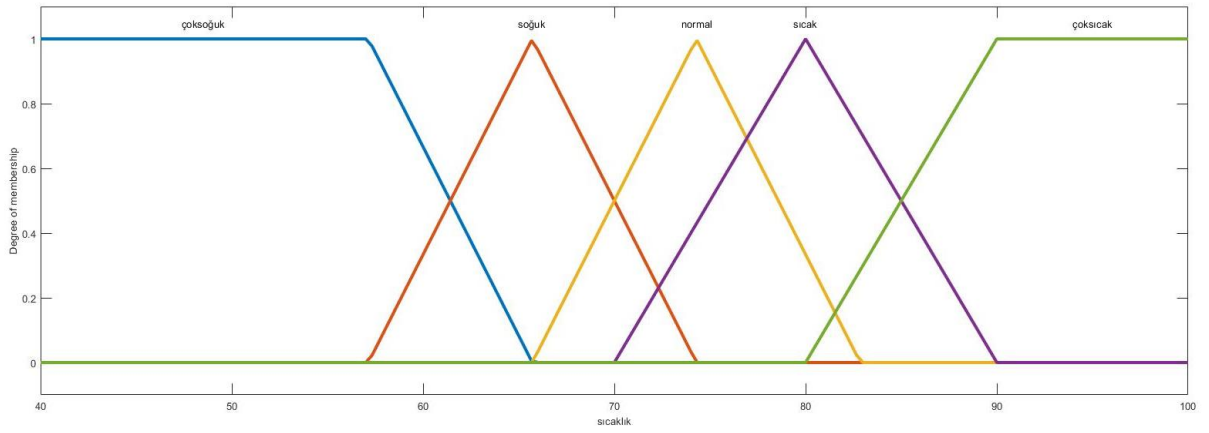
$$\mu_{A_2}(x) = \begin{cases} 0 & , \quad 40 \leq x < 50 \\ \frac{x-50}{10} & , \quad 50 \leq x < 60 \\ \frac{70-x}{10} & , \quad 60 \leq x < 70 \\ 0 & , \quad x \geq 70 \end{cases}$$

$$\mu_{A_3}(x) = \begin{cases} 0 & , \quad 40 \leq x < 60 \\ \frac{x-60}{10} & , \quad 60 \leq x < 70 \\ \frac{80-x}{10} & , \quad 70 \leq x < 80 \\ 0 & , \quad x \geq 80 \end{cases}$$

$$\mu_{A_4}(x) = \begin{cases} 0 & , \quad 40 \leq x < 70 \\ \frac{x-70}{10} & , \quad 70 \leq x < 80 \\ \frac{90-x}{10} & , \quad 80 \leq x < 90 \\ 0 & , \quad 90 \leq x \leq 100 \end{cases}$$

$$\mu_{A_5}(x) = \begin{cases} 0 & , \quad 40 \leq x < 80 \\ \frac{x-80}{10} & , \quad 80 \leq x < 90 \\ 1 & , \quad 90 \leq x \leq 100 \end{cases}$$

Bu modellemeye göre 65 °F (yaklaşık 18,3°C) sıcaklığının üyelik dereceleri $\mu_{A_1}(65)=0$, $\mu_{A_2}(65)=\frac{1}{2}$, $\mu_{A_3}(65)=\frac{1}{2}$, $\mu_{A_4}(65)=0$, $\mu_{A_5}(65)=0$ şeklinde elde edilir. (Bede, 2013).



Şekil 1.2. “Sıcaklık” kavramını modelleyen fuzzy kümeler.

Fuzzy mantık ve fuzzy kümelerde temel bağlaçlar; birleşim, kesişim, kapsama ve tümlemedir. Fuzzy küme teorisinde bu işlemler üyelik derecesi üzerinden tanımlanır.

Tanım 2.1.3: X boştan farklı bir küme olmak üzere X üzerinde A ve B fuzzy kümeleri $A = \{(x, \mu_A(x)); x \in X\}$ ve $B = \{(x, \mu_B(x)); x \in X\}$ ile verilmiş olsun. Bu kabuller üzerine fuzzy kümeler uzayında temel küme işlemleri aşağıdaki şekilde tanımlanır.

1. $A = B \Leftrightarrow$ her $x \in X$ için $\mu_A(x) = \mu_B(x)$,
2. $A \subseteq B \Leftrightarrow$ her $x \in X$ için $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$,
3. $\bar{A} = \{(x, 1 - \mu_A(x)); x \in X\}$, $\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$

$$4. A \cup B = \{(x, \mu_{A \cup B}(x)); x \in X\} = \{(x, \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}); x \in X\}$$

$$5. A \cap B = \{(x, \mu_{A \cap B}(x)); x \in X\} = \{(x, \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}); x \in X\}$$

Bu tanımlamalar ile birlikte fuzzy kümeler uzayında aşağıdaki temel küme özelliklerinin sağlandığı aşikârdır:

- a. $\bar{\bar{A}} = A$
- b. $A \cup B = B \cup A$,
- c. $A \cap B = B \cap A$.
- d. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,
- e. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
- f. $A \cup A = A$,
- g. $A \cap A = A$.
- h. $A \cup (A \cap B) = A$,
- i. $A \cap (A \cup B) = A$,
- j. $A \cup \tilde{1} = \tilde{1}$,
- k. $A \cap \tilde{1} = A$,
- l. $A \cup \tilde{0} = A$,
- m. $A \cap \tilde{0} = \tilde{0}$.
- n. $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$,
- o. $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

(Zadeh, 1965).

Klasik mantıktan farklı olarak fuzzy mantıkta üçüncü halin imkansızlığı (contradiction and excluded middle) ilkesi geçersizdir.

Önerme 2.1.1: A, X 'te crisp olmayan bir fuzzy küme olsun. $\exists x \in X$ için $0 < \mu_A(x) < 1$

ise $A \wedge \bar{A} \neq \tilde{0}$ ve $A \vee \bar{A} \neq \tilde{1}$ (Zadeh, 1965).

Tanım 2.1.4: $N:[0,1] \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa bir değillemeye adını alır.

1. $N(0)=1$, $N(1)=0$
2. N artmayan fonksiyon. Yani $(x \leq y \Rightarrow N(x) \geq N(y))$

Bir değillemeye monoton azalan (yani, $x < y \Rightarrow N(x) > N(y)$) ve sürekli ise tam (strict, mutlak) değillemeye adını alır. Bir tam değillemeye involüsyon $(N(N(x))=x)$ özelliğini sağlıyorsa güçlü değillemeye adını alır (Bede, 2013).

Tanım 2.1.5: $A \in FS^X$ olmak üzere A fuzzy kümesinin değillemesi $N(A) = \{(x, \mu_{N(A)}(x)) : x \in X\} = \{(x, N(\mu_A(x))) : x \in X\}$ ile tanımlıdır (Bede, 2013).

Örnek 2.1.4: $N(x)=1-x$ standart değillemesi güçlü bir değillemedir (Bede, 2013).

Tanım 2.1.6: $a, b, c \in I$ olmak üzere bir t -norm aşağıdaki şartları sağlayan $T:I \times I \rightarrow I$ dönüşümüdür:

1. Birim Eleman: 1, dönüşümün birim elemanıdır. Yani $T(1, a) = a$,
2. Monotonluk: $a \leq c$ ve $b \leq d \Rightarrow T(a, b) \leq T(c, d)$,
3. Değişme Özelliği: $T(a, b) = T(b, a)$,
4. Birleşme Özelliği $T(a, T(b, c)) = T(T(a, b), c)$. (Szmidt 2013).

Bu özelliklerden anlaşılacağı üzere t -norm monoton azalmayan dönüşümdür ve $T(a, 0)=0$ ifadesini sağlar. Çok kullanılan t -normlara örnek olarak: minimum, çarpma ve $T(a, b) = \max(0, a+b-1)$ ile tanımlı Lukasiewicz t -normları verilebilir.

Tanım 2.1.7: $a, b, c \in I$ olmak üzere bir t -conorm (diğer bir ifade ile s -norm) aşağıdaki şartları sağlayan $S:I \times I \rightarrow I$ dönüşümüdür (Szmidt 2013):

1. Birim Eleman: 0, dönüşümün birim elemanıdır. Yani $S(0, a) = a$,
2. Monotonluk: $a \leq c$ ve $b \leq d \Rightarrow S(a, b) \leq S(c, d)$
3. Değişme Özelliği: $S(a, b) = S(b, a)$,

4. Birleşme Özelliği $S(a, S(b, c)) = S(S(a, b), c)$.

Örnek 2.1.5: Literatürde sıkça kullanılan t -conormlara örnek olarak: maximum, $S(a, b) = a + b - ab$ ile tanımlı olasılıksal toplam ve $S(a, b) = \min(1, a + b)$ ile tanımlı Lukasiewicz t -conormları verilebilir. Bu tanımlamalar ile birlikte t -norm ve t -conorm tanımlarının $S(a, b) = 1 - T(1 - a, 1 - b)$ bağıntısı ile dual kavramlar olduğu kolayca görülebilir (Szmidt 2013).

Önerme 2.1.2: Herhangi bir t -norm T ve s -norm S ve $\forall x, y \in [0, 1]$ için $T(x, y) \leq x \wedge y$ ve $S(x, y) \geq x \vee y$ dir (Szmidt 2013).

Tanım 2.1.8: T , t -norm, S , s -norm ve N güçlü değilleme olmak üzere (S, T, N) üçlüsüne eğer $\forall x, y \in [0, 1]$ için $S(x, y) = N(T(N(x), N(y)))$ şartını sağlıyorsa De Morgan Üçlüsü denir (Szmidt 2013).

Hatırlatma 2.1.1: (S, T, N) bir De Morgan Üçlüsü ise $T(x, y) = N(S(N(x), N(y)))$ dir (Szmidt 2013).

Örnek 2.1.6: Minimum ve maksimum t -norm ve t -conormu $(x \wedge y = \min\{x, y\}; x \vee y = \max\{x, y\})$ standart değilleme $N(x) = 1 - x$ ile birlikte bir De Morgan Üçlüsü oluşturur (Szmidt 2013).

Örnek 2.1.7: $\forall x, y \in [0, 1]$ için $T_G(x, y) = x \cdot y$ ile tanımlı çarpım t -normu ve $S_G(x, y) = x + y - xy$ ile tanımlı t -conormu ve $N(x) = 1 - x$ standart değilleme ile birlikte De Morgan Üçlüsü oluşturur (Szmidt 2013).

Örnek 2.1.8: $\forall x, y \in [0, 1]$ için aşağıdaki şekilde tanımlı nilpotent minimum ve nilpotent maksimum

$$xT_o y = \begin{cases} x \wedge y, & x + y > 1 \\ 0, & \text{diğer durumlar,} \end{cases}$$

$$xS_o y = \begin{cases} x \vee y, & x + y < 1 \\ 1, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

t – normu ve t – conormu, standart değilleme ile birlikte De Morgan Üçlüsü oluşturur (Szmidt 2013).

Örnek 2.1.9: $\forall x, y \in [0, 1]$ için aşağıdaki şekilde tanımlı sert (drastic) çarpım ve toplama

$$T_D(x, y) = xT_D y = \begin{cases} x \wedge y, & x \vee y = 1 \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

$$S_D(x, y) = xS_D y = \begin{cases} x \vee y, & x \wedge y = 0 \\ 1, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

t – normu ve t – conormu, standart değilleme ile birlikte De Morgan Üçlüsü oluşturur (Szmidt 2013).

2.2. Sezgisel Fuzzy Kümeler

Tanım 2.2.1: X boştan farklı bir küme olmak üzere X üzerinde bir sezgisel fuzzy küme (IFS), $\forall x \in X$ için $0 \leq \mu_A(x) + \eta_A(x) \leq 1$ şartını sağlayan $\mu_A: X \rightarrow I, \eta_A: X \rightarrow I$ fonksiyonlar olmak üzere $A = \{(x, \mu_A(x), \eta_A(x)): x \in X\}$ kümesidir. Her $x \in X$ için $\mu_A(x)$ ve $\eta_A(x)$ sayıları sırasıyla x ’in A sezgisel fuzzy kümesine üyelik derecesi ve üye olmama derecesi olarak adlandırılır. $B = \{(x, \mu_B(x)): x \in X\}$ fuzzy kümesi için $\eta_B(x) = 1 - \mu_B(x)$ olarak tanımlanarak bir sezgisel fuzzy küme elde edilebilir (Atanassov, 1983).

Her bir $x \in X$ için A sezgisel fuzzy kümesinde x ’in sezgisel fuzzy indeksi $\pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - \eta_A(x)$ ile tanımlanır. $\pi_A(x)$ belirsizlik (indeterminacy) veya

tereddüt (hesitation) derecesi olarak adlandırılır. X kümesi üzerinde tanımlı tüm sezgisel fuzzy kümelerin ailesini IFS^X ile gösterelim (Atanassov, 1983).

Şimdi sayılar teorisinde tanımlanan ve IFS kavramını daha iyi açıklayacak bir örnek verelim.

Örnek 2.2.1: n , 2'den büyük veya eşit bir doğal sayı ve $x \in \mathbb{N}$ olmak üzere $F(n) = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x < n, (x, n) = 1\}$ olsun. Burada (x, n) ile n ile x 'in ortak bölenlerinin en büyüğü gösterilmektedir. $card(F(n)) = \varphi_n(n)$ yani n 'nin kendinden küçük aralarında asal olduğu x 'lerin sayısı diyelim. Benzer şekilde $\varphi_\mu(n) = card(\{1 \leq x < n, x | n\})$ n 'yi tam bölen x 'lerin sayısı olarak tanımlayalım. Bu

iki ifadeden yararlanarak $n \geq 2$ için $V(n) = \left(\frac{\varphi_\mu(n)}{n}, \frac{\varphi_n(n)}{n} \right)$ fonksiyonunu

tanımlayabiliriz. Açıkça $0 \leq \frac{\varphi_\mu(n)}{n} + \frac{\varphi_n(n)}{n} \leq 1$ eşitsizliğinin sağlandığı görülür. Örnek

olarak $n = 3$ için alalım. $F(3) = \{1 \leq x < 3, (x, 3) = 1\} \Rightarrow \varphi_n(3) = 2$ (3 ile aralarında asal sayıların sayısı) ve $\varphi_\mu(n) = card(\{1 \leq x < 3, x | 3\}) \Rightarrow \varphi_\mu(3) = 1$ (kendisi hariç 3'ün tam

bölen sayıların sayısı) için $V(n) = \left(\frac{\varphi_\mu(n)}{n}, \frac{\varphi_n(n)}{n} \right) \Rightarrow V(3) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$ olduğu görülür.

Benzer şekilde $V(12) = \left(\frac{5}{12}, \frac{4}{12} \right)$, $V(15) = \left(\frac{3}{15}, \frac{8}{15} \right)$ bulunur. V fonksiyonu her bir n

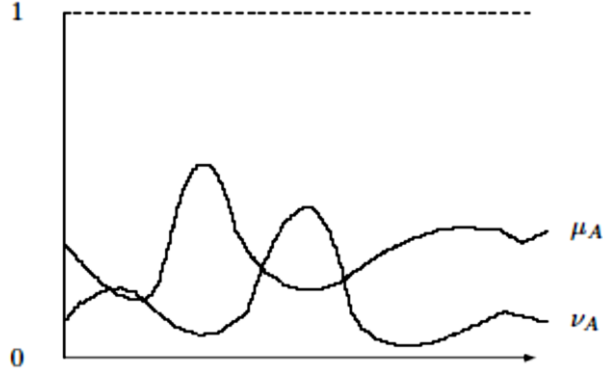
doğal sayısı için bölünebilme ve bölünememe derecelerini tanımlar. Böylece V

fonksiyonundan yararlanarak $\aleph^* = \left\{ \left(n, \frac{\varphi_\mu(n)}{n}, \frac{\varphi_n(n)}{n} \right); n \in \mathbb{N} \right\}$ ile bir IFS

tanımlayabiliriz (Atanassov, 2012).

Bilindiği üzere fuzzy kümelerin tek bir geometrik gösterimi vardır. Buna karşın sezgisel fuzzy kümeler birçok şekilde geometrik olarak gösterilebilir. Bunları kronolojik olarak sıralarsak ilk olarak, Atanassov tarafından verilen ve en sık kullanılan aşağıdaki gösterim verilebilir. Bu gösterim iki boyutludur ve ayrıca üyelik ve üye olmama

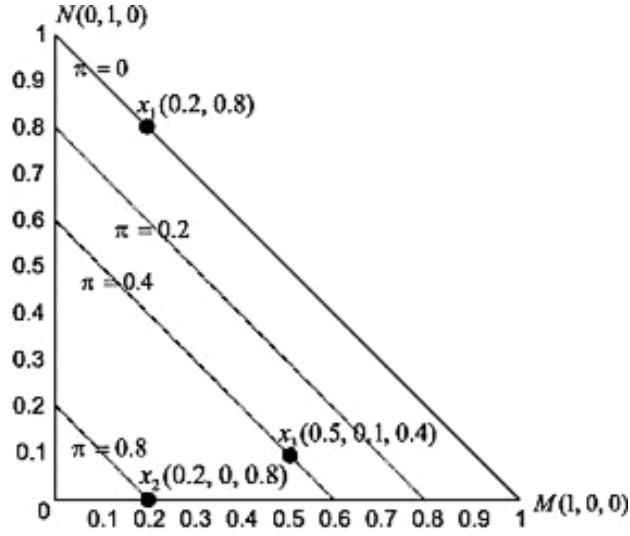
derecelerinin ayrı ayrı olarak çizilir. $A = \{(x, \mu_A(x), \eta_A(x)) : x \in X\}$ bir IFS olmak üzere:



Şekil 2.3. Sezgisel fuzzy kümelerin ayrık gösterimi (Atanassov, 2012).

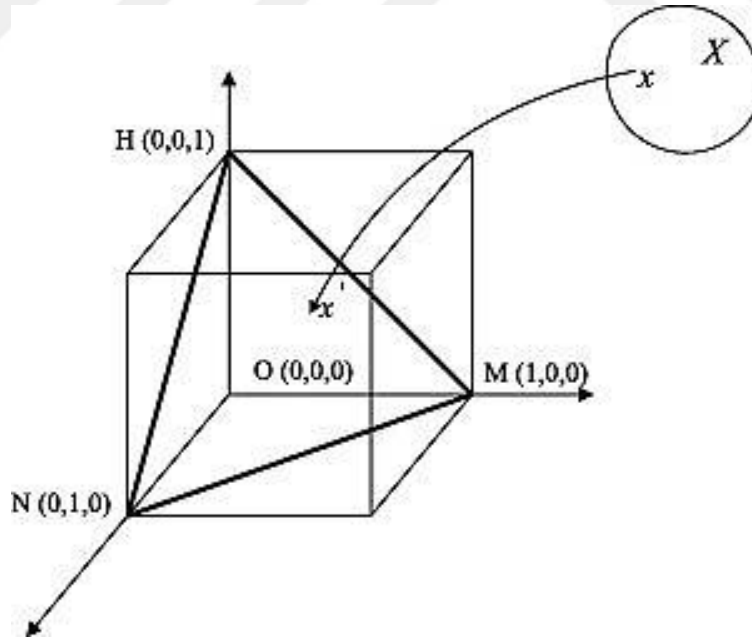
Atanassov, sezgisel fuzzy kümelerin geometrik için bir diğer gösterim şeklini aşağıdaki örnekte görülebileceği üzere bir ikizkenar üçgen üzerinde kurmuştur.

Örnek 2.2.2: $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ kümesi üzerinde tanımlanmış $A = \{(x_1, 0.2, 0.8), (x_2, 0.2, 0), (x_3, 0.5, 0.1)\}$ sezgisel fuzzy kümesini aşağıdaki şekilde gösterebiliriz. Aşağıdaki grafikte her bir IFS'ye ait üçüncü birleşenler belirsizlik derecesini göstermektedir. Burada MN doğrusuna paralel olan doğru üzerinde bulunan her bir IFS aynı belirsizlik derecesine sahiptir. Doğrular, orijine yaklaştıkça belirsizlik derecesi artmakta ve MN doğrusuna yaklaştıkça belirsizlik azalmaktadır (Atanassov, 2012).



Şekil 2.4. Sezgisel fuzzy kümelerin iki boyutlu gösterimi (Atanassov, 2012).

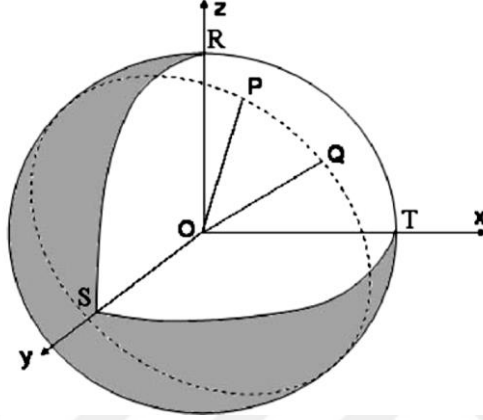
Szmidt ve Kacprzyk 2000 çalışmasında üye olma ve üye olmama dereceleri ile birlikte belirsizlik derecesinin de eklenmesi ile IFS'lerin aşağıdaki şekilde birim küpün içindeki MNH üçgeni içerisinde gösterilebileceğini belirtmişlerdir. Burada MNH üçgeninin yüzeyinde bulunan noktaların koordinatları o noktanın IFS'ye üye olma, üye olmama ve belirsizlik derecelerini gösterir (Szmidt, 2014).



Şekil 2.5. Sezgisel fuzzy kümelerin üç boyutlu gösterimi (Szmidt, 2014).

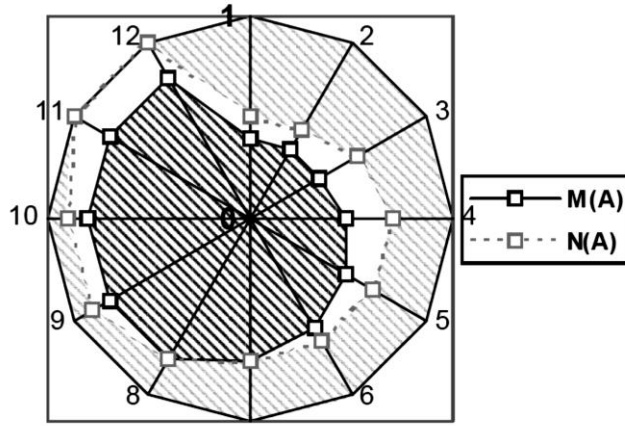
Sezgisel fuzzy kümeler için bir diğer gösterim şekli Yang ve Chiclana (2009) tarafından tanımlanan küresel gösterimdir. Bu gösterimde bir A sezgisel fuzzy kümesi

$\mu_A(a) + \eta_A(a) + \pi_A(a) = 1$ olmasından yararlanılarak ve küre denklemi $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ifadesinde $\mu_A(a) = x^2, \eta_A(x) = y^2$ ve $\pi_A(x) = z^2$ seçilerek elde edilen koordinatların bir küre üzerinde ifade edilmesi ile gösterilir. Yang ve Chiclana bu gösterimden yararlanarak sezgisel fuzzy kümeler üzerinde bazı uzaklık tanımları vermiştir (Yang ve Chiclana, 2009).



Şekil 2.6. Sezgisel fuzzy kümelerin küresel gösterimi (Yang ve Chiclana, 2009).

Sezgisel fuzzy kümeler için diğer bir gösterim yöntemi de Atanassova (2012) tarafından verilmiştir. Aşağıdaki şekilde görülebileceği üzere en içteki kısım bir sezgisel fuzzy kümenin üyelik derecesini en dıştaki kısımda üye olmama derecesini göstermektedir. Arada kalan kısım ise belirsizlik derecesini belirtmektedir. Bu gösterim zaman serileri ile ifade edilen veriler, çoklu girişli (multivaried) veriler veya herhangi bir döngüsel özellik içeren veriler için uygundur (Atanassova, 2012).



Şekil 2.7. Sezgisel fuzzy kümelerin radar kümesi gösterimi (Atanassova, 2012).

Atanassov 1983 yılında sezgisel fuzzy kümeler üzerinde temel küme işlemlerini aşağıdaki şekilde tanımlamıştır.

Tanım 2.2.2: A ve B , X üzerinde birer IFS olmak üzere;

$$1. A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in X \text{ için } \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \text{ ve } \eta_A(x) \geq \eta_B(x)$$

$$2. A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ ve } B \subset A$$

$$3. \bar{A} = \{(x, \eta_A(x), \mu_A(x)) : x \in X\}$$

$$4. A \cap B = \{(x, \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \max\{\eta_A(x), \eta_B(x)\}) : x \in X\}$$

$$5. A \cup B = \{(x, \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \min\{\eta_A(x), \eta_B(x)\}) : x \in X\}$$

$$6. A + B = \{(x, \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x), \eta_A(x) \cdot \eta_B(x)) : x \in X\}$$

$$7. AB = \{(x, \mu_A(x) \cdot \mu_B(x), \eta_A(x) + \eta_B(x) - \eta_A(x) \cdot \eta_B(x)) : x \in X\}$$

(Atanassov, 2012).

Örnek 2.2.3: $X = \{a, b, c\}$, $A = \{(a, 0.6, 0.3), (b, 0.2, 0.5), (c, 0.1, 0.1)\}$ ve

$B = \{(a, 0.7, 0.3), (b, 0.5, 0.2), (c, 0, 0.7)\}$ olmak üzere

$$A \cup B = \{(x, \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \min\{\eta_A(x), \eta_B(x)\}) : x \in X\}$$

$$= \{(a, 0.7, 0.3), (b, 0.5, 0.2), (c, 0.1, 0.1)\} \quad \text{ve}$$

$$A \cap B = \left\{ (x, \min \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \}, \max \{ \eta_A(x), \eta_B(x) \}) : x \in X \right\}$$

$$= \left\{ (a, 0.6, 0.3), (b, 0.2, 0.5), (c, 0, 0.7) \right\} \text{ olmuş olur.}$$

Önerme 2.2.1: A, B, C X kümesi üzerinde birer IFS olmak üzere yukarıda tanımlanan işlemler aşağıdaki özellikleri sağlar:

1. Değişme Özelliği:

$$A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A, A + B = B + A, A.B = B.A$$

2. Birleşme Özelliği:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$

$$(A + B) + C = A + (B + C), (A.B).C = A.(B.C)$$

3. Dağılma Özelliği:

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C), (A \cap B) + C = (A + C) \cap (B + C)$$

$$(A \cap B).C = (A.C) \cap (B.C), (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$(A \cup B) + C = (A + C) \cup (B + C), (A \cup B).C = (A.C) \cup (B.C)$$

$$(A + B).C \subset (A.C) + (B.C), (A.B) + C \supset (A + C).(B + C),$$

4. Tek Kuvvet:

$$A \cap A = A, A \cup A = A$$

5. Tülemeye Ait Özellikler

$$\overline{\overline{A \cap B}} = A \cup B, \overline{\overline{A \cup B}} = A \cap B, \overline{\overline{A + B}} = A.B, \overline{\overline{A.B}} = A + B$$

(Atanassov, 2012).

Tanım 2.2.3: $IFS = \{(x_1, x_2) \in [0, 1] \times [0, 1]; x_1 + x_2 \leq 1\}$ ile sezgisel fuzzy çiftlerinin ailesini gösterelim. $(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 \leq y_1, x_2 \geq y_2$ (Atanassov, 2012).

Tanım 2.2.4: $x, y, z \in I$ ve $\tilde{1} = (0, 1)$ tam üyelik olmak üzere $T: I^2 \times I^2 \rightarrow I^2$ dönüşümü eğer aşağıdaki şartları sağlıyorsa bir sezgisel fuzzy t -norm adını alır (Glad Deschrijver ve ark., 2004).

T_1 : Birim Eleman: $\tilde{1}$, dönüşümün birim elemanıdır. Yani $\forall x \in I^2$ için $T(x, \tilde{1}) = x$

T_2 : Değişme Özelliği: $\forall x, y \in IFS^X$ için $T(x, y) = T(y, x)$

T_3 : Birleşme Özelleği: $\forall x, y, z \in IFS^X$ için $T(x, T(y, z)) = T(y, T(x, z))$

T_4 : Monotonluk: $x, x', y, y' \in IFS^X$, $x \leq x'$ ve $y \leq y'$ ise $T(x, y) \leq T(x', y')$

Tanım 2.2.5: $x, y, z \in I$ ve $\tilde{0} = (0, 1)$ tam üye olmama olmak üzere $S: I^2 \times I^2 \rightarrow I^2$ dönüşümü eğer aşağıdaki şartları sağlıyorsa bir sezgisel fuzzy t-conorm adını alır (Glad Deschrijver ve ark., 2004).

S_1 : Birim Eleman: $\tilde{0}$, dönüşümün birim elemanıdır. Yani $\forall x \in I^2$ için $S(x, \tilde{0}) = x$

S_2 : Değişme Özelliği: $\forall x, y \in IFS^X$ için $S(x, y) = S(y, x)$

S_3 : Birleşme Özelleği: $\forall x, y, z \in IFS^X$ için $S(x, S(y, z)) = S(y, S(x, z))$

S_4 : Monotonluk: $x, x', y, y' \in IFS^X$, $x \leq x'$ ve $y \leq y'$ $S(x, y) \leq S(x', y')$

Tanım 2.2.6: $N: IFS^X \rightarrow IFS^X$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa bir sezgisel fuzzy değilme adını alır (Glad Deschrijver ve ark., 2004).

1. $N(\tilde{1}) = \tilde{0}$, $N(\tilde{0}) = \tilde{1}$
2. $\forall x, y, z, t \in IFS^X$ için $(x, y) \leq (t, z)$ ise $N((x, y)) \geq N((t, z))$

Eğer N değilmesi, sürekli monoton azalan ise tam değilme adını alır. Bir tam değilme $\forall (a, b) \in IFS$ için involüsyon $N(N(a, b)) = (a, b)$ özelliğini sağlıyorsa güçlü değilme adını alır.

Önerme 2.2.2: $N: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ bir fuzzy güçlü değilme olsun. O halde, $N(x, y) = (N(1 - y), 1 - N(x))$ bir güçlü sezgisel fuzzy değilmedir (Glad Deschrijver ve ark., 2004).

Önerme 2.2.3: $T: IFS \times IFS \rightarrow IFS$ bir sezgisel fuzzy t-norm ve $N: IFS \rightarrow IFS$ bir sezgisel fuzzy güçlü değilme olsun. $S^*(x, y) = N(T(N(x), N(y)))$ ile tanımlı $S^*: IFS \times IFS \rightarrow IFS$ dönüşümü bir sezgisel fuzzy t-conormdur .

İspat: S^* dönüşümünün S_1, S_2, S_3 ve S_4 şartlarını sağladığını gösterelim.

$S_1 : \forall x \in IFS^X$ için $S^*(x, \tilde{0}) = x$ olduğunu gösterelim.

$$S^*(x, \tilde{0}) = N(T(N(x), N(\tilde{0}))) = N(T(N(x), \tilde{1})) = N(N(x)) = x$$

$S_2 : \forall x, y \in IFS^X$ için $S^*(x, y) = S^*(y, x)$ dir.

$$S^*(x, y) = N(T(N(x), N(y))) = N(T(N(y), N(x))) = S^*(y, x)$$

$S_3 : \forall x, y, z \in IFS$ için $S^*(x, S^*(y, z)) = S^*(y, S^*(x, z))$ dir.

$$\begin{aligned} S^*(x, S^*(y, z)) &= N(T(N(x), N(S^*(y, z)))) = N(T(N(x), N(N(T(N(y), N(z))))) \\ &= N(T(N(x), (T(N(y), N(z))))) = N(T(N(y), T(N(x), N(z)))) \\ &= N(T(N(y), N(N(T(N(x), N(z))))) = N(T(N(y), N(S^*(x, z)))) = S^*(y, S^*(x, z)) \end{aligned}$$

$S_4 : x, x', y, y' \in IFS^X, x \leq x' \text{ ve } y \leq y' \implies S^*(x, y) \leq S^*(x', y')$ dir.

N değilleme olduğundan $N(x') \leq N(x)$ ve $N(y') \leq N(y)$

O halde, $T(x, y) \leq T(x', y')$; $(T_4 \text{ den})$

$$N(T(N(x), N(y))) \leq N(T(N(x'), N(y'))) = S^*(x, y) \leq S^*(x', y')$$

S^* dönüşümüne T sezgisel fuzzy t-normunun dual sezgisel fuzzy t-conormu denir.

Önerme 2.2.4: $S : IFS \times IFS \rightarrow IFS$ bir sezgisel fuzzy t-conorm ve $N : IFS \rightarrow IFS$ bir

sezgisel fuzzy güçlü değilleme olsun. $T^*(x, y) = N(S(N(x), N(y)))$ ile tanımlı

$T^* : IFS \times IFS \rightarrow IFS$ dönüşümü bir sezgisel fuzzy t-normudur.

T^* dönüşümüne S sezgisel fuzzy t-conormunun dual sezgisel fuzzy t-normu denir.

Önerme 2.2.3 ün ispatına benzer şekilde ispatlanır.

2.3. Geçici Sezgisel Fuzzy Kümeler

Tanım 2.3.1: X boştan farklı bir küme T bir zaman kümesi ve $\mu_A : X \times T \rightarrow [0,1]$, $\eta_A : X \times T \rightarrow [0,1]$ her $(x,t) \in X \times T$ için $\mu_A(x,t) + \eta_A(x,t) \leq 1$ şartını sağlayan dönüşümler olmak üzere

$$A(T) = \{(x, \mu_A(x,t), \eta_A(x,t)) : (x,t) \in X \times T\}$$

kümesine bir geçici sezgisel fuzzy küme denir. Burada $\mu_A(x,t)$, $x \in X$ 'in t anındaki üye olma derecesi ve $\eta_A(x,t)$, $x \in X$ 'in t anındaki üye olmama derecesi olarak adlandırılır. Yazımını kolaylaştırmak için $A(T)$ yerine A tercih edilecektir. X ve T üzerinde tanımlanan tüm geçici sezgisel fuzzy kümelerin kümesini $TIFS^{(X,T)}$ ile gösterelim. Açıkça görüleceği üzere her bir sezgisel fuzzy küme tekil bir zaman kümesi aracılığı ile geçici sezgisel fuzzy küme olarak ifade edilebilir. Ayrıca sezgisel fuzzy kümeler için tanımlanan tüm işlemler ve operatörlerde geçici sezgisel fuzzy kümeler için tanımlanabilir (Atanassov, 1991).

Tanım 2.3.2: T' ve T'' sonlu elemanlı zaman kümeleri veya zaman aralıkları ve X boştan farklı bir küme olmak üzere,

$$A(T') = \{(x, \mu_A(x,t), \eta_A(x,t)) : (x,t) \in X \times T'\}$$

ve

$$B(T'') = \{(x, \mu_B(x,t), \eta_B(x,t)) : (x,t) \in X \times T''\}$$

geçici sezgisel fuzzy kümeleri için $\bar{\mu}_A$, $\bar{\mu}_B$, $\bar{\eta}_A$ ve $\bar{\eta}_B$ aşağıdaki şekilde tanımlanmak üzere

$$\bar{\mu}_A(x,t) = \begin{cases} \mu_A(x,t), & t \in T' \\ 0, & t \in T'' - T', \end{cases}$$

$$\bar{\mu}_B(x,t) = \begin{cases} \mu_B(x,t), & t \in T'' \\ 0, & t \in T' - T'', \end{cases}$$

$$\bar{\eta}_A(x,t) = \begin{cases} \eta_A(x,t), & t \in T' \\ 1, & t \in T'' - T', \end{cases}$$

$$\bar{\eta}_B(x, t) = \begin{cases} \eta_B(x, t), & t \in T'' \\ 1, & t \in T'' - T', \end{cases}$$

A ve B geçici sezgisel fuzzy kümelerinin kesişimi ve birleşimi sırası ile

$$A(T') \cap B(T'') =$$

$$\left\{ (x, \min(\bar{\mu}_A(x, t), \bar{\mu}_B(x, t)), \max(\bar{\eta}_A(x, t), \bar{\eta}_B(x, t))) : (x, t) \in X \times (T' \cup T'') \right\},$$

$$A(T') \cup B(T'') =$$

$$\left\{ (x, \max(\bar{\mu}_A(x, t), \bar{\mu}_B(x, t)), \min(\bar{\eta}_A(x, t), \bar{\eta}_B(x, t))) : (x, t) \in X \times (T' \cup T'') \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Öte yandan geçici sezgisel fuzzy kümeler için alt küme tanımı aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$A(T') \subseteq B(T'') \Leftrightarrow \text{Her bir } (x, t) \in X \times (T' \cup T'') \text{ için } \bar{\mu}_A(x, t) \leq \bar{\mu}_B(x, t) \text{ ve } \bar{\eta}_A(x, t) \geq \bar{\eta}_B(x, t)$$

$$T' = T'' \text{ olması durumunda } \bar{\mu}_A(x, t) = \mu_A(x, t), \quad \bar{\mu}_B(x, t) = \mu_B(x, t),$$

$$\bar{\eta}_A(x, t) = \eta_A(x, t), \quad \bar{\eta}_B(x, t) = \eta_B(x, t) \text{ ifadelerinin sağlandığı aşıkardır (Atanassov, 1991).}$$

Tanım 2.3.3: X boştan farklı bir küme, T bir zaman kümesi ve $A \in TIFS^{(X, T)}$ olmak üzere

$$C^*(A) = \left\{ (x, \max_{t \in T} \mu_A(x), \min_{t \in T} \eta_A(x)) : (x, t) \in X \times T \right\}$$

$$I^*(A) = \left\{ (x, \min_{t \in T} \mu_A(x), \max_{t \in T} \eta_A(x)) : (x, t) \in X \times T \right\}$$

bu operatörlerin bir TIFS'yi IFS kümeye çevirdiği tanımından kolayca görülebilir. (Atanassov, 1991).

3. FUZZY VE SEZGİSEL FUZZY METRİK UZAYLAR

Uzaklık kavramı matematiğin ve mühendisliğin temel kavramlarından biridir. İki sayı veya durum arasındaki uzaklığı hesaplamak bu durumlar hakkındaki kıyaslamayı yapmamız için bize bir yol sunar. Fuzzy küme teorisi ve mantık alanlarında sunmuş olduğu yeni yaklaşımlar ile uzaklık kavramının ele alınmasında klasik yöntemlerin ötesinde yeni yöntemler sunulmasına olanak sağlamıştır. Diğer taraftan fuzzy küme teorisinin günlük durumları matematiksel olarak ifade ediş şeklini değiştirmesinden dolayı bu durumlar arasındaki uzaklık kavramında farklı şekillerde tanımlanması ihtiyacı doğmuştur. Daha açık bir ifade ile fuzzy küme olarak ifade ettiğimiz durumlar arasındaki uzaklık ve durumlar arasındaki fuzzy uzaklık ayrı kavramlardır. Mevcut literatür incelendiğinde her iki yaklaşım içinde birçok uzaklık veya daha matematiksel bir ifade ile metrik tanımlaması yapılmıştır. Tez çalışmamızın bu kısmında fuzzy ve sezgisel fuzzy metrik uzay kavramı irdelenecektir.

3.1. Fuzzy Metrik Uzaylar

Fuzzy küme teorisinin doğasında olan kavramların farklı yaklaşımlarla metrik uzay kavramına taşınması oldukça orijinal fikirler doğurmuş ve kendisine tıptan mühendislik alanına birçok uygulama imkânı bulmuştur.

Bilindiği üzere boştan farklı bir X kümesi üzerinde bir d metriği her $x, y, z \in X$ için aşağıdaki şartları sağlayan $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ dönüşümüdür

$$M1. \quad d(x, y) \geq 0$$

$$M2. \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$M3. \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$M4. \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

d , X üzerinde bir metrik olmak üzere (X, d) ikilisine bir metrik uzay denir. Eğer d dönüşümü M1, M3, M4 şartlarını ve M2 şartının sadece yeter şart kısmını sağlıyorsa pseudo-metrik adını alır.

Fuzzy metrik kavramının atası sayılabilecek Menger uzayı kavramı Menger (1942) tarafından tanımlanmıştır.

Tanım 3.1.1: X boştan farklı bir küme, $\Delta: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ bir t -norm, $F_{xy}: X \times X \times [0, \infty) \rightarrow (0,1]$ üzerinde tanımlı bir dönüşüm olmak üzere her $(x, y) \in X \times X$ çifti için $F_{xy}, F_{xy}(0) = 0$ ve olmak üzere

- i. Her $t > 0$ için $F_{xy}(t) = 1 \Leftrightarrow x = y$
- ii. Her $x, y \in X$ için $F_{xy} = F_{yx}$
- iii. Her $x, y, z \in X$ için $F_{xy}(s+r) \geq \Delta(F_{xz}(s), F_{yz}(r))$

şartlarını sağlayan sol yarı sürekli bir dağılım fonksiyonu olmak üzere (X, F, Δ) ile gösterilen uzaya Menger uzayı denir. (Menger, 1942)

Fuzzy metrik uzay denilince akla gelen ilk tanımlardan olan aşağıdaki tanım Kramosil ve Michalek (1975) tarafından tanımlanmıştır. Literatürde en çok çalışılan fuzzy metrik uzaylardan biri olan bu uzay, Menger uzayı ile yakından alakalıdır.

Tanım 3.1.2: X boştan farklı bir küme bir küme ve $M, X \times X \times [0, \infty)$ üzerinde tanımlı bir fuzzy küme olmak üzere $(X, M, *)$ üçlüsü aşağıdaki şartları sağlıyorsa bir fuzzy metrik olarak adlandırılır. $x, y, z \in X$ ve $t, s > 0$ olmak üzere:

- i. $M(x, y, 0) = 0$,
- ii. Tüm $t > 0$ sayılar için $M(x, y, t) = 1$ ancak ve ancak $x = y$,
- iii. $M(x, y, t) = M(y, x, t)$,
- iv. $S: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ tanımlı ölçülebilir ve $S(1,1) = 1$ şartını sağlayan reel değerli fonksiyon olmak üzere $M(x, z, t+s) \geq S(M(x, y, t), M(y, z, s))$,
- v. $M(x, y, \cdot): [0, \infty) \rightarrow [0,1]$ sol süreklidir

(Kramosil ve Michalek, 1975).

Tanımdan açıkça görüleceği üzere (i)-(iii) Şartları alışılmış metrik uzay tanımının özdeşlik, negatif olmama (non-negativity) ve simetri şartlarını karşılar.

(iv) şartı ise zayıf bir üçgen eşitsizliği tanımı olarak ele alınabilir. (v) şartı ise belirli bir derecede uzaklığın bir limitin (sınırın) ötesinde ise, eşit veya daha uzak bir derecede, bu uzaklığın daha büyük bir sınırın ötesinde olduğu anlamına gelmektedir. Biraz daha net bir ifade ile bu durumu açıklarsak; $M(x, y, t)$, (X, d) metrik uzayında bulunan x ve y için

$d(x, y)$ uzaklığının t 'den küçük olma derecesini ifade ediyorsa, $s \geq t$ için $M(x, y, t) \leq M(x, y, s)$ olması gayet doğal bir durumdur. Böylece $M(x, y, \cdot)$ fonksiyonunun azalmayan fonksiyon olması gerektiği aşîkârdır. Böyle bir fonksiyonun süreksizlik noktaları sayılabilir olduğundan bu tipin her noktasında, $M(x, y, \cdot)$ sol sürekli olarak tanımlanır. Sol süreklilik $M(x, y, t)$ sayısının x ve y arasındaki uzaklığın t 'den küçük olmasını simgelediğini anlatmak için seçtik. Açıkça görülür ki $M(x, y, \cdot)$ dönüşümü sağ yarı sürekli olarak da seçilebilir. Bu seçim ile $M(x, y, t)$, x ve y arasındaki söz konusu uzaklığın t 'den küçük veya t 'ye eşit olmasını simgeler (Kramosil ve Michalek, 1975).

George ve Veermani (1994), Kramosil ve Michalek tarafından tanımlanan metriği fuzzy metrik uzaylarda Hausdorff topoloji tanımlamak için yeniden tanımlamışlardır.

Tanım 3.1.3: X boştan farklı bir küme, $*$ bir sürekli t -norm ve $M : X \times X \times [0, \infty) \rightarrow (0, 1]$ üzerinde tanımlı bir dönüşüm olmak üzere $(X, M, *)$ üçlüsü aşağıdaki şartları sağlıyorsa bir fuzzy metrik olarak adlandırılır. $x, y, z \in X$ ve $t, s > 0$ olmak üzere:

1. $M(x, y, t) > 0$
2. Tüm $t > 0$ sayılar için $M(x, y, t) = 1$ ancak ve ancak $x = y$
3. $M(x, y, t) = M(y, x, t)$
4. $M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t + s)$
5. $M(x, y, \cdot) : (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ sürekli

Burada $M(x, y, t)$ ifadesine x ile y nin t ye göre birbirine yakın olma derecesi denir. Diğer bir ifadeyle “ x, y ’ye t kadar yakındır” önermesinin doğruluk derecesidir. Tanımdan açıkça görüleceği üzere

(1) şartından; x ile y arasında klasik metriklere göre sonsuz uzaklık olamayacağından M ’nin sıfır değerini alamayacağı anlaşılır.

(2) şartından $\forall x \in X$ ve $\forall t > 0$ için $M(x, x, t) = 1$ ve $\forall x \neq y$ ve $\forall t > 0$ için $M(x, x, t) < 1$ olduğu anlaşılır.

(3) şartından; x ’nin y ’e t kadar yakınlık derecesinin y ’nin x ’e t kadar yakınlık derecesine eşit olduğu anlaşılır.

(4) şartı klasik üçgen eşitsizliğinin fuzzy küme teorisindeki genelleştirilmiş halidir.

(5) şartı sabit x ve y için $M(x, y, \cdot): (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonun t 'ye göre sürekli olduğunu ifade eder (George ve Veermani, 1994).

Uyarı 3.1.1: (a) $(X, M, *)$ fuzzy metrik uzayında $\forall x, y \in X$, $t > 0$, $0 < r < 1$ için $M(x, y, t) > 1 - r$ olduğundan $M(x, y, t_0) > 1 - r$ olacak biçimde $0 < t_0 < t$ koşulunu sağlayan bir t_0 bulunabilir.

(b) Her bir $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 \in (0, 1)$ için $r_1 > r_2$ iken $r_1 * r_3 \geq r_2$ olacak biçimde bir r_3 ve herhangi bir r_4 için $r_5 * r_5 \geq r_4$ olacak biçimde bir r_5 bulunabilir (George ve Veermani, 1994).

Lemma 3.1.1: $M(x, y, \cdot): (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ dönüşümü $\forall x, y \in X$ için azalmayan dönüşümdür (George ve Veermani, 1994).

Örnek 3.1.1: $X = \mathbb{R}$ ve $a * b = ab$ olsun. $\forall x, y \in X$ ve $t \in (0, \infty)$ için

$$M(x, y, t) = \frac{1}{e^{|x-y|/t}}$$

biçiminde tanımlanır ise $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzaydır (George ve Veermani, 1994).

Uyarı 3.1.2: Yukarıdaki örnekte $\mathbb{R}$ yerine herhangi bir (X, d) metrik uzayı ve $|x - y|$ yerine $d(x, y)$ seçilebilir. Ayrıca yukarıdaki örnek $a * b = \min(a, b)$ ile tanımlı t -normu içinde bir fuzzy metrik uzay tanımlar (George ve Veermani, 1994).

Örnek 3.1.2: (X, d) bir metrik uzay ve $a * b = ab$ (veya $a * b = \min(a, b)$) olsun. O halde her

$k, m, n \in \mathbb{R}^+$ için $M(x, y, t) = \frac{kt^n}{kt^n + md(x, y)}$ ile tanımlı dönüşümü ile birlikte $(X, M, *)$ bir

fuzzy metrik uzaydır. Bu tip uzaylara d metriğinden üretilmiş fuzzy metrik uzay denir.

Burada $k = m = n = 1$ seçilerek $M(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x, y)}$ elde edilir. Bu şekilde tanımlanan

fuzzy metrik uzaya d 'den elde edilmiş standart fuzzy metrik uzay denir. Bununla birlikte crisp metrikten üretilmeyen fuzzy metriklerde vardır. (George ve Veermani, 1994).

Örnek 3.1.3: $X = \mathbb{N}$ ve $a * b = ab$ olsun. $\forall t > 0$ için;

$$M(x, y, t) = \begin{cases} \frac{x}{y}, & x \leq y \\ \frac{y}{x}, & y \leq x \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır ise $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzaydır (George ve Veermani, 1994).

Uyarı 3.1.3: Örnek 3.1.3 de verilen

$$M(x, y, t) = \begin{cases} \frac{x}{y}, & x \leq y \\ \frac{y}{x}, & y \leq x \end{cases}$$

için $M(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x, y)}$ olacak biçimde X üzerinde hiçbir d metriği yoktur. Ayrıca $a * b = \min\{a, b\}$ t -normu alınırsa $M(x, y, t)$ fuzzy metrik değildir (George ve Veermani, 1994).

Tanım 3.1.4: $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay $x \in X$, $r \in (0, 1)$ ve $t > 0$ olmak üzere x merkezli r yarıçaplı açık yuvar $B(x, r, t) = \{y \in X; M(x, y, t) > 1 - r\}$ ile tanımlanır.

Burada, $M(x, y, t)$ x in y ye t kadar yakın olma ölçüsüdür. $M(x, y, t)$ nin $1 - r$ den büyük olması demek x ile y arasındaki uzaklığın ölçüsünün sezgisel olarak r den küçük olması anlamına gelir. Normalde $d(x, y) < t$ uzaklık ölçüsü iken $M(x, y, t) > 1 - r$ yakınlık ölçüsüdür (George ve Veermani, 1994).

Önerme 3.1.3: $x \in X$, $t > 0$ ve $0 < r_1 < 1$, $0 < r_2 < 1$ olmak üzere, $B(x, r_1, t)$ ve $B(x, r_2, t)$ aynı merkezli açık yuvarlar olsun. Bu durumda,

$B(x, r_1, t) \subseteq B(x, r_2, t)$ veya $B(x, r_2, t) \subseteq B(x, r_1, t)$ ifadelerinden en az biri doğrudur (George ve Veermani, 1994).

Tanım 3.1.5: $(X, M, *)$ fuzzy metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer her $x \in A$ için $x \in B(x, r, t) \subset A$ olacak şekilde bir $B(x, r, t)$ açık yuvarı varsa A ya fuzzy metrik uzayda açıktır denir (George ve Veermani, 1994).

Teorem 3.1.1: Her açık yuvar bir açık kümedir (George ve Veermani, 1994).

Sonuç 3.1.1: $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay olsun.

$$\tau_M = \{A \subset X : \forall x \in A \text{ için } B(x, r, t) \subset A \text{ olacak biçimde } t > 0 \text{ ve } r \in (0, 1) \text{ vardır}\}$$

şeklinde tanımlanan τ_M , X üzerinde bir topolojidir (George ve Veermani, 1994).

Önerme 3.1.4: (X, τ_M) topolojik uzay ve $x \in X$ olsun. Buna göre

$$E(x) = \left\{ B\left(x, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N} \right\}$$

ailesi x in yerel (komşuluklar) tabanıdır (George ve Veermani, 1994).

Sonuç 3.1.2: (X, d) bir metrik uzay ve $M(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x, y)}$ olsun. Bu durumda d metriği ve M fuzzy metriği tarafından X üzerine indirgenen topolojiler eşit topolojilerdir (George ve Veermani, 1994).

Teorem 3.1.2: Her fuzzy metrik uzay Hausdorff uzayıdır (George ve Veermani, 1994).

Teorem 3.1.3: $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay ve (x_n) , X de bir dizi olsun. $x_n \rightarrow x$ olması için gerekli ve yeterli koşul $\forall t > 0$ ve $n \rightarrow \infty$ için $M(x_n, x, t) \rightarrow 1$ olmasıdır (George ve Veermani, 1994).

Önerme 3.1.5: $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay ve $\lambda \in [0, 1)$ olsun. Bu durumda X üzerinde öyle bir m fuzzy metriği vardır öyle ki her $x, y \in X$ ve $t > 0$ için $m(x, y, t) \geq \lambda$ dır. Ayrıca m ve M , X üzerinde aynı topolojiyi üretir (Afrouzi ve ark., 2011).

Uyarı 3.1.4: $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay olsun. Bu durumda $M, X \times X \times (0, \infty)$ üzerinde bir sürekli fonksiyondur (Lopez ve Romaguera, 2004).

Tanım 3.1.6: $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay ve A, X in bir alt kümesi olsun. Eğer her $x, y \in A$ için $M(x, y, t) > 1 - r$ olacak biçimde $0 < r < 1$ ve $t > 0$ varsa A kümesine F -sınırlıdır denir (George ve Veermani, 1994).

Teorem 3.1.4: $(X, M, *)$ d metriği tarafından indirgenen bir fuzzy metrik uzay ve A, X in bir alt kümesi olsun. A kümesinin F -sınırlı olması için gerek ve yeter şart A nın sınırlı olmasıdır (George ve Veermani, 1994).

Teorem 3.1.5: $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay olsun. X in her kompakt alt kümesi F -sınırlıdır (George ve Veermani, 1994).

Sonuç 3.1.3: Bir fuzzy metrik uzayda her kompakt küme kapalı ve sınırlıdır (George ve Veermani, 1994).

Tanım 3.1.7: $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzayından bir (x_n) dizisinin Cauchy dizisi olması için gerekli ve yeterli koşul her $p > 0$ ve her $t > 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} M(x_{n+p}, x_n, t) = 1$ olmasıdır (Grabiec, 1988).

Tanım 3.1.8: Her Cauchy dizisinin yakınsak olduğu fuzzy metrik uzaya tam fuzzy metrik uzay denir (George ve Veermani, 1994).

Sonuç 3.1.4: (X, d) metrik uzayının tam olması için gerek ve yeterli şart

$M(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x, y)} (x, y \in X, t > 0)$ olmak üzere $(X, M, *)$ fuzzy metrik uzayının tam olmasıdır (George ve Veermani, 1997).

Uyarı 3.1.5: Tanım 3.1.7 e göre $\mathbb{R}$, tam fuzzy metrik uzay değildir (George ve Veermani, 1994).

Örnek 3.1.4: $(\mathbb{R}, d)$ metrik uzay $d(x, y) = |x - y|$ ve $a * b = ab$ olsun.

$M(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x, y)}$ biçiminde tanımlanırsa $(\mathbb{R}, M, *)$ fuzzy metrik uzaydır. Bu uzayda

$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ olacak biçimde (S_n) dizisini ele alalım. Her $p > 0$ için;

$$M(S_{n+p}, S_n, t) = \frac{t}{t + |S_{n+p} - S_n|} = \frac{t}{t + \left(\frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n+p}\right)}$$

İduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} M(S_{n+p}, S_n, t) = 1$ olur. O halde (S_n) dizisi $(\mathbb{R}, M, *)$ fuzzy metrik uzayında

bir Cauchy dizisidir. Eğer $\mathbb{R}$ tam fuzzy metrik uzay ise en az bir $x \in \mathbb{R}$ noktası vardır ki

$n \rightarrow \infty$ iken $M(S_n, x, t) \rightarrow 1$ dir. Buradan $n \rightarrow \infty$ iken $\frac{t}{t + |S_n - x|} \rightarrow 1$ yani $n \rightarrow \infty$ iken

$|S_n - x| \rightarrow 0$ olur. Dolayısıyla $S_n \rightarrow x$ tir. Ancak $\mathbb{R}$ de bu doğru değildir. Bu sebeple $\mathbb{R}$ tam fuzzy metrik uzay değildir (George ve Veermani, 1994).

George ve Veeramani (1994), $\mathbb{R}$ nin tam fuzzy metrik uzay olması için Cauchy dizisi tanımını aşağıdaki gibi değiştirmişlerdir.

Tanım 3.1.9: $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzayında bir (x_n) dizisinin Cauchy dizisi olması için gerekli ve yeterli koşul her $\varepsilon > 0$ ve her $t > 0$ için $m, n \geq n_0$ iken $M(x_n, x_m, t) > 1 - \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısının bulunmasıdır (George ve Veermani, 1994).

Sonuç 3.1.5: Tanım 3.1.9 de verilen Cauchy dizisi tanımına göre $\mathbb{R}$ tam fuzzy metrik uzaydır (George ve Veermani, 1994).

Tanım 3.1.10: Eğer $0 < r < 1$ olan her bir r ve her $t > 0$ için $X = \bigcup_{a \in A} B(a, r, t)$ şeklinde X in sonlu bir A alt kümesi varsa $(X, M, *)$ fuzzy metrik uzayı prekompakt olarak adlandırılır. Bu durumda M, X üzerinde bir prekompakt fuzzy metriktir denir. Eğer (X, τ_M) bir kompakt topolojik uzay ise $(X, M, *)$ fuzzy metrik uzayına kompakttır denir (Gregori ve Romaguera, 2000).

Lemma 3.1.1: Bir fuzzy metrik uzayının prekompakt olması için gerek ve yeterli şart bu uzaydaki her dizinin bir Cauchy alt dizisine sahip olmasıdır (Gregori ve Romaguera, 2000).

Lemma 3.1.2: $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik olsun. Eğer X 'teki bir Cauchy dizisi bir $x \in X$ yığılma noktasına sahip ise bu dizi x 'e yakınsar (Gregori ve Romaguera, 2000).

3.2 Sezgisel Fuzzy Metrik Uzaylar

Park (2004), sezgisel fuzzy kümeler uzayında metrik kavramını George ve Veermani yaklaşımı ile tanımlamış ve bazı temel özellikleri ifade ve ispat etmiştir.

Tanım 3.2.1: X boştan farklı bir küme, $*$ bir t -norm ve $\diamond$ bir t -conorm olsun. M ve N , $x, y, z \in X$, $s, t > 0$ için aşağıdaki şartları sağlayan $X \times X \times (0, \infty)$ üzerinde tanımlanmış fuzzy kümeler olmak üzere $(X, M, N, *, \diamond)$ sıralı beşlisine sezgisel fuzzy metrik uzay denir.

- a. $M(x, y, t) + N(x, y, t) \leq 1$,
- b. $M(x, y, t) > 0$,
- c. $M(x, y, t) = 1$ ancak ve ancak $x = y$,
- d. $M(x, y, t) = M(y, x, t)$,
- e. $M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t + s)$,
- f. $M(x, y, \cdot) : (0, \infty) \rightarrow (0, 1]$ sürekli,
- g. $N(x, y, t) \geq 0$,
- h. $N(x, y, t) = 0$ ancak ve ancak $x = y$,
- i. $N(x, y, t) = N(y, x, t)$,
- j. $N(x, y, t) \diamond N(y, z, s) \geq N(x, z, t + s)$
- k. $N(x, y, \cdot) : (0, \infty) \rightarrow (0, 1]$ sürekli.

Bu kabuller altında (M, N) ikilisine X üzerinde tanımlı sezgisel fuzzy metrik denir. $M(x, y, t)$ ve $N(x, y, t)$ sayılarına sırasıyla x ve y 'nin t kadar yakın olma ve yakın olmama derecesi denir (Park, 2004).

Örnek 3.2.1: i. $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay ve her $x, y \in X$ için $x \diamond y = 1 - ((1-x) * (1-y))$ ile tanımlı $*t$ -normu ile ilişkili $\diamond t$ -conormu olmak üzere $(X, M, 1-M, *, \diamond)$ bir sezgisel fuzzy metrik uzaydır (Park, 2004).

ii. (indirgenmiş sezgisel fuzzy metrik) (X, d) bir metrik uzay, her $a, b \in [0, 1]$ için $a * b = ab$, $a \diamond b = \min\{1, a + b\}$ ile tanımlı olsun. Üyelik fonksiyonları her $h, k, m, n \in \mathbb{R}^+$ için

$$\mu_{M_d}(x, y, t) = \frac{ht^n}{ht^n + md(x, y)} \quad \text{ve} \quad \mu_{N_d}(x, y, t) = \frac{d(x, y)}{kt^n + md(x, y)} \quad \text{ile tanımlı } M_d \text{ ve } N_d$$

$\in FS^{X^2 \times (0, \infty)}$ fuzzy kümeleri olmak üzere $(X, M_d, N_d, *, \diamond)$ bir sezgisel fuzzy metrik uzaydır.

Burada $a * b = \min\{a, b\}$ ve $a \diamond b = \max\{a, b\}$ alındığında da $(X, M_d, N_d, *, \diamond)$ bir sezgisel fuzzy metrik uzaydır. Özel olarak $h = k = m = n = 1$ alındığında ise $\mu_{M_d}(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x, y)}$

ve $\mu_{N_d}(x, y, t) = \frac{d(x, y)}{t + d(x, y)}$ elde edilir. Bu tanımlamalara göre elde edilen $(X, M_d, N_d, *, \diamond)$

sezgisel fuzzy metrik uzayı standart sezgisel fuzzy metrik uzayı denir (Park, 2004).

iii. $X = \mathbb{N}$, her $a, b \in [0, 1]$ için $a * b = \max\{0, a + b - 1\}$, $a \diamond b = a + b - ab$ olmak üzere

$M, N \in FS^{X \times X \times (0, \infty)}$ kümelerinin üyelik fonksiyonları her $x, y \in X$ ve $t > 0$ için

$$\mu_M(x, y, t) = \begin{cases} \frac{x}{y} & x \leq y, \\ \frac{y}{x} & y \leq x \end{cases}$$

ve

$$\mu_N(x, y, t) = \begin{cases} \frac{y-x}{y} & x \leq y, \\ \frac{x-y}{x} & y \leq x \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu tanımlamalarla beraber $(X, M, N, *, \diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzaydır (Park, 2004).

Örnek 3.2.2: $*$, t -normu ve $\diamond$, t -conormu ilişkili değilse M ve N bir önceki örnekteki gibi tanımlanmak üzere $\mu_M(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x, y)}$ ve $\mu_N(x, y, t) = \frac{d(x, y)}{t + d(x, y)}$ olacak X üzerinde tanımlı bir d metriği yoktur (Park, 2004).

Tanım 3.2.2: $(X, M, N, *, \diamond)$ bir sezgisel fuzzy metrik uzay, $r \in (0, 1)$, $t > 0$ ve $x \in X$ olmak üzere $B_{M,N}(x, r, t) = \{y \in X, M(x, y, t) > 1 - r, N(x, y, t) < r\}$ kümesi t 'ye göre x merkezli r yarıçaplı açık yuvar olarak isimlendirilir (Park, 2004).

Teorem 3.2.1: $B_{M,N}(x, r, t)$ açık yuvarı açık kümedir (Park, 2004).

Teorem 3.2.2: $(X, M, N, *, \diamond)$ bir sezgisel fuzzy metrik uzay olsun. Bu durumda,

$$\tau_{(M,N)} = \left\{ A \subset X : \forall x \in A \text{ için } \exists t > 0 \text{ ve } r \in (0, 1) \text{ vardır ki } B_{(M,N)}(x, r, t) \subset A \right\}$$

ile tanımlanan aile X üzerinde bir topolojidir (Park, 2004).

Tanım 3.2.3: $(X, M, N, *, \diamond)$ bir sezgisel fuzzy metrik uzay olmak üzere $B_{M,N} = \{B(x, r, t) : x \in X, t > 0, r \in (0, 1)\}$ bazıyla üretilen $\tau_{M,N}$ ailesi X üzerinde bir topolojidir. $B_{M,N} = \left\{ B\left(x, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) : n = 1, 2, \dots \right\}$ ailesi $\tau_{M,N}$ için bir yerel baz olduğundan $\tau_{M,N}$ birinci sayılabilir uzaydır (Park, 2004).

Teorem 3.2.3: $(X, M, N, *, \diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzayı Hausdorff uzaydır (Park, 2004).

Teorem 3.2.4: (X, d) bir metrik uzay, $\mu_M(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x, y)}$ ve $k \in \mathbb{R}^+$ için

$\mu_N(x, y, t) = \frac{d(x, y)}{kt + d(x, y)}$ olarak tanımlanmak üzere d metriğinden üretilen τ_d topolojisi ve

$\tau_{M,N}$ topolojisi eşittir (Park, 2004).

Tanım 3.2.4: $(X, M, N, *, \diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzayı olmak üzere $A \subseteq X$ eğer her $x, y \in A$ için $M(x, y, t) > 1 - r$ ve $N(x, y, t) < r$ olacak şekilde $t > 0$ ve $r \in (0, 1)$ sayıları mevcut ise A kümesine IF-sınırlıdır denir (Park, 2004).

Teorem 3.2.5: $(X, M, N, *, \diamond)$, d metriğinden üretilmiş sezgisel fuzzy metrik olmak üzere A kümesi IF-sınırlı olması için gerek ve yeter şart A kümesinin sınırlı olmasıdır (Park, 2004).

Teorem 3.2.6: $(X, M, N, *, \diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzayının her kompakt alt kümesi IF-sınırlıdır (Park, 2004).

Teorem 3.2.7: Sezgisel fuzzy metrik uzayda her kompakt küme kapalı ve sınırlıdır (Park, 2004).

Tanım 3.2.5: X kümesinde tanımlı bir $\{x_n\}$ dizisinin x 'e yakınsaması için gerek ve yeter şart $n \rightarrow \infty$ iken $M(x_n, x, t) \rightarrow 1$ ve $N(x_n, x, t) \rightarrow 0$ olmasıdır (Park, 2004).

Tanım 3.2.6: $(X, M, N, *, \diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzay olmak üzere

- $\{x_n\}$, X de bir dizi olmak üzere her $\varepsilon > 0$ ve $t > 0$ için $n, m \geq n_0$ iken $M(x_n, x_m, t) > 1 - \varepsilon$ ve $N(x_n, x_m, t) < \varepsilon$ olacak $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir.
- $(X, M, N, *, \diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzayında her bir Cauchy dizisi $\tau_{M,N}$ topolojisine göre yakınsak ise $(X, M, N, *, \diamond)$ sezgisel fuzzy metrik uzayına tamdır denir.

(Park, 2004).

Teorem 3.2.8: Ayrılabilir her sezgisel fuzzy metrik uzayı ikinci sayılabilirdir (Park, 2004).



4. GEÇİCİ SEZGİSEL FUZZY METRİK UZAYLAR

Bu bölümde tezin ana teması olan geçici sezgisel fuzzy metrik uzaylar tanımlanacak ve bazı temel topolojik özellikleri verilecektir. Bilindiği üzere geçici sezgisel fuzzy kümelerin üye olma ve üye olmama dereceleri zamana bağlı olarak değişmektedir. Benzer bir yaklaşım ile sezgisel fuzzy metrik uzaylar kavramında tanımlanan yakın olma ve yakın olmama derecelerinin de zamana bağlı olarak değişmesi fikrini temel alan bu yeni yaklaşım ile geçici sezgisel fuzzy metrik uzaylar kavramı ortaya çıkmıştır. Geçici sezgisel fuzzy metrik uzaylar kavramı tanımlanmadan önce literatürde bulunmayan ve geçici sezgisel fuzzy metrik uzaylar kavramında kullanılacak olan geçici fuzzy t-norm ve geçici fuzzy t-conorm ve geçici fuzzy değilleme kavramları tanımlanacaktır.

4.1. Geçici Fuzzy t-norm, Geçici Fuzzy t-conorm ve Geçici Fuzzy Değilleme

Tanım 4.1.1: $x, y \in [0, 1]$ ve T bir zaman kümesi olmak üzere $*_t : ([0, 1] \times [0, 1]) \times T \rightarrow [0, 1]$ dönüşümü bir $t \in T$ elemanı için aşağıdaki şartları sağlıyorsa t anında bir geçici fuzzy t-norm adını alır.

1. $*_t((x, 1), t) = x$
2. $*_t((x, y), t) = *_t((y, x), t)$
3. $*_t((x, *_t((y, z), t)), t) = *_t((*_t((x, y), t), z), t)$
4. $a \leq c, b \leq d$ ise $*_t((a, b), t) \leq *_t((c, d), t)$

Tanım 4.1.2: $x, y, z \in [0, 1]$ ve T bir zaman kümesi olmak üzere $\diamond_t : ([0, 1] \times [0, 1]) \times T \rightarrow [0, 1]$ dönüşümü eğer aşağıdaki şartları sağlıyorsa bir geçici fuzzy t-conorm adını alır.

1. $\diamond_t((x, 0), t) = x$
2. $\diamond_t((x, y), t) = \diamond_t((y, x), t)$

3. $\diamond_t((x, \diamond_t((y, z), t)), t) = \diamond_t((\diamond_t((x, y), t), z), t)$
4. $a \leq c, b \leq d$ ise $\diamond_t((a, b), t) \leq \diamond_t((c, d), t)$

Fuzzy küme teorisinde tanımlanan t-norm ve t-conormlardan farklı olarak bu geçici fuzzy t-norm ve t-conormlar zaman parametresi sayesinde değişken bir yapı kazanmaktadır. Bu ise t-norm ve t-conormların temsil ettiği bağlaç ve ayraçlara zaman ile değişebilme fırsatı sağlamaktadır. Ayrıca zamana bağlı olan ve anlık olarak nitelendirilebilecek sonuçların genel bir yargı elde edilmesi için kullanılmasına da aggregation operatörleri ile sağlanabilecektir.

Örnek 4.1.1: Her $x, y \in [0, 1]$ ve $t \in T$ için $\alpha: T \rightarrow (0, 1]$ sürekli bir dönüşüm olmak üzere,

$$\Delta_t((x, y), t) = \begin{cases} xy & , \quad x = 1 \text{ veya } y = 1 \\ \alpha(t)xy, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

ve

$$\nabla_t((x, y), t) = \begin{cases} x + y - xy & , \quad x = 0 \text{ veya } y = 0 \\ (x + y - \alpha(t)xy), & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

ile tanımlı $\Delta_t: ([0, 1] \times [0, 1]) \times T \rightarrow [0, 1]$ ve $\nabla_t: ([0, 1] \times [0, 1]) \times T \rightarrow [0, 1]$ dönüşümleri X ve T üzerinde sırasıyla geçici fuzzy t-norm ve t-conorm tanımlar. Açıkça görülebileceği üzere $\alpha(t) = 1$ olması durumunda fuzzy kümeler üzerinde tanımlı çarpım ve olasılıksal toplam t-norm ve t-conormlarına dönüşür.

İspat: Her $x, y \in [0, 1]$ ve $t \in T$ için $\alpha: T \rightarrow (0, 1]$ olmak üzere

$$\Delta_t((x, y), t) = \begin{cases} xy & , \quad x = 1 \text{ veya } y = 1 \\ \alpha(t)xy, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

dönüşümünün geçici fuzzy t-norm olma şartlarını sağladığını gösterelim.

1. $\Delta_t((x, 1), t) = x$ olduğu tanımdan aşıkardır.
2. $x = 1$ veya $y = 1$ ise $\Delta_t((x, y), t) = xy = \Delta_t((y, x), t)$ olacağından sağlanır.

Diğer taraftan $x, y \neq 1$ ise $\Delta_t((x, y), t) = \alpha(t)xy = \Delta_t((y, x), t)$ olacağından değişme özelliğinin sağlandığı gösterilmiş olur.

3. Genelliği bozmadan $z=1$ kabul edilirse $\Delta_t((x, *_t((y, z), t)), t) = \Delta_t((x, yz), t)$ elde edilir. Buradan $x=1$ veya $y=1$ olması durumunda $\Delta_t((x, \Delta_t((y, z), t)), t) = \Delta_t((x, yz), t) = xyz$ eşitliği elde edilir. Bu şartlar altında $\Delta_t((\Delta_t((x, y), t), z), t) = \Delta_t((x, y), t)z = xyz$ elde edilir. Buradan $x, y \neq 1$ durumunda ise $\Delta_t((x, \Delta_t((y, z), t)), t) = \Delta_t((x, yz), t) = \alpha(t)xyz$. Elde edilir. Yine bu durum için $\Delta_t((\Delta_t((x, y), t), z), t) = \Delta_t((x, y), t)z = \alpha(t)xyz$. Elde edilir. Böylece $\Delta_t((x, \Delta_t((y, z), t)), t) = \Delta_t((\Delta_t((x, y), t), z), t)$ elde edilir. Genelliği bozmadan $x, y, z \neq 1$ kabul edildiğinde ise $\Delta_t((\Delta_t((x, y), t), z), t) = \alpha^2(t)xyz = \Delta_t((x, \Delta_t((y, z), t)), t)$ eşitliği kolayca elde edilir.
4. $a=1$ veya $b=1$ olduğu durumlarda $a \leq c$, $b \leq d$ eşitsizlikleri nedeniyle $\Delta_t((a, b), t) = ab \leq cd = \Delta_t((c, d), t)$ ifadesi sağlanır. Diğer durumlarda ise $\Delta_t((a, b), t) = \alpha(t)ab \leq \alpha(t)cd = \Delta_t((c, d), t)$ olacağından eşitsizlik korunmaktadır.

Benzer şekilde her $x, y \in [0, 1]$ ve $t \in T$ için $\alpha: T \rightarrow (0, 1]$ olmak üzere

$$\nabla_t((x, y), t) = \begin{cases} x + y - xy & , \quad x = 0 \text{ veya } y = 0 \\ (x + y - \alpha(t)xy) & , \quad \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

dönüşümünün geçici fuzzy t-conorm olma şartlarını sağladığını gösterelim.

1. $\nabla_t((x, 0), t) = x$ olduğu tanımdan aşıkardır.
2. $x=0$ veya $y=0$ ise $\nabla_t((x, y), t) = x + y - xy = \nabla_t((y, x), t)$ olacağından sağlanır. Diğer taraftan $x, y \neq 0$ ise $\nabla_t((x, y), t) = x + y - \alpha(t)xy = \nabla_t((y, x), t)$ olacağından değişme özelliğinin sağlandığı gösterilmiş olur.

3. Genelliği bozmadan $z = 0$ kabul edilirse $\nabla_t \left((x, \nabla_t((y, z), t)), t \right) = \nabla_t((x, z), t)$ elde edilir. Diğer taraftan $\nabla_t \left((\nabla_t((x, y), t), z), t \right) = \nabla_t((x, z), t)$ elde edilir. Böylece $\nabla_t \left((x, \nabla_t((y, z), t)), t \right) = \nabla_t \left((\nabla_t((x, y), t), z), t \right)$ elde edilir. Genelliği bozmadan $x, y, z \neq 0$ kabul edildiğinde ise $\nabla_t \left((\nabla_t((x, y), t), z), t \right) = x + y + z - \alpha(t)(xy + xz + yz) + \alpha^2(t)(xyz)$ elde edilir. Diğer taraftan $\nabla_t \left((x, \nabla_t((y, z), t)), t \right) = x + y + z - \alpha(t)(xy + xz + yz) + \alpha^2(t)(xyz)$ ifadesi ile istenen eşitliğin sağlandığı gösterilmiş olur.
4. $a = 0$ veya $b = 0$ olduğu durumlarda $a \leq c$, $b \leq d$ eşitsizlikleri nedeniyle $\nabla_t((a, b), t) = a + b - ab \leq c + d - cd = \nabla_t((c, d), t)$ ifadesi sağlanır. Benzer şekilde diğer durumlarda için $\nabla_t((a, b), t) = a + b - \alpha(t)ab \leq c + d - \alpha(t)cd = \nabla_t((c, d), t)$ olacağından eşitsizlik korunmaktadır.

Örnek 4.1.2: Her $x, y \in [0, 1]$ ve $t \in T$ için $\alpha : T \rightarrow R - \{1\}$ olmak üzere

$$\triangleleft_t((x, y), t) = \log_{\alpha(t)} \left(1 + \frac{(\alpha(t)^x - x)(\alpha(t)^y - y)}{(\alpha(t) - x)} \right)$$

ve

$$\triangleright_t((x, y), t) = 1 - \Delta_t^2(((1-x), (1-y)), t)$$

ile tanımlı $\Delta_t : ([0, 1] \times [0, 1]) \times T \rightarrow [0, 1]$ ve $\nabla_t : ([0, 1] \times [0, 1]) \times T \rightarrow [0, 1]$ dönüşümleri X ve T üzerinde sırasıyla geçici fuzzy t-norm ve t-conorm tanımlar.

Fuzzy küme teorisi ve genelleştirmelerinde önemli bir diğer küme işlemi değilleme işlemidir. Bu kavram klasik küme teorisindeki tümlleme işleminin genelleştirmesidir. Fuzzy, sezgisel fuzzy ve geçici sezgisel fuzzy kümelerde tanımlanmış olan bu işlem geçici fuzzy kümelerde tanımlanmamıştır. Fuzzy değilleme işlemlerinin zamansal olarak genelleştirilmesi aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 4.1.3: T bir zaman kümesi ve $t \in T$ için $N_t : [0,1] \times T \rightarrow [0,1]$ dönüşümü eğer aşağıdaki şartları sağlıyorsa bir t anında bir geçici fuzzy değilleme adını alır.

$$N1. N_t(0,t)=1, N_t(1,t)=0.$$

N2. N_t birinci bileşene göre artmayan fonksiyondur. Yani $a \leq b$ ise

$$N_t(b,t) \leq N_t(a,t)$$

Bu şartlara ek olarak N_t birinci bileşene göre monoton azalan ve sürekli bir dönüşüm ise geçici tam değilleme adını alır. Eğer N_t , $t \in T$ ve tüm $a \in [0,1]$ için $N_t(N_t(a,t),t)=a$ şartını sağlıyorsa t anında geçici fuzzy güçlü (strong) değilleme denir.

Örnek 4.1.3: $\lambda : T \rightarrow (-1, \infty)$ olarak tanımlanmak üzere $N_t(x,t) = \frac{1-x}{1+\lambda(t)x}$ ile tanımlı

$N_t : [0,1] \times T \rightarrow [0,1]$ dönüşümü bir geçici fuzzy güçlü değillemedir. $\lambda(t)=0$ olduğu durumlarda bu değilleme fuzzy standart değillemesine dönüşür.

İspat: Standart değillemenin güçlü değilleme olma şartlarını sağladığını gösterelim.

$$i) N_t(0,t) = \frac{1-0}{1+\lambda(t)0} = 1 \text{ ve } N_t(1,t) = \frac{1-1}{1+\lambda(t)1} = 0 \text{ dır.}$$

$$ii) x < y \Rightarrow N_t(x,t) = \frac{1-x}{1+\lambda(t)x} > \frac{1-y}{1+\lambda(t)y} = N_t(y,t) \text{ olduğundan monoton azalandır,}$$

$$iii) N_t(x,t) = \frac{1-x}{1+\lambda(t)x} \text{ olduğundan } N_t : [0,1] \times T \rightarrow [0,1] \text{ süreklidir,}$$

$$iv) \lambda(t)=0 \text{ için } N_t(N_t(x,t)) = N_t\left(\frac{1-x}{1+\lambda(t)x}\right) = \frac{1-\left(\frac{1-x}{1+\lambda(t)x}\right)}{1+\lambda(t)\left(\frac{1-x}{1+\lambda(t)x}\right)} = x \text{ olduğundan}$$

involüsyon özelliğini sağlar. Böylece $N_t(x,t) = \frac{1-x}{1+\lambda(t)x}$ dönüşümünün bir geçici

fuzzy güçlü değilleme olma şartlarını sağladığı görülür.

Örnek 4.1.4: $\alpha : T \rightarrow (0, \infty)$ olarak tanımlanmak üzere $N_t(x, t) = \sqrt[\alpha(t)]{1 - x^{\alpha(t)}}$ ile tanımlı $N_t : [0, 1] \times T \rightarrow [0, 1]$ dönüşümü bir geçici fuzzy güçlü değillemedir. $\alpha(t) = 1$ olduğu durumlarda bu değilleme fuzzy standart değillemesine dönüşür.

İspat: Standart değillemenin güçlü değilleme olma şartlarını sağladığını gösterelim.

- i) $N_t(x, t) = N_t(0, t) = \sqrt[\alpha(t)]{1 - 0^{\alpha(t)}} = 1$ ve $N_t(x, t) = N_t(1, t) = \sqrt[\alpha(t)]{1 - 1^{\alpha(t)}} = 0$ dır.
- ii) $x < y \Rightarrow N_t(x, t) = \sqrt[\alpha(t)]{1 - x^{\alpha(t)}} > \sqrt[\alpha(t)]{1 - y^{\alpha(t)}} = N_t(y, t)$ olduğundan monoton azalandır,
- iii) $N_t(x, t) = \sqrt[\alpha(t)]{1 - x^{\alpha(t)}}$ ile $N_t : [0, 1] \times T \rightarrow [0, 1]$ dönüşümünün sürekli olduğu aşıkardır.
- iv) $\alpha(t) = 1$ için $N_t(N_t(x, t)) = N_t\left(\sqrt{1 - x}, t\right) = 1 - \left(\sqrt{1 - x}\right) = 1 - (1 - x) = x$ şartları sağladığından bir geçici fuzzy güçlü değillemedir.

Tanım 4.1.4: $*_t$, t-norm, $\diamond_t$, s-norm ve N_t güçlü değilleme olmak üzere $(\diamond_s, *_t, N_t)$ üçlüsüne eğer $\forall x, y \in [0, 1]$ için $\diamond_t((x, y), t) = N_t(*_t((N_t(x, t), N_t(y, t)), t), t)$ şartını sağlıyorsa t anında bir geçici fuzzy De Morgan üçlüsü denir.

Klasik küme teorisinde De Morgan Kuralı'nın genelleştirilmesi olan bu tanım özellikle fuzzy kümeler ve onun diğer genelleştirmeleri ile kurulan sistemlerin tutarlılığı konusunda önemli bir role sahiptir.

Önerme 4.1.1: $(\diamond_s, *_t, N_t)$ t anında bir geçici fuzzy De Morgan üçlüsü ise $*_t((x, y), t) = N_t((\diamond_t(N_t(x, t), N_t(y, t)), t), t)$ sağlanır.

İspat: $(\diamond_s, *_t, N_t)$ t anında bir geçici fuzzy De Morgan üçlüsü olduğundan $\diamond_t((N_t(x, t), N_t(y, t)), t) = N_t(*_t((N_t(N_t(x, t), t), N_t(N_t(y, t), t)), t), t)$ eşitliği yazılabilir. Buradan $\diamond_t((N_t(x, t), N_t(y, t)), t) = N_t(*_t((x, t), (y, t)))$ elde edilir. Son eşitliğin her iki tarafı N_t değilleme işlemine tabi tutulursa N_t geçici fuzzy güçlü

değilleme olduğundan $*_t((x,t),(y,t)) = N_t(\left(\diamond_t(N_t(x,t), N_t(y,t)), t\right))$ eşitliği elde edilir.

Örnek 4.1.5: Her $x, y \in [0,1]$ ve $t \in T$ için $\alpha : T \rightarrow R - \{1\}$ olmak üzere

$$\triangleleft_t((x,y),t) = \log_{\alpha(t)} \left(1 + \frac{(\alpha(t)^x - x)(\alpha(t)^y - y)}{(\alpha(t) - x)} \right)$$

ve

$$\triangleright_t((x,y),t) = 1 - \Delta_t^2(((1-x), (1-y)), t)$$

ile tanımlı $\Delta_t : ([0,1] \times [0,1]) \times T \rightarrow [0,1]$ ve $\nabla_t : ([0,1] \times [0,1]) \times T \rightarrow [0,1]$ t-norm ve t-conormu; $\lambda : T \rightarrow (-1, \infty)$ olmak üzere $N_t(x,t) = \frac{1-x}{1+\lambda(t)x}$ güçlü değillemesi ile bir geçici fuzzy De Morgan Üçlüsü oluşturur.

4.2. Geçici Sezgisel Fuzzy Metrik Uzaylar

Tanım 4.2.1: X boştan farklı bir küme, T zaman kümesi, $*_t$ sürekli geçici t -norm ve $\diamond_t$ sürekli geçici t -conorm olsun. $M_t : X \times X \times (0, \infty) \times T \rightarrow [0,1]$ ve $N_t : X \times X \times (0, \infty) \times T \rightarrow [0,1]$, belirli bir $t \in T$ için her $x, y, z \in X$ ve $n, n_1, n_2 > 0$ için aşağıdaki şartları sağlayan dönüşümler ise $(X, T, M_t, N_t, *_t, \diamond_t)$ sıralı altılısına t -anında geçici sezgisel fuzzy metrik uzay (temporal intuitionistic fuzzy metric space) denir.

- $M_t(x, y, n, t) + N_t(x, y, n, t) \leq 1$
- $M_t(x, y, n, t) \geq 0$
- $M_t(x, y, n, t) = 1 \Leftrightarrow x = y$
- $M_t(x, y, n, t) = M_t(y, x, n, t)$
- $*_t((M_t(x, y, n_1, t), M_t(y, z, n_2, t)), t) \leq M_t(x, z, n_1 + n_2, t)$

- f. $M_t(x, y, ., t) : (0, \infty) \rightarrow (0, 1]$ sürekli.
- g. $N_t(x, y, n, t) \leq 1$
- h. $N_t(x, y, n, t) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- i. $N_t(x, y, n, t) = N_t(y, x, n, t)$
- j. $\diamond_t((N_t(x, y, n_1, t), N_t(y, z, n_2, t)), t) \geq N_t(x, z, n_1 + n_2, t)$
- k. $N_t(x, y, ., t) : (0, \infty) \rightarrow (0, 1]$ süreklidir.
- l. $M_t(x, y, n, .) : T \rightarrow (0, 1]$ ve $N_t(x, y, n, .) : T \rightarrow (0, 1]$ süreklidir.

Bu kabuller altında (M_t, N_t) ikilisine X üzerinde tanımlı geçici sezgisel fuzzy metrik denir. $M_t(x, y, n, t)$ ve $N_t(x, y, n, t)$ sayılarına sırasıyla x ve y 'nin t anında n kadar yakın olma ve yakın olmama derecesi denir. Bu tanımdaki şartlar belirli bir t anında sağlanabileceği gibi aynı zamanda zaman kümesinin tamamında da sağlanabilir. $(X, T, M_t, N_t, *_t, \diamond_t)$ sıralı altısına bir genel (overall) sezgisel fuzzy metrik uzay denir.

Örnek 4.2.1: (X, d) klasik metrik uzay, T zaman kümesi, $*_t((x, y), t) = \min\{x, y\}$ ve $\diamond_t((x, y), t) = \max\{x, y\}$, $\alpha : T \rightarrow R^+$ bir dönüşüm olmak üzere her $x, y \in X$ ve $n, n_1, n_2 > 0$ için $M_t : X \times X \times (0, \infty) \times T \rightarrow [0, 1]$, $N_t : X \times X \times (0, \infty) \times T \rightarrow [0, 1]$ dönüşümleri aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$M_t((x, y), n, t) = \frac{n^{\alpha(t)}}{n^{\alpha(t)} + d(x, y)},$$

$$N_t((x, y), n, t) = \frac{d(x, y)}{n^{\alpha(t)} + d(x, y)}.$$

bu kabuller ile birlikte $(X, T, M_t, N_t, *_t, \diamond_t)$ sıralı altılısı geçici sezgisel fuzzy metrik uzay teşkil eder.

İspat: $(X, T, M_t, N_t, *_t, \diamond_t)$ sıralı altılısının geçici sezgisel fuzzy metrik uzay olduğunu göstermek için Tanım 4.2.1'deki şartları sağladığını gösterilmelidir. Her $x, y \in X$ ve $n, n_1, n_2 > 0$ için:

a. $M_t(x, y, n, t) + N_t(x, y, n, t) = \frac{n^{\alpha(t)}}{n^{\alpha(t)} + d(x, y)} + \frac{d(x, y)}{n^{\alpha(t)} + d(x, y)} = 1$.

b. $n^{\alpha(t)} > 0$ ve $d(x, y) \geq 0$ olduğundan $M_t(x, y, n, t) = \frac{n^{\alpha(t)}}{n^{\alpha(t)} + d(x, y)} \geq 0$

c. $M_t(x, y, n, t) = 1 \Rightarrow \frac{n^{\alpha(t)}}{n^{\alpha(t)} + d(x, y)} = 1$ olduğundan $d(x, y) = 0$ bulunur. d

klasik bir metrik olduğundan $x = y$ 'dir. Diğer taraftan $x = y$ ise

$$M_t(x, y, n, t) = \frac{n^{\alpha(t)}}{n^{\alpha(t)} + d(x, y)} = \frac{n^{\alpha(t)}}{n^{\alpha(t)}} = 1 \text{ eşitliği elde edilir.}$$

d. $M_t(x, y, n, t) = \frac{n^{\alpha(t)}}{n^{\alpha(t)} + d(x, y)} = \frac{n^{\alpha(t)}}{n^{\alpha(t)} + d(y, x)} = M_t(y, x, n, t)$

e. $*_t((M_t(x, y, n_1, t), M_t(y, z, n_2, t)), t) = \min \left\{ \frac{n_1^{\alpha(t)}}{n_1^{\alpha(t)} + d(x, y)}, \frac{n_2^{\alpha(t)}}{n_2^{\alpha(t)} + d(y, z)} \right\}$

olduğundan genelliği bozmadan

$$*_t((M_t(x, y, n_1, t), M_t(y, z, n_2, t)), t) = \frac{n_2^{\alpha(t)}}{n_2^{\alpha(t)} + d(y, z)}$$

kabul edilebilir. Bu durumda $\frac{n_1^{\alpha(t)}}{n_1^{\alpha(t)} + d(x, y)} \geq \frac{n_2^{\alpha(t)}}{n_2^{\alpha(t)} + d(y, z)}$ olduğu anlaşılır.

Bu eşitsizlikten $\frac{d(y, z)}{d(x, y)} \geq \frac{n_2^{\alpha(t)}}{n_1^{\alpha(t)}}$ eşitsizliği elde edilir. Diğer taraftan

$*_t((M_t(x, y, n_1, t), M_t(y, z, n_2, t)), t) > M_t(x, z, n_1 + n_2, t)$ olduğunu kabul

edelim. $\frac{n_2^{\alpha(t)}}{n_2^{\alpha(t)} + d(y, z)} > \frac{(n_1 + n_2)^{\alpha(t)}}{(n_1 + n_2)^{\alpha(t)} + d(x, z)}$ eşitsizliğinden

$\frac{d(x, z)}{d(y, z)} \geq \frac{(n_1 + n_2)^{\alpha(t)}}{n_1^{\alpha(t)}} > 1 + \frac{n_2^{\alpha(t)}}{n_1^{\alpha(t)}} > 1 + \frac{d(x, y)}{d(y, z)}$ eşitsizliği elde edilir. Bu son

eşitsizlikten $d(x, z) > d(x, y) + d(y, z)$ eşitsizliği elde edilir. Bu ise bir

çelişkidir. Bu çelişki $*_t((M_t(x, y, n_1, t), M_t(y, z, n_2, t)), t) > M_t(x, z, n_1 + n_2, t)$

kabul edilmesi ile doğmuştur. Bu nedenle

$$*_t \left((M_t(x, y, n_1, t), M_t(y, z, n_2, t)), t \right) \leq M_t(x, z, n_1 + n_2, t) \text{ olduğu anlaşılır.}$$

f. Sabit olarak düşünülen x, y ve t için $M_t(x, y, n, t) = \frac{n^{\alpha(t)}}{n^{\alpha(t)} + d(x, y)}$

dönüşümünün sürekliliği aşıkardır.

g. $N_t(x, y, n, t) = \frac{d(x, y)}{n^{\alpha(t)} + d(x, y)} \leq 1$

h. $N_t(x, y, n, t) = \frac{d(x, y)}{n^{\alpha(t)} + d(x, y)} = 0 \Rightarrow d(x, y) = 0$ ifadesi elde edilir. d klasik bir

metrik olduğundan $x = y$ 'dir. Diğer taraftan $x = y$ ise

$$M_t(x, y, n, t) = \frac{d(x, y)}{n^{\alpha(t)} + d(x, y)} = \frac{0}{n^{\alpha(t)}} = 0 \text{ eşitliği elde edilir.}$$

i. $N_t(x, y, n, t) = \frac{d(x, y)}{n^{\alpha(t)} + d(x, y)} = \frac{d(y, x)}{n^{\alpha(t)} + d(y, x)} = N_t(y, x, n, t)$

j. $\diamond_t \left((N_t(x, y, n_1, t), N_t(y, z, n_2, t)), t \right) = \max \left\{ \frac{d(x, y)}{n_1^{\alpha(t)} + d(x, y)}, \frac{d(y, z)}{n_2^{\alpha(t)} + d(y, z)} \right\}$

olduğundan genelliği bozmadan

$$\max \left\{ \frac{d(x, y)}{n_1^{\alpha(t)} + d(x, y)}, \frac{d(y, z)}{n_2^{\alpha(t)} + d(y, z)} \right\} = \frac{d(x, y)}{n_1^{\alpha(t)} + d(x, y)}$$

Kabul edilebilir. Buradan $\frac{d(x, y)}{n_1^{\alpha(t)} + d(x, y)} \geq \frac{d(y, z)}{n_2^{\alpha(t)} + d(y, z)}$ eşitsizliği elde edilir.

Bu eşitsizlikten $\frac{d(x, y)}{d(y, z)} \geq \frac{n_1^{\alpha(t)}}{n_2^{\alpha(t)}}$ eşitsizliği elde edilir. Diğer taraftan

$$\diamond_t \left((N_t(x, y, n_1, t), N_t(y, z, n_2, t)), t \right) < N_t(x, z, n_1 + n_2, t) \text{ kabul edilsin. Böylece}$$

$$\frac{d(x, y)}{n_1^{\alpha(t)} + d(x, y)} < \frac{d(x, z)}{(n_1 + n_2)^{\alpha(t)} + d(x, z)} \text{ eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikten}$$

$$1 + \frac{d(x, y)}{d(y, z)} \leq 1 + \frac{n_2^{\alpha(t)}}{n_1^{\alpha(t)}} < \frac{(n_1 + n_2)^{\alpha(t)}}{n_1^{\alpha(t)}} < \frac{d(x, z)}{d(y, z)} \text{ eşitsizliği elde edilir. Bu son}$$

eşitsizlikten $d(x, y) + d(y, z) < d(x, z)$ eşitsizliği elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Bu çelişki $\diamond_t((N_t(x, y, n_1, t), N_t(y, z, n_2, t)), t) > N_t(x, z, n_1 + n_2, t)$ kabul edilmesi ile doğmuştur. Bu nedenle $\diamond_t((N_t(x, y, n_1, t), N_t(y, z, n_2, t)), t) \leq N_t(x, z, n_1 + n_2, t)$ olduğu anlaşılır.

k. Sabit olarak ele alınan x, y ve t için $N_t(x, y, ., t) = \frac{d(x, y)}{n^{\alpha(t)} + d(x, y)}$ dönüşümünün

sürekliliği aşıkardır.

Bu şartları sağlaması nedeniyle yukarıdaki seçimler ile birlikte $(X, T, M_t, N_t, *, \diamond_t)$ sıralı altılısının geçici sezgisel fuzzy metrik uzay olduğu anlaşılır. Bununla birlikte

l. Sabit olarak ele alınan x, y ve n için $M_t(x, y, n, .) = \frac{n^{\alpha(t)}}{n^{\alpha(t)} + d(x, y)}$ ve

$N_t(x, y, n, .) = \frac{d(x, y)}{n^{\alpha(t)} + d(x, y)}$ dönüşümünün sürekliliği aşıkardır.

Örnek 4.2.2'den anlaşılacağı üzere her klasik metrikten bir geçici (aynı zamanda genel) sezgisel fuzzy metrik uzay elde dileyebilir. Ayrıca M_t ve N_t dönüşümlerinin

$h, k, m, n \in \mathbb{R}^+$ için $M_t(x, y, n, t) = \frac{hn^{\alpha(t)}}{hn^{\alpha(t)} + md(x, y)}$ ve

$N_t((x, y), n, t) = \frac{d(x, y)}{kn^{\alpha(t)} + md(x, y)}$ olarak alınmasıyla oluşturulan $(X, T, M_t, N_t, *, \diamond)$

sıralı altılısının geçici sezgisel fuzzy metrik uzayı olduğu yukarıdaki şekilde gösterilebilir. Özel olarak $h = k = m = n = 1$ alındığında ise

$\mu_{M_t}((x, y), n, t) = \frac{n^{\alpha(t)}}{n^{\alpha(t)} + d(x, y)}$ ve $\mu_{N_t}((x, y), n, t) = \frac{d(x, y)}{n^{\alpha(t)} + d(x, y)}$ ile elde edilen

geçici sezgisel fuzzy metrik uzaya $\alpha(t)$ - standart geçici sezgisel fuzzy metrik uzayı metrik uzayı denir. $\forall t \in T$ için $\alpha(t) = 1$ olması durumunda standart sezgisel fuzzy uzaya dönüşeceği aşıkardır.

Örnek 4.2.2: Her $x, y \in [0, 1]$ ve $t \in T$ için $\alpha: T \rightarrow (0, 1]$ olmak üzere

$$\Delta_t((x, y), t) = \begin{cases} xy & , \quad x = 1 \text{ veya } y = 1 \\ \alpha(t)xy & , \quad \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

ve

$$\nabla_t((x, y), t) = \begin{cases} x + y - xy & , \quad x = 0 \text{ veya } y = 0 \\ x + y - \alpha(t)xy & , \quad \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

ile tanımlı $\Delta_t : ([0, 1] \times [0, 1]) \times T \rightarrow [0, 1]$ ve $\nabla_t : ([0, 1] \times [0, 1]) \times T \rightarrow [0, 1]$ geçici fuzzy t-norm ve t-conormları ile birlikte $\beta : T \rightarrow \mathbb{N}$ azalmayan dönüşümü olmak üzere $M_t : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times (0, \infty) \times T \rightarrow [0, 1]$, $N_t : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times (0, \infty) \times T \rightarrow [0, 1]$, aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$M_t(x, y, n, t) = \begin{cases} \left(\frac{x}{y}\right)^{\beta(t)} & , \quad x \leq y \\ \left(\frac{y}{x}\right)^{\beta(t)} & , \quad y \leq x \end{cases}$$

$$N_t(x, y, n, t) = \begin{cases} \left(\frac{y-x}{y}\right)^{\beta(t)} & , \quad x \leq y \\ \left(\frac{x-y}{x}\right)^{\beta(t)} & , \quad y \leq x \end{cases} .$$

bu kabuller ile birlikte $(X, T, M_t, N_t, \Delta_t, \nabla_t)$ sıralı altılısı geçici sezgisel fuzzy metrik uzay teşkil eder.

İspat:

a. Genelliği bozmadan $x \leq y$ kabul edilebilir. Böylece $\beta(t) : T \rightarrow \mathbb{N}$ azalmayan

bir fonksiyon olduğundan $\left(\frac{x}{y}\right)^{\beta(t)} \leq \left(\frac{x}{y}\right)$ ve $\left(\frac{y-x}{y}\right)^{\beta(t)} \leq \left(\frac{y-x}{y}\right)$ aşıkardır.

$$M_t(x, y, n, t) + N_t(x, y, n, t) = \left(\frac{x}{y}\right)^{\beta(t)} + \left(\frac{y-x}{y}\right)^{\beta(t)} \leq \left(\frac{x}{y}\right) + \left(\frac{y-x}{y}\right) = 1 \text{ eşitsizliği}$$

elde edilir.

b. $x, y \in \mathbb{N}$ ve her $t \in T$ için $\beta(t) \in \mathbb{N}$ için $\left(\frac{x}{y}\right)^{\beta(t)} > 0$ olduğundan

$M_t(x, y, n, t) > 0$ olduğu açıktır.

c. $\forall x, y \in X \ t > 0$ için $M_t(x, y, n, t) = 1 \Leftrightarrow x = y$ olduğunu gösterelim. Öncelikle

$x = y$ kabul edilsin. $M_t(x, y, n, t) = \left(\frac{x}{y}\right)^{\beta(t)} = 1$ eşitliği elde edilir. Diğer taraftan

$M_t(x, y, n, t) = \left(\frac{x}{y}\right)^{\beta(t)} = 1$ ise $\frac{x}{y} = 1$ ve buradan $x = y$ elde edilir.

d. $\forall x, y \in \mathbb{N}$ ve her $t > 0$ için

$$M_t(x, y, n, t) = \begin{cases} \left(\frac{x}{y}\right)^{\beta(t)}, & x \leq y \\ \left(\frac{y}{x}\right)^{\beta(t)}, & y \leq x \end{cases} = \begin{cases} \left(\frac{y}{x}\right)^{\beta(t)}, & y \leq x \\ \left(\frac{x}{y}\right)^{\beta(t)}, & x \leq y \end{cases} = M_t(y, x, n, t)$$

ifadesi ile eşitliğin sağlandığı görülür.

e. $\forall x, y, z \in \mathbb{N}$ ve $t \in T$ için $*_t((M_t(x, y, n, t), M_t(y, z, n, t)), t) \leq M_t(x, z, n, t)$

olduğunu görelim. Genelliği bozmadan $x \leq y \leq z$ olduğunu kabul edelim. Bu

durumda $*_t((M_t(x, y, n, t), M_t(y, z, n, t)), t) = \alpha(t) \cdot M_t(x, y, n, t) \cdot M_t(y, z, n, t)$.

Tanımdan dolayı $\alpha(t) \left(\frac{x}{y}\right)^{\beta(t)} \cdot \left(\frac{y}{z}\right)^{\beta(t)} = \alpha(t) \left(\frac{x}{z}\right)^{\beta(t)}$ eşitliği elde edilir.

$\alpha(t) \in (0, 1]$ olduğundan

$$*_t((M_t(x, y, n, t), M_t(y, z, n, t)), t) = \alpha(t) \left(\frac{x}{z}\right)^{\beta(t)} \leq \left(\frac{x}{z}\right)^{\beta(t)} = M_t(x, z, n, t)$$

eşitsizliği

elde

edilir.

Buradan

$*_t((M_t(x, y, n, t), M_t(y, z, n, t)), t) \leq M_t(x, z, n, t)$ olduğu anlaşılır.

f. $M_t(x, y, n, t)$ dönüşümü n değişkenine göre sabit olduğundan n 'e göre sürekliliği aşıkardır.

g. Genelliği bozmadan $x \leq y$ kabul edelim ve her $t \in T$ için

$$N_t(x, y, n, t) = \left(\frac{y-x}{y}\right)^{\beta(t)} \geq 0 \text{ olduğu açıktır.}$$

h. $N_t(x, y, n, t) = \left(\frac{y-x}{y}\right)^{\beta(t)} = 0 \Rightarrow y-x=0$ olduğundan $x=y$ 'dir. Diğer taraftan

$x=y$ ise $N_t(x, y, n, t) = \left(\frac{y-x}{y}\right)^{\beta(t)} = 0$ eşitliği elde edilir.

i. $\forall x, y \in \mathbb{N}$ ve her $t > 0$ için

$$N_t(x, y, n, t) = \begin{cases} \left(\frac{y-x}{y}\right)^{\beta(t)}, & x \leq y \\ \left(\frac{x-y}{x}\right)^{\beta(t)}, & y \leq x \end{cases} = \begin{cases} \left(\frac{x-y}{x}\right)^{\beta(t)}, & y \leq x \\ \left(\frac{y-x}{y}\right)^{\beta(t)}, & x \leq y \end{cases} = N_t(y, x, n, t)$$

ifadesi ile eşitliğin sağlandığı görülür.

j. Genelliği bozmadan $x \leq y \leq z$ kabul edilsin. Bu durumda $\frac{z-x}{z} \leq \frac{z-y}{z} + \frac{y-x}{y}$

olduğundan $\diamond_t((N_t(x, y, n, t), N_t(y, z, n, t)), t) \geq N_t(x, z, n, t)$ eşitsizliği açıkça görülür.

k. $N_t(x, y, n, t)$ dönüşümü n değişkenine göre sabit olduğundan n 'e göre sürekliliği aşıkardır.

Örnek 4.2.2'de tanımlanan geçici sezgisel fuzzy metriğin en önemli özelliği klasik bir metriktir elde edilemez oluşudur. Böylece geçici sezgisel fuzzy metrik uzaylar ailesinin klasik metrik ailesinden daha geniş bir aile olduğu anlaşılır. Bununla birlikte yukarıda tanımlanan geçici sezgisel fuzzy metrik uzayın aynı zamanda genel fuzzy metrik uzay olduğu da açıktır.

4.3. Geçici Sezgisel Fuzzy Metrik Uzay ile Üretilen Topolojik Uzay ve Temel Özellikleri

Tanım 4.3.1: $(X, T, M_t, N_t, *_t, \diamond_t)$ bir geçici sezgisel fuzzy metrik uzay $r \in (0, 1)$, $n > 0$ ve $t \in T$ olmak üzere $B_t(x, r, n, t) = \{y \in X; M_t(x, y, n, t) > 1-r, N_t(x, y, n, t) < r\}$ ile tanımlı kümeye t anında x merkezli r yarıçaplı geçici açık yuvar denir. Burada

tanımlanan açık yuvarın sezgisel fuzzy metrik ile üretilen açık yuvardan farkı zaman parametresine bağlı oluşudur. Yani açık yuvarlar uzaklık ölçümünün yapıldığı ana bağlı olarak değişirler. Temelde klasik, fuzzy ve sezgisel fuzzy metrik uzaylarda tanımlanan açık yuvar tanımına eş değer olan bu tanım önceki uzaylardan daha geniş bir tanımlama olmakla beraber bu uzaylardaki açık yuvar özelliklerini de korumaktadır. Bu özelliklerden en önemlileri aşağıdaki teoremler ile gösterilmiştir.

Teorem 4.3.1: $(X, T, M_t, N_t, *, \diamond_t)$ bir geçici sezgisel fuzzy metrik uzay $r \in (0, 1)$, $n > 0$ ve $t \in T$ olmak üzere $B_t(x, r, n, t)$ geçici açık yuvarı bir açık kümedir.

İspat: $B_t(x, r, n, t)$, x merkezli ve r yarıçaplı geçici açık yuvarını ele alalım. $y \in B_t(x, r, n, t)$ keyfi bir nokta olsun. Bu noktanın bir iç nokta olduğunu gösterelim. $B_t(x, r, n, t)$ nin tanımından $y \in B_t(x, r, n, t)$ ise $M_t(x, y, n, t) > 1-r$ ve $N_t(x, y, n, t) < r$ olur. Bu durumda $M_t(x, y, n_0, t) > 1-r$ ve $N_t(x, y, n_0, t) < r$ olacak biçimde $0 < n_0 < n$ şartını sağlayan bir n_0 bulunabilir. $r_0 = M_t(x, y, n_0, t)$ olsun. $r_0 = M_t(x, y, n, t_0) > 1-r$ olduğundan $r_0 > 1-s > 1-r$ olacak biçimde $0 < s < 1$ şartını sağlayan bir s bulunabilir. Ayrıca $r_0 > 1-s$ olacak biçimde verilen r_0 ve s için t -anında $*_t((r_0, r_1), t) \geq 1-s$ ve $\diamond_t(((1-r_0), (1-r_2)), t) < s$ olacak şekilde bir $r_1, r_2 \in (0, 1)$ vardır. Şimdi $B_t(y, 1-r_1, n-n_0, t)$ açık yuvarını göz önüne alalım. $B_t(y, 1-r_3, n, t-t_0) \subset B_t(x, r, n, t)$ olduğunu gösterelim. Eğer $z \in B_t(y, 1-r_3, n, t-t_0)$ ise $M_t(y, z, n, t-t_0) > r_3$ ve $N_t(y, z, n, t-t_0) < 1-r_3$ olur. Buradan $M_t(x, z, n, t) \geq *_t((M_t(x, y, n, t_0), M_t(y, z, n, t-t_0)), t) > *_t((r_0, r_3), t) \geq *_t((r_0, r_1), t) \geq 1-s > 1-r$ ve $N_t(x, z, n, t) \leq \diamond_t((N_t(x, y, n, t_0), N_t(y, z, n, t-t_0)), t) \leq \diamond_t(((1-r_0), (1-r_3)), t) \leq \diamond_t(((1-r_0), (1-r_2)), t) \leq s < r$ olacağından $z \in B_t(x, r, n, t)$ olur. Böylece $z \in B_t(y, 1-r_3, n, t-t_0) \subset B_t(x, r, n, t)$ bulunur. Böylece $B_t(x, r, n, t)$ geçici açık yuvarının açık küme olduğu anlaşılır.

Yukarıdaki teoremden anlaşılacağı üzere geçici sezgisel fuzzy metrik ile elde edilen geçici açık yuvarlar açık kümelerdir. Böylece geçici sezgisel fuzzy metrik uzay ile geçici bir topolojinin üretilebileceği anlaşılmaktadır.

Teorem 4.3.2: Boştan farklı X kümesi ve T zaman kümesi üzerinde $(X, T, M_t, N_t, *, \diamond_t)$ bir geçici sezgisel fuzzy metrik uzay olsun.

$$\tau_{(M_t, N_t)} = \{A \subset X : \forall x \in A \text{ için } \exists t > 0 \text{ ve } r \in (0, 1) \text{ vardır öyle ki } B_t(x, r, n, t) \subset A\}$$

şeklinde tanımlanan $\tau_{(M_t, N_t)}$, t -anında X üzerinde bir topolojidir.

İspat: (T_1) $\emptyset$ kümenin hiçbir elemanı olmadığından $\emptyset$ nin elemanlarını merkez kabul eden geçici açık yuvar da boştur. O halde $\emptyset \in \tau_{(M_t, N_t)}$ dir. $\forall x \in X$ ve $r > 0$ için

$B_{(M_t, N_t)}(x, r, n, t) \subset X$ olduğundan $X \in \tau_{(M_t, N_t)}$ olur. Böylece $X, \emptyset \in \tau_{(M_t, N_t)}$ dir.

(T_2) $A_1(t), A_2(t), A_3(t), \dots, A_n(t) \in \tau_{(M_t, N_t)}$ olsun.

(i) $\bigcap_{i=1}^n A_i(t) = \emptyset \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n A_i(t) \in \tau_{(M_t, N_t)}$ dir.

(ii) $\bigcap_{i=1}^n A_i(t) \neq \emptyset$ ve $x \in \bigcap_{i=1}^n A_i(t)$ olsun. Bu durumda $\forall i = 1, 2, \dots, n$ için $x \in A_i(t)$ ve

$A_i(t) \in \tau_{(M_t, N_t)}$ olduğundan $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $B_{(M_t, N_t)}(x, r_i, n, t_i) \subset A_i(t)$ olacak

biçimde $0 < r_i < 1$ ve $t_i > 0$ vardır. $r = \min\{r_i : i = 1, \dots, n\}$ ve $t = \max\{t_i : i = 1, \dots, n\}$

olsun. Buraadan $\forall i = 1, 2, \dots, n$ için $B_{(M_t, N_t)}(x, r, n, t) \subset B_{(M_t, N_t)}(x, r_i, n, t_i) \subset A_i(t)$

olacak biçimde $0 < r < 1$ ve $t > 0$ bulunmuş olur. Bu durumda

$x \in B_{(M_t, N_t)}(x, r, n, t) \subset \bigcap_{i=1}^n A_i(t)$ elde edilir ki bu $\bigcap_{i=1}^n A_i(t) \in \tau_{(M_t, N_t)}$ demektir.

(T_3) $\{A_i(t)\}_{i \in I} \subset \tau_{(M_t, N_t)}$ iken $\bigcup_{i \in I} A_i(t) \in \tau_{(M_t, N_t)}$ olduğunu görelim.

(i) $\bigcup_{i \in I} A_i(t) = \emptyset$ ise $\bigcup_{i \in I} A_i(t) \in \tau_{(M_t, N_t)}$ olduğu açıktır.

(ii) $x \in \bigcup_{i \in I} A_i(t) \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda $\exists i_0 \in I$ için $x \in A_{i_0}(t)$ dir. $A_{i_0}(t) \in \tau_{(M_t, N_t)}$

oldüğundan $B_{(M_t, N_t)}(x, r, n, t) \subset A_{i_0}(t)$ olacak biçimde $0 < r < 1$ ve $t > 0$ vardır.

$$A_{i_0}(t) \subset \bigcup_{i \in I} A_i(t) \text{ olduğundan bir } 0 < r < 1 \text{ ve } t > 0 \text{ için } B_{(M_t, N_t)}(x, r, n, t) \subset \bigcup_{i \in I} A_i(t)$$

olur. O halde $\bigcup_{i \in I} A_i(t) \in \tau_{(M_t, N_t)}$ dur.

Böylece $\tau_{(M_t, N_t)}$, X üzerinde bir topolojidir.

$(X, T, M_t, N_t, *_t, \diamond_t)$ geçici sezgisel fuzzy metrik uzayı ile üretilen topolojinin açık yuvarları zamana bağlı olarak değişeceğinden topolojinin kendisi de zamana bağlı olarak değişecektir. Bu nedenle bu topolojinin geçici topoloji olarak isimlendirilmesi uygundur. Geçici topoloji klasik bir topoloji olduğundan klasik metrik uzayların sağladığı birçok özellik geçici topolojik uzaylar ile de sağlanabilmektedir. Bu iddia (George ve Veermani, 1994; Park, 2004; Zorlutuna ve Efe, 2012) çalışmalarındaki teorem ve ispat yöntemleri ile desteklenmektedir. Bu sayede fuzzy ve sezgisel fuzzy metrik uzayların sahip olduğu temel topolojik özelliklerinin korunduğu yeni ve daha genel bir metrik topolojisi elde edilmesi amaçlanmıştır.

Teorem 4.3.3: $(X, T, M_t, N_t, *_t, \diamond_t)$ bir geçici sezgisel fuzzy metrik uzayı Hausdorff uzaydır.

İspat: $(X, T, M_t, N_t, *_t, \diamond_t)$ bir geçici sezgisel fuzzy metrik uzay $x, y \in X$ ve $x \neq y$ olsun. $r_1 = M_t(x, y, n, t)$, $r_2 = N_t(x, y, n, t)$ ve $r = \max\{r_1, 1 - r_2\}$ olarak tanımlanmak üzere, $r < r_0 < 1$ şartını sağlayan her bir $r_0 \in (r, 1)$ için $*_t((r_3, r_3), t) \geq r_0$ ve $\diamond_t(((1 - r_4), (1 - r_4)), t) \leq 1 - r_0$ olacak şekilde $r_3, r_4 \in (0, 1)$ vardır. $r_5 = \max\{r_3, r_4\}$

olmak üzere $B_t\left(x, 1 - r_5, \frac{1}{2}n, t\right)$ ve $B_t\left(y, 1 - r_5, \frac{1}{2}n, t\right)$ açık yuvarlarını ele alalım.

Açıktır ki, yuvarların arakesiti boştur. Yani; $B_t\left(x, 1 - r_5, \frac{1}{2}n, t\right) \cap B_t\left(y, 1 - r_5, \frac{1}{2}n, t\right) = \emptyset$

dir. Aksi halde $z \in B_t\left(x, 1 - r_5, \frac{1}{2}n, t\right) \cap B_t\left(y, 1 - r_5, \frac{1}{2}n, t\right)$ olsaydı,

$$r_1 = M(x, y, n, t) \geq *_t \left(\left(M_t \left(x, z, \frac{1}{2}n, t \right), M_t \left(z, y, \frac{1}{2}n, t \right) \right), t \right) \geq *_t((r_5, r_5), t)$$

$\geq *_t((r_3, r_3), t) \geq r_0 > r_1$ ve benzer diğer taraftan,

$$r_2 = N_t(x, y, n, t) \leq \diamond_t \left(\left(N_t \left(x, z, \frac{1}{2}n, t \right), N_t \left(z, y, \frac{1}{2}n, t \right) \right), t \right) \leq$$

$\diamond_t(((1-r_5), (1-r_5)), t) \leq \diamond_t(((1-r_4), (1-r_4)), t) \leq 1-r_0 < r_2$ çelişkileri elde edilir. Bu

çelişkiler $B_t \left(x, 1-r_5, \frac{1}{2}n, t \right) \cap B_t \left(y, 1-r_5, \frac{1}{2}n, t \right) \neq \emptyset$ kabul edilmesinden doğmuştur.

Böylece $(X, T, M_t, N_t, *_t, \diamond_t)$ geçici sezgisel fuzzy metrik uzayının bir Hausdorff uzayı olduğu anlaşılır.

Fuzzy ve sezgisel fuzzy metrik uzaylarda verilmiş olan sınırlılık kavramı geçici sezgisel fuzzy metrik uzaylar için aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 4.3.2: $(X, T, M_t, N_t, *_t, \diamond_t)$ bir geçici sezgisel fuzzy metrik uzayı ve $A \subset X$ olsun. Eğer her $x, y \in A$ için $M_t(x, y, n, t) > 1-r$ ve $N_t(x, y, n, t) < r$ olacak şekilde $t > 0$ ve $r \in (0, 1)$ sayıları mevcut ise A kümesine geçici sezgisel fuzzy sınırlıdır (TIF-sınırlıdır) denir.

Teorem 4.3.4: $(X, T, M_t, N_t, *_t, \diamond_t)$ d metriği tarafından indirgenen bir geçici sezgisel fuzzy metrik uzayı ve A, X in bir alt kümesi olsun. A kümesinin TIF-sınırlı olması için gerek ve yeter şart A nın sınırlı olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$: $A \subset X$ kümesi TIF-sınırlı olsun. O halde $\forall x, y \in A$ için $M_t(x, y, n, t) > 1-r$ olacak biçimde $0 < r < 1$ ve $t > 0$ vardır. Buradan $a \in A$ için bir $x \in A \subset X$ alındığında $M_t(x, a, n, t) > 1-r$ olduğundan $a \in B_t(x, r, n, t)$ olur. Bu ise $A \subset B_t(x, r, n, t)$ olacak şekilde $x \in X$, $0 < r < 1$ ve $t > 0$ var demektir. Böylece A sınırlıdır.

($\Leftarrow$): $A \subset X$ kümesi sınırlı olsun. Buna göre $A \subset B_t(x, r, n, t)$ olacak şekilde $x \in X$ $0 < r < 1$ ve $t > 0$ vardır. O halde her $a, b \in A$ için $a, b \in B_t(x, r, n, t)$ olup $M_t(x, a, n, t) > 1-r$ ve $M_t(x, b, n, t) > 1-r$ dir. Buradan $\forall a, b \in A$ için $M_t(a, b, n, 2t) \geq M_t(a, x, n, t) * M_t(x, b, n, t) > (1-r) * (1-r)$ olur. Öte yandan $0 < r < 1$ için $(1-r) * (1-r) > 1-s$ olacak şekilde $0 < s < 1$ vardır. Şimdi $2t = t'$ denirse $\forall a, b \in A$ için $M_t(a, b, n, t') > 1-s$ olacak şekilde $t' > 0$ ve $0 < s < 1$ bulunur. Bu ise A nın F -sınırlı olduğunu verir.

Tanım 4.3.3: $(X, T, M_t, N_t, *, \diamond_t)$ bir geçici sezgisel fuzzy metrik uzay ve $\tau_{(M_t, N_t)}$, X üzerine fuzzy metrik tarafından oluşturulmuş topoloji ve (x_m) , X 'te bir dizi olmak üzere $t \in T$ anında her $0 < r < 1$ ve $n > 0$ için $m \geq m_0$ iken $x_m \in B_t(x, r, n, t)$ olacak şekilde $m_0 \in \mathbb{N}$ varsa (x_m) dizisi t anında $(X, T, M_t, N_t, *, \diamond_t)$ uzayına göre x 'e yakınsar denir.

Teorem 4.3.5: $(X, T, M_t, N_t, *, \diamond_t)$ bir geçici sezgisel fuzzy metrik uzay ve $\tau_{(M_t, N_t)}$, X üzerine fuzzy metrik tarafından oluşturulmuş topoloji ve $\{x_m\}$, X 'te bir dizi olmak üzere $t \in T$ anında (x_m) dizisinin $x \in X$ 'e yakınsaması için gerek ve yeter şart $\lim_{m \rightarrow \infty} M_t(x_m, x, n, t) = 1$ ve $\lim_{m \rightarrow \infty} N_t(x_m, x, n, t) = 0$ olmasıdır.

İspat: ($\Rightarrow$): $t \in T$ anında $x_m \rightarrow x$ olduğunu kabul edelim. Yakınsama tanımından her $0 < r < 1$ ve $n > 0$ için $m \geq m_0$ iken $x_m \in B_t(x, r, n, t)$ olacak şekilde bir $m_0 \in \mathbb{N}$ var olduğu anlaşılır. Açık yuvar tanımından $M_t(x_m, x, n, t) > 1-r$ ve $N_t(x_m, x, n, t) < r$ eşitsizlikleri elde edilir. Buradan $1 - M_t(x_m, x, n, t) < r$ ve $N_t(x_m, x, n, t) < r$ eşitsizlikleri her $m \geq m_0$ ve $0 < r < 1$ için geçerli olduğundan $\lim_{m \rightarrow \infty} M_t(x_m, x, n, t) = 1$ ve $\lim_{m \rightarrow \infty} N_t(x_m, x, n, t) = 0$ olduğu anlaşılır.

($\Leftarrow$): Her bir $n > 0$ için $\lim_{m \rightarrow \infty} M_t(x_m, x, n, t) = 1$ ve $\lim_{m \rightarrow \infty} N_t(x_m, x, n, t) = 0$ ise her $0 < r < 1$ için en az bir $m_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $m \geq m_0$ iken $1 - M(x_m, x, n, t) < r$ ve $N_t(x_m, x, n, t) < r$ olur. Buradan her $m \geq m_0$ için $x_m \in B_t(x, r, n, t)$ olduğu anlaşılır. Böylece $x_m \rightarrow x$ olduğu görülmüş olur.

Klasik metrik uzaylarda olduğu gibi fuzzy ve sezgisel fuzzy metrik uzaylarda da önemli bir yer teşkil eden Cauchy dizisi ve tamlık tanımları geçici sezgisel fuzzy metrik uzaylarda zikredilen metrik uzaylarda olduğu şekliyle korunur.

Tanım 4.3.4: $(X, T, M_t, N_t, *_t, \diamond_t)$ bir geçici sezgisel fuzzy metrik uzay olmak üzere

- $\{x_n\}$, X de bir dizi olmak üzere her $\varepsilon > 0$ ve $n > 0$ için $m, m' \geq m_0$ iken $M_t(x_m, x_{m'}, n, t) > 1 - \varepsilon$ ve $N_t(x_m, x_{m'}, n, t) < \varepsilon$ olacak $m_0 \in \mathbb{N}$ varsa $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir.
- $(X, T, M_t, N_t, *_t, \diamond_t)$ bir geçici sezgisel fuzzy metrik uzayında bir t anında her bir Cauchy dizisi $\tau_{(M_t, N_t)}$ topolojisine göre yakınsak ise $(X, T, M_t, N_t, *_t, \diamond_t)$ geçici sezgisel fuzzy metrik uzayına t -anında tamdır denir.

Teorem 4.3.6: $(X, T, M_t, N_t, *_t, \diamond_t)$ bir geçici sezgisel fuzzy metrik uzayında her yakınsak dizi Cauchy dizisidir.

İspat: $x_m \rightarrow x$ olsun. O halde her $\varepsilon > 0$ ve $n > 0$ için $m \geq m_0$ iken

$$M_t\left(x_m, x, \frac{n}{2}, t\right) > 1 - \varepsilon \quad \text{ve} \quad N_t\left(x_m, x, \frac{n}{2}, t\right) < \varepsilon$$
 eşitsizlikleri elde edilir. $m, m' \geq m_0$

seçilirse $M_t(x_m, x_{m'}, n, t) \geq *_t\left(\left(M_t\left(x_m, x, \frac{n}{2}, t\right), M_t\left(x_{m'}, x, \frac{n}{2}, t\right)\right), t\right) > 1 - \varepsilon$ ve benzer

şekilde $N_t(x_m, x_{m'}, n, t) \leq \diamond_t\left(\left(N_t\left(x_m, x, \frac{n}{2}, t\right), N_t\left(x_{m'}, x, \frac{n}{2}, t\right)\right), t\right) < \varepsilon$ eşitsizliklerinden

$\{x_m\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğu anlaşılır.

Klasik, fuzzy ve sezgisel fuzzy ayrılabilir metrik uzayların temel bir başka özelliği de ikinci sayılabilir oluşlarıdır. Bu özellik geçici sezgisel fuzzy metrik uzaylarında da korunur.

Teorem 4.3.7: Her ayrılabilir geçici sezgisel fuzzy metrik uzayı ikinci sayılabilirdir.

İspat: $(X, T, M_t, N_t, *, \diamond_t)$ ayrılabilir geçici sezgisel fuzzy metrik uzay ve $A(t) = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ X in sayılabilir yoğun alt kümesi olsun.

$\beta = \left\{ B_{(M_t, N_t)} \left(x_j, \frac{1}{k}, \frac{1}{k}, t \right) : j, k \in \mathbb{N} \right\}$ ailesi ele alınsın β ailesi sayılabilirdir.

$(X, T, M_t, N_t, *, \diamond_t)$ uzayının ikinci sayılabilir olduğunu göstermek için X 'in tüm açık kümelerinin ailesi için β ailesinin bir taban olduğunu göstermeliyiz. $U(t)$, X de herhangi bir açık küme ve $x \in U(t)$ olsun. Bu durumda $t \in T$ ve $r \in (0, 1)$ vardır öyle ki $B_{(M_t, N_t)}(x, r, n, t) \subset U(t)$ dur. $r \in (0, 1)$ için bir $s \in (0, 1)$ i öyle seçebiliriz ki

$*_t(((1-s)(1-s)), t) > 1-r$ ve $\diamond_t((s, s), t) < r$ olur. Şimdi $\frac{1}{m} < \min \left\{ s, \frac{n}{2} \right\}$ olacak

şekilde bir $m \in \mathbb{R}$ alalım. A, X yoğun olduğundan $x_j \in B_t \left(x, \frac{1}{m}, \frac{1}{m}, t \right)$ olacak şekilde

$x_j \in A$ vardır. Eğer $y \in B_t \left(x_j, \frac{1}{m}, \frac{1}{m}, t \right)$ ise

$$\begin{aligned} M(x, y, n, t) &\geq *_t \left(\left(M_t \left(x, x_j, \frac{n}{2}, t \right), M_t \left(y, x_j, \frac{n}{2}, t \right) \right), t \right) \geq M_t \left(x, x_j, \frac{1}{m}, t \right) * M_t \left(y, x_j, \frac{1}{m}, t \right) \\ &\geq *_t \left(\left(\left(1 - \frac{1}{m} \right), \left(1 - \frac{1}{m} \right) \right), t \right) \geq *_t \left(((1-s), (1-s)), t \right) > 1-r \quad \text{ve} \quad \text{diğer} \quad \text{taraf} \end{aligned}$$

$$N_t(x, y, n, t) \leq N_t \left(x, x_j, \frac{n}{2}, t \right) \diamond N_t \left(y, x_j, \frac{n}{2}, t \right) \leq N_t \left(x, x_j, \frac{1}{m}, t \right) \diamond N_t \left(y, x_j, \frac{1}{m}, t \right)$$

$$\leq \diamond_t \left(\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{m} \right), t \right) \leq \diamond_t((s, s), t) < r \quad \text{eşitsizliği elde edilir böylece. Dolayısıyla}$$

$y \in B_t(x, r, n, t) \subset U(t)$ olduğu görülür. Yani β bir tabandır.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmamızda öncelikle literatürde tanımlanmamış ve tezimizin ana konusu için önemli olan geçici fuzzy t-norm, geçici fuzzy t-conorm ve geçici fuzzy değilleme tanımlandı. Fuzzy küme teorisinde Szmidt (2013) tarafından tanımlanan t-norm ve t-conormlardan farklı olarak bu geçici fuzzy t-norm ve t-conormlar zaman parametresi sayesinde değişken bir yapı kazanmıştır. Bu ise t-norm ve t-conormların temsil ettiği bağlaç ve ayraçlara zaman ile değişebilme fırsatı sağlamış oldu. Ayrıca zamana bağlı olan ve anlık olarak nitelendirilebilecek sonuçların genel bir yargı elde edilmesi için kullanılmasına da aggregation operatörleri ile sağladı. Fuzzy küme teorisi ve genelleştirmelerinde önemli bir diğer küme işlemi olan değilleme işlemi klasik küme teorisindeki tümleme işleminin genelleştirmesidir. Bu kavram ile fuzzy değilleme işlemlerinin zamansal olarak genelleştirilmesi bu geçici fuzzy değilleme ile de sağlanmış oldu.

Bu tanımlardan sonra tezimizin ana konusu olan ve yine literatürde tanımlanmamış geçici sezgisel fuzzy metrik uzay tanımı yapıldı. Bu tanımda Park (2004) tarafından sezgisel fuzzy metrik uzaylar kavramında tanımlanan yakın olma ve yakın olmama derecelerinin de zamana bağlı olarak değişmesi fikrini ele alarak bu yeni yaklaşım ile geçici sezgisel fuzzy metrik uzaylar kavramı tanımlandı. Bu yeni tanımla şu ifade edildi. Uzaklığı ölçülen noktalar sabit değildir. Yani konumları zamanla değişebilir bu ise aradaki uzaklığı ölçerken kullanılan metrik kavramının noktalar ile beraber zaman kavramına da bağlı olması gerektiğini ortaya çıkarır. Diğer bir önemi olarak da metrik formülünün zamanla değişmesini isteyebiliriz bunun için tanımlanan geçici sezgisel fuzzy metrik uzay kavramı daha genel ve uygulanabilir olmasına olanak sağladı.

Daha sonra tanımlanan bu uzay için topoloji ve topolojinin bazı özellikleri verildi. Bu geçici sezgisel fuzzy metrik uzayı ile üretilen topolojinin açık yuvarları zamana bağlı olarak değişeceğinden topolojinin kendisinin de zamana bağlı olarak değişeceği ifade edildi. Bu çalışmada geçici topoloji klasik bir topolojiden meydana geldiği için klasik metrik uzayların sağladığı birçok özellik geçici topolojik uzaylar ile de sağlandığı gösterildi. Böylece fuzzy ve sezgisel fuzzy metrik uzayların sahip olduğu temel topolojik özelliklerinin korunduğu yeni ve daha genel bir metrik topolojisi elde

edilmiş oldu



KAYNAKLAR

- Atanassov, K. T., 1986. Intuitionistic fuzzy sets, *Fuzzy Sets and Systems*, **20** (1): 87-96.
- Atanassov, K. T., 1989. More on intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, **33** : 37-45.
- Atanassov, K. T., 1993. Norms and metrics over intuitionistic fuzzy sets. *BUSEFAL*, **55**: 11–20
- Atanassov, K. T., 1998. Temporal intuitionistic fuzzy graphs. *Notes on IFS*, **4**: 59-61
- Atanassov, K. T., 2001. Temporal intuitionistic fuzzy relations. *Flexible Query Answering Sys., Physica-Verlag*: 153-160.
- Atanassov, K. T., 2003. Intuitionistic fuzzy sets past, present and future *EUSFLAT Conf.*: 12-19.
- Atanassov, K. T., 2003. Temporal intuitionistic fuzzy sets (review and new results). *Proc. of the Thirty Second Spring of the Union of Bulg. Mathematicians*, 5-8: 79-88.
- Chaudhuri B. B., Rosenfeld A., 1999. On a metric distance between fuzzy sets. *Pattern Recognition Letters*, **17**: 1157-1160.
- Deschrijver, G., Cornelis, C., Kerre, E. E., 2004. On the Representation of Intuitionistic Fuzzy t-Norms and t-Conorms. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, **12** (1): 45-61.
- Deschrijver, G., Kerre, E. E., 2003. On the relationship between some extensions of fuzzy set theory. *Fuzzy Sets and Systems*, **133**: 227-235
- George, A., Veermani, P., 1997. On some results of analysis for fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, **90**: 365-368.
- Gregori V., Romaguera, S., 2004. Characterizing completable fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, **144**: 411-420.
- Gregori, V., Morillas S., Sapena, A., 2011. Examples of fuzzy metrics and applications. *Fuzzy Sets and Systems*, **170**: 95-111.
- Gregori, V., Romaguera S., 2000. Some properties of fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, **115**: 485-489.
- Gregori, V., Romaguera S., Veermani, P., 2006. A note on intuitionistic fuzzy metric space. *Chaos Solitons and Fractals*, **28**: 902-905.
- Gregori, V., Veermani, P., 1994. On some results in fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, **64**: 395-399.258.
- Kramosil I., Michalek J., 1975. Fuzzy metrics and statistical metric spaces. *Kybernetika*, **11**(5): 336-344.
- Park, J. H., 2004. Intuitionistic fuzzy metric spaces. *Chaos Solitons and Fractals*, **22**: 1039-1046.
- Park, J. S., 2009. Some properties and theorems on intuitionistic fuzzy metric space, *International Journal of Fuzzy Logic and Intelligent Systems*, **9**(2): 137-140.
- Parvathi, R., Geetha, S. P., 2009. A note on properties of temporal intuitionistic fuzzy sets, *Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets*, **15**(1): 42–48.
- Saadati, R., Park, J. H., 2006. Intuitionistic fuzzy Euclidean normed spaces. *Communications in Mathematical Analysis*, **1**(2): 85-90.

- Szmidt, E., 2014. Distances and similarity in intuitionistic fuzzy sets, **Springer, Switzerland**,
- Szmidt, E., Kacprzyk, J., 2000. Distances between intuitionistic fuzzy sets. **Fuzzy Sets and Systems**, **114**: 505-518.
- Szmidt, E., Kacprzyk, J., 2005. Distances between intuitionistic fuzzy sets and their applications in reasoning. **Studies in Comp. Int.**, **2**: 101-116.
- Szmidt, E., Kacprzyk, J., 2005. New measures of entropy for intuitionistic fuzzy sets. **Notes on IFS**, **11**(2): 12-20.
- Szmidt, E., Kacprzyk, J., 2007. Some problems with entropy measures for Atanassov intuitionistic fuzzy sets. **Applications of Fuzzy Sets Theory**, **4578**: 291-297.
- Szmidt, E., Kacprzyk, J., 2008. Dilemmas with distances between intuitionistic fuzzy sets: straightforward approaches may not work. **Studies in Comp. Intelligence**, **109**: 415-430.
- Szmidt, E., Kacprzyk, J., 2011. Intuitionistic fuzzy sets- two and three term representations in the context of a Hausdorff distance. **ACTA Universitatis Matthiae Belii**, **19**: 53-62.
- Zadeh, L. A., 1965. Fuzzy sets. **Inform. Contr.**, **8**: 338-353.

ÖZ GEÇMİŞ

1993 yılında Van'da doğdum. İlkokul ile ortaokulu Van merkezde ve liseyi de Van Atatürk Anadolu Lisesi'nde okudum. 2011 yılında başladığım Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Matematik Bölümünden 2015 yılında mezun oldum. Mezun olduktan sonra çeşitli kurumlarda matematik öğretmenliği görevini icra ettim. 2017-2018 bahar döneminde Matematik Bölümünde yüksek lisansa başladım. Akademik alanda ilerlemek için çalışmalara devam etmekteyim.

