T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KÜME DİZİLERİNİN DEFERRED İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

Mehmet Çağrı YILMAZER

Yüksek Lisans Tezi

MATEMATİK ANABİLİM DALI
Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

HAZİRAN 2020

T.C.
Fırat Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı
Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

Yüksek Lisans Tezi

Küme Dizilerinin Deferred İstatistiksel Yakınsaklığı

Tez Yazarı
Mehmet Çağrı YILMAZER

Danışman
Prof. Dr. Mikail ET

Haziran 2020
Elazığ

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Başlığı:	Küme Dizilerinin Deferred İstatistiksel Yakınsaklığı
Yazarı:	Mehmet Çağrı YILMAZER
İlk Teslim Tarihi:	09.06.2020
Savunma Tarihi:	Savunma Tarihi 29.06.2020

TEZ ONAYI

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına göre hazırlanan bu tez aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından değerlendirilmiş ve akademik dinleyicilere açık yapılan savunma sonucunda OYBİRLİĞİ ile kabul edilmiştir.

		İmza
Danışman:	Prof. Dr. Mikail ET Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	Onayladım
Başkan:	Prof. Dr. Hıfsı ALTINOK Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	Onayladım
Üye:	Doç. Dr. Murat KARAKAŞ Bitlis Eren Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi	Onayladım

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunun .../.../20.. tarihli toplantısında tescillenmiştir.

Prof. Dr. Soner ÖZGEN
Enstitü Müdürü

Beyan

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım "Küme Dizilerinin Deferred İstatistiksel Yakınsaklığı" başlıklı yüksek lisans tezimin içindeki bütün bilgilerin doğru olduğunu, bilgilerin üretilmesi ve sunulmasında bilimsel etik kurallarına uygun davrandığımı, kullandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi, maddi ve manevi desteği olan tüm kurum/kuruluş ve kişileri belirttiğimi, burada sunduğum veri ve bilgileri unvan almak amacıyla daha önce hiçbir şekilde kullanmadığımı beyan ederim.

29/06/2020

Mehmet Çağrı YILMAZER

Önsöz

Bu tez çalışması, küme dizilerinin deferred istatistiksel yakınsaklığını araştırmak ve istatistiksel yakınsaklık kavramına yeni bir bakış açısı getirmek amacıyla ortaya koyulmuştur.

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü bölümlerde, tezin orjinal kısmı olan beşinci bölümün temellendirilebilmesi için gerekli matematiksel konseptlerden bahsedilmiştir. Beşinci bölümde Wijsman deferred istatistiksel yakınsaklık ve Wijsman deferred r-Cesáro konseptlerinden bahsedilmiştir. Bu konseptler ve bazı özel şartların yardımıyla yeni teoremler ve sonuçlar elde edilmiştir.

Bu tez çalışması, Fırat Üniversitesi Matematik Bölümü Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Ana Bilim Dalı bünyesinde gerçekleştirilmiştir.

Bu tezin hazırlanması sürecinde bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım saygıdeğer hocam Prof. Dr. Mikail ET'e çok teşekkür eder, saygılar sunarım. Tezi yazarken kullandığım Scientific WorkPlace programına dair yardımlarını esirgemeyen Prof. Dr. Hıfsı ALTINOK'a teşekkür ederim.

Mehmet Çağrı YILMAZER
Elazığ, 2020

İÇİNDEKİLER

Sayfa

Özet

Küme Dizilerinin Deferred İstatistiksel Yakınsaklığı

Mehmet Çağrı YILMAZER

Yüksek Lisans Tezi

Fırat Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı
Haziran 2020 , Sayfa: viii + 33

Beş ana bölümden oluşan bu tez çalışmasının ilk bölümünde, fonksiyon, küme ve denklik bağıntısı kavramlarından bahsedilmiştir.

İkinci bölümde, istatistiksel yakınsaklık kavramının tarihsel gelişimine değinilmiştir. Ayrıca istatistiksel yakınsaklık, deferred Cesáro ortalaması, kuvvetli $D_{p,q}-$yakınsaklık, deferred istatistiksel yakınsaklık kavramlarından bahsedilmiştir.

Üçüncü bölümde, Kuratowski, Wijsman ve Hausdorff istatistiksel yakınsaklık kavramlarından bahsedilmiştir.

Dördüncü bölümde, Kuratowski Cesáro toplanabilirlik , Wijsman toplanabilirlik ve Wijsman kuvvetli toplanabilir küme dizilerinden bahsedilmiştir. Ayrıca, Wijsman istatistiksel yakınsaklık ile Wijsman kuvvetli toplanabilir küme dizileri arasındaki ilişkiye değinilmiştir.

Beşinci bölümde, çalışmanın orjinal bölümü olup, ikinci, üçüncü ve dördüncü bölümlerde bahsedilen kavramlar kullanılarak, Wijsman deferred istatistiksel yakınsaklık ve Wijsman deferred $r-$Cesáro toplanabilirlik kavramları ve bu kavramlar arasındaki ilişki verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: İstatistiksel yakınsaklık, Deferred istatistiksel yakınsaklık, Kuratowski Cesáro toplanabilirlik, Wijsman toplanabilirlik, Wijsman deferred istatistiksel yakınsaklık, Wijsman deferred kuvvetli $r-$Cesáro toplanabilirlik.

Abstract

Deferred Statistical Convergence of Set Sequences

Mehmet Çağrı YILMAZER

Master's Thesis

Firat University
Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

June 2020 , Page: viii + 33

This thesis is formed by five main chapters. In the first chapter, the concepts of function, set and equivalance relation are mentioned.

In the second chapter, historical development of the concept of statistical convergence is mentioned. Also, the concepts of statistical convergence, deferred Cesáro mean, strong $D_{p,q}-$convergence, deferred statistical convergence are discussed.

In the third chapter, Kuratowski statistical convergence, Wijsman statistical convergence and Hausdorff statistical convergence are given.

In the fourth chapter, Kuratowski Cesáro summable, Wijsman summable and Wijsman strongly summable sequences of sets are mentioned. Also, the relation between Wijsman statistically convergent and Wijsman strongly summable sequences of sets are dealt.

In the fifth chapter which is original part of this study, we introduce the concepts of Wijsman deferred statistical convergence and Wijsman deferred $r-$Cesáro summable by using the concepts that are mentioned in the second chapter, the third chapter and the fourth chapter. We achieve new theorems by using these concepts.

Keywords: Statistical convergence, Deferred statistical convergence, Kuratowski Cesáro summability, Wijsman summability, Wijsman deferred statistical convergence, Wijsman deferred strong $r-$Cesáro summability.

Simgeler ve Kısaltmalar

Simgeler

ℓ_∞	: Sınırlı dizilerin uzayı
S	: İstatistiksel yakınsak dizilerin uzayı
$(D_{p,q}\ x)_n$	: x dizisinin Deferred Cesáro Ortalaması
$D[p,q]$	: Kuvvetli $D_{p,q}$-yakınsak dizilerin uzayı
$DS[p,q]$	: Deferred istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı
$WS_d[p,q]$	: Wijsman deferred istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı
$[W(p,q)]_d^r$	: Wijsman deferred kuvvetli r-Cesáro toplanabilir dizilerin uzayı

Kısaltmalar

$h.h.d.k.$	: Hemen hemen deferred k

1. GİRİŞ

Bu bölümde, diğer bölümlerdeki kavramların anlaşılabilmesi için bazı temel bilgiler verilmiştir.

1.1. Kuramsal Küme Notasyonları ve Terminolojisi

Kümeler, elemanları listelenerek tanımlanabilir. Böylece $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, elemanları x_1, x_2, ..., x_n olan bir kümedir ve $\{x\}$, elemanı sadece x olan bir kümedir. P özelliğini sağlayan bütün x elemanlarının kümesini

$$\{x : P\}$$

şeklinde yazabiliriz. $\emptyset$ sembolü, boş kümeyi ifade eder. Koleksiyon, aile ve sınıf kelimeleri küme ile koordineli olarak kullanılabilir. T, S kümesinin bir alt kümesi ise, yani, $x \in T$ olması $x \in S$ yi gerektiriyorsa, $T \subset S$ yazarız. $T \subset S$ ve $S \subset T$ ise o zaman $S = T$ dir. $T \subset S$ ve $S \neq T$ ise, T, S nin bir özalt kümesidir. Her S kümesi için $\emptyset \subset S$ olduğu dikkate alınmalıdır. $S \cup T$ ve $S \cap T$ sırasıyla, S ve T nin birleşimi ve kesişimidir. $\{S_\alpha\}$ kümelerin bir koleksiyonu ve α, I indis kümesini tarayan bir eleman olmak üzere, $\{S_\alpha\}$ nın birleşimi ve kesişimini

$$\cup S_\alpha$$

ve

$$\cap S_\alpha$$

şeklinde yazabiliriz. Burada

$$\begin{aligned} \cup S_\alpha &= \{x : x \in S_\alpha \text{ en az bir } \alpha \text{ için}\} \\ \cap S_\alpha &= \{x : x \in S_\alpha \text{ her } \alpha \text{ için}\} \end{aligned}$$

dır.

I bütün pozitif sayıların bir kümesi ise, alışılmış notasyonlar

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$$

ve

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$$

dir.

$\{S_\alpha\}$ nın herhangi iki üyesi, ortak bir elemana sahip değilse, o zaman $\{S_\alpha\}$ kümelerin ayrık koleksiyonudur. $S - T = \{x : x \in S \ , \ x \notin T\}$ ve S nın tümleyeni S^c şeklinde gösterilir.

$S_1, ..., S_n$ kümelerinin $S_1 \times S_2 \times ... \times S_n$ kartezyen çarpımı, bütün sıralı n-boyutlu $(s_1, ..., s_n)$ elemanlarının bir kümesidir. Burada $i = 1, ..., n$ için $s_i \in S_i$ dir.

Reel doğru(ya da reel sayı sistemi), $\mathbb{R}^1$ dir ve

$$\mathbb{R}^k = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \times ... \times \mathbb{R}^1 \ (\ k \text{ çarpan})$$

dır. Genişletilmiş reel sayı sistemi, $\mathbb{R}^1$ kümesine ∞ ve $-\infty$ sembollerinin eklenmesiyle oluşur. $-\infty \leq s \leq t \leq +\infty$ olmak üzere, $[s,t]$ ve (s,t) aralıkları,

$$\begin{aligned} [s,t] &= \{x : s \leq x \leq t\} \\ (s,t) &= \{x : s < x < t)\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca, $[s,t)$ ve $(s,t]$ aralıkları

$$\begin{aligned} [s,t) &= \{x : s \leq x < t\} \\ (s,t] &= \{x : s < x \leq t\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

$E \subset [-\infty, +\infty]$ ve $E \neq \emptyset$ ise, E nin supremumu ve infimumu $[-\infty, \infty]$ aralığında mevcuttur. E nin supremumu ve infimumu, sırasıyla $\sup E$ ve $\inf E$ şeklinde gösterilir. $\sup E \in E$ ise $\sup E$ için $\max E$ yazabiliriz.

$f : X \to [-\infty, \infty]$ ve $E \subset X$ ise, âdet olarak $\sup f(E)$ yazmaktansa $\sup\limits_{x \in E} f(x)$ yazarız. $f : X \to Y$ ve $g : Y \to Z$ ise, bileşke fonksiyon,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

formülü yardımıyla tanımlanır.

(s_n), $[-\infty, \infty]$ aralığında bir dizi olsun ve

$$b_k = \sup\{s_k, s_{k+1}, ...\} \tag{1.1}$$

ve

$$\beta = \inf\{b_1, b_2, ...\} \tag{1.2}$$

şeklinde tanımlansın. β ya (s_n) nin üst limiti denir ve

$$\beta = \lim_{n \to \infty} \sup s_n \tag{1.3}$$

şeklinde yazılır. Aşağıdaki özellikler kolaylıkla kanıtlanabilir:

1) $s_1 \geq s_2 \geq s_3 \geq ...$ olmak üzere, $k \to \infty$ iken, $b_k \to \beta$

2) (s_n) dizisinin bir $\{s_{n_i}\}$ alt dizisi vardır, öyleki, $i \to \infty$ iken $s_{n_i} \to \beta$ ve β bu özelliği sağlayan en büyük sayıdır.

Alt limit de benzer şekilde tanımlanır. (1.1) ve (1.2) deki supremum ve infimumun yer değiştirmesi kafidir. Dikkat edilmelidir ki

$$\lim_{n\to\infty} \inf s_n = -\lim_{n\to\infty} \sup(-s_n) \tag{1.4}$$

dir. (a_n) yakınsak bir dizi ise, açık olarak

$$\lim_{n\to\infty} \sup s_n = \lim_{n\to\infty} \inf s_n = \lim_{n\to\infty} s_n \tag{1.5}$$

dir. Farz edelim ki, $\{f_n\}$, x kümesi üzerindeki genişletilmiş reel fonksiyonların bir dizisi olsun. O zaman $\sup_n f_n$ ve $\lim_{n\to\infty} \sup f_n$,

$$\begin{aligned} \left(\sup_n f_n\right)(x) &= \sup\left(f_n(x)\right) \\ \left(\lim\sup f_n\right)(x) &= \lim\sup\left(f_n(x)\right) \end{aligned}$$

olarak tanımlanan fonksiyonlardır.

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

limiti her $x \in X$ te mevcut olduğu varsayılırsa, o zaman f fonksiyonuna $\{f_n\}$ dizisinin limiti denir [**1**].

Pozitif tamsayıların bir K kümesinin doğal yoğunluğu

$$\delta(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\{k \le n : k \in K\}\right|$$

şeklinde tanımlanır. Burada $|\{k \le n : k \in K\}|$ ifadesi, K kümesinin n sayısını geçmeyen elemanlarının sayısını belirtir. Dizilerin istatistiksel yakınsaklığı Fast [**2**] tarafından çalışılmıştır. Schoenberg [**3**] istatistiksel yakınsaklığın bazı temel özelliklerini vermiş ve ayrıca toplanabilirlik metodunu çalışmıştır.

Bir $x = (x_k)$ dizisi $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\{k \le n : |x_k - L| \ge \varepsilon\}\right| = 0$$

şartını sağlıyorsa bu dizi L' ye istatistiksel olarak yakınsıyor denir. Bu takdirde $st - \lim x_k = L$ yazabiliriz.

$x = (x_k)$ bir dizi olsun. x_k bir p özelliğini doğal yoğunluğu sıfır olan bir küme dışındaki her k sayısı için sağlıyor ise, o zaman " x_k, p özelliğini, hemen hemen her k sayısı için sağlar " deriz ve bunu $h.h.k.$ olarak sembolize ederiz [**4**]. x istatistiksel yakınsak bir dizi ise, $h.h.k.$ için $x_k = y_k$ olacak biçimde yakınsak bir $y = (y_k)$ vardır. İstatiksel üst limit ve istatistiksel alt limit konseptleri Fridy ve Orhan [**5**] tarafından tanımlanmıştır. $x = (x_k)$ reel sayı dizisi için,

$$T_x = \left\{ t \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\{k \leq n : x_k > t\}\right| \neq 0 \right\}$$

ve benzer şekilde

$$S_x = \left\{ s \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\{k \leq n : x_k < s\}\right| \neq 0 \right\}$$

olsun. x in istatistiksel üst limiti

$$st - \limsup x = \begin{cases} \sup T_x & , T_x \neq \emptyset \\ -\infty & , T_x = \emptyset \end{cases}$$

x in istatistiksel alt limiti

$$st - \liminf x = \begin{cases} \inf S_x & S_x \neq \emptyset \\ \infty & S_x = \emptyset \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

Küme dizilerinin limiti, Kuratowski [**6**] nin ünlü kitabı " Topoloji " sayesinde ün kazandı. Böylece küme dizilerinin limiti sıklıkla Kuratowski dizi limiti olarak adlandırılır. Küme yakınsaklığıkavramı, çok eski bir matematiksel geçmişe sahiptir. Bu kavram son 30 yıl boyunca, optimizasyondaki yaklaşımlar, denklem sistemleri ve bağlantılı nesneler ile ilgili konularda önemli bir araç olarak görülmeye başlandı.

(X, p) bir metrik uzay olsun. Keyfi bir $x \in X$ ve X in keyfi bir $S \neq \emptyset$ altkümesi için x in S kümesine olan uzaklığı,

$$d(x, S) = \inf_{s\in S} p(x, s)$$

şeklinde tanımlanır. $\{S_k\}$, (X, p) metrik uzayının bir küme dizisi olsun. $\{S_k\}$ nın üst limiti ve alt limiti aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\begin{aligned} \liminf S_k &= \{x \in X : \exists(s_k) \subset (S_k),\ s_k \to x\} \\ \limsup S_k &= \{x \in X : \exists(k_l)\ \exists(s_{k_l}) \subset (S_{k_l}),\ s_{k_l} \to x\} \end{aligned}$$

Burada (k_l) doğal sayılar kümesinin artan bir dizisini belirtir ve bir alt dizi için indis kümesini temsil eder.

S, X in altkümesi olsun.

$$S = \liminf S_k = \limsup S_k = \lim S_k$$

şartı sağlanıyorsa, S kümesine $\{S_k\}$ dizisinin küme limiti ya da limiti denir. Alternatif olarak, literatürde yakınsaklık, Painleve-Kuratowski yakınsaklığı, topolojik yakınsaklık ya da kapalı yakınsaklık olarak adlandırılır. $S_n \subset S_m$, ($n \geq m$) ise,

$$\lim S_k = \bigcap_{k \geq 0} \overline{S}_k$$

olduğu görülür. (a_k) singleton dizilerine ilişkin olarak, küme limiti, eğer mevcut ise, ya boştur (a_k dizisi yakınsamaz) ya da dizi limitinden üretilmiş bir singletondur [**7**]. X in S_k altkümelerinin $\{S_k\}$ dizisi için

$$\begin{aligned} \liminf S_k &= \left\{ x \in X : \lim_{k \to \infty} \sup d(x, S_k) = 0 \right\} \\ \limsup S_k &= \left\{ x \in X : \lim_{k \to \infty} \inf d(x, S_k) = 0) \right\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır [**8**]. Küme dizilerinin üst limitini ve alt limitini farklı şekilde de tanımlayabiliriz. Bu farklı tanımlar, küme dizilerin üst limiti ve alt limitini daha iyi anlamamızı sağlayacaktır.

$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ bir küme dizisi olsun. $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ nin alt limitini ve üst limitini kümelerin birleşim ve kesişim kurallarını kullanarak, aşağıdaki şekilde tanımlayabiliriz:

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} \inf S_n &= \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{j \geq n} S_j \\ \lim_{n \to \infty} \sup S_n &= \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{j \geq n} S_j \end{aligned}$$

$\liminf S_n$ ve $\limsup S_n$ birbirine eşit ise, o zaman $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ küme dizisinin limiti mevcuttur ve bu limit $\lim_{n \to \infty} S_n = S$ şeklinde gösterilir. Kuratowski [**6**] Topoloji kitabında alt limit ve üst limit kavramlarını aşağıdaki şekilde tanımlamıştır:

$$\lim_{n \to \infty} \inf S_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{k=0}^{\infty} S_{n+k}$$

ve

$$\lim_{n \to \infty} \sup S_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{\infty} S_{n+k}$$

Painleve-Kuratowski yakınsaklığını daha iyi kavramak için aşağıdaki örnekleri verebiliriz.

Örnek 1.1. [**9**] $X = \mathbb{R}$ olsun ve $\mathbb{R}$ nin altkümelerinin bir $(S_n : n \in \mathbb{N})$ dizisini $S_1 = [0, 1]$, $S_3 = \left[0, \frac{1}{3}\right]$, $S_5 = \left[0, \frac{1}{5}\right]$, ..., ve $S_2 = [0, 2]$, $S_4 = [0, 4]$, $S_6 = [0, 6]$, ... olacak şekilde tanımlayalım. O zaman $\lim_{n \to \infty} \inf S_n = \{x \in X : x \in S_n$ sonsuz sayıda $n \in \mathbb{N}$ için$\} = \{0\}$ ve $\limsup S_n = \{x \in X : x \in S_n$ sonsuz sayıda $n \in \mathbb{N}$ için$\} = [0, \infty)$ yazılabilir. Açıkça $\lim_{n \to \infty} \inf S_n \neq \lim_{n \to \infty} \sup S_n$ olduğundan dolayı S_n dizisinin bir limiti mevcut değildir.

Örnek 1.2. [**10**] $S_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$ olsun. $\limsup S_n$ ve $\liminf S_n$ kümelerini inceleyelim .

Çözüm:

$$\begin{aligned} \bigcup_{n=m}^{\infty} S_n &= \bigcup_{n=m}^{\infty} \{1,2,...,n\} \\ &= \{1,2,...,m\} \cup \{1,2,...,m,m+1\} \cup ... \\ &= \{1,2,3,...,m,m+1,...\} = \mathbb{N} \end{aligned}$$

olacağından

$$\limsup S_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} \left(\bigcup_{n=m}^{\infty} S_n \right) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \mathbb{N} = \mathbb{N}$$

dir.

$$\begin{aligned} \bigcap_{n=m}^{\infty} S_n &= \{1,2,...,m\} \cap \{1,2,...,m,m+1\} \\ &\quad \cap \{1,2,...,m,m+1,m+2\} \cap ... \\ &= \{1,2,...,m\} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \liminf S_n &= \bigcup_{m=1}^{\infty} \left(\bigcap_{n=m}^{\infty} S_n \right) = \bigcup_{m=1}^{\infty} \{1,2,...,m\} \\ &= \{1\} \cup \{1,2\} \cup ... \cup \{1,2,..,m\} \\ \cup \{1,2,...,m,m+1,...\} &= \mathbb{N} \end{aligned}$$

dir. O halde (S_n) yakınsak ve

$$\lim \{1,2,..,n\} = \mathbb{N}$$

olur.

Örnek 1.3. [**10**] $S_n = \{n, n+1, ...\}$ olsun. $\limsup S_n$ ve $\liminf S_n$ kümelerini inceleyelim.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \bigcup_{n=m}^{\infty} S_n &= \{m, m+1, ..\} \cup \{m+1, m+2, ...\} \cup ... \\ &= \{m, m+1, ...\} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \limsup S_n &= \bigcap_{m=1}^{\infty} \{m, m+1, ...\} = \{1,2,3,...\} \cap \{2,3,...\} \\ \cap \{3,4,...\} \cap ... &= \emptyset \end{aligned}$$

dir.

$$\liminf S_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{n=m}^{\infty} S_n \right) = \bigcup_{m=1}^{\infty} \emptyset = \emptyset$$

olur. O halde

$$\lim S_n = \emptyset$$

dir.

Örnek 1.4. [**10**] $S_n = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$ olsun. S_n dizisinin üst limitini ve alt limitini inceleyelim.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
\bigcup_{n=m}^{\infty} S_n &= \bigcup_{n=m}^{\infty} \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \\
&= \left[-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}\right] \cup \left[-\frac{1}{m+1}, \frac{1}{m+1}\right] \cup .. \\
&= \left[-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}\right]
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\limsup S_n &= \bigcap_{m=1}^{\infty} \left(\bigcup_{n=m}^{\infty} S_n\right) \\
&= \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}\right] \\
&= [-1, 1] \cup \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \cup ... \\
&= \{0\}
\end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned}
\bigcap_{n=m}^{\infty} S_n &= \bigcap_{n=m}^{\infty} \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \\
&= \left[-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}\right] \cap \left[-\frac{1}{m+1}, \frac{1}{m+1}\right] \\
&\quad \cap \left[-\frac{1}{m+2}, \frac{1}{m+2}\right] \cap ... \\
&= \{0\}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\limsup S_n = \liminf S_n = \lim S_n = \{0\}$$

dir.

Örnek 1.5. [**10**] $T_n = \{-n, -(n-1), ..., -1, 0, 1, ..., n\}$ dizisinin üst limitini ve alt limitini inceleyelim.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
\bigcup_{n=m}^{\infty} T_n &= \bigcup_{n=m}^{\infty} \{-m, -(m-1), ..., -1, 0, 1, ..., m\} \\
&= \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\limsup T_n &= \bigcap_{m=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} T_n\right)\\ &= \bigcap_{m=1}^{\infty} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}\end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned}\bigcap_{n=m}^{\infty} T_n &= \bigcap_{n=m}^{\infty} \{-m, -(m-1), ..., -1, 0, 1, ..., m\}\\ &= \{-m, -(m-1), ..., -1, 0, 1, ..., m\}\\ &= \liminf T_n = \bigcup_{m=1}^{\infty}\left(\bigcap_{n=m}^{\infty} T_n\right)\\ &= \bigcup_{m=1}^{\infty} \{-m, -(m-1), ..., -1, 0, 1, ..., m\} = \mathbb{Z}\end{aligned}$$

olduğundan

$$\limsup T_n = \liminf T_n = \lim T_n = \mathbb{Z}$$

dir.

Örnek 1.6. [**10**] S_n artan bir dizi olduğunda

$$\lim S_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$$

olduğunu gösterelim.

Çözüm: $\limsup S_n = \liminf S_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$ olduğunu göstermeliyiz.

S_n dizisi artan olduğundan

$$\limsup S_n = \bigcap_{m=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} S_n\right) = \bigcap_{m=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$$

ve

$$\begin{aligned}\liminf S_n &= \bigcup_{m=1}^{\infty}\left(\bigcap_{n=m}^{\infty} S_n\right)\\ &= \bigcup_{m=1}^{\infty} (S_m \cap S_{m+1} \cap ...)\\ &= \bigcup_{m=1}^{\infty} S_m\end{aligned}$$

bulunup istenilen elde edilmiş olur.

Örnek 1.7. [**10**] T_n azalan bir dizi olduğunda

$$\lim T_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} T_n$$

olduğunu gösterelim.

Çözüm: $\limsup T_n = \liminf T_n = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} T_n$ olduğunu göstermeliyiz.

T_n dizisi azalan olduğundan

$$\limsup T_n = \bigcap_{m=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} T_n\right) = \bigcap_{m=1}^{\infty} T_m$$

ve

$$\begin{aligned}
\liminf T_n &= \bigcup_{m=1}^{\infty}\left(\bigcap_{n=m}^{\infty} T_n\right) \\
&= \bigcup_{m=1}^{\infty}(T_m \cap T_{m+1} \cap ...) \\
&= \bigcup_{m=1}^{\infty}(T_1 \cap T_2 \cap ... \cap T_n \cap ...) \\
&= \bigcup_{m=1}^{\infty}\left(\bigcap_{n=m}^{\infty} T_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} T_n
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 1.8. [**10**]

$$K_n = \begin{cases} \left(0, \frac{1}{n}\right) & , n \text{ tek ise} \\ \left[\frac{1}{n}, 1\right) & , n \text{ çift ise} \end{cases}$$

küme dizisinin yakınsaklık durumunu araştıralım.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
S_n &= \left(0, \frac{1}{2n-1}\right) \\
T_n &= \left[\frac{1}{2n}, 1\right)
\end{aligned}$$

olsun. S_n ve T_n dizileri, K_n dizisinin alt dizileridir.

S_n azalan dizi olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = \emptyset$$

dir.

T_n artan dizi olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n = (0,1)$$

olur. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n \neq \lim\limits_{n\to\infty} T_n$ olduğundan E_n dizisinin limiti mevcut değildir.

Örnek 1.9. [**10**] S_n ayrık kümelerin bir dizisi olsun.

$$\lim S_n = \emptyset$$

olduğunu gösterelim.

Çözüm: $n \neq m$ olmak üzere $\forall m, n \in \mathbb{N}$ için $S_n \cap S_m = \emptyset$ dir. $\limsup S_n = \liminf S_n = \emptyset$ olduğunu göstermeliyiz.

S_n dizisi ayrık olduğundan

$$\liminf S_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} \left(\bigcap_{n=m}^{\infty} S_n \right) = \emptyset$$

sağlanır. $\limsup S_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} \left(\bigcup_{n=m}^{\infty} S_n \right) \neq \emptyset$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde $\forall m \in \mathbb{N}$ için $\exists x_0 \in \bigcup_{n=m}^{\infty} S_n$ vardır. Bu $\forall m \in \mathbb{N}$ için $\exists m_0 \in \mathbb{N}$ $(m \geq m_0)$ $x \in S_{m_0}$ olmasını gerekli kılar. Arakesit işlemini $m = m_0 + 1$ için başlatırsak x elemanı $m_0 + 1$ ve daha sonraki indislere haiz bir kümenin elemanı olmalıdır. Bu S_n dizisinin ayrık olmasıyla çelişir. Böylece $\limsup S_n = \emptyset$ olmalıdır. Sonuç olarak $\lim S_n = \emptyset$ dir.

Örnek 1.10. [**10**]

$$E_n = \begin{cases} S; & n \text{ çift ise} \\ T; & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan E_n dizisinin yakınsaklık durumunu araştıralım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \limsup E_n &= \bigcap_{m=1}^{\infty} \left(\bigcup_{n=m} E_n \right) \\ &= \bigcap_{m=1}^{\infty} (E_m \cup E_{m+1} \cup ...) \\ &= S \cup T \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \liminf E_n &= \bigcup_{m=1}^{\infty} \left(\bigcap_{n=m}^{\infty} E_n \right) \\ &= \bigcup_{m=1}^{\infty} (E_m \cap E_{m+1} \cap ...) \\ &= S \cap T \end{aligned}$$

olup $\limsup E_n \neq \liminf E_n$ olduğundan $\lim E_n$ mevcut değildir.

2. Dizilerin Deferred İstatistiksel Yakınsaklığı

İstatistiksel yakınsaklık kavramı birbirinden bağımsız olarak, I. J. Steinhaus [**11**] ve H. Fast [**2**] tarafından 1951'de çalışılmıştır. Günümüzde, bu konu toplanabilirlik teorisindeki en aktif araştırma alanlarından biridir. Örneğin, İstatistiksel yakınsaklık P. Erdös ve G. Tenenbaum [**12**] tarafından sayılar teorisine, Freedman, Sember, Raphael [**13**] tarafından toplanabilirlik teorisine uygulanmıştır. Dahası, bu konu Connor ([**14**], [**15**]), Fridy [**4**], Fridy ve Orhan [**16**], Fridy ve Miller [**17**], Salat [**18**] ve Schoenberg [**3**] tarafından çalışılmıştır. İstatistiksel yakınsaklık, ayrıca doğal sayıların altkümelerinin asimptotik yoğunluğu ile yakından ilgilidir [**19**] ve kökeni A. Zygmund'a [**20**] kadar uzanır.

1932'de, R. P. Agnew [**21**], deferred Cesáro Ortalamasını,

$$(D_{p,q}\ x)_n = \frac{1}{q_n - p_n} \sum_{k=p_n+1}^{q_n} x_k \ \ n = 1, 2, 3, .. \tag{2.1}$$

olarak, reel değerli $x = (x_n)$ dizisinin Cesáro ortalamasının bir genellemesi olarak tanımladı. Burada $p = \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ ve $q = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$,

$$p_n < q_n \text{ ve} \lim_{n\to\infty} q_n = \infty \tag{2.2}$$

şartlarını sağlayan negatif olmayan tamsayıların dizileridir. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q_n - p_n} \sum_{k=p_n+1}^{q_n} |x_k - l| = 0$$

ise $x = (x_k)$, l'ye kuvvetli $D_{p,q}$ yakınsaktır denir ve aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l \ (D[p, q])$$

$\forall \varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k : k \leq n,\ |x_k - l| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $x = (x_k)$, l'ye istatistiksel yakınsaktır denir. İstatistiksel yakınsaklık ve dizilerin kuvvetli toplanabilirliği arasında kuvvetli bir ilişki vardır. Bu ilişki Connor([**14**], [**15**]), Maddox [**22**], Mursaleen [**23**], Nuray [**24**] tarafından incelenmiştir. Aşağıdaki tanım, dizilerin istatistiksel yakınsaklığının bir genelleştirmesidir.

Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q_n - p_n} |\{k : p_n < k \leq q_n,\ \ |x_k - l| \geq \varepsilon\}| = 0$$

şartı sağlanıyorsa, $x = (x_k)$ dizisi $l \in \mathbb{R}$'ye deferred istatistiksel yakınsıyor veya $DS\,[p,q]$ −yakınsak denir. Bu durum matematiksel olarak

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l \ (DS \ \ [p,q])$$

şeklinde ifade edilir [**25**].

Açıktır ki;

(i) $q_n = n$ ve $p_n = 0$ ise, deferred istatistiksel yakınsaklık ile istatistiksel yakınsaklık aynıdır.

(ii) $q_n = k_n$ ve $p_n = k_{n-1}$ ($n \to \infty$ iken $k_n - k_{n-1} \to \infty$ şartını sağlayan,negatif olmayan tam sayıların keyfi bir lacunary dizisi için) ise, deferred istatistiksel yakınsaklık lacunary istatistiksel yakınsaklığa dönüşür.

(iii) $q(n) = \lambda_n$ ve $p_n = 0$ (burada λ_n, $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$ olacak şekilde, doğal sayıların artan bir dizisidir) ise, deferred istatistiksel yakınsaklık Osikievich [**26**] ve Mursaleen [**23**] tarafından verilen dizilerin λ- istatistiksel yakınsaklığa dönüşür [**25**].

2.1. Kuvvetli D[p,q] Yakınsaklık ile DS[p,q] Yakınsaklık Arasındaki İlişki

Bu bölümde, kuvvetli deferred Cesáro yakınsaklık ve deferred istatistiksel yakınsaklık arasındaki bağıntı verilecektir.

Teorem 2.1.1. Eğer $x_n \to l \ (D\,[p,q])$ ise, $x_n \to l \ (DS\,[p,q])$ dir.

İspat: Farzedelim ki $(x_n) \to l \ (D\,[p,q])$ olsun. Keyfi bir $\varepsilon > 0$ için,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{q_n - p_n} \sum_{k=p_n+1}^{q_n} |x_k - l| &= \frac{1}{q_n - p_n} \left(\sum_{\substack{k=p_n+1 \\ |x_k - l| \geq \varepsilon}}^{q_n} + \sum_{\substack{k=p_n+1 \\ |x_k - l| < \varepsilon}}^{q_n} \right) |x_k - l| \\
&\geq \frac{1}{q_n - p_n} \sum_{\substack{k=p_n+1 \\ |x_k - l| \geq \varepsilon}}^{q_n} |x_k - l| \\
&\geq \varepsilon \frac{1}{q_n - p_n} \left| \{k : p_n < k \leq q_n, \ |x_k - l| \geq 0\} \right|
\end{aligned}$$

yazılabilir. $n \to \infty$ iken limit alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q_n - p_n} \left| \{k : p_n < k \leq q_n, \ |x_k - l| \geq \varepsilon\} \right| = 0$$

elde edilir. Böylece $x = (x_k)$ deferred istatistiksel yakınsaktır [**25**].

Sonuç 2.1.2. Eğer $x_n \to \ell \ (n \to \infty)$ ise, $x_n \to \ell \ (DS[p,q])$ dir [**25**].

Uyarı 2.1.3. Teorem 2.1.1. ve Sonuç 2.1.2.'nin tersi doğru değildir. Bunu görmek için

$$x_k = \begin{cases} k^2, & \lfloor\sqrt{q_n}\rfloor - m_0 \le k \le \lfloor\sqrt{q_n}\rfloor \\ 0, & d.d. \end{cases}$$

dizisini göz önüne alalım. Burada $q(n)$ doğal sayıların monoton artan bir dizisi ve $m_0 \neq 0$ sabit bir doğal sayıdır. $0 < p_n \le \lfloor\sqrt{q_n}\rfloor - m_0$ şartını sağlayan $p(n)$ dizisi için $D[p,q]$ metodunu göz önüne alırsak, herhangi $\varepsilon > 0$ için, $n \to \infty$ iken

$$\frac{1}{q_n - p_n} |\{k : p_n < k \le q_n, \ \ |x_k - 0| \ge \varepsilon\}| = \frac{m_0}{q_n - p_n} \to 0$$

dir. Böylece, $x_k \to 0$ $(DS[p,q])$ elde ederiz. Diğer taraftan, $n \to \infty$ iken

$$\frac{1}{q_n - p_n} \sum_{k=p_n+1}^{q_n} |x_k - 0| \ge \frac{m_0 \left(\lfloor\sqrt{q_n}\rfloor - m_0\right)^2}{q_n - p_n} \to m_0$$

dir. Böylece, (x_k) sıfıra $D[p,q]$ yakınsak değildir [**25**].

Teorem 2.1.4 $x = (x_n) \in \ell_\infty$ ve $x_n \to \ell$ $(DS[p,q])$ ise, $x_n \to \ell$ $(D[p,q])$ dir.

İspat: Teoremin kanıtı aşikardır [**25**].

2.2. S'nin DS[p,q]'ye göre Kıyaslanması

Bu bölümde, istatistiksel yakınsaklık ve deferred istatistiksel yakınsaklık arasındaki bağıntı verilecektir. [**25**].

Teorem 2.2.1. Eğer $\left\{\frac{q(n)}{q(n)-p(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ sınırlı ise $x_n \to \ell$ (S) olması, $x_n \to \ell$ $(DS[p,q])$ olmasını gerektirir.

İspat: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ve $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pozitif doğal sayıların dizileri olsun. Eğer $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $(a \in \mathbb{R})$ ve $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ ise, $\lim_{n\to\infty} a_{b_n} = a$ dır. $x = (x_k)$ dizisi istatistiksel yakınsak olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k : k \le n, \ \ |x_k - \ell| \ge \varepsilon\}| = 0 \tag{2.3}$$

dır. q_n dizisi (2.2)'yi sağladığından dolayı

$$\left\{\frac{|\{k : k \le q_n, \ \ |x_k - \ell| \ge \varepsilon\}|}{q_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

dizisi sıfıra yakınsar. Böylece,

$$\begin{aligned} & \{k : p_n < k \le q_n, \ \ |x_k - \ell| \ge \varepsilon\} \\ \subset \ & \{k : k \le q_n, \ \ |x_k - \ell| \ge \varepsilon\} \end{aligned}$$

kapsaması ve

$$\begin{aligned} & |\{k : p_n < k \leq q_n, \ |x_k - \ell| \geq \varepsilon\}| \\ \leq \ & |\{k : k \leq q_n, \ |x_k - \ell| \geq \varepsilon\}| \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{q_n - p_n} |\{k : p_n < k \leq q_n, \ |x_k - \ell| \geq \varepsilon\}| \\ \leq \ & \frac{q_n}{q_n - p_n} \frac{1}{q_n} |\{k : k \leq q_n, \ |x_k - \ell| \geq \varepsilon\}| \end{aligned}$$

olup $n \to \infty$ için limit alınırsa,

$$x_k \to \ell \ (DS[p, q])$$

elde edilir. Böylece kanıt tamamlanmıştır [**25**].

Sonuç 2.2.2. $q = (q_n)$, her $n \in \mathbb{N}$ için $q_n < n$ şartını sağlayan keyfi bir dizi ve $\left(\frac{n}{q_n - p_n}\right)$ sınırlı olsun. Bu takdirde $x_n \to \ell \ (S)$ ise, $x_n \to \ell \ (DS\,[p, q])$ dır [**25**].

Uyarı 2.2.3. $\left(\frac{q_n}{q_n - p_n}\right)$ sınırlı olsa bile, Teorem 2.2.1.'in tersi doğru değildir [**25**]. Bunun için aşağıdaki örneği inceleyelim.

Örnek 2.2.4. [**25**] $x = (x_n)$ dizisini

$$x_n = \begin{cases} \frac{n+1}{2}, & n \text{ tek ise} \\ -\frac{n}{2}, & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım ve $p_n = 2n$, $q_n = 4n$ olsun. Teorem 2.2.1. varsayımının sağlandığı ve $x_n \to 0 \ (D[2n, 4n])$ olduğu aşikârdır. Teorem 2.2.1.'den $x_n \to 0 \ (DS[2n, 4n])$ olup yeteri kadar küçük herhangi bir $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} |\{k : k \leq n, \ |x_n - 0| \geq \varepsilon\}| \neq 0$$

dir.

Tanım 2.2.5. $\left(\frac{p_n}{q_n - p_n}\right)$ dizisi sınırlı olsun, (p_n) ve (q_n) dizileri (2.2) şartını sağlasın, bu takdirde $DS\,[p, q]$ metoduna uygun deferred metod denir [**25**].

Uyarı 2.2.6. İki uygun deferred istatistiksel metot, birbirini kapsamak zorunda değildir. Örneğin $x = (x_n)$ dizisi

$$x_n = \begin{cases} k + 1, & n = 2k + 1, \\ -k, & n = 2k. \end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa; $x_n \to 0$ $(DS\,[2n, 4n])$ iken, $x_n \to \frac{1}{2}$ $(DS\,[2n-1, 4n-1])$ dir [**25**].

Sonuç 2.2.7. $q = (q_n)$ hemen hemen bütün pozitif tam sayıları kapsasın. O halde $x_n \to \ell$ $(DS[p,q])$ olması, $x_n \to \ell$ (S) olduğunu gösterir.

İspat: Herhangi bir $p = (p_n)$ ve $q = (q_n)$ verilsin. m'den büyük bütün pozitif tam sayıları kapsayacak şekilde seçilen yeterli büyüklükteki m için $x_n \to \ell$ $(DS[p,q])$ olsun. O halde, bir (k_n) dizisi aşağıdaki gibi tanımlanabilir;

$$k_1 = k_2 = ... = k_m = 1$$

ve $\forall n > m$ için $q_{k_n} = n$ olacak şekilde bir indeks vardır. (k_n) dizisinin monoton artan bir dizi olduğu açıktır. $\left(x_n \to \ell \ \left(DS\left[p_{k_n}, q_{k_n}\right]\right)\right)$. Böylece, sonucun ispatından Teorem 2.2.5. elde edilir [**25**].

Sonuç 2.2.8. $q = (q_n)$'nin hemen hemen bütün pozitif sayıları kapsadığını varsayalım. $x = (x_n)$, herhangi bir $p = (p_n)$ ve $\Delta x_n = O(\frac{1}{n})$ için $x_n \to \ell$ $(DS[p,q])$ olacak şekilde bir dizi ise, $x_n \to \ell$ $(n \to \infty)$ dir [**25**].

2.3. DS[p', q']'nin DS[p,q]'ya göre Kıyaslanması

Bu bölümde, $DS[p,q]$ ve $DS[p', q']$ metodlarını aşağıdaki kısıtlamaya göre kıyaslayacağız. $p = (p_n)$, $q = (q_n)$, $p' = (p'_n)$ ve $q' = (q'_n)$ dizileri her $n \in \mathbb{N}$ için

$$p_n \leq p'_n < q'_n \leq q_n \tag{2.4}$$

şartını sağlayan pozitif sayıların dört dizisi olsun [**25**].

Teorem 2.3.1 $p = (p_n)$, $q = (q_n)$, $p' = (p'_n)$ ve $q' = (q'_n)$ dizileri (2.4) şartını sağlasın.

$$\{k : p_n < k \leq p'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

ve

$$\{k : q'_n < k \leq q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

kümeleri, $\forall n \in \mathbb{N}$ için sonlu olsun. Bu takdirde, $x_k \to \ell$ $(DS[p', q'])$ ise $x_k \to \ell$ $(DS[p,q])$ dır.

İspat: Teoremin kanıtı aşikardır [**25**].

Teorem 2.3.2. $p = (p_n)$, $q = (q_n)$ ve $p' = (p'_n)$, $q' = (q'_n)$ (2.4) şartını sağlayan pozitif doğal sayıların dizileri olsun ve

$$\lim_{n \to \infty} \frac{q_n - p_n}{q'_n - p'_n} = d > 0$$

şartı sağlansın. Bu takdirde $x_k \to \ell \ (DS\,[p,q])$ ise $x_k \to \ell \ (DS\,[p^{\shortmid},q^{\shortmid}])$ dır.

İspat: Teoremin kanıtı aşikârdır [**25**].

3. KÜME DİZİLERİNİN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

Bu kısımda, küme dizilerinin Kuratowski, Wijsman ve Hausdorff istatistiksel yakınsaklıklarını tanımlayacağız.

(X,p) bir metrik uzay ve $E_k \neq \emptyset$ olmak üzere, $E_k \subseteq X$ altkümeleri kapalı altkümeler olsunlar. $\forall x \in X$ için d_k, $d : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $d(x) = d(x,E)$ ve $d_k(x) = d(x,E_k)$ olmak üzere

$$\lim_{k\to\infty} d_k(x) = d(x)$$

ise $\{E_k\}$, E'ye Wijsman yakınsaktır denir. Bu takdirde $w - \lim E_k = E$ yazabiliriz. Örnek olarak, (x,y)-düzlemindeki

$$E_k = \Big\{(x,y) : x^2 + y^2 - 2ky = 0\Big\}$$

çemberler dizisini göz önüne alalım. $k \to \infty$ iken, E_k dizisi, ($E = \{(x,y) : y = 0\}$) x-eksenine Wijsman yakınsaktır.

(X,p) bir metrik uzay olsun. X in kapalı altkümelerinin bir $\{E_k\}$ dizisini ele alalım. Eğer her $x \in X$ için $\sup_k |d(x,E_k)| < \infty$ ise $\{E_k\}$ dizisine sınırlıdır denir. Şimdi Wijsman Cauchy dizilerini tanıyalım.

Tanım 3.1. Herhangi boştan farklı kapalı $E_k \subseteq X$ altkümeleri için, $d_k(x)$ bir Cauchy dizisi ise $\{E_k\}$ dizisine Wijsman Cauchy denir. Yani, $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall x \in X$ için $\forall m,n > k_0$ olduğunda $|d_n(x) - d_m(x)| < \varepsilon$ olacak biçimde $k_0 \in \mathbb{R}^+$ var ise $\{E_k\}$ dizisine Wijsman Cauchy denir [**27**].

$d(x,E_k) \to d(x,E)$ noktasal yakınsaklığı, düzgün yakınsaklığa dönüştürülürse, Hausdorff yakınsaklık elde edilir:

(X,p) bir metrik uzay olsun. $E_k \subseteq X$ kapalı alt kümeler olmak üzere

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in X} |d_k(x) - d(x)| = 0$$

şartı sağlanıyorsa, E_k dizisi X in kapalı bir altkümesine Hausdorff yakınsıyor denir. Bu takdirde, $E = H - \lim E_k$ yazılabilir. Küme dizilerinin Hausdorff ve Wijsman yakınsaklık tanımları, kümelerin kapalı olmasını gerekli kılar. Aksi takdirde kümelerin limitinin iyi tanımlı olması gerekmez [**28**]. Keyfi bir X metrik uzayında, Hausdorff yakınsaklık $\Longrightarrow$ Wijsman yakınsaklık$\Longrightarrow$ Kuratowski yakınsaklık olduğunu görmek kolaydır [**29**].

$E_k \subseteq X$ in istatistiksel alt limiti ve istatistiksel üst limiti aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\begin{aligned} st - \liminf E_k &= \{x \in X : \exists (E_k) \subset (E_k),\ st - \lim E_k = x\} \\ st - \limsup E_k &= \{x \in X : \exists (k_\ell)\ \exists (a_{k_\ell}) \subset (E_{k_\ell}),\ st - \lim a_{k_\ell} = x\} \end{aligned}$$

Tanım 3.2. E, $E_k \subseteq X$ kapalı alt kümeler olsunlar.

$$st - \limsup E_k = st - \liminf E_k = E$$

şartı sağlanıyorsa $\{E_k\}$, E kümesine Kuratowski istatistiksel yakınsaktır denir. Bu takdirde $st - \lim E_k = E$ yazabiliriz [**27**].

Tanım 3.3. $E, E_k \neq \emptyset$ olmak üzere, $E, E_k \subseteq X$ kapalı altkümeler olsunlar. $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall x \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\{k \leq n : |d(x, E_k) - d(x, E)| \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

ya da $h.h.k.$ için

$$|d(x, E_k) - d(x, E)| < \varepsilon \tag{3.1}$$

oluyorsa $\{E_k\}$, E kümesine Wijsman istatistiksel yakınsıyor denir. Bu takdirde $st - \lim_W E_k = E$ yazabiliriz. (3.1) deki eşitsizlik sonlu sayıdakiler hariç her k için sağlanıyorsa, $W - \lim E_k = E$ olduğu açıktır. $W - \lim E_k = E$ ise, $st - \lim_W E_k = E$ olduğu aşikârdır [**27**]. Wijsman istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi boş değildir. Bunun için aşağıdaki örnekleri inceleyelim.

Örnek 3.1. [**27**] $X = \mathbb{R}$ olsun. $\{E_k\}$ dizisini

$$E_k = \begin{cases} \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x \leq k\} & k \geq 2 \text{ ve } k \text{ tam kare ise} \\ \{1\} & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Bu dizi Wijsman yakınsak değildir ancak

$$\frac{1}{n} \left|\{k \leq n : |d(x, E_k) - d(x, \{1\})| \geq \varepsilon\}\right| \leq \frac{\sqrt{n}}{n}$$

olması nedeniyle, bu dizi $E = \{1\}$'e istatistiksel yakınsaktır.

Örnek 3.2. [**27**] $X = \mathbb{R}^2$ olsun ve $\{E_k\}$ aşağıdaki dizi olsun:

$$E_k = \begin{cases} \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 = \frac{1}{k}\right\} & , k \text{ tam kare ise} \\ \{(0,0)\} & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

Bu dizi de $E = \{(0,0)\}$ kümesine Wijsman istatistiksel yakınsaktır ancak Wijsman yakınsak değildir.

Yukarıda Wijsman yakınsak dizilerin Wijsman istatistiksel yakınsak olduğunu ifade etmiştik. Yukarıdaki iki örnekten anlaşılacağı üzere bu önermenin tersi yanlıştır, diğer bir deyişle Wijsman istatistiksel yakınsak olan bir dizinin Wijsman yakınsak olması gerekmez.

Tanım 3.4. $E, E_k \subseteq X$ kapalı altkümeler olsunlar.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \le n : \sup_{x\in X} |d(x, E_k) - d(x, E)| \ge \varepsilon \right\} \right| = 0$$

ya da $h.h.k$ için

$$\sup_{x\in X} |d(x, E_k) - d(x, E)| < \varepsilon$$

şartı sağlanıyorsa $\{E_k\}$ dizisi, X in kapalı E altkümesine Hausdorff istatistiksel yakınsıyor denir. Bu takdirde $E = st_H - \lim E_k$ yazabiliriz [**27**].

Tanım 3.5. $E,\ E_k \subseteq X$ kapalı altkümeler olsunlar. $\forall\varepsilon > 0$ ve $\forall x \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \le n : |d(x, E_k) - d(x, E_m)| \ge \varepsilon\}| = 0$$

olacak biçimde bir $N = N(\varepsilon)$ var ise, $\{E_k\}$ dizisine Wijsman istatiksel Cauchy'dir denir [**27**].

Teorem 3.1 Aşağıdaki durumlar biribirine denktir.

(i) $\{E_k\}$ bir Wijsman istatistiksel yakınsak dizidir

(ii) $\{E_k\}$ bir Wijsman Cauchy dizisidir

(iii) $h.h.k$ için $E_k = B_k$ olacak biçimde Wijsman yakınsak bir $\{B_k\}$ varsa $\{E_k\}$ Wijsman istatistiksel yakınsaktır.

İspat: Varsayalım ki $st - \lim_W E_k = E$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu takdirde $h.h.k$ için $|d(x, E_k) - d(x, E)| < \frac{\varepsilon}{2}$ dır. $|d(x, E_N) - d(x, E)| < \frac{\varepsilon}{2}$ şartını sağlayacak biçimde bir N sayısı seçilirse, $h.h.k$ için

$$|d(x, E_k) - d(x, E_N)| < |d(x, E_k) - d(x, E)| + |d(x, E_N) - d(x, E)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

dır. Böylece $\{E_k\}$ bir Wijsman istatistiksel Cauchy dizisidir.

Şimdi (ii) nin doğru olduğunu kabul edelim ve $h.h.k$ için $J = [d(x, E_N) - 1, d(x, E_N) + 1]$ aralığı $d(x, E_k)$ yı kapsayacak biçimde bir N sayısı seçelim. N_2 sayısını $h.h.k$ için $J' = \left[d(x, E_{N_2}) - \frac{1}{2}, d(x, E_{N_2}) + \frac{1}{2}\right]$ aralığı $d(x, E_k)$'ları kapsayacak biçimde seçelim. $J_1 = J \cap J^{'}$ aralığının $h.h.k$ için $d(x, E_k)$'ları kapsadığını iddia ediyoruz. Gerçekten

$$\left\{k \leq n : d(x, E_k) \notin J \cap J^{'}\right\} = \{k \leq n : d(x, E_k) \notin J\} \cup \left\{k \leq n : d(x, E_k) \notin J^{'}\right\}$$

olup

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\left\{k \leq n : d(x, E_k) \notin J \cap J^{'}\right\}\right| &\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\{k \leq n : d(x, E_k) \notin J\}\right| \\ + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\left\{k \leq n : d(x, E_k) \notin J^{'}\right\}\right| &= 0 \end{aligned}$$

dır. Böylece J_1, $h.h.k$ için $d(x, E_k)$'ları kapsayan, uzunluğu 1'e eşit veya 1'den küçük olan kapalı bir aralıktır. N_3 sayısını, $J^{''} = \left[d(x, E_{N_3}) - \frac{1}{4}, d(x, E_{N_3}) + \frac{1}{4}\right]$ aralığı $h.h.k$ için $d(x, E_k)$'ları kapsayacak biçimde seçelim. $J_2 = J_1 \cap J^{''}$ aralığı, $h.h.k.$ için $d(x, E_k)$'ları kapsayan ve çapı $\frac{1}{2}$ den küçük veya eşit olan bir aralıktır. Bu süreci devam ettirdiğimizde, tümevarımla kapalı (J_m) aralıklarının bir dizisini elde ederiz, öyleki her m için, $J_{m+1} \subseteq J_m$ dir. Burada J_m, uzunluğu 2^{1-m}'den küçük olan ve $h.h.k$ için $d(x, E_k) \in J_m$ ifadesini sağlayan bir aralıktır. İçiçe aralıklar teoremini kullanarak, $\bigcap_{m=1}^{\infty} J_m = \kappa$ olacak şekilde bir κ sayısı elde edebiliriz. $h.h.k$ için $d(x, E_k) \in J_m$ ifadesini kullanarak $n > T_m$ olduğunda

$$\frac{1}{n} \left|\{k \leq n : d(x, E_k) \notin J_m\}\right| < \frac{1}{m} \ (n > T_m) \tag{3.2}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde pozitif tamsayıların artan bir $\{T_m\}$ dizisini bulabiliriz. Şimdi $k > T_1$ ve $T_m < k \leq T_{m+1}$ olduğunda $d(x, E_k) \notin T_m$ olmak üzere terimlerinin tamamı (E_k) nın terimlerinden oluşan bir $C = (C_k)$ altdizisi tanımlayalım. (B_k) dizisini de

$$B_k = \begin{cases} \{\kappa\} \quad E_k & , C\text{'nin bir terimi ise} \\ E_k & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Bu takdirde $\lim B_k = \{\kappa\}$ dır. $\varepsilon > \frac{1}{m} > 0$ ve $k > T_m$ ise, o zaman ya E_k (bu demek oluyor ki $B_k = \{\kappa\}$) ya da $B_k = E_k \in J_m$ ve $|d(x, B_k) - d(x, \{\kappa\})| \leq J_m$ nin uzunluğu $\leq 2^{m-1}$ dır. $h.h.k$ için $E_k = B_k$ olduğunu iddia ediyoruz. Bunu kanıtlamak için $T_m < k < T_{m+1}$ ise,

$$\{k \leq n : d(x, E_k) \neq d(x, B_k)\} \subseteq \{k \leq n : d(x, E_k) \notin J_m\}$$

dır. (3.2) den

$$\frac{1}{n} \left|\{k \leq n : d(x, B_k) \neq d(x, E_k)\}\right| \leq \frac{1}{n} \left|\{k \leq n : d(x, E_k) \notin J_m\}\right| \leq \frac{1}{m}$$

yazılabilir. Böylece $n \to \infty$ iken limit sıfırdır ve $h.h.k$ için $E_k = B_k$ dir. Böylece (iii) sağlanır.

Son olarak, (iii) ün doğru olduğunu varsayalım; $h.h.k$ için $E_k = B_k$ ve $\lim B_k = \{\kappa\}$

olsun. Bu takdirde $\forall\varepsilon > 0$ ve $\forall t \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{gathered}\{k \leq n : |d(x, E_k) - d(x, \{\kappa\})| \geq \varepsilon\} \subseteq \\ \{k \leq n : d(x, B_k) \neq d(x, E_k)\} \cup \{k \leq n : |d(x, B_k) - d(x, \{\kappa\})| > \varepsilon\}\end{gathered}$$

yazabiliriz. $\lim B_k = \{\kappa\}$ olduğundan, son küme sabit sayıda eleman içerir. $\ell = \ell(\varepsilon)$ diyelim. Böylece $h.h.k$ için $E_k = B_k$ olduğundan dolayı

$$\begin{gathered}\lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} |\{k \leq n : |d(x, E_k) - d(x, \{\kappa\})| \geq \varepsilon\}| \\ \leq \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} |\{k \leq n : d(x, B_k) \neq d(x, E_k)\}| + \lim_{n\to\infty} \tfrac{\ell}{n} = 0\end{gathered}$$

dır. Böylece (i) doğrudur ve kanıt tamamlanmıştır [**27**].

Aşağıdaki teoremlerde, Wijsman ve Hausdorff istatiksel yakınsaklıkları için bir Tauberian şartı vereceğiz.

Teorem 3.2 $\{E_k\}$, $st - \lim_W E_k = E$ ve $\forall x \in X$ için $\Delta d_k(x) = O(\frac{1}{k})$ olacak şekilde bir dizi ise, $\Delta d_k(x) = d_{k+1}(x) - d_k(x)$ olacak şekilde $W - \lim E_k = E$'dır.

İspat: Varsayalım ki $\{E_k\}$ dizisi E kümesine Wijsman istatiksel yakınsak olsun. O zaman $st - \lim_W E_k = E$ ve $h.h.k$ için $E_k = B_k$ olmak üzere $W - \lim B_k = E$ olacak şekilde bir B_k dizisi seçebiliriz. $m_k = \max\{i \leq k : E_i = B_i\}$ olmak üzere, $\forall\, k \in \mathbb{N}$ için $k = m_k + p_k$ yazalım. $\{i \leq k : E_i = B_i\}$ kümesi boş ise $m(k) = -1$ alalım. Bu sonlu sayıda bir k sayısı için sağlanabilir.

$$\lim \frac{p_k}{m_k} = 0 \tag{3.3}$$

olsun. $\frac{p_k}{m_k} > \varepsilon > 0$ ise, o zaman

$$\frac{1}{k} |\{i \leq k : E_i \neq B_i\}| \leq \frac{1}{m_k + p_k} p_k \leq \frac{p_k}{\frac{p_k}{\varepsilon} + p_k} = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}$$

dır. Böylece sonsuz çokluktaki k lar için $\frac{p_k}{m_k} \geq \varepsilon$ olması durumunda $h.h.k$ için $E_k = B_k$ elde ederiz. Bu bir çelişkidir. Böylece (3.1) sağlanır. $\Delta d_k(x) = O(\frac{1}{k})$ olduğundan $\forall\, k \in \mathbb{N}$ ve $\forall$ $x \in X$ için

$$|\Delta d_k(x)| \leq \frac{K}{k}$$

olacak biçimde bir K sabiti vardır. Böylece (3.3) kullanılırsa

$$\begin{gathered}\left|d(x, B_{m(k)}) - d(x, E_k)\right| = \left|d(x, E_{m(k)}) - d(x, E_{m(k)+p(k)})\right| \\ \leq \sum_{i=m(k)}^{\infty} |\Delta d_j(x)| \leq \tfrac{p(k)K}{m(k)} \to 0\end{gathered}$$

elde edilir. $H - \lim B_k = E$ olduğundan $W - \lim E_k = E$ dir [**27**].

Teorem 3.3 $\{E_k\}$, $st - \lim_H E_k = E$ ve $\sup \Delta d_k(x) = O(\frac{1}{k})$ olacak şekilde bir dizi ise $H - \lim E_k = E$ dir.

Kanıt, Teorem 3.2 nin kanıtına benzerdir [**27**].

Teorem 3.4. $E_k \subseteq X$ kapalı alt kümeler olsun. $\{E_k\}$ Wijsman istatistiksel yakınsaksa, $\{E_k\}$ Kuratowski istatistiksel yakınsaktır.

İspat: $st - \limsup E_k \subset st - \liminf E_k$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. $x \in st - \limsup E_k$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Wijsman istatistiksel yakınsak dizi, Wijsman istatistiksel Cauchy olduğundan, $d(x, E_N) < \frac{\varepsilon}{2}$ ve $h.h.k$ için $|d(x, E_k) - d(x, E_N)| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak biçimde bir N seçelim. O halde $h.h.k$ için $d(x, E_k) \leq d(x, E_N) + |d(x, E_k) - d(x, E_N)| < \varepsilon$ dir. Tanımdan, $x \in st - \liminf E_k$ elde ederiz ve bu kanıtı tamamlar [**27**].

Teorem 3.5 $\{E_k\}$, X in kapalı altkümelerinin bir dizisi olsun. $\{E_k\}$ Hausdorff istatistiksel yakınsaksa, $\{E_k\}$ Wijsman istatistiksel yakınsaktır [**27**].

4. KUVVETLİ TOPLANABİLİR KÜME DİZİLERİ

Bu kısımda, Kuratowski Cesáro toplanabilirlik , Wijsman toplanabilirlik ve Wijsman kuvvetli toplanabilir küme dizilerini tanımlayacağız. Wijsman istatistiksel yakınsaklık ile Wijsman kuvvetli toplanabilir kümeler arasındaki bağıntıları vereceğiz [**27**].

(X, p) bir metrik uzay olsun. $E_k \subseteq X$ nin $\{E_k\}$ dizisi için, alt Cesáro limit ve üst Cesáro limitlerini aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

$$(C,1) - \liminf E_k = \left\{ x \in X : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} d\left(x, E_k\right) = 0 \right\}$$

ve

$$(C,1) - \limsup E_k = \left\{ x \in X : \liminf \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} d\left(x, E_k\right) = 0 \right\}$$

dir [**28**].

Tanım 4.1. Keyfi $E_k \subseteq X$ altkümeleri için,

$$(C,1) - \liminf E_k = (C,1) - \limsup E_k$$

ise $\{E_k\}$'ye Kuratowski Cesáro toplanabilirdir denir [**27**].

Tanım 4.2. Herhangi $E, E_k \subseteq X$ kapalı altkümeleri ve her $x \in X$ için $\{d\left(x, E_k\right)\}$ dizisi $d\left(x, E\right)$ ye Cesáro toplanabilir ise, diğer bir deyişle $\forall x \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} d\left(x, E_k\right) = d\left(x, E\right)$$

ise $\{E_k\}$, E'ye Wijsman Cesáro toplanabilirdir denir [**27**].

Tanım 4.3. $E, E_k \subseteq X$ kapalı altkümeleri ve her $x \in X$ için, $\{d\left(x, E_k\right)\}$ dizisi, $d\left(x, E\right)$ ye kuvvetli Cesáro toplanabilir ise, yani $\forall x \in X$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left| d\left(x, E_k\right) - d\left(x, E\right) \right| = 0$$

ise $\{E_k\}$ dizisi E'ye Wijsman Kuvvetli Cesáro toplanabilirdir [**27**].

Tanım 4.4. $p \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere, $E, E_k \subseteq X$ kapalı alt kümeleri ve her $x \in X$ için $\{d\left(x, E_k\right)\}$ dizisi, $d\left(x, E\right)$ ye kuvvetli p-Cesáro toplanabilirse, yani $p \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere, her $x \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left| d\left(x, E_k\right) - d\left(x, E\right) \right|^p = 0$$

ise $\{E_k\}$, E'ye Wijsman Kuvvetli p-Cesáro toplabilirdir denir [**27**].

Teorem 4.1. Keyfi, boş kümeden farklı $E, E_k \subseteq X$ kapalı alt kümeleri ve $p \in \mathbb{R}^+$ için,

(a) $\{E_k\}$, E'ye Wijsman kuvvetli p-Cesáro toplanabilir ise, $\{E_k\}$ E'ye Wijsman istatistiksel yakınsar.

(b) $\{E_k\}$ sınırlı ve E'ye Wijsman istatistiksel yakınsaksa, $\{E_k\}$ E'ye Wijsman Kuvvetli p-Cesáro toplanabilirdir.

İspat:

(a) Keyfi bir $\{E_k\}$ dizisi ve $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n} \left| d\left(x, E_k\right) - d\left(x, E\right) \right|^p \\ \geq \quad & \varepsilon \left| \left\{ k \leq n : \left| d\left(x, E_k\right) - d\left(x, E\right) \right|^p \geq \varepsilon \right\} \right| \end{aligned}$$

yazabiliriz. Buradan $\{E_k\}$ dizisinin E ye Wijsman istatistiksel yakınsak olduğunu söyleyebiliriz.

(b) $\{E_k\}$ sınırlı ve E ye Wijsman istatistiksel yakınsak olsun. $\{E_k\}$, E sınırlı olduğundan,

$$\left| d\left(x, E_k\right) - d\left(x, E\right) \right| \leq N$$

olacak şekilde bir $N > 0$ bulabiliriz. $\varepsilon > 0$ verilsin ve N_ε sayısını $\forall n > N_\varepsilon$ için

$$\frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : \left| d\left(x, E_k\right) - d\left(x, E\right) \right| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \right| < \frac{\varepsilon}{2N^p}$$

olacak şekilde seçelim ve

$$L_n = \left\{ k \leq n : \left| d\left(x, E_k\right) - d\left(x, E\right) \right| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^{\frac{1}{p}} \right\}$$

diyelim. Bu takdirde

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left| d\left(x, E_k\right) - d\left(x, E\right) \right|^p \\ = \quad & \frac{1}{n} \left(\sum_{k \in L_n} \left| d\left(x, E_k\right) - d\left(x, E\right) \right|^p \right) \\ & + \frac{1}{n} \left(\sum_{k \leq n, k \notin L_n} \left| d\left(x, E_k\right) - d\left(x, E\right) \right|^p \right) \\ < \quad & \frac{1}{n} . \frac{n\varepsilon}{N^p} . N^p + \frac{1}{n} . \frac{n\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece, $\{E_k\}$, E'ye kuvvetli p-Cesáro toplanabilirdir [**27**].

5. Dizilerin Wijsman Deferred İstatistiksel Yakinsakliği Ve Wijsman Deferred Cesáro Toplanabilirliği

Bu bölümde (p_n) ve (q_n) dizileri (2.2) de verilen şartları sağlayan negatif olmayan tamsayıların artan iki dizisi olmak üzere küme dizilerinin deferred istatistiksel yakınsaklığı ve kuvvetli $r-$Cesáro toplanabilme kavramlarını tanımlayacak ve bu kavramlar arasındaki bağıntıları vereceğiz. Bu kısım tezin orjinal kısmını oluşturmaktadır.

Tanım 5.1. (X, p) bir metrik uzay ve E_k, $E \subseteq X$ kapalı alt kümeler olsun. (p_n), (q_n) dizileri (2.2) deki şartları sağlasın. Eğer, $\forall x \in X$ ve $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q_n - p_n} \left|\{p_n < k \leq q_n : |d(x, E_k) - d(x, E)| \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

ise, diğer bir deyişle hemen hemen deferred her k $(h.h.d.k.)$, $\forall x \in X$ ve $\forall \varepsilon > 0$ için

$$|d(x, E_k) - d(x, E)| < \varepsilon$$

ise $\{E_k\}$ dizisi E kümesine Wijsman deferred istatistiksel yakınsaktır denir. Eğer $\{E_k\}$, E kümesine Wijsman deferred istatistiksel yakınsak ise $WS_d\ [p, q] - \lim E_k = E$ şeklinde gösterilir. Tüm Wijsman deferred istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi $WS_d\ [p, q]$ ile gösterilir. $q_n = n$ ve $p_n = 0$ alınırsa Nuray ve Rhoedes [**27**] tarafından tanımlanan Wijsman istatistiksel yakınsaklık kavramı elde edilir [**30**].

Tanım 5.2. $r \in \mathbb{R}^+$, (X, p) bir metrik uzay ve E, $E_k \subseteq X$ kapalı alt kümeler olsun. (p_n), (q_n) dizileri (2.2) deki şartları sağlasın. Eğer $\forall x \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q_n - p_n} \sum_{k=p_n+1}^{q_n} |d(x, E_k) - d(x, E)|^r = 0$$

ise $\{E_k\}$ dizisi E kümesine Wijsman deferred kuvvetli $r-$Cesáro toplanabilirdir veya $[W\ (p, q)]_d^r-$Cesáro toplanabilirdir denir. Tüm Wijsman deferred kuvvetli $r-$Cesáro toplanabilir $\{E_k\}$ dizilerinin kümesi $[W\ (p, q)]_d^r$ ile gösterilir. $q_n = n$ ve $p_n = 0$ alınırsa Nuray ve Rhoedes [**27**] tarafından tanımlanan Wijsman kuvvetli $r-$Cesáro toplanabilirlik elde edilir [**30**].

Teorem 5.1. E, $E_k \subseteq X$ kapalı alt kümeler olsun ve (p_n), (q_n) dizileri (2.2) deki şartları sağlasın. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q_n - p_n}{q_n} = 1 \tag{5.1}$$

ise $WS_d\ [0, q] \subseteq WS_d\ [p, q]$ dir.

İspat: $\{E_k\}$ dizisi E kümesine Wijsman deferred istatistiksel yakınsak bir dizi olsun ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu takdirde $\forall x \in X$ ve $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q_n - 0} \left|\{0 < k \le q_n : |d(x, E_k) - d(x, E)| \ge \varepsilon\}\right| = 0$$

yazabiliriz.

$$\{p_n < k \le q_n : |d(x, E_k) - d(x, E)| \ge \varepsilon\} \subset \{0 < k \le q_n : |d(x, E_k) - d(x, E)| \ge \varepsilon\}$$

olduğundan dolayı

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{q_n} \left|\{0 < k \le q_n : |d(x, E_k) - d(x, E)| \ge \varepsilon\}\right| \\
\ge\ & \frac{1}{q_n} \left|\{p_n < k \le q_n . |d(x, E_k) - d(x, E)| \ge \varepsilon\}\right| \\
\ge\ & \frac{q_n - p_n}{q_n} . \frac{1}{q_n - p_n} \left|\{p_n < k \le q_n : |d(x, E_k) - d(x, E_k)| \ge \varepsilon\}\right|
\end{aligned}$$

yazılabilir. $n \to \infty$ iken limit alınır ve (5.1) uygulanırsa, $WS_d\ [0, q] \subseteq WS_d\ [p, q]$ elde edilir [**30**].

Teorem 5.2. E_k ve E kapalı kümelerin sınırlı ve (p_n), (q_n) dizileri (2.2) deki şartları sağlasın. $WS_d\ [p, q] - \lim E_k = E$ ise $E_k \to E\ (\ [W\ \ (p, q)]_d^r)$ dir.

İspat: E_k ve E kümeleri sınırlı ve $WS_d\ [p, q] - \lim E_k = E$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde, $|d(x, E_k) - d(x, E)| \le M$ olacak biçimde bir $M > 0$ vardır. O halde $\forall x \in X$ ve $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{q_n - p_n} \sum_{k=p_n+1}^{q_n} |d(x, E_k) - d(x, E)|^r \\
=\ & \frac{1}{q_n - p_n} \sum_{\substack{k=p_n+1 \\ |d(x,E_k)-d(x,E)|\ge\varepsilon}}^{q_n} |d(x, E_k) - d(x, E)|^r \\
& + \frac{1}{q_n - p_n} \sum_{\substack{k=p_n+1 \\ |d(x,E_k)-d(x,E)|<\varepsilon}}^{q_n} |d(x, E_k) - d(x, E)|^r \\
\le\ & \frac{M^r}{q_n - p_n} \left|\{p_n < k \le q_n : |d(x, E_k) - d(x, E)| \ge \varepsilon\}\right| \\
& + \frac{\varepsilon^r}{q_n - p_n} \sum_{k=p_n+1}^{q_n} 1 \\
<\ & \frac{M^r}{q_n - p_n} \left|\{p_n < k \le q_n : |d(x, E_k) - d(x, E)| \ge \varepsilon\}\right| + \varepsilon^r
\end{aligned}$$

yazılabilir. Yukarıdaki eşitsizliğin $n \to \infty$ için limiti alınırsa, $E_k \to E\ ([W\ \ (p, q)]_d^r)$ elde edilir [**30**].

Teorem 5.3 $r \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere, E, $E_k \subseteq X$ kapalı alt kümeler olsun ve (p_n), (q_n) dizileri (2.2) ve (5.1) şartlarını sağlasın. $\{E_k\}$, E'ye Wijsman kuvvetli Cesáro toplanabilir ise, Wijsman deferred kuvvetli $r-$Cesáro toplanabilirdir.

İspat: $\{E_k\}$ dizisi E kümesine Wijsman kuvvetli $r-$Cesáro toplanabilir olsun. O halde öyle bir $x \in X$ vardır ki

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q_n} \sum_{k=1}^{q_n} |d(x, E_k) - d(x, E)|^r = 0$$

dir. Bu takdirde

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{q_n} \sum_{k=1}^{q_n} |d(x, E_k) - d(x, E)|^r \\
= & \frac{1}{q_n} \left(\sum_{k=1}^{p_n} |d(x, E_k) - d(x, E)|^r \right) \\
& + \frac{1}{q_n} \left(\sum_{k=p_n+1}^{q_n} |d(x, E_k) - d(x, E)|^r \right) \\
\geq & \frac{1}{q_n} \left(\sum_{k=p_n+1}^{q_n} |d(x, E_k) - d(x, E)|^r \right) \\
= & \frac{q_n - p_n}{q_n} \frac{1}{q_n - p_n} \sum_{k=p_n+1}^{q_n} |d(x, E_k) - d(x, E)|^r
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Yukarıdaki eşitsizlikte her iki tarafın $n \to \infty$ için limiti alınır ve (5.1) kullanırsa ispat tamamlanır [**30**].

Teorem 5.4 E, $E_k \subseteq X$ kapalı alt kümeler olsun ve (p_n), (q_n) dizileri (2.2) deki şartları sağlasın. Bu takdirde $[W \ (p,q)]_d \subseteq WS_d \ [p,q]$ dir.

İspat: $\{E_k\}$ dizisi E kümesine Wijsman deferred kuvvetli $r-$Cesáro toplanabilir bir dizi olsun ve $\varepsilon > 0$ verilsin. O halde $\forall x \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q_n - p_n} \sum_{k=p_n+1}^{q_n} |d(x, E_k) - d(x, E)| = 0$$

dir. $\forall x \in X$ ve $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{q_n - p_n} \sum_{k=p_n+1}^{q_n} |d(x, E_k) - d(x, E)| \\
\geq & \frac{1}{q_n - p_n} \sum_{\substack{k=p_n+1 \\ |d(x,E_k)-d(x,E)|\geq\varepsilon}}^{q_n} |d(x, E_k) - d(x, E)| \\
\geq & \frac{1}{q_n - p_n} \left| \{ p_n < k \leq q_n : |d(x, E_k) - d(x, E)| \geq \varepsilon \} \right| .\varepsilon
\end{aligned}$$

Böylece $\{E_k\} \in WS_d\ [p,q]$ dır [**30**].

Teorem 5.5 B, E, $E_k \subseteq X$ kapalı alt kümeler olsun ve (p_n), (q_n) dizileri (2.2) deki şartları sağlasın. $WS_d\ [p,q] - \lim E_k = E$ ve $WS_d\ [p,q] - \lim E_k = B$ ise $E = B$ dir.

İspat: $WS_d\ [p,q] - \lim E_k = E$ ve $WS_d\ [p,q] - \lim E_k = B$ olsun. $\varepsilon > 0$ verildiğinde üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} & \{p_n < k \leq q_n : |d(x,E) - d(x,B)| \geq 2\varepsilon\} \\ = \ & \{p_n < k \leq q_n : |d(x,E_k) + d(x,E) - d(x,E_k) - d(x,B)| \geq 2\varepsilon\} \\ \subset \ & \{p_n < k \leq q_n : |d(x,E_k) - d(x,E)| \geq \varepsilon\} \cup \{p_n < k \leq q_n : |d(x,E_k) - d(x,B)| \geq \varepsilon\} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} & |\{p_n < k \leq q_n : |d(x,E) - d(x,B)| \geq 2\varepsilon\}| \\ \leq \ & |\{p_n < k \leq q_n : |d(x,E_k) - d(x,E)| \geq \varepsilon\}| \\ & + |\{p_n < k \leq q_n : |d(x,E_k) - d(x,B)| \geq \varepsilon\}| \end{aligned}$$

yazabiliriz. Yukarıdaki eşitsizliğin her iki yanı $\frac{1}{q_n - p_n}$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{q_n - p_n} |\{p_n < k \leq q_n : |d(x,E) - d(x,B)| \geq 2\varepsilon\}| \\ \leq \ & \frac{1}{q_n - p_n} |\{p_n < k \leq q_n : |d(x,E_k) - d(x,E)| \geq \varepsilon\}| \\ + \ & \frac{1}{q_n - p_n} |\{p_n < k \leq q_n : |d(x,E_k) - d(x,B)| \geq \varepsilon\}| \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin $n \to \infty$ iken limiti alınırsa, $E = B$ olduğu aşikardır [**30**].

Teorem 5.6 Eğer $\left\{\frac{q_n}{q_n - p_n}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ sınırlı ve $\{E_k\}$ dizisi E kümesine Wijsman istatiksel yakınsak ise $WS_d\ [p,q] - \lim E_k = E$ dır.

İspat: $\{E_k\}$ dizisi E kümesine Wijsman istatistiksel yakınsak olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall x \in X$ için

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |d(x,E_k) - d(x,E)| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olup

$$\left\{ \frac{|\{k \leq q_n : |d(x,E_k) - d(x,E)| \geq \varepsilon\}|}{q_n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

dizisi sıfıra yakınsar. Böylece

$$\begin{aligned} & \{p_n < k \leq q_n : |d(x, E_k) - d(x, E)| \geq \varepsilon\} \\ \subset \; & \{k \leq q_n : |d(x, E_k) - d(x, E)| \geq \varepsilon\} \end{aligned}$$

kapsaması ve

$$\begin{aligned} & |\{p_n < k \leq q_n : |d(x, E_k) - d(x, E)| \geq \varepsilon\}| \\ \leq \; & |\{k \leq q_n : |d(x, E_k) - d(x, E)| \geq \varepsilon\}| \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece

$$\begin{aligned} & \frac{1}{q_n - p_n} |\{p_n < k \leq q_n : |d(x, E_k) - d(x, E)| \geq \varepsilon\}| \\ \leq \; & \frac{q_n}{q_n - p_n} \frac{1}{q_n} |\{k \leq q_n : |d(x, E_k) - d(x, E)| \geq \varepsilon\}| \end{aligned}$$

eşitsizliğinin $n \to \infty$ için limiti alınırsa $WS_d\,[p, q] - \lim E_k = E$ olduğu görülür [**30**].

Teorem 5.7 $p = (p_n)$, $r = (r_n)$, $s = (s_n)$ ve $q = (q_n)$ dizileri

$$p_n \leq r_n \leq s_n \leq q_n \tag{5.2}$$

şartını sağlayan pozitif doğal sayıların dizileri ve

$$\begin{aligned} & \{k : p_n < k \leq r_n\}_{n \in \mathbb{N}} \\ & \{k : s_n < k \leq q_n\}_{n \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

kümeleri sonlu olsun. Bu taktirde $WS_d\,[r, s] - \lim E_k = E$ ise $WS_d\,[p, q] - \lim E_k = E$ dır.

İspat: $WS_d\,[r, s] - \lim E_k = E$ olduğunu varsayalım. $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall x \in X$ için

$$\begin{aligned} & \{p_n < k \leq q_n : |d(x, E_k) - d(x, E)| \geq \varepsilon\} \\ = \; & \{p_n < k \leq r_n : |d(x, E_k) - d(x, E)| \geq \varepsilon\} \\ & \cup \{r_n < k \leq s_n : |d(x, E_k) - d(x, E)| \geq \varepsilon\} \\ & \cup \{s_n < k \leq q_n : |d(x, E_k) - d(x, E)| \geq \varepsilon\} \end{aligned}$$

eşitliği ve

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{q_n - p_n} \left| \left\{ p_n < k \leq q_n : \left| d\left(x, E_k\right) - d\left(x, E\right) \right| \geq \varepsilon \right\} \right| \\
\leq \; & \frac{1}{s_n - r_n} \left| \left\{ p_n < k \leq r_n : \left| d\left(x, E_k\right) - d\left(x, E\right) \right| \geq \varepsilon \right\} \right| \\
& + \frac{1}{s_n - r_n} \left| \left\{ r_n < k \leq s_n : \left| d\left(x, E_k\right) - d\left(x, E\right) \right| \geq \varepsilon \right\} \right| \\
& + \frac{1}{s_n - r_n} \left| \left\{ s_n < k \leq q_n : \left| d\left(x, E_k\right) - d\left(x, E\right) \right| \geq \varepsilon \right\} \right| \\
\leq \; & \frac{K_1}{s_n - r_n} \\
& + \frac{1}{s_n - r_n} \left| \left\{ r_n < k \leq s_n : \left| d\left(x, E_k\right) - d\left(x, E\right) \right| \geq \varepsilon \right\} \right| \\
& + \frac{K_2}{s_n - r_n}
\end{aligned}
$$

eşitsizliği sağlanır. (K_1 ve K_2 sabit birer doğal sayıdır) $n \to \infty$ limit aldığımızda

$$
\lim_{n \to \infty} \frac{1}{q_n - p_n} \left| \left\{ p_n < k \leq q_n : \left| d\left(x, E_k\right) - d\left(x, E\right) \right| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0
$$

elde edilir. Bu ispatı tamamlar [**30**].

Teorem 5.8 $p = (p_n)$, $q = (q_n)$, $r = (r_n)$ ve $s = (s_n)$ dizileri (5.2) deki şartları sağlasın ve

$$
\lim_{n \to \infty} \frac{q_n - p_n}{s_n - r_n} = d > 0, \; d \in \mathbb{R}
$$

olsun. Bu takdirde $WS_d\,[p, q] - \lim E_k = E$ ise $WS_d\,[r, s] - \lim E_k = E$ dır.

İspat:

$$
\begin{aligned}
& \left\{ r_{n+1} \leq k \leq s_n : \left| d\left(x, E_k\right) - d\left(x, E\right) \right| \geq \varepsilon \right\} \\
\subset \; & \left\{ p_{n+1} \leq k \leq q_n : \left| d\left(x, E_k\right) - d\left(x, E\right) \right| \geq \varepsilon \right\}
\end{aligned}
$$

kapsaması ve

$$
\begin{aligned}
& \left| \left\{ r_{n+1} \leq k \leq s_n : \left| d\left(x, E_k\right) - d\left(x, E\right) \right| \geq \varepsilon \right\} \right| \\
\leq \; & \left| \left\{ p_{n+1} \leq k \leq q_n : \left| d\left(x, E_k\right) - d\left(x, E\right) \right| \geq \varepsilon \right\} \right|
\end{aligned}
$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{s_n - r_n} \left| \left\{ r_{n+1} \leq k \leq s_n : \left| d\left(x, E_k\right) - d\left(x, E\right) \right| \geq \varepsilon \right\} \right| \\
\leq \; & \frac{q_n - p_n}{s_n - r_n} \frac{1}{q_n - p_n} \left| \left\{ p_{n+1} \leq k \leq q_n : \left| d\left(x, E_k\right) - d\left(x, E\right) \right| \geq \varepsilon \right\} \right|
\end{aligned}
$$

olup, eşitsizliğin $n \to \infty$ için limiti alınırsa, $WS_d\,[r, s] - \lim E_k = E$ olduğu görülür [**30**].

6. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında, deferred istatistiksel yakınsaklık ve Wijsman istatistiksel yakınsaklık kavramlarından faydalanılarak, Wijsman deferred istatistiksel yakınsaklık kavramı; Wijsman kuvvetli $p-$Cesáro toplanabilirlik ve kuvvetli $D_{p,q}$ yakınsaklık kavramları kullanılarak, Wijsman deferred kuvvetli $r-$Cesáro toplanabilirlik kavramı literatüre kazandırılmıştır. Bu iki kavram kullanılarak, yeni teoremler elde edilmiştir. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{q_n-p_n}{q_n} = 1$ özel şartının sağlanması durumunda $WS_d\ [0,q] \subseteq WS_d\ [p,q]$ olduğu gösterilmiştir. (X,ρ) metrik uzayında, sınırlı diziler için Wijsman deferred istatistiksel yakınsak dizilerin aynı zamanda Wijsman deferred Cesáro toplanabilir diziler olduğu gösterilmiştir. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{q_n-p_n}{q_n} = 1$ özel şartının sağlanması halinde Wijsman kuvvetli r-Cesáro toplanabilir dizilerin, Wijsman deferred kuvvetli $r-$Cesáro toplanabilir olduğu kanıtlanmıştır. $\{\frac{q_n}{q_n-p_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ sınırlı olması durumunda Wijsman istatistiksel yakınsak dizilerin aynı zamanda Wijsman deferred istatistiksel yakınsak diziler olduğu gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] Rudin, W. (1974). Real and Complex Analysis, Tata Mcgraw - Hill Publishing Co. Limited, New Delhi. Fast H., Sur la convergence statiistique, Colloq. Math., 2, 241-244.

[2] Fast, H. (1951). Sur la convergence statiistique, Colloq. Math., 2, 241-244.

[3] Schoenberg, I. J. (1959). The integrability of certain functions and related summability methods, Amer. Math. Monthly, 66, 361-375.

[4] Fridy, J. A. (1985). On statistical convergence, Analysis, 5, 301-313.

[5] Fridy, J. A. , Orhan, C. (1997). Statistical limit superior and limit inferior, Proc. Amer. Math. Soc., 125(12), 3625-3631.

[6] Kuratowski, C. (1966). Topology, Vol.1., Academic Press, New York.

[7] Aubin, J. P. , Frankowska, H. (1990). Set-Valued Analysis, Birkhauser, Boston

[8] Sonntag, Y. , Zalinescu, C. (1993). Set convergences.An attempt of classification, Trans. Amer. Math. Soc., 340(1), 199-226.

[9] Yeh, J. (2000). Lectures on Real Analysis, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd,

Singapore.[10] Balci, M. (2009). Real Analysis, Balci Yayinlari, Ankara.

[11] Steinhaus, H. (1951). Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique, Colloq. Math., 2, 73-74.

[12] Erdös, P. and Tenenbaum, G. (1989). Sur les densites de certaines suites d'entiers, Proc. London Math. Soc., 59(3) , 417-438.

[13] Freedman, A. R., Sember, J. J. and Aphael, M. (1978). Some Cesarotype summability spaces, Proc. London Math. soc., 37, 301-313.

[14] Connor, J. S. (1988). The statistical and strong $p-$Cesaro of sequences, Analysis, 8, 47-63.

[15] Connor, J. S. (1989). On strong matrix summability with respect to a modulus and statistical convergence, Canad. Math. Bull., 32, 194-198.

[16] Fridy, J. A. and Orhan, C. (1993). Lacunary statistical convergence, Pacific. J. Math., 160, 43-51.

[17] Fridy, J. A. and Miller, H. I. (1991). A matrix characterization of statistical convergence, Analysis, 11, 59-66.

[18] Salat, T. (1980). On statistically convergent sequences of real numbers, Math. Slovaca, 30, 139-150.

[19] Buck, R. C. (1953). Generalized asymptotic density, American J. Math., 75, 335-346.

[20] Zygmund, A. (1979). Trigonometric Series, Cambridge Univ. Press Cambridge, U. K.

[21] Agnew, R. P. (1932). On deferred Cesaro Mean, Comn. Ann. Math., 33, 413-421.

[22] Maddox, I. J. (1967). Space of strongly summable functions, Oxford(2), Quart. J. Mah., 345-355.

[23] Mursaleen, M. (2000). $\lambda-$statistical convergence, Math. Slovaca, 50(1), 111-115.

[24] Nuray, F. (2010). $\lambda-$strongly summable and $\lambda-$statistically convergencet functions, Iran. J. Sci. Technol. Trans. A Sci., 34(A4) , 335-338.

[25] Kucukaslan, M. and Yilmazturk, M. (2016). On Deferred Statistical Convergence of Sequences, Kyungpook Math. J., 56, 357-366.

[26] Osikiewicz, J. A. (1997). Summability of Matrix Submethods and Spliced Sequences, Ph. D. Thesis, Kent State University, August 90 pp.

[27] Nuray, F. and Rhoades, B. E. (2012). Statistical Convergence of Sequences of Sets, Fasc. Math. No. 49, 87–99.

[28] Hausdorff, F. (1914). Grundzuger Mengenlehre, Verlag von Veit,Leipzig, Prepinted by Chelsea, New York.

[29] Beer, G. (2002). On the compactness theorem for Sequences of closed sets, Math. Balkanica, 16, 327-338.

[30] Et, M. and Yilmazer, M. Ç. (2020). On Deferred Statistical Convergence of Sequences of Sets, AIMS Mathematics 5(3), 2143-2152.

Özgeçmiş

Mehmet Çağrı YILMAZER

KİŞİSEL BİLGİLER

Doğum Yeri	: Elazığ
Doğum Yılı	: 1993
Uyruğu	: T.C.
Adres	: Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi, Elazığ
E-posta	: mehmetcagriyilmazer@gmail.com
Yabancı Diller	: İngilizce (YÖKDİL: 95.00)

EĞİTİM BİLGİLERİ

Lisans	: Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 2016
Lise	: Hıdır Sever Lisesi, Elazığ, 2011

İŞ DENEYİMİ

2019 – ...	: Araştırma Görevlisi-Fırat Üniversitesi

AKADEMİK FALİYETLER

Makaleler :

1. Mikail Et and M. Çagri Yilmazer, On deferred statistical convergence of sequences of sets, AIMS Mathematics 5(3) (2020), 2143–2152.

Bildiriler :

1. Mikail ET and M. Çagrı YILMAZER, On Deferred Statistical Convergence of Sequences of Sets, International Conference on Computational Methods in Applied Sciences, (IC2MAS 2019), Istanbul Gelisim University, July 12 -July 16, 2019, ISTANBUL/TURKEY.

Projeler :

1. Mikail Et and M. Çağrı YILMAZER, On Deferred Statistical Convergence of Sequences of Sets, FUBAP, Project Number: FUBAB FF.19.05.