



**T.C. İSTANBUL T CARET
ÜNİVERSİTESİ**

FEN B LİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BAZİ L NEER OPERATÖRLERİN HYERS-ULAM
KARARLILIĞI**

Gülizar Gülenay ZENGİN

**Danışman
Prof. Dr. Hamdullah ŞEVLİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
İSTANBUL - 2020**

KABUL VE ONAY SAYFASI

Gülizar Gülenay ZENGİN tarafından hazırlanan "**Bazı Lineer Operatörlerin Hyers-Ulam Kararlılığı**" adlı tez çalışması 20.05.2020 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde başarı ile savunularak, İstanbul Ticaret Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman **Prof. Dr. Hamdullah ŞEVLİ**
Van Yüzüncüyıl Üniversitesi

Jüri Üyesi **Prof. Dr. Necip ŞİMŞEK**
İstanbul Ticaret Üniversitesi

Jüri Üyesi **Doç. Dr. Murat KİRİŞÇİ**
İstanbul Üniversitesi Cerrahpaşa

Onay Tarihi : 18.06.2020

İstanbul Ticaret Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsünün 18.06.2020 tarih ve 2020/286 numaralı Yönetim Kurulu Kararının 5. maddesi gereğince, ders yüklerini ve tez yükümlülüğünü yerine getirdiği belirlenen "Gülizar Gülenay ZENGİN" (TC:100036473) adlı öğrencinin mezun olmasına oy birliği ile karar verilmiştir.

Prof. Dr. Necip ŞİMŞEK
Enstitü Müdürü

AKADEMİK VE ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

İstanbul Ticaret Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada,

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversitede veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

18.06.2020



Gülizar Gülenay ZENGİN

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	v
1. GİRİŞ	1
2. LİTERATÜR ÖZETİ	4
3. TEMEL TANIM VE TEOREMLER	10
4. HYERS-ULAM KARARLILIK VE BAZI LİNEER OPERATÖRLERİN KARARLILIK SABİTLERİ	17
4.1. Hyers-Ulam Kararlılık	17
4.2. Bazı Lineer Operatörlerin Hyers-Ulam Kararlılığı ve Kararlılık Sabitleri	24
4.2.1. Bernstein Operatörü ve Hyers-Ulam Kararlılık Sabiti.....	24
4.2.2. Stancu Operatörü	31
4.2.3. Kantorovich Operatörü	36
4.2.4. King Operatörü	37
4.2.5. Kantorovich-Stancu Operatörü	38
4.2.6. Bernstein-Schurer Operatörü	40
4.2.7. Kantorovich-Schurer Operatörü.....	41
4.2.8. Szasz-Mirakjan Operatörü	42
4.2.9. Beta Operatörü	45
4.2.10. Kantorovich-Szasz-Mirakjan Operatörü	45
5. HYERS-ULAM KARARLILIĞA İLİŞKİN BAZI ÖRNEKLER.....	47
5.1. Volterra Operatörü	48
5.2. Hilbert Uzayında Sonlu Boyutlu Operatörün Hyers-Ulam Kararlılık Sabiti.....	50
6. SONUÇ VE ÖNERİLER	54
KAYNAKLAR.....	55
ÖZGEÇMİŞ	58

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BAZI LİNEER OPERATÖRLERİN HYERS-ULAM KARARLILIĞI

Gülizar Gülenay ZENGİN

İstanbul Ticaret Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Hamdullah ŞEVLİ

2020, 58 sayfa

Bu çalışmada bazı lineer operatörlerin Hyers-Ulam kararlılığı incelenmiş ve kararlı olan operatörlerin kararlılık sabiti verilmiştir.

Önce Hyers-Ulam kararlılığın tanımı ve bir operatörün hangi şartlar altında kararlı olacağına ilişkin koşulları içeren teorem verilmiştir. Sonrasında Hyers-Ulam kararlılığı incelenmiş bazı lineer operatörler verilmiştir. Daha sonrasında Volterra operatörü ve ayrılabilir bir Hilbert uzayında tanımlı sonlu boyutlu bir operatörün Hyers-Ulam kararlılığı incelenmiştir. Ayrıca kararlı olan operatörün de kararlılık sabiti bulunmuştur. Son olarak da, lineer ve sınırlı bir operatörün Hyers-Ulam kararlılığına ilişkin bir sonuca ulaşılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Banach uzayı, Hyers-Ulam kararlılık, lineer operatörler.

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

HYERS-ULAM STABILITY OF SOME LINEAR OPERATORS

Gülizar Gülenay ZENGİN

**İstanbul Commerce University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Prof. Dr. Hamdullah ŞEVLİ

2020, 58 pages

In this study, Hyers-Ulam stability of some linear operators is considered and stability constant of operators are given.

Firstly, the definition of Hyers-Ulam stability and a theorem including the conditions under which an operator will be stable are given. Then, some linear operators with Hyers-Ulam stability are given. And then, the Hyers-Ulam stability of the Volterra operator and a finite dimensional operator defined in a separable Hilbert space were investigated. In addition, stable of the operator's stability constant was obtained. Finally, a conclusion has been reached regarding the Hyers-Ulam stability of a linear and bounded operator.

Keywords: Banach spaces, Hyers-Ulam stability, linear operators.

TEŞEKKÜR

Bu araştırma için beni yönlendiren, karşılaştığım zorlukları bilgi ve tecrübesi ile aşmamda yardımcı olan, başta değerli Danışman Hocam Yüzüncüyıl Üniversitesi Rektörü Prof. Dr. Hamdullah ŞEVLİ'ye ve Yüzüncüyıl Üniversitesi Matematik bölümü hocalarından sayın Prof. Dr. Heybetkulu MUSTAFAYEV'e teşekkürlerimi sunarım.

Tezimin her aşamasında, beni yalnız bırakmayan ve tüm zamanlarımda desteklerini esirgemeyen değerli aileme ve dostlarıma sonsuz sevgi ve saygılarımı sunarım.

Gülizar Gülenay ZENGİN
İSTANBUL, 2020



SİMGELER VE KISALTMALAR

uzayında tanımlı tüm sürekli fonksiyonların uzayı
'de değerli tüm sürekli fonksiyonların uzayı
'de diferansiyellenebilir fonksiyonların uzayı
kombinasyonu
aralığında tanımlı reel değerli tüm sürekli fonksiyonların uzayı
aralığında tanımlı reel değerli ve sınırlı tüm sürekli
fonksiyonların uzayı
 R yarıçaplı açık yuvar
kümesinin boyutu
 T 'nin Hyers-Ulam kararlılık sabiti
 T 'nin çekirdeği
 T 'nin değerler kümesi
 T 'nin kapanışı
 X 'in E 'ye göre bölüm uzayı
uzayında sıfırın bir komşuluğu olan açık küme
Derecesi n 'den küçük eşit olan tüm polinomların kümesi
Sabit 1 fonksiyonu

1. GİRİŞ

Kararlılık kavramı, mekanik kavramlarda ortaya çıkmıştır. Bu durumu matematiksel olarak ifade etmek gerekirse, bir problemin çözümünün başlangıç parametrelerine bağlı olarak sürekli olmasıyla alakalıdır. Bu süreklilik farklı şekillerde tanımlanabilir. Çoğu zaman çözümlerin çok büyük zaman aralıklarında sınırlı olduğunu göstermek yeterli olur. Yani sistemi temsil eden noktanın herhangi bir zamanda başlangıç noktasına olan uzaklığının sınırlılığı kastedilmektedir.

Matematiksel analizde “Bir fonksiyonun bazı şartlar altında bir fonksiyonel denklemi sağladığını kabul edelim. Bu fonksiyonel denklemi sağlayan ve bu fonksiyona yakın olan başka bir fonksiyon bulmak mümkün müdür?” sorusu bir kararlılık problemidir. Bu doğrultuda, dikkatimizi fonksiyonel denklemlere yönelttiğimizde, “verilen bir denklemden çok az farklı olan bir denklemin çözümü, verilen bu denklemin çözümüne ne zaman yakın olmalıdır?” veya benzer biçimde “bir fonksiyonel denklem bir fonksiyonel eşitsizlik ile değiştirildiğinde eşitsizliğin çözümlerinin denklemin çözümlerine yakın olması gerektiği ne zaman iddia edilebilir?” soruları sorulabilir.

Fonksiyonel denklemlerin kararlılığı, Ulam (1940)’ın Wisconsin Üniversitesi matematik konferansında sunduğu aşağıdaki problem ile başlamıştır:

bir grup ve , metriği ile verilmiş bir metrik grup olsun. Keyfi sayısı verilsin. Her için

eşitsizliğini sağlayan bir dönüşüm ise her için ile bir homomorfizm olacak şekilde bir sayısı var mıdır? Yani “Hangi şartlar altında bir yaklaşım homomorfizmine yaklaşan bir homomorfizm vardır?”

Ulam'ın bu sorusuna Hyers (1941) kısmen olumlu bir yanıt vermiştir. Hyers bu soruyu Banach uzayları için yanıtlamıştır.

Daha sonrasında Ulam'ın probleminin bir genelleştirmesi olarak fonksiyonel denklemlerin yerine diferansiyel denklemler kullanılmaya başlanmıştır. Lineer diferansiyel denklemlerin Hyers-Ulam kararlılığını inceleyen ilk kişi Obloza (1993; 1997) dır.

Lineer operatörlerin Hyers-Ulam kararlılığı da ilk olarak, Miura vd. (2003), Hatori vd. (2004), Hirasawa ve Miura (2006) tarafından incelenmiştir. Lineer operatörlerin kararlılığının bir karakterizasyonunu ve kararlılık sabitlerine karşılık gelen bir temsil elde etmişlerdir. Miura vd. (2003) bir Banach uzayında tanımlı sabit katsayılı, lineer diferansiyel operatörün kararlılığını ispatlamışlardır. Hatori vd. (2004) ölçü (gauge) fonksiyonları ile verilen bir lineer uzaydan başka bir lineer uzaya tanımlı, lineer bir operatörün Hyers-Ulam kararlılığını göstermişlerdir.

En iyi Hyers-Ulam kararlılık sabiti sorusu da ilk olarak Rassias ve Tabor (1992)'un çalışmasında yer almaktadır. Literatürde, denklemlerin ve operatörlerin en iyi Hyers-Ulam kararlılık sabiti için birkaç sonuç bulunmaktadır. Ayrıca biraz önce de bahsedilen Miura vd. (2003), Hatori vd. (2004), Hirasawa ve Miura (2006) çalışmalarında ve Takagi vd. (2003) çalışmasında, lineer operatörlerin kararlılığının bir karakterizasyonu ile onların en iyi sabitlerinin temsili yer almaktadır.

Bu çalışmada da bazı lineer operatörlerin Hyers-Ulam kararlı olması için gerekli koşullar belirtilmekte ve kararlı olan operatörlerin en iyi kararlılık sabiti gösterilmektedir.

Altı bölümden oluşan bu çalışmanın ikinci bölümünde, Hyers-Ulam kararlılık çalışmalarını içeren literatür özeti bulunmaktadır. Üçüncü bölümünde, diğer bölümlerde kullanılan temel tanım ve teoremler verilmektedir. Dördüncü bölümünde ise Hyers-Ulam kararlılık tanımı ve bir operatörün hangi şartlar altında kararlı olacağına ilişkin koşullar yer almaktadır. Ayrıca, Hyers-Ulam kararlılığı incelenmiş bazı lineer operatörler bulunmakta olup kararlı olan operatörlerin de Hyers-Ulam kararlılık sabiti verilmektedir. Beşinci bölümde de, Hyers-Ulam kararlı olmayan bir

örnek ile Hyers-Ulam kararlı olan ve kararlılık sabiti bulunan bir örnek yer almaktadır. Son bölümde ise sınırlı ve lineer operatörlerin Hyers-Ulam kararlılığına ilişkin bir sonuç bulunmaktadır.



2. LİTERATÜR ÖZETİ

Bu bölümde, Hyers-Ulam kararlılık üzerine yapılan bazı çalışmalar verilecektir.

Fonksiyonel denklemlerin kararlılığının başlangıcı olan Ulam'ın sunduğu probleme Hyers şu şekilde cevap vermiştir:

ve birer Banach uzayı ve olmak üzere her için

şartını sağlayan bir dönüşümü verilsin. Hyers gösterdi ki, her için

limiti vardır ve lineer dönüşümü tektir. Bunun dışında her için

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca, f fonksiyonu 'deki bir noktada sürekli ise dönüşümü 'de süreklidir (Hyers, 1941).

Hyers'in teoremini, 1947 yılında Aoki ve 1978 yılında Rassias lineer dönüşümlerin yaklaşımı için genelleştirmiştir.

ve birer Banach uzayı olsun. Her ve dönüşümü için

şartını sağlayan ve sayılarının var olduğu kabul edilsin. Buradaki dönüşümü “yaklaşık” lineerdir. Her için

eşitsizliğini sağlayan ϕ 'e yakın bir δ lineer dönüşümü vardır ve ϕ tektir (Aoki, 1950).

ve Banach uzayları olsun. Her x, y için $\phi(x) = y$ ve ϕ vardır öyle ki ϕ dönüşümü için

şartı sağlanır. Ayrıca her x için

limiti vardır ve

(2.1)

eşitsizliğini sağlayan lineer dönüşümü tektir. Hatta ise bu eşitsizlikler için sağlanır. Ayrıca, her x için olmak üzere fonksiyonu süreklidir (Rassias, 1978).

(2.1) eşitsizliği fonksiyonel denklemlerin şu anda bilinen Hyers-Ulam-Rassias kararlılığının geliştirilmesinin gelişiminde çok etkili olmuştur. Gajda (1991) bu problemi için çözmüştür. için Rassias ve Semrl (1992) reel değerli, sürekli bir fonksiyonunun varlığını göstermiştir. Daha sonra Gavruta (1994) Rassias teoremini geliştirmiştir.

Alsina ve Ger (1998) bir diferansiyel denklemin Hyers-Ulam kararlılığını inceledikleri ilk çalışmalarında, diferansiyel denkleminin Hyers-Ulam kararlılığını ele aldılar ve bu denklem için şunu gösterdiler: açık aralığı olmak üzere eğer ϕ ve her x için

eşitsizliğini sağlayan f diferansiyellenebilir bir fonksiyon ise her $x \in I$ için

olacak şekilde bir C sabiti vardır. Buradaki C ile α diferansiyel denkleminin tüm çözümlerinin kümesi arasındaki mesafe en çok C/α olur.

Alsina ve Ger'in bu sonucunu Miura vd. (2001), Miura (2002) çalışmışlardır.

Ayrıca Miura vd. (2002) şunu gösterdiler:

X kompleks bir Banach uzayı ve X 'in bir açık aralığı I olsun. Keyfi $\alpha > 0$ ve $\beta > 0$ kompleks sayısı için eğer T diferansiyellenebilir bir dönüşüm ise ve her $x \in I$ için

eşitsizliği sağlanıyorsa, α ile β diferansiyel denkleminin tüm çözümlerinin kümesi arasındaki en fazla mesafe C/α olur.

Daha sonra da verdikleri kompleks Banach uzayındaki diferansiyel denkleminin sonucunu genelleştirmişlerdir. Alsina ve Ger uyarınca Hyers-Ulam kararlılığı tanımlamışlardır.

Lineer operatörlerin kararlılığının ilk çalışmaları Miura vd. (2003) vermiştir. X kompleks bir Banach uzayı ve $\alpha > 0$ 'de, değerli tüm sürekli fonksiyonların lineer uzayı $L^1(I, X)$ olmak üzere, α 'de sürekli ve türevi T olan diferansiyellenebilir her f için α lineer uzayını ele almışlardır. α 'de tanımlı α normu ile α için

şeklinde verilen lineer diferansiyel operatörün Hyers-Ulam kararlı olması için gerek ve yeter koşulları vermişlerdir. 2004'te de operatörünün Hyers-Ulam kararlılık sabitini belirlemişlerdir.

Benzer sonuçlar Takagi vd. (2003) tarafından kompakt bir Hausdorff uzayı ve X 'deki tüm sürekli fonksiyonları içeren Banach uzayı olmak üzere, 'de tanımlı ağırlıklı bileşke operatörler için elde edilmiştir:

ve kompakt Hausdorff uzaylar olmak üzere ve uzayları alınsın. için olsun. 'den 'e tanımlı 'da sürekli olan bir dönüşümü ve fonksiyonu alınsın. 'den 'ye tüm için,

şeklinde tanımlı sınırlı lineer bir operatördür. Bu operatöre 'den 'ye tanımlı ağırlıklı bileşke operatör denir.

'den 'ye tanımlı ağırlıklı bileşke operatörü Hyers-Ulam kararlıdır ancak ve ancak

şartını sağlayan pozitif bir r sabiti vardır. Tüm r 'lerin supremumu ile operatörünün Hyers-Ulam kararlılık sabiti gösterilir.

Hatori vd. (2004) şunu gösterdiler:

bir lineer uzay olmak üzere ve her skaleri için

şeklinde tanımlı fonksiyona lineer uzayında bir ölçü (gauge) fonksiyonu denir.

ve sırasıyla ve ölçüleri ile verilen lineer uzaylar olsun. 'den 'ye tanımlı lineer operatörü alınsın. Eğer aşağıdaki koşulu sağlayan bir sabiti varsa operatörü Hyers-Ulam kararlıdır:

, ve ile için bir vardır öyle ki ve olur.

operatörünün çekirdeği olmak üzere ve için olsun. Hyers-Ulam kararlı olan operatörünün kararlılık sabiti olarak gösterilsin. O halde,

olur ve ile için bir vardır öyle ki olur.

Ayrıca buradan yola çıkarak, birinci dereceden lineer operatörlerin ve Takagi vd. (2003)'nin tanımladığı ağırlıklı bileşke operatörünün en iyi Hyers-Ulam kararlılık sabitini bulmak için gerek ve yeter koşulları vermişlerdir.

Hirasawa ve Miura (2006), Hilbert uzayında tanımlı kapalı bir operatörün Hyers-Ulam kararlılığı için bazı gerek ve yeter koşulları vermişlerdir. Dahası kapalı bir operatör için kararlılık sabitinin varlığını ispatlamışlardır. Ayrıca kararlılık sabitinin alt sınırını belirlemişlerdir.

İkinci dereceden lineer bileşke operatörlerin kararlılığı da Brzdek ve Jung (2011) tarafından incelenmiştir.

Daha sonra Popa ve Raşa (2011), Banach uzaylarında tanımlı birinci mertebeden lineer diferansiyel operatörler için kararlılık sonuçları elde etmişlerdir. Ayrıca 2012'de de, sabit olmayan katsayılı, yüksek mertebeli lineer diferansiyel operatörlerin Hyers-Ulam kararlılığı üzerine bir sonuç elde etmişlerdir.

Johnson ve Balaji (2012), Frechet uzayları arasındaki lineer bir operatörün Hyers-Ulam kararlılığını tanımlamış ve bir Frechet uzayından başka bir Frechet uzayına

tanımlı sürekli lineer bir operatörün Hyers-Ulam kararlılığının varlığı için gerek ve yeter koşulları vermişlerdir.

Yine Popa ve Raşa (2013), yaklaşım teorisindeki bazı klasik operatörler (Bernstein, Stancu, Szasz-Mirakjan, Kantorovich, Beta ve diğerleri) için Hyers-Ulam kararlılığı tanımlamışlardır.

Lee vd. (2013), normlu bir matris uzayında tanımlı Cauchy toplamsal ve kuadratik fonksiyonel denklemlerin Hyers-Ulam kararlılığını göstermişlerdir.

Jung ve Şevli (2013), ikinci dereceden çeşitli lineer diferansiyel denklemlerin Hyers-Ulam kararlılığını kanıtlamak için kuvvet serisi metodunu kullanmışlardır.

Popa ve Raşa (2014), Mursaleen ve Ansari (2015), Banach uzaylarında tanımlı bazı pozitif lineer operatörler (Stancu, Kantorovich, Kantorovich-Stancu, King operatörleri) için en iyi Hyers-Ulam kararlılık sabitlerini elde etmişlerdir.

Ayrıca Mursaleen vd. (2015), kompakt diskte tanımlı bazı pozitif lineer operatörlerin (Bernstein-Schurer, Kantorovich-Schurer, Lorentz) Hyers-Ulam kararlılığını incelemiş ve kararlı olan operatörlerin kararlılık sabitini göstermişlerdir.

Huang vd. (2015) sürekli ya da yerel sınırlı olan kapalı bir operatörün Hyers-Ulam kararlılığını incelemişlerdir.

Lineer uzaylardaki lineer operatörlerin Hyers-Ulam kararlılığı için yeni bir yaklaşım, Brzdek vd. (2017) tarafından dikkate alınmıştır. Brzdek vd. şunu göstermiştir:

ve (reel ya da kompleks) lineer uzaylar olmak üzere lineer bir operatör olsun. ve sırasıyla ve uzaylarında birer ölçü (gauge) olsun. Her bir için olacak biçimde ile bir vardır. Öyle ki operatörü sabiti ile Hyers-Ulam kararlıdır.

3. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, diğer bölümlerde kullanılan temel tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 3.1. (Grup) G boş olmayan bir küme ve $\cdot$, G üzerinde bir işlem olsun. Bu işlem aşağıdaki şartları sağladığı takdirde G 'ye bir grup denir (Bayraktar, 2006).

- Her $a, b \in G$ için $a \cdot b \in G$.
- Her $a \in G$ için $a \cdot e = a$ olacak şekilde bir $e \in G$ vardır ve e 'ye grubun birimi denir.
- Her $a \in G$ için $a \cdot b = e$ olacak şekilde bir $b \in G$ vardır. b 'ye a 'nın tersi denir ve a^{-1} ile gösterilir.

Tanım 3.2. (Homomorfizma) $(G, \cdot)$ ve $(H, \cdot)$ sırasıyla G ve H işlemlerine göre birer grup olmak üzere, her $a, b \in G$ için

$\phi(a \cdot b) = \phi(a) \cdot \phi(b)$ eşitliği sağlanıyorsa ϕ dönüşümüne G 'den H 'a bir homomorfizm denir (Bayraktar, 2006).

Tanım 3.3. (Metrik Uzay) X bir küme olmak üzere d de tanımlı reel değerli fonksiyonu Her $x, y \in X$ için

- i. $d(x, y) \geq 0$ ve $d(x, y) = 0$ iken $x = y$.
- ii. $d(x, y) = d(y, x)$.
- iii. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

d şartlarını sağladığı takdirde d 'ye X 'te bir metrik denir. (X, d) ikilisine de metrik uzay denir (Bayraktar, 2006).

Tanım 3.4. (Metrik Grup) Bir $(G, \cdot)$ grubu metrik uzay ise G ye bir metrik grup denir (Bayraktar, 2006).

Tanım 3.5. (Normlu Uzay) F cismi üzerinde bir lineer uzay ve $\|\cdot\|$ olmak üzere,

$\|\cdot\|$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağladığı takdirde $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X 'te bir norm ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine bir normlu uzay denir (Bayraktar, 2006).

- i. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in X$,
- ii. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $x, y \in X$,
- iii. $\|x\| \geq 0$, $x \in X$.

Tanım 3.6. (Banach Uzayı) bir normlu uzay, $\{x_n\}$ bu uzayda bir dizi olmak üzere, $\|x_n - x_m\| \rightarrow 0$ ise $\{x_n\}$ 'e bir Cauchy dizisi denir. Eğer, bir normlu uzayda her Cauchy dizisi bu uzayın bir elemana yakınsıyor ise bu uzaya bir Banach uzayı denir (Bayraktar, 2006).

Teorem 3.7. (Süreklili Dönüşüm) X ve Y iki metrik uzay, $T: X \rightarrow Y$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $\{x_n\}$ dizisi x ve $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ için $\|Tx_n - Tx\| \rightarrow 0$ olmasını gerektirirse T 'ye süreklidir denir (Kreyszing, 1978).

Tanım 3.8. (Lineer Operatör) X ve Y aynı cismi üzerinde iki lineer uzay olmak üzere $T: X \rightarrow Y$ dönüşümü,

$\|Tx_n - Tx\| \rightarrow 0$ şartlarını sağlıyorsa T 'ye lineer operatör denir (Bayraktar, 2006).

Tanım 3.9. (Sınırlı Lineer Operatör) X ve Y iki normlu uzay olmak üzere bir lineer operatör olsun. Eğer her $x \in X$ için,

$\|Tx\| \leq M \|x\|$ olacak şekilde bir M sabiti varsa T 'ye sınırlı operatör denir (Bayraktar, 2006).

Tanım 3.10. (Bir Operatörün Normu) X ve Y iki normlu uzay olmak üzere sınırlı lineer operatörün normu,

eşitliği ile tanımlanır. T 'nin normunu _____ olarak da ifade edilebilir (Kreyszing, 1978).

Tanım 3.11. (lineer operatörün çekirdeği) _____ bir lineer operatör olsun.

X kümesine T 'nin sıfır uzayı veya çekirdeği denir ve _____ ile gösterilir (Bayraktar, 2006).

Teorem 3.12. X ve Y aynı _____ cismi üzerinde iki lineer uzay ve _____ lineer bir operatör olsun. _____, _____ olarak tanımlanan dönüşümüne T 'nin ters dönüşümü denir. 'in var olması için gerek ve yeter şart T 'nin birebir ve örten olmasıdır. Bu takdirde,

- a) ters dönüşümünün var olması için gerek ve yeter şart _____ olmasıdır.
- b) ters dönüşümü varsa lineerdir.
- c) _____ ve _____ varsa _____ dir.

(Kreyszing, 1978).

Teorem 3.13. Eğer normlu bir X uzayı sonlu boyutlu ise X üzerindeki her lineer operatör sınırlıdır (Kreyszing, 1978).

Teorem 3.14. X bir Banach uzayı ve _____ lineer bir dönüşüm olsun. T 'nin sürekli olması için gerek ve yeter şart _____ 'nin kapalı olmasıdır (Kreyszing, 1978).

Teorem 3.15. (Banach teoremi) X ve Y iki Banach uzayı ve T sınırlı ve lineer bir operatör olsun. T birebir ve örten ise vardır ve sınırlı lineer operatördür (Conway, 1985).

Teorem 3.16. (Sınırlılık Süreklilik) X ve Y iki Banach uzayı olmak üzere lineer bir operatör olsun. Bu durumda,

- a) T 'nin sürekli olması için gerek ve yeter koşul T 'nin sınırlı olmasıdır
- b) T tek bir noktada sürekli ise her noktada süreklidir

(Kreyszing, 1978).

Tanım 3.17. (Bölüm Uzayı) X bir Banach uzayı ve E , X 'in kapalı bir alt uzayı olsun. $x \in E$ için $Tx \in E$ ifadesi anlamında tanımlansın. $Tx \in E$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Buradan da,

x kümesine x 'in denklik sınıfı, x 'e ise bu sınıfın temsilcisi denir. Tüm denklik sınıflarına X 'in E 'ye göre bölüm uzayı denir. Tanımdan dolayı bölüm uzayı aşağıdaki gibi ifade edilir:

Ayrıca,

ve

işlemlerine göre bölüm uzayı bir vektör uzayıdır (Kreyszing, 1978).

Teorem 3.18. X bir Banach uzayı ve E uzayı X 'in kapalı bir alt uzayı olsun. Bu takdirde,

bölüm uzayı

normuna göre bir Banach uzayıdır (Bayraktar, 2006).

Tanım 3.19. (Açık Dönüşüm) X ve Y iki normlu uzay olmak üzere bir dönüşüm olsun. Eğer X 'teki her açık kümenin T altındaki görüntüsü Y 'de açık ise T 'ye açık dönüşüm denir.

Dönüşüm örten değilse bu dönüşümün,

- a) Tanım bölgesinden Y 'nin içine
- b) Tanım bölgesinden değer bölgesi üzerine

bir açık dönüşüm olması arasındaki farka dikkat etmek gerekir. (b) hali (a) halinden daha zayıftır. Örneğin, T ise, X 'ten Y 'nin içine olan T dönüşümünün açık olması için gerek ve yeter koşul, X 'in Y 'nin bir açık altkümesi olmasıdır. Buna karşılık, X 'ten değer bölgesi üzerine (ki bu X tir) olan dönüşümü her zaman açıktır. Ayrıca, sürekli bir dönüşümü altında Y 'deki her açık kümenin ters görüntüsü X 'te yine bir açık kümedir. Bu durum, T 'nin X 'teki açık kümeleri Y 'deki açık kümelere dönüştürdüğü anlamına gelmez.

Açık dönüşüm teoreminin, sınırlı lineer bir operatörün hangi koşullar altında bir açık dönüşüm olduğunu ifade ettiği söylenilebilir. Düzgün sınırlılık teoreminde olduğu gibi burada da tamlık özelliğine gereksinim duyulur. Bu teorem Banach uzaylarının, tam olmayan normlu uzaylardan neden daha etkili olduğunu ortaya koymaktadır. Ayrıca sınırlı lineer bir operatörün tersinin hangi koşullar altında sınırlı olduğunu da göstermektedir (Kreyszing, 1978).

Teorem 3.20. (Açık Dönüşüm Teoremi) X ve Y Banach uzayları, $T: X \rightarrow Y$ örten, lineer ve sınırlı bir dönüşüm olsun. Bu takdirde T açık dönüşümdür.

Bu teoremden T birebir ve örten olduğunda T^{-1} 'in sürekli dolayısıyla sınırlı olduğu elde edilir (Kreyszing, 1978).

Sonuç 3.21. X ve Y Banach uzayları, $T: X \rightarrow Y$ içine, lineer ve sınırlı bir dönüşüm olsun. T 'den X 'e olan T^{-1} ters dönüşümünün sınırlı olması için gerek ve yeter şart T 'nin Y 'de kapalı olmasıdır (Kreyszing, 1978).

Tanım 3.22. X ve Y iki normlu uzay olmak üzere $T: X \rightarrow Y$ lineer bir dönüşüm olsun. T 'nin Y kümesine T 'nin grafiği denir. T 'nin grafiği T 'nin kapalı bir alt kümesi ise T 'ye kapalıdır denir (Bayraktar, 2006).

Teorem 3.23. (Kapalı Grafik Teoremi) X ve Y Banach uzayları olmak üzere $T: X \rightarrow Y$ lineer bir dönüşüm olsun. T 'nin sürekli (sınırlı) olması için gerekli ve yeterli koşul T 'nin kapalı olmasıdır (Kreyszing, 1978).

Tanım 3.24. (İç Çarpım) X uzayı X cismi üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere,

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa $\langle \cdot, \cdot \rangle$ fonksiyonuna X 'te bir iç çarpım denir.

- i. $\langle x, x \rangle \geq 0$,
- ii. $\langle x, x \rangle = 0$,
- iii. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$,
- iv. $\langle ax + by, z \rangle = a\langle x, z \rangle + b\langle y, z \rangle$,

X vektör uzayına da iç çarpım uzayı denir (Conway, 1985).

Sonuç 3.25. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ fonksiyonu X 'te bir iç çarpım olmak üzere her $x, y \in X$ için

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ fonksiyonu iç çarpım için bir normdur. Buna iç çarpım normu denir (Conway, 1985).

Tanım 3.26. (Hilbert Uzayı) H bir iç çarpım uzayı olmak üzere

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ formülüyle verilen $\| \cdot \|$ fonksiyonu H 'da bir metriktir. Bu metriğe göre tam olan H uzayına Hilbert uzayı denir (Conway, 1985).

Tanım 3.28. (Ortogonal) H bir Hilbert uzayı ve $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ olsun. Eğer $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ ise $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ ile ortogonaldır denir ve $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ sembolü ile gösterilir (Conway, 1985).

Tanım 3.29. (Ortonormal Küme) H bir Hilbert uzayı ve $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa E 'ye bir ortonormal altküme denir.

- i. $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ için ,
- ii. $\|e_i\| = 1$ ve $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ ise .

H 'ın maksimal ortonormal kümesi H için bir bazdır (Conway, 1985).

Tanım 3.30 Bir topolojik uzay sayılabilir yoğun bir alt küme içeriyorsa ayrılabilir olarak adlandırılır (Conway, 1985).

4. HYERS-ULAM KARARLILIK VE BAZI LİNEER OPERATÖRLERİN KARARLILIK SABİTLERİ

Bu bölümde, önce Hyers-Ulam kararlılığın tanımı ve sınırlı lineer bir operatörün Hyers-Ulam kararlı olması için gerekli koşullar verilecektir. Daha sonra bazı lineer operatörlerin kararlılığı incelenecek olup, kararlı operatörlerin kararlılık sabitleri belirtilecektir.

4.1. Hyers-Ulam Kararlılık

Tanım 4.1.1. X ve Y Banach uzayları, T 'de X 'den Y 'ye bir dönüşüm olsun. Eğer aşağıdaki özelliği sağlayan bir K sabiti varsa T 'ye Hyers-Ulam kararlıdır denir.

Her $x, y \in X$ ve $\epsilon > 0$ şartını sağlayan her $\delta > 0$ için, $\|x - y\| < \delta$ ve $\|Tx - Ty\| < \epsilon$ olacak şekilde bir K bulunur.

Buradaki K sayısı T operatörü için Hyers-Ulam kararlılık sabiti olarak adlandırılır. K ile T operatörü için tüm Hyers-Ulam kararlılık sabitlerinin infimumu gösterilecektir (Takagi vd. 2003).

Başka bir ifadeyle Hyers-Ulam kararlılık söylenecek olursa, lineer T operatörü için aşağıdaki özelliği sağlayan bir K sabiti varsa T operatörü Hyers-Ulam kararlıdır:

Her $x, y \in X$ için $\|x - y\| < \delta$ şartını sağlayan her $\epsilon > 0$ için bir K bulunabilir öyle ki $\|Tx - Ty\| < \epsilon$ olur. Yani,

Her $x, y \in X$ için bir K bulunabilir öyle ki $\|Tx - Ty\| < K\|x - y\|$ (4.1)

olur (Takagi vd. 2003).

Burada T operatörünün sınırlı lineer operatör olması ile ilgilenilmektedir. T operatörünün çekirdeği $\mathcal{K}(T)$ ile gösterilecektir. Ayrıca bölüm uzayından Y 'ye tanımlı birebir olan lineer operatörü incelenecektir. Önce

(4.2)

olarak tanımlanan operatörünün sınırlı olduğu gösterilecektir. Bunun için olmak üzere,

eşitsizliğin her iki tarafında infimumu alınırsa

veya

olur. Buradan da

olduğu elde edilir. Dolayısıyla operatörü sınırlıdır.

Şimdi de T operatörünün değerler kümesinin kapalı olduğu kabul edilsin. Bu takdirde

eşitliği ile tanımlanan

operatörü birebir ve örten bir operatördür. O halde bu operatörün tersi vardır. Banach teoreminden dolayı

şeklinde tanımlı ters operatörü sınırlı ve lineer bir operatördür. Bu operatörün sınırlılığından da

olacak şekilde bir sabiti vardır. Bu sabitlerin infimumuna Hyers-Ulam kararlılık sabiti denir ve bu ifade ye eşittir. O halde,

olur.

Teorem 4.1.2. X ve Y Banach uzayları olmak üzere T operatörü X 'den Y 'ye tanımlı lineer ve sınırlı bir operatör olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir.

- a) T operatörü Hyers-Ulam kararlıdır.
- b) T operatörünün görüntü kümesi olan $R(T)$ kapalıdır.
- c) operatörü sınırlıdır.

Ayrıca a), b), c) koşullarından biri (dolayısıyla hepsi) doğru ise

(4.3)

olur (Takagi vd. 2003).

İspat: Kabul edilsin ki T operatörü K sabiti ile Hyers-Ulam kararlı olsun.
Keyfi alınsın. Her için X 'te keyfi bir dizisi vardır öyle ki

sağlanır. Buradan da

—

olur. O halde,

—

— —

—

elde edilir. Bir Banach uzayında her mutlak yakınsak seri yakınsak olduğundan görülür ki X 'in normuna göre

serisi elemanına yakınsar. Dolayısıyla

serisi 'a yakınsar. T operatörü sürekli olduğundan

serisi

elemanına yakınsar. Buradan da $\{x_n\}$ olur. O halde $\{x_n\}$ kümesi kapalıdır.

T operatörünün görüntü kümesi olan $\{Tx_n\}$ kümesinin kapalı olduğu varsayalım. Hatırlanmalıdır ki

olarak ifade edilir. Görülür ki, $\{x_n\}$ eşitliği vardır. T operatörü X 'den X 'ye tanımlı kapalı operatör olduğundan kapalı grafik teoremi gereği T operatörü sınırlıdır.

T operatörünün sınırlı olduğu varsayalım. Dolayısıyla

olacak şekilde bir K sabiti vardır. Bu takdirde her $x \in X$ için

olur. O halde bir $\epsilon > 0$ vardır öyle ki

olur. Buradan da T operatörünün Hyers-Ulam kararlı olduğu söylenir.

Önerme 4.1.3. X ve Y Banach uzayları olmak üzere lineer sınırlı bir operatör olsun. Aşağıdakiler doğrudur:

- a) Eğer her $x \in X$ için $\|Tx\| \leq K\|x\|$ olacak şekilde bir K sabiti varsa T operatörünün değerler kümesi kapalıdır. Dolayısıyla operatörü Hyers-Ulam kararlıdır.
- b) Eğer T operatörü Hyers-Ulam kararlı ise $\|Tx\| \leq K\|x\|$ olacak şekilde bir K sabiti vardır.

İspat: a) $\{x_n\}$ dizisi X 'de bir dizi olsun. $\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{n}$ olacak şekilde n, m olduğu gösterilecektir. Dolayısıyla $\{x_n\}$ olacak şekilde bir $x \in X$ elemanının var olduğunun gösterilmesi gerekir. $\{x_n\}$ yakınsak olduğundan bir Cauchy dizisidir. O halde keyfi bir $\epsilon > 0$ sayısı alınsın. Yeterince büyük n, m 'ler için

olur. Diğer taraftan

olacak şekilde bir K sabiti var olduğundan

–

eşitsizliği elde edilir. Demek ki $\{x_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir. Bu takdirde $\|x_n - x\| \leq \frac{1}{n}$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır. Buradan da $\|Tx - x\| \leq \frac{1}{n}$ elde edilir. Dolayısıyla $\|Tx - x\| = 0$ olur.

b) Norm tanımından

ve T operatörü sınırlı olduğundan

olacak şekilde bir sabiti vardır. Buradan da

olduğu görülür. O halde $\frac{1}{2}$ olmak üzere,

olacak şekilde bir sabiti vardır.

Uyarı 4.1.4

- i. Tanımdaki koşullara göre verilen T ve ϕ için denklemi Hyers-Ulam kararlıdır.
- ii. Eğer T sınırlı lineer operatör ise ϕ koşulu şuna denktir: Her $\epsilon > 0$ ve $\delta > 0$ için bir $\eta > 0$ vardır öyle ki $\eta < \delta$ olacak şekilde bir η sabiti vardır (Popa ve Raşa, 2013).

Hyers-Ulam kararlılık teorisinde önemli olan T operatörü için ϕ şeklinde verilen Hyers-Ulam kararlılık sabitini bulmaktır.

Şimdi, bazı lineer operatörlerin Hyers-Ulam kararlılığı incelenecektir. Kararlı operatörlerin de Hyers-Ulam kararlılık sabiti verilecektir.

4.2. Bazı Lineer Operatörlerin Hyers-Ulam Kararlılığı ve Kararlılık Sabitleri

4.2.1. Bernstein Operatörü ve Hyers-Ulam Kararlılık Sabiti

Bernstein operatörü her $f \in C[a, b]$ ve $x \in [a, b]$ için

—

şeklinde tanımlanır (Altomare ve Campiti, 1994). Derecesi n 'den küçük eşit olan tüm polinom fonksiyonlarının kümesi olmak üzere, operatörünün değerler kümesi $C[a, b]$ 'dir. $C[a, b]$ kümesi sonlu boyutludur yani, $C[a, b]$ dir. Bir Banach uzayının sonlu boyutlu her alt uzayı kapalı olduğundan kapalıdır. Bu takdirde Teorem 4.1.2. gereği Bernstein operatörü Hyers-Ulam kararlıdır.

Şimdi B_n operatörünün normunun 1'e eşit olduğu gösterilecektir:

—

olmak üzere

olduğundan

olur. Buradan da,

sağlanır. Bu sebeple T operatörünün sınırlı olduğu söylenir. $\|T\|$ olmak üzere
dir. O halde,

olur.

Şimdi de Bernstein operatörünün Hyers-Ulam kararlılık sabitini göstermek için,
'in kapalı alt uzayı olan $C[a, b]$ operatörünün çekirdeği kolayca aşağıdaki gibi
belirlenir:

Buradan da T operatörü

şeklinde tanımlansın. Kolayca görülebilir ki, T operatörü sınırlı lineer operatördür.
Ayrıca bu operatör birebir ve örten olduğundan

şeklinde tanımlı T^{-1} ters operatörü vardır. Banach teoremi gereği bu ters operatör
de sınırlı lineer operatördür.

Ayrıca Bernstein operatörünün Hyers-Ulam kararlılık sabitini hesaplamada
kullanılacak olan Lubinsky-Ziegler teoremi verilecektir.

Keyfi polinomu

(4.4)

formuyla tek şekilde Lorentz temsiline sahiptir. Aslında bu Bernstein-Bezier bazının bir temsidir.

n . dereceden Chebyshev polinomu olarak gösterilsin.

eşitliklerinden görülür ki,

olur. Hatta olmak üzere olduğundan,

(4.5)

olduğu görülür. O halde,

olur. Görülebilir ki,

(4.6)

olur. Buradaki 'lar

(4.7)

şeklindedir. Diğer taraftan kosinüsün açılımından, için

olur. Şimdi için alınıp

—

(4.8)

olarak tanımlansın. Ayrıca için

—

(4.9)

eşitliğinin doğru olduğu gösterilecektir:

—

olsun. Bu fonksiyonun türevi alındığında

olur. α olması demek α 'ın sabit olması demektir. Şimdi aralığından α alınsın. O halde,

$$\alpha - \alpha = 0$$

sonucu elde edilir. (4.5) eşitliği kullanılarak,

(4.10)

yazılabilir. (4.9) ve (4.10) ilişkileri dikkate alındığında, α için

eşitliği elde edilir. Denklem (4.6) ve (4.8) ile birlikte,

olur. Bu nedenle

olduğu görülür (Popa ve Raşa, 2013).

Teorem 4.1.5. (Lubinsky ve Ziegler, 1990) α alınsın ve p (4.4) ile temsil edilsin.

α alınsın ve p (4.4) ile temsil

(4.11)

eşitsizliği sağlanır. Eşitlik durumu ancak ve ancak p 'nin $\frac{1}{2}$ 'in sabit bir katı olduğunda sağlanır.

Teorem 4.2.1.2 Her n sayısı için Bernstein operatörünün Hyers-Ulam kararlılık sabiti

—

formülü ile verilir (Popa ve Raşa, 2013).

İspat: n ve m için

operatörü

şeklindedir.

olsun. p_n polinomu Bernstein-Bezier temsilinde yazılsın:

Öte yandan

—

olduğundan, bu iki polinom karşılaştırıldığında, $\frac{1}{2}$ olmak üzere

—

elde edilir. Şimdi de, her $x \in [0, 1]$ aralığında f fonksiyonu şu şekilde tanımlansın:

Buradaki $\frac{1}{2}$ ve $\frac{1}{2}$ ’lar, tanımlanan fonksiyonun $[0, 1]$ aralığında sürekli olacak şekilde seçilir. Bernstein operatörünün Hyers-Ulam kararlılık sabiti için

şeklinde ifade edilen operatörünün normuna bakıldığında,

olmak üzere

elde edilir. Lubinsky-Ziegler Teoremine göre

sağlanır. Diğer taraftan

bağıntısı vardır. Son olarak da

—

elde edilir. O halde

—

sonucuna varılır.

4.2.2 Stancu Operatörleri

ve olmak üzere Stancu operatörü,

—

şeklinde tanımlanır (Altomare ve Campiti, 1994). Bu operatörün değerler kümesi, sonlu boyutlu olduğundan Stancu operatörü Teorem 4.1.2 gereği Hyers-Ulam kararlıdır. Açıktır ki olması durumunda her için operatörü n . dereceden Bernstein operatörüdür. Bu doğrultuda Stancu operatörü Bernstein operatörünün daha genel halidir. Kolayca görülebilir ki bu operatörün çekirdeği aşağıdaki gibidir:

—

Şimdi de

operatörü tanımlansın. Daha önce de görüldüğü üzere, operatörü sınırlı lineer operatördür. Ayrıca operatörü birebir ve örten olduğundan

şeklinde tanımlı ters operatörü vardır. Banach teoreminden dolayı bu operatör sınırlı lineer operatördür.

Teorem 4.2.2.1 Her doğal sayısı için Stancu operatörünün Hyers-Ulam kararlılık sabiti aşağıdaki eşitlikle sağlanır:

$$- -$$

(Popa ve Raşa, 2014).

İspat: Bir polinomu alınsın ve bu polinom Bernstein-Bezier temsilinde yazılsın:

Parçalı sürekli fonksiyonu şu şekilde tanımlansın:

$$-$$

$$-$$

olmak üzere

olur.

operatörünün normu

şeklinde tanımlanır. Çekirdekten elde edilen fonksiyonu _____, noktalarında sıfır olduğundan

olduğu söylenilebilir. Buradan da

olur. Lubinsky-Ziegler Teoreminde

olduğundan

olur. Yani,

(4.12)

sonucuna varılır. Diğer taraftan olmak üzere, alınsın. Lubinsky-Ziegler Teoremine göre ve için olur. Sonuç olarak

(4.13)

olur. (4.12) ve (4.13) eşitsizliklerinden

elde edilir. Şimdi maksimum hesabına bakıldığında, için

alınsın. Buradan

35

sonucuna varılır.

4.2.3 Kantorovich Operatörleri

Her $\mathcal{H}$ ve $\mathcal{K}$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için n . dereceden Kantorovich operatörleri şu şekilde tanımlanır (Altomare ve Campiti, 1994):

T_n operatörünün görüntü kümesi $\mathcal{H}$ dir ve $\mathcal{K}$ olduğundan Kantorovich operatörleri Teorem 4.1.2 gereği Hyers-Ulam kararlıdır. Kolayca görülebilir ki T_n 'in çekirdeği

eşitliği ile belirlenir. Daha önce de görüldüğü üzere,

T_n şeklinde tanımlı T_n operatörü sınırlı lineer operatördür. Bu operatör birebir ve örten olduğundan

şeklinde tanımlı ters operatörü vardır. Banach teoreminden dolayı da bu operatör sınırlı lineer operatördür.

Teorem 4.2.3.1 Her doğal sayısı için, Kantorovich operatörünün Hyers-Ulam kararlılık sabiti için aşağıdaki eşitlik sağlanır:

(Popa ve Raşa, 2014).

4.2.4 King Operatörü

olmak üzere , 'de tanımlı sürekli fonksiyonların bir dizisi ve her için klasik Bernstein operatörünün genelleştirilmesi olan pozitif lineer King operatörü ,

şeklinde tanımlanır (King, 2003). Görüldüğü üzere, ve dir. Dolayısıyla King operatörleri Teorem 4.1.2 gereği Hyers-Ulam kararlıdır. Kolayca görülür ki operatörünün çekirdeği aşağıdaki gibidir:

Buradan da

şeklinde operatörü tanımlansın. Daha önceden de görüldüğü üzere bu operatör sınırlı lineer operatördür. Ayrıca operatörü birebir ve örten olduğundan,

şeklinde tanımlı ters operatörü vardır. Banach teoreminden dolayı bu operatör de sınırlı lineer operatördür.

Teorem 4.2.4.1 King operatörlerinin Hyers-Ulam kararlılık sabiti için aşağıdaki bağıntı sağlanır:

(Mursaleen ve Ansari, 2015).

4.2.5 Kantorovich-Stancu Operatörleri

ve olmak üzere için Kantorovich-Stancu operatörü ,

şeklinde tanımlanır (Barbosu, 2004). Görüldüğü üzere, ve dir. Dolayısıyla Kantorovich-Stancu operatörleri Teorem

4.1.2 gereği Hyers-Ulam kararlıdır. Kolayca görülebilir ki Kantorovich-Stancu operatörünün çekirdeği aşığıdaki gibidir:

Buradan da

şeklinde tanımlı operatörü sınırlı lineer operatördür. Bu operatör birebir ve örten olduğundan

şeklinde tanımlı ters operatörü vardır. Banach teoreminden dolayı da bu operatör sınırlı lineer operatördür.

Teorem 4.2.5.1 Kantorovich-Stancu operatörlerinin Hyers-Ulam kararlılık sabiti için aşığıdaki eşitlik vardır:

$$\frac{\|A_n\|}{n} \leq \frac{\|A_{n+1}\|}{n+1}$$

(Mursaleen ve Ansari, 2015).

4.2.6 Bernstein-Schurer Operatörleri

, ve

olmak üzere kompleks Bernstein-Schurer operatörü ,

—

olarak tanımlanır (Anastassiou ve Gal, 2009). Yine ve olduğu görülebilir. Dolayısıyla Bernstein-Schurer operatörleri Teorem 4.1.2 gereği Hyers-Ulam kararlıdır. Kolayca görülebilir ki operatörünün çekirdeği,

—

eşitliği ile belirlenir. Buradan da,

şeklinde tanımlı operatörü sınırlı lineer operatördür. Bu operatör birebir ve örten olduğundan

şeklinde tanımlı ters operatörü vardır. Banach teoremi gereği bu operatör de sınırlı lineer operatördür.

Teorem 4.2.6.1 Bernstein-Schurer operatörünün Hyers-Ulam kararlılık sabiti için aşağıdaki eşitlik vardır:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = 1$$

(Mursaleen vd., 2015).

4.2.7 Kantorovich-Schurer Operatörleri

$\mathcal{K}_n$, $\mathcal{K}_m$ ve $\mathcal{K}_p$ olmak üzere $\mathcal{K}_n$ ve $\mathcal{K}_m$ için kompleks Kantorovich-Schurer operatörü,

şeklinde tanımlanır (Anastassiou ve Gal, 2009). Daha önce de görüldüğü gibi $\mathcal{K}_n$ ve $\mathcal{K}_m$ dir. Dolayısıyla Kantorovich-Schurer operatörleri Teorem 4.1.2 gereği Hyers-Ulam kararlıdır. Kolayca görülebilir ki Kantorovich-Schurer operatörünün çekirdeği,

eşitliği ile belirlenir. Buradan da

şeklinde tanımlı T operatörü sınırlı lineer operatördür. Bu operatör birebir ve örten olduğundan

şeklinde tanımlı T^{-1} ters operatörü vardır. Banach teoreminden dolayı da bu operatör sınırlı lineer operatördür.

Teorem 4.2.7.1 Kantorovich-Schurer operatörünün Hyers-Ulam kararlılık sabiti için aşağıdaki eşitlik vardır:

(Mursaleen vd., 2015).

Buraya kadar Hyers-Ulam kararlı olan operatörler ve bu operatörlerin kararlılık sabitleri verildi. Lineer ve sınırlı olan bu operatörler sonlu boyutlu oldukları için kararlıdır. Şimdi de kararlı olmayan operatörler ile ilgilenilecektir.

4.2.8 Szasz-Mirakjan Operatörleri

C uzayı; $[0, 1]$ aralığında tanımlı reel değerli ve sınırlı tüm sürekli fonksiyonların C uzayı olmak üzere, her $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in [0, 1]$ için n . dereceden Szasz-Mirakjan operatörü,

— —

şeklinde tanımlanır (Altomare ve Campiti, 1994). Kolayca görülebilir ki Szasz-Mirakjan operatörünün çekirdeği,

—

eşitliği ile belirlenir. Şimdi de bu operatörün sınırlılığı incelenecektir:

— —

—

olduğundan Szasz-Mirakjan operatörünün sınırlı olduğu söylenir. Ayrıca görüldüğü üzere bu operatör sonsuz boyutludur.

Teorem 4.2.8.1 Her $\alpha > 0$ için Szasz-Mirakjan operatörü Hyers-Ulam kararlı değildir (Popa ve Raşa, 2013).

İspat: Farz edilsin ki bir $\alpha > 0$ için Szasz-Mirakjan operatörü Hyers-Ulam kararlıdır. O halde α olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in \mathbb{R}$ için

olacak şekilde bir K sabiti vardır. Görülebilir ki

—

eşitliği vardır. Bu yüzden

—
olacak şekilde bir — vardır. Şimdi de her — — için

şeklinde tanımlanan — fonksiyonu alınsın. Buradan görülür ki

—
olmak üzere f fonksiyonu — - ve — — aralıklarında lineerdir. Her
için,

—
olur. Buradan da — olduğu kolayca görülebilir. Bundan dolayı

olacak şekilde — vardır. Fakat — olduğundan

— —
sonucuyla bir çelişki elde edilmiş olur. O halde kabul edilen yanlış olur. Yani Szasz-Mirakjan operatörü Hyers-Ulam kararlı değildir.

4.2.9 Beta Operatörü

Her X ve Y olmak üzere X için Beta operatörü,

$$B_\beta(X, Y) = \{x \in X : x = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k T_k(x, y)\}$$

şeklinde tanımlanır (Lupaş, 1972). Kolayca görülebilir ki Beta operatörünün çekirdeği,

eşitliği ile belirlenir. Şimdi de bu operatörün sınırlılığı incelencektir:

$$\|B_\beta(X, Y)\| \leq \frac{1}{1-\beta} \|T(X, Y)\|$$

$$\|B_\beta(X, Y)\| \leq \frac{1}{1-\beta} \|T(X, Y)\|$$

olduğundan Szasz-Mirakjan operatörünün sınırlı olduğunu söyleriz. Görüldüğü üzere bu operatör sonlu boyutlu değildir.

Teorem 4.2.9.1 Her X için Beta operatörü B_β , Hyers-Ulam kararlı değildir (Popa ve Raşa, 2013).

4.2.10 Kantorovich-Szasz-Mirakjan Operatörleri

Hatırlansın ki X için n . dereceden Szasz-Mirakjan operatörü B_n ,

şeklinde tanımlanmıştı. Szasz-Mirakjan operatörünün Kantorovich versiyonu da

olarak tanımlanır (Altomare ve Campiti, 1994). Kolayca görülebilir ki Kantorovich-Szasz-Mirakjan operatörünün çekirdeği,

eşitliği ile belirlenir. Şimdi de bu operatörün sınırlılığı incelenecektir:

olduğundan Kantorovich-Szasz-Mirakjan operatörünün sınırlı olduğu söylenir. Ayrıca görüldüğü üzere bu operatör sonsuz boyutludur.

Teorem 4.2.10.1 Her doğal sayısı için Szasz-Mirakjan operatörünün Kantorovich versiyonu olan operatörü Hyers-Ulam kararlı değildir (Mursaleen ve Ansari, 2015).

5. HYERS-ULAM KARARLILIĞA İLİŞKİN BAZI ÖRNEKLER

Bu bölümde, Volterra operatörü ile Hilbert uzayında tanımlı sonlu boyutlu bir operatörün Hyers-Ulam kararlılığı incelenecektir. Öncesinde, kararlılığı incelenecek Volterra operatörü için bir kaç ön bilgi verilecektir.

Tanım 5.1. (Kompaktlık ve ön kompaktlık) X bir Banach uzayı ve Y , X 'in bir alt kümesi olsun. Eğer K 'daki her dizisinin K 'nın bir elemanına yakınsayan yakınsak bir alt dizisi varsa K 'ya kompakttır denir. Ayrıca kapanışı kompakt olan kümeler ön kompakttır denir (Conway, 1985).

Tanım 5.2. (Lokal kompakt vektör uzayı) Eğer bir topolojik vektör uzayında sıfırın, kapanışı kompakt olan bir komşuluğu varsa bu vektör uzayına lokal kompakt vektör uzayı denir (Rudin, 1973).

Teorem 5.3. Her lokal kompakt topolojik vektör uzayı sonlu boyutludur (Rudin, 1973).

Tanım 5.4. (Kompakt operatör) X ve Y Banach uzayları olmak üzere lineer bir operatör olsun. Eğer T operatörü X 'te sınırlı bir kümeyi Y 'nin ön kompakt (kapanışı kompakt) bir kümesine dönüştürürse T 'ye kompakt operatör denir. Tanımdan da anlaşıldığı üzere her kompakt operatör sınırlıdır (Conway, 1985).

Önerme 5.6 X bir Banach uzayı ve T kompakt bir operatör olsun. Eğer T 'nin değerler kümesi kapalıysa T sonlu boyutludur (Rudin, 1973).

İspat: X 'te sıfırın bir komşuluğu olan U açık kümesi alınsın.

Açık dönüşüm teoreminden dolayı U bir açık kümedir. Aynı zamanda U kümesi Y vektör uzayında sıfırın bir komşuluğudur. T kompakt operatör olduğu için $T(U)$ 'in kapanışı olan $\overline{T(U)}$ kümesi kompakttır. Y vektör uzayında sıfırın, kapanışı kompakt bir komşuluğu var olduğundan Tanım 5.2 gereği lokal kompakttır. O halde Teorem 5.3 ten de Y 'nin sonlu boyutlu olduğu görülür.

Sonuç 5.7. Bir Banach uzayında kompakt bir operatörün Hyers-Ulam kararlı olması için gerek ve yeter şart sonlu boyutlu olmasıdır.

Teorem 5.8. (Arzela-Ascoli Teoremi) $\mathcal{F}$ ailesinin ön kompakt olması için gerek ve yeter koşul aşağıdakilerin sağlanmasıdır.

1. Bir $M > 0$ sabiti vardır öyleki her $f \in \mathcal{F}$ için $\|f\| \leq M$ dir. (Düzgün sınırlılık)
2. Her $\epsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ bulunur ki, $\|x - y\| < \delta$ iken her $f \in \mathcal{F}$ için $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ olur. (Eş düzgün süreklilik)

(Conway, 1985).

5.1. Volterra Operatörü

Sınırlı lineer

Volterra operatörü aşağıdaki gibi tanımlanır: Her $f \in C[0,1]$ ve $x \in [0,1]$ için

(Conway, 1985).

Önerme 5.1.1. Volterra operatörü, $C[0,1]$ 'de kompakt bir operatördür ve sonsuz boyutludur.

İspat: $\mathcal{F}$ ailesi $\mathcal{F}$ 'in düzgün sınırlı bir ailesi olmak üzere

kümesi alınsın.

1. Bir sabiti vardır öyleki her için olmak üzere,

olur. Bundan dolayı da ailesi düzgün sınırlıdır.

2. olarak tanımlansın. Keyfi alınsın ve da
– olarak seçilsin. Her için iken

—

olur. Buradan ailesinin eş düzgün sürekli olduğu görülür. Arzela-Ascoli teoreminden dolayı ailesinin ön kompakt olduğu söylenir. O halde sınırlı bir kümeyi ön kompakt bir kümeye dönüştüren Volterra operatörü kompakttır.

Bir Banach uzayında her n doğal sayısı için en az n tane lineer bağımsız vektör bulunursa bu uzay sonsuz boyutludur. O halde, 'de keyfi n doğal sayısı için lineer bağımsız vektörler olduğu için sonsuz boyutludur. Bunun dışında

eşitliğinden anlaşılır ki; vektörleri Volterra operatörünün değerler kümesindendir. Bu vektörler lineer bağımsız vektörler olduğu için Volterra operatörü sonsuz boyutludur.

Bu yüzden de, Sonuç 5.7.'den dolayı Volterra operatörü Hyers-Ulam kararlı değildir.

5.2. Hilbert Uzayında Sonlu Boyutlu Operatörün Hyers-Ulam Kararlılık Sabiti

H ayrılabilir bir Hilbert uzayı olmak üzere vektörler ailesi H 'da ortonormal bir taban olsun. Bir n doğal sayısı için,

operatörü

olarak tanımlansın. Bu operatörün değerler kümesi sonlu boyutludur yani dir. Bu sebeple operatörü Hyers-Ulam kararlıdır.

Burada önemli olan operatörünün Hyers-Ulam kararlılık sabitini bulmaktır.

Teorem 5.2.1. T operatörünün Hyers-Ulam kararlılık sabiti için

eşitliği sağlanır.

İspat: T operatörünün çekirdeği $\mathcal{N}(T)$ olmak üzere, $\mathcal{N}(T)$ ler lineer bağımsız olduğu için

olur. O halde T operatörünün Hyers-Ulam sabitini bulmak için,

şeklinde tanımlı sınırlı, lineer, birebir ve örten T^{-1} operatörünün tersi olan T operatörünün normuna bakılacaktır. Bir operatörün normunun tanımından

olur. Hatırlanmalıdır ki,

eşitliği vardır. Diğer taraftan $\|T^{-1}\|$ demek,

eşitliğinin sağlanmasıdır. Hilbert uzaylarının genel teorisinden x vektörü tek şekilde aşağıdaki gibi yazılır:

Şimdi de ,

olarak ifade edilsin. Yine Hilbert uzaylarının genel teorisinden

olmak üzere olduğundan

olur. Buradan da

eşitliği sağlanır. O halde,

olur. ifadesinin minimum değeri

olması durumunda

olduğunda elde edilir. Bu takdirde,

olur. Diğer taraftan

eşitliği vardır. O halde bu iki eşitlikten dolayı

bulunur.

6. SONUÇ ve ÖNERİLER

X ve Y Banach uzayları olmak üzere T operatörü X 'den Y 'ye tanımlı sınırlı ve lineer bir operatör olsun. T operatörünün değerler kümesi kapalı ise T operatörünün Hyers-Ulam kararlı olacağı 4. Bölümde gösterilmişti. ve bir Banach uzayının sonlu boyutlu her alt uzayı kapalı olacağından X 'nin sonlu boyutlu olması durumunda T operatörünün Hyers-Ulam kararlı olacağı söylenir. Yani, Banach uzaylarında tanımlı sınırlı ve lineer bir operatörün Hyers-Ulam kararlı olması için o operatörün sonlu boyutlu olması gerektiği sonucuna ulaşılmış olur.

Ayrıca kararlı olan bir T operatörünün kararlılık sabitini bulmak için; 4. Bölümde ifadelendirilen sınırlı, lineer, birebir ve örten olan

şeklinde tanımlı T^{-1} operatörün tersi olan ve

şeklinde ifade edilen operatörün normunu bulmak yeterli olacaktır. Yani T operatörünün Hyers-Ulam kararlılık sabiti $\frac{1}{\|T\|}$ olur.

KAYNAKLAR

- Alsina, C., Ger, R., 1998. On Some Inequalities and Stability Results Related to the Exponential Function, *J. Inequal. & Appl.*, 2, 373-380.
- Altomare, F., Campiti, M., 1994. Korovkin-Type Approximation Theory and its Applications. Walter de Gruyter, 627, Berlin.
- Anastassiou, G.A., Gal, S.G., 2009. Approximation by Complex Bernstein-Schurer and Kantorovich-Schurer Polynomials in Compact Disks. *Comput. Math. Appl.*, 58, 734-743
- Aoki, T., 1950. On the Stability of Linear Transformation in Banach Spaces. *J. Math. Soc. Jpn.*, 2, 64-66.
- Barbosu, D., 2004. Kantorovich-Stancu Type Operators. *J. Inequal. Pure Appl. Math.*, 5, 53.
- Bayraktar, M., 2006. Fonksiyonel Analiz. Gazi Kitabevi, 320, Ankara.
- Brzdek, J., Jung, S.M., 2011. A Note on Stability of an Operator Linear Equation of the Second Order, *Abstr. Appl. Anal.* Art. ID 602713, 15.
- Brzdek, J., Popa, D., Xu, B., 2007. The Hyers-Ulam Stability of Nonlinear Recurrences, *J. Math. Anal. Appl.*, 335, 443-449.
- Brzdek, J., Popa, D., Raşa, I., 2017. Hyers-Ulam Stability with Respect to Gauges, *J. Math. Anal. Appl.*, 30376-1.
- Conway, J.B., 1985. A Course in Functional Analysis. Graduate Texts in Mathematics. 399, United States of America.
- Gajda, Z., 1991. On Stability of Additive Mappings, *Internat. J. Math. Math. Sci.*, 14, 431-434.
- Gal, S.G., 2011. Approximation by Complex Lorentz Polynomials. *Math. Commun.*, 16, 67-75
- Gavruta, P., 1994. A Generalization of the Hyers-Ulam-Rassias Stability of Approximately Additive Mappings. *J. Math. Anal. Appl.*, 184, 431-436.
- Hirasawa, G., Miura, T., 2006. Hyers-Ulam Stability of a Closed Operator in a Hilbert Space. *Bull. Korean Math. Soc.* 43, 107-117.
- Huang, Q., Zhu, L., Wu, B., 2015. A Note on the Hyers- Ulam Stability Constants of Closed Linear Operators. *Filomat* 29, 4, 909-915.
- Hyers, D.H., 1941. On the Stability of the Linear Functional Equation. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA.*, 27, 222-224.

- Jung, S.M., 2004. Hyers-Ulam Stability of Linear Differential Equations of First Order, *Appl. Math. Lett.*, 17, 1135-1140.
- King, J.P., 2003. Positive Linear Operators which Preserve $\cdot$. *Acta. Math. Hung.*, 99, 203–208.
- Kreyszing, E., 1978. *Introductory Functional Analysis with Applications*. Jhon Wiley & Sons, 688, United States of America
- Lee, J.R., Shin, D.Y., Park, C., 2013. Hyers-Ulam Stability of Functional Equations in Matrix Normed Spaces. *Journal of Inequalities and Applications*, 47L25.
- Lubinsky, D.S., Ziegler, Z., 1990. Coefficients Bounds in the Lorentz Representation of a Polynomial. *Can. Math. Bull.*, 33, 197–206.
- Lupaş, A., 1972. *Die Folge der Betaoperatoren*, Dissertation. Universitat Stuttgart.
- Mason, J.C., Handscomb, D.C., *Chebyshev Polynomials*. CRC Press Company, 335, Boca Raton London NewYork Washington D.C.
- Miura, T., 2002. On the Hyers–Ulam Stability of a Differentiable Map. *Sci. Math. Japan*, 55, 17-24.
- Miura, T., Takahasi, S.E., Choda, H., 2001. On the Hyers-Ulam Stability of Real Continuous Function Valued Differentiable Map. *J. Math. Anal. Appl.*, 24, 2.
- Miura, T., Takahasi, S.E., and Miyajima, S., 2002. On the Hyers-Ulam Stability of the Banach Space-Valued Differential Equation $y' = \lambda y$, to Appear in *Bull. Korean Math. Soc.*, 39, 309-315.
- Miura, T., Miyajima, S., Takahasi, S.E., 2003. Hyers–Ulam Stability of Linear Differential Operator with Constant Coefficients. *Math. Nachr.*, 258, 90–96.
- Miura, T., Miyajima, S., Takahasi, S.E., 2003. A Characterization of Hyers-Ulam Stability of First Order Differential Operators. *J. Math. Anal. Appl.*, 286, 136-146.
- Miura, T., Miyajima, S., Takahasi, S.E., 2004. The Hyers-Ulam Stability Constants of First Order Linear Differential Operators. *J. Math. Anal. Appl.*, 296, 403-409.
- Mursaleen, M., Ansari, K. J., 2015. On the Stability of Some Positive Linear Operators from Approximation Theory. *Bull. Math. Sci.*, 2, 147-157.
- Mursaleen, M., Ansari, K.J., Khan, A., 2015. Stability of Some Positive Linear Operators on Compact Disk. *Acta. Math. Sci.* 35B(6), 1492-1500.
- Obloza, M., 1993. Hyers Stability of the Linear Differential Equation. *Rocznik Nauk. Dydak. Prace Mat.*, 13, 259-270.

- Obloza, M., 1997. Connections Between Hyers and Lyapunov Stability of the Ordinary Differential Equations, *Rocznik Nauk.-Dydakt. Prace Mat.*, 14, 141-146.
- Popa, D., Raşa, I., 2011. On the Hyers-Ulam Stability of the Linear Differential Equation. *J. Math. Anal. Appl.*, 2, 530–537.
- Popa, D., Raşa, I., 2013. On the Stability of Some Classical Operators from Approximation Theory. *Expo. Math.*, 31, 205–214.
- Popa, D., Raşa, I., 2014. On the Best Constant in Hyers–Ulam Stability of Some Positive Linear Operators. *J. Math. Anal. Appl.*, 412, 103–108.
- Rassias, Th.M., 1978. On the Stability of the Linear Mappings in Banach spaces. *Proc. Am. Math. Soc.*, 72, 297–300.
- Rassias, Th.M., Semrl, P., 1992. On the Behavior of Mappings which Do Not Satisfy Hyers–Ulam Stability *Proc. Amer. Math. Soc.*, 114, 989-993.
- Rassias, Th.M., Tabor, J., 1992. What is Left of Hyers-Ulam Stability?. *J. Natur. Geom.*, 1, 65–69.
- Rudin, W., 1973. *Functional Analysis*. Mc Graw-Hill Book Company, 396, United States of America.
- Sam J.P., Balaji, S., 2012. Hyers-Ulam Stability of Linear Operators in Frechet Spaces. *Appl. Math. Inf. Sci.*, 3, 525–528.
- Şevli, H., Jung, S.M., 2013. Power Series Method and Approximate Linear Differential Equations of Second Order. *Advances in Difference Equations.*, 1, 1-9.
- Takagi, H., Miura, T., Takahasi, S.E., 2003. Essential Norms and Stability Constants of Weighted Composition Operators on $C(X)$. *Bull. Korean Math. Soc.*, 40, 583–591.
- Ulam, S.M., 1960. *Problems in Modern Mathematics*. Chapter VI. Science Editions., Wiley, New York.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Gülizar Gülenay ZENGİN

Doğum Yeri ve Yılı : Bakırköy, 17.10.1990

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : gulenayzengin@icloud.com



Eğitim Durumu

Lise : Kağıthane Yabancı Dil Ağırlıklı Lisesi, 2008

Lisans : Namık Kemal Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 2014

Yüksek Lisans : İstanbul Ticaret Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 2020

Mesleki Deneyim

Ömer Dinçer İmam Hatip Ortaokulu	2015
Ziya Paşa İlköğretim Okulu	2016
GOP Okulları	2016-2017
Şişli Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi	2017-2018
Nazmi Arıkan Fen Bilimleri Özel Öğretim Kursu	2018-2019

Yayımları

Zengin, G.G., 2019. Hyers-Ulam Stability of Some Linear Operators. Hodja Akhmet Yassawi 2nd International Conference on Scientific Research. 6-8 December, Erzurum/Turkey.