

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

BOOLE CEBİRLERİ VE STONE UZAYI

Gökhan KONU

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Tahsin ÖNER

Matematik Anabilim Dalı

Bilim Dalı Kodu: 403. 05. 01

Sunuş Tarihi: 11. 06. 2010

Bornova – İZMİR

III

Gökhan KONU tarafından Yüksek Lisan Tezi olarak sunulan “**Boole Cebirleri ve Stone Uzayı**” başlıklı bu çalışma, Ege Üniversitesi Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmenliği ile Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönetmenliği’nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 11.06.2010 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri

İmza

Jüri Başkanı : Yrd.Doç. Tahsin ÖNER

.....

Paportör Üye : Prof.Dr. Mehmet TERZİLER

.....

Üye : Doç.Dr.Alev FIRAT

.....

ÖZET**BOOLE CEBİRLERİ VE STONE UZAYI**

KONU, Gökhan

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü

Tez Yöneticisi: Yrd. Doç. Dr. Tahsin ÖNER

Haziran 2010, 69 sayfa

Giriş bölümü dahil bu tez, esas olarak yedi bölümden oluşmaktadır.

2. bölümde; cebir ve topolojinin kısa bir tanıtımı yapılıyor. 3. bölüm Boole cebirlerinin cebirsel tanımları ve karşılık gelen temel özelliklerini içerir. 4. bölüm atomlarla, diğer bir deyişle, Boole cebiri üzerinde sıralamaya göre sıfır-olmayan elemanlarla, ilgilidir. 5. bölüm Boole cebirlerinin homomorfizmaları, izomorfizmaları ve alt cebirleri ile ilgilidir.

İdeallerin ve süzgeçlerin incelenmesi 6. bölümün hedefidir. Bu bölümde dikkatimizi maksimal süzgeçlere ve ultrasüzgeçlere yoğunlaştırmalıyız, bunlar maksimal ideallere ve $\{0,1\}$ Boole cebirindeki $\mathcal{A}$ nın homomorfizmalarına karşılık gelir. Bu homomorfizmaların kümesi bir topolojidir. Bu topolojiye $\mathcal{A}$ nın Stone uzayı denir ve bu uzayı tezin son bölümünde ele alacağız.

Anahtar sözcükler: Boole cebirleri, Stone uzayı

ABSTRACT

BOOLEAN ALGEBRAS AND STONE SPACE

KONU, Gökhan

Master Thesis in Mathematics Department

Supervisor: Asst. Prof. Tahsin ÖNER

June 2010, 69 pages

In addition to Introduction the thesis consists essentially of seven chapters.

Chapter 2 starts with a brief presentation of algebra and topology. Chapter 3 contains the algebraic definitions and corresponding basic properties of Boolean algebras. Chapter 4 is devoted to atoms: non-zero elements that are minimal with respect to the order on the Boolean algebra. In Chapter 5 we are interested in homomorphisms, isomorphisms and subalgebras of Boolean algebras.

Study of ideals and filters is the objective of Chapter 6. Particular attention is paid to maximal filters or ultrafilters, which correspond to maximal ideals, but also correspond to homomorphism of $\mathcal{A}$ into the Boolean algebra $\{0,1\}$. The set of these homomorphism is given a topology. It is called the Stone space of $\mathcal{A}$ which is studied in the last chapter.

Key words: Boolean algebras, Stone space.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince gerekli kaynakların sağlanmasında yardımcı olan, özellikle kıymetli görüşlerinden yararlandığım ve yakın ilgisini esirgemeyen sayın **Yrd.Doç.Dr.Tahsin ÖNER**' e ve her zaman yanımda olan aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	V
ABSTRACT	VII
TEŞEKKÜR	IX
1. GİRİŞ	1
2. CEBİR VE TOPOLOJİNİN YENİDEN İNCELENMESİ	3
2. 1 Cebir	3
2. 2 Topoloji	6
2. 3 Önermeler Hesabı İçin Bir Uygulama	12
3. BOOLE CEBİRLERİNİN TANIMI	14
3. 1 Boole Cebirinin Özellikleri ve Sıralama Bağlılıkları	17
3. 2 Sıralı Kümeler Olarak Boole Cebirleri	21
4. BİR BOOLE CEBİRİNDEKİ ATOMLAR	26
5. HOMOMORFİZMALAR, İZOMORFİZMALAR VE	
ALT CEBİRLER	31
5. 1 Homomorfizmalar ve İzomorfizmalar	31

İÇİNDEKİLER (devam)

5. 2 Boole Alt Cebirleri	39
6. İDEALLER VE SÜZGEÇLER	44
6. 1 İdeallerin Özellikleri	44
6. 2 Maksimal İdealler	47
6. 3 Süzgeçler	51
6. 4 Ultra Süzgeçler	52
6. 5 Süzgeç Bazları	56
7. STONE TEOREMİ	58
7. 1 Bir Boole Cebirinin Stone Uzayı	58
7. 2 Stone Teoremi	64
7. 3 Boole Uzayları Stone Uzaylarıdır	65
KAYNAKLAR DİZİNİ	69

1. GİRİŞ

Önermeler hesabının mantıksal denk formüllerini belirlediğimizde, değillemeye, evetlemeye ve veyalamaya karşılık gelen bir 1-li işlem ve iki 2-li işlemin tanımlandığı bir küme elde ederiz. Bu yolla elde edilen yapı Boole cebirine bir örnektir. Boole cebirine diğer bir örnek, birleşim, kesişim, tümleyen işlemleriyle birlikte verilen bir kümenin altkümelerinin kümesi yardımıyla verilebilir.

Boole cebirini incelemenin çeşitli yolları vardır. Halka veya sıralı kümeler gibi iki cebirsel gösterilimle başladığımızda, bu bölümün sonunda bir topolojik görüş açısını benimseyebileceğimizi göreceğiz: Her Boole cebiri bazı kompakt, hem açık ve hem de kapalı olan sıfır-boyutlu uzayın alt kümelerinin kümesi ile tanımlanabilir.

Bölüm 3 cebirsel tanımları ve karşılık gelen temel özellikleri içerir. Bir Boole cebiri her elemanı kendi karesine eşit olan bir halkadır, fakat bir dağılmalı tümlenmiş kafesdir, yani aşağıdaki özelliklere sahip bir sıralı kümedir:

- (a) Bir bir en küçük ve en büyük elemanı vardır.
- (b) Her bir eleman ikilisinin bir bir en küçük ve en büyük alt sınırı vardır, bu işlemlerin her biri diğerine göre dağılmalı olmalıdır.
- (c) Her elemanın bir tümleyeni vardır.

Bu iki görüş açısının denkliğini vereceğiz.

Bölüm 4 atomlarla, diğer bir deyişle, Boole cebiri üzerinde sıralamaya göre sıfır-olmayan elemanlarla, ilgilidir. Bu önemli notasyon birçok örnekte karşımıza çıkar.

Bölüm 5 Boole cebirlerinin homomorfizmalarıyla ilgilidir. Cebirde olduğu gibi, bu homomorfizmaların çekirdekleri (bu bağlamdaki idealler) önemli bir rol oynar. Bir $\mathcal{A}$ Boole cebirini bir kafes gibi gözönünde bulundurduğumuzda, ideallerle çalışmamayı fakat daha ziyade (bir idealin elemanlarının tümleyenlerini alarak elde edilen) süzgeçlerle çalışmayı tercih ederiz. İdeallerin ve süzgeçlerin bu incelenmesi Bölüm 6'nın hedefidir. Bu bölümde dikkatimizi maksimal süzgeçlere ve ultrasüzgeçlere yoğunlaştırmalıyız, bunlar maksimal ideallere ve $\{0,1\}$ Boole cebirindeki $\mathcal{A}$ nın homomorfizmalarına karşılık gelir. Bu homomorfizmaların kümesi bir topolojidir. Bu topolojiye $\mathcal{A}$ nın Stone uzayı denir ve bu uzayı tezin

diğer bölümlerinde ele alacağız. Bölüm 1 deki topolojiyi kullanarak önermeler mantığının kompaktlık teoremi ile mantıksal denk formüllerin denklik sınıflarının Stone uzayının kompaktlığıyla bağlantılı olduğunu kanıtlayacağız.

2. CEBİR VE TOPOLOJİNİN YENİDEN İNCELENMESİ

2.1 Cebir

Birimli değişmeli $\mathcal{A} = \langle A, +, \times, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ halkasını göz önünde bulunduralım.

Bir halkada olduğu gibi, $\mathbf{0} \neq \mathbf{1}$ kabul edeceğiz. A nın a ve b gibi iki elemanının çarpımını $a \times b$ veya ab notasyonuyl göstericeğiz.

Tanım 2.1.1 $\mathcal{A}$ nın bir ideali aşığıdaki koşullar gerçektececek biçimde $\mathcal{A}$ nın bir I alt kümesidir (Burris and Sankappanavar, 1981):

- (a) $\langle I, +, \mathbf{0} \rangle, \langle A, +, \mathbf{0} \rangle$ nın bir alt grubudur;
- (b) $\forall x \in I$ ve $\forall y \in A$ için $x \times y \in I$ dır.

A kümesinin kendisinin bu koşulları gerçektelediği açıktır. A dan farklı $\mathcal{A}$ nın bir ideali bir *öz ideal* (proper ideal) olarak adlandırılır. $\mathcal{A}$ nın bir I idealinin öz ideal olması için gerek ve yeter koşul $\mathbf{1} \notin I$ dır. ($I = A$ ise o zaman $\mathbf{1} \in I$ dır; $\mathbf{1} \in I$ ise A nın her y elamanı için $\mathbf{1} \times y = y \in I$ dır, böylece $A = I$ dır.)

Burada öz ideali gözönünde bulunduracağız. Şimdiye kadar $\mathcal{A}$ nın bir ideali yukarıdaki iki koşulu ve

- (c) $\mathbf{1} \notin I$

koşulunu sağlayan $\mathcal{A}$ nın bir I alt kümesidir.

Bu bakış açısını benimsemek bazen uygun olmayabilir: örneğin, $\mathcal{A}$ nın verilen iki I ve J idealleri için hem I hem de J yi içeren bir en küçük ideal olmayabilir çünkü genellikle bu rolü oynayan I ve J ideallerinin toplamı

$$I + J = \{ x \in A : (\exists y \in I) (\exists z \in J) (x = y + z) \}$$

da bir öz ideal olmayabilir. Örneğin, $\mathbb{Z}$ tam sayılarının halkasında, $2\mathbb{Z}$ (2 nin çarpımlarının kümesi) ve $3\mathbb{Z}$ ideallerinin toplamı, $\mathbb{Z}$ parçalanmamış halkasıdır.

Bir ideal herhangi bir diğer ideal tarafından kesin içermiyorsa, o zaman bu ideal maksimaldir.

Teorem 2.1.2 Birimli değişmeli bir halkada her ideal en az bir maksimal idealde içerilir.

Kanıt İspatta Zorn Lemmasını kullanacağız. $I, \mathcal{A}$ halkasında bir ideal olsun.

$$\mathcal{E} = \{ J \in \mathcal{P}(\mathcal{A}) : J \text{ bir ideal ve } I \subseteq J \},$$

I yı içeren $\mathcal{A}$ daki idealler kümesini gösterebilirsin. $\langle \mathcal{E}, \subseteq \rangle$ sıralı kümesinde en az bir maksimal elemanın varlığını kanıtlayabilirsek, o zaman teoremi kanıtlayabiliriz. Bunun için bu sıralı kümenin boş olmadığını (bu $I \in \mathcal{E}$ den dolayı açıktır) ve $\mathcal{E}$ nun her boş olmayan tam sıralı alt kümesi $\mathcal{E}$ da bir üst sınıra sahip olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Bu nedenle X , kapsama bağıntısıyla tam sıralı olan $\mathcal{E}$ nun bir alt kümesi olsun. X in boştan farklı olduğunu kabul edelim. I_0 , X in elemanlarının birleşimi olsun: $I_0 = \bigcup_{J \in X} J$. X boştan farklı olduğundan ve X in herhangi bir elemanı I yı içerdiğinden, I, I_0 da içerilir. Böylece $\mathbf{0} \in I_0$ dır. x ve y , I_0 in elemanları ise o zaman $x \in K$ ve $y \in J$ olacak şekilde X de J ve K idealleri vardır. X tam sıralı olduğundan, ya $J \subseteq K$ ya da $K \subseteq J$ dir. Örneğin, ilk durumda, $x \in K$ ve $y \in K$ dır, bu nedenle $x - y \in K$ ve $x - y \in I_0$ dır. Buradan $\langle I_0, +, \mathbf{0} \rangle$, $\langle A, +, \mathbf{0} \rangle$ in bir alt grubu olduğu sonuçlandırılır. İlave olarak, $x \in I_0$ ve $y \in A$ ise o zaman bir en küçük $J \in X$ ideali için, $x \in J$ elde ederiz. Böylece $xy \in J$ ve $xy \in I_0$ dır. Sonuç olarak, $1 \notin I_0$ dır. Karşıt durumda, $1 \in I_0$ in elemanlarının birine ait olacaktır, bu ise mümkün değildir. O halde I_0, I yı içeren $\mathcal{A}$ nın bir ideali olur. X deki her bir J için, $J \subseteq I_0$ dır, yani $I_0, \mathcal{E}$ dadır ve X zinciri için bir üst sınırdır. $\square$

$I, \mathcal{A}$ halkasında bir ideal olsun. A üzerinde kongrans modulo I olarak adlandırılan $\equiv_I$ denklik bağlantısını aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$\text{Her } x, y \in A \text{ için, } x \equiv_I y \Leftrightarrow x - y \in I.$$

$\bar{a}$, $a \in A$ elemanının denklik sınıfını gösterebilirsin. $\bar{\mathbf{0}} = I$ dır. Kongrans modulo I , $+$ ve $\times$ halka işlemleri ile uyumludur, diğer bir deyişle, A nın a, b, c , ve d elemanları için

$$a \equiv_I c \text{ ve } b \equiv_I d \text{ ise, o zaman } a + b \equiv_I c + d \text{ ve } a \times b \equiv_I c \times d$$

dir. Bu bize denklik sınıflarının $A/\equiv_I$ kümesi üzerindeki, A nın her x, y elemanı için, aşağıdaki gibi tanımlı iki işlem tanımlamamıza olanak sağlar:

$$\overline{x} + \overline{y} = \overline{x + y} \text{ ve } \overline{x} \times \overline{y} = \overline{x \times y}.$$

$A/\equiv_I$ kümesi üzerindeki bu iki işlem A nın I ideali ile tanımlanan bölüm halkası olarak adlandırılan birimli (I sıfır eleman ve $\overline{1}$ birim elemandır) değişmeli bir halka yapısını verir ve $A/\equiv_I$ yerine A/I ile gösterilir. Buna iyi bilinen, $n \geq 2$ bir doğal sayı olmak üzere, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ halkası örnek olarak verilebilir.

Teorem 2.1.3 A/I bölüm halkasının bir cisim olması için gerek ve yeter koşul, I nın bir maximal ideal olmasıdır (Burris and Sankappanavar, 1981).

Kanıt I nın maxsimal olmadığını kabul edersek, $I \subsetneq J$ (sıkı kapsama) olacak şekilde A nın bir J idealini seçebiliriz. a, I ya ait olmayan J nin bir elmanı olsun. $\overline{a} \neq \overline{0}$ dır. Bu nedenle $\overline{a}$ bölüm halkasının sıfırdan farklı bir elemandır. Bu eleman tersinir olsaydı, $\overline{a} \times \overline{b} = \overline{1}$ olacak şekilde bir $b \in A$ elemanı mevcut olurdu, o zaman $ab \equiv_I 1$, veya denk olarak, $ab - 1 \in I$, dolayısıyla $ab - 1 \in J$ olduğu anlamına gelmez. Böylece $ab - (ab - 1) = 1$ farkı J ye ait olacaktı. Bu ise mümkün değildir. O halde A/I halkasında sıfırdan farklı, tersinir olmayan bir küçük eleman vardır ve bu nedenle A/I bir cisim değildir.

Şimdi I nın maximal olduğunu kabul edelim. a, A nın $\overline{a} \neq \overline{0}$ (yani $a \notin I$) olacak şekilde bir elemanı olsun. Amacımız $\overline{a}$ nın A/I bölüm halkasının bir tersinir elemanı olduğunu göstermektir.

$$K = \{x \in A : (\exists y \in A)(\exists z \in I)(x = ay + z)\}$$

kümesini ele alalım. $\langle K, +, \overline{0} \rangle$, $\langle A, +, \overline{0} \rangle$ nın bir alt grubudur. Herşeyden önce, $\overline{0} \in K$ dır çünkü $\overline{0} = (a \times \overline{0}) + \overline{0}$ dır, ayrıca $x_1 \in K$ ve $x_2 \in K$ ise o zaman $x_1 = ay_1 + z_1$ ve $x_2 = ay_2 + z_2$ olacak biçimde A da y_1 ve y_2 elemanlarını bulabiliriz; buradan

$$x_1 - x_2 = a(y_1 - y_2) + z_1 - z_2$$

elde ederiz. $y_1 - y_2 \in A$ ve $z_1 - z_2 \in I$ dır, böylece $x_1 - x_2 \in K$ olur. Diğer taraftan, $x \in K$ ve $z \in A$ ise, o zaman $xt \in K$ dır; gerçekten $x = ay + z$ ve böylece $xt = a(ty) + tz \in A$ olacak şekilde $y \in A$ ve $z \in I$ elemanları vardır fakat $ty \in A$ ve $tz \in I$ den dolayı $xt \in K$ dır. Bu bir idealin tanımındaki ilk iki koşulun K ile gerçekleştiğini gösterir. Eğer üçüncü koşul gerçekleşseydi, $K, \mathcal{A}$ da bir ideal olurdu. Ama K kümesi I yı sıkı kapsar: Gerçekten I nın her x elemanı $x = (a \times \mathbf{0}) + x$ biçiminde yazılabilir ve böylece K ya da ait olur. $(a \times \mathbf{1}) + \mathbf{0}$ olarak yazılabilen a elemanı K ya ait fakat I ya ait değildir. I bir maximal ideal olduğundan, $K, \mathcal{A}$ da bir ideal olamaz. Buradan $\mathbf{1} \in K$ sonucunu elde ederiz. Böylece

$$ay + z = \mathbf{1}$$

olacak şekilde iki $y \in A$ ve $z \in I$ elemanı bulabiliriz. O halde $\mathbf{1} - ay = z \in I$ veya, denk olarak, $\equiv_I$ bağıntısı için denklik sınıflarına geçerek $\overline{\mathbf{1} - ay} = \bar{\mathbf{0}}$ ve $\bar{a} \times \bar{y} = \bar{\mathbf{1}}$ yazabiliriz. Bu yüzden $\bar{a}$ elemanı $\mathcal{A}/I$ bölüm halkası içinde bir ters elamana sahiptir.

Böylece bu halkanın sıfırdan farklı her elemanının tersinir olduğunu gösterdik. O halde $\mathcal{A}/I$ bir cisimdir. $\square$

2. 2 Topoloji

X bir topolojik uzay ve Y, X in bir alt kümesi olsun. Y , bu topolojide X in açık alt kümelerinin Y ile kesişimleri açık kümeler olarak alınmasıyla, X topolojisini içeren Y üzerinde bir topolojiyi verir. Diğer bir deyişle, bir $\Omega \subseteq Y$ alt kümesinin induced topolojide açık olması için X üzerindeki topoojide $\Omega = O \cap Y$ olacak şekilde bir O açık kümesinin olması gerek ve yeter koşuldur. Y üzerindeki induced topolojinin kapalı kümelerinin X in kapalı alt kümelerinin Y ile kesişimi olduğunu açıktır. Bir X topolojik uzayının alt uzayı ele alındığında bu included topolojisinin bir alt kümesi anlaşılır (Adams and Franzosa, 2008).

Bir X topolojik uzayının açık kümeleri için bir *baz*, topolojideki açık kümelerin bir $(O_i)_{i \in I}$ ailesidir öyle ki her açık küme bu ailenin açık kümelerinin bir birleşimidir. Diğer bir deyişle, her açık G kümesi için $G = \bigcup_{j \in J} O_j$ olacak

şekilde en az $J \subseteq I$ bir altkümesi vardır. Bir topolojik uzayın açık kümeleri için bir baz seçildiğinde, bu bazın elemanları *temel açık kümeler* olarak adlandırılır. Temel açık kümelerin X deki tümleyenlerine *temel kapalı kümeler* denir ve her bir kapalı küme temel kapalı kümelerin kesişimi olduğu açıktır. Reel sayıların $\mathbb{R}$ kümesi üzerindeki alışılmış topoloji için, sınırlı açık aralıklar, yani reel sayılar kümesi üzerindeki genel topolojisi için sınırlandırılmış açık aralıklar (yani, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olmak üzere $]a, b[$ formundaki aralıklar) açık kümeler için bir baz oluşturur. Ayrıca, herhangi bir topolojik uzayda tüm açık kümeler ailesinin açık kümeler için baz olduğu açıktır.

Lemma 2.2.1 Eğer $(O_i)_{i \in I}$, X topolojik uzayının açık kümeleri için bir baz ve Y , X in bir altkümesi ise, o zaman $(O_i \cap Y)_{i \in I}$ ailesi Y üzerinde X in topolojisi tarafından içirilen topolojinin bir bazıdır (Adams and Franzosa, 2008).

Bu X in temel açık alt kümelerinin Y ile kesişiminin Y nin temel açık alt kümeleri olması anlamına gelir.

X ve Y iki topolojik uzay olsun. X ten Y ye bir f dönüşümüne *süreklidir* denir eğer ve yalnız eğer Y nin her açık alt kümesinin f altındaki ters görüntüsü X in bir açık alt kümesidir. Diğer bir deyişle, f nin sürekli olması için gerek ve yeter koşul Y nin her açık alt kümesi için $f^{-1}[\Omega] = \{x \in X : f(x) \in \Omega\}$ kümesinin X in açık altkümesi olmasıdır.

Lemma 2.2.2 $(\Omega_i)_{i \in I}$ bir Y topolojik uzayının açık alt kümeleri için baz ve f , X den Y içine bir dönüşüm olsun. f sürekli olmak üzere her $i \in I$ için $f^{-1}[\Omega_i]$ nin X in bir açık alt kümesi olması gerek ve yeter koşuldur.

Kanıt Gerek koşul süreklilik tanımından dolayı açıktır. Bu koşul yeterdir çünkü Ω , Y nin herhangi bir açık alt kümesi ise, o zaman $\Omega = \bigcup_{j \in J} O_j$ olacak şekilde bir $J \subseteq I$ alt kümesi vardır ve böylece $f^{-1}[\Omega] = \bigcup_{j \in J} f^{-1}[O_j]$ dir. Eğer $f^{-1}[O_i]$ in tümü X in açık alt kümesi ise, o zaman $f^{-1}[\Omega]$ açık alt kümelerin bir birleşimi ve böylece X in bir açık alt kümesi olur. $\square$

Tanım 2.2.3 X topolojik uzayının Y topolojik uzayı üzerine homomorfizması X den Y içine bir biyektif, sürekli bir dönüşümdür. Bu dönüşümün tersi Y den X e sürekli bir fonksiyondur. (Bu çalışmada bir biyektif bicontinuous dönüşümden söz edilecektir.)

Tanım 2.2.4 Bir X topolojik uzayına *Hausdorff* (ya da *ayrık*) denir ancak ve ancak X in her farklı x ve y eleman ikilisi için $x \in G$ ve $y \in H$ olacak şekilde ayrık açık G ve H alt kümeleri vardır. Bir Hausdorff uzayının bir alt kümesinin Hausdorff olduğu açıktır.

Lemma 2.2.5 X Hausdorff topolojik uzay ve Y, X in bir alt kümesi olsun. O zaman Y üzerinde X i içeren topoloji Y yi bir Hausdorff uzay yapar.

Kanıt x ve y, Y nin farklı noktaları ise o zaman sırasıyla x ve y yi içeren X in iki ayrık alt kümesiyle kesişimi sırasıyla x ve y içeren Y nin iki ayrık açık alt kümesi olur. $\square$

Tanım 2.2.6 X topolojik uzayının bir *örtüsü* $X = \bigcup_{i \in I} E_i$ olacak şekilde X in alt kümelerinin bir $(E_i)_{i \in I}$ ailesidir. Eğer E_i lerin tümü açık kümeler ise, o zaman bir *açık örtüden* bahsedebiliriz. Bir $(E_i)_{i \in I}$ örtüsünün *alt örtüsü*, kendisi X in bir örtüsü olan $(E_j)_{j \in J}$ ($J \subseteq I$) bir alt ailesidir. İndislerin karşılık gelen kümeleri *sonlu* olduğunda, sonlu bir örtü (veya alt örtüden) bahsedilir.

Tanım 2.2.7 Bir topolojik uzayın *kompakt* olması için gerek ve yeter koşul, Hausdorff olması ve X in her açık örtüsünden sonlu bir alt örtü çıkarılabilmesidir.

Lemma 2.2.8 X bir Hausdorff uzayı olsun. X in kompakt olabilmesi için, X in kapalı alt kümelerin (kesişimleri boştan farklı olan) her bir ailesinin kesişimi boş olmayan sonlu bir alt aileye sahip olması gerek ve yeter koşuldur.

Kanıt Eğer $(F_i)_{i \in I}, X$ in kapalı alt kümelerinin bir ailesi ise, ve her bir $i \in I$ için F_i nin X deki tümleyeni O_i (bir açık kümedir) ile gösterilirse, o zaman

$\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset \Leftrightarrow \bigcup_{i \in I} O_i = X$ olması gerektiğini gözlemlemek yeterlidir. Böylece kesişimi boş olan X in kapalı alt kümelerinin her bir ailesine X in bir açık alt kümesi karşılık gelir ve bunun tam tersi de doğrudur. $\square$

Lemma 2.2.9 $(\Omega_i)_{i \in I}$, bir X Hausdorff uzayının açık kümeleri için bir baz olsun. X in bir kompakt olabilmesi için, gerek ve yeter şart temel açık kümeler yardımıyla X in her örtüsünden sonlu bir alt örtü çıkartabilmemizdir.

Kanıt Gerek koşul açıktır. Koşulun gerçekleştiğini ve $(G_k)_{k \in K}$ nın keyfi açık kümelerle X in bir örtüsü olduğunu kabul edelim. Bu durumda $X = \bigcup_{k \in K} G_k$ dır, fakat her bir G_k temel açık kümelerin bir birleşimi olduğundan, X temel açık kümeler ailesi $(\Omega_j)_{j \in J}$ ($J \subseteq I$) tarafından bir örtüye sahip olur; burada her bir Ω_j, G_k açık kümelerinin en az birisinde içerilir. Bu nedenle, verilen varsayım yardımıyla, bu örtüden sonlu bir alt örtü çıkarılabilir. Örneğin, $X = \Omega_{j_1} \cup \Omega_{j_2} \cup \dots \cup \Omega_{j_n}$ dır. Şimdi sırasıyla $\Omega_{j_1}, \Omega_{j_2}, \dots, \Omega_{j_n}$ ları içeren $(G_k)_{k \in K}$ ailesinden $G_{k_1}, G_{k_2}, \dots, G_{k_n}$ açık kümeleri seçmek yeterlidir. Bu durumda $X = G_{k_1} \cup G_{k_2} \cup \dots \cup G_{k_n}$ olduğu için $(G_k)_{k \in K}$ dan sonlu bir alt örtü elde edebiliriz. Bu ise X in kompakt olduğunu kanıtlar. $\square$

Doğal olarak son özellik kapalı kümeler ile ilgili olarak yeniden ifade edilebilir:

Lemma 2.2.10 X açık kümeleri için verilen bir bazıyla bir Hausdorff uzayı olsun. X in kompakt olabilmesi için, kesişimi boş olan temel kapalı kümelerin her bir ailesinden kesişimi boş olan sonlu bir alt aile çıkarmamız gerek ve yeter şarttır.

Tanım 2.2.11 Aynı zamanda açık ve kapalı olan bir topolojik uzayın bir alt kümesi *clopen* olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.12 Clopen kümelerden oluşan bir baza sahip bir topolojik uzay *sıfır-boyutlu* olarak adlandırılır. Örneğin, rasyonel sayıların $\mathbb{Q}$ uzayında, uçnoktaları

irrasyonel sayılar olan sınırlı açık aralıklar doğal topoloji için clopen kümelerin bir bazını meydana getirir. Böylece $\mathbb{Q}$ sıfır-boyutlu bir topolojik uzaydır.

Lemma 2.2.13 Sıfır-boyutlu bir topolojik uzay için, clopen alt kümelerinin ailesi açık kümeler için baz olması gerek ve yeter koşuldur.

Kanıt X in açık altkümelerinin bir bazını içeren açık kümelerin herhangi bir ailesinin X in açık alt kümelerinin de bir bazı olduğu açıktır. Böylece X sıfır boyutlu ise, tüm clopen altkümelerinin ailesi açık kümeler için bir baz oluşturur. Tersisi de açıktır. $\square$

Lemma 2.2.14 Sıfır boyutlu bir X topolojik uzayının her Y altuzayı sıfır boyutludur.

Kanıt $(O_i)_{i \in I}$ clopen kümelerinden oluşan X in açık alt kümeleri için bir baz olsun. $(O_i \cap Y)_{i \in I}$ ailesi Y nin açık alt kümeleri için bir baz oluşturduğu, Lemma 2.4 den, açıktır. Ama bu açık kümeler aynı zamanda Y nin kapalı alt kümeleridir. $\square$

Tanım 2.2.15 Sıfır boyutlu bir kompakt topolojik uzaya *Boole uzayı* denir.

Tanım 2.2.16 $(X_i)_{i \in I}$ topolojik uzayların bir ailesi olsun. Bu ailenin $\prod_{i \in I} X_i$ çarpımı üzerinde, $\prod_{i \in I} O_i$ biçimindeki tüm alt kümelerini temel açık kümeler olarak bir topoloji tanımlayabiliriz; burada her bir $i \in I$ için O_i, X_i nin bir açık altkümesidir fakat sonlu çokluktaki i için $O_i = X_i$ dir. Bu türdeki kümelerin birleşiminden oluşan koleksiyonun kesişimler ve keyfi birleşimler altında kapalı olduğunu göstermek kolaydır. $\prod_{i \in I} X_i$ üzerindeki topolojisi için açık kümeler ailesini alarak bu kümeler koleksiyonunu belirleyebiliriz. Bu şekilde tanımlanan topolojiye *çarpım topolojisi* denir (Adams and Franzosa, 2008).

Tychonoff Teoremi şunu ifade eder:

Teorem 2.2.17 Kompakt topolojik uzayların herhangi bir ailesinin çarpımı kompakt bir topolojik uzaydır.

Şimdi Bölüm 7 da ele alacağımız özel durumu, yani $(X_{i \in I})_{i \in I}$ uzaylar ailesindeki her bir X_i nin discrete topolojili $\{0,1\}$ kümesini inceleyelim.

Bu durumda, $\prod_{i \in I} X_i$ çarpımı I dan $\{0,1\}$ e dönüşümlerin $\{0,1\}^I$ kümesidir.

Çarpım topolojisindeki temel açık küme Ω yı elde etmek için I daki sonlu sayıda $i_1, i_2, \dots, i_k$ leri ve $\{0,1\}$ den $O_{i_1}, O_{i_2}, \dots, O_{i_k}$ açık kümeleri, ve bu durumda da $\{0,1\}$ den keyfi alt kümeleri, alalım. O zaman

$$\Omega = \{0,1\}^{I - \{i_1, i_2, \dots, i_k\}} \times O_{i_1} \times O_{i_2} \times \dots \times O_{i_k}$$

veya, alternatif olarak,

$$\Omega = \left\{ f \in \{0,1\}^I : f(i_1) \in O_{i_1} \text{ ve } f(i_2) \in O_{i_2} \text{ ve } \dots \text{ ve } f(i_k) \in O_{i_k} \right\}$$

elde ederiz.

Sadece i_j durumunu dikkate alalım. O_{i_j} lerin birinin boş küme olduğu durumu göz önünde bulundurmamak gereksizdir çünkü bu durumda $\Omega = \emptyset$ elde edilir.

Böylece $\{0,1\}$ üzerindeki çarpım topolojisinde bir temel açık küme Ω yı meydana getirmek için I da sonlu sayıda $i_1, i_2, \dots, i_k$ ve $\{0,1\}$ de aynı sayıda $\varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, \dots, \varepsilon_{i_k}$ elemanlarını alalım. O zaman

$$\Omega = \left\{ f \in \{0,1\}^I : f(i_1) \in \varepsilon_{i_1} \text{ ve } f(i_2) \in \varepsilon_{i_2} \text{ ve } \dots \text{ ve } f(i_k) \in \varepsilon_{i_k} \right\}$$

elde ederiz.

Bu nedenle, bir temel açık küme I dan $\{0,1\}$ e tüm dönüşümlerin kümesidir.

$$\bigcup_{1 \leq j \leq k} \left\{ f \in \{0,1\}^I : f(i_j) = 1 - \varepsilon_j \right\}$$

olduğunu gözlemlersek, Ω kümesinin $\{0,1\}^I$ deki tümleyeni ifade etmiş oluruz. Böylece bu küme bir açık küme olan k temel açık kümelerinin birleşimidir; O halde Ω nın kapalı bir küme olduğu sonucu elde edilir.

$\{0,1\}$ üzerindeki topolojide temel açık kümeler clopen kümelerdir. Sonuç olarak, aşağıdaki lemmayı ispatlamış olduk:

Lemma 2.2.18 $\{0,1\}^I$ topolojik uzayı sıfır boyutludur.

$\{0,1\}$ discrete uzayı kompakt olduğundan, Tychonoff Teoremi kullanarak, aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz:

Teorem 2.2.19 $\{0,1\}^I$ uzayı bir Boole topolojik uzayıdır.

2.3 Önergeler Hesabı İçin Bir Uygulama

Tychonoff Teoremi önermeler hesabı için kompaktlık teoreminin ispatını vermemizi sağlar.

Kanıt P önerme değişkenlerinin bir kümesi olsun ve $\mathcal{F}$ formüller kümesini göstereyin. Her $F \in \mathcal{F}$ için, $\Delta(F)$ ise bunu sağlayan F lerin doğruluk değeri atamasını temsil etsin:

$$\Delta(F) = \left\{ \delta \in \{0,1\}^P : \delta(F) = 1 \right\}.$$

Eğer $A_1, A_2, \dots, A_n$ F formülünde geçen değişkenler ise, o zaman $\Delta(F)$ kümesinin

$$\left\{ \delta \in \{0,1\}^I : \delta(A_1) = \varepsilon_1 \text{ ve } \delta(A_2) = \varepsilon_2 \text{ ve } \dots \text{ ve } \delta(A_k) = \varepsilon_k \right\},$$

formundaki kümelerinin bir birleşimi olduğunu görürüz, burada $\varepsilon_i \in \{0,1\}$ in elemanlarıdır.

Gerçekten, bir F formülünün δ ataması ile doğrulanması δ nın $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ kümesinin dışında olması varsayımına bağlı değildir.

Bu nedenle $\Delta(F)$ kümesi $\{0,1\}^P$ topolojik uzayındaki temel açık kümelerin birleşimidir. Bu sonlu bir birleşimdir: en fazla 2^n tane küme içerir. Böylece $\Delta(F)$ in kendisinin bir clopen küme olduğu sonucu elde edilir.

Şimdi gerçekleştirilemeyen bir $T \subseteq \mathcal{F}$ formüller kümesini göz önünde bulunduralım. Bu $\bigcap_{F \in T} \Delta(F)$ nin boş küme olması anlamına gelir. Böylece $(\Delta(F))_{F \in T}$ ailesi $\{0,1\}^P$ kompakt uzayındadır. O halde kesişimleri boş olan sonlu

bir alt aile çıkartmak mümkündür ve $\bigcap_{F \in T_0} \Delta(F) = \emptyset$ olacak şekilde sonlu bir $T_0 \subseteq T$ ailesi vardır. Bu gerçekleşmeyen T nin sonlu bir altkümesi olması anlamına gelir. $\square$

3. BOOLE CEBİRLERİNİN TANIMI

Tanım 3.1 Bir *Boole cebiri* (veya bir *Boole halkası*) çarpma için her bir elemanı idempotent olan $\langle A, +, -, \times, 0, 1 \rangle$ halkasıdır (Sikorski, 1960).

Örnek 3.2 $\langle \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +, \times, 0, 1 \rangle$ halkası bir Boole cebiridir.

Örnek 3.3 E keyfi boştan farklı bir küme olmak üzere, $\langle \mathcal{P}(E), \Delta, \cap, \emptyset, E \rangle$ halkası bir Boole cebiridir, burada Δ ve $\cap$, E nin kuvvet kümesi $\mathcal{P}(E)$ üzerinde tanımlı simetrik fark ve kesişim işlemleridir.

Örnek 3.4 Önerme değişkenlerinin bir P kümesi ve formüllerin bu önerme değişkenleri ile ilişkilendirilmiş $\mathfrak{S}$ kümesini göz önünde bulunduralım. Mantıksal denk formüllerin sınıflarının kümesi olan $\mathfrak{S}/\sim$ bölüm kümesini inceleyeceğiz. Bir F formülünün denklik sınıfı $cl(F)$ ile gösterilecektir.

$\mathfrak{S}$ nin tüm F ve G formülleri için aşağıdaki tanımlamayı yapalım:

$$\neg cl(F) = cl(\neg F)$$

$$cl(F) \wedge cl(G) = cl(F \wedge G)$$

$$cl(F) \vee cl(G) = cl(F \vee G)$$

$$cl(F) \Rightarrow cl(G) = cl(F \Rightarrow G)$$

$$cl(F) \Leftrightarrow cl(G) = cl(F \Leftrightarrow G)$$

$$cl(F) \nLeftrightarrow cl(G) = cl(F \nLeftrightarrow G)$$

Bu $\mathfrak{S}/\sim$ üzerindeki iç operatörleri tanımlar. $\mathfrak{S}/\sim$ nin $\nLeftrightarrow$ ve $\wedge$ işlemlerine göre bir Boole cebiri olduğunu gösterelim.

Önermede verilen bağıntılar ile beraber $\mathfrak{S}/\sim$ üzerinde iç operatörlerini tanımlamak için kullanılan önermesel bağlaçlarla uyumlu olan $\sim$ lojiksel denklik bağıntısını ele alalım. Daha kesin olarak, tüm F, G, F' ve G' formülleri için $cl(F) = cl(F')$ ve $cl(G) = cl(G')$ ise, o zaman $cl(\neg F) = cl(\neg F')$ ve her bir $* \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ için $cl(F * G) = cl(F' * G')$ dır.

A, B, C önerme değişkenleri, T bir totoloji ve $\perp$ bir çelişki olmak üzere

$$(a) ((A \wedge A) \Leftrightarrow A),$$

- (b) $((A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)),$
- (c) $((A \wedge (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \wedge C))$
- (d) $A \Leftrightarrow B, B \Leftrightarrow A$
- (e) $\neg(A \Leftrightarrow B), (\neg A \Leftrightarrow B), (A \Leftrightarrow \neg B)$
- (f) $A, (A \wedge T), (A \vee T), (A \Leftrightarrow T), (A \Rightarrow T)$
- (g) $\neg A, (A \Leftrightarrow \perp), (A \Rightarrow \perp)$
- (h) $\perp, (A \wedge \perp), (A \Leftrightarrow \neg A)$
- (i) $(A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C)), ((A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C)$

formülleri mantıksal denktir. Bu durumda aşağıdaki denklik sınıfları vardır:

- $(A \nLeftrightarrow B) \sim (B \nLeftrightarrow A)$ ((d) den dolayı);
- $((A \nLeftrightarrow B) \nLeftrightarrow C) \sim (A \nLeftrightarrow (B \nLeftrightarrow C))$ ((e) ve (i) den dolayı)
- $(A \nLeftrightarrow \perp) \sim A$ ((g) ve (d) den dolayı)
- $(A \nLeftrightarrow A) \sim \perp$ ((h) ve (e) den dolayı)
- $(A \wedge B) \sim (B \wedge A)$ ((b) den dolayı)
- $((A \wedge B) \wedge C) \sim (A \wedge (B \wedge C))$ ((c) den dolayı)
- $(A \wedge (B \nLeftrightarrow C)) \sim ((A \wedge B) \nLeftrightarrow (A \wedge C))$
- $(A \wedge T) \sim A$ ((f) den dolayı)
- $(A \wedge A) \sim A$ ((a) den dolayı).

Bu denklikler $\mathfrak{S}/\sim$ üzerindeki $\nLeftrightarrow$ operatörlerinin birleşmeli ve değişmeli olduğunu kanıtlar; ayrıca çelişkilerin **0** sınıfını birim eleman olarak almamıza olanak sağlar ve her elemanın bu birim elemana göre bir ters elemana (kendisi) sahip olduğunu gösterir. Böylece $(\mathfrak{S}/\sim, \nLeftrightarrow)$ bir değişmeli grup olur. Üstelik, $\wedge$ operatörü değişmeli, birleşmeli ve $\nLeftrightarrow$ üzerine dağılmalıdır. Ayrıca $\wedge$ idempotenttir ve bir birim elemana sahiptir, bu birim eleman totolojilerin **1** sınıfıdır. O halde $(\mathfrak{S}/\sim, \nLeftrightarrow, \wedge)$ birimli değişmeli olan bir Boole halkasıdır.

Örnek 3.5 E keyfi bir küme olsun. $P(E)$ (E nin kuvvet kümesi) üzerinde ikili Δ (simetrik fark) operatörünü aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$P(E)$ nin her X ve Y elemanları için

$$\begin{aligned} X \Delta Y &= (X \cup Y) - (X \cap Y) \\ &= (X \cap (E - Y)) \cup ((E - X) \cap Y). \end{aligned}$$

E nin tüm X ve Y alt kümeleri için

$$X \Delta Y = \{x \in E : x \in X \nleftrightarrow x \in Y\}$$

olmak üzere $(P(E), \Delta, \cap)$ nin bir boole cebiri olduğunu, Örnek 3.4 den elde edilen sonuçları kullanarak, gösterelim:

X ve Y , E nin iki alt kümesi olsun. Her $x \in X$ elemanı için $x \in X \Delta Y$ olması için gerek ve yeter koşul $x \in X$ ve $x \in Y$ önermelerinden sadece birinin doğru olmasıdır. Bu $x \in X \Delta Y$ ancak ve ancak $x \in X \nleftrightarrow x \in Y$ önermesinin doğru olması anlamına gelir. Δ nın değişmeliliğinden $\nleftrightarrow$ nın değişmeli olması elde edilir. E nin tüm X ve Y alt kümesi için

$$\begin{aligned} X \Delta Y &= \{x \in E : x \in X \nleftrightarrow x \in Y\} \\ &= \{x \in E : x \in Y \nleftrightarrow x \in X\} \\ &= Y \Delta X \end{aligned}$$

dır. Δ nın birleşmeliliği benzer şekilde $\nleftrightarrow$ dan elde edilir. Ayrıca

$$X \Delta \emptyset = \{x \in E : x \in X \nleftrightarrow x \in \emptyset\} = \{x \in E : x \in X\} = X$$

ve

$$X \Delta X = \{x \in E : x \in X \nleftrightarrow x \in X\} = \emptyset$$

dır. Böylece Δ operatörü için $\emptyset$ bir birim eleman ve $P(E)$ nin her elemanı kendisinin tersi elde edilmiş oldu. O halde $(P(E), \Delta)$ bir değişmeli grup olur.

$P(E)$ üzerindeki kesişim operatörü değişmeli, birleşmeli olup E birim elemanına sahiptir. Bu özellikler $\wedge$ önermeler lojisinin bağlacının karşılık gelen özelliklerinde elde edilir. Ayrıca

$$X \cap (Y \Delta Z) = \{x \in E : x \in X \wedge (x \in Y \nleftrightarrow x \in Z)\};$$

$$(X \cap Y) \Delta (Y \cap Z) = \{x \in E : (x \in X \wedge x \in Y) \nleftrightarrow (x \in X \wedge x \in Z)\}$$

ve $\wedge$ nin $\nleftrightarrow$ üzerine olan dağılma özelliğinden dolayı bu iki küme çakışır. Böylece kesişimin simetrik fark üzerine dağılma özelliği elde edilir. O halde $(P(E), \Delta, \cap)$ yapısı birimli değişmeli bir halkadır. Her $X \in P(E)$ için $X \cap X = X$ olduğundan $(P(E), \Delta, \cap)$ bir Boole cebiridir.

3. 1 Boole Cebirinin Özellikleri ve Sıralama Bağlılıları

Lemma 3. 1.1

- (a) Herhangi bir Boole cebirinde, her elemanın toplamsal tersi kendisine eşittir.
 (b) Her Boole cebiri değişmelidir (Padmanabhan and Redeanu, 2009).

Kanıt

- (a) $\langle A, +, \times, 0, 1 \rangle$ bir Boole cebri ve x ve y , A nın elemanları olsun. Tanımdan, $x^2 = x$, $y^2 = y$ ve herhangi bir halkada

$$(x + y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2$$

olmasına rağmen, Boole cebirinde

$$(x + y)^2 = x + y$$

dir. Buradan

$$(x + y) = x + xy + yx + y$$

yani

$$xy + yx = 0$$

elde edilir. $y = 1$ alınırsa, $x + x = 0$ ya da $x = -x$ sonuçlandırılır.

- (b) Keyfi x ve y ler için, xy nin tersi xy dir, fakat $xy + yx = 0$ olduğundan aynı zamanda yx in de tersidir. Buradan $xy = yx$ elde edilir. $\square$

Uyarı 3. 1.2 $\langle \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +, \times, 0, 1 \rangle$ Boole halkası bir cisim ve hatta bir tamlık bölgesi olan tek Boole halkadır. Gerçekten, $x^2 = x$ bağıntısı $x(x-1) = 0$ a eşittir ve bir tamlık bölgesinde x in 0 ya da 1 olmasını gerektirir.

$\langle A, +, \times, 0, 1 \rangle$ bir Boole cebri olsun. A nın üzerinde bir $\leq$ ikili bağıntısını, her $x, y \in A$ için, aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$x \leq y \text{ ancak ve ancak } xy = x.$$

Şimdi bu bağıntının bir sıralama bağıntısı olduğunu gerçekteleyebiliriz:

- $x \leq x$ dir çünkü tanımdan $x^2 = x$ dir.
- $x \leq y$ ve $y \leq z$ ise o zaman $xy = x$ ve $yz = z$ olur, buradan $xz = (xy)z = x(yz) = xy = x$, ve buradan $x \leq z$ dir.

- $x \leq y$ ve $y \leq x$ ise o zaman $xy = x$ ve $yx = y$ dir, böylece değişme özelliğinden $x = y$ olur.

Bu nedenle $\leq$ bağıntısı yansılmalı, geçişken ve ters simetriktir.

Aşağıdaki teorem bu sıralama bağıntısının temel özelliklerini gösterir:

Teorem 3. 1.3

- (1) $\leq$ bağıntısı için **0** en küçük eleman **1** ise en büyük elemandır.
- (2) A nın herhangi iki x ve y elemanı, $x \cup y$ (veya xy) ile gösterilen, bir en büyük alt sınıra (yani, herhangi bir diğer ortak alt sınırdan daha büyük olan bir ortak en küçük alt sınıra) sahiptir.
- (3) A nın herhangi iki x ve y elemanı, $x \cap y$ (veya $x + y + xy$) ile gösterilen, bir en küçük üst sınıra (yani, herhangi bir diğer ortak üst sınırdan daha küçük olan bir ortak en büyük üst sınıra) sahiptir.
- (4) A üzerinde tanımlı $\cap$ ve $\cup$ işlemleri birleşme ve değişme özelliklerine sahiptir.
- (5) **0**, $\cup$ işlemi için birim eleman ve $\cap$ işlemi için yutan elemandır. **1** ise $\cap$ işlemi için birim eleman ve $\cup$ işlemi için yutan elemandır.
- (6) $k \in \mathbb{N}^*$ olmak üzere A nın boştan farklı her sonlu alt kümesi $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ t sınıra ve $x_1 \cap x_2 \cap \dots \cap x_k$ a eşit olan bir en büyük alt sınıra ve $x_1 \cup x_2 \cup \dots \cup x_k$ a eşit olan en küçük bir üst sınıra sahiptir.
- (7) $\cup$ ve $\cap$ işlemlerinin her biri diğer üzerinde dağılmalıdır.
- (8) A daki her x elemanı için, $x \cup x' = \mathbf{1}$ ve $x \cap x' = \mathbf{0}$ olacak şekilde x in tümleyeni olarak adlandırılan A da bir x' elemanı vardır.
- (9) A dan A içine tanımlı $x \mapsto \mathbf{1} + x$ dönüşümü sıralamayı ters çeviren bir bijeksiyondur.

Kanıt

- (1) Her x için , $\mathbf{0} \times x = \mathbf{0}$ ve $\mathbf{1} \times x = x$, ve buradan $\mathbf{0} \leq x$ ve $\mathbf{0} \leq \mathbf{1}$ dir.

- (2) $(xy)x = x^2y = xy$ ve $(xy)y = xy^2 = xy$ olduğuna göre xy , x ve y için bir en küçük alt sınırdır. Ayrıca z , x ve y için ortak bir alt sınır ise, o zaman

$zx = z$ ve $zy = y$ dir, buradan $z(xy) = (zx)y = zy = z$ olur ve bu $z \leq xy$ anlamına gelir. O halde xy , x ve y için en büyük ortak alt sınırdır.

(3) Gerçekten,

$$x(x + y + xy) = x^2 + xy + x^2y = x + xy + xy = x + 0 = x,$$

ve benzer şekilde, $y(x + y + xy) = y$ olur. Böylece kuşkusuz $x \leq x + y + xy$ ve $y \leq x + y + xy$ dir. Diğer taraftan, $x \leq z$ ve $y \leq z$ (yani $xz = x$ ve $yz = y$) olacak şekilde A nın bir z elemanı mevcut ise, o zaman

$$(x + y + xy)z = xz + yz + xyz = x + y + xy$$

dir. Böylece $x + y + xy \leq z$ elde edilmiş olur. O halde $x + y + xy$, x ve y için en küçük ortak alt sınırdır.

(4) Bu, (2) ve (3) özelliklerini sağlayan herhangi bir sıralı kümede doğruluğu açıktır.

(5) A nın her x elemanı için $x \cup 0 = x$, $x \cap 0 = 0$, $x \cap 1 = x$ ve $x \cup 1 = 1$ dir. Bu, (1), (2) ve (3) özellikleri gerçekleyen herhangi bir sıralı kümede doğru olduğu açıktır.

(6) Bu özellik $k = 1$ durumu hariç, k üzerinde tümevarımla elde edilebilen, (2) ve (3) özelliklerinin basit bir genellemesidir.

Dikkatimizi şu olguya yoğunlaştıralım: $x_1 \cap x_2 \cap \dots \cap x_k$ gösterilimi yeni tanımlanmış bir nesneyi göstermek amacıyla kullanılan yeni bir notasyon değildir. Bu, $\cap$ işlemi

$$\left(\left(\dots \left((x_1 \cap x_2) \cap x_3 \right) \cap \dots x_{k-1} \right) \cap x_k \right)$$

ile tanımlandığında, A nın bir elemanını gösterir. $\cap$ işlemi ile ilgili olarak, (6) özelliği iki farklı durumu ileri sürer: Birincisi, $x_1, x_2, \dots, x_k$ elemanlarının en büyük ortak bir alt sınıra sahip olması; ve ikincisi ise, bu en büyük ortak alt sınırın

$$x_1 \cap x_2 \cap \dots \cap x_k$$

olmasıdır. Bu iki olgunun gerçekleşmesi oldukça kolaydır.

(7) A nın her bir x, y ve z elemanları için

$$\begin{aligned}
x \cap (y \cup z) &= x(y + z + yz) = xy + xz + xyz \\
&= xy + xz + xy.xz = (x \cap y) \cup (x \cap z)
\end{aligned}$$

dır. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
(x \cup y) \cap (x \cup z) &= (x + y + xy)(x + z + xz) \\
&= x^2 + xz + x^2z + yx + yz + yxz + x^2y + xyz + x^2yz \\
&= x + yz + xyz \\
&= x \cup (yz) = x \cup (y \cap z)
\end{aligned}$$

dır.

(8) Eğer böyle bir x' elemanı mevcut ise, o zaman bu eleman $xx' = 0$ ve $x + x' + xx' = 1$ bağıntılarını gerçekler. Bu durumda $x + x' = 1$ veya $x \cap x' = 0$ olur. Diğer taraftan, $x \cup (1 + x) = 1$ ve $x \cap (1 + x) = 0$ olduğunu gerçeklemek kolaydır.

Böylece x tümleyeninin, yani $1 + x$ in, sadece varlığını değil aynı zamanda tekliği de belirtilmiş oldu.

(9) Bu dönüşümün tersi de bire-bir ve örtendir çünkü her x için $1 + (1 + x) = x$ dir. Diğer taraftan, her x ve y elemanları için

$$(1 + x)(1 + y) = 1 + x + y + xy$$

dir. Bu elemanın $1 + x$ eşit olması için gerek ve yeter koşul $y + xy = 0$ ya da $xy = y$ olmasıdır. Bu şekilde $1 + x \leq 1 + y$ ancak ve ancak $y \leq x$ elde edilir. $\square$

Uyarı 3.1.4 Bir Boole cebirindeki sıralama bağıntısı çarpma ile uyumludur; yani a, b, c ve d elemanları $a \leq b$ ve $c \leq d$ leri gerçeklerse, o zaman $a \times c \leq b \times d$ olur (eğer $a \times b = a$ ve $c \times d = c$ ise, o zaman $a \times c \times b \times d = a \times c$ dir). Fakat toplamayla uyumlu değildir; örneğin $0 \leq 1$ iken, $0 + 1 \leq 1 + 1$ olamaz.

Lemma 3.1.5 A nın her x ve y elemanı için $x \leq 1 + y$ ancak ve ancak $xy = 0$ dir (Cori and Lascar, 2002).

Kanıt $x \leq 1 + y$, tanımdan $x(1 + y) = x$ ya da $x + xy = x$ anlamına gelir. Bu durumda, $xy = 0$ elde edilir. $\square$

3. 2 Sıralı Kümeler Olarak Boole Cebirleri

Aslında Teorem 3.1.3 daki (1), (2), (3), (7) ve (8) özellikleri, aşağıdaki teoremin de göstereceği gibi, Boole cebirlerini karakterize eder; ayrıca Boolean cebirini tanımlamak için ikinci bir yol sunar.

Teorem 3.2.1 $\langle A, \leq \rangle$ aşağıdaki özelliklere sahip sıralı bir küme olsun:

- (a) (0 ile gösterilen) bir en küçük elemanı ve (1 ile gösterilen) bir en büyük elemanı vardır.
- (b) Herhangi iki x ve y elemanı ($x \cup y$ ile gösterilen) bir en küçük üst sınıra ve ($x \cap y$ ile gösterilen) bir en büyük alt sınıra sahiptir.
- (c) $\cup$ ve $\cap$ işlemlerinin her biri diğeri üzerinde dağılmalıdır.
- (d) A daki her x elemanı için $x \cup x' = 1$ ve $x \cap x' = 0$ olacak şekilde A de bir en küçük x' elemanı vardır.

O zaman A bir $\langle A, +, \times, 0, 1 \rangle$ Boole cebiri yapısıyla verilebilir ve bu durumda A üzerinde verilen $\leq$ sıralaması Boole cebir yapısıyla ortak olan sıralamayla çakışır (yani, $x \leq y$ ancak ve ancak $xy = y$ dir) (Padmanabhan and Redeanu, 2009).

Teoremin ispatını birkaç aşamada verilebilir:

Uyarılar Teoremin (a) ve (b) özelliklerine sahip olan bir sıralı kümeye bir *kafes* denir. Eğer (c) özelliğine de sahipse, bir *dağılmalı kafes* olarak adlandırılır. (a), (b) ve (d) özellikleri sağlanırsa, bir *tümlemiş kafes* olarak ifade edilir. Bir x elemanının tümleyeni $x \cup x' = 1$ ve $x \cap x' = 0$ olacak şekilde tek bir x' elemanıdır. Bu tekliği kanıtlamak kolaydır:

Kanıt x in x' ve x'' gibi iki tane tümleyeninin olduğunu kabul edelim $y = (x \cap x') \cup x''$ elemanını göz önünde bulunduralım. Bir taraftan, $y, 0 \cup x''$ ve böylece x'' ne eşittir. Diğer taraftan, dağılma özelliğinden

$$y = (x \cup x'') \cap (x' \cup x'') = 1 \cap (x' \cup x'') = x' \cup x''$$

olur. Böylece $x'' = x' \cup x''$ ve buradan $x' \leq x''$ elde edilir. Bu argümanda x' ve x'' nün rollerini değiştirerek, $x'' \leq x'$ elde ederiz. O halde $x' = x''$ dır. $\square$

x elemanının tümleyeni x^c ile gösterilecektir. $1^c = 0$ ve $0^c = 1$ olduğu açıktır. Tümleyenin tekliğinin bir sonucu olarak A dan A içine $x \mapsto x^c$ dönüşümü kendi tersine eşit olan bir bijeksiyondur (her x için $(x^c)^c = x$ dır).

Ayrıca, daha önce de gözlemlediğimiz gibi, (a), (b), (c) ve (d) hipotezleri gerçeğlendiğinde Teorem 3.1.3 ün (4), (5) ve (6) özellikleri de gerçeğlenmiş olur.

Şimdi de Morgan yasalarını verelim:

Lemma 3.2.2 A nın herhangi iki x ve y elemanı için

$$(x \cap y)^c = x^c \cup y^c$$

ve

$$(x \cup y)^c = x^c \cap y^c$$

dır.

Kanıt İkinci yasa birincisinden x in x^c ve y nin y^c ile değiştirilmesi ve tümleyen özelliklerinin kullanılmasıyla elde edilir.

İlk yasayı kanıtlamak için $(x^c \cup y^c) \cup (x \cap y) = 1$ ve $(x^c \cup y^c) \cap (x \cap y) = 0$ olduğunu göstermeliyiz:

$$\begin{aligned} (x^c \cup y^c) \cup (x \cap y) &= (x^c \cup y^c \cup x) \cap (x^c \cup y^c \cup y) \\ &= (1 \cup y^c) \cap (x^c \cup 1) = 1 \cap 1 = 1; \\ (x^c \cup y^c) \cap (x \cap y) &= (x^c \cap x \cap y) \cup (y^c \cap x \cap y) \\ &= (0 \cap y) \cup (0 \cap x) = 0 \cup 0 = 0. \square \end{aligned}$$

De Morgan yasalarını, tümavarımı kullanarak, aşağıdaki gibi genelleştirebiliriz:

Lemma 3.2.3 Herhangi bir $k \geq 1$ tam sayısı ve $x_1, x_2, \dots, x_k \in A$ için

$$(x_1 \cap x_2 \cap \dots \cap x_k)^c = x_1^c \cup x_2^c \cup \dots \cup x_k^c,$$

$$(x_1 \cup x_2 \cup \dots \cup x_k)^c = x_1^c \cap x_2^c \cap \dots \cap x_k^c$$

dır.

Şimdi A kümesi üzerinde bir toplama $+$ ve bir çarpma $\times$ tanımlayacağız:

Her x ve y için

$$x \times y = x \cap y \text{ ve}$$

$$x + y = (x \cap y^c) \cup (x^c \cap y)$$

dır. $\cup$ in $\cap$ üzerinde dağılma özelliğini kullanarak $x + y$ için diğer bir gösterilimi elde edebiliriz:

$$\begin{aligned} x + y &= (x \cup x^c) \cap (x \cup y) \cap (y^c \cup x^c) \cap (y^c \cup y) \\ &= 1 \cap (x \cup y) \cap (x^c \cup y^c) \cap 1 \end{aligned}$$

ve buradan

$$x + y = (x \cup y) \cap (x^c \cup y^c)$$

elde edilir.

Şimdi $\langle A, +, \times, 0, 1 \rangle$ in bir Boole cebiri olduğunu kanıtlayacağız.

Kanıt

► ‘Her x için $x^2 = x$ ’ özelliği $(x \cap x = x)$ den elde edilir.

► $\langle A, +, 0 \rangle$ değişmeli bir gruptur:

- Değişme özelliği $\cap$ ve $\cup$ in değişmeliliğinden elde edilir.
- 0 toplama işleminin bir birim elemanıdır: A daki her x için

$$x + 0 = (x \cap 0^c) \cup (x^c \cap 0) = (x \cap 1) \cup 0 = x \cup 0 = x.$$

- A nın her x elemanının bir tersi vardır ve kendisine eşittir:

$$x + x = (x \cap x^c) \cup (x^c \cap x) = 0 \cup 0 = 0.$$

- Toplama birleşmelidir:

$$(x + y) + z = ([x + y] \cap z^c) \cup ([x + y]^c \cap z)$$

(+ nın tanımından)

$$\begin{aligned}
&= \left(\left[(x \cap y^c) \cup (x^c \cap y) \right] \cap z^c \right) \cup \left([x + y]^c \cap z \right) \\
&\quad (+ \text{ nın tanımından}) \\
&= \left(\left[(x \cap y^c) \cup (x^c \cap y) \right] \cap z^c \right) \cup \left(\left[(x \cup y) \cap (x^c \cup y^c) \right]^c \cap z \right) \\
&= \left(\left[(x \cap y^c) \cup (x^c \cap y) \right] \cap z^c \right) \cup \left(\left[(x \cup y)^c \cap (x^c \cup y^c)^c \right] \cap z \right) \\
&\quad (\text{de Morgan yasalarından}) \\
&= \left(\left[(x \cap y^c) \cup (x^c \cap y) \right] \cap z^c \right) \cup \left(\left[(x^c \cap y^c) \cup (x \cap y) \right] \cap z \right) \\
&\quad (\text{de Morgan yasalarından}) \\
&= \left[(x \cap y^c \cap z^c) \cup (x^c \cap y \cap z^c) \right] \cup \left[(x^c \cap y^c \cap z) \cup (x \cap y \cap z) \right] \\
&\quad (\cap, \cup \text{ üzerine dağılma}).
\end{aligned}$$

$\cup$ in birleşmeliliğini kullanarak,

$$(x + y) + z = (x \cap y^c \cap z^c) \cup (x^c \cap y \cap z^c) \cup (x^c \cap y^c \cap z) \cup (x \cap y \cap z)$$

elde ederiz. Birleşim ve kesişimin değişmeliliği x , y ve z üzerindeki tüm permütasyonlar için aynı sonucu verir. Özellikle,

$$(x + y) + z = (y + z) + x$$

dir, fakat toplama işlemi değişmeli olduğundan,

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

elde ederiz.

- $\times$ işlemi birleşmelidir ve **1** birim elemanıdır, bu $\cap$ işleminin özelliklerinden açıktır.
- Çarpmanın toplama üzerine dağılmalılığı benzer şekilde gösterilebilir.
- x , y ve z A nın elemanları olsun.

$$\begin{aligned}
xy + xz &= (x \cap y) + (x \cap z) \\
&= [(x \cap y) \cap (x \cap z)^c] \cup [(x \cap y)^c \cap (x \cap z)] \\
&= [(x \cap y) \cap (x^c \cup z^c)] \cup [(x^c \cup y^c) \cap (x \cap z)] \\
&= [(x \cap y \cap x^c) \cup (x \cap y \cap z^c)] \cup [(x^c \cap x \cap z) \cup (y^c \cap x \cap z)] \\
&= (x \cap y \cap z^c) \cup (x \cap y^c \cap z) \\
&= x \cap [(y \cap z^c) \cup (y^c \cap z)] \\
&= x \cap [y + z] \\
&= x(y + z).
\end{aligned}$$

O halde $\langle A, +, \times, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ bir Boole cebiridir. $\square$

$\ll$ bu yapıyla ilgili sıralamayı gösterebiliriz. A nın herhangi iki x, y elemanları için, $x \ll y$ olması için gerek ve yeter koşul $xy = x$, veya $x \cap y = x$, olsun. Ama bu son eşitliğin tam anlamı A üzerinde başlangıçta verilen $\leq$ sıralaması için x, y den küçük veya eşit olmasıdır. Bunu iki sıralama çakıştır.

Bu nedenle, bir Boole cebiri her elemanın karesi kendisine eşit olan keyfi bir halka veya bir tümleyenli, dağılmalı kafes yapısına sahip sıralı bir kümedir.

4. BİR BOOLE CEBİRİNDEKİ ATOMLAR

Tanım 4.1 Bir $\langle A, \leq, \cup, \cap, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ Boole cebirindeki bir a elemanının bir *atom* olarak adlandırılabilmesi için gerek ve yeter koşul sıfırdan farklı ve olması ve sıfırdan farklı kesin alt sınıra sahip olmamasıdır. Diğer bir deyişle, a bir atomdur ancak ve ancak $a \neq \mathbf{0}$ ve A daki her b elamanı için $b \leq a$ ise, o zaman ya $a = \mathbf{0}$ ya da $b = \mathbf{0}$ dır (Burris and Sankappanavar, 1981).

Örnek 4.2 Bir E kümesinin alt kümelerinin $\mathcal{P}(E)$ Boole cebirinde atomlar singletonlar (yani bir tek eleman içeren altkümeler) dır.

Örnek 4.3 Atomsuz Boole cebirleri vardır: P önermelerin değişkenlerinin kümesi sonsuz olduğunda, önermeler hesabındaki formüllerin denklik sınıflarının $\mathcal{F}/\sim$ Boole cebirleri bu duruma örnek teşkil eder.

Kanıt Bu Boole cebirindeki sıralama bağıntısı aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

Eğer $\mathcal{F}$ ve G iki formül ise, o zaman $\text{cl}(F) \leq \text{cl}(G)$ olması için gerek ve yeter şart $(F \Rightarrow G)$ formülünün bir totoloji olmasıdır.

$\mathcal{F}/\sim$ de atomların olmadığını kanıtlamak için, sıfırdan farklı her elemanın $\mathbf{0}$ dan kesin bir alt sınıra sahip olduğunu göstereceğiz. Bu nedenle $\text{cl}(F) \neq \mathbf{0}$ olacak şekilde bir F formülünü göz önünde bulunduralım. $\text{cl}(F) \neq \mathbf{0}$, $\neg F$ nin bir totoloji olmaması veya denk olarak F yi gerçekleyen P önerme değişkenleri için en az bir doğruluk değer atamasının olması anlamına gelir. Böyle bir dağılım seçelim ve bunu δ ile gösterelim. Ayrıca F formülünde geçmeyen bir X önermesi değişkeni seçelim. P sonsuz olduğu için bu durum söz konusu olabilir. G , $(F \wedge X)$ formülünü gösterebilir. $\vdash^* ((F \wedge X) \Rightarrow F)$ olduğu açıktır, böylece $\text{cl}(G) \leq \text{cl}(F)$ dir. Her $Y \in P$ için

$$\lambda(Y) = \begin{cases} \delta(Y) & \text{ise } Y \neq X \\ \mathbf{1} & \text{ise } Y = X \end{cases}$$

ile tanımlı λ doğruluk değer ataması F yi gerçekler çünkü X, F de geçmemektedir. Ayrıca X i ve dolayısıyla G yi gerçekler. O halde $\text{cl}(G) \neq 0$ dır. Diğer taraftan, her $Y \in P$ için

$$\mu(Y) = \begin{cases} \partial(Y) & \text{ise } Y \neq X \\ \mathbf{0} & \text{ise } Y = X \end{cases}$$

ile tanımlı μ doğruluk değer ataması F yi gerçekler fakat G yi gerçeklemez. Böylece $(F \Rightarrow G)$ formülünü de gerçeklemez. Bu nedenle $\text{cl}(F)$, $\text{cl}(G)$ için kesin bir alt sınırdır ve böylece sıfır olmayan kesin bir alt sınırdır. $\square$

Örnek 4.4 Örnek 3.4 de $\mathfrak{S}/\sim$ nin $\nleftrightarrow$ ve $\wedge$ işlemlerine göre bir Boole cebiri olduğu gösterildi. Şimdi bu Boole cebirindeki sıralama bağıntısını aşağıdaki gibi tanımlandığını gösterelim ve en büyük alt sınır, en küçük üst sınır ve tümleyen işlemlerinin nasıl tanımlandığını açıklayalım:

$\mathfrak{S}$ nin tüm F ve G formülleri için

$$\text{cl}(F) \leq \text{cl}(G) \Leftrightarrow \vdash^* (F \Rightarrow G)$$

dır.

Tüm F ve G formülleri için $\text{cl}(F) \leq \text{cl}(G)$ ancak ve ancak $\text{cl}(F) \wedge \text{cl}(G) = \text{cl}(F)$ dir. Elde edilen eşitlik $\text{cl}(F \wedge G) = \text{cl}(F)$ a denktir. Böylece $(F \wedge G) \sim \text{cl}(F)$ dir ve buradan $\vdash^* ((F \wedge G) \Leftrightarrow F)$ elde edilir. $((F \wedge G) \Leftrightarrow F)$ formülü $(F \Rightarrow G)$ ye mantıksal denktir. Buradan

$$\text{cl}(F) \leq \text{cl}(G) \Leftrightarrow \vdash^* (F \Rightarrow G)$$

elde edilir.

Bunun tam sıralama durumunda geçerli olmadığını gözlemleyelim: A , bir önermesel değişken ise, o zaman ya ne $\text{cl}(A) \leq \text{cl}(\neg A)$ ne de $\text{cl}(\neg A) \leq \text{cl}(A)$ olur çünkü $(A \Rightarrow \neg A)$ ve $(\neg A \Rightarrow A)$ formüllerinin hiçbirisi bir totoloji değildir.

$\leq$ sıralaması için en küçük elemanı çelişkilerin $\mathbf{0}$ sınıfı ve en büyük elemanı totolojilerin $\mathbf{1}$ sınıfıdır.

$\mathfrak{S}/\sim$ nin $x = \text{cl}(F)$ ve $y = \text{cl}(G)$ elemanları için

$$x \cap y = xy = x \wedge y = \text{cl}(F \wedge G)$$

ve

$$x^C = \mathbf{1} + x = \mathbf{1} \not\leftrightarrow x = \text{cl}(\neg F)$$

dır. De Morgan kurallarından,

$$x \cup y = (x^C \cap y^C)^C = \text{cl}(\neg(\neg F \wedge \neg G)) = \text{cl}(F \vee G) = x \vee y$$

elde edilir. Böylece en küçük üst sınır, en büyük alt sınır ve tümleyen işlemleri sırasıyla veyalama, evetleme ve değillemedir.

Tanım 4.5 Bir Boole cebiri *atomiktir* ancak ve ancak sıfırdan farklı her elemanın altında en az bir atom vardır.

Tanım 4.6 Her sonlu Boole cebiri atomiktir.

Kanıt $\langle A, \leq, \cup, \cap, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ sonlu bir Boole cebiri ve x , A nın sıfırdan farklı bir elemanı olsun. $m(x)$, A daki x in sıfırdan farklı kesin alt sınırlarının kümesini temsil etsin. $m(x)$ boş küme ise o zaman x bir atomdur. $m(x)$ boştan farklı ise, o zaman $m(x)$ sonlu olacağından elemanlarının en azından biri $\leq$ sıralamasında minimaldir. Yani $m(x)$ in hiç bir elemanı kesin olarak onun altında değildir. Böyle bir minimal elemanın x in altında olan A nın bir atomu olduğunu görmek kolaydır.

Örnek 4.7 Örnek 3.4 ve Örnek 4.4 ı tekrar ele alalım. P kümesi sonlu ise o zaman $\mathfrak{S}/\sim$ atomik olduğunu gösterelim:

P , $n \in \mathbb{N}^*$ olmak üzere sonlu $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ kümesi olsun. O zaman $\mathfrak{S}/\sim$ bölüm kümesi sonlu ve 2^{2^n} elemana sahiptir. Böylece, Teorem 4.6 dan, $\langle \mathfrak{S}/\sim, \not\leftrightarrow, \wedge, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ Boole cebiri atomiktir ve 2^n elemana sahiptir (bakınız: Teorem 5.1.11 ve Sonuç Teorem 5.1.12). Bu atomların $\bigwedge_{1 \leq k \leq n} \varepsilon_k A_k$ formüllerinin denklik sınıfları olduğunu göstereceğiz, burada $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ n -lileri $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}^n$ üzerinde değer alır:

Başlangıçtan beri ele alınan bu formüllerin ikişer ikişer mantıksal denk olmadıklarını ifade eden bu tür sınıfların sayısının 2^n olduğunu gözlemleyelim. Bu sınıfların atomlar olduğunu söyleyebilirsek, bu Boole cebirinin tüm atomlarını elde etmiş oluruz.

n -li bir $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n$ alalım ve $H = \bigwedge_{1 \leq k \leq n} \varepsilon_k A_k$ formülü olsun.

$\Delta(H) = \{\delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n}\}$ dir, böylece $\text{cl}(H) \neq \mathbf{0}$ dir. O halde aşağıdakiler gerçekleşecek şekilde bir F formülü vardır.

- $\text{cl}(F) \leq \text{cl}(H)$,
- ya $\Delta(F) = \{\delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n}\} = \Delta(H)$, ve buradan $\text{cl}(F) = \text{cl}(H)$; ya da $\Delta(F) = \emptyset$, ve bu durumda $\text{cl}(F) = \mathbf{0}$.

Böylece $\text{cl}(H)$, $\mathfrak{A}/\sim$ Boole cebirinin sınırdan farklı bir elemanının olduğunu kanıtladık. Bu elemanlar kendisi ve $\mathbf{0}$ dir. O halde bir atomdur.

Teorem 4.8 $\langle A, +, \times, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ (sonlu veya sonsuz) bir Boole cebiri olsun. O zaman A nın sıfırdan farklı her elemanı ve her $k \geq 2$ tamsayısı için aşağıdaki özellikler denktir:

- (1) a bir atomdur;
- (2) A daki her x elemanı için $a \leq x$ veya $a \leq \mathbf{1} + x$ dir;
- (3) A daki her bir $x_1, x_2, \dots, x_k$ elemanları için $a \leq x_1 \cup x_2 \cup \dots \cup x_k$ ise o zaman $a \leq x_1$ veya $a \leq x_2$ veya ... veya $a \leq x_k$ dir.

Kanıt Lemma 3.1.5 ve $\leq$ sıralamasının tanımını göz önünde bulundurarak, (2) yi, denk bir ifadeyle, yeniden ifade edebiliriz:

- (2') A daki her x elemanı için $ax = a$ veya $ax = \mathbf{0}$ dir.

Şimdi teoremi kanıtlayalım.

a , A nın sıfır olmayan bir elemanı ve $k \geq 2$ bir doğal sayı olsun.

- (1) $\Rightarrow$ (2'): A daki her x elemanı için $ax \leq x$ dir, böylece a bir atom olduğundan $ax = a$ veya $ax = \mathbf{0}$ dir.
- (2) $\Rightarrow$ (3): (2) yi kabul edelim ve A da $a \leq x_1 \cup x_2 \cup \dots \cup x_k$ olacak şekilde $x_1, x_2, \dots, x_k$ elemanlarını seçelim. Eğer $a \leq x_1$, $a \leq x_2$, ..., $a \leq x_k$ lerin hiçbiri doğru değilse, o zaman (2) den $a \leq \mathbf{1} + x_1$, $a \leq \mathbf{1} + x_2$, ..., $a \leq \mathbf{1} + x_k$ sonucu elde edilir; bu durumda $a, \mathbf{1} + x_1, \mathbf{1} + x_2, \dots, \mathbf{1} + x_k$ için ortak altsınır ve böylece

$\mathbf{1} + (x_1 \cup x_2 \cup \dots \cup x_k)$ en büyük alt sınırına ya eşit yada daha küçük olurdu. O zaman a elmanı hem $x_1 \cup x_2 \cup \dots \cup x_k$ hem de tümleyenine eşit yada daha küçük olurdu, ki bu a sıfırdan farklı olduğu için mümkün değildir. Böylece (3) ispatlanmış oldu.

- (3) $\Rightarrow$ (1): (3) ü kabul edelim. b, a için bir alt sınır olsun. $a \leq b \cup (\mathbf{1} + b) = \mathbf{1}$ olduğu açıktır. (3) de $x_1 = b$ ve $x_2 = x_3 = \dots = x_k = \mathbf{1} + b$ alarak $a \leq b$ veya $a \leq \mathbf{1} + b$ sonucuna ulaşırız. İlk durumda $b = a$ ve ikinci durumda $b = ab = \mathbf{0}$ elde ederiz (Lemma 3.1.5). Böylece a nın bir atom olduğu kanıtlanmış olur. $\square$

5. HOMOMORFİZMALAR, İZOMORFİZMALAR VE ALT CEBİRLER

5.1 Homomorfizmalar ve İzomorfizmalar

Boole cebirlerinin bir homomorfizması olarak genelde birimli halkaların homomorfizmasını tercih edeceğiz.

Tanım 5.1.1 $\mathcal{A} = \langle A, +, \times, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ ve $\mathcal{A}' = \langle A', +, \times, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ Boole cebirleri ve h , A dan A' içerisine bir dönüşüm olsun. h nin A dan A' içine *Boole cebirlerinin bir homomorfizması* olması için gerek ve yeter koşul A daki her x ve y elemanları için aşağıdaki bağıntıların gerçekleşmesidir:

$$\begin{aligned} h(x + y) &= h(x) + h(y), \\ h(x \times y) &= h(x) \times h(y), \\ h(\mathbf{1}) &= \mathbf{1} \end{aligned}$$

Olmasıdır (Sikorski, 1960).

Uyarı 5.1.2 $h(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ yukarıdaki tanımın birinci bağıntısından elde edilir.

Durum çarpımsal birim eleman için farklıdır: aşağıdaki örnekte görüleceği gibi üçüncü bağıntı ikinci bağıntının bir sonucu değildir. $A = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ve $A' = \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ doğal Boole cebirleri yapılarını ve A dan A' içine h birim dönüşümünü ele alalım. Yukarıdaki ilk iki bağıntının gerçekleştiğini göstermek kolaydır fakat üçüncüsü kolay değildir çünkü A daki çarpma için birim eleman $\mathbb{N}$ de iken A' deki $\mathbb{Z}$ dedir.

Uyarı 5.1.3 Burada tanımlanan homomorfizma gösterilimi birimli halkalar homomorfizmasının genel gösteriliminden başka bir şey değildir. (Bir Boole cebiri ve bir Boole cebiri olmayan birimli bir halka arasındaki birimli halkaların homomorfizması olabileceğini belirtelim.) Birimli halkaların keyfi homomorfizmaları için korunan özellikler Boole cebirleri içinde geçerli olacaktır: örneğin, Boole cebirlerinin iki homomorfizmasının bileşkesi Boole cebirlerinin bir homomorfizmasıdır.

Lemma 5.1.4 : $\mathcal{A} = \langle A, \leq, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ ve $\mathcal{A}' = \langle A', \leq, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ iki Boole cebiri ve h, A dan A' içine Boole cebirlerinin bir homomorfizması olsun. O zaman A nın her x ve y elemanı için,

$$\begin{aligned} h(x \cap y) &= h(x) \cap h(y), \\ h(x^c) &= (h(x))^c, \\ h(x \cup y) &= h(x) \cup h(y), \\ \text{eğer } x \leq y \text{ ise o zaman } h(x) &\leq h(y) \end{aligned}$$

dir.

Kanıt $\times$ ve $\cap$ işlemleri eş olduğu için ilk bağıntı homomorfizma tanımının bir sonucudur. İkinci bağıntı, $h(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ in ve h nin toplamayı korumasının bir sonucu olarak, $h(\mathbf{1} + x) = \mathbf{1} + h(x)$ şeklinde tekrar yazılabilir. Üçüncü bağıntı ise, de Morgan yasalarının uygulanmasıyla ilk iki bağıntıdan elde edilir. Son bağıntı, $xy = x$ ise o zaman $h(x)h(y) = h(x)$ biçiminde yeniden ifade edilebilir. Son bağıntı $h(xy) = h(x)h(y)$ olmasından dolayı doğrudur. $\square$

Teorem 5.1.5 : $\mathcal{A} = \langle A, \leq, \cup, \cap, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ ve $\mathcal{A}' = \langle A', \leq, \cup, \cap, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ iki Boole cebiri ve h, A dan A' içine bir fonksiyon olsun. h nin Boole cebirlerinin bir homomorfizması olması için gerek ve yeter şart A daki her bir x ve y elemanları için aşağıdaki bağıntıların gerçekleşmesidir:

$$\begin{aligned} h(x \cap y) &= h(x) \cap h(y), \\ h(x^c) &= (h(x))^c. \end{aligned}$$

Kanıt Lemmaya göre koşul gereklidir. Koşulun gerçekleştiğini kabul edelim. x ve y, A nın elemanları olsun. O zaman

$$\begin{aligned} h(xy) &= h(x \cap y) = h(x) \cap h(y) = h(x)h(y), \\ h(x + y) &= h((x \cap y^c) \cup (x^c \cap y)) = h\left(\left((x \cap y^c)^c \cap (x^c \cap y)^c\right)^c\right) \\ &= \left(h\left(\left(x \cap y^c\right)^c \cup \left(x^c \cap y\right)^c\right)\right)^c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(h \left(\left((x \cap y^c)^c \cap h \left((x^c \cap y)^c \right) \right) \right) \right)^c \\
&= \left(\left(h(x \cap y^c) \right)^c \cap \left(h(x^c \cap y) \right)^c \right)^c = h(x \cap y^c) \cup h(x^c \cap y) \\
&= h(x) + h(y) = \left(h(x) \cap h(y^c) \right) \cup \left(h(x^c) \cap h(y) \right) \\
&= \left(h(x) \cap (h(y))^c \right) \cup \left((h(x))^c \cap h(y) \right) \\
&= h(x) + h(y)
\end{aligned}$$

dır. Buradan $h(0) = 0$ ve böylece

$$h(1) = h(0^c) = (h(0))^c = 0^c = 1$$

elde edilir. Bu ise h nin bir homomorfizma olduğunu gösterir. $\square$

Uyarı 5.1.6 Önceki teoremin ifadesinin her yerinde $\cap$ işlemiyle $\cup$ işleminin yerini değiştirebileceğimiz açıktır.

Teorem 5.1.7 Bir *Boole cebirleri izomorfizması* biyektif olan bir Boole cebirleri homomorfizmasıdır.

Teorem 5.1.8 $\mathcal{A} = \langle A, \leq, 0, 1 \rangle$, $\mathcal{A}' = \langle A', \leq, 0, 1 \rangle$ iki Boole cebiri ve h , A dan A' içine örten bir dönüşüm olsun. h nin bir Boole cebirleri izomorfizması olması için gerekli ve yeterli şart

$$(*) \quad A \text{ nın her } x, y \text{ elemanları için, } x \leq y \Leftrightarrow h(x) \leq h(y)$$

olmasıdır.

Kanıt h nin bir izomorfizma olduğunu kabul edelim ve x, y , A nın elemanları olsun. $x \leq y$ ise o zaman, Lemma 3.2 den, $h(x) \leq h(y)$ dir. Eğer $h(x) \leq h(y)$ ise o zaman, $\leq$ nin tanımı ve h nin bir homomorfizma olmasından, $h(x) = h(x)h(y) = h(xy)$ dir. Fakat h biyektif olduğu için buradan $x = xy$ elde edilir ve bu $x \leq y$ anlamına gelir. O halde $(*)$ gerçekleşmiş oldu.

Tersini ispatlamak için $(*)$ ın geçerli olduğunu varsayalım. u ve v , $h(u) = h(v)$ olacak şekilde A nın iki elemanı olsun. $h(u) \leq h(v)$ ve $h(v) \leq h(u)$

dir, böylece $(*)$ dan $u \leq v$ ve $v \leq u$ elde edilir ve böylece $u = v$ olur. O halde h bire-birdir. x ve y , A nın keyfî elemanları olsun. $t = h(x) \cap h(y)$ diyelim. h bijeksiyon olduğu için A da $t = h(z)$ olacak şekilde bir tek z elemanı vardır. $h(z) \leq h(x)$ ve $h(z) \leq h(y)$ dir, böylece $(*)$ ın kullanımıyla $z \leq x$ ve $z \leq y$ ve buradan $z \leq x \cap y$ elde edilir. Fakat $x \cap y \leq x$ ve $x \cap y \leq y$ olduğundan, $(*)$ ı uygulayarak $h(x \cap y) \leq h(x)$ ve $h(x \cap y) \leq h(y)$ elde ederiz, bu da

$$h(x \cap y) \leq h(x) \cap h(y) = h(z)$$

gerektirir. Bir kez daha, $(*)$ ı uygulayarak, $x \cap y \leq z$ elde ederiz ve bütün bunları bir araya getirirsek $z = x \cap y$ elde ederiz. Bu da

$$h(x \cap y) = h(x) \cap h(y)$$

anlamına gelir. Bir önceki argümanda $\cap$ ile $\cup$ ve $\leq$ ile $\geq$ leri yer değiştirerek

$$h(x \cup y) = h(x) \cup h(y)$$

sonucuna ulaşılır.

u , A' nün keyfî bir elemanı ve t , h altındaki A daki tek ön imajı olsun. A da, $0 \leq t$ ve $t \leq 1$ dir. $(*)$ ı uygulayarak, A' de, $h(0) \leq u$ ve $u \leq h(1)$ elde ederiz. Bu ise $h(0)$ ve $h(1)$, sırasıyla, A' nün en küçük ve en büyük elemanları olduğunu; diğer bir deyişle, $h(0) = 0$ ve $h(1) = 1$ olduğunu gösterir.

Böylece A daki her x elemanı için

$$h(x^c) \cap h(x) = h(x^c \cap x) = h(0) = 0$$

ve

$$h(x^c) \cup h(x) = h(x^c \cup x) = h(1) = 1$$

dır. Bu nedenle $h(x^c)$, $h(x)$ in tümleyeni, diğer bir deyişle

$$(h(x))^c = h(x^c)$$

dir.

Teorem 5.1.5 i kullanarak, h nin Boole cebirlerinin bir homomorfizması olduğu sonucuna ulaşılır. $\square$

Örnek 5.1.9 $\mathcal{A} = \langle A, +, \times, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ ve $\mathcal{B} = \langle B, +, \times, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ iki Boole cebiri ve f , $\mathcal{A}$ dan $\mathcal{B}$ ye Boole cebirlerinin bir izomorfizması olsun. Bir $a \in A$ elemanının bir atom olması için gerek ve yeter koşulün $f(a)$ nın $\mathcal{B}$ nin bir atomu olmasıdır.

Kanıt

Gerek koşul: $a \in A$, $\mathcal{A}$ nın bir atomu ve $y \in B$, $\mathcal{B}$ de $f(a)$ dan daha küçük veya eşit olan bir elemanı olsun. f bir izomorfizma olduğundan, $y = f(x)$ olacak şekilde tek bir $x \in A$ elemanı vardır ve bu eleman, x , Teorem 5.1.8 den dolayı, $\mathbf{0} \leq f(x) \leq f(a)$ olduğundan $\mathbf{0} \leq x \leq a$ özelliğine sahiptir. Fakat a bir atom idi; bu nedenle ya $x = \mathbf{0}$ (ve dolayısıyla $y = f(x) = \mathbf{0}$) ya da $x = a$ (ve dolayısıyla $y = f(x) = f(a)$) dır. Buradan $f(a)$ dan daha küçük veya eşit olan tek eleman $\mathbf{0}$ ve $f(a)$ olur. a sıfırdan farklı, $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ve f bire-bir olduğundan, $f(a)$ nın sıfırdan farklı olduğu elde edilir. O halde $f(a)$, $\mathcal{B}$ nin bir atomudur.

Yeter koşul: $f(a)$, $\mathcal{B}$ nin bir atomu olsun. f^{-1} , $\mathcal{B}$ den $\mathcal{A}$ ya bir izomorfizma olduğundan, $a = f^{-1}(f(a))$ $\mathcal{A}$ nın bir atomudur. $\square$

Sonuç Teorem 5.1.10 Boole cebirlerinin izomorfizmalarının bileşkesine ilave olarak Boole cebirlerinin bir izomorfizmasının tersi de Boole cebirlerinin izomorfizmasıdır.

Kanıt $\mathcal{A} = \langle A, +, \times, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$, $\mathcal{B} = \langle B, +, \times, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ ve $\mathcal{C} = \langle C, +, \times, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ Boole cebirleri olsun. ϕ , $\mathcal{A}$ dan $\mathcal{B}$ üzerine Boole cebirlerinin bir izomorfizması olsun ve ψ , $\mathcal{B}$ den $\mathcal{C}$ üzerine Boole cebirlerinin bir izomorfizması olsun. ϕ^{-1} ve $\psi \circ \phi$ dönüşümlerinin örten oldukları açıktır. B nin her u ve v elemanları için, $\phi^{-1}(u) \leq \phi^{-1}(v)$ eşitsizliği $\phi(\phi^{-1}(u)) \leq \phi(\phi^{-1}(v))$ ya, yani $u \leq v$ ye, denktir. Diğer taraftan, A nın her bir x ve y elemanları için, $x \leq y$ ancak ve ancak $\phi(x) \leq \phi(y)$, ve $\phi(x) \leq \phi(y)$ ancak ve ancak $\psi(\phi(x)) \leq \psi(\phi(y))$ dir. Önceki teoremi göz önünde bulundurarak, $\psi \circ \phi$ ve ϕ^{-1} dönüşümlerinin, sırasıyla, $\mathcal{B}$ den $\mathcal{A}$ üzerine ve $\mathcal{A}$ dan $\mathcal{C}$ üzerine Boole cebirlerinin izomorfizmaları olduğu sonucuna ulaşılır. $\square$

Teorem 5.1.11 Her sonlu Boole cebiri bir kümenin alt kümelerinin Boole cebirine izomorftur.

Kanıt $\mathcal{A} = \langle A, +, \times, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ sonlu bir Boole cebiri ve E atomlarının kümesi olsun. E kümesi boştan farklıdır çünkü sıfırdan farklı $\mathbf{1}$ elemanına eşit yada daha küçük olan en azından bir atom vardır (Teorem 4.6). Şimdi $\mathcal{A}$ nın, E nin alt kümelerinin cebirine izomorf olduğunu gösterelim.

Bunu gerçeklemek için, $\mathcal{A}$ dan $\mathcal{P}(E)$ üzerine, $\mathcal{A}$ nın her bir x elemanını x in altında olan atomların kümesine eşleyen, h fonksiyonunu göz önünde bulunduralım:

$$\text{Her } x \in A \text{ için, } h(x) = \{a \in E : a \leq x\}.$$

h sürjektiftir: Gerçekten, ilk olarak $\mathbf{0}$ in altında hiç bir atom olmadığı için $h(\mathbf{0}) = \emptyset$ dır. $x = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, E nin boştan farklı bir alt kümesi ve $M_x = a_1 \cup a_2 \cup \dots \cup a_k$ olsun. $h(M_x) = X$ olduğunu iddia edelim: $X \subseteq h(M_x)$ kapsaması h tanımından hemen elde edilir (X in her elemanı M_x in altında olan bir atomdur). Ters kapsama Teorem 4.8 kullanılarak gösterilebilir: Eğer a , $h(M_x)$ in bir elemanı ise, yani $M_x = a_1 \cup a_2 \cup \dots \cup a_k$ altında olan bir atom ise, o zaman en azından bir i indeksi için $a \leq a_i$ dır (bu $k = 1$ için açıktır ve $k \geq 2$ için ise teoremin (3) şartıdır), fakat a ve a_i atomlar olduklarından bu $a = a_i$ yi gerektirir, böylece $a \in X$ olur.

A ın her x ve y elemanları için, $x \leq y$ ise $h(x) \subseteq h(y)$ dir: gerçekten $x \leq y$ ise x in altında olan her atom y nin altında olan bir atomdur.

A nın her x ve y elemanları için, $x \leq y$ ise $h(x) \subseteq h(y)$ dir: gerçekten x , y ye eşit yada daha küçük değil ise, o zaman Lemma 3.1.5 den $x(\mathbf{1} + y) \neq \mathbf{0}$ olur. A sonlu olduğundan, atomiktir (Teorem 4.6). Bu nedenle, $a \leq x(\mathbf{1} + y)$ olacak şekilde E nin bir a atomu bulunabilir. Bu a atomu hem x in hemde $\mathbf{1} + y$ nin altındadır; sıfırdan farklı olduğu için y nin altında olamaz. Böylece elimizde $a \in h(x)$ ve $a \notin h(y)$ olur, bu ise $h(x)$ in $h(y)$ de içerilmediğini gösterir.

Şimdi Teorem 5.1.8 sayesinde h nin A dan $\mathcal{P}(E)$ üzerine Boole cebirlerinin bir izomorfizması olduğu sonuçlandırılabilir. $\square$

Sonuç Teorem 5.1.12 Herhangi bir sonlu Boole cebirinin kardinalitesi 2 nin bir kuvvetidir.

Kanıt Eğer E sonlu kümesi n kardinaliteye sahip ise o zaman alt kümelerinin kümesi $\mathcal{P}(E)$, 2^n kardinaliteye sahiptir. $\square$

Örnek 5.1.13 Bir $\langle A, +, \times, 0, 1 \rangle$ Boole cebirine *tam* (complete) denir ancak ve ancak A nın boştan farklı her alt kümesinin bir en büyük alt sınırı vardır.

(a) Bir Boole cebirinin tam olması için gerek ve yeter koşul boştan farklı her alt kümesinin en az bir üst sınıra sahip olmasıdır.

Kanıt $\langle A, +, \times, 0, 1 \rangle$ bir Boole cebiri olsun. Bu Boole cebirinin tam olduğunu kabul edelim ve A nın boştan farklı bir X alt kümesini göz önünde bulunduralım. $Y = \{x \in A : x^C \in X\}$ olsun. Y nin A nın boştan farklı bir alt kümesi olduğu açıktır. b , Y nin en büyük alt sınırını gösterebiliriz. X in en küçük üst sınırının $a = b^C$ olduğunu göstermek kolaydır. Diğer taraftan, her $x \in X$ için $a \leq x^C$ ve böylece $x \leq b^C = a$ dır ve a , X için bir üst sınırdır. Öte yandan, m X in bir üst sınırı ise, o zaman m^C , Y nin bir alt sınırındır, buradan $m^C \leq b$ ve $a = b^C \leq m$ elde edilir, bu ise a nın X in üst sınırlarının en küçüğüdür.

Yukarıdaki kanıtta alt ve üst kelimelerinin yerlerini ve eşitsizliğin yönünü değiştirdiğimizde A nın boştan farklı her alt kümesi bir en büyük üst sınıra sahip ise o zaman Boole cebirinin tam olduğunu ispatlamış oluruz.

(b) Bir tam Boole cebirine izomorf olan bir Boole cebiri tamdır.

Kanıt $\mathcal{A} = \langle A, +, \times, 0, 1 \rangle$ ve $\mathcal{B} = \langle B, +, \times, 0, 1 \rangle$ iki Boole cebiri ve f , $\mathcal{A}$ dan $\mathcal{B}$ üzerine Boole cebirlerinin bir izomorfizması olsun. $\mathcal{A}$ nın tam olduğunu kabul edelim ve $\mathcal{B}$ nin tam olduğunu gösterelim. B , Y nin boştan farklı bir alt kümesi ve X , f altında ön görüntüsünü gösterebiliriz. f bir bijeksiyon olduğundan X , A

nın boştan farklı bir alt kümesidir. a , (hipotezden mevcut) X in en büyük alt sınırı ise, o zaman $f(a)$ nın Y nin en büyük alt sınırı olduğunu gerçeklemek kolaydır.

(c) Bir kümenin alt kümelerinin Boole cebiri tamdır.

Kanıt E bir küme ve X , $\mathcal{P}(E)$ nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. X nin elemanlarının kesişimi, $G = \bigcap_{Z \in X} Z$ kümesi, X in en büyük alt sınırıdır.

(d) Bir Boole cebirinin, bir kümenin alt kümelerinin Boole cebirine izomorf olması için gerek ve yeter koşul atomik ve tam olmasıdır.

Kanıt Bir kümenin alt kümelerinin Boole cebiri atomiktir ve (c) den dolayı tamdır. O halde bir kümenin alt kümelerinin bir Boole cebirine izomorf olan her Boole cebiri atomik ve tamdır.

Şimdi tersini ele alalım. $\mathcal{A} = \langle A, +, \times, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ atomik ve tam olan bir Boole cebiri olsun. Atomların kümesini E ile gösterelim. $\varphi(x) = \{a \in E : a \leq x\}$ kümesini temsil etsin.

φ nin örten olduğunu gösterelim. X , E nin bir alt kümesi olsun. $X = \emptyset$ ise, o zaman $X = \varphi(\mathbf{0})$ dır. Eğer $X \neq \emptyset$ ise, o zaman M ile göstereceğimiz bir en küçük üst sınırı vardır. X in her elemanı M altında bir atomdur, buradan $X \subseteq \varphi(M)$ elde edilir.

b , X e ait olmayan bir atom ise, o zaman X deki her x elemanı için $x \leq b^c$ dır. Böylece $M \leq b^c$ elde edilir ve buradan b , M nin altında kalmaz. O halde M nin altındaki her atom X in bir elemanı, yani $\varphi(M) \subseteq X$ dir. Buradan $X = \varphi(M)$ ve φ nin örten olduğu sonucu elde edilir.

A nın her x ve y elemanı için $x \leq y$ ise, o zaman $\varphi(x) \subseteq \varphi(y)$ dir çünkü x in altındaki herhangi bir atom y nin altındaki herhangi bir atomdur.

A nın her x ve y elemanı için $\varphi(x) \subseteq \varphi(y)$ ise, o zaman $x \leq y$ dir, gerçekten x, y nin altında değilse, o zaman $xy^c \neq \mathbf{0}$ dır (Lemma 3.1.5: A atomik olduğundan, $a \leq xy^c$ olacak şekilde bir $a \in E$ atomu bulabiliriz; burada $a \leq xy^c$,

$a \leq x$ ve $a \leq y^c$ anlamındadır. Fakat a atomu aynı zamanda y ve y^c nin altında kalır. O halde $a \in \varphi(x)$ ve $a \notin \varphi(y)$ den $\varphi(x) \not\subseteq \varphi(y)$ olur).

Teorem 5.1.8 den, φ nin A dan $\mathcal{P}(E)$ üzerine Boole cebirlerine izomorf olduğu sonucunu elde ederiz. Böylece atomik ve tam olan her Boole cebiri bir kümenin alt kümelerinin Boole cebirine izomorf olur. Her sonlu Boole cebiri atomik ve tam olduğundan, Teorem 5.1.11 kanıtımızın bir sonucudur. $\square$

5. 2 Boole Alt Cebirleri

Tanım 5.2.1 $\mathcal{A} = \langle A, +, \times, 0, 1 \rangle$ bir Boole cebiri olsun. A nın bir B alt kümesi A nın bir *Boole alt cebirini* oluşturur ancak ve ancak B , 0 ve 1 elemanlarını içerir ve $x \in B$ ve $y \in B$ ise o zaman $x + y \in B$ ve $xy \in B$ dir, yani $+$ ve $\times$ işlemleri altında kapalıdır (Donalt and Bonnet, 1989).

$\mathcal{A}$ nın bir Boole alt cebiri böylece 1 elemanını içeren $\mathcal{A}$ nın bir alt halkasıdır. Bu fark gereklidir: birimli bir halkada, bir alt halkanın kendisi tam halkanın birim elemanını içermeyen birimli bir halka olabilir; bu durumda, çarpma için birim elemanın rolü başka bir eleman tarafından gerçekleşir. $\langle \mathcal{P}(\mathbb{Z}), \Delta, \cap, \emptyset, \mathbb{Z} \rangle$ halkasını tekrar inceleyelim: $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, Δ ve $\cap$ işlemleri altında kapalı ve $\emptyset$ içeren bir alt kümedir; bu nedenle $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ nin bir alt halkasıdır. $\mathbb{Z} \notin \mathcal{P}(\mathbb{N})$ olduğu açıktır. Bununla birlikte $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ halkası için birim elemandır. Böylece $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ Boole halkası $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ nin bir alt halkası olan birimli bir halkadır fakat birimli bir halka olarak $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ nin bir alt yapısı değildir: Bu sebepten dolayı $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ nin bir Boole alt cebir değildir.

Teorem 5.2.2 $\mathcal{A} = \langle A, +, \times, 0, 1 \rangle$ bir Boole cebiri ve B , A nın bir alt kümesi olsun. B nin $\mathcal{A}$ nın bir Boole alt cebiri olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{A}' = \langle A', +', \times', 0', 1' \rangle$ nın bir Boole cebiri ve h nin $\mathcal{A}'$ den A içine, h dönüşümünün imajı B nin alt kümesi olacak şekilde bir Boole cebirlerinin halkası olmasıdır.

Kanıt

Gerek koşul: $A' = B$, $+' = +$, $\times' = \times$, $\mathbf{0}' = \mathbf{0}$, $\mathbf{1}' = \mathbf{1}$ ve h yi B den A içine birim fonksiyon olarak alalım. h , imajı B olan Boole cebirlerinin bir homomorfizmasının olduğunu doğrulamak kolaydır.

Yeter koşul: $\mathcal{A}'$ seçelim ve h ı gösterildiği gibi belirleyelim. $h(\mathbf{0}') = \mathbf{0}$ dir, böylece $\mathbf{0} \in B$ ve $h(\mathbf{1}') = \mathbf{1}$ dir, bu yüzden $\mathbf{1} \in B$ olur. Ayrıca x ve y , B nin elemanları ise o zaman $\mathcal{A}'$ de $x = h(x')$ ve $y = h(y')$ olacak şekilde x' ve y' elemanları seçebiliriz. O zaman

$$x + y = h(x') + h(y') = h(x' + y'),$$

böylece $x + y \in \text{Im}(h) = B$ dir; ve $xy = h(x')h(y') = h(x'y')$ olup, $xy \in \text{Im}(h) = B$ dir. O halde B , $\mathcal{A}$ nın bir Boole alt cebiridir. $\square$

Teorem 5.2.3 Bir $\mathcal{A} = \langle A, +, \times, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ Boole cebirinde, B alt kümesinin bir Boole alt cebiri olabilmesi için gerek ve yeter koşul B nin $\mathbf{0}$ içermesi ve $x \mapsto x^c$ ve $(x, y) \mapsto x \cap y$ işlemleri altında kapalı olmasıdır (Whitesitt, 1995).

Kanıt

Gerek koşul: $x^c = \mathbf{1} + x$ ve $x \cap y = xy$ olduğu için ve B , $\mathbf{0}$ ve $\mathbf{1}$ i içerdği ve $+$ ve $\times$ altında kapalı olması gerektiği için açıktır.

Gerek koşul: A daki her x ve y içine $x \cup y = (x^c \cap y^c)^c$ dir. Bu nedenle B nin tümleyen ve $\cap$ altındaki kapanışı $\cup$ altındaki kapanışını garanti eder. Ayrıca $\mathbf{1}^c = \mathbf{0}$ B ye ait olmalıdır. $+$ ve $\times$ işlemleri $\cup, \cap$ ve tümleyen yardımıyla tanımlanabilir olduğundan B nin $+$ ve $\times$ altında kapalı olduğu ve $B = \langle B, +, \times, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$, $\mathcal{A}$ nın bir Boole alt cebiri olduğu sonucuna ulaşılabilir. $\square$

Örnek 5.2.4 E sonsuz bir küme ve $A = \mathcal{P}(E)$, tüm alt kümelerinin kümesi ve B , E nin sonlu ya da tümleyeni sonlu olan alt kümelerinden oluşan A nın alt kümesi olsun. Önceki teoremi kullanarak, B nin E nin alt kümelerinin Boole cebirinin bir Boole alt cebiri olduğunu göstereceğiz.

Kanıt Tümleyeni sonlu olan E nin bir alt kümesini cofinite olarak adlandıracağız. E nin sonlu bir alt kümesi olan boş küme B ye aittir. B nin tümleyen altında kapalı olduğu açıktır: E nin sonlu bir alt kümesinin tümleyeni bir cofinite alt kümedir ve bir cofinite kümenin tümleyeni sonludur. Ayrıca, B (bu örnekte, küme-teorik kesişim) $\cap$ altında kapalıdır. Gerçekten, E nin herhangi bir alt kümesi ile E nin sonlu bir alt kümesinin kesişimi E nin sonlu bir alt kümesidir; E nin iki cofinite alt kümelerinin kesişimine gelince, bu da E nin bir cofinite sonlu alt kümesidir. Bunu görmek için $U \subseteq E$ ve $V \subseteq E$ lerin cofinite olduğunu varsayalım; bu $E - U$ ve $E - V$ lerin sonlu olması anlamına gelir ve böylece $(E - U) \cup (E - V)$ sonludur, bu birleşim $E - (U \cap V)$ anlamına gelir, o halde $U \cap V$ nin cofinite olduğunu ifade eder. $\square$

Örnek 5.2.5 X bir topolojik uzay ve $\mathcal{B}(X)$ de X üzerindeki topolojide hem açık hem kapalı olan X in alt kümelerinden oluşan $\mathcal{P}(X)$ in alt kümesi olsun. Bu $\mathcal{B}(X)$ kümesi X in alt kümelerinin Boole cebirinin bir Boole alt cebiridir.

Kanıt İlk olarak, (0) boş kümesi ve $X(1)$ tam uzayı doğal olarak clopen kümelerdir. Daha sonra bir clopen kümenin tümleyeni clopen ve iki clopen kümenin kesişimi clopendir. Böylece Teorem 5.2.3 den istediğimiz sonuca ulaşılır. $\square$

$\mathcal{B}(X)$ Boole cebirleri $\{0,1\}$ e indirgenebilir. $\mathcal{B}(X)$, $\mathcal{P}(X)$ ile çıkarılır.

Şimdi Boole cebirleri homomorfizmalarına örnekler verelim:

Örnek 5.2.6 P değişkenler kümesinden inşa edilen önermeler hesabının mantıksal denk formüllerinin denklik sınıflarının Boole cebiri $\mathcal{F}/\sim$ yı göz önünde bulunduralım. P üzerindeki bir δ doğruluk değeri atamasını seçelim. $\bar{\delta}$ bütün formüllerin $\mathcal{F}$ kümesi için δ nın genişlemesini gösterebilir. $\mathcal{F}/\sim$ dan $\{0,1\}$ içine bir h_δ dönüşümünü, her $\mathcal{F}$ formülü için,

$$h_\delta(\text{cl}(F)) = \bar{\delta}(F)$$

ile tanımlayalım.

$\bar{\delta}(F)$ verilen bir denklik sınıfındaki tüm formüller üzerine aynı değeri kabul ettikleri için bu tanım yasalır.

Bu dönüşüm, h_δ , $\mathcal{F}/\sim$ dan $\{0,1\}$ üzerine Boole cebirlerinin bir homomorfizmasıdır. Teorem 5.1.5 den ve $\mathcal{F}/\sim$ Boole cebiri için işlemlerin tanımından, $\mathcal{F}$ deki tüm F ve G formülleri için

$$\begin{aligned} h_\delta(\text{cl}(F \wedge G)) &= h_\delta(\text{cl}(F)) h_\delta(\text{cl}(G)), \\ h_\delta(\text{cl}(\neg F)) &= 1 - h_\delta(\text{cl}(F)) \end{aligned}$$

dir.

Şimdi bu bağıntılar, $\bar{\delta}$ tanımıyla doğrulanan, aşağıdaki bağıntılara denktirler:

$$\begin{aligned} \bar{\delta}(F \wedge G) &= \bar{\delta}(F) \bar{\delta}(G), \\ \bar{\delta}(\neg F) &= 1 - \bar{\delta}(F). \end{aligned}$$

Bunlarda $\bar{\delta}$ tanımıyla doğrulanır.

Örnek 5.2.7 $\mathcal{A} = \langle A, +, \times, 0, 1 \rangle$ bir Boole cebiri ve a bu cebirde bir atom olsun. A dan $\{0,1\}$ üzerine bir h_a fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$h_a = \begin{cases} 1 & \text{eğer } x \in A \text{ ve } a \leq x \\ 0 & \text{eğer } x \in A \text{ ve } a \leq 1+x \end{cases}$$

h_a nın $\mathcal{A}$ dan $\{0,1\}$ üzerine Boole cebirlerinin bir homomorfizması olduğunu ispatlayalım:

Bunu kanıtlamak için, Teorem 5.1.5 i kullanalım: x ve y , A nın iki elemanı olsun. $h_a(x \wedge y) = 1$ olması için gerek ve yeter koşul $a \leq x \cap y$ olmasıdır; fakat bu, en büyük alt sınır tanımına göre, $a \leq x$ ve $a \leq y$ ye denktir ve böylece $h_a(x) = 1$ ve $h_a(y) = 1$ elde edilir. Buda $h_a(x) \cap h_a(y) = 1$ elde etmek için gerek ve yeterli koşuldur. Buradan

$$h_a(x \cap y) = h_a(x) \cap h_a(y)$$

elde edilir.

Ayrıca, $h_a(x^c) = 1$ ancak ve ancak $a \leq x^c$, yani $h_a(x) = 0$ a denk olan $a \leq 1+x$ dir. h_a , 0 veya 1 değerlerini varsaydığı için $h_a(x^c) = (h_a(x))^c$ dir.

Örnek 5.2.8 $\mathcal{A} = \langle A, +, \times, 0, 1 \rangle$ bir Boole cebiri olsun. Her $a \in A$ elemanı için

$$B = \{x \in A : x \geq a \text{ veya } x \leq 1+a\}$$

kümesi $\mathcal{A}$ nın bir Boole alt cebiridir ve $\mathcal{A}$ tam ise B bir tam Boole cebiridir.

Kanıt Teorem 5.2.3 ü uygulayalım. $0 \leq 1+a$ olduğuna göre $0 \in A$ dir. $x \in B$ ise o zaman ya $x \geq a$ ve buradan $x^c \leq 1+a$, ya da $x \leq 1+a$ ve buradan $x^c \geq a$ olur; bu nedenle her iki durumda da $x^c \in B$ dir. Sonuç olarak, x ve y , B nin iki elemanı ve bunlardan en az biri $1+a$ nın altında ise o zaman en büyük alt sınırları $x \cap y$ dir; aksi halde $x \geq a$ ve $y \geq a$, buradan $x \cap y \geq a$ olur. O halde, tüm durumlarda, $x \cap y \in B$ dir.

$\mathcal{A}$ nın tam olduğunu kabul edelim ve B nin boştan farklı bir X altkümesini göz önünde bulunduralım. $m \in B$ olduğunu gösterelim. Bunun için şu gözlemde bulunalım: X in elemanlarının en az birinin $1+a$ nın altında ise o zaman $m \leq 1+a$ olur; aksi halde, her $x \in X$ elemanı için $x \geq a$ ve dolayısıyla a , X in altında, böylece m nin altında olur. Her durumda $m \in B$ dir. O halde B Boole alt cebiri tamdır. $\square$

6. İDEALLAR VE SÜZGEÇLER

6.1 İdeallerin Özellikleri

Burada ‘ideal’, ‘öz ideal’ anlamına gelir.

Teorem 6.1.1 $\mathcal{A} = \langle A, +, \times, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ bir Boole cebiri ve I , A ’nın bir alt kümesi olsun.

I ’nin bir ideal olabilmesi için aşağıdaki üç koşulun gerçekleşmesi gerekir:

- (i) $\mathbf{0} \in I$ ve $\mathbf{1} \notin I$;
- (ii) Her $x, y \in I$ için $x \cup y \in I$;
- (iii) Her $x \in I$ ve her $y \in A$ için, $y \leq x$ ise o zaman $y \in I$ dir (Goodstein, 2007).

Kanıt İlk olarak I ’nin bir ideal olduğunu varsayalım. O zaman özellikle I , $\langle A, +, \mathbf{0} \rangle$ grubunun bir alt grubudur, böylece $\mathbf{0} \in I$ dir. Eğer $\mathbf{1}$, I ’de olsaydı, o zaman I tam halka olurdu. Bu durumu istisna tuttuk. Böylece (i) doğrulanmış olur. Eğer x ve y , I ’de ise, o zaman x ve y ’nin xy çarpımı da I ’dadır. Sonuç olarak, $x + y + xy = x \cup y$ dir. Böylece (ii) gerçekleşmiş oldu. Son olarak (iii) kanıtlayalım: eğer $x \in I$ ve $y \in A$ ise, $xy \in I$ ve $y \leq x$ ise o zaman $xy = y$ dir. O halde $y \in I$ dir.

Tersine, (i), (ii), (iii) nin doğru olduğunu varsayalım. I ’nin $\mathcal{A}$ ’da bir ideal olduğunu gösterelim. Eğer $x \in I$ ve $y \in I$ ise, (ii) den $x \cup y \in I$ olur, fakat $x + y \leq x \cup y$ ve $x + y = x - y$ olduğu için, (iii) ü kullanarak $x - y \in I$ sonucuna ulaşılır. $\mathbf{0} \in I$ olduğu için $\langle I, +, \mathbf{0} \rangle$, $\langle A, +, \mathbf{0} \rangle$ ’nin bir alt grubu dur. Ayrıca $x \in I$ ve $y \in A$ ise $xy \leq x$ olduğundan (iii) yardımıyla $xy \in I$ sonucuna ulaşılır. Bu nedenle I kümesi $\mathcal{A}$ ’da bir ideal olur ($\mathbf{1} \notin I$ olduğu için $I \neq A$ dir).□

Sonuç Teoremi 6.1.2 Eğer I , bir $\mathcal{A} = \langle A, +, \times, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ Boole cebirinde bir ideal ise, o zaman hem $x \in I$ hem de $\mathbf{1} + x \in I$ koşullarını sağlayan A ’ içinde hiçbir x elemanı yoktur.

Kanıt Eğer I ideali x ve $1+x$ leri içerirse, o zaman I ideali (teoremin (ii) özelliğinden) $x \cup (1+x) = 1$ elemanını da içerecekti. Fakat bu mümkün değildir çünkü ((i) özelliğinden) $1 \notin I$ dir.*

Sonuç Teoremi 6.1.3 $\mathcal{A} = \langle A, +, \times, 0, 1 \rangle$ bir Boole halkası ve $I, \mathcal{A}$ da bir ideal olsun. Herhangi bir $k \geq 1$ tamsayısı ve I daki herhangi $x_1, x_2, \dots, x_k$ elemanları için $x_1 \cup x_2 \cup \dots \cup x_k$ en küçük üst sınırı I ya aittir.

Kanıt Bu teoremin (ii) özelliğinin bir genellemesidir; ispatı k tamsayısı üzerinde tümevarım ile kolayca elde edilir. $\square$

Örnek 6.1.4

(1) E sonsuz bir küme ise, o zaman E nin sonlu alt kümelerinin $\mathcal{P}_f(E)$ kümesi $\mathcal{P}(E)$ Boole cebirinde bir idealdir. Teorem 6.1.1 in (i), (ii), (iii) şartlarını gerçeklemek kolaydır: $\emptyset, E$ nin sonlu bir alt kümesi iken E nin kendisi değildir, E nin iki sonlu alt kümelerinin birleşimi E nin sonlu bir alt kümesidir ve E nin sonlu bir alt kümesinin herhangi bir alt kümesi E nin sonlu bir alt kümesidir.

(2) $\mathcal{A} = \langle A, +, \times, 0, 1 \rangle$ bir Boole cebiri ve a, A nın 1 e eşit olmayan bir elemanı olsun. $I_a = \{x \in A : x \leq a\}$ kümesi $\mathcal{A}$ da bir idealdir. Teorem 6.1.1 in (i), (ii), (iii) koşullarını sağlamak kolaydır: $0 \leq a$ dır $a, 1$ den farklı olduğundan $1 \leq a$ olamaz. Eğer $x \leq a$ ve $y \leq a$ ise o zaman $x \cup y \leq a$ dır; sonuç olarak, $x \leq a$ ve $y \leq x$ ise, o zaman $y \leq a$ dır. I_a ya a tarafından üretilmiş esas ideal denir.

(3) Herhangi bir Boole cebirinde $\{0\}$ bir idealdir.

Teorem 6.1.5 Herhangi bir $\mathcal{A} = \langle A, +, \times, 0, 1 \rangle$ Boole halkası ve $\mathcal{A}$ daki herhangi bir I ideali için $\mathcal{A}/I$ bölüm halkası bir Boole halkasıdır.

Kanıt A daki her bir x elemanı için $\bar{x}, x$ in modulo I denklik sınıflarını gösterebiliriz. $\mathcal{A}/I$ birimli bir halkadır. Bu nedenle her elemanın çarpma işlemi için

idempotent olduğunu göstermek yeterlidir. Fakat bu $\mathcal{A}/I$ daki çarpım tanımından ve $\mathcal{A}$ nın bir Boole cebiri olmasından elde edilen bir sonuçtur. Eğer $x \in A$, ise o zaman $\overline{x^2} = \overline{x^2} = \overline{x}$ dir.

Birimli değişmeli keyfî bir halkada ideallerin, halka üzerinde tanımlı birimli halkaların homomorfizmalarının çekirdekleri olduğu bilinmektedir. Bu özellikle birlikte teorem Boole halkaları içinde geçerli olur: Bu ise şunu gösterir: Bir Boole halkasındaki ideallerin, kesin olarak halka üzerinde tanımlanan Boole cebirlerinin homomorfizmalarının çekirdekleridir.

Teorem 6.1.6 $\mathcal{A} = \langle A, +, \times, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ bir Boole halkası ve I , A nın bir alt kümesi olsun. Aşağıdaki özellikler denktirler:

- (1) I , $\mathcal{A}$ da bir idealdir;
- (2) Çekirdeği I olan A üzerinde tanımlı Boole cebirlerinin bir h homomorfizması vardır; yani

$$I = h^{-1}[\{\mathbf{0}\}] = \{x \in A : h(x) = \mathbf{0}\};$$

- (3) Çekirdeği I olan A üzerine tanımlanan birimli değişmeli halkaların bir homomorfizması vardır.

Kanıt (1) ve (3) ün denklîği bir önceki açıklamaların sonucudur. (2) $\Rightarrow$ (3) gerektirmesi açıktır. Yinede (3) $\Rightarrow$ (1) ve dolayısıyla (1) $\Rightarrow$ (2) olduğunu göstereceğiz. Buradan (1) $\Rightarrow$ (3) elde edilir.

(3) $\Rightarrow$ (1): $\mathcal{A}$ dan birimli bir $\mathcal{B} = \langle B, +, \times, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ halkası içine $I = h^{-1}[\{\mathbf{0}\}] = \{x \in A : h(x) = \mathbf{0}\}$; olacak şekilde bir h homomorfizmasının olduğunu varsayalım. Şimdi Teorem 6.1.1 in (i), (ii) ve (iii) şartlarını gerçekleyelim.

$\mathbf{0} \in I$ ve $\mathbf{1} \notin I$ dır çünkü $h(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ve $h(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ dır. Eğer $x \in I$ ve $y \in I$ ise, o zaman $h(x) = \mathbf{0}$ ve $h(y) = \mathbf{0}$ dır, bu nedenle

$$\begin{aligned} h(x \cup y) &= h(x + y + xy) \\ &= h(x) + h(y) + h(x)h(xy) \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

ve buradan $x \cup y \in I$ elde edilir. Sonuç olarak, $x \in I$, $y \in A$ ve $y \leq x$ ise, o zaman $h(x) = \mathbf{0}$ ve $xy = y$ olur, böylece $h(y) = h(x)h(y)$ yani $y \in I$ sonuçlandırılmış olur.

O halde I , $\mathcal{A}$ nın bir idealidir.

(1) $\Rightarrow$ (2): I nın $\mathcal{A}$ da bir ideal olduğunu varsayalım ve A dan A/I ya her x elemanı modulo I , $\bar{x}$ denklik sınıfıyla eşleyen bir h fonksiyonu göz önünde bulunduralım. h Boole cebirlerinin bir homomorfizmasıdır: Teorem 5.1.5 i kullanarak bunu gösterelim; eğer $x \in A$ ve $y \in A$ ise o zaman

$$h(x \cap y) = h(xy) = \overline{xy} = \bar{x} \times \bar{y} = h(x) \times h(y) = h(x) \cap h(y)$$

ve

$$h(x^c) = h(\mathbf{1} + x) = \overline{\mathbf{1} + x} = \bar{\mathbf{1}} + \bar{x} = \bar{\mathbf{1}} + h(x) = (h(x))^c$$

dır. Ayrıca, $I = \bar{\mathbf{0}} = \{x \in A : h(x) = \bar{\mathbf{0}}\}$ olduğu açıktır. O halde I , h nin çekirdeğidir. $\square$

6. 2 Maksimal İdealler

Burada bir Boole cebirindeki maksimal idealleri karakterize etmenin yolları sunulacaktır:

Teorem 6.2.1 Her $\mathcal{A} = \langle A, +, \times, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ Boole halkası, $\mathcal{A}$ daki her I ideali ve her $k \geq 2$ tamsayısı için aşağıdaki özellikler denktir:

- (1) I maksimal bir idealidir;
- (2) $\mathcal{A}/I$, $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ Boole cebirine izomorftur;
- (3) I , $\mathcal{A}$ nın $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ içine olan bir homomorfizmasının çekirdeğidir;
- (4) A daki her x elemanı için, $x \in I$ yada $\mathbf{1} + x \in I$ dır;
- (5) A daki her x ve y elmanı için $xy \in I$ ise o zaman $x \in I$ yada $y \in I$ dır;
- (6) A daki her $x_1, x_2, \dots, x_k$ elemanları için $x_1 x_2 \dots x_k \in I$ ise o zaman $x_1 \in I$ veya $x_2 \in I$ veya ... veya $x_k \in I$ dır.

Kanıt

(1) $\Rightarrow$ (2): I ideali maksimal ise, o zaman $\mathcal{A}/I$ bölüm halkası bir cisimdir. Fakat ayrıca bir cisim olan tek Boole halkası $\{0,1\}$ dir. O halde Lemma 6.1.5 den sonuca ulaşılır.

(2) $\Rightarrow$ (3): I nın her zaman $\mathcal{A}$ dan $\mathcal{A}/I$ ya tanımlı kanonik h homomorfizmasının çekirdeği olduğunu göstermek yeterlidir. $\mathcal{A}/I$ dan $\{0,1\}$ üzerine bir izomorfizm varsa, o zaman I nın $\mathcal{A}$ dan $\{0,1\}$ içine $\phi \circ h$ homomorfizmasının çekirdeği olacağı açıktır.

(3) $\Rightarrow$ (4) Çekirdeği I olan $\mathcal{A}$ dan $\{0,1\}$ üzerine bir h homomorfizmasını göz önünde bulunduralım. x , $\mathcal{A}$ nın keyfi bir elemanı olsun. $h(x)=0$ veya $h(x)=1$ dir. İlk durumda, $x \in I$ ve ikinci durumda $1+h(x)=0$ dir; böylece $h(1+x)=0$ ve $1+x \in I$ olur.

(4) $\Rightarrow$ (5): x ve y , $\mathcal{A}$ nın $x \notin I$ ve $y \notin I$ olacak şekilde elemanları olsunlar. Eğer (4) geçerli ise o zaman $1+x \in I$ ve $1+y \in I$ dir, böylece, Teorem 6.1.1 (ii) den, $(1+x) \cup (1+y) \in I$ elde edilir. Fakat

$$(1+x) \cup (1+y) = 1 + (x \cap y) = 1 + xy$$

olup, buradan Sonuç Teorem 6.1.2 kullanılarak $xy \notin I$ elde edilir. Böylece (5) kanıtlanmış oldu.

(5) $\Rightarrow$ (1): I nın maksimal olmadığını varsayalım. J , I yı kesin içeren $\mathcal{A}$ nın bir ideali ve a , I ya ait olmayan J nin bir elemanı olsun. Sonuç Teoremi 6.1.2 ı uygulayarak, $1+a \in J$ elde edilir ve böylece $1+a \in I$ olur, çünkü $I \subseteq J$ dir. I ideali ne a yı nede $1+a$ yı içerir, fakat belirgin bir şekilde $a(1+a)=0$ çarpımını içerir. Böylece (5) in gerçekleşmediği sonucuna ulaşılır.

(5) $\Rightarrow$ (6): (5) in gerçekleştiğini varsayalım ve k tamsayısı üzerinde tümevarımla kanıtı gösterelim. $k=2$ için (6), (5) ile çakışır. (6) nın k için

doğrulandığını varsayarak, $k+1$ içinde doğrulandığını kanıtlayalım. $x_1x_2\ldots x_kx_{k+1}$, A nın $x_1x_2\ldots x_kx_{k+1} \in I$ olacak şekilde elemanları olsun. (5) den, ya $x_1x_2\ldots x_k \in I$ yada $x_{k+1} \in I$ dır. İlk örnekte, tümevarım hipotezi kullanılarak, $x_1 \in I$ yada $x_2 \in I$ yada ... yada $x_k \in I$ elde edilir. O zaman $1 \leq i \leq k+1$ olacak şekilde en az bir i indisi için $x_i \in I$ olması gerektiği sonucun elde edilir; bu $k+1$ için (6) yı ispatlar.

(6) $\Rightarrow$ (5): x ve y , A nın $xy \in I$ olacak biçimde iki elemanı olsun. $x_1 = x$ ve $x_2 = x_3 = \ldots = x_k = y$ alalım. Bu durumda $x_1x_2\ldots x_k = xy \in I$ olur. Dolayısıyla, (6) doğru ise o zaman 1 ve k arasında en az bir i indisi için $x_i \in I$ olur. O halde ya $x \in I$ yada $y \in I$ dır ve (5) gerçekleşmiş olur. $\square$

Uyarı 6.2.2 Keyfi bir değişmeli halkada, önceki teoremin (5) özellikli bir ideale *asal ideal* denir. O halde biraz önce bir Boole halkasında asal ideallerin maksimal idealler olduğunu göstermiş olduk. Fakat bunun doğru olmadığı halkalar vardır. Her zaman doğru olan şey bir idealin asal olması için gerek ve yeter koşulun birleşmeli bölüm halkasının bir tamlık bölgesi olmasıdır. Buradan elde edilen sonuç: bir maksimal idealin asal olması gerekliliğidir. Bunun tersi doğru değildir. Örneğin, reel katsayılı iki değişkenli $\mathbb{R}[X, Y]$ Polinomlar halkasında X polinomu ile doğurulan ideal asaldır fakat maksimal değildir çünkü bu ideal X ve Y polinomları tarafından üretilen idealde kesin içerilir.

Uyarı 6.2.3 Özellikle (1) ve (3) özellikleri arasındaki denklige dikkat etmeliyiz. Bir $\mathcal{A} = \langle A, +, \times, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ Boole cebirinden $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ içine iki h ve g homomorfizmaları aynı I çekirdeğine sahip ise, o zaman eşit olduklarını gözlemleyelim. Bunun nedeni A daki her x elemanı için ya $x \notin I$ ve $g(x) = h(x) = \mathbf{0}$ yada $x \in I$ ve $g(x) = h(x) = \mathbf{1}$ olmasıdır. Buradan bir Boole cebirindeki maksimal ideallerin kümesi ile bu cebirden $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ içine olan Boole cebirlerinin homomorfizmaları arasında bir bijeksiyon olduğu sonucu çıkartılabilir.

Örnek 6.2.4 $\mathcal{A} = \langle A, +, \times, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ bir Boole cebiri olsun. Elemanları $\mathcal{A}$ da süzgeç olan $\mathcal{P}(E)$ nin boştan farklı bir Z alt kümesi verilsin.

(a) Z ye ait olan süzgeçlerin $\bigcap_{F \in Z} F$ kesişimi $\mathcal{A}$ üzerinde bir süzgeçtir, fakat Z nin elemanlarının $\bigcup_{F \in Z} F$ birleşimi bir süzgeç olmayabilir.

Kanıt $G = \bigcap_{F \in Z} F$ olsun. G nin Teorem 6.2.1 un koşullarını sağladığını gösterelim. F_0 , (boştan farklı) Z kümesinde bir süzgeç olsun. $\mathbf{0} \notin F_0$ ve buradan $\mathbf{0} \in G$ dir. Her $F \in Z$ için $\mathbf{1} \in F$ ve böylece $\mathbf{1} \in G$ olur. O halde teoremin birinci koşulu gerçekleşmiş olur. x ve y , G nin iki elemanı olsun. Her $F \in Z$ için $x \in F$ ve $y \in F$ olur ve buradan $x \cap y \in F$, dolayısıyla $x \cap y \in G$, elde edilir. Böylece teoremin ikinci koşulu sağlanmış olur. $x \in G$, $y \in G$ ve $x \leq y$ ise, o zaman her $F \in Z$ için $x \in F$ ve buradan $y \in F$ olur. Buradan $y \in G$ elde edilir ve teoremin üçüncü koşulu da gerçekleşmiş olur. O halde G kümesi $\mathcal{A}$ üzerinde bir süzgeçtir.

a , $\mathcal{A}$ nın $\mathbf{0}$ ve $\mathbf{1}$ den farklı bir elemanı olsun. Sırasıyla a ve $\mathbf{1} + a$ ile doğrulmuş principle süzgeçlerini ele alalım. $Z = \{F_a, F_{1+a}\}$ olsun. $\mathbf{0} \in K, \mathbf{1} + a \in K$ ve $a \cap (\mathbf{1} + a) = \mathbf{0} \notin K$ olduğundan $K = \bigcup_{F \in Z} F = F_a \cup F_{1+a}$ bir süzgeç değildir.

(b) Z kapsama bağıntısına göre tam sıralı olsun. O zaman $\bigcup_{F \in Z} F$, $\mathcal{A}$ üzerinde bir süzgeçtir.

Kanıt $H = \bigcup_{F \in Z} F$ olsun ve Teorem 6.2.1 i uygulayalım. Önceki gibi, belirli bir $F_0 \in Z$ süzgecini ele alalım. $\mathbf{1} \in F_0$ ve buradan $\mathbf{1} \in H$ dir. Her $F \in Z$ için $\mathbf{0} \notin F$ ve dolayısıyla $\mathbf{0} \notin H$ dir. Bu nedenle H , teoremin (f) koşulunu sağlar. x ve y , $x \in H$ ve $y \geq x$ olacak şekilde $\mathcal{A}$ nın elemanları olsun. Buradan $y \in H$ elde edilir. Bu teoremin (fff) koşulunu H için gerçekler. Z üzerindeki bu ek hipotez bu iki koşulun ispatıyla ilgili değildir. Şimdi teoremin (ff) koşulunu gerçeklemek için bu hipotezi kullanalım. H nin x ve y elemanları için $x \cap y \in H$ olduğunu gösterelim: $x \in F_1$ ve $y \in F_2$ olacak şekilde Z kümesinde F_1 ve F_2 süzgeçleri vardır. Z , kapsamaya göre tam sıralı olduğuna göre ya $F_1 \subseteq F_2$ ya da $F_2 \subseteq F_1$ dir;

o halde $F = F_1 \cup F_2$ hem x hem de y elemanlarını içeren Z de bir süzgeçtir; böylece en büyük alt sınırı $x \cap y$ yi içerir. Buradan $x \cap y \in F$ ve $F \in Z$ elde edilir ve $x \cap y \in \bigcup_{F \in Z} F = H$ olur.

6.3 Süzgeçler

Şimdi bir Boole cebiri üzerindeki bir idealin duali olan kavramı inceleyeceğiz.

Tanım 6.3.1 Bir $\mathcal{A} = \langle A, +, \times, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ Boolean cebirindeki bir *süzgeç*

$$\{x \in A : x^c \in F\}$$

kümesi A da bir ideal olacak şekilde A nın bir F alt kümesidir.

F , bir $\mathcal{A} = \langle A, +, \times, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ Boole cebirinde bir süzgeç ve I , $\{x \in A : x^c \in F\}$ ideali olsun. I , $x \mapsto x^c$ tümleme işlemi altında F nin ters görüntüsü olarak görülebilir. Fakat bu işlem involüsyon (bkz. Teorem 3.1.3, (9)) olduğundan, I ayrıca bu işlem altında F nin direkt imajıdır: $I = \{x \in A : \exists y (y \in F \text{ ve } x = y^c)\}$. Diğer bir deyişle I , F nin elemanlarının tümleyenlerinin kümesi ve F , I nın elemanlarının tümleyenlerinin kümesidir. I ideale F süzgeçinin *dual ideali* denir. $\mathcal{A}$ da verilen keyfi bir J ideali için $G = \{x \in A : x^c \in J\}$ kümesinin dual ideali J olan bir süzgeç olduğunu görmek kolaydır. G ye J idealinin *dual süzgeci* denir. Böylece idealler kümesi ile bir Boole cebirindeki süzgeçler kümesi arasında bir bijeksiyon vardır (Padmanabhan and Redeanu, 2009). Süzgeçler için Teorem 6.1.1 un dualine sahibiz.

Teorem 6.3.2 $\mathcal{A} = \langle A, \leq, \cup, \cap, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ bir Boole cebiri ve F , A nın bir alt kümesi olsun. F nin bir süzgeç olabilmesi için gerek ve yeter koşul aşağıdaki koşulların gerçekleşmesidir:

- (f) $\mathbf{0} \notin F$ ve $\mathbf{1} \in F$;
- (ff) I nın her bir x ve y elemanları için $x \cap y \in F$;
- (fff) Her $x \in F$ için ve her $y \in A$ için $y \geq x$ ise o zaman $y \in F$ dir.

Kanıt $I = \{x \in A : x^c \in F\}$ olsun. Eğer F bir süzgeç ise, o zaman I dual ideali olur ve Teorem 6.1.1 in (i), (ii), (iii) şartları doğrulanır.

$0 \in I$ dır, bu yüzden $0^c = 1 \in F$, ve $1 \notin I$ dır, böylece $0^c = 1 \notin F$ olur, ki bu (f) i ispatlar.

Eğer $x \in F$ ve $y \in F$ ise o zaman $x^c \in I$ ve $y^c \in I$ olur. Böylece (ii) den $x^c \cup y^c \in I$ ve $x^c \cup y^c = (x \cap y)^c$ den $x \cap y \in F$ olduğu sonucuna ulaşılır ve (ff) doğrulanır.

Sonuç olarak, $x \in F$, $y \in A$ ve $y \geq x$ ise o zaman $x^c \in I$ ve $y^c \leq x^c$ olur, böylece (iii) den $y^c \in I$ ve $y \in F$ olur, böylece (fff) ispatlanmış olur.

Tersine, benzer bir muhakemeyle (i), (f) den; (ii), (ff) den ve (iii) (fff) den sonuçlanır. $\square$

Sonuç Teorem 6.3.3 $\mathcal{A} = \langle A, \leq, \cup, \cap, 0, 1 \rangle$ bir Boole cebiri ve F , A nın bir alt kümesi olsun. Her $k \geq 1$ tamsayısı ve F deki her bir $x_1, x_2, \dots, x_k$ elemanları için F e ait $x_1 \cap x_2 \cap \dots \cap x_k$ en büyük altsınırı vardır.

Kanıt Sonuç Teorem 6.1.3 e benzerdir. $\square$

6. 4 Ultra Süzgeçler

Tanım 6.4.1 Bir Boole cebirinde, bir *ultra süzgeç* maksimal süzgeçtir, yani diğer herhangi bir süzgeç içerisinde kesin olarak içerilmeyen bir süzgeçtir.

Yukarıda açıklanan dual olması durumunda, ultra süzgeçlerin maksimal ideallere karşılık geldiği açıktır. Diğer bir deyişle, bir maksimal idealin dual süzgeci bir ultra süzgeçtir ve bir ultra süzgecin dual ideali bir maksimal idealdir (Padmanabhan and Redeanu, 2009).

Teorem 6.2.1 e benzer bir analog verelim:

Teorem 6.4.2 Her $\mathcal{A} = \langle A, +, \times, 0, 1 \rangle$ Boole halkası ve $\mathcal{A}$ daki her F ideali için ve her $k \geq 2$ tamsayısı için aşağıdaki özellikler denktirler:

(1') F bir ultra süzgeçtir;

(3') $\mathcal{A}$ dan $\{0,1\}$ üzerine $F = \{x \in A : h(x) = 1\}$ olacak şekilde bir h homomorfizmi vardır;

(4') A daki her x elemanı için $x \in F$ veya $1+x \in F$ dir;

(5') A nın her bir x ve y elemanları için $x \cup y \in F$ ise o zaman $x \in F$ veya $y \in F$ olur;

(6') A daki her $x_1, x_2, \dots, x_k$ elemanları için, $x_1 \cup x_2 \cup \dots \cup x_k \in F$ ise $x_1 \in F$ veya $x_2 \in F$ veya ... veya $x_k \in F$ dir.

Kanıt $\mathcal{A}$ cebiri, F süzgeci ve k tamsayısı verilsin. I , F nin dual ideali gösterebiliriz. F süzgeci için (1'), (3'), (4'), (5'), (6') özelliklerinin I ideali için Teorem 6.2.1 in, sırasıyla, (1), (3), (4), (5), (6) özelliklerine denk olduğunu doğrulamak kolaydır. $\square$

Uyarı 6.4.3 F bir $\langle A, +, \times, 0, 1 \rangle$ Boole cebirinde bir ultra süzgeç ve I , F in maksimal dual ideali ise o zaman I ve F , A nın bir ayrımını oluştururlar. Böylece I ve F kümelerinin her biri aynı zamanda

- (a) (A nın alt kümeleri olarak bakıldığında) diğerinin tümleyeni,
- (b) (bir bakıma incelenmekte olan Boole cebirindeki tümleyenler) diğer elemanların tümleyenlerinin kümesidir.

Bu özelliklerden ikincisi bir ideal ve diğeri duali olan süzgeç olduğunda geçerli iken ilk özellik sadece soruda ideal ve süzgeç maksimal olduğu zaman geçerlidir.

Uyarı 6.4.4 Uyarı 6.2.3 ye geri dönersek, şu sonucu ekleyebiliriz: Bir $\mathcal{A}$ Boole cebiri için (i) $\mathcal{A}$ daki maksimal idealler, (ii) $\mathcal{A}$ daki ultra süzgeçler ve (iii) $\mathcal{A}$ dan $\{0,1\}$ içine Boole cebirlerinin homomorfizmaları arasında kanonik bire-bir eşlemeler olduğu gerçeğini ileri sürebiliriz.

Örnek 6.4.5

- (1) E sonsuz bir küme ise E nin tüm cofinite alt kümelerinin kümesi $\langle \mathcal{P}(E), \subseteq, \emptyset, E \rangle$ Boole cebirindeki bir süzgeçtir. Bu süzgeçe E üzerindeki *Frechet süzgeci* denir. Bu bir ultra süzgeç değildir çünkü sonsuz ve tümleyenleri de sonsuz olan E nin alt kümeleri vardır, böylece Teorem 6.4.2, (4') koşulu gerçekleşmez.
- (2) a , bir $\langle A, \leq, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ Boole cebirinde sıfırdan farklı bir eleman ise $F_a = \{x \in A : x \geq a\}$ kümesine a tarafından üretilmiş esas süzgeç olarak adlandırılır. Bu da $\mathbf{1} + a$ ile üretilen idealin dual süzgecidir.
- (3) $\{\mathbf{1}\}$ kümesi $\{\mathbf{0}\}$ idealinin dual süzgecidir.

Teorem 6.4.6 $\langle A, \leq, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ bir Boole cebiri ve a , A nın sıfırdan farklı bir elemanı olsun. a tarafından üretilen esas süzgecin bir ultra süzgeç olması için a nın bir atom olması gerek ve yeter koşuldur.

Kanıt Teorem 4.8 ve F_a süzgecinin tanımına dayanarak, a nın bir atom olması için gerek ve yeter şart A nın her x elemanı için $x \in F_a$ veya $\mathbf{1} + x \in F_a$ olmasıdır; fakat bunun olması için gerekli ve yeter koşul F_a nın bir ultra süzgeç olmasıdır (Teorem 6.4.2, (4') $\Rightarrow$ (1')). $\square$

A nın sıfırdan farklı bir a elemanı tarafından üretilen F_a esas süzgeci bir ultra süzgeç olduğu zaman (böylece, a bir atom olduğunda) buna *trivial ultra süzgeç* denir. Birleşmeli $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ deki değerlere sahip h_a homomorfizması trivial homomorfizma olarak adlandırılır. h_a aşağıdaki gibi tanımlanır: $x \in F_a$ ise $h_a(x) = \mathbf{1}$ ve $x \notin F_a$ ise $h_a(x) = \mathbf{0}$. Bu tanım $a \leq x$ ise $h_a(x) = \mathbf{1}$ ve $a \leq \mathbf{1} + x$ ise $h_a(x) = \mathbf{0}$ a denktir.

Lemma 6.4.7 A bir Boole cebiri ve $\mathcal{U}$, A üzerinde bir ultra süzgeç olsun. $\mathcal{U}$ nun trivial olabilmesi için gerek ve yeter koşul en az bir atom içermesidir.

Kanıt Eğer $\mathcal{U}$ tirivial ise bir a atomu tarafından üretilir ve $a \leq a$ olduğundan $a \in \mathcal{U}$ dur.

Tersine, $\mathcal{U}$ bir atom içeriyorsa (bu atoma b diyelim) o zaman $\mathcal{U}$, Teorem 6.3.2 (fff) koşulundan, b ye eşit veya b den daha büyük olan tüm elemanları içerir. Böylece b tarafından üterilen F_b esas süzgecinin $\mathcal{U}$ da içerildiği sonucu elde edilir. Fakat b bir atom olduğundan F_b maksimaldir ve $\mathcal{U}$ süzgecinde kesin bir şekilde kapsanmaz. Böylece $\mathcal{U} = F_b$ ve $\mathcal{U}$ trivial bir ultra süzgeçtir. $\square$

Teorem 6.4.8 E sonsuz bir küme ve $\mathcal{U}, \mathcal{P}(E)$ Booleen cebirinde bir ultra süzgeç olsun. $\mathcal{U}$ nun non-trivial olması için gerek ve yeter şart E üzerinde Frechet süzgeç içermesidir.

Kanıt $\mathcal{P}(E)$ nin atomları singletonlardır (yani, tek eleman içeren alt kümelerdir); bu nedenle sonlu kümelerdir. Eğer $\mathcal{U}$ Frechet süzgeci içeriyorsa, o zaman E nin her cofinite alt kümesi $\mathcal{U}$ ya aittir, böylece E nin ve tümleyeninin bir alt kümesini içermez). Özellikle, hiçbir atom $\mathcal{U}$ ya ait olamaz. Böylece, önceki lemmadan, $\mathcal{U}$ nun trivial olmadığı sonuçlandırılır.

Eğer $\mathcal{U}$ Frechet süzgeci içermiyorsa, $\mathcal{U}$ ya ait olmayan E nin bir X cofinite alt kümesini seçebiliriz. Böylece $E - X$ tümleyeni $\mathcal{U}$ da olur. $E, \mathcal{P}(E)$ Boole cebiri için birim eleman olduğundan $E \in \mathcal{U}$ ve böylece $X \neq E$ olur. X in E deki tümleyeni E nin boş olmayan sonlu bir alt kümesidir: örneğin, $E - X = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ ($n \geq 1$). Böylece $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \in \mathcal{U}$ dir, bu ise

$$\{\alpha_1\} \cup \{\alpha_2\} \cup \dots \cup \{\alpha_n\} = \{\alpha_1\} \cup \{\alpha_2\} \cup \dots \cup \{\alpha_n\} \in \mathcal{U}$$

anlamına gelir. Eğer $n = 1$ ise $\{\alpha_1\} \in \mathcal{U}$ olur. Eğer $n \geq 2$ ise Teorem 6.4.2, özellik (6') dan, 1 ve n arasında en az bir i indisi için $\{\alpha_i\} \in \mathcal{U}$ dur. Her bir durumda $\mathcal{U}$ nun bir singleton, yani bir atom, içerdiğini görüyoruz. O zaman bir önceki lemmadan $\mathcal{U}$ nun trivial olduğunu görölür. $\square$

6. 5 Süzgeç Bazları

Tanım 6.5.1 Bir $\langle A, \leq, 0, 1 \rangle$ Boole cebirinde bir *süzgeç için bir baz* (süzgecin bazı) sonlu kesişim özelliği olarak bilinen aşağıdaki özelliğe sahip A nın bir alt kümesidir: B nin boş olmayan her sonlu alt kümesi sıfırdan farklı bir en büyük alt sınıra sahiptir.

Diğer bir deyişle, $B \subseteq A$ bir süzgecin bazıdır ancak ve ancak her $k \geq 1$ tamsayısı ve B nin her $x_1, x_2, \dots, x_k$ elemanları için $x_1 \cap x_2 \cap \dots \cap x_k \neq 0$ dır.

Lemma 6.5.2 $\langle A, \leq, 0, 1 \rangle$ bir Boole cebiri ve X, A nın bir alt kümesi olsun. $\mathcal{A}$ üzerinde X i içeren bir süzgecin var olması için gerek ve yeter şart X in bir süzgecin bazı olmasıdır.

Kanıt Eğer X bir F süzgecinde içerilirse ve $x_1, x_2, \dots, x_k, X$ in elemanları ise o zaman bunların en büyük alt sınırı $x_1 \cap x_2 \cap \dots \cap x_k, F$ ye aittir (Sonuç Teoremi 6.3.3) ve $0 \notin F$ olduğu için bu en büyük alt sınır sıfır değildir; böylece X bir bazın süzgecidir.

Şimdi X in bir süzgecin bazı olduğunu varsayalım.

Eğer $X = \emptyset$ ise, $\{1\}$ X i içeren $\mathcal{A}$ üzerinde bir süzgeçtir.

Eğer $X \neq \emptyset$ ise,

$$F_X = \{x \in A : (\exists k \in \mathbb{N}^*) (\exists x_1 \in X) (\exists x_2 \in X) \dots (\exists x_k \in X) \\ (x \geq x_1 \cap x_2 \cap \dots \cap x_k)\}$$

teşkil edelim. F_X, X in boştan farklı sonlu alt kümelerinin en büyük alt sınırlarından ve bununla birlikte bu en büyük alt sınırların bir tanesine eşit ya da daha büyük olan bütün elemanlardan oluşur. Özellikle, X her bir elemanı F_X e aittir. Böylece F_X, X i içerir. F_X in bir süzgeç olduğunu göstermek kolaydır. Aşağıdaki uyarıları göz önünde bulunduralım:

(f) $0 \notin F_X$ (aksi durumda, sonlu model özelliği X için doğru olmaz) ve $1 \in F_X$ (çünkü X boştan farklıdır: X in en az bir elemanı 1 e eşit yada 1 den küçüktür) dır.

(ff) Eğer $x \geq x_1 \cap x_2 \cap \dots \cap x_h$ ve $y \geq y_1 \cap y_2 \cap \dots \cap y_k$ ise o zaman

$$x \cap y \geq x_1 \cap x_2 \cap \dots \cap x_h \cap y_1 \cap y_2 \cap \dots \cap y_k$$

dır.

(fff) Eğer $x \geq x_1 \cap x_2 \cap \dots \cap x_k$ ve $y \geq x$ ise, o zaman $y \geq x_1 \cap x_2 \cap \dots \cap x_k$

dır. Böylece X i içeren bir süzgeç bulunmuş olur. $\square$

Boole cebirlerinin özel durumunda, süzgeçler vasıtasıyla Krull Teoremini ifade edebiliriz. O zaman bu ultra süzgeç teoremi olarak bilinir:

Teorem 6.5.3 Bir Boole cebirinde her süzgeç en az bir ultra süzgeçde içerilir.

Kanıt Bir F süzgeci verildinde F in dual ideali en azından bir maksimal idealde içerilir; bunun dual süzgeci o zaman F yi içeren bir ultra süzgeçtir.

Elbette Boole cebirleri için süzgeçler vasıtasıyla formülleştirme ve idealler aracılığı ile formülleştirme denktir.

Ultra süzgeç teoremi Lemma 6.5.2 un farklı bir şekilde tekrar ifade edilmesini sağlar. $\square$

Lemma 6.5.4 $\langle A, \leq, 0, 1 \rangle$ bir Boole cebiri ve X , A nın bir alt kümesi olsun. $\mathcal{A}$ üzerinde X i içeren bir ultra süzgecin var olması için gerek ve yeter şart X in bir süzgecin bazı olmasıdır.

Kanıt “ X i içeren $\mathcal{A}$ üzerinde bir ultra süzgeç vardır” ve “ X i içeren $\mathcal{A}$ üzerinde bir süzgeç vardır” özellikleri denktir: ilki açık bir şekilde ikincisini gerektirir; ters gerektirme ultra süzgeç teoreminden elde edilir. Sonuç Lemma 6.5.2 den ele edilir. $\square$

7. STONE TEOREMİ

Boole cebirine verilebilecek ilk örnek, şüphesiz, verilen bir kümenin alt kümelerinin cebiridir. Her Boole cebiri bir kümenin alt kümelerinin Boole cebirine denk midir (izomorfik midir)? Bu soruya ‘hayır’ cevabını vermek için yeterli bilgiye sahibiz: atomsuz Boole cebirlerini gördük (Örnek 4.3) ve bir kümenin alt kümelerinin cebirinin daima atomları içerdiğini biliyoruz: singletonlar ve atomlardan atomlara içine herhangi bir izomorfik dönüşüm. Bu nedenle atom içermeyen bir Boole cebiri atom içeren bir cebire izomorf olamaz (Burris and Sankappanavar, 1981).

Bununla birlikte, Stone Teoremi bir Boole cebirini bir kümenin alt kümelerinin bir cebirine bağlayan bir bağlantının olduğunu gösterir. Daha kesin olarak, her Boole cebiri bir kümenin alt kümelerinin bir Boole cebirinin bir alt cebirine izomorftur (Burris and Sankappanavar, 1981).

7.1 Bir Boole Cebirinin Stone Uzayı

Bir $\mathcal{A} = \langle A, +, \times, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ Boolean cebiri göz önünde bulunduralım.

Tanım 7.1.1 Bir $\mathcal{A}$ Boole cebirinden $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ içine homomorfizmaların kümesi $S(\mathcal{A})$ ile gösterilir ve $\mathcal{A}$ nın *Stone uzayı* olarak adlandırılır.

$S(\mathcal{A})$ kümesi $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}^A$ nın bir alt kümesidir; burada $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}^A$, A dan $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ içine olan dönüşümlerin kümesidir. Bunu daha önce bir topolojik uzay olarak $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ üzerindeki diskrete topolojiyi alarak incelemiş ve bu uzayı çarpım topolojisi olarak vermiştik (bkz. Tanım 2.2.16). Böylece $S(\mathcal{A})$ yı $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}^A$ nın topolojisi tarafından içerilen topoloji olarak alabiliriz. O zaman $S(\mathcal{A})$ nın açık alt kümeleri $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}^A$ açık alt kümelerinin $S(\mathcal{A})$ ile kesişiminden oluşur.

Lemma 7.1.2 $S(\mathcal{A})$ topolojik uzayı sıfır-boyutludur.

Kanıt Lemma 2.2.18 den $\{0,1\}^A$ nın sıfır-boyutlu olduğunu biliyoruz. Bu nedenle Lemma 2.2.14 yi uygulamak yeterlidir. $\square$

Lemma 2.2.18 den önce, clopen kümelerden oluşan $\{0,1\}^A$ uzayı için bir bazı olarak $(\Omega_i)_{i \in I}$ sergilenmişti. Ω_i nin her biri A dan $\{0,1\}$ içine olan tüm dönüşümlerin kümesidir ki bu dönüşümler noktaların belirli bir sonlu sayısında belirli değerler alır. Eğer her bir i için, Lemma 2.2.14 deki gibi, $\Gamma_i = \Omega_i \cap S(A)$ eşitliğini teşkil edersek, o zaman $(\Gamma_i)_{i \in I}$ ailesi clopen kümelerden oluşan $S(A)$ daki açık kümeler için bazdır. Her bir Γ_i , verilen noktaların sonlu bir sayısındaki verilen değerlerini kabul eden, A dan $\{0,1\}$ içine Boole cebirleri homomorfizmalarının kümesidir.

Bundan sonra $S(A)$ uzayı ele alındığında açık kümeler baz olacaktır. A nın Stone uzayı için temel bir açık kümeden bahsettiğimizde $(\Gamma_i)_{i \in I}$ ailesindeki kapalı kümelerden biri anlaşılacaktır.

Lemma 7.1.3 $S(A)$ nın bir Δ altkümesinin temel bir açık küme olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\Delta = \{h \in S(A) : h(a) = 1\}$$

olacak şekilde A da bir a elemanı olmasıdır. Ayrıca bu koşul gerçekleştiğinde, böyle bir eleman taktır.

Kanıt

Yeter koşul: $\Delta = \{h \in S(A) : h(a) = 1\}$ olduğunu varsayalım; Δ , A dan $\{0,1\}$ içine homomorfizmaların kümesidir. Bu yüzden $S(A)$ daki temel açık kümelerden biridir.

Gerek koşul: Δ nın $S(A)$ nın temel bir açık alt kümesi olduğunu varsayalım.

Eğer $\Delta = \emptyset$ ise, o zaman $\Delta = \{h \in S(A) : h(0) = 1\}$ dır.

Eğer $\Delta \neq \emptyset$ ise, o zaman

$$\Delta = \{h \in S(\mathcal{A}) : h(a_1) = \varepsilon_1 \text{ ve } h(a_2) = \varepsilon_2 \text{ ve } \dots \text{ ve } h(a_n) = \varepsilon_n\}$$

olacak şekilde bir $n \geq 1$ tamsayısı, $\mathcal{A}$ da $a_1, a_2, \dots, a_n$ elemanları ve $\{0, 1\}$ de $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ elemanları vardır. Her bir $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ için

$$b_k = \begin{cases} a_k & \varepsilon_k = 1 \text{ ise} \\ 1 + a_k & \varepsilon_k = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olsun. Her $h \in S(\mathcal{A})$ homomorfizması ve her $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ için

$$h(b_k) = \begin{cases} h(a_k) & \varepsilon_k = 1 \text{ ise} \\ 1 + h(a_k) & \varepsilon_k = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

dır. Böylece $h \in S(\mathcal{A})$ için $h \in \Delta$ dır ancak ve ancak her $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $h(b_k) = 1$ dir. Ama bu son koşul aşağıdakine denktir:

$$h(b_1) \cap h(b_2) \cap \dots \cap h(b_n) = 1.$$

h bir homomorfizma olduğu için

$$h(b_1 \cap b_2 \cap \dots \cap b_n) = 1$$

elde ederiz. $a = b_1 \cap b_2 \cap \dots \cap b_n$ dersek

$$\Delta = \{h \in S(\mathcal{A}) : h(a) = 1\}$$

sonuçlandırılır.

Şimdi teklifi ispatlayalım: a ve b , $\mathcal{A}$ nın farklı elemanları ise, o zaman $a + b \neq 0$ dır; bu nedenle $a + b$ tarafından üretilen esas süzgeci göz önünde bulundurabiliriz ve ultra süzgeç teoremden bir ultra süzgeç bu süzgeci içerir. Böyle bir ultra süzgeç için, $\mathcal{A}$ dan $\{0, 1\}$ içine $\phi(a + b) = 1$, veya $\phi(a) + \phi(b) = 1$, olacak şekilde bir ϕ birleşmeli homomorfizması vardır. Bu ise $\phi(a)$ ve $\phi(b)$ elemanlarından bir ve yalnız birinin 1 e eşit olması anlamına gelir. Buda

$$\{h \in S(\mathcal{A}) : h(a) = 1\} \neq \{h \in S(\mathcal{A}) : h(b) = 1\}$$

olduğunu gösterir çünkü ϕ bu iki kümenin birine ait iken diğerine ait değildir. $\square$

Sonuç Teoremi 7.1.4 $S(\mathcal{A})$ nın temel kapalı alt kümelerinin kümesi ile temel açık alt kümelerinin kümesi çakışır.

Kanıt Γ , $S(\mathcal{A})$ nın bir temel kapalı alt kümesi olsun. O zaman $\Delta = S(\mathcal{A}) - \Gamma$ bir temel açık kümedir; böylece önceki lemmadan

$$\Delta = \{h \in S(\mathcal{A}) : h(a) = \mathbf{1}\}$$

olacak biçimde bir $a \in A$ eleman vardır. Böylece

$$\begin{aligned} \Gamma &= \{h \in S(\mathcal{A}) : h(a) \neq \mathbf{1}\} \\ &= \{h \in S(\mathcal{A}) : h(a) = \mathbf{0}\} \\ &= \{h \in S(\mathcal{A}) : h(\mathbf{1} + a) = \mathbf{1}\} \end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece, önceki lemmanın kullanımıyla, Γ nın bir temel açık alt küme olduğunu görürüz. Aynı şekilde her temel açık kümenin bir temel kapalı küme olduğu gösterilebilir. $\square$

Lemma 7.1.5 $S(\mathcal{A})$ topolojik uzayı kompaktır.

Kanıt Her şeyden önce $\{0,1\}^A$ üzerindeki topoloji hausdorff olduğundan $S(\mathcal{A})$ nın topolojisi de Hausdorff'tur.

Daha sonra arakesiti boş olan $S(\mathcal{A})$ nın kapalı alt kümelerinin herhangi bir ailesinden arakesiti boş olan bir sonlu alt aile çıkarılabileceği gösterilmelidir. Fakat Lemma 2.2.10 de temel kapalı kümelerin aileleri için bunu yapmanın yeterli olduğunu gördük. Henüz gördüğümüz gibi, temel kapalı kümeler temel açık kümelerle çakışır. Bu nedenle $\bigcap_{j \in J} \Sigma_j = \emptyset$ olacak şekilde $S(\mathcal{A})$ nın temel açık alt kümelerinin sonsuz bir $(\Sigma_j)_{j \in J}$ ailesini göz önünde bulundurabiliriz. Bir önceki lemmaya göre, her bir $j \in J$ için

$$\Sigma_j = \{h \in S(\mathcal{A}) : h(x_j) = \mathbf{1}\}$$

olacak biçimde A da bir tek x_j elemanı vardır.

$X = \{x_j : j \in J\}$ kümesini teşkil edelim. $(\Sigma_j)_{j \in J}$ ailesinin kesişiminin boş olduğunu söylemek için $\mathcal{A}$ dan $\{0,1\}$ içine, X in her bir elemanını $\mathbf{1}$ değerine eşleyen, Boole cebirlerinin bir homomorfizması olmadığını ifade etmek yeterlidir. Bu durumda X i içeren $\mathcal{A}$ üzerinde bir ultra süzgeç mevcut değildir.

Bu, Lemma 6.5.4 den, X in bir süzgeç bazının olmadığı anlamına gelir. Böylece en büyük alt sınırı sıfır olan sonlu bir $\{x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_k}\} \subseteq X$ alt kümesi vardır. Bu yüzden $\mathcal{A}$ üzerindeki hiç bir ultra süzgeç aynı zamanda $x_{j_1}, x_{j_2},$ ve ... ve x_{j_k} noktalarını içermez. Diğer bir deyişle, $\mathcal{A}$ dan $\{0,1\}$ içine hiçbir homomorfizma aynı anda $x_{j_1}, x_{j_2},$ ve ... ve x_{j_k} noktalarında **1** değerini almazlar. Bu da

$$\Sigma_{j_1} \cap \Sigma_{j_2} \cap \dots \cap \Sigma_{j_k} = \emptyset.$$

anlama gelir. Böylece kesişimi boş olan $(\Sigma_j)_{j \in J}$ ailesinin sonlu bir alt ailesi vardır. $\square$

Uyarı 7.1.6 $S(\mathcal{A})$ nin kompakt olduğun farklı bir kanıtı $\{0,1\}^A$ nin kendisinin de kompakt olduğuna atıfta bulunarak verilebilir (Teorem 2.2.17). O zaman $S(\mathcal{A})$ nin $\{0,1\}^A$ de kapalı olduğunu göstermek yeterli olurdu (çünkü bir kompakt uzayın her kapalı alt kümesi kompaktır): $a \in A$ ve $b \in A$ için

$$\Omega(a,b) = \{f \in \{0,1\}^A : f(ab) = f(a)f(b) \text{ ve } f(1+a) = 1 + f(a)\}$$

kümesini oluşturalım. Teorem 5.1.5 den $S(\mathcal{A}) = \bigcap_{\substack{a \in A \\ b \in A}} \Omega(a,b)$ dir. Fakat A nin her bir a ve b elmanları için

$$\Omega(a,b) = \{f \in \{0,1\}^A : f(a) = 0 \text{ ve } f(b) = 0 \text{ ve } f(ab) = 0 \text{ ve } f(1+a) = 1\}$$

$$\cup \{f \in \{0,1\}^A : f(a) = 0 \text{ ve } f(b) = 1 \text{ ve } f(ab) = 0 \text{ ve } f(1+a) = 1\}$$

$$\cup \{f \in \{0,1\}^A : f(a) = 1 \text{ ve } f(b) = 0 \text{ ve } f(ab) = 0 \text{ ve } f(1+a) = 0\}$$

$$\cup \{f \in \{0,1\}^A : f(a) = 1 \text{ ve } f(b) = 1 \text{ ve } f(ab) = 1 \text{ ve } f(1+a) = 0\}$$

dir. Bu eşitliğin sağ tarafındaki kümelerin dördünün hepsi $\{0,1\}^A$ nin temel açık alt kümeleri ve böylece clopen kümeleridir. Bu yüzden, özellikle, birleşimleri de kapalıdır. A görüntüsü üzerinde a ve b olarak $\Omega(a,b)$ formundaki tüm

kümelerinin kesişimi $\{0,1\}^4$ nin bir kapalı alt kümesidir ve daha öncede gördüğümüz üzere bu kesişim $S(\mathcal{A})$ dır.

Sonuç Teorem 7.1.7 $\mathcal{A}$ nin Stone uzayı bir Boole topolojik uzayıdır.

Kanıt Gerçekten Lemma 7.1.5 den uzay kompakttır ve Lemma 7.1.2 den uzay sıfır-boyutludur. $\square$

Lemma 7.1.8 $S(\mathcal{A})$ nin clopen alt kümelerinin kümesi temel açık kümelerinin kümesine çakışır.

Kanıt Bütün temel açık kümelerin clopen olduğunu biliyoruz (Lemma 7.1.2).

Tersine Γ , $S(\mathcal{A})$ nin keyfi bir clopen alt kümesi olsun. Γ açık olduğundan, temel açık kümelerin bir birleşimidir: örneğin, bazı $J \subseteq I$ alt kümeler için $\Gamma = \bigcup_{i \in J} \Gamma_i$ dir. Fakat Γ , $S(\mathcal{A})$ kompakt uzayının bir kapalı alt kümesi olduğu için kendisi de kompakttır. Bu yüzden Γ nin $(\Gamma_i)_{i \in J}$ açık örtüsünden sonlu bir alt örtü çıkarabiliriz: örneğin, $\Gamma = \Gamma_{j_1} \cup \Gamma_{j_2} \cup \dots \cup \Gamma_{j_m}$. Lemma 7.1.3 den, A da, her $k \in (1, 2, \dots, m)$ için,

$$\Gamma_{j_k} = \{h \in S(A) : h(x_k) = 1\}$$

olacak şekilde $x_1, x_2, \dots, x_n$ elemanlarını bulabiliriz. $x = x_1 \cup x_2 \cup \dots \cup x_k$ ve $\Delta = \{h \in S(A) : h(x) = 1\}$ olsun. $\Gamma = \Delta$ olduğunu göstereceğiz. $x_1, x_2, \dots, x_m$ noktalarının en az birinde 1 değerini aldığı varsayımı altında, Γ nin her elemanı bir homomorfizmadır; bu nedenle en küçük üst sınır olan x de 1 değerini aldığı kabul edilebilir. Böylece $\Gamma \subseteq \Delta$ sonuçlandırılmış olur. Diğer taraftan, Γ da olmayan herhangi bir homomorfizma ve dolayısıyla $x_1, x_2, \dots, x_m$ noktaların herhangi birinde 1 değerini almadığı varsayımı altında bu noktaların her birinde ve en küçük alt sınırı olan x noktasında da 0 değerini alır; böylece Δ ya ait olamaz. O halde $\Delta \subseteq \Gamma$ dır. Sonuç olarak, $\Gamma = \Delta$ dır ve Δ bir temel açık küme olduğundan (Lemma 7.1.3 uyarınca), Γ da bir temel açık küme olmalıdır. $\square$

7.2 Stone Teoremi

Teorem 7.2.1 (Stone Teoremi) Her Boole cebiri kendi Stone uzayının clopen alt kümelerinin Boole cebirine izomorftur.

Kanıt $S(\mathcal{A})$ nın clopen alt kümelerinin Boole cebiri $\mathcal{B}(S(\mathcal{A}))$ ile gösterilir.

H , $\mathcal{A}$ dan $\mathcal{P}(S(\mathcal{A}))$ içine aşağıdaki şekilde tanımlı bir dönüşümü gösterebiliriz: $\mathcal{A}$ daki her bir a elemanı için

$$H(a) = \{h \in S(\mathcal{A}) : h(a) = 1\}.$$

H , $\mathcal{A}$ dan $\mathcal{B}(S(\mathcal{A}))$ üzerine Boole cebirlerinin bir izomorfizması olduğunu gösterelim.

Lemma 7.1.3 ve Lemma 7.1.8 dan, H dönüşümü $\mathcal{B}(S(\mathcal{A}))$ daki değerleri kabul eder ve görüntüsü $\mathcal{B}(S(\mathcal{A}))$ nın tümüdür. Böylece H , $\mathcal{A}$ dan $\mathcal{B}(S(\mathcal{A}))$ üzerine bir örten dönüşüm olur.

Teorem 5.1.8 den, H nin Boole cebirlerinin bir izomorfizması olduğunu göstermek için, $\mathcal{A}$ daki tüm x ve y elemanları için $x \leq y \Leftrightarrow H(x) \subseteq H(y)$ olduğunu güvence altına almak yeterlidir.

Böylece x ve y , $\mathcal{A}$ nın iki elemanı olsun. Eğer x , y den küçük veya y ye eşit ise o zaman $h(x) = 1$ i sağlayan herhangi bir h homomorfizması için $h(y) = 1$ olur. Bu da $H(x)$ in $H(y)$ nin bir alt kümesi olması anlamına gelir. Eğer x , y den küçük veya eşit değil ise, o zaman Lemma 3.1.5 den $x(1+y) \neq 0$ olur. Böylece $x(1+y)$ tarafından üretilen esas süzgeci, ultra süzgeç teoreminden bunu içeren bir ultra süzgeci ve bu ultra süzgeçle birleşmeli $h \in S(\mathcal{A})$ homomorfizmasını göz önünde bulundurabiliriz. $h(x(1+y)) = 1$ dir, böylece $h(x) = 1$ ve $h(1+y) = 1$, yani $h(y) = 0$, elde edilir. Buradan $h \in H(x)$ ve $h \notin H(y)$ sonucuna ulaşılır ve böylece $H(x)$, $H(y)$ de içerilmez. $\square$

Stone teoremi Teorem 5.1.11 nin çok basit bir ispatını elde etmemizi olanak sağlar.

Sonuç Teoremi 7.2.2 Her sonlu Boole cebiri bazı kümelerin alt kümelerinin Boole cebirine izomorfiktir.

Kanıt Eğer A kümesi sonlu ise o zaman $\{0,1\}^A$ üzerindeki topoloji diskret topolojidir. Böylece bu $S(A)$ alt kümesi üzerinde oluşturulmuş topoloji için de durum benzerdir. O zaman $S(A)$ nın tüm alt kümeleri hem açık hemde kapalıdır. Böylece $\mathcal{B}(S(A))$ Boole cebiri $\mathcal{P}(S(A))$ ile çakışır ve $\mathcal{A}$, $\mathcal{P}(S(A))$ ya izomorfiktir. $\square$

Keyfi bir Boole cebiri durumunda, Stone teoremi, bir kümenin alt kümelerinin cebirinin bir Boole alt cebirine izomorf olduğunu gösterir.

7.3 Boole Uzayları Stone Uzaylarıdır

Her bir Boole cebiri bir Boole topolojik uzayıyla, $S(A)$ Stone uzayıyla, ilişkilendirdik ve $\mathcal{A}$ nın bu Boole uzayının clopen alt kümelerinin Boole cebirine izomorfik olduğu gördük. $\mathcal{A}$, bir Boole X topolojik uzayının clopen alt kümelerinin Boole cebiri olarak verildiğinde, iddia doğal olarak çalışır. O zaman problem X uzayı ile $\mathcal{A}$ nın Stone uzayı olan bu diğer Boole uzayının, diğer bir deyişle X ve $S(\mathcal{B}(X))$ in, karşılaştırılmasından ileri gelir. Bu karşılaştırmanın sonucu bu iki objenin birbirine çok benzemesinden meydana gelir.

Teorem 7.3.1 Her X Boole topolojik uzayı X in clopen alt kümelerinin Boole cebirinin $S(\mathcal{B}(X))$ Stone uzayına homomorfudur.

Kanıt X bir Boole uzayı olsun. Lemma 2.2.13 e göre, X in clopen alt kümelerinin $\mathcal{B}(X)$ Boole cebirlerini X üzerindeki topolojide olan açık kümeler için bir baz olarak alabiliriz.

Her $x \in X$ için f_x , $\mathcal{B}(X)$ den $\{0,1\}$ üzerine aşağıdaki gibi tanımlı bir dönüşümü gösterebiliriz:

$$f_x(\Omega) = \begin{cases} \mathbf{1} & x \in \Omega \text{ ise} \\ \mathbf{0} & x \notin \Omega \text{ ise.} \end{cases}$$

Her $x \in X$ için f nin, f_x in, X topolojik uzayından $S(\mathcal{B}(X))$ topolojik uzayı üzerine bir homomorfizm olduğunu göstereceğiz.

f , X den $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}^{\mathcal{B}(X)}$ içine bir dönüşüm olduğundan f nin $S(\mathcal{B}(X))$ de değerler aldığını kabulü altında kanıtımıza devam edelim.

- Her $x \in X$ için f_x Boole cebirlerinin bir homomorfizmasıdır:

Kanıt: X in herhangi iki clopen Ω ve Δ altkümeleri için $f_x(\Omega \cap \Delta) = \mathbf{1}$ olması için gerek ve yeter koşul $x \in \Omega \cap \Delta$, yani $x \in \Omega$ ve $x \in \Delta$, diğer bir deyişle $f_x(\Omega) = \mathbf{1}$ ve $f_x(\Delta) = \mathbf{1}$ olmasıdır. Böylece $f_x(\Omega)f_x(\Delta) = \mathbf{1}$ olur. Buradan $f_x(\Omega \cap \Delta) = f_x(\Omega)f_x(\Delta)$ sonucu elde edilir. Diğer taraftan, $f_x(X - \Omega) = \mathbf{1}$ ancak ve ancak $x \in X - \Omega$, yani $x \notin \Omega$ veya $f_x(\Omega) = \mathbf{0}$, dır. Böylece $f_x(X - \Omega) = \mathbf{1} + f_x(\Omega)$ elde edilir. Teorem 5.1.5 deki koşullar gerçekleştiğinden, f_x bir homomorfizmadır.

- f dönüşümü bire-birdir:

Kanıt: x ve y , X in farklı elemanları olsun. X Hausdorff olduğundan $x \in O$ ve $y \notin O$ olacak şekilde bir O açık kümesi bulabiliriz (örneğin, $O = X - \{y\}$ alabiliriz). Fakat O , $\mathcal{B}(X)$ bazlarındaki temel açık kümelerin bir birleşimidir; bu durumda $x \in \Omega$ ve $y \notin \Omega$ olacak biçimde bir $\Omega \in \mathcal{B}(X)$ clopen kümesi vardır. Böylece $f_x(\Omega) = \mathbf{1}$ ve $f_y(\Omega) = \mathbf{0}$ dir. O halde f_x , f_y den farklıdır.

- f dönüşümü $S(\mathcal{B}(X))$ üzerinde örtendir:

Kanıt: h , $S(\mathcal{B}(X))$ in bir elemanı, yani $\mathcal{B}(X)$ den $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ içine bir homomorfizma, olsun. h ile birlikte $\mathcal{B}(X)$ üzerindeki ultra süzgeç

$$\mathcal{U} = \{\Omega \in \mathcal{B}(X) : h(\Omega) = \mathbf{1}\} = h^{-1}[\{\mathbf{1}\}]$$

dir. Lemma 6.5.4 den $\mathcal{U}$ sonlu kesişim özelliğine sahip olduğundan, $\mathcal{U}$ nun elemanları kapalıdır ve böylece X topolojik uzayı kompakt olduğundan $\mathcal{U}$ nun tüm elemanlarının kesişiminin boş olmadığını ileri sürebiliriz. x bu kesişimin bir elemanı olsun.

Her clopen $\Omega \in \mathcal{B}(X)$ kümesi için ya $\Omega \in \mathcal{U}$ ya da $\Omega \notin \mathcal{U}$ dır. Birinci durumda $f_x(\Omega) = \mathbf{1}$ ve $h(\Omega) = \mathbf{1}$, ikinci durumda $X - \Omega \in \mathcal{U}$ olur (Uyarı 6.4.3). Böylece $f_x(\Omega) = \mathbf{0}$ ve $h(\Omega) = \mathbf{0}$ dır. Böylece her $\Omega \in \mathcal{B}(X)$ için $f_x(\Omega) = h(\Omega)$ olur. O halde $h = f_x = f(x)$ dir.

f dönüşümü altında h nin bir ön görüntüsü olan x elemanının $\mathcal{U}$ ya ait olan bütün clopen kümelerin kesişimindeki tek eleman olduğunu gözlemleyelim. Bunu görmek için bu kesişimdeki herhangi bir y elemanının yukarıdaki gibi $h = f(y)$ yi koruduğunu belirtelim. f bire-bir olduğundan, bu $x = y$ eşitliğini gerektirecekti. Bu gözlem altında f^{-1} ters bijeksiyonunu tanımlayabilir: f^{-1} , $\mathcal{B}(X)$ den $\{0,1\}$ içine olan dönüşümdür ve $\mathcal{B}(X)$ in $\{0,1\}$ içindeki her bir h homomorfizması $h^{-1}[\{1\}]$ ultra süzgecine ait bütün clopen kümelerinin kesişimindeki tek elemana eşleyen dönüşümdür.

- f dönüşümü süreklidir.

Kanıt: G , $S(\mathcal{B}(X))$ in clopen alt kümelerinin bazına ait olan bir açık küme olsun. Lemma 7.1.3 den, $\mathcal{B}(X)$ de $G = \{h \in S(\mathcal{B}(X)) : h(\Omega) = \mathbf{1}\}$ olacak biçimde bir tek Ω elemanı vardır. G nin f dönüşümü altındaki ters görüntüsü

$$\{x \in X : f_x \in G\} = \{x \in X : f_x(\Omega) = \mathbf{1}\} = \{x \in X : x \in \Omega\} = \Omega$$

dır. O halde G , X in açık bir alt kümesidir.

- f^{-1} ters dönüşümü süreklidir.

Kanıt: Ω , X uzayında bir temel açık küme (yani, $\mathcal{B}(X)$ in bir elemanı) olsun. Böylece f bir bijeksiyon olduğu için Ω ın f^{-1} altındaki ters görüntüsü onun f

altındaki direkt görüntüsüdür. Böylece $f[\Omega] = \{f_x : x \in \Omega\}$ dır. Bu kümenin $S(\mathcal{B}(X))$ uzayında bir açık küme olduğunu göstermeliyiz.

$$V = \{h \in S(\mathcal{B}(X)) : h(\Omega) = \mathbf{1}\} \text{ olsun.}$$

V kümesi, Lemma 7.1.3 den, $S(\mathcal{B}(X))$ de açıktır (hatta bir açık temel kümedir). $f[\Omega] = V$ yi gösterirsek ispatı tamamlamış oluruz.

Her $x \in \Omega$ için f_x in tanımından $f_x(\Omega) = \mathbf{1}$ dır, dolayısıyla $f_x \in V$ olur. O halde $f[\Omega] \subseteq V$ dir.

Her $h \in V$, f bijeksiyonu altında bir $y \in X$ öngörüntüsüne sahiptir, $h = f_y$ diyelim. $h \in V$ olduğundan $h(\Omega) = f_y(\Omega) = \mathbf{1}$, buradan $y \in \Omega$ ve $f_y = h \in f[\Omega]$ olur. Böylece V , $f[\Omega]$ de içerilir. $\square$

Sonuç :

Boole cebirleri ve Boole topolojik uzayları arasında bire-bir bir eşleme kurulmuş oldu:

- Her Boole cebiri bir Boole topolojik uzayının clopen alt kümelerinin Boole cebiridir (izomorftur);
- Her Boole topolojik uzayı bir Boole cebirlerinin Stone uzayıdır (homomorftur).

Aşağıdaki iki özellik vardır:

- Herhangi iki Boole cebirinin izomorf olması için gerek ve yeter koşul Stone uzaylarının homeomorfik olmasıdır;
- Herhangi iki Boole topolojik uzayının homeomorfik olması için gerek ve yeterli şart kendi clopen alt kümelerinden oluşan Boole cebirlerinin izomorfik olmasıdır.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- **Adams, C. and Franzosa, R.**, 2008, “Introduction to Topology”, Pearson, 2008.
- **Bell, J. L. and Slomson, A. B.**, 1971, “Models and Ultraproducts”, North-Holland.
- **Burris, S. and Sankappanavar, H. P.**, 1981, “A Course in Universal Algebra”, Springer.
- **Church, A.**, 1996, “Introduction to Mathematical Logic”, Princeton University Pres.
- **Cori, R. and Lascar, D.**, 2002, “Mathematical Logic”, Oxford University Press.
- **Donalt, J. M. and Bonnet, R.**, 1989, “Handbook of Boolean Algebras”, North-Holland.
- **(Givant, S. and Halmos, P.**, 2009, “Introduction to Boolean Algebras”, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer.
- **Goodstein, R. L.**, 2007, “Boolean Algebras”, Dover Publications.
- **Padmanabhan, R. and Redeanu, S.**, 2009, “Axioms For Lattices and Boolean Algebras”, World Scientific.
- **Sikorski, R.**, 1960, “Boolean Algebras”, Springer-Verlag.
- **Van Dalen, D.**, 1983, “Logic and Structures”, Springer-Verlag.
- **Whitesitt, J. E.**, 1995, “Boolean Algebra and Its Applications”, Addison-Wesley Publishing Company.