

**BÖGEL SÜREKLİ FONKSİYONLAR
İÇİN A-İSTATİSTİKSEL YAKLAŞIM
FADİME DİRİK
DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

T. C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BÖGEL SÜREKLİ FONKSİYONLAR İÇİN A-
İSTATİSTİKSEL YAKLAŞIM**

FADİME DİRİK

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

AKADEMİK DANIŞMAN

Doç. Dr. Kamil DEMİRCİ

İKİNCİ DANIŞMAN

Yrd. Doç. Dr. Cenap DUYAR

SAMSUN – 2010

T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Bu çalışma jürimiz tarafından 26/03/2010 tarihinde yapılan sınav ile Matematik Anabilim Dalı'nda DOKTORA tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. A. Turan GÜRKANLI

Üye : Prof. Dr. Murteza YILMAZ

Üye : Doç. Dr. Kamil DEMİRCİ

Üye : Doç. Dr. Ali ARAL

Üye : Yrd. Doç. Dr. Ayşe SANDIKÇI

ONAY :

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

.../.../....

Prof. Dr. Hasan GÜMÜŞ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdür

BÖGEL SÜREKLİ FONKSİYONLAR İÇİN A-İSTATİSTİKSEL YAKLAŞIM

ÖZ

Bu doktora tezinde ilk olarak, kullanacağımız bazı tanım, teorem ve semboller verilmiştir.

Daha sonra, bulgular bölümünün ilk kısmında, çift indisli fonksiyon dizileri için alışılmış düzgün yakınsaklıktan kuvvetli olan A-istatistiksel düzgün yakınsaklık kavramı kullanılarak, sürekli fonksiyonların uzayından daha geniş olan Bögel-sürekli (B-sürekli) fonksiyonların uzayında Korovkin tipi yaklaşım teoremi çalışılmıştır. Ayrıca elde edilen yaklaşım teoreminin daha kuvvetli olduğuna dair bir örnek verilmiştir. Son olarak bu teorem için A-istatistiksel yakınsaklık oranı hesaplanmıştır.

Bulgular bölümünün ikinci kısmında, her iki değişkene göre 2π -periyodik ve sürekli fonksiyonların uzayından daha geniş olan B- 2π -periyodik ve B-sürekli fonksiyonların uzayında A-istatistiksel yakınsaklık kavramı kullanılarak Korovkin tipi yaklaşım teoremi elde edilmiştir. Ayrıca, bu yeni teoremi sağlayan fakat klasik durumda çalışmayan bir örnek verilmiştir. Son olarak, pozitif lineer operatörlerin dizilerinin A-istatistiksel yakınsaklık oranı hesaplanmıştır.

Bulgular bölümünün son kısmında, n-indisli diziler için istatistiksel yakınsaklık kavramı yardımıyla $\mathbb{R}^n$ uzayının kompakt bir alt kümesi üzerinde tanımlı n-değişkenli B-sürekli fonksiyonların uzayında Korovkin tipi yaklaşım teoremi elde edilmiştir. Ayrıca, yeni yaklaşım teoreminde çalışan fakat klasik durumda çalışmayan bir örnek verilmiştir.

Anahtar kelimeler: çift indisli fonksiyon dizileri için alışılmış düzgün yakınsaklık, çift indisli diziler için A-istatistiksel yakınsaklık, B-süreklilik, B- 2π -periyodiklik, pozitif lineer operatör, Korovkin tipi yaklaşım teoremi, n-değişkenli B-sürekli fonksiyonlar, n-indisli diziler.

A-STATISTICAL APPROXIMATION FOR BÖGEL-CONTINUOUS FUNCTIONS

ABSTRACT

Firstly, in this thesis, main definitions, theorems and symbols used have been given.

Then, in first part of findings section, using the concept of A-statistical uniform convergence, which is stronger than usual uniform convergence for double function sequences, Korovkin-type approximation theorem has been studied in the space of all Bögél-continuous (B-continuous) functions which is wider than the space of all continuous functions. Also, an example that shows the obtained approximation theorem is stronger has been given. Finally, the rate of A-statistical convergence for this theorem has been computed.

In the second part of findings section, by using the concept of A-statistical convergence, Korovkin-type approximation theorem has been obtained in the space of all $B-2\pi$ -periodic and B-continuous functions which is wider than the space of all continuous and 2π -periodic with respect to both variables. Moreover, an example that shows this new result works but its classical case doesn't work has been given. Lastly, the rate of A-statistical convergence of a sequence of positive linear operators has been calculated.

In the end of the section, Korovkin-type approximation theorem has been obtained in the space of all n-variate B-continuous functions defined on a compact subset of the real n-dimensional space via the concept of statistical convergence for n-multiple sequences. Also, an example such that our new approximation result works but its classical case doesn't work has been given.

Key words: Usual unifom convergence for double function sequences, A-statistical convergence for double sequence, B- continuity, $B-2\pi$ -periodic, positive linear operators, Korovkin-type approximation theorem, n-variate B-continuous functions, n-multiple sequence.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunu bana vererek, çalışmalarım boyunca yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Doç. Dr. Kamil DEMİRCİ' ye saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca çalışmalarım boyunca desteğini esirgemeyen canım ailem ve eşim Öğr. Gör. Hasan DİRİK' e teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
1. GİRİŞ.....	1
2. GENEL BİLGİLER.....	3
2.1. P. P. Korovkin Teoremleri.....	4
2.2. İstatistiksel ve A-istatistiksel Yakınsaklık.....	6
2.3. İstatistiksel Yakınsak Fonksiyon Dizileri.....	12
2.4. İstatistiksel Yakınsaklık Yardımıyla Bazı Yaklaşım Teoremleri.....	13
2.5. Çift İndisli Dizilerin Pringsheim Anlamında Yakınsaklığı.....	14
2.6. Çift İndisli Dizilerin A-İstatistiksel Yakınsaklığı.....	15
2.7. Bölge-sürekli (B-sürekli) ve $B-2\pi$ -periyodik Fonksiyonlar.....	19
3. MATERYAL VE YÖNTEMLER.....	27
4. BULGULAR.....	28
4.1. Pozitif Lineer Operatörler Yardımıyla B-sürekli Fonksiyonlar için A-İstatistiksel Anlamda Yaklaşım.....	28
4.2. Bölge-sürekli ve Periyodik Fonksiyonlar için A-İstatistiksel Yaklaşım.....	43
4.3. Positive Lineer Operatörler Yardımıyla n-değişkenli B-sürekli Fonksiyonlar için İstatistiksel Anlamda Yaklaşım.....	57
5. TARTIŞMA.....	68
6. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	69
7. KAYNAKLAR.....	70
ÖZGEÇMİŞ.....	73

SİMGE VE KISALTMALAR LİSTESİ

$ K $	: K kümesinin eleman sayısı
δ	: Yoğunluk fonksiyonu
δ_A	: A-yoğunluk fonksiyonu
$(Ax)_n$	: x dizisinin A matrisi altındaki dönüşüm dizisi
S	: İstatistiksel yakınsak diziler uzayı
c	: Yakınsak dizilerin uzayı
C_1	: Cesáro matrisi
χ_K	: K kümesinin karakteristik fonksiyonu
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$B(D)$	: D üzerindeki sınırlı fonksiyonların uzayı
$\ \cdot\ _{B(D)}$	: $B(D)$ uzayının alışılmış supremum normu
$C(D)$	: D üzerindeki sürekli fonksiyonların uzayı
C^*	: $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı reel değerli tüm sürekli ve 2π -periyodik fonksiyonların uzayı
$\ \cdot\ _{C^*}$	: C^* uzayının alışılmış supremum normu
$\Delta_{x,y}[f(u,v)]$	: f fonksiyonunun karışık farkı
$C_b(D)$	: $D \subset \mathbb{R}^2$ üzerinde tanımlı reel değerli tüm B-sürekli fonksiyonların uzayı
$B_{2\pi}$	: $\mathbb{R}^2$ üzerinde tanımlı reel değerli tüm B- 2π -periyodik ve B-sürekli fonksiyonların uzayı
$C_{2\pi,2\pi}$	: $\mathbb{R}^2$ üzerinde tanımlı reel değerli tüm iki değişkenli sürekli ve her iki değişkene göre 2π -periyodik olan fonksiyonların uzayı
$\omega_m(f; \delta_1, \delta_2)$	: Karışık B-süreklilik modülü

1. GİRİŞ

İstatistiksel yakınsaklık kavramı ilk olarak 1951 yılında Steinhaus tarafından Polonya’da yapılan bir konferansta tanıtıldı ve yine aynı yıl Fast tarafından geliştirildi. “İstatistiksel Yakınsaklık” kavramı, Toplanabilme Teorisi (Schoenberg, 1959 ve Fridy, 1985), Fourier Serileri (Zygmund, 1979), Fonksiyonel Analiz (Connor, 1988, 1989, 2000; Demirci ve Orhan 1999; Kline, 1995), Sayılar Teorisi (Erdős ve Tenenbaum, 1989) ve son zamanlarda ise Ölçü Teorisi (Miller, 1995; Miller ve Orhan, 2001), İstatistik (Fridy ve Khan, 1998), Optimizasyon Teorisi (Pehlivan ve Mamedov, 2000) ve Yaklaşım Teorisi (Gadjiev ve Orhan, 2002) gibi matematiğin temel alanlarıyla olan ilişkisi nedeniyle yaklaşık yarım asırdır birçok matematikçinin ilgilendiği önemli bir konu haline gelmiştir. Korovkin tipi yaklaşım teoremleri, yaklaşımlar teorisinde temel oluşturmaktadır (Korovkin, 1960; DeVore, 1972). $C[a, b]$ ile $[a, b]$ üzerindeki sürekli fonksiyonların uzayı ve $B[a, b]$ ile $[a, b]$ üzerindeki sınırlı fonksiyonların uzayını gösterelim. Korovkin, $C[a, b]$ uzayından $B[a, b]$ uzayına tanımlı $\{L_n\}$ pozitif lineer operatörlerinin $\mathbb{R}$ üzerinde sınırlı herhangi $f \in C[a, b]$ fonksiyonuna yakınsaması problemini incelemiştir (Korovkin, 1960). Pozitif lineer operatörlerin dizileri yardımıyla, sürekli fonksiyonların yaklaşımı birçok araştırmada göz önüne alınmış ve birçok operatörün Korovkin tipi yaklaşım özellikleri araştırılmıştır. Bununla birlikte, Korovkin teorisi daha sonra süreklilik yerine Bögel-süreklilik (B-süreklilik) kavramı kullanılarak genelleştirildi (Bögel, 1934, 1935, 1962). Göz önüne alınan işlemlerin, sürekli fonksiyonların uzayından daha geniş olan Bögel-sürekli (B-sürekli) fonksiyonlar uzayı içinde geçerli olduğu C. Badea, I. Badea ve H.H. Gonksa tarafından gösterilmiştir (Badea ve ark., 1986). Daha sonra, sürekli ve her iki değişkene göre 2π -periyodik fonksiyonların uzayından daha geniş olan B-sürekli ve $B-2\pi$ -periyodik fonksiyonlar uzayı içinde geçerli olduğu C. Badea, I. Badea ve C. Cottin tarafından gösterilmiştir (Badea ve ark., 1988). 2001 yılında D. Bărbosu tarafından $\mathbb{R}^n$ uzayının kompakt bir alt kümesi üzerinde tanımlı n-indisli pozitif lineer operatörler için Korovkin tipi yaklaşım teoremi elde edilmiştir (Bărbosu, 2001).

Bu doktora tezinin birinci bölümünde, çift indisli dizilerin A-istatistiksel yakınsaklık tanımını kullanarak, C. Badea, I. Badea ve H.H. Gonksa tarafından verilen Korovkin tipi yaklaşım teoreminden daha kuvvetli sonuçlar elde edeceğiz. Ayrıca,

verdiğimiz teoremin daha kuvvetli olduğuna dair bir örnek verip, verdiğimiz teorem için A-istatistiksel yakınsaklık oranını hesaplayacağız. İkinci bölümde, C. Badea, I. Badea ve C. Cottin tarafından verilen Korovkin tipi yaklaşım teoremden daha kuvvetli sonuçlar elde edeceğiz. Ayrıca, elde ettiğimiz teoremin daha kuvvetli olduğuna dair bir örnek verip, bu teorem için A-istatistiksel yakınsaklık oranını hesaplayacağız. Son olarak, n-indisli diziler için istatistiksel yakınsaklık kavramı yardımıyla $\mathbb{R}^n$ uzayının kompakt bir alt kümesi üzerinde tanımlı n-değişkenli B-sürekli fonksiyonların uzayında D. Bărbosu tarafından verilen Korovkin tipi yaklaşım teoreminden daha kuvvetli sonuçlar elde edeceğiz. Ayrıca, yeni yaklaşım teoremimizde çalışan fakat klasik durumda çalışmayan bir örnek vereceğiz.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde hazırlanacak olan tezin içeriğinde kullanılacak olan bazı önemli tanım, teorem ve semboller tanıtılacaktır.,

X ve Y reel değerli fonksiyonların iki fonksiyon uzayı olsun.

2.1. Tanım: X uzayının her bir elemanını Y nin bir ve yalnız bir elemanına karşılık getiren L kuralına X uzayından Y uzayına bir operatör denir. Bu durum $L(f(t);x) = g(x)$ şeklinde gösterilir. Burada $L(f(t);x)$ gösterimi yerine $L(f;x)$ yazacağız. Ayrıca, X kümesine L operatörünün tanım kümesi denir ve $D(L)$ ile gösterilir. $R(L) = \{g : L(f;x) = g(x), f \in D(L)\}$ kümesine L operatörünün değer kümesi denir ve $R(L) \subset Y$ olur.

X bir lineer fonksiyon uzayı olmak üzere lineer operatörün tanımını verebiliriz.

2.2. Tanım: f_1, f_2 , X uzayında herhangi iki fonksiyon ve her $x \in X$, her $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ için L operatörü

$$L(a_1 f_1 + a_2 f_2; x) = a_1 L(f_1; x) + a_2 L(f_2; x)$$

koşulunu sağlıyor ise o taktirde L operatörüne lineer operatör denir. Bu tanımdan görüleceği gibi $L(0;x) = 0$ olur.

Lineer operatörler kümesi içinde çok önemli bir alt sınıf vardır ki o da pozitif lineer operatörlerdir.

2.3. Tanım: $X^+ = \{f \in X : f(x) \geq 0\}$, $Y^+ = \{g \in Y : g(x) \geq 0\}$ olsun. Eğer X uzayında tanımlanmış bir L lineer operatörü X^+ kümesindeki herhangi bir f fonksiyonunu pozitif fonksiyona dönüştürüyor ise o taktirde L operatörüne pozitif lineer operatör denir. Yani $f(x) \geq 0$ olduğunda $L(f;x) \geq 0$ olur.

Ayrıca $f(x) \leq g(x)$ olduğunda $L(f;x) \leq L(g;x)$ olur ki bu ise pozitif lineer operatörlerin monoton olduğunu gösterir.

Örneğin; 1912 yılında S. Bernstein, $[0,1]$ aralığında verilmiş sürekli bir fonksiyona yakınsayan polinom tanımlamıştır. $0 \leq x \leq 1$ olmak üzere

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad (2.1)$$

şeklindedir. $x^k (1-x)^{n-k} \geq 0$ olduğundan $B_n(f; x)$ pozitif lineer operatördür.

$D, \mathbb{R}$ nin kompakt bir alt kümesi olmak üzere sırasıyla $C(D)$ ve $B(D)$ ile D üzerinde tanımlı reel değerli tüm sürekli fonksiyonların uzayını ve tüm sınırlı fonksiyonların uzayını gösterelim. $C(D)$ ve $B(D)$ uzayları $\|f\|_{B(D)} := \sup_{x \in D} |f(x)|$ normu ile birer Banach uzayıdır. Ayrıca bu norma göre yakınsaklık düzgün yakınsaklıktır.

C^* ile reel sayılar kümesi üzerinde tanımlı reel değerli tüm sürekli ve 2π -periyodik fonksiyonların uzayını gösterelim. C^* uzayı üzerindeki norm supremum normu, yani $\|f\|_{C^*} := \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ normudur.

2.1. P. P. Korovkin Teoremleri

1951 yılında H. Bohman, toplam şeklindeki pozitif lineer operatörler dizisinin $[0,1]$ aralığında sürekli $f(x)$ fonksiyonuna yaklaşması problemini incelemiştir. H. Bohman, $x \in [0,1]$, $0 \leq \alpha_{k,n} \leq 1$ olduğunda

$$L_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f(\alpha_{k,n}) P_{k,n}(x), \quad P_{k,n}(x) \geq 0$$

pozitif operatörler dizisinin, $n \rightarrow \infty$ için $[0,1]$ aralığında $L_n(f; x) \Rightarrow f(x)$ olması için gerekli ve yeterli koşul

$$(1) \quad L_n(1; x) \Rightarrow 1$$

$$(2) \quad L_n(t; x) \Rightarrow x$$

$$(3) \quad L_n(t^2; x) \Rightarrow x^2$$

olduğunu göstermiştir. Burada “ $\Rightarrow$ ” simgesi düzgün yakınsaklığı göstermektedir. Bohman’ın araştırdığı operatörlerin değerinin, f fonksiyonunun $[0,1]$ aralığının dışındaki değerlerden bağımsız olduğu açıktır.

1953 yılında P.P. Korovkin, Bohman'nın koşullarının genel halde de gerçekleştiğini genel bir teoremle ispatlamıştır.

2.1.1. Teorem: Eğer $\{L_n\}$, $L_n : C[a, b] \rightarrow B[a, b]$ pozitif lineer operatörler dizisi, $[a, b]$ aralığında (1), (2), (3) koşullarını gerçekleştiriyorsa bu taktirde tüm reel eksende sınırlı herhangi $f \in C[a, b]$ için $n \rightarrow \infty$ gittiğinde

$$L_n(f; x) \Rightarrow f(x), \quad a \leq x \leq b$$

olur (Korovkin, 1960).

Şimdi Korovkin teoreminin koşullarını sağlayan bir örnek verelim. (2.1) deki Bernstein polinomunu göz önüne alınırsa,

$$(1) \quad B_n(1; x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (1-x+x)^n = 1$$

$$\begin{aligned} (2) \quad B_n(t; x) &= \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= x \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\ &= x \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k!} x^{k-1} (1-x)^{n-k-1} \\ &= x \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-k-1} = x(1-x+x)^{n-1} = x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad B_n(t^2; x) &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 \frac{n!}{(n-k)!k!} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= x \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\ &= x \sum_{k=2}^n \frac{k-1}{n} \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k} + \frac{x}{n} \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\ &= x^2 \frac{n-1}{n} \sum_{k=2}^n \frac{(n-2)!}{(n-k)!(k-2)!} x^{k-2} (1-x)^{n-k} + \frac{x}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-k-1} \\ &= x^2 \frac{n-1}{n} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} x^k (1-x)^{n-k-2} + \frac{x}{n} = x^2 \frac{n-1}{n} + \frac{x}{n} \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $n \rightarrow \infty$ için

$$(1) \|B_n(1; x) - 1\|_{B[0,1]} \rightarrow 0$$

$$(2) \|B_n(t; x) - x\|_{B[0,1]} \rightarrow 0$$

$$(3) \|B_n(t^2; x) - x^2\|_{B[0,1]} \rightarrow 0$$

sağlanır. 2.1.1. Teoreme göre herhangi $f \in C[0,1]$ için

$$\|B_n(f; x) - f(x)\|_{B[0,1]} \rightarrow 0$$

gerçeklenir.

2.1.2. Teorem: $\{L_n\}$, $L_n : C^* \rightarrow C^*$ pozitif lineer operatörler dizisi olsun. $[a, b]$ aralığında $\{L_n(1; x) - 1\}$, $\{L_n(\cos t; x) - \cos x\}$ ve $\{L_n(\sin t; x) - \sin x\}$ dizileri sıfıra düzgün yakınsak ise $[a, b]$ aralığı üzerinde sınırlı herhangi $f \in C^*$ için $L_n(f; x) \Rightarrow f(x)$ olur (Korovkin, 1960).

2002 yılında Gadjiev ve Orhan tarafından yakınsaklıktan daha kuvvetli olan istatistiksel yakınsaklık kavramı kullanılarak, $C[a, b]$ uzayı üzerinde Korovkin tipi yaklaşım teoremi verilmiştir. Daha sonra, 2003 yılında Duman, periyodik fonksiyonlar uzayı üzerinde tanımlı pozitif lineer operatörler için A-istatistiksel yakınsaklık kavramını kullanarak Korovkin tarafından verilen sonuçtan daha kuvvetli sonuçlar elde etmiştir. Bunu vermeden önce istatistiksel ve A-istatistiksel yakınsaklık kavramını hatırlatalım.

2.2. İstatistiksel ve A-istatistiksel Yakınsaklık

$\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin bir altkümesi K ve $K_n := \{k \leq n : k \in K\}$ olsun. K_n kümesinin eleman sayısını da $|K_n|$ ile gösterelim.

2.2.1. Tanım: $K \subseteq \mathbb{N}$ olsun. Eğer

$$\lim_n \frac{|K_n|}{n}$$

limiti mevcut ise, bu limit değerine K kümesinin “yoğunluğu” denir ve $\delta\{K\}$ ile gösterilir (Niven ve Zuckerman, 1980).

$\{a_k\}$ pozitif tamsayıların bir dizisi ve $K = \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere $\delta\{K\}$ mevcut ise

$$\delta\{K\} = \lim_n \frac{n}{a_n}$$

olur (Niven ve Zuckerman, 1980).

$$\text{Örneğin; } \delta\{\mathbb{N}\} = 1, \quad \delta\{n^2 : n \in \mathbb{N}\} = 0, \quad \delta\{2n : n \in \mathbb{N}\} = \delta\{2n+1 : n \in \mathbb{N}\} = \frac{1}{2}$$

olduğu yoğunluk tanımından kolaylıkla elde edilebilir. $\delta\{A\}$ ve $\delta\{\mathbb{N} \setminus A\}$ yoğunluklarından biri mevcut ise, bu durumda $\delta\{\mathbb{N} \setminus A\} = 1 - \delta\{A\}$ olacaktır (Niven ve Zuckerman, 1980; Freedman ve Sember, 1981).

Şimdi yoğunluk kavramını kullanarak istatistiksel yakınsaklık tanımını hatırlatalım:

2.2.2. Tanım: $x = \{x_k\}$ reel ya da kompleks terimli bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta\{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon\} = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, bu durumda x dizisi L sayısına “istatistiksel yakınsaktır” denir ve bu durum $\text{st} - \lim x = L$ şeklinde gösterilir (Fast, 1951; Steinhaus, 1951).

Şimdi istatistiksel yakınsaklık kavramı için bazı karakterizasyonlar hatırlatalım.

2.2.3. Teorem: $x = \{x_k\}$ dizisinin bir L sayısına istatistiksel yakınsak olması için gerekli ve yeterli koşul $\delta\{n_k : k \in \mathbb{N}\} = 1$ olması ve $\lim_k x_{n_k} = L$ olacak şekilde en az bir $\{x_{n_k}\}$ yakınsak alt dizisinin bulunmasıdır (Connor, 1989; Fridy, 1985; Şalât, 1980).

2.2.3. Teoremden görüleceği üzere $\text{st} - \lim x = L$ olması için gerekli ve yeterli koşul her $\varepsilon > 0$ ve $n \geq n_0$ olacak şekilde her $n \in K$ için $|x_n - L| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta\{K\} = 1$ olan bir $K \subseteq \mathbb{N}$ altkütmesi ve $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı vardır.

2.2.4. Örnek: $x = \{x_k\}$ dizisinin genel terimi

$$x_k = \begin{cases} 1 & , \quad k = m^2 \\ 0 & , \quad k \neq m^2 \end{cases}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

şeklinde tanımlansın. Her $\varepsilon > 0$ için

$$0 \leq \left| \{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\} \right| \leq \left| \{k \leq n : x_k \neq 0\} \right| \leq \sqrt{n}$$

olduğundan

$$0 \leq \lim_n \frac{1}{n} \left| \{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\} \right| \leq \lim_n \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

bulunur. Böylece $\text{st} - \lim x = 0$ elde edilir.

Ayrıca yakınsak her dizinin sınırlı olduğunu klasik analizden biliyoruz. Fakat istatistiksel yakınsak dizilerin sınırlı olması gerekmez. Şimdi buna bir örnek verelim.

2.2.5. Örnek: Genel terimi

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k} & , \quad k = m^2 \\ 0 & , \quad k \neq m^2 \end{cases}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

şeklinde tanımlanan $x = \{x_k\}$ dizisi için $\text{st} - \lim x = 0$ olduğu açıktır ve bu dizi üstten sınırsızdır.

2.2.2. Tanım ve 2.2.3. Teoremden anlaşılacağı gibi, eğer x dizisi L sayısına istatistiksel yakınsak ise, L sayısının herhangi bir $\varepsilon > 0$ komşuluğunda dizinin sonsuz çoklukta terimi bulunurken bu komşuluğun dışında, indis kümesinin yoğunluğu sıfır olmak koşulu ile, yine diziye ait sonsuz çoklukta terim bulunabilir. Bu ise, istatistiksel yakınsaklığın bilinen anlamdaki yakınsaklıktan daha genel olduğunu göstermektedir. Böylece yakınsak diziler uzayını c ile ve istatistiksel yakınsak diziler uzayını da S ile gösterecek olursak, $c \subset S$ olduğu açıktır. Yani yakınsak her dizi istatistiksel yakınsaktır. Yukarıdaki örneklerden de anlaşılacağı gibi tersi doğru değildir.

Şimdi A -istatistiksel yakınsaklık kavramını hatırlatalım. İlk olarak toplanabilme hakkında biraz bilgi vereceğiz.

X ve Y , tüm diziler uzayı olan ω nın iki altkümesi ve $A = (a_{nk})$ reel ya da kompleks terimli bir sonsuz matris olmak üzere, $x = \{x_k\} \in X$ ve her $n \geq 1$ için

$$y_n := (Ax)_n := \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$$

serisi yakınsak ise $y = Ax = (y_n) = ((Ax)_n)$ dönüşüm dizisi mevcuttur denir. Eğer her $x \in X$ için $y = ((Ax)_n)$ dönüşüm dizisi mevcut ve $y \in Y$ ise $A = (a_{nk})$ matrisi X uzayından Y içine bir matris dönüşümü tanımlar denir. Eğer bir x dizisi için Ax dönüşüm dizisi mevcut ve bir L değerine yakınsak ise x dizisi L sayısına, A -toplanabilirdir denir ve $A - \lim x = L$ yazılır. X dizi uzayını, Y içine dönüştüren bütün matrislerin sınıfı (X, Y) ile gösterilir. Eğer, A , X den Y içine bir matris dönüşümü ise $A \in (X, Y)$ yazılır. Toplamı ya da limiti koruyan matrislerin sınıfı ise $(X, Y; p)$ ile gösterilir. Özel olarak $X = Y = c$ (yakınsak dizilerin uzayı) olmak üzere $A \in (c, c)$ ise A matrisine konservatif matris denir.

2.2.6. Tanım: $A = (a_{nk})$ $k, n = 1, 2, \dots$, sonsuz bir matris olmak üzere verilen bir $x = \{x_k\}$ dizisi için $\lim_k x_k = L$ olduğunda $\lim_n (Ax)_n = L$ koşulu gerçekleşiyorsa, bu durumda A matrisine “regüler matris” denir (Hardy, 1949).

Bir $A = (a_{nk})$ matrisinin regüler olması, Silverman-Toeplitz koşulları olarak bilinen aşağıdaki teorem ile karakterize edilir.

2.2.7. Teorem: (Silverman-Toeplitz) Bir $A = (a_{nk})$ matrisinin regüler olması için gerekli ve yeterli koşul

$$(i) \|A\| = \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$$

$$(ii) \text{ Her sabit } k \text{ için } \lim_n a_{nk} = 0$$

$$(iii) \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1$$

koşullarının sağlamasıdır (Hardy, 1949; Maddox, 1970).

Örneğin, toplanabilme teorisinde (birinci mertebeden) Cesáro matrisi olarak adlandırılan ve aşağıdaki şekilde tanımlı olan $C_1 = (c_{nk})$ matrisi,

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \cdot & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \dots & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots \end{pmatrix}$$

regülerdir.

Bir $x = \{x_k\}$ dizisinin L sayısına istatistiksel yakınsak olması $\forall \epsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : |x_k - L| \geq \epsilon \right\} \right| = 0$$

olması demektir. Bir toplanabilme metodundan bir yoğunluk elde edilebildiğinden istatistiksel yakınsaklık tanımı, $K := K(\varepsilon) = \{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$ ve χ_K , K kümesinin karakteristik fonksiyonu olmak üzere her $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_n (C_1 \chi_K)_n = \lim_n \sum_{k=1}^n \chi_{K(\varepsilon)}(k) = \lim_n \frac{|K(\varepsilon)|}{n} = 0$$

şeklinde ifade edilebilir.

Freedman ve Sember 1981 yılında istatistiksel yakınsaklık tanımında C_1 Cesáro matrisi yerine negatif olmayan regüler bir $A = (a_{nk})$ sonsuz matrisi alarak istatistiksel yakınsaklığı A-İstatistiksel yakınsaklığa genişletmişlerdir.

Şimdi A-istatistiksel yakınsaklık tanımını vereceğiz. Fakat ilk olarak bir K kümesinin A-yoğunluğu tanımını verelim. $A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris olsun.

2.2.8. Tanım: $K \subseteq \mathbb{N}$ olsun. Eğer

$$\delta_A \{K\} := \lim_n (A \chi_K)_n = \lim_n \sum_{k \in K} a_{nk}$$

limiti mevcut ise $\delta_A \{K\}$ sayısına K kümesinin A-yoğunluğu denir (Freedman ve Sember, 1981).

$\delta_A \{K\}$ veya $\delta_A \{\mathbb{N} \setminus K\}$ yoğunluklarından herhangi biri mevcut ise $\delta_A \{K\} = 1 - \delta_A \{\mathbb{N} \setminus K\}$ olur. Ayrıca K kümesi sonlu elemanlı bir küme ise $\delta_A \{K\} = 0$ olduğu açıktır.

2.2.9. Örnek:

$$a_{nk} = \begin{cases} 1 & , \quad k = m^2 \\ 0 & , \quad k \neq m^2 \end{cases} , \quad m = 1, 2, \dots$$

şeklinde tanımlanan $A = (a_{nk})$ matrisini göz önüne alalım. Bu durumda

$K_1 = \{k \neq m^2 : m \in \mathbb{N}\}$ kümesi için $\delta_A \{K_1\} = 0$ olur. Dolayısıyla

$K_2 = \{k = m^2 : m \in \mathbb{N}\}$ kümesinin A-yoğunluğu 1, yani $\delta_A \{K_2\} = 1$ olur.

2.2.10. Tanım: $x = \{x_k\}$ reel terimli bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$K := K(\varepsilon) = \{k : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$ olmak üzere

$$\delta_A \{K\} = \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \chi_{K(\varepsilon)}(k) = \lim_n \sum_{k \in K} a_{nk} = 0$$

ise $x = \{x_k\}$ dizisi L sayısına “A-istatistiksel yakınsaktır” denir ve $st_A - \lim x = L$ ile gösterilir (Freedman ve Sember, 1981; Kolk, 1993; Miller, 1995).

Eğer 2.2.10. Tanımda A matrisi yerine I birim matrisi alınırsa, klasik anlamdaki yakınsaklık, A matrisi yerine C_1 Cesáro matrisi alınırsa, istatistiksel yakınsaklık elde edilir.

A-istatistiksel yakınsaklık için 2.2.3. Teoremin benzerini aşağıdaki gibi ifade edebiliriz : $st_A - \lim x = L$ olması için gerekli ve yeterli koşul $\delta_A \{n_k : k \in \mathbb{N}\} = 1$ olması ve $\lim_n x_{n_k} = L$ olacak şekilde en az bir $\{x_{n_k}\}$ yakınsak alt dizisinin bulunmasıdır (Kolk, 1993; Miller, 1995).

2.3. İstatistiksel Yakınsak Fonksiyon Dizileri

2004 yılında Duman ve Orhan, istatistiksel yakınsaklık kavramını kullanarak reel sayıların bir D altkümesi üzerinde tanımlı fonksiyon dizilerinin istatistiksel yakınsaklığını problemini incelemişlerdir.

$D \subset \mathbb{R}$ ve $\{f_n\}$, D üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların bir dizisi olsun.

2.3.1. Tanım: Her $\varepsilon > 0$ ve her bir $x \in D$ için

$$\delta \{n : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} = 0$$

koşulu gerçekleşiyorsa, bu durumda $\{f_n\}$ dizisi $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna D üzerinde “istatistiksel noktasal yakınsaktır” denir. Bu durum $f_n \rightarrow f(\text{stat})$ şeklinde gösterilir (Duman ve Orhan, 2004).

2.3.2. Tanım: $\{f_n\}$, D üzerinde sınırlı fonksiyonların bir dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta\{n : \|f_n - f\|_{B(D)} \geq \varepsilon\} = 0$$

ise, bu durumda $\{f_n\}$ dizisi $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna D üzerinde “istatistiksel düzgün yakınsaktır” denir. Bu durum $f_n \rightrightarrows f(\text{stat})$ şeklinde gösterilir (Duman ve Orhan, 2004).

2.4. İstatistiksel Yakınsaklık Yardımıyla Bazı Yaklaşım Teoremleri

Bu kısımda yakınsaklıktan daha kuvvetli olan istatistiksel yakınsaklık kavramı yardımıyla 2002 yılında Gadjiev ve Orhan tarafından verilen Korovkin tipi yaklaşım teoremini vereceğiz. Daha sonra, 2003 yılında Duman tarafından A-istatistiksel yakınsaklık kavramı kullanılarak elde edilen periyodik fonksiyonlar uzayı üzerinde tanımlı pozitif lineer operatörler için Korovkin tipi yaklaşım teoremi vereceğiz.

2.4.1. Teorem: Eğer $\{A_n\}$, $A_n : C[a, b] \rightarrow B[a, b]$ pozitif lineer operatörler dizisi

$$\text{st} - \lim \|A_n(t^i; x) - x^i\|_{B[a, b]} = 0, i=0,1,2$$

koşullarını sağlıyor ise $\mathbb{R}$ üzerinde sınırlı herhangi bir $f \in C[a, b]$ fonksiyonu için

$$\text{st} - \lim \|A_n(f; x) - f(x)\|_{B[a, b]} = 0$$

olur (Gadjiev ve Orhan, 2002).

2.4.2. Teorem: $A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler bir matris olsun. Eğer $\{L_k\}$,

$L_k : C^* \rightarrow C^*$ pozitif lineer operatörler dizisi

$$\text{st}_A - \lim \left\| L_k(1; x) - 1 \right\|_{C^*} = 0,$$

$$\text{st}_A - \lim \left\| L_k(\cos t; x) - \cos x \right\|_{C^*} = 0,$$

$$\text{st}_A - \lim \left\| L_k(\sin t; x) - \sin x \right\|_{C^*} = 0,$$

koşullarını sağlıyor ise herhangi bir $f \in C^*$ fonksiyonu için

$$\text{st}_A - \lim \left\| L_k(f; x) - f(x) \right\|_{C^*} = 0$$

olur (Duman, 2003).

2.5. Çift İndisli Dizilerin Pringsheim Anlamında Yakınsaklığı

Çift indisli dizilerin yakınsaklığı ilk olarak Pringsheim tarafından 1900 yılında tanımlandı.

2.5.1. Tanım: $x = \{x_{m,n}\}$ reel terimli bir çift indisli dizi olsun. x dizisinin L sayısına Pringsheim anlamında yakınsak (P-yakınsak) olması için gerekli ve yeterli koşul her $\varepsilon > 0$ ve her $m, n > N$ için $|x_{m,n} - L| < \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısının var olmasıdır. Buradaki L sayısına x dizisinin P-limiti denir. Bu durum, $P - \lim x = L$ ile gösterilir (Pringsheim, 1900).

2.5.2. Tanım: $x = \{x_{m,n}\}$ reel terimli bir çift indisli dizi olsun. Tüm $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ için $|x_{m,n}| < M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı var ise x dizisine sınırlıdır denir (Pringsheim, 1900).

Biliyoruz ki yakınsak her dizi sınırlıdır fakat P-yakınsak çift indisli dizilerin sınırlı olması gerekmez. Örneğin, genel terimi

$$x_{m,n} = \begin{cases} 1 & , \quad m = 1, \\ m & , \quad n = 2, \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

olacak şekilde $x = \{x_{m,n}\}$ dizisini tanımlayalım. $P\text{-}\lim x = 0$ fakat bu dizi sınırlı değildir.

2.6. Çift İndisli Dizilerin A- İstatistiksel Yakınsaklığı

2003 yılında Mursaleen ve Edely tarafından verilen, çift indisli diziler için istatistiksel yakınsaklık kavramını vermeden önce yoğunluk kavramını verelim.

$E, \mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nin bir alt kümesi ve $E_{m,n} := \{j \leq m, k \leq n : (j, k) \in E\}$ olsun.

2.6.1. Tanım: $\mathbb{N}^2$ nin bir E alt kümesi için

$$P\text{-}\lim_{m,n} \frac{1}{mn} |E_{m,n}|$$

limiti mevcut ise, bu limit değerine E kümesinin “yoğunluğu” denir ve $\delta^2\{E\}$ ile gösterilir (Mursaleen ve Edely, 2003).

Örneğin; $\delta^2\{\mathbb{N}^2\} = 1$, $\delta^2\{(m^2, n^2) : m, n \in \mathbb{N}\} = 0$ olduğu kolaylıkla görülebilir.

Ayrıca; $\delta^2\{E\}$ ve $\delta^2\{\mathbb{N}^2 \setminus E\}$ yoğunluklarından biri mevcut ise, bu durumda $\delta^2\{\mathbb{N}^2 \setminus E\} = 1 - \delta^2\{E\}$ olacaktır (Mursaleen ve Edely, 2003; Moricz, 2003).

2.6.2. Tanım: $x = \{x_{m,n}\}$ reel terimli bir çift indisli dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta^2\{(m, n) \in \mathbb{N}^2 : |x_{m,n} - L| \geq \varepsilon\} = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa x dizisi L sayısına “istatistiksel yakınsaktır” denir ve $st^2\text{-}\lim x = L$ ile gösterilir (Mursaleen ve Edely, 2003).

Şimdi çift indisli dizilerin istatistiksel yakınsaklık kavramı için bazı karakterizasyonlar hatırlatalım.

2.6.3. Teorem: $x = \{x_{m,n}\}$ çift indisli dizisinin bir L sayısına istatistiksel yakınsak olması için gerekli ve yeterli koşul $\delta^2\{K\}=1$ ve $P-\lim_{\substack{j,k \rightarrow \infty \\ (j,k) \in K}} x_{j,k} = L$ olacak şekilde

$K = \{(j,k) : j,k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}^2$ alt kümesinin olmasıdır (Mursaleen ve Edely, 2003).

Şimdi çift indisli diziler için A-istatistiksel yakınsaklık kavramını hatırlatalım.

2.6.4. Tanım: $A := (a_{j,k,m,n})$ 4-boyutlu toplanabilme matrisi olsun. Verilen bir $x = \{x_{m,n}\}$ çift indisli dizisi için x dizisinin A-dönüşümü, her $(j,k) \in \mathbb{N}^2$ için, çift indisli seriler Pringsheim anlamında yakınsak olmak koşulu ile

$$(Ax)_{j,k} := \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} x_{m,n}$$

şeklinde ve $Ax := ((Ax)_{j,k})$ ile gösterilir.

1926 yılında Robison 4-boyutlu matrislerin regülerliğini aşağıdaki gibi tanımlamıştır. Bu koşullar Robison-Hamilton koşulları veya RH-regülerlik olarak bilinir.

Bir $A = (a_{j,k,m,n})$ 4-boyutlu matrisinin RH-regüler olması için gerekli ve yeterli koşul sınırlı her $x = \{x_{m,n}\}$ çift indisli dizisi için $P-\lim_{m,n} x_{m,n} = L$ olduğunda $P-\lim_{j,k} (Ax)_{j,k} = L$ olmasıdır.

$A = (a_{j,k,m,n})$ 4-boyutlu matrisinin RH-regüler olması için gerekli ve yeterli koşul aşağıdaki Robison-Hamilton koşullarının sağlanmasıdır:

(i) Her bir $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ için $P-\lim_{j,k} a_{j,k,m,n} = 0$,

(ii) $P-\lim_{j,k} \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{j,k,m,n} = 1$,

(iii) her bir $n \in \mathbb{N}$ için $P-\lim_{j,k} \sum_{m \in \mathbb{N}} |a_{j,k,m,n}| = 0$,

(iv) her bir $m \in \mathbb{N}$ için $P-\lim_{j,k} \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_{j,k,m,n}| = 0$,

(v) her $(j, k) \in \mathbb{N}^2$ için $\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} |a_{j,k,m,n}|$, P-yakınsak,

(vi) her $(j, k) \in \mathbb{N}^2$ için $\sum_{m,n > B} |a_{j,k,m,n}| < A$ olacak şekilde sonlu pozitif A ve B sayıları

vardır.

Örneğin, 4-boyutlu Cesáro matrisi olarak adlandırılan ve $C(1,1) = (c_{j,k,m,n})$,

$$c_{j,k,m,n} = \begin{cases} \frac{1}{jk} & , \quad 1 \leq m \leq j, 1 \leq n \leq k, \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $C(1,1)$ 4-boyutlu matrisi RH-regülerdir.

Ayrıca bir $x = \{x_{m,n}\}$ çift indisli dizisinin L sayısına istatistiksel yakınsak olması demek $\forall \varepsilon > 0$ için

$$P - \lim_{m,n} \frac{1}{mn} \left| \left\{ j \leq m, k \leq n : |x_{j,k} - L| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

olması demektir.

Buradan istatistiksel yakınsaklık tanımı, $K := K(\varepsilon) = \{j \leq m, k \leq n : |x_{j,k} - L| \geq \varepsilon\}$

ve χ_K , K kümesinin karakteristik fonksiyonu olmak üzere her $\forall \varepsilon > 0$ için

$$P - \lim_{j,k} (C_1 \chi_K)_{j,k} = P - \lim_{j,k} \sum_{m,n=1}^{j,k} \chi_{K(\varepsilon)}(m,n) = P - \lim_{j,k} \frac{|K(\varepsilon)|}{jk} = 0$$

şeklinde ifade edilebilir.

$A = (a_{j,k,m,n})$ 4-boyutlu negatif olmayan RH-regüler matris olsun. Şimdi

$K \subset \mathbb{N}^2$ kümesinin A-yoğunluğu tanımını verelim.

2.6.5. Tanım: $K \subset \mathbb{N}^2$ alt kümesi için

$$\delta_{(A)}^2 \{K\} = P - \lim_{j,k} \sum_{(m,n) \in K} a_{j,k,m,n}$$

limiti mevcut ise, bu limit değerine K kümesinin “ A -yoğunluğu” denir.

Eğer, $\delta_{(A)}^2 \{E\}$ ve $\delta_{(A)}^2 \{\mathbb{N}^2 \setminus E\}$ yoğunluklarından biri mevcut ise, bu durumda $\delta_{(A)}^2 \{\mathbb{N}^2 \setminus E\} = 1 - \delta_{(A)}^2 \{E\}$ olacaktır.

2.6.6. Tanım: $x = \{x_{m,n}\}$ reel terimli bir çift indisli dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta_{(A)}^2 \{(m,n) \in \mathbb{N}^2 : |x_{m,n} - L| \geq \varepsilon\} = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa x dizisi L sayısına “ A -istatistiksel yakınsaktır” denir. Bu durum $st_{(A)}^2 - \lim x = L$ ile gösterilir.

Ayrıca, yukarıdaki tanımda $A=C(1,1)$ alınırsa A -istatistiksel yakınsaklık, Mursaleen ve Edely tarafından verilen çift indisli dizilerin istatistiksel yakınsaklığı ile çıkarılır. Eğer A matrisi yerine 4-boyutlu birim matris alınırsa A -istatistiksel yakınsaklık Pringsheim anlamda yakınsaklığa indirgenir.

Pringsheim anlamda yakınsak her çift indisli dizinin, aynı sayıya A -istatistiksel yakınsak olduğu açıktır. Fakat tersi doğru değildir. Ayrıca A -istatistiksel yakınsak çift indisli dizilerin sınırlı olması gerekmez.

2.6.7. Örnek: $x = \{x_{m,n}\}$ çift indisli dizisinin genel terimi

$$x_{m,n} = \begin{cases} mn, & m \text{ ve } n \text{ tam kare,} \\ 0, & \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

olsun. x dizisi sınırlı bir çift indisli dizi değildir. Ayrıca, eğer $A = C(1,1)$, 4-boyutlu Cesáro matris, alınırsa $st_{(C(1,1))}^2 - \lim x = 0$ elde edilir fakat bu x dizisi Pringsheim anlamda yakınsak değildir.

Şimdi çift indisli dizilerin A -istatistiksel yakınsaklık kavramı için bazı karakterizasyonlar hatırlatalım.

2.6.8. Teorem: $x = \{x_{m,n}\}$ çift indisli dizisinin bir L sayısına A -istatistiksel yakınsak olması için gerekli ve yeterli koşul $\delta_{(A)}^2\{K\}=1$ ve $P-\lim_{\substack{j,k \rightarrow \infty \\ (j,k) \in K}} x_{j,k} = L$ olacak şekilde $K = \{(j,k) : j,k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}^2$ alt kümesinin olmasıdır.

2.7. Bögel-sürekli (B-sürekli) ve B- 2π -periyodik Fonksiyonlar

Bögel-süreklilik (B-süreklilik) kavramı ilk olarak K. Bögel tarafından verildi (Bögel, 1934, 1935, 1962).

Kabul edelim ki X ve Y reel sayılar kümesinin kompakt iki alt kümesi, $D = X \times Y$ ve $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Ayrıca, $\Delta_{x,y}[f(u,v)]$ sembolü f fonksiyonunun

$$\Delta_{x,y}[f(u,v)] = f(u,v) - f(x,v) - f(u,y) + f(x,y)$$

ile verilen karışık farkını gösterebiliriz.

2.7.1. Tanım: $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun $(x,y) \in D$ noktasında B-sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul her $\varepsilon > 0$ ve $|u-x| < \delta$ ve $|v-y| < \delta$ sağlayan herhangi $(u,v) \in D$ için $|\Delta_{x,y}[f(u,v)]| < \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı var olmasıdır. Yani $\lim_{(u,v) \rightarrow (x,y)} \Delta_{x,y}[f(u,v)] = 0$ olmasıdır (Bögel, 1934, 1935, 1962).

$C_b(D)$ ile D üzerinde tanımlı reel değerli tüm B-sürekli fonksiyonların uzayını gösterelim. Ayrıca $C(D) \subset C_b(D)$ yani sürekli her fonksiyon B-sürekli. Fakat tersi doğru değildir.

2.7.2. Örnek: $D = [0,1] \times [0,1]$ olmak üzere $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu

$$f(u,v) = \begin{cases} 0, & u=0 \\ \frac{1}{u}, & u \neq 0 \end{cases} + \begin{cases} 0, & v=0 \\ \frac{1}{v}, & v \neq 0 \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlayalım. f sınırsız bir fonksiyon olup $\Delta_{x,y} [f(u,v)] = 0$ olduğu kolayca görülebilir. Ayrıca f fonksiyonu sürekli değildir.

1986 yılında C. Badea, I. Badea ve H.H. Gonksa, sürekli fonksiyonların uzayını kapsayan B-sürekli fonksiyonların uzayını kullanarak Korovkin tipi yaklaşım teoremi ispatladı.

$e_0(x,y)=1$, $e_1(x,y)=x$, $e_2(x,y)=y$, $e_3(x,y)=x^2+y^2$ ve $F_{x,y}(u,v)=f(u,y)+f(x,v)-f(u,v)$ olsun. Ayrıca, tüm $(u,v),(x,y) \in D$ için

$$\begin{aligned} \Delta_{x,y} [F_{x,y}(u,v)] &= F_{x,y}(u,v) - F_{x,y}(x,v) - F_{x,y}(u,y) + F_{x,y}(x,y) \\ &= f(u,y) + f(x,v) - f(u,v) - f(x,y) - f(x,v) + f(x,v) - f(u,y) \\ &\quad - f(x,y) + f(u,y) + f(x,y) + f(x,y) - f(x,y) \\ &= -f(u,v) + f(x,v) + f(u,y) - f(x,y) \\ &= -\Delta_{x,y} [f(u,v)] \end{aligned}$$

olup, sabit $(x,y) \in D$ için f nin B-sürekliliği ($\lim_{(u,v) \rightarrow (x,y)} \Delta_{x,y} [f(u,v)] = 0$) $F_{x,y}$ nin B-sürekliğini ($\lim_{(u,v) \rightarrow (x,y)} \Delta_{x,y} [F_{x,y}(u,v)] = 0$) sağlar.

Şimdi bize gerekli olan C. Badea, I. Badea ve H.H. Gonksa tarafından ispatlanan bir Lemma verelim.

2.7.3. Lemma: $f \in C_b(D)$ ise her $\varepsilon > 0$ ve tüm $(u,v),(x,y) \in D$ için

$$|\Delta_{x,y} [f(u,v)]| \leq \frac{\varepsilon}{3} + A(\varepsilon)(u-x)^2 + B(\varepsilon)(v-y)^2$$

olacak şekilde $A(\varepsilon) = A(\varepsilon, f)$, $B(\varepsilon) = B(\varepsilon, f) > 0$ sayıları vardır (Badea ve ark., 1986).

2.7.4. Teorem: $L_{m,n} : C_b(D) \rightarrow B(D)$ pozitif lineer operatör olsun. Aşağıdaki koşulların sağlandığını kabul edelim:

- (i) Tüm $(x, y) \in D$ ve $(m, n) \in \mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ için $L_{m,n}(e_0; x, y) = e_0(x, y)$,
- (ii) $L_{m,n}(e_1; x, y) = e_1(x, y) + u_{m,n}(x, y)$,
- (iii) $L_{m,n}(e_2; x, y) = e_2(x, y) + v_{m,n}(x, y)$,
- (iv) $L_{m,n}(e_3; x, y) = e_3(x, y) + w_{m,n}(x, y)$.

Eğer $m, n \rightarrow \infty$ için

$$P\text{-}\lim \|u_{m,n}\|_{B(D)} = 0, P\text{-}\lim \|v_{m,n}\|_{B(D)} = 0, P\text{-}\lim \|w_{m,n}\|_{B(D)} = 0$$

ise herhangi bir $f \in C_b(D)$ fonksiyonu için $m, n \rightarrow \infty$ gittiğinde

$$P\text{-}\lim \|L_{m,n}(F_{x,y}) - f\|_{B(D)} = 0$$

olur (Badea ve ark., 1986).

C. Badea, I. Badea, C. Cottin ve H.H. Gonksa 1988 yılında $L_{m,n} : C_b(D) \rightarrow B(D)$ pozitif lineer operatörler için, karışık B-süreklilik modülünü kullanarak yakınsaklık oranını hesaplamıştır (Badea ve ark., 1988). İlk olarak karışık B-süreklilik modülünü hatırlatalım.

$f \in C_b(D)$ için karışık B-süreklilik modülü

$$\omega_m(f; \delta_1, \delta_2) := \sup \{ |\Delta_{x,y}[f(u,v)]| : |u-x| \leq \delta_1, |v-y| \leq \delta_2 \}, (\delta_1, \delta_2 \geq 0)$$

şeklinde tanımlıdır.

2.7.5. Teorem: $L_{m,n} : C_b(D) \rightarrow B(D)$ pozitif lineer operatör olsun. Tüm $(x, y) \in D$ ve $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ için $L_{m,n}(e_0; x, y) = e_0(x, y)$ olmak üzere

$$|L_{m,n}(F_{x,y}; x, y) - f(x, y)| \leq \left\{ 1 + \frac{1}{\delta_1} \sqrt{L_{m,n}((u-x)^2; x, y)} + \frac{1}{\delta_2} \sqrt{L_{m,n}((v-y)^2; x, y)} \right\}$$

$$+\frac{1}{\delta_1\delta_2}\sqrt{L_{m,n}\left((u-x)^2;x,y\right)}\sqrt{L_{m,n}\left((v-y)^2;x,y\right)}\Big\}\omega_m(f;\delta_1,\delta_2)$$

olur (Badea ve ark., 1988).

2.7.6. Tanım: $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun $B-2\pi$ -periyodik olması için gerekli ve yeterli koşul her $(x,y),(u,v) \in \mathbb{R}^2$ için $\Delta_{x,y}[f(u+2\pi, v+2\pi)] = \Delta_{x,y}[f(u, v)]$ olmasıdır (Bögel, 1934, 1935, 1962).

$B_{2\pi}$ ile $\mathbb{R}^2$ üzerinde tanımlı reel değerli tüm $B-2\pi$ -periyodik ve B -sürekli fonksiyonların uzayını, $C_{2\pi,2\pi}$ ile de reel değerli tüm iki değişkenli sürekli ve her iki değişkene göre 2π -periyodik olan fonksiyonların uzayını gösterelim. Buradan $C_{2\pi,2\pi} \subset B_{2\pi}$ olur. Fakat tersi doğru değildir.

2.7.7. Örnek: $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu, $k_u \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $u \in [2k_u\pi, 2(k_u+1)\pi)$ için

$$f(u, v) = (u - 2k_u\pi) \sin v + 2k_u\pi$$

olacak şekilde tanımlayalım. $\forall (x,y),(u,v) \in \mathbb{R}^2$ için

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x, v) &= (x - 2k_x\pi) \sin y + 2k_x\pi - (x - 2k_x\pi) \sin v + 2k_x\pi \\ &= (x - 2k_x\pi)(\sin y - \sin v) \\ &= (x + 2\pi - 2(k_x + 1)\pi)(\sin y - \sin v) \\ &= (x + 2\pi - 2(k_x + 1)\pi) \sin y + 2(k_x + 1)\pi \\ &\quad - (x + 2\pi - 2(k_x + 1)\pi) \sin v - 2(k_x + 1)\pi \\ &= f(x + 2\pi, y) - f(x + 2\pi, v) \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde $f(u, v) - f(u, y) = f(u + 2\pi, v) - f(u + 2\pi, y)$ bulunur. f fonksiyonu ikinci değişkene göre 2π -periyodik olduğundan

$\Delta_{x,y} [f(u+2\pi, v+2\pi)] = \Delta_{x,y} [f(u, v)]$ elde edilir. Bu ise f fonksiyonun $B-2\pi$ -periyodik olduğunu gösterir. Ayrıca

$$\begin{aligned} |\Delta_{x,y} [f(u, v)]| &= |f(u, v) - f(x, v) - f(u, y) + f(x, y)| \\ &= |(x - 2k_x \pi)(\sin y - \sin v) - (u - 2k_u \pi)(\sin y - \sin v) - 2k_u \pi + 2k_u \pi| \\ &= |(u - 2k_u \pi)(\sin y - \sin v) - (x - 2k_x \pi)(\sin y - \sin v)| \\ &= |(u - x - 2(k_u - k_x) \pi)(\sin y - \sin v)| \end{aligned}$$

olup $\lim_{(u,v) \rightarrow (x,y)} \Delta_{x,y} [f(u, v)] = 0$ elde edilir. Bu ise f fonksiyonunun B -sürekliliği, yani $f \in B_{2\pi}$ olduğunu gösterir. Fakat f fonksiyonu 1. değişkene göre 2π -periyodik olmadığından $f \notin C_{2\pi, 2\pi}$ olur.

1988 yılında $B-2\pi$ -periyodik ve B -sürekliliği fonksiyonlar için C. Badea, I. Badea ve C. Cottin, Korovkin tipi yaklaşım teoremi ispatladı.

$f_0(x, y) = 1$, $f_1(x, y) = \sin x$, $f_2(x, y) = \sin y$, $f_3(x, y) = \cos x$, $f_4(x, y) = \cos y$ ve $F_{x,y}(u, v) = f(u, y) + f(x, v) - f(u, v)$ olsun. Ayrıca, tüm $(u, v), (x, y) \in \mathbb{R}^2$ için

$$\Delta_{x,y} [F_{x,y}(u, v)] = -\Delta_{x,y} [f(u, v)]$$

olduğundan sabit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ için f fonksiyonunun B -sürekliliği ve $B-2\pi$ -periyodikliği, $F_{x,y}$ nin B -sürekliliği ve $B-2\pi$ -periyodikliğini sağlar.

Şimdi bize gerekli olan C. Badea, I. Badea ve C. Cottin tarafından ispatlanan bir Lemma verelim.

2.7.8. Lemma: $f \in B_{2\pi}$ ise her $\varepsilon > 0$ ve tüm $(u, v), (x, y) \in \mathbb{R}^2$ için

$$|\Delta_{x,y} [f(u, v)]| \leq \frac{\varepsilon}{3} + A(\varepsilon) \sin^2 \frac{u-x}{2} + B(\varepsilon) \sin^2 \frac{v-y}{2}$$

olacak şekilde $A(\varepsilon) = A(\varepsilon, f)$, $B(\varepsilon) = B(\varepsilon, f) > 0$ sayıları vardır (Badea ve ark., 1988).

2.7.9. Teorem: $L_{m,n} : B_{2\pi} \rightarrow B(\mathbb{R}^2)$ pozitif lineer operatör olsun. Aşağıdaki koşulların sağlandığını kabul edelim:

- (i) Tüm $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ve $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ için $L_{m,n}(f_0; x, y) = f_0(x, y)$,
- (ii) $L_{m,n}(f_1; x, y) = f_1(x, y) + u_{m,n}(x, y)$,
- (iii) $L_{m,n}(f_2; x, y) = f_2(x, y) + v_{m,n}(x, y)$,
- (iv) $L_{m,n}(f_3; x, y) = f_3(x, y) + t_{m,n}(x, y)$,
- (v) $L_{m,n}(f_4; x, y) = f_4(x, y) + w_{m,n}(x, y)$.

Eğer $m, n \rightarrow \infty$ için

$$P\text{-}\lim \|u_{m,n}\|_{B(\mathbb{R}^2)} = 0, P\text{-}\lim \|v_{m,n}\|_{B(\mathbb{R}^2)} = 0, P\text{-}\lim \|t_{m,n}\|_{B(\mathbb{R}^2)} = 0, P\text{-}\lim \|w_{m,n}\|_{B(\mathbb{R}^2)} = 0$$

ise herhangi bir $f \in B_{2\pi}$ fonksiyonu için $m, n \rightarrow \infty$ gittiğinde

$$P\text{-}\lim \|L_{m,n}(F_{x,y}) - f\|_{B(\mathbb{R}^2)} = 0,$$

olur (Badea ve ark., 1988).

Cottin, 1992 yılında $L_{m,n} : B_{2\pi} \rightarrow B(\mathbb{R}^2)$ pozitif lineer operatörler için karışık B-süreklilik modülünü kullanarak yakınsaklık oranını hesaplamıştır.

2.7.10. Teorem: $L_{m,n} : B_{2\pi} \rightarrow B(\mathbb{R}^2)$ pozitif lineer operatör olsun. Tüm $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ve $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ için $L_{m,n}(f_0; x, y) = f_0(x, y)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} |L_{m,n}(F_{x,y}; x, y) - f(x, y)| \leq & \left\{ 1 + \frac{\pi}{\delta_1} \sqrt{L_{m,n}\left(\sin^2 \frac{u-x}{2}; x, y\right)} + \frac{\pi}{\delta_2} \sqrt{L_{m,n}\left(\sin^2 \frac{v-y}{2}; x, y\right)} \right. \\ & \left. + \frac{\pi^2}{\delta_1 \delta_2} \sqrt{L_{m,n}\left(\sin^2 \frac{u-x}{2} \sin^2 \frac{v-y}{2}; x, y\right)} \right\} \omega_m(f; \delta_1, \delta_2) \end{aligned}$$

olur (Cottin, 1992).

B-süreklilik kavramı ilk olarak K. Bögel tarafından verilmiştir ve daha sonra bu kavram D. Bărbosu tarafından n-değişkenli fonksiyonlar için genişletilmiştir (Bărbosu, 2001).

Kabul edelim ki X reel sayılar kümesinin kompakt bir alt kümesi, $D = X^n$ ve $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Ayrıca $\Delta_{s_1, s_2, \dots, s_n} [f; x_1, x_2, \dots, x_n]$ sembolü, f fonksiyonunun

$$\begin{aligned} \Delta_{s_1, s_2, \dots, s_n} [f; x_1, x_2, \dots, x_n] &= f(s_1, s_2, \dots, s_n) - \sum_{i=1}^n f(x_1, \dots, x_{i-1}, s_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^n f(x_1, \dots, x_{i-1}, s_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, s_j, x_{j+1}, \dots, x_n) - \dots + (-1)^n f(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

ile verilen karışık farkını gösterebilir.

2.7.11. Tanım: $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ noktasında B-sürekliliği için gerekli ve yeterli koşul

$$\lim_{(s_1, s_2, \dots, s_n) \rightarrow (x_1, x_2, \dots, x_n)} \Delta_{s_1, s_2, \dots, s_n} [f; x_1, x_2, \dots, x_n] = 0$$

olmasıdır (Bărbosu, 2001).

$C_b(D)$ ile D üzerinde tanımlı reel değerli tüm B-sürekliliği fonksiyonların uzayını gösterelim. Ayrıca $C(D) \subset C_b(D)$, yani sürekliliği her fonksiyon B-sürekliliğidir. Fakat tersi doğru değildir. Karşıtının doğru olmadığı $n = 2$ için 2.7.2. Örnekten görülebilir.

Son olarak bize gerekli olan D. Bărbosu tarafından ispatlanan bir Lemma verelim.

2.7.12. Lemma: $f \in C_b(D)$ ise her $\varepsilon > 0$ ve tüm $(s_1, s_2, \dots, s_n) \in D$ için

$$\left| \Delta_{s_1, s_2, \dots, s_n} [f; x_1, x_2, \dots, x_n] \right| \leq \frac{\varepsilon}{n+1} + \sum_{i=1}^n A_i(\varepsilon) (s_i - x_i)^2$$

olacak şekilde $A_i = A_i(\varepsilon) > 0$, $i = 1, \dots, n$ sayıları vardır (Bărbosu, 2001).

2001 yılında D. Bărbosu tarafından verilen, $\mathbb{R}^n$ uzayının kompakt bir alt kümesi üzerinde tanımlı n -değişkenli B -süreklı fonksiyonlar uzayı üzerinde tanımlı n -indisli pozitif lineer operatörler için Korovkin tipi yaklaşım teoremini verelim.

$\mathbb{N}^n$, n pozitif bir tamsayı olmak üzere, m_j koordinatları için negatif olmayan tamsayıların $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ n -lilerinin kümesi ve $e_0(s_1, s_2, \dots, s_n) = 1$, $e_i(s_1, s_2, \dots, s_n) = s_i$, $i = 1, \dots, n$, $(s_1, s_2, \dots, s_n) \in D$ olsun.

2.7.13. Teorem: $L_{\mathbf{m}} : C_b(D) \rightarrow B(D)$ pozitif lineer operatör olsun. Kabul edelim ki aşağıdaki koşullar sağlansın:

- (i) Tüm $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ ve $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^n$ için $L_{\mathbf{m}}(e_0; x_1, x_2, \dots, x_n) = e_0(x_1, x_2, \dots, x_n)$,
- (ii) $L_{\mathbf{m}}(e_i; x_1, x_2, \dots, x_n) = e_i(x_1, x_2, \dots, x_n) + u_{\mathbf{m}}^{(i)}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, n$,
- (iii) $L_{\mathbf{m}}\left(\sum_{i=1}^n e_i^2; x_1, x_2, \dots, x_n\right) = \sum_{i=1}^n e_i^2(x_1, x_2, \dots, x_n) + v_{\mathbf{m}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$,

Eğer $\min m_j \rightarrow \infty$ için

$$\lim \|u_{\mathbf{m}}^{(i)}\|_{B(D)} = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad \text{ve} \quad \lim \|v_{\mathbf{m}}\|_{B(D)} = 0$$

ise herhangi bir $f \in C_b(D)$ fonksiyonu için, $\min m_j \rightarrow \infty$ gittiğinde

$$\lim \|L_{\mathbf{m}}(f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \Delta_{\dots} [f; x_1, x_2, \dots, x_n]; x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_{B(D)} = 0$$

olur (Bărbosu, 2001).

3. MATERYAL VE YÖNTEMLER

Bulgular kısmının ilk bölümünde, çift indisli dizilerin A-istatistiksel yakınsaklık kavramı yardımı ile C. Badea, I. Badea ve H.H. Gonksa (1986) çalışmasındaki yöntemler kullanılarak Korovkin tipi yaklaşım teoremi elde edildi. Ayrıca Korovkin tipi yaklaşım teoreminin A-istatistiksel yakınsaklık oranı hesaplandı.

Bu bölümün ikinci kısmında C. Badea, I. Badea ve C. Cottin (1988) çalışmasındaki yöntemler kullanılarak çift indisli dizilerin A-istatistiksel yakınsaklık kavramı yardımı ile $B_{2\pi}$ uzayı üzerinde Korovkin tipi yaklaşım teoremi ispatlandı. Bu teorem için A-istatistiksel yakınsaklık oranı hesaplandı.

Bu bölümün son kısmında D. Bărbosu (2001) çalışmasındaki yöntemler kullanılarak n-indisli dizilerin istatistiksel yakınsaklığı kavramı kullanılarak Korovkin tipi yaklaşım teoremi elde edildi.

4. BULGULAR

4.1. Pozitif Lineer Operatörler Yardımıyla B-sürekli Fonksiyonlar için A-İstatistiksel Anlamda Yaklaşım

Bu bölümünde, çift indisli dizilerin A-istatistiksel yakınsaklık tanımını kullanarak, C. Badea, I. Badea ve H.H. Gonksa tarafından verilen Korovkin tipi yaklaşım teoreminden daha kuvvetli sonuçlar elde edeceğiz. Ayrıca, verdiğimiz teoremin daha kuvvetli olduğuna dair bir örnek verip, verdiğimiz teorem için A-istatistiksel yakınsaklık oranını hesaplayacağız.

4.1.1. Teorem: $A = (a_{j,k,m,n})$ 4-boyutlu negatif olmayan RH-regüler matris ve $L_{m,n} : C_b(D) \rightarrow B(D)$ pozitif lineer operatör olsun. Aşağıdaki koşulların sağlandığını kabul edelim:

(i) $K := \{(m,n) \in \mathbb{N}^2 : \text{tüm } (x,y) \in D \text{ için } L_{m,n}(e_0; x,y) = e_0(x,y)\}$ olmak üzere

$$\delta_{(A)}^2 \{K\} = P\text{-}\lim_{j,k} \sum_{(m,n) \in K} a_{j,k,m,n} = 1$$

(ii) $e_1(x,y) = x$, $e_2(x,y) = y$, $e_3(x,y) = x^2 + y^2$ olmak üzere

$$st_{(A)}^2 - \lim \|L_{m,n}(e_i) - e_i\|_{B(D)} = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Bu durumda herhangi bir $f \in C_b(D)$ fonksiyonu için,

$$st_{(A)}^2 - \lim \|L_{m,n}(F_{x,y}) - f\|_{B(D)} = 0$$

olur.

İspat: $f \in C_b(D)$ ve $(x,y) \in D$ sabit olsun.

$$K := \{(m,n) \in \mathbb{N}^2 : \text{tüm } (x,y) \in D \text{ için } L_{m,n}(e_0; x,y) = e_0(x,y)\}$$

olmak üzere (i) ifadesinden

$$\delta_{(A)}^2 \{ \mathbb{N}^2 \setminus K \} = 0 \quad (4.1.1)$$

elde edilir. 2.7.3. Lemmadan $F_{x,y}$ fonksiyonunun B-sürekliliğinden her $(u, v) \in D$ için

$$\left| \Delta_{x,y} [F_{x,y}(u, v)] \right| \leq \frac{\varepsilon}{3} + A(\varepsilon)(u-x)^2 + B(\varepsilon)(v-y)^2 \quad (4.1.2)$$

olacak şekilde $A(\varepsilon), B(\varepsilon) > 0$ sayıları vardır. Ayrıca tüm $(m, n) \in K$ için

$$\begin{aligned} L_{m,n}(F_{x,y}; x, y) - f(x, y) &= L_{m,n}(F_{x,y}; x, y) - f(x, y)L_{m,n}(e_0; x, y) \\ &= L_{m,n}(F_{x,y}(u, v) - f(x, y); x, y) \\ &= L_{m,n}(-\Delta_{x,y}[f(u, v)]; x, y) \\ &= L_{m,n}(\Delta_{x,y}[F_{x,y}(u, v)]; x, y) \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

olur. Bu durumda tüm $(m, n) \in K$ için $L_{m,n}$ nin lineerliliği ve monotonluğundan

$$\begin{aligned} \left| L_{m,n}(F_{x,y}; x, y) - f(x, y) \right| &= \left| L_{m,n}(\Delta_{x,y}[F_{x,y}(u, v)]; x, y) \right| \\ &\leq L_{m,n} \left(\left| \Delta_{x,y}[F_{x,y}(u, v)] \right|; x, y \right) \\ &\leq L_{m,n} \left(\frac{\varepsilon}{3} + A(\varepsilon)(u-x)^2 + B(\varepsilon)(v-y)^2; x, y \right) \\ &= \frac{\varepsilon}{3} L_{m,n}(e_0; x, y) + A(\varepsilon) L_{m,n}((u-x)^2; x, y) \\ &\quad + B(\varepsilon) L_{m,n}((v-y)^2; x, y) \\ &= \frac{\varepsilon}{3} + A(\varepsilon) \{ L_{m,n}(u^2; x, y) - 2xL_{m,n}(u; x, y) + x^2 \} \\ &\quad + B(\varepsilon) \{ L_{m,n}(v^2; x, y) - 2yL_{m,n}(v; x, y) + y^2 \} \end{aligned}$$

elde edilir. $C(\varepsilon) = \max \{ A(\varepsilon), B(\varepsilon) \}$ olmak üzere tüm $(m, n) \in K$ için

$$\begin{aligned}
\left| L_{m,n} (F_{x,y}; x, y) - f(x, y) \right| &\leq \frac{\varepsilon}{3} + C(\varepsilon) \left\{ L_{m,n} (u^2; x, y) - 2x L_{m,n} (u; x, y) + x^2 \right. \\
&\quad \left. + L_{m,n} (v^2; x, y) - 2y L_{m,n} (v; x, y) + y^2 \right\} \\
&= \frac{\varepsilon}{3} + C(\varepsilon) \left\{ \left[L_{m,n} (e_3; x, y) - e_3(x, y) \right] \right. \\
&\quad \left. - 2y \left[L_{m,n} (e_2; x, y) - e_2(x, y) \right] - 2x \left[L_{m,n} (e_1; x, y) - e_1(x, y) \right] \right\}
\end{aligned}$$

bulunur. Son eşitsizlikten tüm $(m, n) \in K$ için

$$\left| L_{m,n} (F_{x,y}; x, y) - f(x, y) \right| \leq \frac{\varepsilon}{3} + C(\varepsilon) \sum_{i=1}^3 \left| L_{m,n} (e_i; x, y) - e_i(x, y) \right| \quad (4.1.4)$$

elde edilir. (4.1.4) eşitsizliğinin her iki yanından $(x, y) \in D$ üzerinden supremum alınırsa tüm $(m, n) \in K$ için

$$\left\| L_{m,n} (F_{x,y}) - f \right\|_{B(D)} \leq \frac{\varepsilon}{3} + C(\varepsilon) \sum_{i=1}^3 \left\| L_{m,n} (e_i) - e_i \right\|_{B(D)} \quad (4.1.5)$$

bulunur. Şimdi verilen bir $r > 0$ için $\varepsilon > 0$ sayısını $\varepsilon < 3r$ olacak şekilde seçelim. Buradan

$$\begin{aligned}
U &:= \left\{ (m, n) \in \mathbb{N}^2 : \left\| L_{m,n} (F_{x,y}) - f \right\|_{B(D)} \geq r \right\} \\
U_i &:= \left\{ (m, n) \in \mathbb{N}^2 : \left\| L_{m,n} (e_i) - e_i \right\|_{B(D)} \geq \frac{3r - \varepsilon}{9C(\varepsilon)} \right\}, \quad i = 1, 2, 3.
\end{aligned}$$

kümelerini tanımlayalım. Böylece (4.1.5) eşitsizliğinden

$$U \cap K \subset \bigcup_{i=1}^3 U_i \cap K$$

elde edilir. Bu ise tüm $(j, k) \in \mathbb{N}^2$ için

$$\sum_{(m,n) \in U \cap K} a_{j,k,m,n} \leq \sum_{i=1}^3 \sum_{(m,n) \in U_i \cap K} a_{j,k,m,n} \leq \sum_{i=1}^3 \sum_{(m,n) \in U_i} a_{j,k,m,n} \quad (4.1.6)$$

olduğunu gösterir. Şimdi (4.1.6) eşitsizliğinde $j, k \rightarrow \infty$ için limit alınırsa ve ayrıca (ii) den

$$P\text{-}\lim_{j,k} \sum_{(m,n) \in U \cap K} a_{j,k,m,n} = 0 \quad (4.1.7)$$

olduğu kolayca elde eldir. Buradan

$$\begin{aligned} \sum_{(m,n) \in U} a_{j,k,m,n} &= \sum_{(m,n) \in U \cap K} a_{j,k,m,n} + \sum_{(m,n) \in U \cap (\mathbb{N}^2 \setminus K)} a_{j,k,m,n} \\ &\leq \sum_{(m,n) \in U \cap K} a_{j,k,m,n} + \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2 \setminus K} a_{j,k,m,n} \end{aligned}$$

eşitsizliği kullanılır ve $j, k \rightarrow \infty$ için limit alınırsa (4.1.1) ve (4.1.7) ifadelerinden

$$P\text{-}\lim_{j,k} \sum_{(m,n) \in U} a_{j,k,m,n} = 0$$

yani

$$st_{(A)}^2\text{-}\lim \left\| L_{m,n} \left(F_{x,y} \right) - f \right\|_{B(D)} = 0$$

olduğu elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

4.1.2. Uyarı: Bazı $f \in C_b(D)$ fonksiyonlarının D kompakt kümesi üzerinde sınırlı olmayabileceği biliniyor. Ama 4.1.1. Teoremdaki

$$\left\| L_{m,n} \left(F_{x,y} \right) - f \right\|_{B(D)}$$

ifadesi K , (i) de verilen küme olmak üzere (i), (4.1.2) ve (4.1.3) den her bir $(m, n) \in K$ için sonludur.

4.1.3. Uyarı: 4.1.1. Teoremdaki A matrisi, 4-boyutlu birim matris ile yer değiştirilirse 2.7.4. Teorem elde edilir.

Şimdi 4.1.1. Teoremda elde edilen A -istatistiksel sonucun, 2.7.4. Teoremdaki klasik sonuçtan daha kuvvetli olduğunu göstermek için bir örnek verelim.

4.1.4. Örnek: $D = [0, 1] \times [0, 1]$ olmak üzere $f \in C_b(D)$ için

$$B_{m,n}(f; x, y) = \sum_{s=0}^m \sum_{t=0}^n f\left(\frac{s}{m}, \frac{t}{n}\right) \binom{m}{s} \binom{n}{t} x^s (1-x)^{m-s} y^t (1-y)^{n-t}$$

ile verilen çift indisli Bernstein operatörünü göz önüne alalım. Ayrıca

$$\begin{aligned} B_{m,n}(e_0; x, y) &= \sum_{s=0}^m \sum_{t=0}^n \binom{m}{s} \binom{n}{t} x^s (1-x)^{m-s} y^t (1-y)^{n-t} \\ &= \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} x^s (1-x)^{m-s} \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} y^t (1-y)^{n-t} \\ &= (x + 1 - x)^m (y + 1 - y)^n = e_0(x, y) \\ B_{m,n}(e_1; x, y) &= \sum_{s=0}^m \sum_{t=0}^n \frac{s}{m} \binom{m}{s} \binom{n}{t} x^s (1-x)^{m-s} y^t (1-y)^{n-t} \\ &= \sum_{s=0}^m \frac{s}{m} \binom{m}{s} x^s (1-x)^{m-s} \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} y^t (1-y)^{n-t} \\ &= \sum_{s=0}^m \frac{s}{m} \frac{m(m-1)!}{(m-s)!s!(s-1)!} x^s (1-x)^{m-s} (y + 1 - y)^n \\ &= x \sum_{s=1}^m \frac{(m-1)!}{(m-s)!(s-1)!} x^{s-1} (1-x)^{m-s} \\ &= x \sum_{s=0}^{m-1} \frac{(m-1)!}{(m-1-s)!s!} x^s (1-x)^{m-1-s} = x(x + 1 - x)^{m-1} = e_1(x, y) \\ B_{m,n}(e_2; x, y) &= \sum_{s=0}^m \sum_{t=0}^n \frac{t}{n} \binom{m}{s} \binom{n}{t} x^s (1-x)^{m-s} y^t (1-y)^{n-t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} x^s (1-x)^{m-s} \sum_{t=0}^n \frac{t}{n} \binom{n}{t} y^t (1-y)^{n-t} \\
&= (x+1-x)^m \sum_{t=0}^n \frac{t}{n} \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-t)! t \cdot (t-1)!} y^t (1-y)^{n-t} \\
&= y \sum_{t=1}^n \frac{(n-1)!}{(n-t)! (t-1)!} y^{t-1} (1-y)^{n-t} \\
&= y \sum_{t=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-t)! t!} y^t (1-y)^{n-1-t} = y (y+1-y)^{n-1} = e_2(x, y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{m,n}(e_3; x, y) &= \sum_{s=0}^m \sum_{t=0}^n \left\{ \left(\frac{s}{m} \right)^2 + \left(\frac{t}{n} \right)^2 \right\} \binom{m}{s} \binom{n}{t} x^s (1-x)^{m-s} y^t (1-y)^{n-t} \\
&= \sum_{s=0}^m \sum_{t=0}^n \left(\frac{s}{m} \right)^2 \binom{m}{s} \binom{n}{t} x^s (1-x)^{m-s} y^t (1-y)^{n-t} \\
&\quad + \sum_{s=0}^m \sum_{t=0}^n \left(\frac{t}{n} \right)^2 \binom{m}{s} \binom{n}{t} x^s (1-x)^{m-s} y^t (1-y)^{n-t} \\
&= x \sum_{s=0}^{m-1} \frac{s+1}{m} \frac{(m-1)!}{(m-1-s)! s!} x^s (1-x)^{m-1-s} (y+1-y)^n \\
&\quad + (x+1-x)^m y \sum_{t=0}^{n-1} \frac{t+1}{n} \frac{(n-1)!}{(n-1-t)! t!} y^t (1-y)^{n-1-t} \\
&= x \sum_{s=0}^{m-1} \frac{s}{m} \frac{(m-1)!}{(m-1-s)! s!} x^s (1-x)^{m-1-s} + x \sum_{s=0}^{m-1} \frac{1}{m} \frac{(m-1)!}{(m-1-s)! s!} x^s (1-x)^{m-1-s} \\
&\quad + y \sum_{t=0}^{n-1} \frac{t}{n} \frac{(n-1)!}{(n-1-t)! t!} y^t (1-y)^{n-1-t} + y \sum_{t=0}^{n-1} \frac{1}{n} \frac{(n-1)!}{(n-1-t)! t!} y^t (1-y)^{n-1-t} \\
&= x^2 \frac{m-1}{m} \sum_{s=1}^{m-1} \frac{(m-2)!}{(m-1-s)! (s-1)!} x^{s-1} (1-x)^{m-1-s} + \frac{x}{m} (x+1-x)^{m-1} \\
&\quad + y^2 \frac{n-1}{n} \sum_{t=1}^{n-1} \frac{(n-2)!}{(n-1-t)! (t-1)!} y^{t-1} (1-y)^{n-1-t} + \frac{y}{n} (y+1-y)^{n-1} \\
&= x^2 \frac{m-1}{m} (x+1-x)^{m-2} + \frac{x}{m} + y^2 \frac{n-1}{n} (y+1-y)^{n-2} + \frac{y}{n}
\end{aligned}$$

$$= x^2 \frac{m-1}{m} + \frac{x}{m} + y^2 \frac{n-1}{n} + \frac{y}{n} = e_3(x, y) + \frac{x-x^2}{m} + \frac{y-y^2}{n}$$

olur. Böylece $\{B_{m,n}\}$ operatörler dizisi 2.7.4. Teoremin koşullarını sağlar. Buradan herhangi bir $f \in C_b(D)$ için

$$P\text{-}\lim \|B_{m,n}(F_{x,y}) - f\|_{B(D)} = 0$$

gerçeklenir. Şimdi $A = C(1,1)$ matrisini ve genel terimi

$$x_{m,n} = \begin{cases} 1, & m \text{ ve } n \text{ tam kare ise,} \\ 0, & \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

olacak şekilde $x = \{x_{m,n}\}$ çift indisli dizisini alalım. Bu durumda $st_{(C(1,1))}^2\text{-}\lim x = 0$ olur. Ayrıca x çift indisli dizisi P -yakınsak değildir. $F_{x,y}(u, v) = f(u, y) + f(x, v) - f(u, v)$ olmak üzere $f \in C_b(D)$ için

$$H_{m,n}(f; x, y) = \sum_{s=0}^m \sum_{t=0}^n F_{x,y}\left(\frac{s}{m}, \frac{t}{n}\right) \binom{m}{s} \binom{n}{t} x^s (1-x)^{m-s} y^t (1-y)^{n-t}$$

operatörünü göz önüne alalım. Şimdi $C_b(D)$ üzerinde,

$$L_{m,n}(f; x, y) = (1 + x_{m,n}) H_{m,n}(f; x, y). \quad (4.1.8)$$

pozitif lineer operatörünü tanımlayalım. Basit hesaplamalar ile

$$L_{m,n}(e_0; x, y) = 1 + x_{m,n},$$

$$L_{m,n}(e_1; x, y) = (1 + x_{m,n}) e_1(x, y),$$

$$L_{m,n}(e_2; x, y) = (1 + x_{m,n})e_2(x, y),$$

$$L_{m,n}(e_3; x, y) = (1 + x_{m,n}) \left(e_3(x, y) + \frac{x - x^2}{m} + \frac{y - y^2}{n} \right),$$

elde edilir. Şimdi de 4.1.1. Teoremin koşullarının sağlandığını gösterelim:

(i) $\delta_{(C(1,1))}^2 \{(m, n) : m, n \in \mathbb{N}, \text{ tam kare} \} = 0$ olduğundan

$K := \{(m, n) \in \mathbb{N}^2 : \text{tüm } (x, y) \in D \text{ için } L_{m,n}(e_0; x, y) = e_0(x, y)\}$ olmak üzere

$\delta_{(C(1,1))}^2 \{K\} = 1$ olur.

$$(ii) \|L_{m,n}(e_1) - e_1\|_{B(D)} = \sup_{x \in D} |L_{m,n}(e_1; x, y) - e_1(x, y)| = \sup_{x \in D} |x_{m,n} e_1(x, y)| = x_{m,n},$$

$$\|L_{m,n}(e_2) - e_2\|_{B(D)} = \sup_{x \in D} |L_{m,n}(e_2; x, y) - e_2(x, y)| = \sup_{x \in D} |x_{m,n} e_2(x, y)| = x_{m,n},$$

$$\|L_{m,n}(e_3) - e_3\|_{B(D)} = \sup_{x \in D} |L_{m,n}(e_3; x, y) - e_3(x, y)|$$

$$= \sup_{x \in D} \left| (1 + x_{m,n}) \left(e_3(x, y) + \frac{x - x^2}{m} + \frac{y - y^2}{n} \right) - e_3(x, y) \right|$$

$$= \sup_{x \in D} \left| \frac{x - x^2}{m} + \frac{y - y^2}{n} + x_{m,n} \left(e_3(x, y) + \frac{x - x^2}{m} + \frac{y - y^2}{n} \right) \right|$$

$$\leq \sup_{x \in D} \frac{x - x^2}{m} + \sup_{x \in D} \frac{y - y^2}{n} + \sup_{x \in D} x_{m,n} e_3(x, y)$$

$$+ \sup_{x \in D} x_{m,n} \frac{x - x^2}{m} + \sup_{x \in D} x_{m,n} \frac{y - y^2}{n}$$

$$= \frac{1}{2m} + \frac{1}{2n} + 2x_{m,n} + \frac{1}{2m} x_{m,n} + \frac{1}{2n} x_{m,n}$$

olup $\text{st}_{(C(1,1))}^2 - \lim x = 0$ olduğundan $\text{st}_{(C(1,1))}^2 - \lim \|L_{m,n}(e_i) - e_i\|_{B(D)} = 0$, $i = 1, 2, 3$ elde

edilir. Yani (4.1.8) ile verilen pozitif lineer operatör dizisi 4.1.1. Teoremin koşullarını sağlar. Bu durumda herhangi bir $f \in C_b(D)$ fonksiyonu için

$$\text{st}_{(C(1,1))}^2 - \lim \|L_{m,n}(f) - f\|_{B(D)} = 0$$

sağlanır. Fakat x dizisi P -yakınsak olmadığından (4.1.8) ile verilen pozitif lineer operatörlerin dizisi 2.7.4. Teoremin koşullarını sağlamaz. Yani (4.1.8) deki $L_{m,n}$ operatörleri 4.1.1. Teoremde çalışırken 2.7.4. Teoreminde çalışmaz.

Şimdi 4.1.1. Teoremdeki A -istatistiksel yakınsaklığa karşılık gelen oranı dört farklı yolla hesaplayacağız.

4.1.5. Tanım: $A := (a_{j,k,m,n})$ 4-boyutlu negatif olmayan RH-regüler matris, $x = \{x_{m,n}\}$ reel terimli bir çift indisli dizi ve $\{\alpha_{m,n}\}$ negatif olmayan, artmayan bir çift indisli dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için, $K(\varepsilon) := \{(m,n) \in \mathbb{N}^2 : |x_{m,n} - L| \geq \varepsilon\}$ olmak üzere

$$P\text{-}\lim_{j,k} \frac{1}{\alpha_{j,k}} \sum_{(m,n) \in K(\varepsilon)} a_{j,k,m,n} = 0$$

ise $x = \{x_{m,n}\}$ dizisi $o(\alpha_{m,n})$ oranı ile L sayısına A -istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durum $x_{m,n} - L = st_{(A)}^2 - o(\alpha_{m,n})$, $m, n \rightarrow \infty$ ile gösterilir.

4.1.6. Tanım: $A := (a_{j,k,m,n})$ 4-boyutlu negatif olmayan RH-regüler matris, $x = \{x_{m,n}\}$ reel terimli bir çift indisli dizi ve $\{\alpha_{m,n}\}$ negatif olmayan, artmayan bir çift indisli dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için, $L(\varepsilon) := \{(m,n) \in \mathbb{N}^2 : |x_{m,n}| \geq \varepsilon\}$ olmak üzere

$$\sup_{j,k} \frac{1}{\alpha_{j,k}} \sum_{(m,n) \in L(\varepsilon)} a_{j,k,m,n} < \infty$$

ise $x = \{x_{m,n}\}$ dizisi $O(\alpha_{m,n})$ oranı ile A -istatistiksel sınırlıdır denir. Bu durum $x_{m,n} = st_{(A)}^2 - O(\alpha_{m,n})$, $m, n \rightarrow \infty$ ile gösterilir.

4.1.7. Tanım: $A := (a_{j,k,m,n})$ 4-boyutlu negatif olmayan RH-regüler matris, $x = \{x_{m,n}\}$ reel terimli bir çift indisli dizi ve $\{\alpha_{m,n}\}$ negatif olmayan, artmayan bir çift indisli dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için, $M(\varepsilon) := \{(m,n) \in \mathbb{N}^2 : |x_{m,n} - L| \geq \varepsilon \alpha_{m,n}\}$ olmak üzere

$$P\text{-}\lim_{j,k} \sum_{(m,n) \in M(\varepsilon)} a_{j,k,m,n} = 0$$

ise $x = \{x_{m,n}\}$ dizisi $o_{m,n}(\alpha_{m,n})$ oranı ile L sayısına A -istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durum $x_{m,n} - L = st_{(A)}^2 - o_{m,n}(\alpha_{m,n})$, $m, n \rightarrow \infty$ ile gösterilir.

4.1.8. Tanım: $A := (a_{j,k,m,n})$ 4-boyutlu negatif olmayan RH-regüler matris, $x = \{x_{m,n}\}$ reel terimli bir çift indisli dizi ve $\{\alpha_{m,n}\}$ negatif olmayan, artmayan bir çift indisli dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için, $N(\varepsilon) := \{(m,n) \in \mathbb{N}^2 : |x_{m,n}| \geq \varepsilon \alpha_{m,n}\}$ olmak üzere

$$P\text{-}\lim_{j,k} \sum_{(m,n) \in N(\varepsilon)} a_{j,k,m,n} = 0$$

ise $x = \{x_{m,n}\}$ dizisi $O_{m,n}(\alpha_{m,n})$ oranı ile A -istatistiksel sınırlıdır denir. Bu durum $x_{m,n} = st_{(A)}^2 - O_{m,n}(\alpha_{m,n})$, $m, n \rightarrow \infty$ ile gösterilir.

Şimdi yukarıdaki tanımları kullanarak aşağıdaki yardımcı sonuçları verelim.

4.1.9. Lemma: $A := (a_{j,k,m,n})$ 4-boyutlu negatif olmayan RH-regüler matris ve $\{\alpha_{m,n}\}$ ve $\{\beta_{m,n}\}$ negatif olmayan artmayan çift indisli diziler olsun. $\{x_{m,n}\}$ ve $\{y_{m,n}\}$ iki reel terimli çift indisli dizi olsun. Eğer $x_{m,n} - L_1 = st_{(A)}^2 - o(\alpha_{m,n})$ ve $y_{m,n} - L_2 = st_{(A)}^2 - o(\beta_{m,n})$ ise

(i) Her bir $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ için $\gamma_{m,n} = \max\{\alpha_{m,n}, \beta_{m,n}\}$ olmak üzere,

$$(x_{m,n} - L_1) \mp (y_{m,n} - L_2) = st_{(A)}^2 - o(\gamma_{m,n}), \quad m, n \rightarrow \infty,$$

(ii) Herhangi λ reel sayısı için $\lambda(x_{m,n} - L_1) = st_{(A)}^2 - o(\alpha_{m,n})$, $m, n \rightarrow \infty$.

Ayrıca bu sonuçlar “o” sembolü ile “O” sembolü değiştirilerek de elde edilir.

İspat: (i) $x_{m,n} - L_1 = st_{(A)}^2 - o(\alpha_{m,n})$ ve $y_{m,n} - L_2 = st_{(A)}^2 - o(\beta_{m,n})$ olduğunu kabul edelim. Ayrıca $\varepsilon > 0$ için,

$$K := \{(m,n) \in \mathbb{N}^2 : |(x_{m,n} - L_1) \mp (y_{m,n} - L_2)| \geq \varepsilon\},$$

$$K_1 := \left\{ (m, n) \in \mathbb{N}^2 : |x_{m,n} - L_1| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\},$$

$$K_2 := \left\{ (m, n) \in \mathbb{N}^2 : |y_{m,n} - L_2| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

kümelerini tanımlayalım.

$$\left| (x_{m,n} - L_1) \mp (y_{m,n} - L_2) \right| \leq |x_{m,n} - L_1| + |y_{m,n} - L_2|$$

olduğundan $K \subset K_1 \cup K_2$ olduğunu gösterebiliriz. Bu ise tüm $(j, k) \in \mathbb{N}^2$ için

$$\sum_{(m,n) \in K} a_{j,k,m,n} \leq \sum_{(m,n) \in K_1} a_{j,k,m,n} + \sum_{(m,n) \in K_2} a_{j,k,m,n} \quad (4.1.9)$$

sağlar. $\gamma_{m,n} = \max \{ \alpha_{m,n}, \beta_{m,n} \}$ olduğundan (4.1.9) eşitsizliğinden

$$\frac{1}{\gamma_{j,k}} \sum_{(m,n) \in K} a_{j,k,m,n} \leq \frac{1}{\alpha_{j,k}} \sum_{(m,n) \in K_1} a_{j,k,m,n} + \frac{1}{\beta_{j,k}} \sum_{(m,n) \in K_2} a_{j,k,m,n}$$

olduğu elde edilir. Buradan $j, k \rightarrow \infty$ limit alınır ve hipotezleri kullanılırsa

$$P - \lim_{j,k} \frac{1}{\gamma_{j,k}} \sum_{(m,n) \in K} a_{j,k,m,n} = 0$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

(ii) $x_{m,n} - L_1 = st_{(A)}^2 - o(\alpha_{m,n})$ olduğunu kabul edelim. λ reel sayısı için

$$\left\{ (m, n) \in \mathbb{N}^2 : |\lambda(x_{m,n} - L_1)| \geq \varepsilon \right\} = \left\{ (m, n) \in \mathbb{N}^2 : |x_{m,n} - L_1| \geq \frac{\varepsilon}{|\lambda|} \right\}$$

olup kabulümüzden ispat elde edilir.

Şimdi vereceğimiz Lemmanın ispatı yukarıdaki gibi kolaylıkla elde edilebilir.

4.1.10. Lemma: $A := (a_{j,k,m,n})$ 4-boyutlu negatif olmayan RH-regüler matris ve $\{\alpha_{m,n}\}$ ve $\{\beta_{m,n}\}$ negatif olmayan, artmayan çift indisli diziler olsun. $\{x_{m,n}\}$ ve $\{y_{m,n}\}$ reel terimli iki çift indisli dizi olsun. Eğer $x_{m,n} - L_1 = st_{(A)}^2 - o_{m,n}(\alpha_{m,n})$ ve $y_{m,n} - L_2 = st_{(A)}^2 - o_{m,n}(\beta_{m,n})$ ise

(i) Her bir $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ için $\gamma_{m,n} = \max\{\alpha_{m,n}, \beta_{m,n}\}$ olmak üzere,
 $(x_{m,n} - L_1) \mp (y_{m,n} - L_2) = st_{(A)}^2 - o_{m,n}(\gamma_{m,n}), m, n \rightarrow \infty,$

(ii) Herhangi λ reel sayısı için $\lambda(x_{m,n} - L_1) = st_{(A)}^2 - o_{m,n}(\alpha_{m,n}), m, n \rightarrow \infty.$

Ayrıca bu sonuçlar “ $o_{m,n}$ ” sembolü ile “ $O_{m,n}$ ” sembolü değiştirilerek de elde edilir.

Aşağıdaki teoremi ispat etmek için, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ olmak üzere

$$\omega_m(f; \lambda_1 \delta_1, \lambda_2 \delta_2) \leq (1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2) \omega_m(f; \delta_1, \delta_2) \quad (4.1.10)$$

eşitsizliğini kullanacağız.

4.1.11. Teorem: $A := (a_{j,k,m,n})$ 4-boyutlu negatif olmayan RH-regüler matris ve $L_{m,n} : C_b(D) \rightarrow B(D)$ pozitif lineer operatör olsun. $\{\alpha_{m,n}\}$ ve $\{\beta_{m,n}\}$ negatif olmayan, artmayan çift indisli diziler olsun. Aşağıdaki koşulların sağlandığını kabul edelim:

(i) $K := \{(m,n) \in \mathbb{N}^2 : \text{tüm } (x,y) \in D \text{ için } L_{m,n}(e_0; x,y) = e_0(x,y)\}$ olmak üzere

$$P\text{-}\lim_{j,k} \frac{1}{\alpha_{j,k}} \sum_{(m,n) \in K} a_{j,k,m,n} = 1$$

(ii) $\varphi(u,v) = (u-x)^2, \psi(u,v) = (v-y)^2$ fonksiyonları için $\gamma_{m,n} := \sqrt{\|L_{m,n}(\varphi)\|_{B(D)}}$,

$\delta_{m,n} := \sqrt{\|L_{m,n}(\psi)\|_{B(D)}}$ olmak üzere

$$\omega_m(f; \gamma_{m,n}, \delta_{m,n}) = st_{(A)}^2 - o(\beta_{m,n}), m, n \rightarrow \infty.$$

Bu durumda herhangi bir $f \in C_b(D)$ fonksiyonu için $c_{m,n} = \max\{\alpha_{m,n}, \beta_{m,n}\}$ olmak üzere

$$\|L_{m,n}(F_{x,y}) - f\|_{B(D)} = st_{(A)}^2 - o(c_{m,n}), \quad m, n \rightarrow \infty,$$

olur. Benzer sonuçlar “o” ile “O” yer değiştirilerek de elde edilebilir.

İspat: $f \in C_b(D)$ ve $(x, y) \in D$ sabit olsun.

$$K := \{(m, n) \in \mathbb{N}^2 : \text{tüm } (x, y) \in D \text{ için } L_{m,n}(e_0; x, y) = e_0(x, y)\}$$

olmak üzere (i) den

$$P - \lim_{j,k} \frac{1}{\alpha_{j,k}} \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2 \setminus K} a_{j,k,m,n} = 0 \quad (4.1.11)$$

elde edilir. Ayrıca $F_{x,y}$ fonksiyonunun B-sürekliliğinden her $(u, v) \in D$ için

$$|\Delta_{x,y}[F_{x,y}(u, v)]| \leq \frac{\varepsilon}{3} + A(\varepsilon)(u - x)^2 + B(\varepsilon)(v - y)^2$$

olacak şekilde $A(\varepsilon), B(\varepsilon) > 0$ sayıları vardır. Tüm $(m, n) \in K$ için

$$L_{m,n}(F_{x,y}; x, y) - f(x, y) = L_{m,n}(\Delta_{x,y}[F_{x,y}(u, v)]; x, y)$$

olduğunu biliyoruz. ω_m in özelliklerini kullanarak

$$\begin{aligned} |\Delta_{x,y}[F_{x,y}(u, v)]| &\leq \omega_m(f; |u - x|, |v - y|) \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{\delta_1}|u - x|\right) \left(1 + \frac{1}{\delta_2}|v - y|\right) \omega_m(f; \delta_1, \delta_2) \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

elde edilir. Bu durumda tüm $(m, n) \in K$ için $L_{m,n}$ nin lineerliliğinden, monotonluğundan ve (4.1.12) ifadesinden

$$\begin{aligned}
\left| L_{m,n} (F_{x,y}; x, y) - f(x, y) \right| &= \left| L_{m,n} \left(\Delta_{x,y} [F_{x,y}(u, v)]; x, y \right) \right| \\
&\leq L_{m,n} \left(\left| \Delta_{x,y} [F_{x,y}(u, v)] \right|; x, y \right) \\
&\leq L_{m,n} \left(\left(1 + \frac{1}{\delta_1} |u - x| \right) \left(1 + \frac{1}{\delta_2} |v - y| \right); x, y \right) \omega_m(f; \delta_1, \delta_2) \\
&= \left\{ 1 + \frac{1}{\delta_1} L_{m,n}(|u - x|; x, y) + \frac{1}{\delta_2} L_{m,n}(|v - y|; x, y) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\delta_1 \delta_2} L_{m,n}(|u - x| |v - y|; x, y) \right\} \omega_m(f; \delta_1, \delta_2) \tag{4.1.13}
\end{aligned}$$

bulunur. (4.1.13) eşitsizliğinde Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılırsa tüm $(m, n) \in K$ için

$$\begin{aligned}
\left| L_{m,n} (F_{x,y}; x, y) - f(x, y) \right| &\leq \left\{ 1 + \frac{1}{\delta_1} \sqrt{L_{m,n}(\varphi; x, y)} + \frac{1}{\delta_2} \sqrt{L_{m,n}(\psi; x, y)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\delta_1 \delta_2} \sqrt{L_{m,n}(\varphi; x, y)} \sqrt{L_{m,n}(\psi; x, y)} \right\} \omega_m(f; \delta_1, \delta_2) \tag{4.1.14}
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.1.14) eşitsizliğinin her iki yanından $(x, y) \in D$ üzerinden supremum

alınırsa tüm $(m, n) \in K$ için $\gamma_{m,n} := \sqrt{\|L_{m,n}(\varphi)\|_{B(D)}}$, $\delta_{m,n} := \sqrt{\|L_{m,n}(\psi)\|_{B(D)}}$ olmak üzere

$$\left\| L_{m,n} (F_{x,y}) - f \right\|_{B(D)} \leq 4 \omega_m(f; \gamma_{m,n}, \delta_{m,n}) \tag{4.1.15}$$

bulunur. Şimdi verilen bir $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$U := \left\{ (m, n) \in \mathbb{N}^2 : \left\| L_{m,n} (F_{x,y}) - f \right\|_{B(D)} \geq \varepsilon \right\},$$

$$U_1 := \left\{ (m, n) \in \mathbb{N}^2 : \omega_m(f; \gamma_{m,n}, \delta_{m,n}) \geq \frac{\varepsilon}{4} \right\}.$$

kümelerini tanımlayalım. Böylece (4.1.15) eşitsizliğinden

$$U \cap K \subset U_1 \cap K$$

elde edilir. Bu ise tüm $(j, k) \in \mathbb{N}^2$ için, $c_{m,n} = \max\{\alpha_{m,n}, \beta_{m,n}\}$ olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_{j,k}} \sum_{(m,n) \in U \cap K} a_{j,k,m,n} &\leq \frac{1}{c_{j,k}} \sum_{(m,n) \in U_1 \cap K} a_{j,k,m,n} \\ &\leq \frac{1}{c_{j,k}} \sum_{(m,n) \in U_1} a_{j,k,m,n} \\ &\leq \frac{1}{\alpha_{j,k}} \sum_{(m,n) \in U_1} a_{j,k,m,n} \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

olduğu gösterir. Şimdi (4.1.16) da $j, k \rightarrow \infty$ için limit alınırsa ve ayrıca (ii) den

$$P\text{-}\lim_{j,k} \frac{1}{c_{j,k}} \sum_{(m,n) \in U \cap K} a_{j,k,m,n} = 0 \quad (4.1.17)$$

olduğu kolayca elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \sum_{(m,n) \in U} a_{j,k,m,n} &= \sum_{(m,n) \in U \cap K} a_{j,k,m,n} + \sum_{(m,n) \in U \cap (\mathbb{N}^2 \setminus K)} a_{j,k,m,n} \\ &\leq \sum_{(m,n) \in U \cap K} a_{j,k,m,n} + \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2 \setminus K} a_{j,k,m,n} \end{aligned}$$

olup buradan ise

$$\frac{1}{c_{j,k}} \sum_{(m,n) \in U} a_{j,k,m,n} \leq \frac{1}{c_{j,k}} \sum_{(m,n) \in U \cap K} a_{j,k,m,n} + \frac{1}{\alpha_{j,k}} \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2 \setminus K} a_{j,k,m,n} \quad (4.1.18)$$

bulunur. (4.1.18) eşitsizliğinde $j, k \rightarrow \infty$ için limit alınır (4.1.11) ve (4.1.17) den istenilen elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Aşağıdaki teorem benzer yolla ispatlanabilir.

4.1.12. Teorem: $A := (a_{j,k,m,n})$ 4-boyutlu negatif olmayan RH-regüler matris ve $L_{m,n} : C_b(D) \rightarrow B(D)$ pozitif lineer operatör olsun. $\{\alpha_{m,n}\}$ ve $\{\beta_{m,n}\}$ negatif olmayan artmayan çift indisli diziler olsun. Aşağıdaki koşulların sağlandığını kabul edelim:

(i) $K := \{(m, n) \in \mathbb{N}^2 : \text{tüm } (x, y) \in D \text{ için } L_{m,n}(e_0; x, y) = e_0(x, y)\}$ olmak üzere

$$P\text{-}\lim_{j,k} \sum_{(m,n) \in K} a_{j,k,m,n} = 1$$

(ii) $\varphi(u, v) = (u - x)^2$, $\psi(u, v) = (v - y)^2$ fonksiyonları için $\gamma_{m,n} := \sqrt{\|L_{m,n}(\varphi)\|_{B(D)}}$,

$\delta_{m,n} := \sqrt{\|L_{m,n}(\psi)\|_{B(D)}}$ olmak üzere

$$\omega_m(f; \gamma_{m,n}, \delta_{m,n}) = st_{(A)}^2 - o_{m,n}(\beta_{m,n}), \quad m, n \rightarrow \infty.$$

Bu durumda herhangi bir $f \in C_b(D)$ fonksiyonu için

$$\|L_{m,n}(F_{x,y}) - f\|_{B(D)} = st_{(A)}^2 - o_{m,n}(\beta_{m,n}), \quad m, n \rightarrow \infty,$$

olur. Benzer sonuçlar “ $o_{m,n}$ ” ile “ $O_{m,n}$ ” yer değiştirilerek de elde edilebilir.

4.2. Bögel-süreklilik ve Periyodik Fonksiyonlar için A-İstatistiksel Yaklaşım

Bu kısımda, çift indisli dizilerin A-istatistiksel yakınsaklık tanımını kullanarak, C. Badea, I. Badea ve C. Cottin tarafından B-süreklilik ve $B-2\pi$ -periyodik fonksiyonlar için verilen Korovkin tipi yaklaşım teoremden daha kuvvetli sonuçlar elde edeceğiz. Ayrıca, verdiğimiz teoremin daha kuvvetli olduğuna dair bir örnek verip, verdiğimiz teorem için A-istatistiksel yakınsaklık oranını hesaplayacağız.

4.2.1. Teorem: $A = (a_{j,k,m,n})$ 4-boyutlu negatif olmayan RH-regüler matris ve $L_{m,n} : B_{2\pi} \rightarrow B(\mathbb{R}^2)$ pozitif lineer operatör olsun. Aşağıdaki koşulların sağlandığını kabul edelim:

(i) $K := \{(m,n) \in \mathbb{N}^2 : \text{tüm } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ için } L_{m,n}(f_0; x,y) = f_0(x,y)\}$ olmak üzere

$$\delta_{(A)}^2 \{K\} = P\text{-}\lim_{j,k} \sum_{(m,n) \in K} a_{j,k,m,n} = 1$$

(ii) $f_1(x,y) = \sin x$, $f_2(x,y) = \sin y$, $f_3(x,y) = \cos x$, $f_4(x,y) = \cos y$ olmak üzere

$$st_{(A)}^2 - \lim \|L_{m,n}(f_i) - f_i\|_{B(\mathbb{R}^2)} = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Bu durumda herhangi bir $f \in B_{2\pi}$ fonksiyonu için,

$$st_{(A)}^2 - \lim \|L_{m,n}(F_{x,y}) - f\|_{B(\mathbb{R}^2)} = 0$$

olur.

İspat: $f \in B_{2\pi}$ ve $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ sabit olsun.

$$K := \{(m,n) \in \mathbb{N}^2 : \text{tüm } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ için } L_{m,n}(f_0; x,y) = f_0(x,y)\}$$

olmak üzere (i) den

$$\delta_{(A)}^2 \{\mathbb{N}^2 \setminus K\} = 0 \tag{4.2.1}$$

elde edilir. 2.7.8 Lemmadan, $F_{x,y}$ fonksiyonunun B-sürekliliğinden, her $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ için

$$|\Delta_{x,y}[F_{x,y}(u,v)]| \leq \frac{\varepsilon}{3} + A(\varepsilon) \sin^2 \frac{u-x}{2} + B(\varepsilon) \sin^2 \frac{v-y}{2} \tag{4.2.2}$$

olacak şekilde $A(\varepsilon), B(\varepsilon) > 0$ sayıları vardır. Ayrıca tüm $(m,n) \in K$ için

$$\begin{aligned}
L_{m,n}(F_{x,y}; x, y) - f(x, y) &= L_{m,n}(F_{x,y}; x, y) - f(x, y)L_{m,n}(f_0; x, y) \\
&= L_{m,n}(f(u, y) + f(x, v) - f(u, v) - f(x, y); x, y) \\
&= L_{m,n}(-\Delta_{x,y}[f(u, v)]; x, y) \\
&= L_{m,n}(\Delta_{x,y}[F_{x,y}(u, v)]; x, y)
\end{aligned} \tag{4.2.3}$$

olur. Bu durumda tüm $(m, n) \in K$ için $L_{m,n}$ nin lineerliliği ve monotonluğundan, $C(\varepsilon) = \max\{A(\varepsilon), B(\varepsilon)\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
|L_{m,n}(F_{x,y}; x, y) - f(x, y)| &= |L_{m,n}(\Delta_{x,y}[F_{x,y}(u, v)]; x, y)| \\
&\leq L_{m,n}(|\Delta_{x,y}[F_{x,y}(u, v)]|; x, y) \\
&\leq L_{m,n}\left(\frac{\varepsilon}{3} + A(\varepsilon)\sin^2 \frac{u-x}{2} + B(\varepsilon)\sin^2 \frac{v-y}{2}; x, y\right) \\
&= \frac{\varepsilon}{3}L_{m,n}(f_0; x, y) + A(\varepsilon)L_{m,n}\left(\sin^2 \frac{u-x}{2}; x, y\right) \\
&\quad + B(\varepsilon)L_{m,n}\left(\sin^2 \frac{v-y}{2}; x, y\right) \\
&= \frac{\varepsilon}{3} + A(\varepsilon)L_{m,n}\left(\frac{1-\cos(u-x)}{2}; x, y\right) \\
&\quad + B(\varepsilon)L_{m,n}\left(\frac{1-\cos(v-y)}{2}; x, y\right) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{C(\varepsilon)}{2}\{2 - \sin x L_{m,n}(f_1; x, y) - \sin y L_{m,n}(f_2; x, y) \\
&\quad - \cos x L_{m,n}(f_3; x, y) - \cos y L_{m,n}(f_4; x, y)\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitsizlikten tüm $(m, n) \in K$ için

$$\begin{aligned}
|L_{m,n}(F_{x,y}; x, y) - f(x, y)| &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{C(\varepsilon)}{2}\{|\sin x| |L_{m,n}(f_1; x, y) - f_1(x, y)| \\
&\quad + |\sin y| |L_{m,n}(f_2; x, y) - f_2(x, y)|
\end{aligned}$$

$$+|\cos x|\left|L_{m,n}(f_3;x,y)-f_3(x,y)\right|$$

$$+|\cos y|\left|L_{m,n}(f_4;x,y)-f_4(x,y)\right|\}$$

bulunur. Son eşitsizlikten tüm $(m,n) \in K$ için

$$\left|L_{m,n}(F_{x,y};x,y)-f(x,y)\right| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{C(\varepsilon)}{2} \sum_{i=1}^4 |L_{m,n}(f_i;x,y)-f_i(x,y)| \quad (4.2.4)$$

elde edilir. (4.2.4) eşitsizliğinin her iki yanından $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ üzerinden supremum alınırsa tüm $(m,n) \in K$ için

$$\|L_{m,n}(F_{x,y})-f\|_{B(\mathbb{R}^2)} \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{C(\varepsilon)}{2} \sum_{i=1}^4 \|L_{m,n}(f_i)-f_i\|_{B(\mathbb{R}^2)} \quad (4.2.5)$$

bulunur. Şimdi verilen bir $r > 0$ için $\varepsilon < 3r$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ sayısı seçelim. Buradan

$$U := \left\{ (m,n) \in \mathbb{N}^2 : \|L_{m,n}(F_{x,y})-f\|_{B(\mathbb{R}^2)} \geq r \right\},$$

$$U_i := \left\{ (m,n) \in \mathbb{N}^2 : \|L_{m,n}(f_i)-f_i\|_{B(\mathbb{R}^2)} \geq \frac{3r-\varepsilon}{6C(\varepsilon)} \right\}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

kümelerini tanımlayalım. Böylece (4.2.5) eşitsizliğinden

$$U \cap K \subset \bigcup_{i=1}^4 U_i \cap K$$

elde edilir. Bu ise tüm $(j,k) \in \mathbb{N}^2$ için

$$\sum_{(m,n) \in U \cap K} a_{j,k,m,n} \leq \sum_{i=1}^4 \sum_{(m,n) \in U_i \cap K} a_{j,k,m,n} \leq \sum_{i=1}^4 \sum_{(m,n) \in U_i} a_{j,k,m,n} \quad (4.2.6)$$

olduğunu gösterir. Şimdi (4.2.6) da $j, k \rightarrow \infty$ için limit alınır ve ayrıca (ii) den

$$P\text{-}\lim_{j,k} \sum_{(m,n) \in U \cap K} a_{j,k,m,n} = 0 \quad (4.2.7)$$

olduğu kolayca elde eldir. Buradan

$$\begin{aligned} \sum_{(m,n) \in U} a_{j,k,m,n} &= \sum_{(m,n) \in U \cap K} a_{j,k,m,n} + \sum_{(m,n) \in U \cap (\mathbb{N}^2 \setminus K)} a_{j,k,m,n} \\ &\leq \sum_{(m,n) \in U \cap K} a_{j,k,m,n} + \sum_{(m,n) \in (\mathbb{N}^2 \setminus K)} a_{j,k,m,n} \end{aligned}$$

eşitsizliği kullanılır ve $j, k \rightarrow \infty$ için limit alınır (4.2.1) ve (4.2.7) den

$$P\text{-}\lim_{j,k} \sum_{(m,n) \in U} a_{j,k,m,n} = 0$$

yani

$$st_{(A)}^2\text{-}\lim \left\| L_{m,n} (F_{x,y}) - f \right\|_{B(\mathbb{R}^2)} = 0$$

olduğu elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

4.2.2. Uyarı: Bazı $f \in B_{2\pi}$ fonksiyonlarının sınırlı olmayabileceği biliniyor. Fakat 4.2.1.

Teoremdeki

$$\left\| L_{m,n} (F_{x,y}) - f \right\|_{B(\mathbb{R}^2)}$$

ifadesi K , (i) de verilen küme olmak üzere (i), (4.2.2) ve (4.2.3) den her bir $(m,n) \in K$ için sonludur.

4.2.3. Uyarı: 4.2.1. Teoremdeki A matrisi, 4-boyutlu birim matris ile yer değiştirilirse 2.7.9. Teorem elde edilir.

Şimdi 4.2.1. Teoremde elde edilen A-istatistiksel sonucun, 2.7.9. Teoremdeki klasik sonuçtan daha kuvvetli olduğunu göstermek için bir örnek verelim.

4.2.4. Örnek: $t_{s,p} = \frac{2s\pi}{N_p + 2}$, $s = 1, 2, \dots, N_p + 2$ ve ϕ_n , $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_{1,n} = 1$ ile

$\phi_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{v=1}^{N_n} \rho_{v,n} \cos vx$ formundaki negatif olmayan kosinüs polinomu olmak üzere

$$K_{m,n}(f; x, y) = \frac{4}{(N_m + 2)(N_n + 2)} \sum_{k=1}^{N_m+2} \sum_{l=1}^{N_n+2} f(t_{k,m}, t_{l,n}) \phi_m(t_{k,m} - x) \phi_n(t_{l,n} - y)$$

operatörünü göz önüne alalım (Bojanic, 1974; Shisha ve Bond, 1968).

$f \in C_{2\pi, 2\pi}$ olmak üzere süreklilik modülü,

$$\omega(f, \delta_1) = \sup \left\{ |f(u, v) - f(x, y)| : (u, v), (x, y) \in \mathbb{R}^2, \sqrt{(u-x)^2 + (v-y)^2} < \delta_1 \right\}, \delta_1 > 0$$

şeklinde tanımlıdır. $C_{2\pi, 2\pi}$ uzayı üzerinde tanımlı herhangi bir $\{S_{m,n}\}$ pozitif lineer

operatörü için $\alpha_{m,n}(x, y) = \sqrt{S_{m,n} \left(\sin^2 \frac{u-x}{2} + \sin^2 \frac{v-y}{2}; x, y \right)}$ olmak üzere

$$|S_{m,n}(f; x, y) - f(x, y)| \leq (S_{m,n}(1; x, y) + \pi^2) \omega(f; \alpha_{m,n}(x, y)) + |f(x, y)| |S_{m,n}(1; x, y) - 1|$$

olduğunu gösterebiliriz.

Derecesi d olan olan herhangi τ trigonometrik polinomu için eğer $d \leq n-1$ ise

$$\frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \tau \left(\frac{2k\pi}{n} \right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tau(t) dt$$

eşitliğinin olduğu biliniyor (DeVore, 1972). Şimdi, $K_{m,n}(1; x, y)$ ve $\alpha_{m,n}(x, y) =$

$$\sqrt{K_{m,n} \left(\sin^2 \frac{u-x}{2} + \sin^2 \frac{v-y}{2}; x, y \right)} \text{ ifadelerini hesaplamalıyız. } t_{s,p} = \frac{2s\pi}{N_p + 2},$$

$s = 1, 2, \dots, N_p + 2$ olmak üzere derecesi $\leq N_p + 1$ olan her τ trigonometrik polinomu

için $\frac{2}{N_p+2} \sum_{s=1}^{N_p+2} \tau(t_{s,p}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tau(t) dt$ dir. $\phi_m(u-x)$ ve $\phi_n(v-y)$ trigonometrik

fonksiyonlarının derecesi sırasıyla N_m , N_n ayrıca $\sin^2 \frac{u-x}{2} \phi_m(u-x)$ ve

$\sin^2 \frac{v-y}{2} \phi_n(v-y)$ trigonometrik fonksiyonlarının derecesi sırasıyla N_m+1 , N_n+1

olduğundan

$$\begin{aligned} K_{m,n}(1; x, y) &= \frac{4}{(N_m+2)(N_n+2)} \sum_{k=1}^{N_m+2} \sum_{l=1}^{N_n+2} \phi_m(t_{k,m}-x) \phi_n(t_{l,n}-y) \\ &= \left(\frac{2}{(N_m+2)} \sum_{k=1}^{N_m+2} \phi_m(t_{k,m}-x) \right) \left(\frac{2}{(N_n+2)} \sum_{l=1}^{N_n+2} \phi_n(t_{l,n}-y) \right) \\ &= \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \phi_m(u-x) du \right) \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \phi_n(v-y) dv \right) = 1 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} K_{m,n} \left(\sin^2 \frac{u-x}{2} + \sin^2 \frac{v-y}{2}; x, y \right) &= \frac{4}{(N_m+2)(N_n+2)} \sum_{k=1}^{N_m+2} \sum_{l=1}^{N_n+2} \sin^2 \frac{t_{k,m}-x}{2} \phi_m(t_{k,m}-x) \phi_n(t_{l,n}-y) \\ &\quad + \frac{4}{(N_m+2)(N_n+2)} \sum_{k=1}^{N_m+2} \sum_{l=1}^{N_n+2} \sin^2 \frac{t_{l,n}-y}{2} \phi_m(t_{k,m}-x) \phi_n(t_{l,n}-y) \\ &= \left(\frac{2}{(N_m+2)} \sum_{k=1}^{N_m+2} \sin^2 \frac{t_{k,m}-x}{2} \phi_m(t_{k,m}-x) \right) \left(\frac{2}{(N_n+2)} \sum_{l=1}^{N_n+2} \phi_n(t_{l,n}-y) \right) \\ &\quad + \left(\frac{2}{(N_m+2)} \sum_{k=1}^{N_m+2} \phi_m(t_{k,m}-x) \right) \left(\frac{2}{(N_n+2)} \sum_{l=1}^{N_n+2} \sin^2 \frac{t_{l,n}-y}{2} \phi_n(t_{l,n}-y) \right) \\ &= \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{u-x}{2} \phi_m(u-x) du \right) \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \phi_n(v-y) dv \right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \phi_m(u-x) du \right) \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{v-y}{2} \phi_n(v-y) dv \right) \\ &= \frac{1-\rho_{1,m}}{2} + \frac{1-\rho_{1,n}}{2} = 1 - \frac{\rho_{1,m} + \rho_{1,n}}{2} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$|K_{m,n}(f; x, y) - f(x, y)| \leq (1 + \pi^2) \omega \left(f; \left(1 - \frac{\rho_{1,m} + \rho_{1,n}}{2} \right)^{1/2} \right)$$

bulunur. Yani, herhangi bir $f \in C_{2\pi, 2\pi}$ fonksiyonu için

$$P - \lim \|K_{m,n}(f) - f\|_{B(\mathbb{R}^2)} = 0$$

elde edilir. $\sin x$, $\sin y$, $\cos x$ ve $\cos y$ fonksiyonları $C_{2\pi, 2\pi}$ uzayına ait olduğundan (dolayısıyla $B_{2\pi}$ uzayına ait olduğundan) 2.7.9. Teoreminin koşulları sağlanır. Böylece herhangi bir $f \in B_{2\pi}$ için

$$P - \lim \|K_{m,n}(F_{x,y}) - f\|_{B(\mathbb{R}^2)} = 0$$

bulunur. Şimdi, $A = C(1,1)$ matrisini ve genel terimi

$$x_{m,n} = \begin{cases} 1, & m \text{ ve } n \text{ tam kare ise,} \\ 0, & \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

olacak şekilde $x = \{x_{m,n}\}$ çift indisli dizisini alalım. Bu durumda $st_{(C(1,1))}^2 - \lim x = 0$ olur. Ayrıca x çift indisli dizisi P -yakınsak değildir. $F_{x,y}(u, v) = f(u, y) + f(x, v) - f(u, v)$ olmak üzere $f \in B_{2\pi}$ için

$$H_{m,n}(f; x, y) = \frac{4}{(N_m + 2)(N_n + 2)} \sum_{k=1}^{N_m+2} \sum_{l=1}^{N_n+2} F_{x,y}(t_{k,m}, t_{l,n}) \phi_m(t_{k,m} - x) \phi_n(t_{l,n} - y)$$

operatörünü göz önüne alalım. Şimdi $B_{2\pi}$ üzerinde

$$L_{m,n}(f; x, y) = (1 + x_{m,n}) H_{m,n}(f; x, y) \quad (4.2.8)$$

pozitif lineer operatörünü tanımlayalım Buradan

$$\begin{aligned} L_{m,n}(f_0; x, y) &= 1 + x_{m,n}, \\ L_{m,n}(f_1; x, y) &= (1 + x_{m,n}) K_{m,n}(f_1; x, y), \\ L_{m,n}(f_2; x, y) &= (1 + x_{m,n}) K_{m,n}(f_2; x, y), \\ L_{m,n}(f_3; x, y) &= (1 + x_{m,n}) K_{m,n}(f_3; x, y), \\ L_{m,n}(f_4; x, y) &= (1 + x_{m,n}) K_{m,n}(f_4; x, y), \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi de 4.2.1. Teoremin koşullarının sağlandığını gösterelim:

(i) $\delta_{(C(1,1))}^2 \{(m, n) : m, n \in \mathbb{N}, \text{ tam kare} \} = 0$ olduğundan

$K := \{(m, n) \in \mathbb{N}^2 : \text{tüm } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ için } L_{m,n}(f_0; x, y) = f_0(x, y)\}$ olmak üzere

$\delta_{(C(1,1))}^2 \{K\} = 1$ olur.

(ii) Herhangi $f \in B_{2\pi}$ için $M = \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} |K_{m,n}(f; x, y)|$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \|L_{m,n}(f_1) - f_1\|_{B(\mathbb{R}^2)} &= \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} |L_{m,n}(f_1; x, y) - f_1(x, y)| \\ &= \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} |(1 + x_{m,n}) K_{m,n}(f_1; x, y) - \sin x| \\ &\leq \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} |K_{m,n}(f_1; x, y) - \sin x| + Mx_{m,n} \\ \|L_{m,n}(f_2) - f_2\|_{B(\mathbb{R}^2)} &= \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} |L_{m,n}(f_2; x, y) - f_2(x, y)| \\ &= \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} |(1 + x_{m,n}) K_{m,n}(f_2; x, y) - \sin y| \\ &\leq \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} |K_{m,n}(f_2; x, y) - \sin y| + Mx_{m,n} \\ \|L_{m,n}(f_3) - f_3\|_{B(\mathbb{R}^2)} &= \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} |L_{m,n}(f_3; x, y) - f_3(x, y)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} \left| (1+x_{m,n}) K_{m,n}(f_3; x, y) - \cos x \right| \\
&\leq \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} \left| K_{m,n}(f_3; x, y) - \cos x \right| + Mx_{m,n} \\
\|L_{m,n}(f_4) - f_4\|_{B(\mathbb{R}^2)} &= \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} \left| L_{m,n}(f_4; x, y) - f_4(x, y) \right| \\
&= \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} \left| (1+x_{m,n}) K_{m,n}(f_4; x, y) - \cos y \right| \\
&\leq \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} \left| K_{m,n}(f_4; x, y) - \cos y \right| + Mx_{m,n}
\end{aligned}$$

olup $st_{(C(1,1))}^2 - \lim x_{m,n} = 0$ olduğundan $st_{(C(1,1))}^2 - \lim \|L_{m,n}(f_i) - f_i\|_{B(\mathbb{R}^2)} = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$ elde edilir. Yani (4.2.8) ile verilen pozitif lineer operatör dizisi 4.2.1. Teoremin koşullarını sağlar. Bu durumda herhangi bir $f \in B_{2\pi}$ fonksiyonu için

$$st_{(C(1,1))}^2 - \lim \|L_{m,n}(f) - f\|_{B(\mathbb{R}^2)} = 0$$

sağlanır. Fakat x dizisi P -yakınsak olmadığından (4.2.8) ile verilen pozitif lineer operatörlerin dizisi 2.7.9. Teoremin koşullarını sağlamaz. Yani (4.2.8) deki $L_{m,n}$ operatörleri 4.2.1. Teoremde çalışırken 2.7.9. deki Teoremde çalışmaz.

Şimdi 4.2.1. Teoremdeki A -istatistiksel yakınsaklığa karşılık gelen oranı, 4.1.5., 4.1.6., 4.1.7. ve 4.1.8. tanımlarını kullanarak dört farklı yolla hesaplayacağız. Bu ispatları yaparken 4.1.9. ve 4.1.10. Lemmalarını kullanacağız.

4.2.5. Teorem: $A := (a_{j,k,m,n})$ 4-boyutlu negatif olmayan RH-regüler matris ve $L_{m,n} : B_{2\pi} \rightarrow B(\mathbb{R}^2)$ pozitif lineer operatör olsun. $\{\alpha_{m,n}\}$ ve $\{\beta_{m,n}\}$ negatif olmayan, artmayan çift indisli diziler olsun. Aşağıdaki koşulların sağlandığını kabul edelim:

(i) $K := \{(m,n) \in \mathbb{N}^2 : \text{tüm } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ için } L_{m,n}(f_0; x, y) = f_0(x, y)\}$ olmak üzere

$$P - \lim_{j,k} \frac{1}{\alpha_{j,k}} \sum_{(m,n) \in K} a_{j,k,m,n} = 1$$

(ii) $\varphi(u, v) = \sin^2\left(\frac{u-x}{2}\right), \quad \psi(u, v) = \sin^2\left(\frac{v-y}{2}\right)$ fonksiyonları için

$\gamma_{m,n} := \sqrt{\|L_{m,n}(\varphi)\|_{B(\mathbb{R}^2)}}, \quad \delta_{m,n} := \sqrt{\|L_{m,n}(\psi)\|_{B(\mathbb{R}^2)}}$ olmak üzere

$$\omega_m(f; \gamma_{m,n}, \delta_{m,n}) = st_{(A)}^2 - o(\beta_{m,n}), \quad m, n \rightarrow \infty.$$

Bu durumda herhangi bir $f \in B_{2\pi}$ fonksiyonu için $c_{m,n} = \max\{\alpha_{m,n}, \beta_{m,n}\}$ olmak üzere

$$\|L_{m,n}(F_{x,y}) - f\|_{B(\mathbb{R}^2)} = st_{(A)}^2 - o(c_{m,n}), \quad m, n \rightarrow \infty,$$

olur. Benzer sonuçlar “o” ile “O” yer değiştirilerek de elde edilebilir.

İspat: $f \in B_{2\pi}$ ve $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sabit olsun.

$$K := \{(m, n) \in \mathbb{N}^2 : \text{tüm } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ için } L_{m,n}(f_0; x, y) = f_0(x, y)\}$$

olmak üzere (i) den

$$P\text{-}\lim_{j,k} \frac{1}{\alpha_{j,k}} \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2 \setminus K} a_{j,k,m,n} = 0 \quad (4.2.9)$$

elde edilir. Ayrıca her bir $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ için, $|u' - x| \leq \pi$ ve $|v' - y| \leq \pi$ olacak şekilde

$(u', v') = (u + 2l\pi, v + 2k\pi), l, k \in \mathbb{Z}$ seçelim. Buradan tümevarım yöntemiyle

$$\Delta_{x,y}[f(u, v)] = \Delta_{x,y}[f(u', v')]$$

elde edilir. Ayrıca

$$|u' - x| \leq \pi \left| \sin\left(\frac{u-x}{2}\right) \right|, \quad |v' - y| \leq \pi \left| \sin\left(\frac{v-y}{2}\right) \right|$$

olur. ω_m in özelliklerini kullanarak

$$\begin{aligned}
 \left| \Delta_{x,y} [f(u, v)] \right| &= \left| \Delta_{x,y} [f(u', v')] \right| \\
 &\leq \omega_m(f; |u' - x|, |v' - y|) \\
 &\leq \left(1 + \frac{\pi}{\delta_1} \left| \sin \left(\frac{u-x}{2} \right) \right| \right) \left(1 + \frac{\pi}{\delta_2} \left| \sin \left(\frac{v-y}{2} \right) \right| \right) \omega_m(f; \delta_1, \delta_2) \quad (4.2.10)
 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda tüm $(m, n) \in K$ için $L_{m,n}$ nin lineerliliği, monotonluğu ve (4.2.10) ifadesinden

$$\begin{aligned}
 \left| L_{m,n}(F_{x,y}; x, y) - f(x, y) \right| &= \left| -L_{m,n}(\Delta_{x,y}[f(u, v)]; x, y) \right| \\
 &\leq L_{m,n}(|\Delta_{x,y}[f(u, v)]|; x, y) \\
 &\leq L_{m,n} \left(\left(1 + \frac{\pi}{\delta_1} \left| \sin \left(\frac{u-x}{2} \right) \right| \right) \left(1 + \frac{\pi}{\delta_2} \left| \sin \left(\frac{v-y}{2} \right) \right| \right); x, y \right) \omega_m(f; \delta_1, \delta_2) \\
 &= \left\{ 1 + \frac{\pi}{\delta_1} L_{m,n} \left(\left| \sin \left(\frac{u-x}{2} \right) \right|; x, y \right) + \frac{\pi}{\delta_2} L_{m,n} \left(\left| \sin \left(\frac{v-y}{2} \right) \right|; x, y \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\pi^2}{\delta_1 \delta_2} L_{m,n} \left(\left| \sin \left(\frac{u-x}{2} \right) \right| \left| \sin \left(\frac{v-y}{2} \right) \right|; x, y \right) \right\} \omega_m(f; \delta_1, \delta_2) \quad (4.2.11)
 \end{aligned}$$

bulunur. (4.2.11) ifadesinde Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılırsa tüm $(m, n) \in K$ için

$$\varphi(u, v) = \sin^2 \left(\frac{u-x}{2} \right), \quad \psi(u, v) = \sin^2 \left(\frac{v-y}{2} \right) \text{ olmak üzere}$$

$$\begin{aligned}
 \left| L_{m,n}(F_{x,y}; x, y) - f(x, y) \right| &\leq \left\{ 1 + \frac{\pi}{\delta_1} \sqrt{L_{m,n}(\varphi; x, y)} + \frac{\pi}{\delta_2} \sqrt{L_{m,n}(\psi; x, y)} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\pi^2}{\delta_1 \delta_2} \sqrt{L_{m,n}(\varphi; x, y)} \sqrt{L_{m,n}(\psi; x, y)} \right\} \omega_m(f; \delta_1, \delta_2) \quad (4.2.12)
 \end{aligned}$$

elde edilir. (4.2.12) eşitsizliğinin her iki yanından $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ üzerinden supremum alınırsa tüm $(m, n) \in K$ için $\gamma_{m,n} := \sqrt{\|L_{m,n}(\varphi)\|_{B(\mathbb{R}^2)}}$, $\delta_{m,n} := \sqrt{\|L_{m,n}(\psi)\|_{B(\mathbb{R}^2)}}$ olmak üzere

$$\|L_{m,n}(F_{x,y}) - f\|_{B(\mathbb{R}^2)} \leq (1 + \pi)^2 \omega_m(f; \gamma_{m,n}, \delta_{m,n}) \quad (4.2.13)$$

bulunur. Şimdi verilen bir $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$U := \left\{ (m, n) \in \mathbb{N}^2 : \|L_{m,n}(F_{x,y}) - f\|_{B(\mathbb{R}^2)} \geq \varepsilon \right\},$$

$$U_1 := \left\{ (m, n) \in \mathbb{N}^2 : \omega_m(f; \gamma_{m,n}, \delta_{m,n}) \geq \frac{\varepsilon}{(1 + \pi)^2} \right\}.$$

kümelerini tanımlayalım. Böylece (4.2.13) eşitsizliğinden

$$U \cap K \subset U_1 \cap K$$

elde edilir. Bu ise tüm $(j, k) \in \mathbb{N}^2$ için, $c_{m,n} = \max\{\alpha_{m,n}, \beta_{m,n}\}$ olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_{j,k}} \sum_{(m,n) \in U \cap K} a_{j,k,m,n} &\leq \frac{1}{c_{j,k}} \sum_{(m,n) \in U_1 \cap K} a_{j,k,m,n} \\ &\leq \frac{1}{c_{j,k}} \sum_{(m,n) \in U_1} a_{j,k,m,n} \\ &\leq \frac{1}{\alpha_{j,k}} \sum_{(m,n) \in U_1} a_{j,k,m,n} \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

olduğunu gösterir. Şimdi (4.2.14) de $j, k \rightarrow \infty$ için limit alınırsa ve ayrıca (ii) den

$$P\text{-}\lim_{j,k} \frac{1}{c_{j,k}} \sum_{(m,n) \in U \cap K} a_{j,k,m,n} = 0 \quad (4.2.15)$$

olduğu kolayca elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \sum_{(m,n) \in U} a_{j,k,m,n} &= \sum_{(m,n) \in U \cap K} a_{j,k,m,n} + \sum_{(m,n) \in U \cap (\mathbb{N}^2 \setminus K)} a_{j,k,m,n} \\ &\leq \sum_{(m,n) \in U \cap K} a_{j,k,m,n} + \sum_{(m,n) \in (\mathbb{N}^2 \setminus K)} a_{j,k,m,n} \end{aligned}$$

olup buradan ise

$$\frac{1}{c_{j,k}} \sum_{(m,n) \in U} a_{j,k,m,n} \leq \frac{1}{c_{j,k}} \sum_{(m,n) \in U \cap K} a_{j,k,m,n} + \frac{1}{\alpha_{j,k}} \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2 \setminus K} a_{j,k,m,n} \quad (4.2.16)$$

bulunur. (4.2.16) da $j, k \rightarrow \infty$ için limit alınırsa (4.2.9) ve (4.2.15) den istenilen elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Aşağıdaki teorem benzer yolla ispatlanabilir.

4.2.6. Teorem: $A := (a_{j,k,m,n})$ 4-boyutlu negatif olmayan RH-regüler matris ve $L_{m,n} : B_{2\pi} \rightarrow B(\mathbb{R}^2)$ pozitif lineer operatör olsun. $\{\alpha_{m,n}\}$ ve $\{\beta_{m,n}\}$ negatif olmayan, artmayan çift indisli diziler olsun. Aşağıdaki koşulların sağlandığını kabul edelim:

(i) $K := \{(m,n) \in \mathbb{N}^2 : \text{tüm } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ için } L_{m,n}(f_0; x,y) = f_0(x,y)\}$ olmak üzere

$$P\text{-}\lim_{j,k} \sum_{(m,n) \in K} a_{j,k,m,n} = 1$$

$$(ii) \quad \varphi(u,v) = \sin^2\left(\frac{u-x}{2}\right), \quad \psi(u,v) = \sin^2\left(\frac{v-y}{2}\right) \quad \text{fonksiyonları} \quad \text{için}$$

$$\gamma_{m,n} := \sqrt{\|L_{m,n}(\varphi)\|_{B(\mathbb{R}^2)}}, \quad \delta_{m,n} := \sqrt{\|L_{m,n}(\psi)\|_{B(\mathbb{R}^2)}} \quad \text{olmak üzere}$$

$$\omega_{\text{mixed}}(f; \gamma_{m,n}, \delta_{m,n}) = st_{(A)}^2 - o_{m,n}(\beta_{m,n}), \quad m, n \rightarrow \infty.$$

Bu durumda herhangi bir $f \in B_{2\pi}$ fonksiyonu için

$$\|L_{m,n}(F_{x,y}) - f\|_{B(\mathbb{R}^2)} = st_{(A)}^2 - o_{m,n}(\beta_{m,n}), \quad m, n \rightarrow \infty,$$

olur. Benzer sonuçlar “ $o_{m,n}$ ” ile “ $O_{m,n}$ ” yer değiştirilerek de elde edilebilir.

4.3. Pozitif Lineer Operatörler Yardımıyla n -değişkenli B -süreklili Fonksiyonlar için İstatistiksel Anlamda Yaklaşım

Son olarak, istatistiksel yakınsaklık kavramı yardımıyla $\mathbb{R}^n$ uzayının kompakt bir alt kümesi üzerinde tanımlı n -değişkenli B -süreklili fonksiyonların uzayında D. Bărbosu tarafından verilen Korovkin tipi yaklaşım teoreminden daha kuvvetli sonuçlar elde edeceğiz. Ayrıca, yeni yaklaşım teoreminizde çalışan fakat D. Bărbosu tarafından verilen teoremden çalışmayan bir örnek vereceğiz.

İlk olarak kullanacağımız bazı tanım ve sembolleri hatırlatalım.

n pozitif bir tamsayı olmak üzere, negatif olmayan tamsayıların m_j koordinatları için $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ n -lilerinin kümesi $\mathbb{N}^n$ olmak üzere iki $\mathbf{m}$ ve $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ n -lilerinin farklı olması için gerekli ve yeterli koşul en az bir j için $m_j \neq k_j$ olmasıdır. Ayrıca $\mathbb{N}^n$, $\mathbf{m} \leq \mathbf{k}$ olması için gerekli ve yeterli koşul her bir j için $m_j \leq k_j$ olacak biçimdeki kısmi sıralı bir kümedir.

2003 yılında F. Móricz tarafından verilen, n -indisli diziler için istatistiksel yakınsaklık kavramını vermeden önce yoğunluk kavramını verelim.

E , $\mathbb{N}^n$ nin bir alt kümesi, $E_{\mathbf{k}} := \{\mathbf{m} \leq \mathbf{k} : \mathbf{m} \in E\}$ ve $|\mathbf{k}| = \prod_{j=1}^n k_j$ olsun.

4.3.1. Tanım: $\mathbb{N}^n$ nin bir E alt kümesi için

$$\lim_{\min k_j \rightarrow \infty} \frac{1}{|\mathbf{k}|} |E_{\mathbf{k}}|$$

limiti mevcut ise, bu limit değerine E kümesinin “yoğunluğu” denir ve $\delta\{E\}$ ile gösterilir (Móricz, 2003).

Örneğin; $\delta\{\mathbb{N}^n\}=1$, $\delta\{(m_1^2, m_2^2, \dots, m_n^2) : m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}\}=0$ olduğu kolaylıkla görülebilir. Ayrıca; $\delta\{E\}$ ve $\delta\{\mathbb{N}^n \setminus E\}$ yoğunluklarından biri mevcut ise, bu durumda $\delta\{\mathbb{N}^n \setminus E\}=1-\delta\{E\}$ olacaktır (Móricz, 2003).

4.3.2. Tanım: $x = \{x_m\}$ reel terimli bir n-indisli dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta\{m \in \mathbb{N}^n : |x_m - L| \geq \varepsilon\} = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa x dizisi L sayısına “istatistiksel yakınsaktır” denir ve $\text{st} - \lim x_m = L$ ile gösterilir (Móricz, 2003).

Şimdi elde ettiğimiz aşağıdaki teoremi verelim. $e_0(s_1, s_2, \dots, s_n) = 1$, $e_i(s_1, s_2, \dots, s_n) = s_i$, $i = 1, \dots, n$ olsun.

4.3.3. Teorem: $L_m : C_b(D) \rightarrow B(D)$ pozitif lineer operatör olsun. Aşağıdaki koşulların sağlandığını kabul edelim:

$$(i) \quad K := \{m \in \mathbb{N}^n : \text{tüm } (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \text{ için } L_m(e_0; x_1, x_2, \dots, x_n) = e_0(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$$

olmak üzere $\delta\{K\} = 1$,

$$(ii) \quad \text{st} - \lim \|L_m(e_i; x_1, x_2, \dots, x_n) - e_i(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_{B(D)} = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$(iii) \quad \text{st} - \lim \left\| L_m \left(\sum_{i=1}^n e_i^2; x_1, x_2, \dots, x_n \right) - \sum_{i=1}^n e_i^2(x_1, x_2, \dots, x_n) \right\|_{B(D)} = 0.$$

Bu durumda herhangi bir $f \in C_b(D)$ fonksiyonu için,

$$\text{st} - \lim \|L_m(f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \Delta_{\dots} [f; x_1, x_2, \dots, x_n]; x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_{B(D)} = 0$$

olur.

İspat: $f \in C_b(D)$ ve $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ sabit olsun.

$$K := \left\{ \mathbf{m} \in \mathbb{N}^n : \text{tüm } (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \text{ için } L_{\mathbf{m}}(e_0; x_1, x_2, \dots, x_n) = e_0(x_1, x_2, \dots, x_n) \right\}$$

olmak üzere (i) den

$$\delta\{\mathbb{N}^n \setminus K\} = 0 \quad (4.3.1)$$

elde edilir. 2.7.12. Lemmadan, f fonksiyonunun B -sürekliliğinden her $(s_1, \dots, s_n) \in D$ için

$$\left| \Delta_{s_1, s_2, \dots, s_n} [f; x_1, x_2, \dots, x_n] \right| \leq \frac{\varepsilon}{n+1} + \sum_{i=1}^n A_i(\varepsilon)(s_i - x_i)^2 \quad (4.3.2)$$

olacak şekilde $A_i(\varepsilon) > 0$, $i = 1, \dots, n$ sayıları vardır. Ayrıca tüm $\mathbf{m} \in K$ için

$$\begin{aligned} & f(x_1, x_2, \dots, x_n) - L_{\mathbf{m}}(f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \Delta_{\dots} [f; x_1, x_2, \dots, x_n]; x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= f(x_1, x_2, \dots, x_n) L_{\mathbf{m}}(e_0; x_1, x_2, \dots, x_n) - L_{\mathbf{m}}(f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \Delta_{\dots} [f; x_1, x_2, \dots, x_n]; x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= L_{\mathbf{m}}(f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \Delta_{\dots} [f; x_1, x_2, \dots, x_n]; x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= L_{\mathbf{m}}(\Delta_{\dots} [f; x_1, x_2, \dots, x_n]; x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

elde edilir. Bu durumda tüm $\mathbf{m} \in K$ için $L_{\mathbf{m}}$ nin lineerliliği ve monotonluğundan

$$\begin{aligned} & \left| f(x_1, x_2, \dots, x_n) - L_{\mathbf{m}}(f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \Delta_{\dots} [f; x_1, x_2, \dots, x_n]; x_1, x_2, \dots, x_n) \right| \\ &= \left| L_{\mathbf{m}}(\Delta_{\dots} [f; x_1, x_2, \dots, x_n]; x_1, x_2, \dots, x_n) \right| \\ &\leq L_{\mathbf{m}}(|\Delta_{\dots} [f; x_1, x_2, \dots, x_n]|; x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\leq L_{\mathbf{m}}\left(\frac{\varepsilon}{n+1} + \sum_{i=1}^n A_i(\varepsilon)(s_i - x_i)^2; x_1, x_2, \dots, x_n\right) \\ &= \frac{\varepsilon}{n+1} + \sum_{i=1}^n A_i(\varepsilon) L_{\mathbf{m}}(s_i^2 - 2s_i x_i + x_i^2; x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

elde edilir. $C(\varepsilon) = \max\{A_i(\varepsilon); i = 1, \dots, n\}$ olmak üzere tüm $\mathbf{m} \in K$ için

$$\begin{aligned} & \left| f(x_1, x_2, \dots, x_n) - L_{\mathbf{m}}(f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \Delta_{\dots} [f; x_1, x_2, \dots, x_n]; x_1, x_2, \dots, x_n) \right| \\ & \leq \frac{\varepsilon}{n+1} + C(\varepsilon) \sum_{i=1}^n L_{\mathbf{m}}(s_i^2 - 2s_i x_i + x_i^2; x_1, x_2, \dots, x_n) \\ & \leq \frac{\varepsilon}{n+1} + C(\varepsilon) \left\{ -2 \sum_{i=1}^n x_i (L_{\mathbf{m}}(e_i; x_1, \dots, x_n) - e_i(x_1, \dots, x_n)) + \sum_{i=1}^n (L_{\mathbf{m}}(e_i^2; x_1, \dots, x_n) - e_i^2(x_1, \dots, x_n)) \right\} \end{aligned}$$

bulunur. Son eşitsizlikten, $d = \max\{|x_i|; i = 1, \dots, n\}$ olmak üzere tüm $\mathbf{m} \in K$ için

$$\begin{aligned} & \left| f(x_1, x_2, \dots, x_n) - L_{\mathbf{m}}(f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \Delta_{\dots} [f; x_1, x_2, \dots, x_n]; x_1, x_2, \dots, x_n) \right| \\ & \leq \frac{\varepsilon}{n+1} + 2dC(\varepsilon) \sum_{i=1}^n |L_{\mathbf{m}}(e_i; x_1, \dots, x_n) - e_i(x_1, \dots, x_n)| \\ & + C(\varepsilon) \left| L_{\mathbf{m}}\left(\sum_{i=1}^n e_i^2; x_1, \dots, x_n\right) - \sum_{i=1}^n e_i^2(x_1, \dots, x_n) \right| \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

elde edilir. (4.3.4) eşitsizliğinin her iki yanından $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ üzerinden supremum alınırsa tüm $\mathbf{m} \in K$ için

$$\begin{aligned} & \left\| L_{\mathbf{m}}(f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \Delta_{\dots} [f; x_1, x_2, \dots, x_n]; x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n) \right\|_{B(D)} \\ & \leq \frac{\varepsilon}{n+1} + 2dC(\varepsilon) \sum_{i=1}^n \|L_{\mathbf{m}}(e_i; x_1, \dots, x_n) - e_i(x_1, \dots, x_n)\|_{B(D)} \\ & + C(\varepsilon) \left\| L_{\mathbf{m}}\left(\sum_{i=1}^n e_i^2; x_1, \dots, x_n\right) - \sum_{i=1}^n e_i^2(x_1, \dots, x_n) \right\|_{B(D)} \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

bulunur. Şimdi verilen bir $r > 0$ için $\varepsilon < (n+1)r$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ sayısı seçelim.

Buradan

$$\begin{aligned}
U &:= \left\{ \mathbf{m} \in \mathbb{N}^n : \left\| L_{\mathbf{m}} \left(f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \Delta_{\dots, \dots} [f; x_1, x_2, \dots, x_n]; x_1, x_2, \dots, x_n \right) - f(x_1, x_2, \dots, x_n) \right\|_{B(D)} \geq r \right\} \\
U_0 &:= \left\{ \mathbf{m} \in \mathbb{N}^n : \left\| L_{\mathbf{m}} \left(\sum_{i=1}^n e_i^2; x_1, \dots, x_n \right) - \sum_{i=1}^n e_i^2(x_1, \dots, x_n) \right\|_{B(D)} \geq \frac{(n+1)r - \varepsilon}{(n+1)^2 C(\varepsilon)} \right\} \\
U_i &:= \left\{ \mathbf{m} \in \mathbb{N}^n : \left\| L_{\mathbf{m}}(e_i; x_1, \dots, x_n) - e_i(x_1, \dots, x_n) \right\|_{B(D)} \geq \frac{(n+1)r - \varepsilon}{(n+1)^2 2dC(\varepsilon)} \right\}, \quad i = 1, \dots, n.
\end{aligned}$$

kümelerini tanımlayalım. Böylece (4.3.5) eşitsizliğinden

$$U \cap K \subset \bigcup_{i=0}^n (U_i \cap K)$$

elde edilir. Bu ise

$$\delta\{U \cap K\} \leq \sum_{i=0}^n \delta\{U_i \cap K\} \leq \sum_{i=0}^n \delta\{U_i\}$$

olduğunu gösterir. Şimdi son eşitsizlikte (ii) ve (iii) den

$$\delta\{U \cap K\} = 0 \tag{4.3.6}$$

olduğu kolayca elde eldir. Buradan

$$\begin{aligned}
\delta\{U\} &= \delta\{U \cap (K \cup (\mathbb{N}^n \setminus K))\} \\
&\leq \delta\{U \cap K\} + \delta\{U \cap (\mathbb{N}^n \setminus K)\} \\
&\leq \delta\{U \cap K\} + \delta\{\mathbb{N}^n \setminus K\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği ve (4.3.1) ve (4.3.6) ifadeleri kullanılırsa $\delta\{U\} = 0$ yani

$$\text{st-lim} \left\| L_{\mathbf{m}} \left(f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \Delta_{\dots, \dots} [f; x_1, x_2, \dots, x_n]; x_1, x_2, \dots, x_n \right) - f(x_1, x_2, \dots, x_n) \right\|_{B(D)} = 0$$

olduğu elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

4.3.4. Uyarı: Bazı $f \in C_b(D)$ fonksiyonlarının D kompakt kümesi üzerinde sınırlı olmayabileceği biliniyor. Ama 4.3.3. Teoremdeki

$$\left\| L_m \left(f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \Delta_{\dots} [f; x_1, x_2, \dots, x_n]; x_1, x_2, \dots, x_n \right) - f(x_1, x_2, \dots, x_n) \right\|_{B(D)}$$

ifadesi K , (i) de verilen küme olmak üzere (i), (4.3.2) ve (4.3.3) den her bir $\mathbf{m} \in K$ için sonludur.

Şimdi 4.3.3. Teoremden elde edilen istatistiksel sonucun, 2.7.13. Teoremdeki klasik sonuçtan daha kuvvetli olduğunu göstermek için bir örnek verelim.

4.3.5. Örnek: $D = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ olmak üzere $f \in C_b(D)$, $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{N}^3$ için

$$B_m(f; x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} \sum_{k=0}^{m_3} f\left(\frac{i}{m_1}, \frac{j}{m_2}, \frac{k}{m_3}\right) \binom{m_1}{i} \binom{m_2}{j} \binom{m_3}{k} x_1^i (1-x_1)^{m_1-i} x_2^j (1-x_2)^{m_2-j} x_3^k (1-x_3)^{m_3-k}$$

ile verilen 3-indisli Bernstein operatörünü göz önüne alalım. Ayrıca

$$\begin{aligned} B_m(e_0; x_1, x_2, x_3) &= \sum_{i=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} \sum_{k=0}^{m_3} \binom{m_1}{i} \binom{m_2}{j} \binom{m_3}{k} x_1^i (1-x_1)^{m_1-i} x_2^j (1-x_2)^{m_2-j} x_3^k (1-x_3)^{m_3-k} \\ &= \sum_{i=0}^{m_1} \binom{m_1}{i} x_1^i (1-x_1)^{m_1-i} \sum_{j=0}^{m_2} \binom{m_2}{j} x_2^j (1-x_2)^{m_2-j} \sum_{k=0}^{m_3} \binom{m_3}{k} x_3^k (1-x_3)^{m_3-k} \\ &= (x_1 + 1 - x_1)^{m_1} (x_2 + 1 - x_2)^{m_2} (x_3 + 1 - x_3)^{m_3} = e_0(x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_m(e_1; x_1, x_2, x_3) &= \sum_{i=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} \sum_{k=0}^{m_3} \frac{i}{m_1} \binom{m_1}{i} \binom{m_2}{j} \binom{m_3}{k} x_1^i (1-x_1)^{m_1-i} x_2^j (1-x_2)^{m_2-j} x_3^k (1-x_3)^{m_3-k} \\ &= \sum_{i=0}^{m_1} \frac{i}{m_1} \binom{m_1}{i} x_1^i (1-x_1)^{m_1-i} \sum_{j=0}^{m_2} \binom{m_2}{j} x_2^j (1-x_2)^{m_2-j} \sum_{k=0}^{m_3} \binom{m_3}{k} x_3^k (1-x_3)^{m_3-k} \\ &= x_1 \sum_{i=1}^{m_1} \frac{(m_1-1)!}{(m_1-i)!(i-1)!} x_1^{i-1} (1-x_1)^{m_1-i} (x_2 + 1 - x_2)^{m_2} (x_3 + 1 - x_3)^{m_3} \\ &= x_1 \sum_{i=0}^{m_1-1} \frac{(m_1-1)!}{(m_1-1-i)!i!} x_1^i (1-x_1)^{m_1-1-i} \end{aligned}$$

$$= x_1 (x_1 + 1 - x_1)^{m_1-1} = e_1 (x_1, x_2, x_3)$$

$$\begin{aligned} B_m(e_2; x_1, x_2, x_3) &= \sum_{i=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} \sum_{k=0}^{m_3} \frac{j}{m_2} \binom{m_1}{i} \binom{m_2}{j} \binom{m_3}{k} x_1^i (1-x_1)^{m_1-i} x_2^j (1-x_2)^{m_2-j} x_3^k (1-x_3)^{m_3-k} \\ &= \sum_{i=0}^{m_1} \binom{m_1}{i} x_1^i (1-x_1)^{m_1-i} \sum_{j=0}^{m_2} \frac{j}{m_2} \binom{m_2}{j} x_2^j (1-x_2)^{m_2-j} \sum_{k=0}^{m_3} \binom{m_3}{k} x_3^k (1-x_3)^{m_3-k} \\ &= (x_1 + 1 - x_1)^{m_1} x_2 \sum_{j=1}^{m_2} \frac{(m_2-1)!}{(m_2-j)!(j-1)!} x_2^{j-1} (1-x_2)^{m_2-j} (x_3 + 1 - x_3)^{m_3} \\ &= x_2 \sum_{j=0}^{m_2-1} \frac{(m_2-1)!}{(m_2-1-j)!j!} x_2^j (1-x_2)^{m_2-1-j} \\ &= x_2 (x_2 + 1 - x_2)^{m_2-1} = e_2 (x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_m(e_3; x_1, x_2, x_3) &= \sum_{i=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} \sum_{k=0}^{m_3} \frac{k}{m_3} \binom{m_1}{i} \binom{m_2}{j} \binom{m_3}{k} x_1^i (1-x_1)^{m_1-i} x_2^j (1-x_2)^{m_2-j} x_3^k (1-x_3)^{m_3-k} \\ &= \sum_{i=0}^{m_1} \binom{m_1}{i} x_1^i (1-x_1)^{m_1-i} \sum_{j=0}^{m_2} \binom{m_2}{j} x_2^j (1-x_2)^{m_2-j} \sum_{k=0}^{m_3} \frac{k}{m_3} \binom{m_3}{k} x_3^k (1-x_3)^{m_3-k} \\ &= (x_1 + 1 - x_1)^{m_1} (x_2 + 1 - x_2)^{m_2} x_3 \sum_{k=1}^{m_3} \frac{(m_3-1)!}{(m_3-k)!(k-1)!} x_3^{k-1} (1-x_3)^{m_3-k} \\ &= x_3 \sum_{k=0}^{m_3-1} \frac{(m_3-1)!}{(m_3-1-k)!k!} x_3^k (1-x_3)^{m_3-1-k} \\ &= x_3 (x_3 + 1 - x_3)^{m_3-1} = e_3 (x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_m(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2; x_1, x_2, x_3) &= \sum_{i=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} \sum_{k=0}^{m_3} \left\{ \left(\frac{i}{m_1} \right)^2 + \left(\frac{j}{m_2} \right) + \left(\frac{k}{m_3} \right)^2 \right\} \binom{m_1}{i} \binom{m_2}{j} \binom{m_3}{k} x_1^i (1-x_1)^{m_1-i} x_2^j (1-x_2)^{m_2-j} x_3^k (1-x_3)^{m_3-k} \\ &= \sum_{i=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} \sum_{k=0}^{m_3} \left(\frac{i}{m_1} \right)^2 \binom{m_1}{i} \binom{m_2}{j} \binom{m_3}{k} x_1^i (1-x_1)^{m_1-i} x_2^j (1-x_2)^{m_2-j} x_3^k (1-x_3)^{m_3-k} \\ &\quad + \sum_{i=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} \sum_{k=0}^{m_3} \left(\frac{j}{m_2} \right) \binom{m_1}{i} \binom{m_2}{j} \binom{m_3}{k} x_1^i (1-x_1)^{m_1-i} x_2^j (1-x_2)^{m_2-j} x_3^k (1-x_3)^{m_3-k} \\ &\quad + \sum_{i=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} \sum_{k=0}^{m_3} \left(\frac{k}{m_3} \right)^2 \binom{m_1}{i} \binom{m_2}{j} \binom{m_3}{k} x_1^i (1-x_1)^{m_1-i} x_2^j (1-x_2)^{m_2-j} x_3^k (1-x_3)^{m_3-k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{m_1} \left(\frac{i}{m_1} \right)^2 \binom{m_1}{i} x_1^i (1-x_1)^{m_1-i} \sum_{j=0}^{m_2} \binom{m_2}{j} x_2^j (1-x_2)^{m_2-j} \sum_{k=0}^{m_3} \binom{m_3}{k} x_3^k (1-x_3)^{m_3-k} \\
&+ \sum_{i=0}^{m_1} \binom{m_1}{i} x_1^i (1-x_1)^{m_1-i} \sum_{j=0}^{m_2} \left(\frac{j}{m_2} \right)^2 \binom{m_2}{j} x_2^j (1-x_2)^{m_2-j} \sum_{k=0}^{m_3} \binom{m_3}{k} x_3^k (1-x_3)^{m_3-k} \\
&+ \sum_{i=0}^{m_1} \binom{m_1}{i} x_1^i (1-x_1)^{m_1-i} \sum_{j=0}^{m_2} \binom{m_2}{j} x_2^j (1-x_2)^{m_2-j} \sum_{k=0}^{m_3} \left(\frac{k}{m_3} \right)^2 \binom{m_3}{k} x_3^k (1-x_3)^{m_3-k} \\
&= x_1 \sum_{i=0}^{m_1-1} \frac{i+1}{m_1} \frac{(m_1-1)!}{(m_1-1-i)!i!} x_1^i (1-x_1)^{m_1-1-i} (x_2+1-x_2)^{m_2} (x_3+1-x_3)^{m_3} \\
&+ (x_1+1-x_1)^{m_1} x_2 \sum_{j=0}^{m_2-1} \frac{j+1}{m_2} \frac{(m_2-1)!}{(m_2-1-j)!j!} x_2^j (1-x_2)^{m_2-1-j} (x_3+1-x_3)^{m_3} \\
&+ (x_1+1-x_1)^{m_1} (x_2+1-x_2)^{m_2} x_3 \sum_{k=0}^{m_3-1} \frac{k+1}{m_3} \frac{(m_3-1)!}{(m_3-1-k)!k!} x_3^k (1-x_3)^{m_3-1-k} \\
&= x_1 \sum_{i=0}^{m_1-1} \frac{i}{m_1} \frac{(m_1-1)!}{(m_1-1-i)!i!} x_1^i (1-x_1)^{m_1-1-i} + x_1 \sum_{i=0}^{m_1-1} \frac{1}{m_1} \frac{(m_1-1)!}{(m_1-1-i)!i!} x_1^i (1-x_1)^{m_1-1-i} \\
&+ x_2 \sum_{j=0}^{m_2-1} \frac{j}{m_2} \frac{(m_2-1)!}{(m_2-1-j)!j!} x_2^j (1-x_2)^{m_2-1-j} + x_2 \sum_{j=0}^{m_2-1} \frac{1}{m_2} \frac{(m_2-1)!}{(m_2-1-j)!j!} x_2^j (1-x_2)^{m_2-1-j} \\
&+ x_3 \sum_{k=0}^{m_3-1} \frac{k}{m_3} \frac{(m_3-1)!}{(m_3-1-k)!k!} x_3^k (1-x_3)^{m_3-1-k} + x_3 \sum_{k=0}^{m_3-1} \frac{1}{m_3} \frac{(m_3-1)!}{(m_3-1-k)!k!} x_3^k (1-x_3)^{m_3-1-k} \\
&= x_1^2 \frac{m_1-1}{m_1} \sum_{i=0}^{m_1-2} \frac{(m_1-2)!}{(m_1-1-i)!(i-1)!} x_1^{i-1} (1-x_1)^{m_1-1-i} + \frac{x_1}{m_1} (x_1+1-x_1)^{m_1-1} \\
&+ x_2^2 \frac{m_2-1}{m_2} \sum_{j=0}^{m_2-1} \frac{(m_2-2)!}{(m_2-1-j)!(j-1)!} x_2^{j-1} (1-x_2)^{m_2-1-j} + \frac{x_2}{m_2} (x_2+1-x_2)^{m_2-1} \\
&+ x_3^2 \frac{m_3-1}{m_3} \sum_{k=0}^{m_3-1} \frac{(m_3-2)!}{(m_3-1-k)!(k-1)!} x_3^{k-1} (1-x_3)^{m_3-1-k} + \frac{x_3}{m_3} (x_3+1-x_3)^{m_3-1} \\
&= x_1^2 \frac{m_1-1}{m_1} (x_1+1-x_1)^{m_1-2} + \frac{x_1}{m_1} + x_2^2 \frac{m_2-1}{m_2} (x_2+1-x_2)^{m_2-2} + \frac{x_2}{m_2} \\
&+ x_3^2 \frac{m_3-1}{m_3} (x_3+1-x_3)^{m_3-2} + \frac{x_3}{m_3} \\
&= x_1^2 \frac{m_1-1}{m_1} + \frac{x_1}{m_1} + x_2^2 \frac{m_2-1}{m_2} + \frac{x_2}{m_2} + x_3^2 \frac{m_3-1}{m_3} + \frac{x_3}{m_3} \\
&= e_1^2(x_1, x_2, x_3) + e_2^2(x_1, x_2, x_3) + e_3^2(x_1, x_2, x_3) + \frac{x_1 - x_1^2}{m_1} + \frac{x_2 - x_2^2}{m_2} + \frac{x_3 - x_3^2}{m_3}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\{B_m\}$ operatörler dizisi 2.7.13. Teoremin koşullarını sağlar.

Buradan herhangi bir $f \in C_b(D)$ için

$$\lim \left\| B_m \left(f(x_1, x_2, x_3) - \Delta_{\dots} [f; x_1, x_2, x_3]; x_1, x_2, x_3 \right) - f(x_1, x_2, x_3) \right\|_{B(D)} = 0$$

gerçeklenir. Şimdi, $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{N}^3$ olmak üzere, genel terimi

$$u_m = \begin{cases} 1, & m_1, m_2 \text{ ve } m_3 \text{ tam kare ise,} \\ 0, & \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

olacak şekilde $u = \{u_m\}$ 3-indisli dizisini alalım. Bu durumda $\text{st-lim } u_m = 0$ olur.

Ayrıca u , 3-indisli dizisi yakınsak değildir. Şimdi $C_b(D)$ üzerinde aşağıdaki pozitif lineer operatörü tanımlayalım:

$$L_m(f(x_1, x_2, x_3) - \Delta_{\dots} [f; x_1, x_2, x_3]; x_1, x_2, x_3) = (1 + u_m) B_m(f(x_1, x_2, x_3) - \Delta_{\dots} [f; x_1, x_2, x_3]; x_1, x_2, x_3). \quad (4.3.7)$$

Basit hesaplamalar ile

$$\begin{aligned} L_m(e_0; x_1, x_2, x_3) &= 1 + u_m, \\ L_m(e_1; x_1, x_2, x_3) &= (1 + u_m) e_1(x_1, x_2, x_3), \\ L_m(e_2; x_1, x_2, x_3) &= (1 + u_m) e_2(x_1, x_2, x_3), \\ L_m(e_3; x_1, x_2, x_3) &= (1 + u_m) e_3(x_1, x_2, x_3), \\ L_m(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2; x_1, x_2, x_3) &= (1 + u_m) \left(e_1^2(x_1, x_2, x_3) + e_2^2(x_1, x_2, x_3) + e_3^2(x_1, x_2, x_3) + \frac{x_1 - x_1^2}{m_1} + \frac{x_2 - x_2^2}{m_2} + \frac{x_3 - x_3^2}{m_3} \right), \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi de 4.3.3. Teoremin koşullarının sağlandığını gösterelim:

(i) $\delta\{\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{N}^3 : m_1, m_2, m_3 \text{ tam kare}\} = 0$ olduğundan

$K := \{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^3 : \text{tüm } (x_1, x_2, x_3) \in D \text{ için } L_{\mathbf{m}}(e_0; x_1, x_2, x_3) = e_0(x_1, x_2, x_3)\}$ olmak üzere

$\delta\{K\} = 1$ olur.

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad \|L_{\mathbf{m}}(e_1; x_1, x_2, x_3) - e_1(x_1, x_2, x_3)\|_{B(D)} &= \sup_{x \in D} |L_{\mathbf{m}}(e_1; x_1, x_2, x_3) - e_1(x_1, x_2, x_3)| \\ &= \sup_{x \in D} |u_{\mathbf{m}} e_1(x_1, x_2, x_3)| = u_{\mathbf{m}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|L_{\mathbf{m}}(e_2; x_1, x_2, x_3) - e_2(x_1, x_2, x_3)\|_{B(D)} &= \sup_{x \in D} |L_{\mathbf{m}}(e_2; x_1, x_2, x_3) - e_2(x_1, x_2, x_3)| \\ &= \sup_{x \in D} |u_{\mathbf{m}} e_2(x_1, x_2, x_3)| = u_{\mathbf{m}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|L_{\mathbf{m}}(e_3; x_1, x_2, x_3) - e_3(x_1, x_2, x_3)\|_{B(D)} &= \sup_{x \in D} |L_{\mathbf{m}}(e_3; x_1, x_2, x_3) - e_3(x_1, x_2, x_3)| \\ &= \sup_{x \in D} |u_{\mathbf{m}} e_3(x_1, x_2, x_3)| = u_{\mathbf{m}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\|L_{\mathbf{m}}(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2; x_1, x_2, x_3) - (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2)(x_1, x_2, x_3)\|_{B(D)} \\ &= \sup_{x \in D} |L_{\mathbf{m}}(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2; x_1, x_2, x_3) - (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2)(x_1, x_2, x_3)| \\ &= \sup_{x \in D} \left| (1 + u_{\mathbf{m}}) \left((e_1^2 + e_2^2 + e_3^2)(x_1, x_2, x_3) + \frac{x_1 - x_1^2}{m_1} + \frac{x_2 - x_2^2}{m_2} + \frac{x_3 - x_3^2}{m_3} \right) - (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2)(x_1, x_2, x_3) \right| \\ &= \sup_{x \in D} \left| \frac{x_1 - x_1^2}{m_1} + \frac{x_2 - x_2^2}{m_2} + \frac{x_3 - x_3^2}{m_3} + u_{\mathbf{m}} \left((e_1^2 + e_2^2 + e_3^2)(x_1, x_2, x_3) + \frac{x_1 - x_1^2}{m_1} + \frac{x_2 - x_2^2}{m_2} + \frac{x_3 - x_3^2}{m_3} \right) \right| \\ &\leq \frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2} + \frac{1}{2m_3} + 3u_{\mathbf{m}} + \frac{1}{2m_1} u_{\mathbf{m}} + \frac{1}{2m_2} u_{\mathbf{m}} + \frac{1}{2m_3} u_{\mathbf{m}} \end{aligned}$$

olup $\text{st} - \lim u_{\mathbf{m}} = 0$ olduğundan $\text{st} - \lim \|L_{\mathbf{m}}(e_i; x_1, x_2, x_3) - e_i(x_1, x_2, x_3)\|_{B(D)} = 0$,

$i = 1, 2, 3$ ve $\text{st} - \lim \|L_{\mathbf{m}}(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2; x_1, x_2, x_3) - (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2)(x_1, x_2, x_3)\|_{B(D)} = 0$ elde

edilir. Yani (4.3.7) ile verilen pozitif lineer operatör dizisi 4.3.3. Teoremin koşullarını sağlar. Bu durumda herhangi bir $f \in C_b(D)$ fonksiyonu için

$$\text{st} - \lim \|L_{\mathbf{m}}(f(x_1, x_2, x_3) - \Delta_{\dots} [f; x_1, x_2, x_3]; x_1, x_2, x_3) - f(x_1, x_2, x_3)\|_{B(D)} = 0$$

sağlanır. Fakat x dizisi yakınsak olmadığından (4.3.7) ile verilen pozitif lineer operatörlerin dizisi 2.7.13. Teoremin koşullarını sağlamaz. Yani (4.3.7) deki L_m operatörleri 4.3.3. Teoremde çalışırken 2.7.13. deki Teoremde çalışmaz.

5. TARTIŞMA

Bu çalışmada çift indisli fonksiyon dizileri için alışılmış düzgün yakınsaklıktan daha kuvvetli olan A-istatistiksel düzgün yakınsaklık kavramı kullanılarak, bulgular kısmının birinci bölümünde sürekli fonksiyonların uzayından daha geniş olan Bögel-sürekli fonksiyonların uzayında tanımlı pozitif lineer operatörler için Korovkin tipi yaklaşım teoremi elde edilmiştir. Ayrıca, C. Badea, I. Badea ve H.H. Gonksa (1986) tarafından verilen teoremden daha kuvvetli olduğuna dair bir örnek verip, elde ettiğimiz teorem için A-istatistiksel yakınsaklık oranını hesaplanmıştır.

İkinci bölümde, A-istatistiksel yakınsaklık yardımı ile $B_{2\pi}$ uzayı üzerinde tanımlı pozitif lineer operatörler için Korovkin tipi yaklaşım teoremi elde edilmiştir. Ayrıca, verdiğimiz teoremin Badea, Badea, ve Cottin (1988) tarafından verilen sonuçlardan daha kuvvetli olduğuna dair bir örnek verip, verdiğimiz teorem için A-istatistiksel yakınsaklık oranını hesaplanmıştır.

Son olarak, n-indisli diziler için istatistiksel yakınsaklık kavramı yardımıyla $\mathbb{R}^n$ uzayının kompakt bir alt kümesi üzerinde tanımlı n-değişkenli B-sürekli fonksiyonların uzayında D. Bărbosu (2001) tarafından verilen Korovkin tipi yaklaşım teoreminden daha kuvvetli sonuçlar elde edilmiştir. Burada verilen örnekten de görüleceği gibi elde ettiğimiz sonuç alışılmış düzgün yakınsaklık kavramı kullanılarak elde edilen sonuçtan daha kuvvetlidir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada çift indisli fonksiyon dizileri için alışılmış düzgün yakınsaklıktan daha kuvvetli olan A-istatistiksel düzgün yakınsaklık kavramı kullanılmıştır.

Bu çalışmada bulunan sonuçlar, n -indisli diziler için istatistiksel yakınsaklık kavramı kullanılarak n -boyutlu reel sayılar kümesi üzerinde tanımlı Bögel-sürekli ve $B-2\pi$ -periyodik fonksiyonların uzayında incelenebilir. Ayrıca, Bögel-sürekli fonksiyonlar için A-istatistiksel yakınsaklık yardımıyla Modüler uzayda Korovkin tipi teorem incelenebilir.

7. KAYNAKLAR

- Badea, C., Badea, I. and Cottin, C., 1988.** A Korovkin-type theorems for generalizations of Boolean sum operators and approximation by trigonometric pseudopolynomials. *Anal. Numér. Théor. Approx.* 17(1), 7–17.
- Badea, C., Badea, I., Cottin, C., Gonska, H.H., 1988.** Notes on the degree of approximation of B-continuous and B-differentiable functions, *J. Approx. Theory Appl.*, 4, 95-108.
- Badea, C., Badea, I. and Gonksa H.H., 1986.** A test function and approximation by pseudopolynomials. *Bull. Austral. Math. Soc.* 34, 53-64.
- Bárbosu, D., 2001.** A Korovkin-type theorem for the approximation of n-variate B-continuous functions. *Studia Univ. "Babeş-Bolyai", Math.* 16, 15–24.
- Bernstein, S., 1912.** Démonstration du Théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités, *Comm. Soc. Math. Kharkov*, 13, 1-2.
- Bohman, H., 1951.** On a approximation of continuous and analytic functions, *Arkif für Math.*, 2(3), 43-56.
- Bojanic, R. and Shisha, O., 1974.** Approximation of continuous, periodic functions by discrete positive linear operators, *J. Approx. Theory*, 11, 231–235.
- Bögel, K., 1934.** Mehrdimensionale differentiation von funktionen mehrerer veränderlicher. *J. Reine Angew. Math.* 170, 197-217.
- Bögel, K., 1935.** Über mehrdimensionale differentiation, integration und beschränkte variation. *J. Reine Angew. Math.* 173, 5-29.
- Bögel, K., 1962.** Über die mehrdimensionale differentiation, *Jahresber. Deutsch. Mat.-Verein.* 65, 45-71.
- Connor, J.S., 1988.** The statistical and strong p-Cesáro convergence of sequences, *Analysis*, 8, 47-63.
- Connor, J.S., 1989.** On strong matrix summability with respect to a modulus and statistical convergence. *Canad. Math. Bull.*, 32, 194-198.
- Connor, J.S., Ganichev, M., Kadets, V., 2000.** A characterization of Banach spaces with separable duals via weak statistical convergence. *J. Math. Anal. Appl.*, 244, 251-261.

- Cottin, C., 1992.** On the degree of approximation by periodic approximants of Boolean sum type. In *Approximation Theory* (Lecture Notes in Pure & Applied Mathematics Series / 138), s: 263–274, New York.
- Demirci, K., Orhan, C., 1999.** Bounded multipliers of bounded A-statistically convergent sequences. *J. Math. Anal. Appl.*, 235, 122-129.
- DeVore, R.A., 1972.** *The approximation of continuous functions by positive linear operators*. Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 293, Berlin.
- Duman, O., 2003.** Statistical approximation for periodic functions. *Demonstratio Math.* 36, 873-878.
- Duman, O., Orhan, C., 2004.** μ -Statistically convergent function sequences. *Czech. Math. J.*, 54, 413-422.
- Erdős, P., Tenenbaum, G., 1989.** Sur les densités de certaines suites d'entiers. *Proc. London Math. Soc.*, 59, 417-438.
- Fast, H., 1951.** Sur la Convergence Statistique. *Colloq. Math.*, 2, 241-244.
- Freedman, A.R. And Sember, J.J., 1981.** Densities and Summability. *Pacific J. Math.*, 95, 293-305.
- Fridy, J.A., 1985.** On statistical convergence. *Analysis*, 5, 301-313.
- Fridy, J.A., Khan, M.K., 1998.** Tauberian theorems via statistical convergence. *J. Math. Anal. Appl.*, 228, 73-95.
- Gadjiev, A. D. and Orhan, C., 2002.** Some approximation theorems via statistical convergence. *Rocky Mountain J. Math.* 32, 129-138.
- Hardy, G.H., 1949.** *Divergent series*. Oxford Univ. Press, London.
- Kline, J., 1995.** The T-statistically convergent sequences are not an FK-space. *Internat. J. Math. Math. Sci.*, 18(4), 825-827.
- Kolk, E., 1993.** Matrix Summability of Statistically Convergent Sequences. *Analysis*. 13, 77-83.
- Korovkin, P. P., 1960.** *Linear Operators and Approximation Theory*. Hindustan Publ. Co., Delhi.
- Miller, H.I., 1995.** A measure theoretical subsequence characterization of statistical convergence. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 347, 1811-1819.
- Miller, H.I., Orhan, C., 2001.** On almost convergent and statistically convergent subsequences. *Acta Math. Hungar.*, 93, 135-151.
- Moddoh, I. J., 1970.** *Elements of Functional Analysis*. Cambridge University Press.

- Moricz, F., 2003.** Statistical convergence of multiple sequences. Arch. Math. (Basel) 81, 82-89.
- Mursaleen and Edely, O. H.H., 2003.** Statistical convergence of double sequences. J. Math. Anal. Appl. 288, 223-231.
- Niven, I. and Zuckerman, H. S., 1980.** *An Introduction to the Theory of Numbers*. John Wiley & Sons, Fourt Ed., New York.
- Pehlivan, S., Mamedov, M.A., 2000.** Statistical cluster points and turnpike. Optimization, 48, 93-106.
- Pringsheim, A., 1900.** Zur theorie der zweifach unendlichen zahlenfolgen. Math. Ann. 53, 289-321.
- Robison, G. M., 1926.** Divergent double sequences and series. Trans. Amer. Math. Soc. 28, 50-73.
- Šalát, T., 1980.** On Statistically Convergent Sequences of Real numbers. Math. Slovaca, 30, 139-150.
- Schoenberg, I.J., 1959.** The integrability of certain functions and related summability methods. Amer. Math. Monthly, 66, 361-375.
- Shisha, O. and Bond, B., 1968.** The degree of approximation to periodic functions by linear positive operators. J. Approx. Theory, 1, 335–339.
- Steinhaus, H., 1951.** Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique. Colloq. Math., 2, 73-74.
- Zygmund, A., 1979.** *Trigonometric series*. Cambridge University Press.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Fadime DİRİK

Doğum Yeri : Söke/AYDIN

Doğum Tarihi : 03.06.1980

Medeni Hali : Evli

Bildiği Yabancı Diller: İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Söke Lisesi (1994-1998)

Lisans : Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, (1998-2002)

Yüksek Lisans : Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı (2002-2005)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl : Ondokuz Mayıs Üniversitesi Sinop Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü (2002-2007)

Sinop Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü (2007-...)

İletişim Bilgileri : Sinop Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi

Matematik Bölümü, 57000 Sinop, Türkiye

E-mail: fdirik@sinop.edu.tr

Bu Tezden Elde Edilen Yayınlar:

1. Approximation in Statistical Sense to B-Continuous Functions by Positive Linear Operators, Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica, (Yayına kabul edildi).

(SCI-Expanded)

2. Statistical Approximation to Bögel-type Continuous and Periodic Functions, Central European Journal of Mathematics, 7(3) (2009), 539-549. (SCI-Expanded)

3. Approximation in Statistical Sense to n-Variate B-Continuous Functions by Positive Linear Operators, Mathematica Slovaca, (Yayına kabul edildi). (SCI-Expanded)