

T.C.  
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**FİZİK UYGULAMALARINDA KARŞILAŞILAN BAZI KISMİ DİFERANSİYEL  
DENKLEMLER İÇİN ÇÖZÜM TEKNİKLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Yılmaz UCE  
DANIŞMAN: Doç.Dr. Esin İnan ÇINAR

VAN - 2010

## KABUL ve ONAY SAYFASI

Matematik Anabilim Dalı'nda, Doç. Dr. Esin İnan ÇINAR danışmanlığında, Yılmaz UCE tarafından sunulan “Fizik Uygulamalarında Karşılaşılan Bazı Kısmi Diferansiyel Denklemler İçin Çözüm Teknikleri” isimli bu çalışma “Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği” ve “Fen Bilimleri Enstitüsü Yönergesi”nin ilgili hükümleri gereğince .../.../2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile başarılı bulunmuş ve Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Yard. Doç. Dr. Hayati ÇAVUŞ

İmza:

Üye : Doç. Dr. Esin İnan ÇINAR

İmza:

Üye : Yard. Doç. Dr. Kamil AKBAYIR

İmza:

Üye : .....İmza:

Üye : .....İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ...../...../..... gün ve .....  
.....sayılı kararı ile onaylanmıştır.

**Enstitü Müdürü**

## **ÖZ GEÇMİŞ**

1984 yılında Hakkari Yüksekova’da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Van’da tamamladı. 2001 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümünü kazandı ve 2006 yılında bitirdi. Aynı yıl Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı’nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı.

## ÖZET

### FİZİK UYGULAMALARINDA KARŞILAŞILAN BAZI KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN ÇÖZÜM TEKNİKLERİ

UCE, Yılmaz

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Esin İnan ÇINAR

Mayıs 2010, 167 Sayfa

Bu çalışmanın ilk bölümlerinde öncelikle kısmi diferansiyel denklemlerin alt yapısını oluşturan temel denklemlerin bazı özellikleri, Sturm-Liouville problemi ve Green fonksiyonları verilecektir. Sonraki bölümlerde ise ayrı ayrı Laplace, Isı ve Dalga denklemlerinin çözümleriyle beraber fiziksel ve matematiksel özellikleri verilecektir. Bu denklemler eliptik, parabolik ve hiperbolik tipteki denklemlerin temsilcileri olup özellikle Laplace denklemi, sınır değer problemlerinde oldukça önemli bir yer tutar. Aynı şekilde Dalga ve Isı denklemleri başlangıç değer ve başlangıç sınır değer problemi olarak karşımıza çıkmaktadır. İşte bu çalışmada amacımız bu tip problemleri çözmek için temel metotları vermek ve örneklerle zenginleştirmektir.

**Anahtar kelimeler:** Green fonksiyonu, Dalga denklemleri, Isı denklemleri ve Laplace denklemleri, Özdeğer ve Özfonksiyonlar

## **ABSTRACT**

### **SOLUTION METHODS FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS RAISED AT SOME PHYSIC APPLICATIONS**

UCE,Yılmaz

Msc,Mathematics Science

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Esin İnancın ÇINAR

May 2010, 167 pages

In first chapters of this study, some specialities of elementary differential equations that form background of partial differential equations, Sturm-Liouville problems and Green functions are given. Then physical and mathematical specialities of Laplace, heat and wave equations with together solutions of them are given. This type equations are representations of elliptic, parabolic and hyperbolic equations and in particular, Laplace equation takes up important space in boundary value problems. We also confront with initial value and initial boundary value problems for heat and wave equations. Our purpose in this study is to give basic methods for solving these problems and to support by examples.

**Key words:** Green function, Wave equations, Heat equations, Laplace equations, Eigenvalue, Eigenfunctions

## ÖN SÖZ

Yüksek lisans eğitimim boyunca yardımını ve desteğini her zaman yanımda hissettiğim, mesleki açıdan benim için bir ufuk çizgisi olan ve özellikle bu tez hazırlama sürecinde büyük sabır gösteren çok değerli hocam Doç. Dr. Esin İnan ÇINAR'a sonsuz saygı ve şükranlarımı sunarım. Ayrıca desteğini hiç eksiltmeyen eşime de teşekkür ediyorum.

Yılmaz UCE

## İÇİNDEKİLER

|                                        | sayfa |
|----------------------------------------|-------|
| ÖZET                                   | i     |
| ABSTRACT                               | iii   |
| ÖN SÖZ                                 | v     |
| İÇİNDEKİLER                            | vii   |
| ŞEKİLLER DİZİNİ                        | ix    |
| SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ         | xi    |
| 1.GİRİŞ VE KAYNAK BİLDİRİŞLERİ         | 1     |
| 2.ÖN BİLGİLER                          | 2     |
| 3.FOURİER SERİLERİ                     | 3     |
| 3.1.Fourier Serisi                     | 3     |
| 3.2.Fourier Sinüs Serileri             | 10    |
| 3.3. Fourier Cosinüs Serileri          | 15    |
| 3.4.Yakınsak ve Diferensiyelenebilme   | 18    |
| 4.STURM LİOUVILLE PROBLEMLERİ          | 19    |
| 4.1.Düzgün Sturm Liouville Problemleri | 19    |
| 4.2. Diğer Sturm Liouville Problemleri | 31    |
| 5.MATEMATİK FİZİĞİN ÜÇ TEMEL DENKLEMİ  | 38    |
| 5.1.Isı Denklemi                       | 38    |
| 5.2.Laplace Denklemi                   | 47    |
| 5.3.Dalga Denklemi                     | 54    |
| 6.DEĞİŞKENLERE AYIRMA METODU           | 60    |
| 6.1.Isı Denklemi                       | 60    |
| 6.2.Dalga Denklemi                     | 75    |
| 6.3.Laplace Denklemi                   | 82    |

|                                                  |     |
|--------------------------------------------------|-----|
| 6.4.İkiden Fazla Değişkenli Denklemler           | 90  |
| 7.HOMOJEN OLMAYAN LİNEER PROBLEMLER              | 100 |
| 7.1.Denge Çözümleri                              | 100 |
| 7.2.Homojen Olmayan Problemler                   | 106 |
| 8.ÖZ FONKSİYONLARIN DAĞILIM METODU               | 112 |
| 8.1.Isı Denklemi                                 | 112 |
| 8.2.Dalga Denklemi                               | 120 |
| 8.3.Laplace Denklemi                             | 124 |
| 9.FOURIER DÖNÜŞÜMLERİ                            | 129 |
| 9.1.Fourier Dönüşümü                             | 129 |
| 9.2.Fourier Sinüs ve Fourier Cosinüs Dönüşümleri | 137 |
| 10.GREEN FONKSİYONLARI METODU                    | 146 |
| 10.1.Isı Denklemi                                | 146 |
| 10.2.Laplace Denklemi                            | 155 |
| 10.3.Dalga Denklemi                              | 158 |
| KAYNAKLAR                                        | 165 |
| ÖZ GEÇMİŞ                                        | 167 |



## SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

### Simgeler

|      |                                 |
|------|---------------------------------|
| BSDP | :Başlangıç Sınır Değer Problemi |
| SDP  | :Sınır Değer Problemi           |
| BDP  | :Başlangıç Değer Problemi       |
| BK   | :Başlangıç Koşulu               |
| SK   | :Sınır Koşulu                   |
| S-L  | :Sturm-Liouville Problemi       |
| KDD  | :Kısmi Diferensiyel Denklem     |
| ADD  | :Adi Diferensiyel Denklem       |

## ŞEKİLLER DİZİNİ

|                                                                                   | sayfa |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Şekil 3.1. $f(x)$ , $-L \leq x \leq L$ ' nin grafiği                              | 4     |
| Şekil 3.2. $f(x+2L)=f(x)$ Her $x \in \mathbb{R}$ ' nin grafiği                    | 5     |
| Şekil 3.3. Parçalı düzgün ve paçalı düzgün olmayan fonksiyonun grafiği            | 7     |
| Şekil 3.4. $f(x)$ , $-2 \leq x \leq 2$ ' nin grafiği                              | 8     |
| Şekil 3.5. $f(x+4)=f(x)$ Her $x \in \mathbb{R}$ ' nin grafiği                     | 8     |
| Şekil 3.6. $f(x)$ , $-2 \leq x \leq 2$ ' nin grafiği                              | 9     |
| Şekil 3.7. Tek ve çift fonksiyonun grafiği                                        | 10    |
| Şekil 3.8. $f(x)$ , $0 \leq x \leq L$ tek fonksiyonun grafiği                     | 11    |
| Şekil 3.9. $f(-x) = -f(x)$ $-L \leq x \leq L$ ' nin grafiği                       | 12    |
| Şekil 3.10. $f(x+2L)=f(x)$ Her $x \in \mathbb{R}$ ' nin grafiği                   | 12    |
| Şekil 3.11. $f(x)=1-x$ , $0 \leq x \leq 1$ fonksiyonun grafiği                    | 13    |
| Şekil 3.12. $f(-x) = -f(x)$ $-L \leq x \leq L$ ' nin grafiği                      | 13    |
| Şekil 3.13. $f(x+2)=f(x)$ Her $x \in \mathbb{R}$ ' nin grafiği                    | 14    |
| Şekil 3.14. $f(x)$ , $0 \leq x \leq L$ çift fonksiyonun grafiği                   | 15    |
| Şekil 3.15. $f(-x) = f(x)$ $-L \leq x \leq L$ ' nin grafiği                       | 15    |
| Şekil 3.16. $f(x+2L)=f(x)$ Her $x \in \mathbb{R}$ ' nin grafiği                   | 16    |
| Şekil 3.17. $f(x)=1-x$ , $0 \leq x \leq 1$ fonksiyonun grafiği                    | 16    |
| Şekil 3.18. $f(-x) = f(x)$ $-1 \leq x \leq 1$ ' nin grafiği                       | 17    |
| Şekil 3.19. . $f(x+2)=f(x)$ Her $x \in \mathbb{R}$ ' nin grafiği                  | 17    |
| Şekil 4.1. $y = \tan \zeta$ ve $y = -\frac{\zeta}{(hL)}$ fonksiyonlarının grafiği | 28    |
| Şekil 4.2. Bessel fonksiyonunun grafiği                                           | 36    |

|                                                                                |     |
|--------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Şekil 5.1. Bir boyutlu çubuk içindeki ısı iletimi                              | 39  |
| Şekil 5.2. (x,y) düzlemi içinde, düzgün, basit kapalı bir eğrinin<br>ısı akışı | 48  |
| Şekil 5.3. Sıkıca gerilmiş elastik bir teldeki değişim                         | 54  |
| Şekil 6.1. İnce düzgün dairesel bir halkadaki ısı iletimi                      | 72  |
| Şekil 9.1. $y=\text{erf}(x)$ ve $y=\text{erfc}(x)$ grafiği                     | 141 |
| Şekil 10.1. (x,t) düzleminin ( $t>0$ ), yarı düzlemindeki Green Fonksiyonu     | 161 |

## 1. GİRİŞ VE KAYNAK BİLDİRİŞLERİ

Bilindiği gibi uygulamalı matematikte kısmi türevli denklemler çok önemli bir yer tutmaktadır. Özellikle kısmi türev konuları fiziksel olaylarda karşımıza çıkmaktadır. Bu olaylar Dalga denklemi, Isı denklemi ve Laplace denklemi şeklinde matematiksel olarak modellenmektedir.

Bu çalışmada fizikte ve matematikte sıkça karşılaşılan bu denklemlerin çeşitli şekildeki çözümleri ele alınmıştır.

Bu denklemlerin çözümleri lisans öğrencilerinin olduğu kadar lisans üstü eğitim gören öğrencilerin de işlerini kolaylaştırmaktadır.

Yukarıda bahsedilen denklemlerin verilen koşullarına uygun olarak beş farklı şekilde çözüm metodları verilmektedir. Bilindiği gibi verilen koşullar altında bir yöntem yeterli iken diğer yöntemler yetersiz kalmaktadır. Bu yüzden bu yöntemler avantajları ve dezavantajları ile birlikte ayrı ayrı ele alınacaktır.

Bu çalışmada bu denklemlerin çözümü için matematikte kullanılan hemen hemen tüm yöntemler verilerek çalışma örneklerle zenginleştirilmiştir.

Bu çözüm yöntemleri ile ilgili bilgiler Constanda (2002), Çelebi ve Çağlıyan (2002) de bulunmaktadır.

Bunun yanında Dalga denkleminin periyodik çözümleri ve Laplace denklemi ile ilgili bir takım özellikler için Young (1990), Haberman (1998), Anar (2005), Needham ve King (2006), Ross (1984), Gribben (1975), Sneddon (1957), Dernek (2005), Boyce ve Di Prima (2001), Gribben (1975), Rainville ve ark. (1997), Evans ve ark. (2000), Otto (1999) kaynaklara başvurulmuştur.

Bu çalışmanın ilk iki bölümü verilen yöntemlerde bir yardımcı araç olarak kullanılacak temel düzeydeki diferansiyel denklem konularına ayrılmıştır. Diğer bölümlerde ise sırasıyla homojen olmayan lineer problemler, değişkenlere ayırma metodu, Fourier dönüşümleri,  $z$  fonksiyonların dağılım metodu, Green fonksiyonları metodu yöntemleri ele alınmıştır.

Bu çalışmanın bundan sonraki yapılacak olan çalışmalarda bir referans kaynak olacağına ve konu ile ilgilenen öğrenciler için kolaylık sağlayacağı düşünülmektedir.

## 2. ÖN BİLGİLER

Matematiğin doğal bilimlerin ve mühendislik dallarının birçok problemi Kısmi Diferansiyel Denklemlerin çözümlerine indirgenir. Örneğin hidrodinamikte, esneklik teorisinde, elektrodinamikte ve benzeri alanlarda Kısmi Diferansiyel Denklemler yoğun olarak kullanılmaktadır. Uygulama alanlarının çok geniş olması nedeniyle Kısmi Diferansiyel Denklemler teorisi , matematik analizinin önemli inceleme alanlarından biri olmuştur.

Bu tezin amacı kısmi diferansiyel denklemler teorisinin kavramlarını ve çözüm yöntemlerini uygun bir yapıda sunmaktadır. Tezde eliptik, hiperbolik ve parabolik denklemlerin temsilcisi durumunda olan Laplace, Isı ve Dalga denklemlerinin değişik yoldan çözüm metodları verilmektedir.

### 3. FOURIER SERİLERİ

Sonsuz defa diferansiyellenebilen bir  $f(x)$  fonksiyonu  $x_0$  noktasını içeren bir aralık içinde Taylor serisine açılabilir. Bu aralık  $f$ 'nin tanımlı olduğu aralıktır.

Taylor serisi

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n \quad (3.1)$$

şeklinde gösterilir.

Burada  $c_n$  katsayıları,

$$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad n=1,2,\dots, \quad f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n}$$

şeklindedir.

Eğer belli şartlar sağlanıyorsa yukarıdaki seri  $x_0$  noktasını içeren bir açık aralıkta  $f$ 'e noktasal olarak yakınsaktır. Bu durumda (2.1)'deki  $\{\sim\}$  işareti eşitlik olarak kullanılır.

#### 3.1. Fourier Serisi

$$f(x) \sim \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi}{L} + b_n \sin \frac{n\pi}{L} \right) \dots \quad (3.1.1)$$

serisine Fourier serisi denir. Burada  $L$  pozitif bir sayı  $a_0, a_n$  ve  $b_n$ 'ler sabit sayılardır.

##### Tanım 3.1.1.

$R^n$ 'de tanımlı  $f$  fonksiyonuna  $f(x+T)=f(x)$  ise periyodiktir denir. Burada en küçük  $T>0$  sayısına  $f$ 'nin temel periyodu veya esas periyodu denir. Periyodik bir fonksiyon herhangi bir  $n$  doğal sayı ve  $\forall x$  için

$$f(x+nT) = f(x)$$

özelliğini sağlar.

### Örnek 3.1.2.

$\sin(x + 2\pi) = \sin x$ ,  $\cos(x + 2\pi) = \cos x$  olduğundan,  $\sin x$  ve  $\cos x$  fonksiyonları  $2\pi$  periyotludur.

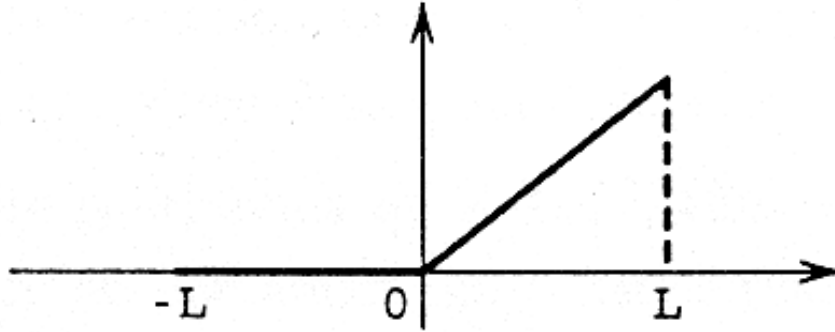
$n=1,2,3, \dots$  tamsayısı için

$$\cos \frac{n\pi(x + L)}{L} = \cos \left( \frac{n\pi}{L} + n\pi \right) = \cos \frac{2n\pi}{L}$$

$$\sin \frac{n\pi(x + L)}{L} = \sin \left( \frac{n\pi}{L} + n\pi \right) = \sin \frac{2n\pi}{L}$$

olduğundan (3.1.1)'in sağ tarafı  $2L$  periyotludur. Böylece verilen bir fonksiyonun Fourier serisi şu şekilde oluşturulur.

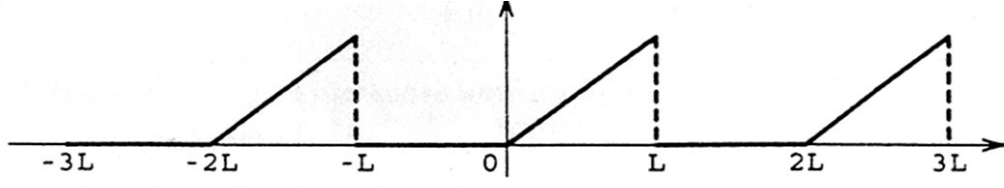
$f$ ,  $[-L, L]$ 'de tanımlı bir fonksiyon olsun.



$$f(x), \quad -L \leq x \leq L.$$

Şekil 3.1.

$f$ 'in periyodik dağılımı  $(-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ 'ye olup  $2L$  periyotludur (şekil 3.2)



Şekil 3.2.

$f$  fonksiyonunun Fourier açılımı için (3.1.1.)'den faydalanabilir.  $a_0, a_n$  ve  $b_n$  katsayılarını hesaplayalım. Daha sonra serinin yakınsaklığını inceleyecenecektir. Doğrudan hesaplamayla

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi}{L} dx = 0, \quad \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi}{L} dx = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.1.3)$$

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi}{L} \cdot \cos \frac{m\pi}{L} dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ L, & n = m, \end{cases} \quad n, m = 1, 2, \dots \quad (3.1.4)$$

$$\int_{-L}^L \sin \frac{n\pi}{L} \cdot \sin \frac{m\pi}{L} dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ L, & n = m, \end{cases} \quad n, m = 1, 2, \dots, \quad (3.1.5)$$

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi}{L} \sin \frac{m\pi}{L} dx = 0, \quad n, m = 1, 2, \dots \quad (3.1.6)$$

olduğu kolayca görülür. (3.1.1) eşitliğini  $[-L, L]$  aralığında terim terim integralleyip (3.1.3)'ü kullanırsak,

$$a_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx \quad (3.1.7)$$

elde edilir.

Eğer (3.1.1)'i  $\cos\left(\frac{m\pi}{L}\right)$  ile çarpıp  $[-L, L]$  aralığında integrallersek (3.1.3),

(3.1.4) ve (3.1.6)'yı kullanırsak sağ taraftaki integrallerin hepsi  $m$ 'nin  $n$ 'ye eşit olduğu yerler hariç sıfıra eşit olduğunu görürüz. Bu durumda integral  $La_m$ 'ye eşit olur.  $m$  yerine  $n$  yazılırsa



$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} dx, \quad n=1,2,\dots \quad (3.1.8)$$

buluruz.

Son olarak (3.1.1)'i  $\sin\left(\frac{m\pi}{L}\right)$  ile çarpıp yukarıdaki işlemi tekrarlırsak

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} dx. \quad n = 1,2,\dots, \quad (3.1.9)$$

(3.1.7), (3.1.8) ve (3.1.9) ile verilen  $a_0, a_n$  ve  $b_n$  sayılarına  $f$ 'nin Fourier katsayıları denir.

(3.1.1)'in sağ tarafındaki seri yalnızca  $[-L,L]$  için verilmiştir. Bu aralık  $f$ 'nin tanımlı olduğu aralıktır.

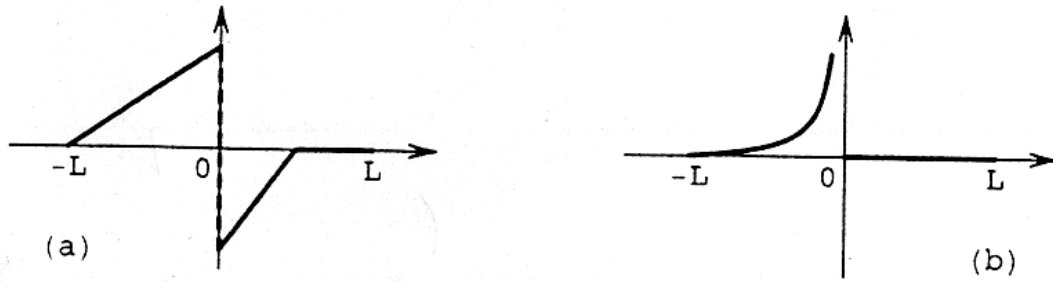
### Tanım 3.1.2.

$f$ , fonksiyonu  $[a,b]$  aralığındaki sonlu sayıda nokta hariç her noktada sürekli ise  $f$ 'e parçalı sürekli fonksiyon denir.

Eğer  $f$  ve  $f'$   $[a,b]$  aralığında sürekli ise  $f'$  e  $[a,b]$  aralığında düzgün süreklidir denir. Eğer  $f, f'$   $[a,b]$  aralığında parçalı sürekli ise  $f'$  e  $[a,b]$  aralığında parçalı düzgündür denir.

### Örnek 3.1.3.

Aşağıdaki şekil (3.3.a)'da verilen fonksiyon parçalı düzgün. (3.3.b)'de verilen fonksiyon  $f(0-)$  mevcut olmadığından parçalı düzgün değildir.



Şekil. 3.3.

**Teorem 3.1.4.**

Eğer  $f$   $[-L, L]$ 'de parçalı düzgün ise  $f$ 'nin Fourier serisi

i)  $f$ 'in sürekli olduğu noktalarda  $f(x)$ 'e

(ii)  $f$ 'in süreksiz olduğu noktalarda  $\frac{1}{2} [f(x+) + f(x-)]$  yakınsar.

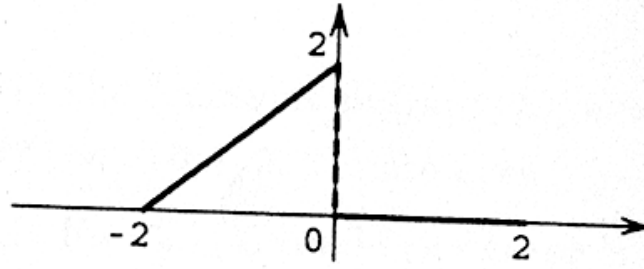
$x \in (-L, L)$  ise (2.2) serisi  $f$ 'e yakınsar. Eğer  $x \in [-L, L]$  ise de  $f(-L)=f(L)$  olması koşuluyla  $f$ 'e yakınsar.

**Örnek 3.1.5**

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & , -2 \leq x < 0 \\ 0 & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

verilsin.

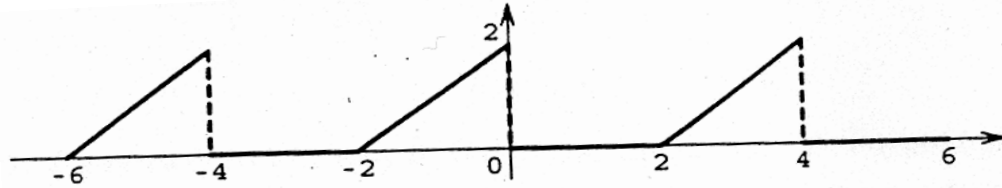
Burada  $L=2$  olup



$$f(x), \quad -2 \leq x \leq 2.$$

Şekil. (3.4)

$f$  in 4 periyodu  $f(x+4)=f(x)$  şeklindedir.



Şekil 3.5( $f(x+4) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ )

$L=2$  için (3.1.7),(3.1.8) ve (3.1.9)'u integrallersek

$$a_0 = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 f(x) dx = \frac{1}{4} \int_{-2}^0 (x+2) dx = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{2} x^2 + 2x \right]_{-2}^0 = \frac{1}{2},$$

buluruz.

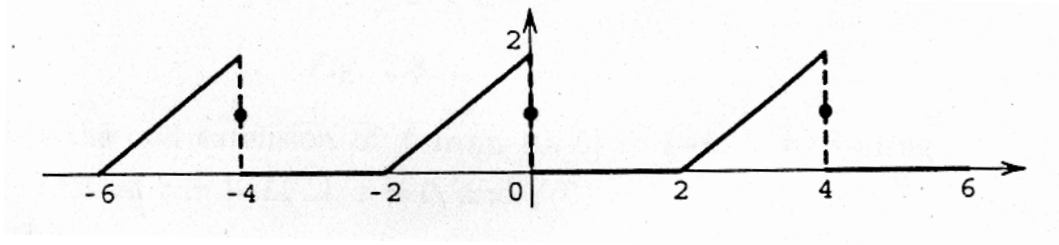
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \cos \frac{n\pi}{2} dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 (x+2) \cos \frac{n\pi}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left[ (x+2) \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \right]_{-2}^0 - \int_{-2}^0 \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} dx \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{n^2\pi} \left[ \cos \frac{n\pi}{2} \right]_{-2}^0 = \frac{2}{n^2\pi} \left[ 1 - \cos(n\pi) \right] = \frac{2}{n^2\pi} \left[ 1 - (-1)^n \right] \\
bn &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \sin \frac{n\pi}{2} dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 (x+2) \sin \frac{n\pi}{2} dx \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \left[ (x+2) \left( -\frac{2}{n\pi} \right) \cos \frac{n\pi}{2} \right]_{-2}^0 + \int_{-2}^0 \frac{2}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} dx \right\} \\
&= -\frac{2}{n\pi} + \frac{2}{n^2\pi} \left[ \sin \frac{n\pi}{2} \right]_{-2}^0 = -\frac{2}{n\pi}, \quad n = 2, \dots
\end{aligned}$$

böylece

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [1 - (-1)^n] \left\{ \frac{2}{n^2\pi} \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \right\}$$

elde edilir.



Şekil 3.6.

– 1 için  $x \in \mathbb{R}$  'de Teorem (3.1.5) yardımıyla

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [1 - (-1)^n] \left\{ \frac{2}{n^2\pi} \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \right\} = \begin{cases} x+2, & -2 \leq x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ 0, & 0 < x \leq 2; \end{cases}$$

şeklinde ifade edilir. Yani  $-2 \leq x < 0$  ve  $0 < x \leq 2$  için seri  $f(x)$ 'e yakınsar.

Burada  $f$ 'in periyodik açılımı (şekil. 3.5)  $x=0$  noktasında süreklidir. Açılım  $x=0$  noktasında bir sıçramalı süreksizliğe sahiptir. (3.6) şeklinden de görüldüğü gibi seri

$$\frac{1}{2} [f(0^-) + f(0^+)] = \frac{1}{2} (2 + 1) =$$

yakınsar.

### 3.2. Fourier Sinüs Serileri

#### Tanımı 3.2.1.

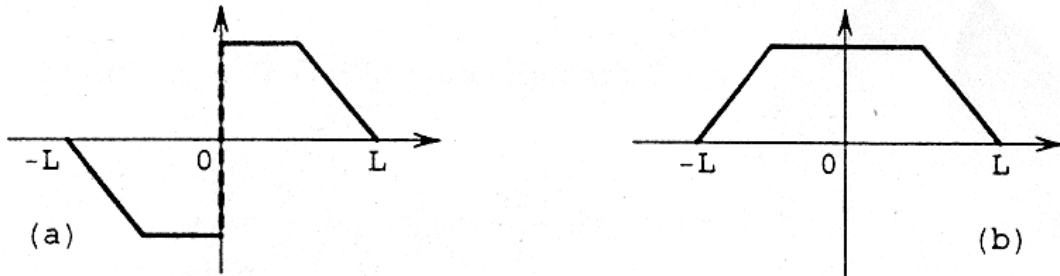
Orjine göre simetrik olan bir aralıkta  $\forall x$  için  $f(-x) = -f(x)$  ise  $f$ 'e tek, diğer taraftan bu aralıktaki  $x$  için  $f(-x) = f(x)$  ise  $f$  fonksiyonuna çift fonksiyon denir.

#### Örnek 3.2.2

(a)  $\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$   $n=1,2,\dots$  fonksiyonu tektir.

$\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$   $n=0,1,2,\dots$  fonksiyonu çifttir.

(b) şekil 3.7 (a)'daki fonksiyon tektir. Çünkü grafik orjine göre simetriktir. Şekil (3.7) (b)deki fonksiyon çifttir. Çünkü grafik y-eksenine göre simetriktir. Şekil (3.4)'teki fonksiyon ise ne tektir ne de çift fonksiyondur.



Şekil 3.7.

İki tek fonksiyon çarpımı çift, iki çift fonksiyonun çarpımı çift, bir tek ve bir çift fonksiyonunun çarpımı da tektir.

Eğer  $f$  fonksiyonu  $[-L, L]$  de tek ise

$$\int_{-L}^0 f(x) dx = \int_L^0 f(-x) d(-x) = - \int_0^L f(x) dx;$$

ve böylece

$$\int_{-L}^L f(x)dx = \int_{-L}^0 f(x)dx + \int_0^L f(x)dx = 0$$

olur.

Eğer  $f$  fonksiyonu  $[-L,L]$  de çift ise

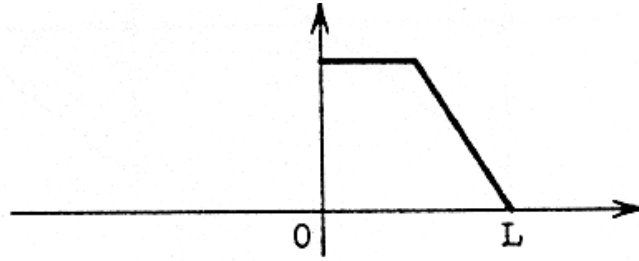
$$\int_{-L}^0 f(x)dx = \int_L^0 f(-x)d(-x) = \int_0^L f(x)dx \text{ olup}$$

$$\int_{-L}^L f(x)dx = \int_{-L}^0 f(x)dx + \int_0^L f(x)dx = 2 \int_0^L f(x)dx \text{ dir.}$$

Eğer  $f$  fonksiyonu tek ise  $f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}\right)$  fonksiyonu (3.1.7), (3.1.8)'den dolayı

$a_n = 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$  olup  $[-L,L]$ 'deki tek fonksiyonun Fourier serisi sinüslü terimleri içerir. Benzer şekilde  $f$  fonksiyonu çift ise  $f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right)$  fonksiyonu tek olup (3.1.9)'dan  $b_n = 0$  olur. Bunun anlamı da  $[-L,L]$  aralığında çift fonksiyonunun Fourier serisi yalnızca cosinüs ve sabit terimleri içerir.

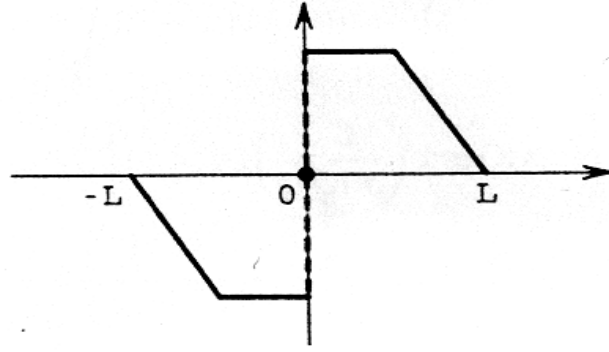
Eğer  $f$  fonksiyonu  $[0,L]$  aralığında tanımlı ise  $f$  bir Fourier sinüs serisine açılabilir.  $f$  fonksiyonunun grafiği şekil (3.8)'de gösterildiği gibidir.



$$f(x), \quad 0 \leq x \leq L.$$

Şekil 3.8.

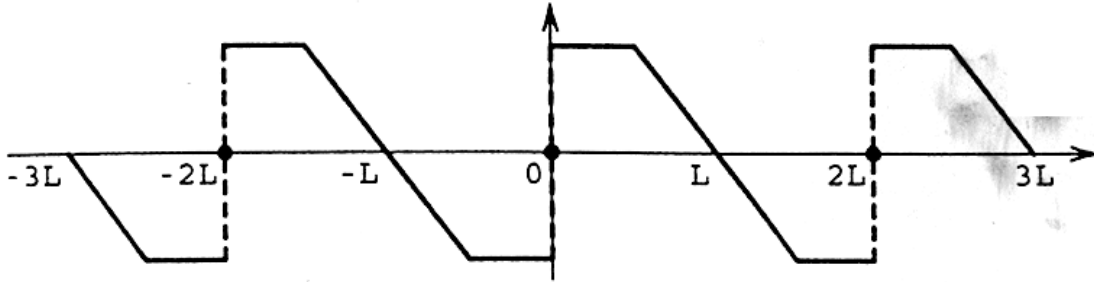
Böylece  $f$ 'in  $(0,L]$ 'den  $[-L,L]$ 'ye tek açılımı her  $x \in (-L,L]$  için ve  $x=0$  için  $f(0)=0$  olup  $f(-x)=-f(x)$ 'dir.



$$f(-x) = -f(x), \quad -L \leq x \leq L.$$

Şekil 3.9.

Bu tek fonksiyon  $[-L,L]$ 'den  $\mathbb{R}$ 'ye tek fonksiyon,  $2L$  periyotlu olmak üzere periyodik açılım  $\forall x \in \mathbb{R}$  için



$$f(x+2L) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Şekil 3.10

şeklindedir.

Bu son fonksiyonun Fourier sinüs serisi

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

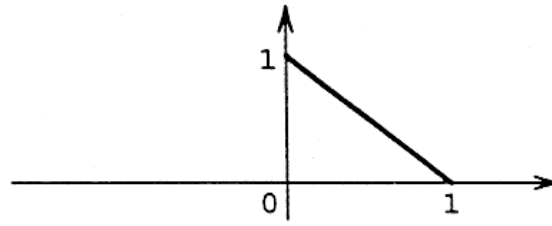
olup, burada (3.1.7), (3.1.9) yardımıyla

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.2.1)$$

bulunur.

### Örnek 3.2.2

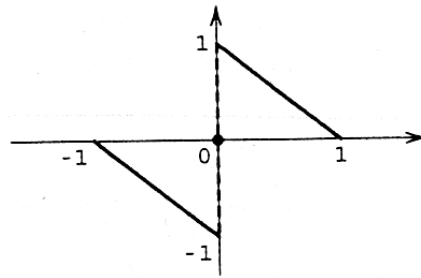
$$f(x) = 1 - x, \quad 0 \leq x \leq 1$$



$$f(x), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Şekil 3.11.

Bu fonksiyonun  $[-1, 1]$ 'e tek açılımı  $f(-x) = -f(x)$ ,  $\forall x \in [-1, 1]$   $x \neq 0$  ve  $f(0) = 0$  olduğundan



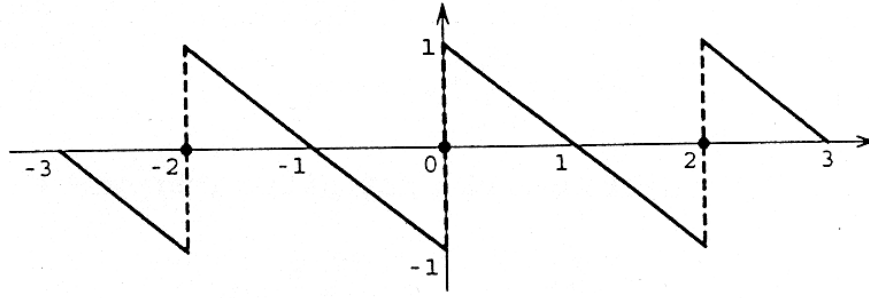
$$f(-x) = -f(x), \quad -1 \leq x \leq 1.$$

dir.

Şekil 3.12.

$\forall x$  için  $f(x+2) = f(x)$  ise  $2L=2$  periyotlu fonksiyonun  $\mathbb{R}$ 'ye periyodik açılımı





**Şekil 3.13.**  $(f(x+2) = f(x) \forall x \in \mathbb{R})$ .

$L=1$  için (3.1.10)'u kullanıp  $[0,1]$  aralığında integral alınırsa

$$\begin{aligned}
 b_n &= 2 \int_0^1 (1-x) \sin(n\pi x) dx, \\
 &= 2 \left[ (1-x) \left( -\frac{1}{n\pi} \right) \cos(n\pi x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{n\pi} \cos(n\pi x) dx \\
 &= 2 \left\{ \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{n^2\pi^2} \sin(n\pi x) \right\}_0^1 = \frac{2}{n\pi}, \quad n = 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

böylece

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin(n\pi x).$$

dir.

$0 < x < 1$  için Teorem 3.1.5'ten.

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin(n\pi x) = \begin{cases} 0 & , x=0 \\ 1-x & , 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

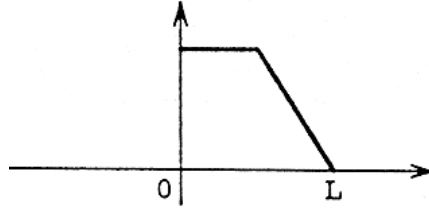
bulunur. Yani seri  $0 < x < 1$  için  $f(x)$ 'e yakınsaktır. Burada  $f$ 'in  $\mathbb{R}$ 'ye periyodik açılımı, sürekli ve  $x=0$  da

$$\frac{1}{2} [f(0-) + f(0+)] = \frac{1}{2} (0 + 1) = \frac{1}{2}$$

dir.

### 3.3. Fourier Cosinüs Serileri

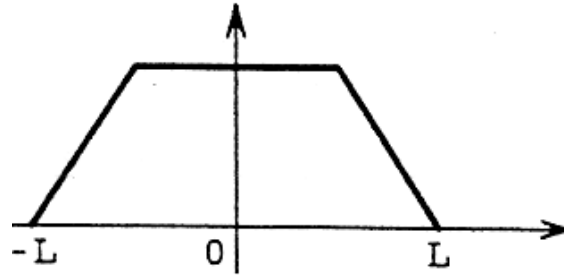
$[0,L]$  aralığında tanımlı bir fonksiyon Fourier cosinüs serisine açılabilir. Bu açılım Fourier sinüs serisine benzer şekilde yapılır.  $f$  fonksiyonu  $[0,L]$  aralığında tanımlı olsun.



$$f(x), 0 \leq x \leq L.$$

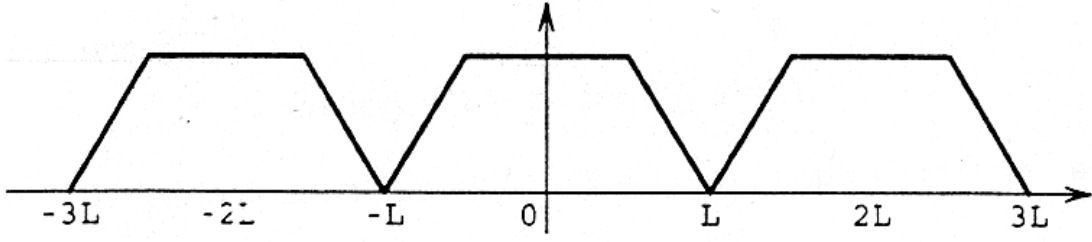
Şekil 3.14.

$f$ ,  $[-L,L]$ 'de çift olduğundan,  $x \in [-L, L]$  için  $f(x)=f(-x)$  olarak  $f$ 'i açabiliriz. (şekil 3.15).



Şekil 3.15.  $(f(-x) = f(x), x \in [-L, L])$

Bu çift fonksiyonun  $[-L,L]$ 'den  $\mathbb{R}$ 'ye periyodik açılımını oluşturmaktadır.  $\forall x \in \mathbb{R}$  için  $f(x+2L)=f(x)$  için



**Şekil 3.16.**  $(f(x+L) = f(x) \forall x \in \mathbb{R})$

Bu fonksiyonun Fourier cosinüs serisini

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x,$$

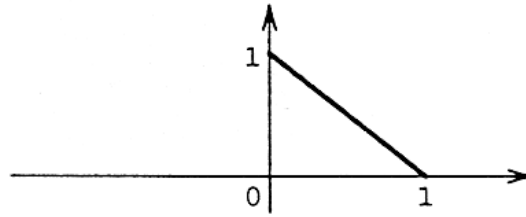
şeklinde yazılabilir. (3.1.8), (3.1.9)'dan

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.3.1)$$

### Örnek 3.3.1

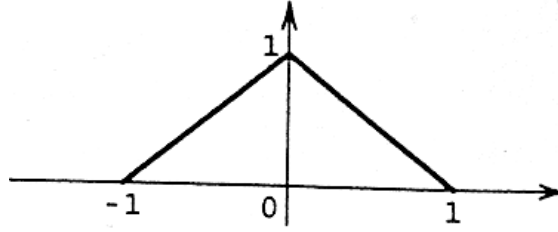
$$f(x) = 1 - x, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (\text{Şekil 3.17})$$



$$f(x), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

**Şekil 3.17**

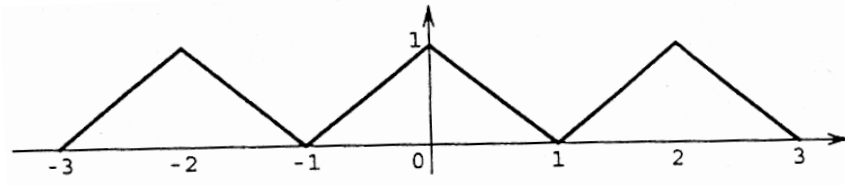
$[-1,1]$ 'de  $f$  fonksiyonun çift açılımı  $\forall x \in [-1,1]$  için  $f(-x)=f(x)$  ile tanımlıdır. Bu açılım Şekil 3.18'de gösterilmiştir.



$$f(-x) = f(x), \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Şekil 3.18

Bu çift fonksiyonun  $\mathbb{R}$ 'ye periyodik açılımı  $\forall x \in \mathbb{R}$  için  $f(x+2)=f(x)$  şeklinde tanımlı olup Şekil (3.19)'da gösterildiği gibidir.



Şekil 3.19. (  $f(x+2) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$  )

(3.3.1)'de  $L=1$  alıp ve terim terim integrallersek

$$a_n = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (1-x) dx = \left[ x - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2},$$

$$a_n = 2 \int_0^1 f(x) \cos(n\pi x) dx = 2 \int_0^1 (1-x) \cos(n\pi x) dx$$

$$= 2 \left\{ \left[ (1-x) \left( \frac{1}{n\pi} \right) \sin(n\pi x) \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{n\pi} \sin(n\pi x) dx \right\}$$

$$= \frac{(-1)^n}{n^2 \pi^2} \cos(n\pi x) = \frac{2}{n^2 \pi^2} (-1)^n \quad n = 1, 2, \dots$$

elde ederiz. Böylece  $f$  in Fourier cosinüs serisi

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{n^2 \pi^2} \cos(n\pi x)$$

şeklindedir.

Teorem (3.1.5)'ten

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{n^2 \pi^2} \cos(n\pi x) = 1-x, \quad 0 < x < 1 \quad \text{olur. Çünkü, } \mathbb{R}'\text{de } f \text{ in}$$

periyodik açılımı her yerde süreklidir.

### 3.4. Yakınsaklık ve Diferansiyelenebilme

$[0, L]$  aralığında tanımlı bir fonksiyonun full Fourier serisi, Fourier sinüs veya Fourier cosinüs serisine açılabilir. Son ikisinde fonksiyon tek iken simetriklik gerekmediğinden birincisinde tek değildir.  $[0, L]$ 'den  $[-L, L]$ 'ye verilen bir fonksiyonun açılımı pek çok yoldan yapılabilir.  $[-L, L]$ 'de tanımlı bir fonksiyon full Fourier serisine açılabilir.

#### Teorem 3.4.1

(i) Eğer  $f$  fonksiyonu  $[-L, L]$  de sürekli  $f(-L)=f(L)$  ve  $f'$   $[-L, L]$  de parçalı düzgün ise  $f'$  in Fourier serisi terim terim diferansiyellenebilir. Elde edilen diferansiyellenmiş seri  $f'$  nin Fourier serisi olup  $x$  için  $f'(x)$ 'e yakınsar. Burada  $f''(x)$ 'te mevcuttur.

(ii) Eğer  $f$  fonksiyonun  $[0, L]$  de sürekli,  $f'$   $[0, L]$  aralığında parçalı düzgün ise  $f'$  in Fourier cosinüs serisi terim terim diferansiyellenebilirdir ve elde edilen seri  $f''$  'nün Fourier sinüs serisidir ki  $x$  için bu  $f'(x)$ 'e yakınsar ve  $f''(x)$  mevcuttur.

(iii) Eğer  $f$  fonksiyonu  $[0, L]$  de sürekli  $f(0)=f(L)=0$  ve  $f'$   $[0, L]$ 'de parçalı düzgün ise  $f'$  in Fourier sinüs serisi terim terim diferansiyellenebilir. Elde edilen seri  $f'$  nin Fourier cosinüs serisi olup  $x$  için  $f'(x)$ 'e yakınsa

#### 4. STURM- LİOUVILLE PROBLEMLERİ

Kısmi Türevli Diferansiyel denklemlerin çözümlerinde temel rol oynayan 2. mertebede Adi Diferansiyel denklemlerin problemlerini içeren konularda vardır. Bu bölümde bu tür problemlerle ilgili sonuçlar verilecektir.

##### 4.1. Düzgün Sturm-Liouville Problemleri:

###### Tanım 4.1.1.

$I$  aralığında tanımlı fonksiyonların uzayı  $\mathcal{X}$  olsun.  $\mathcal{X}$ 'de tanımlı  $L$  lineer diferansiyel operatörüne  $f_1$  ve  $f_2$   $\mathcal{X}$ 'in herhangi iki fonksiyonu olmak üzere

$$\int_I f_1(x)(Lf_2)(x) - f_2(x)(Lf_1)(x) \, dx = 0$$

üzerinde simetriktir denir.

###### Örnek 4.1.2.

$[0,1]$  aralığı üzerinde iki kez türevlenebilir fonksiyonların  $\mathcal{X}$  uzayını gözönüne alalım. Eğer  $L$  lineer operatörü  $L \equiv \frac{d^2}{dx^2}$  şeklinde tanımlı ise kısmi integrasyon metodunu kullanarak  $\mathcal{X}$ 'deki herhangi bir  $f_1$  ve  $f_2$  için,

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_1(Lf_2) - f_2(Lf_1) \, dx &= \int_0^1 (f_1 f_2'' - f_2 f_1'') \, dx \\ &= \left[ f_1 f_2' \right]_0^1 - \int_0^1 f_1' f_2' \, dx - \left[ f_2 f_1' \right]_0^1 + \int_0^1 f_1' f_2' \, dx = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece  $L$   $\mathcal{X}$ 'de simetriktir.

Bir operatör, bir fonksiyon uzayında simetrik olabilirken diğerinde olmayabilir. Örnek (3.1.3)'deki fonksiyonlar  $x=0$  ve  $x=1$  'de 0'a eşit alınmazsa  $\mathcal{X}$  uzayında  $L$  operatörü simetrik değildir.

**Tanım 4.1.3.**

$f_1$  ve  $f_2$  fonksiyonları  $I$  aralığında tanımlı,  $\forall x \in I$  için  $\sigma(x) \geq 0$  olsun. Eğer  $I$ 'da

$$\int_I f_1(x)f_2(x)\sigma(x)dx = 0$$

sağlanıyorsa  $f_1$  ve  $f_2$  fonksiyonuna  $\sigma$  ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldir denir. Eğer  $\sigma(x) \equiv 1$  ise  $f_1$  ve  $f_2$ 'ye basit bir şekilde ortogonaldir denir.

**Örnek 4.1.4**

$f_1(x) = 3x - 2$  ve  $f_2(x) = x - 1$  fonksiyonları

$[0,1]$  aralığında  $\sigma(x)=x$  ağırlık fonksiyonuna göre ,

$$\int_0^1 (3x-2)x dx = \int_0^1 (3x^2 - 2x) dx = \left[ x^3 - x^2 \right]_0^1 = 0$$

olduğundan ortogonaldir.

Diğer taraftan  $f_1(x) = 3x - 2$  ve  $f_2(x) = x - 1$  fonksiyonları da  $[0,1]$ 'de ortogonaldir.

**Örnek 4.1.5**

$\sin(3x)$  ve  $\cos(2x)$  fonksiyonları  $[-\pi, \pi]$  aralığında,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(3x) \cos(2x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} [\sin(5x) + \sin(x)] dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{5} \cos(5x) - \cos(x) \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \end{aligned}$$

olduğundan ortogonaldır.

#### Tanım 4.1.6

(a,b) aralığında tanımlı fonksiyonların lineer diferansiyel bir operatör olsun.

$$(Lf)(x) + \lambda \sigma(x)f(x) = 0, \quad a < x < b \quad (4.1.1)$$

denklemine bir özdeğer problemi denir. Burada  $\lambda$  reel bir parametre,  $\sigma$  (a,b) aralığındaki  $\forall \{x\}$  için  $\sigma(x) > 0$  verilen bir fonksiyondur.  $\lambda$  sayısına (4.1.1)'in aşıkak olmayan çözümlerine karşılık gelen özdeğerler denir. Bu aşıkak olmayan çözümlere de öz fonksiyonlar denir.

#### Teorem 4.1.7

(4.1.1) özdeğer probleminin L operatörü simetrik ise

(i) Tüm  $\lambda$  özdeğerleri reeldir.

(ii) Özdeğerlerin sonsuz bir dizisi  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$  öyle ki  $n \rightarrow \infty$  iken  $\lambda_n \rightarrow \infty$

(iii) Farklı özdeğerlere karşılık gelen öz fonksiyonlar (a,b) aralığında  $\sigma$  ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldır.

#### Tanım 4.1.8

[a,b] sonlu bir aralık, p, q ve  $\sigma$  [a,b]'de verilen fonksiyonlar ki  $\forall x \in [a,b]$  için  $\sigma(x) > 0$  ve  $p(x) > 0$  ve  $k_1, k_2, k_3$  ve  $k_4$  reel sayılar olmak üzere

$$[p(x)f'(x)]' + q(x)f(x) + \lambda \sigma(x)f(x) = 0, \quad a < x < b \quad (4.1.2)$$

$$k_1 f(a) + k_2 f'(a) = 0, \quad (4.1.3)$$

$$k_3 f(b) + k_4 f'(b) = 0 \quad (4.1.4)$$

Düzgün Sturm-Liouville özdeğer problemi denir.



**Örnek 4.1.9**

$$p(x) \equiv 1, \quad q(x) \equiv 1, \quad \sigma(x) \equiv 1$$

$$k_1 = 1, k_2 = 0, k_3 = 1, k_4 = 0, \quad a = 0, b = 1$$

$$f''(x) + \lambda f'(x) = 0, \quad 0 < x < 1$$

$$f(0) = 1, \quad f(1) = 1$$

seçerek düzgün S-L problemi elde edilebilir

**Örnek 4.1.10**

Eğer  $p, q, \sigma, a$  ve  $b$  örnek (4.1.9)'daki gibi verilmiş fakat

$$k_1 = 1, k_2 = 1, k_3 = 1, k_4 = 0 \text{ ise}$$

bu durumda düzgün S-L problemi,

$$f''(x) + \lambda f'(x) = 0, \quad 0 < x < 1$$

$$f'(0) = 1, f'(1) = 1$$

şeklinde olur.

**Örnek 4.1.11.**

$p, q, \sigma, a, b$  örnek (4.1.9)'daki gibi verilsin ve

$$k_1 = 1, k_2 = 1, k_3 = h, k_4 = 0 \text{ ise}$$

düzgün S-L problemi

$$f''(x) + \lambda f'(x) = 0, \quad 0 < x < 1$$

$$f(0) = 1, \quad f'(1) + hf(1) = 1$$

şeklindedir.

**Örnek 4.1.12.**

$$f''(x) + \lambda f'(x) + \lambda f(x) = 1, \quad 0 < x < 1$$

$$f(0) = 1, \quad f(1) = 1$$

Özdeğer problemi düzgün S-L problemidir. İntegral çarpanı tekniğini ve  $f'$ 'nin katsayısını kullanarak fonksiyonları

$$p(x) = \sigma(x) = \lambda x p \int_0^1 dx \stackrel{!}{=} e^{2x}, \quad q(x) \equiv 1 \text{ şeklinde}$$

elde edilir.

Tanım (4.1.8)'in gerekliliğini sağlayan bu fonksiyonlar

$$(e^{2x} f'(x))' + \lambda e^{2x} f(x) = 1, \quad 0 < x < 1$$

şeklinde ifade edilir ve bu verilen denkleme denktir.

**Teorem 4.1.13.**

(4.1.2) ile tanımlı sağ taraflı

$$Lf = -(pf')' + qf \quad (4.1.5)$$

operatörü (4.1.3) ve (4.1.4) şartlarını sağlayan  $\mathcal{X}$  uzayı üzerinde simetriktir.

**İspat:** Kolaylık için  $k_1 \neq 0$  ve  $k_4 \neq 0$  olsun. Bu durumda (4.1.3) ve (4.1.4)'ten  $\mathcal{X}$ 'deki herhangi bir  $f$  fonksiyonu

$$f(a) = -\frac{r_2}{k_1} f'(a), \quad f'(b) = -\frac{r_3}{k_4} f(b)$$

sağlar.

(4.1.5) ve kısmi integrasyonu kullanarak  $\mathcal{X}$ 'deki herhangi bir  $f_1$  ve  $f_2$  için

$$\begin{aligned}
\int_a^b [f_1(Lf_2) - f_2(Lf_1)] dx &= \int_a^b [p(f_2')' + qf_2 - f_2(pf_1') + pf_1] dx \\
&= [f_1(pf_2')]_a^b - \int_a^b pf_2'f_1' dx - [f_2(pf_1')]_a^b + \int_a^b pf_1'f_2' dx \\
&= p(b)[f_1(b)f_2'(b) - f_2(b)f_1'(b)] - p(a)[f_1(a)f_2'(a) - f_2(a)f_1'(a)] \\
&= p(b) \left[ -\frac{k_3}{k_4} f_1(b)f_2(b) + \frac{k_3}{k_4} f_2(b)f_1(b) \right] \\
&\quad - p(a) \left[ -\frac{k_2}{k_1} f_1'(a)f_2'(a) + \frac{k_2}{k_1} f_2'(a)f_1'(a) \right] = 0
\end{aligned}$$

buluruz. Sıfırdan farklı,  $k_1, k_2, k_3$  ve  $k_4$  sabitlerinin tüm kombinasyonları için benzer işlem yapılabilir.

#### Özellik 4.1.14.

Düzgün S-L probleminin öz fonksiyonları ve öz değerleri Teorem (4.1.7)'de belirtilen tüm özellikleri sağlar.

Özel S-L probleminin öz fonksiyonlarını ve özdeğerlerini hesaplamadan kullanılacak önemli bir formül elde edelim. (4.1.1)'i  $f$  ile çarpıp  $(a,b)$  üzerinden kısmi integrasyonu kullanarak,

$$\begin{aligned}
0 &= \int_a^b [p(f')' + qf^2] dx + \lambda \int_a^b \sigma f^2 dx \\
&= \int_a^b [pff']' - p(f')^2 + qf^2] dx + \lambda \int_a^b \sigma f^2 dx \\
&= [pff']_a^b - \int_a^b p(f')^2 - qf^2] dx + \lambda \int_a^b \sigma f^2 dx
\end{aligned}$$

$f$  bir öz fonksiyon ve  $\sigma(x) > 0$  ( $a < x < b$ ) olduğundan son terimdeki  $\lambda$ 'nın katsayıları kesinlikle pozitif olacaktır. Böylece  $\lambda$ 'yi

$$\lambda = \frac{\int_a^b [p(x)(f'(x))^2 - q(x)f^2(x)] dx}{\int_a^b \sigma(x)f^2(x) dx} \quad (4.1.6)$$

şeklinde elde edebilir. Bu ifade Rayleigh bölümü olarak bilinir.

#### Örnek 4.1.15

Örnek (4.1.9)'da verilen düzgün S-L problemi için

$$\int_a^b [p(x)(f'(x))^2 - q(x)f^2(x)] dx = \int_0^L (f'(x))^2 dx \geq 0$$

$$[p(x)f(x)f'(x)]_a^b = [f(x)f'(x)]_0^L = 0$$

$$\int_a^b \sigma(x)f^2(x) dx = \int_0^L f^2(x) dx > 0$$

böylece (4.1.6)'dan

$$\lambda = \frac{\int_0^L (f'(x))^2 dx}{\int_0^L f^2(x) dx} \geq 0 \quad (4.1.7)$$

bulunur.

$\lambda=0$  olması için gerek ve yeter şart  $[0,L]$  aralığında  $f'(x) \equiv 0$  Bunun anlamı  $f(x) = C_1 x + C_2$  olmasıdır. Bu mümkün değil çünkü sınır değer problemine göre sabit çözümler sıfır çözümdür. Sonuç olarak  $\lambda > 0$  ve örnek (4.1.9)'daki denklemin genel çözümü

$$f(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda} x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda} x), \quad C_1, C_2 = \text{arbitrary constants} \quad (4.1.8)$$

$f(0)=0$  şartını kullanarak  $C_1 = 0$  olur. Böylece  $f(L)=0$  koşulundan,

$$C_2 \sin(\sqrt{\lambda} L) = 0$$

$C_2 = 0$  olamaz, çünkü bu durumda  $f(x) = 0$  olur. Aşık olmayan çözümü arandığı için  $\sin(\sqrt{\lambda} L) = 0$  alınmak zorundadır. Buradan  $\sqrt{\lambda} L = n\pi$   $n = 1, 2, \dots$  veya

$$\lambda_n = \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2, n = 1, 2, \dots$$

elde edilir.

Bunlar problemin özdeğerleridir. Buna karşılık gelen özfonksiyonlar ise

$$f_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Uygunluk için  $C_2 = 1$  alalım. Öz fonksiyonlar  $C_2$  'nin sıfırdan farklı  $\sin \frac{n\pi x}{L}$  'nin basit bir çarpımı olacaktır.

Kolayca gösterilebilir ki teorem (4.1.7)'deki özellikler sağlamaktadır. Özfonksiyonların ortogonalliğinden Fourier serisini oluşturabiliriz.

#### Örnek 4.1.16.

Aynı tekniği kullanarak örnek (4.1.10)'da S-L problemini özdeğerleri ve özfonksiyonlarını hesaplayalım. (4.1.7) eşitsizliğinde  $\lambda=0$  durumunu göz önüne alınamaz. Çünkü her iki sınır koşulunu sağlayan çözüm  $f(x) = c_1 e^{-bt} + c_2 e^{bt}$  olduğundan  $c=1$  alarak özdeğer ve özfonksiyon çiftini

$$\lambda_0 = 0, f_0(x) \equiv 1 \text{ olduğunu görülebilir.}$$

Örnek (4.1.15)'daki gibi  $\lambda > 0$  ise denklemin genel çözümü (4.1.7)'dir. Böylece

$$f'(x) = -c_1 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda} x) + c_2 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda} x)$$

$f'(0) = 0$  koşulunda  $C_2 = 0$  bulunur. Bu yüzden  $f'(L) = 0$  olup

$$C_1 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda} L) = 0$$

sağlanır.

Aşık olmayan çözümü istenildiği için  $\sin(\sqrt{\lambda} L) = 0$  alınır. Bunun anlamı da  $\sqrt{\lambda} L = n\pi$   $n = 1, 2, \dots$  dir. (4.1.8)'den  $C_2 = 0$  ve  $C_1 = 1$  alırsak özdeğer ve özfonksiyon çiftleri,

$$\lambda_n = \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2, \quad f_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Problemin tüm özdeğer ve öz fonksiyonları teorem (4.1.7)'deki koşulları sağlar.

**Örnek 4.1.17.** Örnek (4.1.11)'de göz önüne alınan S-L probleminde  $h > 0$  olsun. Bu durumda  $f'(L) = -hf(L)$  formunda 2. sınır koşulunu yazılabilir. Buradan görülür ki

$$\int_0^L f(x)f'(x)dx = \int_0^L f'(x)f(x)dx = f(L)f'(L) - f(0)f'(0) = -hf^2(L) \leq 0 \text{ dir.}$$

Netice olarak (4.1.6)'dan

$$\lambda = \frac{\int_0^L (f')^2(x)dx + hf^2(L)}{\int_0^L f^2(x)dx} \geq 0.$$

$\lambda = 0$  olması için gerek ve yeter şart  $[0, L]$  aralığında  $f'(x) \equiv 0$  ve  $f(L) = 0$  dır. Fakat  $f(x) \equiv 0$  olması kabul edilemez. Böylece S-L probleminin özdeğerleri pozitiftir. Bunları bulmak için denklemin genel çözümü (4.1.8) ile verilir.  $C_1 = 0$  olduğu için  $f(0) = 0$  şartını elde ederiz. 2. sınır koşulunu yani  $f'(L) + hf(L) = 0$  kullanarak,

$$C_2 [\sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda} L) + h \sin(\sqrt{\lambda} L)] = 0$$

bulunur.

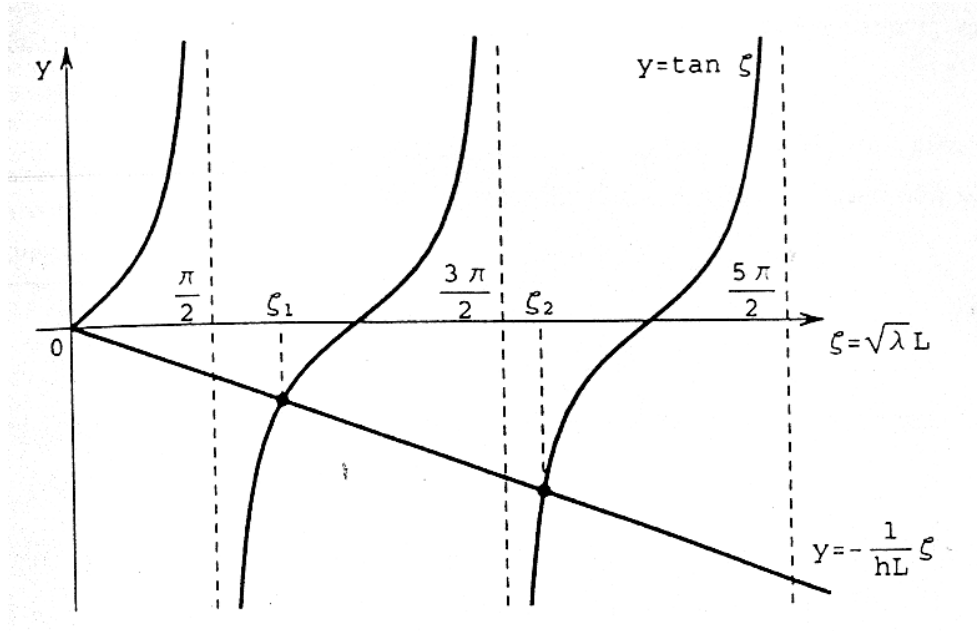
Aşkar olmayan çözümler için  $C_2 \neq 0$  böylece

$$\sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda} L) + h \sin(\sqrt{\lambda} L) = 0 \text{ elde ederiz.}$$

$\cos(\sqrt{\lambda} L) \neq 0$  olduğundan yukarıdaki eşitliğin her iki tarafı  $\cos(\sqrt{\lambda} L)$  ile bölünür. Böylece  $\lambda$  transandantal denkleminin bir çözümü olacaktır.

$$\tan(\sqrt{\lambda} L) = -\frac{h}{\sqrt{\lambda}} = -\frac{1}{hL}(\sqrt{\lambda} L)$$

$\sqrt{\lambda} L = \zeta$  alırsak  $y = \tan \zeta$  ve  $y = -\frac{\zeta}{hL}$  fonksiyonlarının grafiklerinin kesim noktalarını verir.



Şekil 4.1.

Şekil 4.1.'den görüldüğü gibi sayılabilir pek çok nokta vardır ki bu S-L probleminin sınır değerlerinin sonsuz bir çözüme sahip olduğunu gösterir.

$$\lambda = \left( \frac{\zeta_n}{L} \right)^2, \quad n = 1, 2, \dots, n \rightarrow \infty \text{ iken } \lambda \rightarrow \infty \text{ bunlara karşılık gelen}$$

özfonsiyonlar Teorem (4.1.7)'den  $C_1 = 0$  ve  $C_2 = 1$  alındığından,

$$f_n(x) = \sin(\sqrt{\lambda_n}x) = \sin \frac{\xi_n x}{L}, \quad n = 1, 2, \dots \text{ dir.}$$

Teorem (4.1.7) (iii)'den  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$   $[0, L]$  aralığında ortogonaldır.

### Örnek 4.1.18.

Örnek 4.1.12'de ki Sturm-Liouville problemini göz önüne alınır. Burada  $s^2 + 2s + \lambda = 0$  karakteristik denkleminin kökleri

$$s_1 = -1 + \sqrt{1 - \lambda}, \quad s_2 = -1 - \sqrt{1 - \lambda}$$

$$\lambda < 1, \quad \lambda = 1 \text{ ve } \lambda > 1$$

göre köklerinin yapısı değiştiğinden aşağıdaki durumları göz önüne alınacaktır..

(i) Eğer  $\lambda < 1$  ise  $1 - \lambda > 0$  olur. Böylece  $s_1$  ve  $s_2$  reel ve farklı olur ve denklemin genel çözümü

$$f(x) = C_1 e^{s_1 x} + C_2 e^{s_2 x}, \quad C_1, C_2 = \text{arbitr.}$$

$f(0)=0$  ve  $f(1)=0$  şartlarını kullanarak,

$$C_1 + C_2 = 0$$

$$C_1 e^{s_1} + C_2 e^{s_2} = 0$$

$s_1 \neq s_2$  olduğundan  $C_1 = C_2 = 0$  çözümüne sahiptir. Sonuç olarak  $f(x) = 0$

Buradan  $\lambda < 1$  olduğu için öz değerleri yoktur sonucunu çıkarılabilir.

(ii)  $\lambda = 1$  ise

$$f(x) = (C_1 + C_2 x) e^{-x}, \quad C_1, C_2 = \text{arbitr.}$$

$f(0)=0$  şartında  $C_1 = 0$  bulunur.  $f(1)=0$  ise  $C_2 e^{-1} = 0$  bulunur. Bunun anlamı

$C_2 = 0$  demektir. Bu da  $f(x)=0$  olmasını gerektirir. Böylece  $\lambda=1$  bir öz değer değildir.



(iii) Eğer  $\lambda > 1$  ise bu durumda denklemin genel çözümü;

$$f(x) = e^{-x} [C_1 (\cos(\sqrt{\lambda - 1}x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda - 1}x)) \quad C_1, C_2 = \text{const}$$

$f(0)=0$  olduğundan  $C_1 = 0$  bulunur ve diğer şarttan  $f(1)=0$  dır.

Böylece

$$C_2 e^{-1} \sin \sqrt{\lambda - 1} = 0 \text{ dır.}$$

Sıfırdan farklı çözümler için

$$\sin \sqrt{\lambda - 1} = 0$$

Diğer bir ifadeyle,

$$\sqrt{\lambda - 1} = n\pi \quad n = 1, 2, \dots \text{ olmalıdır.}$$

Buradan da problemin özdeğerleri

$$\lambda_n = n^2 \pi^2 + 1, \quad n = 1, 2, \dots \text{ olup}$$

buna karşılık gelen özfonksiyonlar ise

$$f_n(x) = e^{-x} \sin(\sqrt{\lambda_n - 1} x) = e^{-x} \sin(n\pi x), \quad n = 1, 2, \dots$$

#### **Teorem 4.1.19.**

(i) Her  $\lambda_n, n = 1, 2, \dots$  özdeğerine karşılık gelen lineer bağımsız yalnız bir tek  $f_n$  öz fonksiyonları vardır.

(ii)  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  öz fonksiyonlar dizisi tamdır. Yani  $[a, b]$  aralığında parçalı düzgün herhangi  $u$  fonksiyonu

$$u(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (4.1.9)$$

formunda genelleştirilmiş Fourier serisine açılabilir.

Bu seri  $a < x < b$  için  $\frac{1}{2} [u(x+) + u(x-)]$  serisine noktasal yakınsar.

$c_n$  katsayıları Teorem (4.1.19) ve Teorem 4.178 (iii)'de verilen özelliklerin yardımıyla hesaplanır. Böylece (4.1.9) da  $f_m(x)\sigma(x)$  ile çarpılıp  $[a,b]$  üzerinde integrali alınırsa

$$\begin{aligned} \int_a^b u(x) f_m(x) \sigma(x) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_a^b f_n(x) f_m(x) \sigma(x) dx \\ &= c_m \int_a^b f_m^2(x) \sigma(x) dx \end{aligned}$$

elde edilir.  $m$  ile  $n$  yer değiştirirse,

$$c_n = \frac{\int_a^b u(x) f_n(x) \sigma(x) dx}{\int_a^b f_n^2(x) \sigma(x) dx}, \quad n=1,2,\dots \quad (4.1.10)$$

yazabiliriz.

$\sigma(x) > 0$  ve (4.1.2) – (4.1.4) den dolayı  $f_n$  çözümleri sıfırdan farklı olduğu için (4.1.10)'daki alt indisler herhangi bir  $n$  için sıfır olamaz.

## 4.2. Diğer Sturm-Liouville Problemleri

Pek çok önemli Sturm-Liouville problemleri düzgün değildir. Öncelikle periyodik S-L problemini tanımlayalım

### Tanım 4.2.1

Tanım (4.1.8)'deki notasyonlar yardımıyla,

$$f(a) = f(b), \quad f'(a) = f'(b) \quad (4.2.1)$$

koşullarıyla (4.1.2) denklemini çözdüğümüzde bir özdeğer problemi oluşmaktadır. Bu probleme periyodik Sturm-Liouville problemi denir.

#### Yorum 4.2.2

(4.1.5)'te tanımlanan  $L$  diferansiyel operatörü olmak üzere (4.2.1) koşuluyla verilmiş fonksiyonlar simetrikler. Böylece Teorem (4.1.7) tekrar uygulanabilir. Bununla birlikte Düzgün Sturm - Liouville probleminin aksine aynı özdeğere karşılık gelen iki tane Lineer bağımsız öz fonksiyon vardır.

#### Örnek 4.2.3

$$f''(x) + \lambda f(x) = 0, \quad -L < x < L$$

$$f(-L) = f(L), \quad f'(-L) = f'(L)$$

$$p(x) \equiv 1, \quad q(x) \equiv 0, \quad r(x) \equiv 1, \quad a = -L \text{ ve } b = L, \quad L > 0$$

olan periyodik Sturm-Liouville problemini göz önüne alalım.

Yukarıdaki sınır koşullarını ve (4.1.6)'yı kullanarak (4.1.7)'deki eşitsizliğe ulaşabiliriz. Örnek 4.1.16'daki gibi  $\lambda = 0$  durumunu hariç tuttuğumuz zaman hem sınır koşulları, hem de sabit çözüme karşılık gelen çözümü elde ederiz.

Böylece problemimiz

$$\lambda = 0, \quad f_0(x) = 1$$

özdeğer öz fonksiyon çiftine sahiptir.

$\lambda = 0$  ise denklemin genel çözümü,

$$f(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda} x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda} x), \quad C_1, C_2 = \text{arbitrarily}$$

türev olarak

$$f'(x) = -\gamma_1 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda} x) + \gamma_2 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda} x)$$

Sınır koşulları ve  $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$  ve  $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$  özellikleri kullanılarak,  $C_1$  ve  $C_2$  'nin

$$C_1 \cos(\sqrt{\lambda} L) - \gamma_2 \sin(\sqrt{\lambda} L) = \gamma_1 \cos(\sqrt{\lambda} L) + \gamma_2 \sin(\sqrt{\lambda} L),$$

$$C_2 \sin(\sqrt{\lambda} L) + \gamma_2 \cos(\sqrt{\lambda} L) = -\gamma_1 \sin(\sqrt{\lambda} L) - \gamma_2 \cos(\sqrt{\lambda} L),$$

sistemini sağladığı görülür.

Böylece

$$C_1 \sin(\sqrt{\lambda} L) = 0, \quad C_2 \sin(\sqrt{\lambda} L) = 0$$

elde ederiz

Sıfırdan farklı çözümler aradığımız için  $\sin(\sqrt{\lambda} L) \neq 0$  alamayız. Çünkü bu  $C_1 = C_2 = 0$  yani  $f(x) = 0$  dır.  $\sin(\sqrt{\lambda} L) = 0$  alınmalıdır. Yukarıdaki alıştırmalardan da görüldüğü gibi,

$$\lambda_n = \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2, \quad n=1,2,\dots$$

özdeğerlerine sahiptir.  $C_1$  ve  $C_2$  'nin her ikisi birden keyfi olduğundan genel çözümden  $(C_1 = 1, C_2 = 0)$  ve  $(C_1 = 0, C_2 = 1)$  alarak her  $\lambda_n$

$$f_{1n}(x) = \frac{\cos n\pi x}{L}, \quad f_{2n}(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n=1,2,\dots$$

lineer bağımsız iki fonksiyon elde edilir. Bu fonksiyonlar  $[0, L]$  de ortogonaldir. Buna göre (4.1.9) açılımı,

$$\begin{aligned} u(x) &\sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n f_{1n}(x) + b_n f_{2n}(x) \right] \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Bu  $u$  'nun Fourier serisidir. (4.1.10) yardımıyla  $\sigma(x)=1$  olmak üzere,  $a_0, a_n$  ve  $b_n$  hesaplanabilir.  $a=-L$ ,  $b=L$  alarakta (3.1.7), (3.1.8) ve (3.1.9) ile verilen ifadeleri elde edilir.

#### Tanım 4.2.4

(4.1.2) şeklindeki bir öz değer probleminde

(i)  $p(a) = 0$  veya  $p(b)=0$  ya da  $p(a)=0, p(b)=0$

(ii)  $x \rightarrow a^+$ , veya  $x \rightarrow b^-$  iken  $p(x)$ ,  $q(x)$  ve  $\sigma(x)$ 'den herhangi biri sonsuz veya ikisi

(iii)  $(a,b)$  aralığında  $a$  ve  $b$ 'den birisi sonsuz veya her ikisi sonsuz.

bir veya birkaç tanesi sağlıyorsa bu durumda tekil Sturm-Liouville problemi denir

Tekil Sturm-Liouville probleminin verilmesi durumunda (4.1.5) ile tanımlı  $L$  operatörüne uygun olarak bazı yeni sınır koşulları seçilmesi gerekir ki bunlar simetrik olabilir. Örneğin  $p(a)=0$  fakat  $p(b) \neq 0$  bu durumda  $f(x)$  ve  $f'(x)$ ,  $x \rightarrow a^+$  sınırlı olması gerekir ve (4.1.4) sağlanabilir. Diğer taraftan denklemin sağlandığı aralıktan  $(a, \infty)$  formunda olabilir. Bu durumda  $x \rightarrow \infty$  iken  $f(x)$  ve  $f'(x)$ 'in sınırlı olması gerekir ve (4.1.3)'ü sağlamak zorundadır.

#### Örnek 4.2.5.

$$x.f''(x) + f'(x) + \lambda f(x) = 0, \quad 0 < x < 1 \quad (4.2.2)$$

$$x \rightarrow 0 \text{ iken } f(x), f'(x) \text{ sınırlıdır. } f(1)=0 \quad (4.2.3)$$

Tekil Sturm-Liouville problemini göz önüne alınır. (4.2.2) denklemi  $p(x)=x$ ,  $q(x)=0$  ve  $\sigma(x)=x$  alınarak, (4.1.2)'den elde edilebilir. (4.2.3)'ü hesaplanarak,

$$p(x)(f')^2(x) - q(x)f^2(x) = x(f')^2(x) \geq 0, \quad 0 < x < 1$$

$$\int_0^1 p(x)f(x)f'(x)dx = \int_0^1 f(x)f'(x)dx = f(1)f'(1) - \lim_{x \rightarrow 0} xf(x)f'(x) = 0$$

olduğu görülür. Sonuç olarak (4.1.6)'dan

$$\lambda = \frac{\int_0^1 x(f')^2(x)dx}{\int_0^1 xf^2(x)dx} \geq 0$$

elde edilir. Bu formülden de görüldüğü gibi  $\lambda=0$  olması için gerek ve yeter koşul  $0 < x \leq 1$  aralığında  $f'(x) = 0$  yani  $f(x) = \text{sabit}$  olduğu anlamına gelir. Fakat  $f(1)=0$  sınır koşulundan

dolayı bu imkânsızdır. Yani  $f$  sıfır çözümüne sahiptir. Bu da öz fonksiyon tanımıyla çelişkilidir. Bu yüzden  $\lambda > 0$  almak zorundadır.

$$\xi = \sqrt{\lambda}x \text{ ve } f(x) = g(\xi/\sqrt{\lambda}) = g(\xi)$$

ve (4.2.2)'den

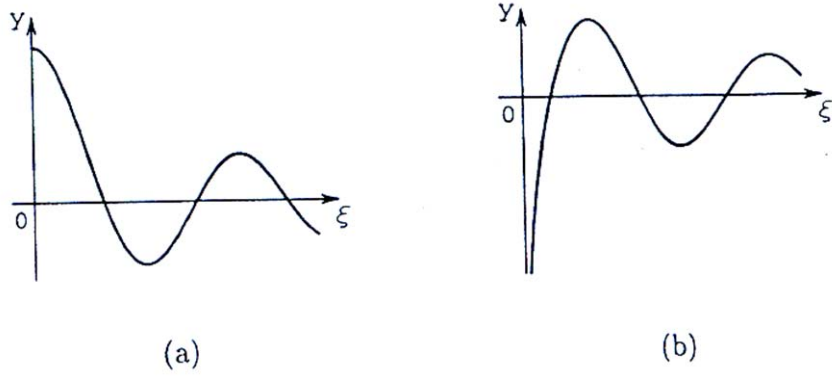
$$\xi g''(\xi) + g'(\xi) + \xi g(\xi) = 0, \quad (4.2.4)$$

elde edilir. Buna sıfırcı dereceden Bessel denklemi denir. Bu denklem  $J_0(\xi)$  ve  $Y_0(\xi)$  lineer bağımsız çözümlerine sahiptir ki bunlara sırasıyla 1. ve 2. çeşit sıfırcı dereceden Bessel fonksiyonu denir. (Şekil 4.2) Böylece (4.2.4)'ün genel çözümü,

$$g(\xi) = C_1 J_0(\xi) + C_2 Y_0(\xi), \quad C_1, C_2 = \text{bt}$$

Bunun anlamı verilen özdeğer probleminin genel çözümü,

$$f(x) = C_1 J_0(\sqrt{\lambda}x) + C_2 Y_0(\sqrt{\lambda}x), \quad C_1, C_2 = \text{bt}$$

Fig. 3.2. (a)  $J_0(\xi)$ ; (b)  $Y_0(\xi)$ .**Şekil 4.2.**

$\xi \rightarrow 0 +$  iken  $Y_0(\xi)$  sınırsız olabilir. Böylece (4.2.3) deki birinci koşuldan ,  $C_2 = 0$  sağlanır. İkinci koşuldan  $C_1 J_0(\sqrt{\lambda} x) = 0$  sıfırdan farklı çözümler aradığımız için

$$J_0(\sqrt{\lambda} x) = 0$$

olmalıdır.

$J_0(\xi)$  fonksiyonu sonsuz sayıda çözüme sahip olabilir ki,  $\xi_n$  dizisinde  $n=1,2,\dots$

$n \rightarrow \infty$  iken  $\xi_n \rightarrow \infty$ . Bu yüzden tekil Sturm Liouville problemi

$$\lambda = \xi_n^2, \quad f_n(x) = J_0(\xi_n x), \quad n = 1, 2, \dots \text{ özdeğer ve öz fonksiyon çiftine sahiptir.}$$

Yani  $u$  parçalı sürekli fonksiyonu

$$u(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0(\xi_n x), \quad 0 < x < 1$$

şeklinde genelleşmiş Fourier serisi açılımına sahiptir. Burada

$$C_n = \frac{\int_0^1 x u(x) J_0(\xi_n x) dx}{\int_0^1 x J_0^2(\xi_n x) dx}, \quad n=1, 2, \dots$$

ve her  $x$  noktasında  $u$  sürekli ise bu seri  $u(x)$ 'e yakınsar.

Fourier serileri için geçerli olan tüm aralıklar genelleşmiş Fourier serisi için de geçerlidir. Özel olarak basitlik için parçalı düzgün bir fonksiyon ile onun genelleşmiş Fourier serisi arasında bir eşitlik simgesi kullanabiliriz. Eğer eşitlik sağlanmadığı zaman( bu sonlu sayıda olabilir) fonksiyon sıçramalı süreksizliğe sahiptir.



## 5. MATEMATİK FİZİĞİN ÜÇ TEMEL DENKLEMİ

Gerçek dünyadaki süreçlerin ve olayların büyük bir kısmı, matematiksel modeller kullanılarak modellenmiştir. Bu tipteki bir araştırma genellikle üç bölümden oluşur.

(i) Bu model, süreçteki fiziksel parametreler arasındaki niceliksel ilişkileri tanımlamak için matematiksel ifadeler yoluyla kurulur.

(ii) Modelin denklemleri, değişik matematiksel metodlar kullanılarak çözülür.

(iii) Matematiksel sonuçlar, doğal süreçteki fiziksel noktalarla karşılaştırılarak yorumlanır.

Bu bölümde, kısmi diferansiyel denklemler içeren üç basit ama aynı zamanda temel matematiksel modelin nasıl kurulduğunu gösterilecektir. Bu modellerin her biri ikinci dereceden lineer kısmi diferansiyel denklemlerin tüm sınıfını temsil ettiğinden dolayı, önemlidir.

**Tanım 5.1** Birkaç değişkene bağlı bilinmeyen bir fonksiyon ve bu fonksiyonun bir veya daha fazla kısmi türevini içeren denkleme, kısmi diferansiyel denklem denir.

### 5.1. Isı Denklemi

#### Bir boyutlu çubuk içindeki ısı iletimi :

Bir ince silindir şeklinde çubuktaki ısı iletimini göz önüne alınırsa bu durumda aşağıdaki fiziksel parametrelerle tanımlanabilir.

L: uzunluk;

A: kesitsel alan, (bu sabit olarak kabul edilir);

E (x,t): ısı enerjisi yoğunluğu (birim hacimdeki ısınma enerjisi)

$q(x,t)$ : ısı akışı (birim zamanda sağa akan, birim alandaki ısı enerjisi)

$q(x,t)$ ; ısı kaynakları ve kuyuları (birim zamandan çubuğun içinde oluşturulan veya kaybedilen birim hacimdeki ısı enerjisi).

Daha sonra çubuğun yan (silindirik) yüzeyinin yalıtılmış olduğunu kabul edersek, diğer bir deyişle, herhangi bir ısı alış verişi bu yüzey üstünde meydana gelmemektedir.

Bu durumda matematiksel modeli oluşturmakta kullanılan fiziksel kanun, Isı Enerjisinin Korunumu kanunudur ki bu şu şekilde ifade edilebilir:

Gövdedeki ısı enerjisindeki değişim oranı=Birim zamandaki sınırlardan geçen ısı akışı

+ birim zamandaki kaynaklar tarafından oluşturulan ısı



**Şekil. 5.1.**

x-ekseni üstünde  $x=a$  ve  $x=b$  arasında çubuğun herhangi bir uzunluğu için bu kanun

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_a^b E(x,t) A dx &= [\varphi(a,t) - \varphi(b,t)] A + \int_a^b q(x,t) A dx \\ &= - \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x,t) A dx + \int_a^b q(x,t) A dx, \quad t > 0. \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir.

A'ya bölerek ve tüm terimleri sol tarafa aktararak,  $t > 0$  ve herhangi  $a, b$ ,  $0 < a < b < L$  için,

$$\int_a^b [E_t(x,t) + \varphi_x(x,t) - q(x,t)] dx = 0.$$

buluruz.

a ve b'nin keyfi sabitler olduğundan

$$E_t(x,t) = -\varphi_x(x,t) + q(x,t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0. \quad (5.1.1)$$

elde edilir.

Bu çubuk için daha fazla fiziksel parametrelerin tanıtılması gereklidir. Sonuçta,

$u(x,t)$ : sıcaklık

$c(x)$ : özısı (kütlenin bir birimindeki sıcaklığı bir birim arttıran ısı enerjisi), kolaylık açısından, sıcaklıktan bağımsız olduğu kabul edilir

$K_0(x)$ : ısı iletkenliği, bu da sıcaklıktan bağımsız olduğu kabul edilir;

$p(x)$ : kütle yoğunluğu

Bu durumda,  $x=a$  ve  $x=b$  arasındaki çubuğun kesitinin içindeki toplam ısı enerjisi yukarıdaki gibi

$$\int_a^b E(x,t) A dx = \int_a^b c(x) p(x) u(x,t) A dx. \quad t > 0;$$

olup bunun anlamı

$$E(x,t) = c(x) \rho c u(x,t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (5.1.2)$$

dir.

Aynı zamanda, ısı iletimindeki Fourier'in kanununa göre

$$\varphi_x(x,t) = K_0(x) u_x(x,t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0. \quad (5.1.3)$$

dir.

(5.1.2.) ve (5.1.3)'ü kullanarak, şimdi (5.1.1) şeklinde ifade edilen ısı enerjisinin korunumunu

$$c(x)\rho \frac{\partial}{\partial t}u_t(x,t) = -K_0(x)u_x(x,t)|_x + q(x,t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0. \quad (5.1.4)$$

şeklinde yazabiliriz.

Çubuğun, düzgün olduğunu ( $c, g$  ve  $k_0$  sabit olması) ve içerde herhangi bir ısı kaynağının olmadığını yani  $\{q(x, t) \equiv 0\}$  kabul ederek, (5.1.4)'ü

$$u_t(x, t) = ku_{xx}(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0. \quad (5.1.5)$$

elde ederiz.

Burada  $k = K_0 / (cp) = \text{sabit}$ , çubuğun “Isı denklemidir”.

(5.1.5) denklemine, ısı (difüzyon) denklemi denir.

Eğer çubuktaki kaynaklar belirtilirse, o zaman bu denklem homojen olmayan

$$u_t(x, t) = ku_{xx}(x, t) + q(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

denkleme dönüşür.

### **Başlangıç koşulu:**

(5.1.5), zamana göre birinci dereceden bir denklem olduğu için sadece bir başlangıç koşuluna ihtiyaç vardır. Bu koşul

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L.$$

şeklinde verilir.

Bu, çubuktaki sıcaklığın başlangıç dağılımının belirli olması anlamına gelir.

### Sınır koşulları:

Bu denklem, uzay değişkenine göre ikinci derecedendir. Böylece iki sınır koşuluna gerek vardır. Fiziksel önemi olan  $x=0$  ve  $x=L$  son noktalarındaki bu koşulların üç ana tipi vardır.

(i) sıcaklığı, son noktaların birinde olabilir; örneğin

$$u(0, t) = \alpha(t), \quad t > 0.$$

(ii) Eğer çubuk, son noktaların birinde yalıtılmışsa, o zaman bu buradaki koşul ısı akışı sıfır olmalıdır. (5.1.3)'teki bakış açısıyla, buda  $u_x$  türevinin sıfıra eşit olmasına denktir.

Örneğin,

$$u_x(L, t) = 0, \quad t > 0$$

Daha genel olarak, eğer  $x=L$  son noktasından geçen ısı akışı tanımlanmışsa, yukarıdaki koşul

$$u_x(L, t) = \beta(t), \quad t > 0$$

olur.

(iii) Son noktalardan biri diğer ortam ile bağlantılı olduğu zaman, Newton'un soğuma kanununu kullanırız. Bu kanun, bu son noktadaki ısı akışının çubuğun sıcaklığıyla dışarıdaki ortam sıcaklığı arasındaki farkıyla orantılı olduğunu söyler.

Örneğin,

$$-K_0 u_x(0, t) = H [u(0, t) - U(t)] \quad t > 0.$$

Burada,  $u(t)$ , dışarıdaki ortam sıcaklığını,  $H > 0$ , ısı transfer katsayısıdır. Isı akışının yönünü dikkate alan kabulden dolayı, diğer son noktada, bu tip koşul

$$-K_0 u_x(L, t) = H [u(L, t) - U(t)] \quad t > 0.$$

olur.

Bu koşulları kısaca şöyle yorumlayabiliriz

- (i) sadece bir sınır koşulu, her son noktada belirlenir.
- (ii)  $x=0$  daki sınır koşulu  $x=L$  dekinden farklı olabilir.
- (iii) ısı denkleminin lineer olduğu kolayca doğrulanabilir.

(iv) Bir boyutlu ısı denklemi, parabolik denklem olarak isimlendirilen denklemlerdeki en basit örnektir.

Gördüğümüz gibi, bir çubuk içindeki ısı iletimi için matematiksel model birkaç elemanı bulundurur.

#### **Tanım 5.1.1.**

Kısmi Diferansiyel Denklem (KDD) ve Başlangıç Koşulları (BK) ve bununla ilgili Sınır Koşulları (SK), Başlangıç Sınır Değer Problemini (BSDP) oluşturur. Eğer sadece BK veya SK belliyse, o zaman bu problem Başlangıç Değer Problemi (BDP) veya Sınır Değer Problemi (SDP) olur.

#### **Örnek 5.1.2.**

Kaynaklı, yalıtılmış yan yüzeyli ve her iki son noktadaki sıcaklığın bilindiği şekildeki bir boyutlu düzgün çubuktaki ısı iletimini modelleyen BSDP,

$$\begin{aligned}
 u_t(x,t) &= \alpha u_{xx}(x,t) + q(x,t), & 0 < x < L, t > 0. \\
 u(0,t) &= \alpha_1 t, \quad u(L,t) = \beta t, & t > 0, \\
 u(x,0) &= f(x), & 0 < x < L
 \end{aligned}$$

Burada  $q$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  ve  $f$  verilen fonksiyonlardır.

### Örnek 5.1.3.

Eğer yakındaki son nokta yalıtılmış ve uzaktaki sabit sıfır sıcaklıklı bir ortam içinde tutuluyor, ve eğer çubuk hiçbir kaynak içermiyorsa, o zaman buna karşılık gelen problem

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= \gamma u_{xx}(x,t), & 0 < x < L, & t > 0. \\ u(0,t) &= \gamma u_x(L,t) + \gamma u(L,t) = \beta(t), & t > 0, \\ u(x,0) &= f(x), & 0 < x < L, \end{aligned}$$

olur. Burada,  $\beta$  ve  $f$  verilen fonksiyonlar ve  $\gamma$  bilinen pozitif bir sabittir.

### Tanım 5.1.4

Bir BSDP'nin klasik bir çözümünden, problemin kurulduğu bölgedeki her yerde noktasal şekilde KDD, SK ve BK'yı sağlayan  $u(x,t)$  fonksiyonunu göstermektedir. Eğer veri fonksiyonları belli bir düzgünlük derecesine ancak sahipse, BSDP'nin çözümlerinin olduğu anlaşılabilir.

### Örnek 5.1.5

Örnek 5.1.2.'deki  $q, \gamma, B$  ve  $f$ 'nin sürekli fonksiyonlar olduğunu kabul edelim. Bu BSDP'nin bir çözümü aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- (i)  $t$ 'ye göre sürekli türevlenebilir ve  $G = \{(x,t) : 0 < x < L, t > 0\}$  te tanımlanan  $(x,t)$ - düzlemi içindeki tanım kümesinin (yarı sonsuz bant) tüm noktalarda  $x$ 'e göre iki kez sürekli türevlenebilir ve  $G$  içinde tüm noktalarda KDD'i sağlar.

- (ii) Sürekliliği,  $G$ 'nin mekansal sınır doğrularına, açıkça

$$\partial G_x = \{(x,t) : x = 0, t > 0 \text{ veya } x = L, t > 0\}$$

iki yarı doğrusuna genişler ve  $\bar{G} \setminus \partial G_x$  üstünde tüm noktalarda SK'nu sağlar.

- (iii) Sürekliliği, aynı zamanda  $G$ 'nin zaman belirten sınır doğrusu

$$\partial G_t = \{(x,t) : 0 < x < L, t = 0\}$$

genişler ve  $\tau \rightarrow \tau_0$  üstündeki tüm noktalarda BK'nu sağla

(i) örnek 4.7'de G'nin köşe noktaları (0,0) ve (L,0) da u'nun davranışıyla olarak  
eğer 
$$\lim_{t \rightarrow 0} u(0,t) = \lim_{x \rightarrow 0} u(x,0),$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(L,t) = \lim_{x \rightarrow L} u(x,0)$$

ise, o zaman yukarıdaki limitlerin ortak değerinden (0,0) da u(x) tanımlanabilir. Diğer taraftan, eğer iki limit birbirinden farklıysa, o zaman, klasik durumda, (0,0)'da u tanımlanamaz.

(ii)  $\tau \rightarrow \tau_0$  üstünde  $(x_0,0)$  noktasında f'nin sıçramalı süreksizlinin olduğunu kabul edelim. Bu durumda, klasik durumdaki gibi bu noktada BK'nu sağlayan bir u çözümünü bulmak imkansızdır, ama bazı 'ortalama' yolla buna imkan veren bu tipte bir çözüm bulunabilir.

(iii) Bir çözümün tanımı, benzer şekilde ikiden fazla bağımsız değişkenli BSDP'ne genelleştirilebilir.

### **Teorem 5.1.6.**

Eğer  $u_0, f$  ve  $f$  fonksiyonları yeterince düzgün olacak şekilde  $u, u_x, u_t$ , ve  $u_{xx}$  G'de, G'nin sınırına kadar, iki köşe noktasını içerecek şekilde, sürekli ise, o zaman Örnek 5.1.2'deki BSDP en fazla bir çözüme sahiptir.

**İspat.** Problemin  $u_1$  ve  $u_2$  diye iki çözümünün olduğunu kabul edilir. O zaman, lineerlikten dolayı tamamen homojen BSDP'nin  $u = u_1 - u_2$  diye bir çözümünün olduğu kolayca görülür. Açıkça, T>0 sabit sayı olmak üzere u fonksiyonu

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= u_{xx}(x,t), & 0 < x < L, 0 < t < T, \\ u(0,t) &= 0, \quad u(L,t) = 0, & 0 < t < T, \\ u(x,0) &= 0, & 0 < x < L. \end{aligned}$$

denklemini sağlar

KDD'yi u ile çarparak,  $[0,L]$  aralığında integrallersek SK'nu ve,  $0 \leq t \leq T$  ve  $0 \leq x \leq L$  için, çözümlerin düzgünlük özelliğini kullanarak,



$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^L (uu_t - kuu_{xx}) dx = \int_0^L \left[ \frac{1}{2} (u^2)_t - k(uu_x)_x + ku_x^2 \right] dx \\
&= \int_0^L \left[ \frac{1}{2} (u^2)_t + ku_x^2 \right] dx - k \left[ uu_x \right]_{x=0}^{x=L} = \int_0^L \left[ \frac{1}{2} (u^2)_t + ku_x^2 \right] dx,
\end{aligned}$$

bulunur.

Sonuçta,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L u^2 dx = -k \int_0^L u_x^2 dx \leq 0, \quad t > 0,$$

ki bu

$$W(t) = \int_0^L u^2(x, t) dx, \quad 0 \leq t \leq T,$$

fonksiyonun artıp artmadığı anlamına gelir.  $W(t) \geq 0$  ve  $W(0) = 0$  (u tarafından BK sağlandığından) dolayı, yalnızca  $W(t) = 0$  olduğu durumda bu mümkündür. Yukarıdaki  $W$ 'nin tanımında negatif olmayan integral için yola çıkarak,  $u(x, t) = 0$  olduğu bulunur. Diğer bir ifadeyle  $u_1$  ve  $u_2$  çözümleri çakışiktır.

(i) Teorem 5.1.6, eğer örnek 5.1.2'deki BSDP'nin çözümü var ise, o zaman bu çözümün tek olduğunu söyler.

(ii) teorem 5.1.6'daki çözümün gerekli özellikleri, örnek 5.1.5.'de belirtilenlerden daha güçlüdür.

(iii) SK'nun diğer tipleriyle tanımlanan BSDP'nin çözümleri için teklik ayrıca ispatlanabilir.

(iv)

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \tau = \frac{k}{L^2} t, \quad u(x, t) = u(L\xi, L^2\tau/k) = u(\xi, \tau)$$

değişkenlerin değişimi ısı denklemini

$$v_{\tau}(\xi, \tau) = v_{\xi\xi}(\xi, \tau), \quad 0 < \xi < \infty, \quad \tau > 0.$$

formuna getirdiği kolayca görülebilir.

Böylece, genel durum dışına taşmadan, uygulamaların çoğunda  $x, t$  ve  $u$  yerine göreceli olarak  $\xi, \tau$  ve  $v$  gibi daha basit olan bu gösterimi kullandık..

## 5.2. Laplace Denklemi

### Yüksek boyutlu ısı denklemi:

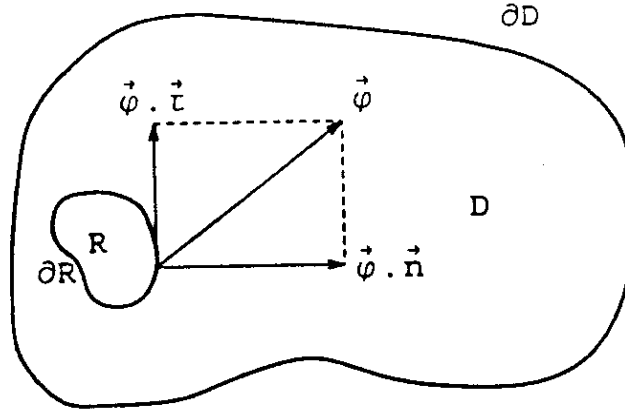
Kolaylık açısından, iki boyutlu durumu ele alınırsa,  $(x,y)$  düzlemi içinde, düzgün, basit, kapalı  $\Gamma$  eğrisiyle sınırlı, sonlu  $D$  bölgesini kaplayan, bir ısı-iletim cismini düşünersek ve düzgün  $\Gamma$  sınırı olan  $D$ 'nin keyfi bir elemanını  $R$  olarak ifade ettik.(şekil. 5.2) Isı denklemindeki gibi bu cismin fiziksel parametreleri için aynı gösterimleri kullanalım.

Isı akışı yöne bağlıdır, böylece burada ısı akışı,

$\vec{q}$  , normal bileşen + teğet bileşen,

$$= \vec{q} \cdot (\vec{\phi} \vec{n}) \vec{n} + \vec{q} \cdot (\vec{\tau}) \vec{\tau}, \quad |\vec{n}| = |\vec{\tau}| = 1,$$

formunda yazılabilir. Burada  $\vec{n}$  ve  $\vec{\tau}$  'nin birim normal ve teğet vektörleridir. Diğer bileşenlerin  $R$  ve cismin geri kalanı arasındaki ısı alış-verişine herhangi bir katkısı yoktur.



Şekil. 5.2.

Çubuktaki durum gibi, ısı enerjisinin korunumu,

Isı enerjisinin değişim oranı = birim zamanda sınırdan geçen ısı akışı

+ birim zamanda kaynaklar tarafından üretilen ısı

dır.

Bu matematiksel olarak

$$\frac{d}{dt} \int_R E(x, y, t) dA = - \int_{\partial R} \varphi(x, y, t) \cdot \vec{n}(x, y) ds + \int_R q(x, y, t) dA,$$

olup burada  $dA$  ve  $ds$  alanın ve eğri uzunluğunun elemanlarıdır. (4.2)'ye Divergence Teoremini uygulayarak,

$$\int_R \frac{d}{dt} \varphi(x, y, t) dA = \int_{\partial R} \varphi(x, y, t) \cdot \vec{n}(x, y) ds.$$

$$\int_R \left[ \rho(x, y) \frac{d}{dt} u_t(x, y, t) + \text{div} \vec{\varphi}(x, y, t) - q(x, y, t) \right] dA = 0.$$

gibi yeniden yazabiliriz.

$K$ 'nin keyfi olduğu göz önüne alınarak,  $(x, y)$ ,  $D$ 'nin içinde ve  $t > 0$  olacak şekilde

$$\rho(x, y) \frac{d}{dt} u_t(x, y, t) = - \text{div} \vec{\varphi}(x, y, t) + q(x, y, t). \quad (5.2.1)$$

çıkarılabilir.

Yeniden, ısı iletim Fourier kanununu kullanarak iki boyutta

$$\vec{q}(x, y, t) = -\kappa_0(x, y)(\text{grad} u)(x, y, t);$$

elde edilir.

$$c(x, y, t)\rho(x, y)u_t(x, y, t) = \text{div}(K_0(x, y)(\text{grad} u)(x, y, t)) + l(x, y, t).$$

olur.

İç noktalarda ısı kaynağı bulunmayan düzgün bir cisim ( $c, g$  ve  $K_0$  sabitler) için son formül ( $q(x, y, t) = 0$ )

$$u_t(x, y, t) = \lambda(\text{div grad} u)(x, y, t), \quad k = \frac{K_0}{c\rho} = \text{sabit},$$

veya

$$u_t(x, y, t) = k(\Delta u)(x, y, t), \quad (x, y) \in D, t > 0. \quad (5.2.2)$$

olup

$$(\Delta u)(x, y) = u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y).$$

şeklinde tanımlanan  $\Delta$  diferansiyel operatörü, Laplasiyan diye adlandırılır, (5.2.2) eşitliği iki boyutlu ısı (difüzyon) denklemdir.

Eğer cisim dış kaynak içeriyorsa, o zaman (5.2.2)'nin homojen olmayan denklem olup

$$u_t(x, y, t) = k(\Delta u)(x, y, t) + q(x, y, t), \quad (x, y) \in D, t > 0.$$

şeklinde ifade edilir.

### **Başlangıç koşulu:**

Burada

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad (x, y) \in D$$

formunda ve cisim içinde sıcaklığın başlangıç dağılımını gösterir.

**Sınır Koşulları:** SK'nın ana tipleri çubuk için olanlarla aynı olup

(i) Sınır üstünde sıcak belli olduğu zaman,

$$u(x, y, t) = \alpha(x, y, t), \quad (x, y) \in D, \quad t > 0.$$

Dirichlet sınır koşulu olarak adlandırılır.

(ii) Eğer sınırdan geçen akı biliniyorsa, o zaman

$$(grad u)(x, y, t) \cdot \vec{n}(x, y) = \beta(x, y, t), \quad (x, y) \in D, \quad t > 0.$$

veya

$$u_n(x, y, t) = \beta(x, y, t), \quad (x, y) \in D, \quad t > 0,$$

olarak ifade edilir. Burada  $\vec{n}$ ,  $\partial D$ 'nin birim dış normali ve  $u_n = \nabla u \cdot \vec{n}$ 'dir.

Bu koşula Neumann Sınır Koşulu denir. Özellikle, sınır yalıtılmış olduğunda

$$u_n(x, y, t) = 0, \quad (x, y) \in D, \quad t > 0.$$

koşul kullanılır.

(iii) Newton'un soğuma kanunu

$$-\zeta_0 (grad u)(x, y, t) \cdot \vec{n}(x, y) = H[u(x, y, t) - T_0(x, y)], \quad (x, y) \in D, \quad t > 0.$$

şeklinde olup buna Robin sınır koşulu denir.

Bazen sınırın bir kısmında bir tip diğer kısmında başka tipine koşul verilebilir.

**Denge sıcaklığı:** Denge (kararlı durum) sıcaklığı, (5.2.2)'nin zamandan bağımsız hali olup bu durumda Isı denklemi,

$$(\Delta u)(x, y) = 0, \quad (x, y) \in D,$$

Laplace denklemini verir.

$$u(x, y) = \alpha(x, y), \quad (x, y) \in \partial D.$$

Eğer  $q(x, y)$  kararlı durum kaynağı cisimde belirtilmişse, o zaman denge sıcaklığı

$$(\Delta u)(x, y) = -\frac{1}{k} q(x, y), \quad (x, y) \in D.$$

Poisson denklemini sağlar. Bundan sonra Poisson denklemi, yani homojen olmayan Laplace denklemi, ele alındığında,  $q$  kaynak terimi içinde bulunduğunu varsayarak sağ tarafta bulunan  $\frac{-q}{k}$  çarpımı alınmayabilir.

### Yorum 5.2.1.

Laplace denklemi ile ilgili birkaç özellik şu şekilde verilebilir.

(1)  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  kutupsal koordinatlarda

$$u = u(r, \theta), \quad u_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad u_{rr} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \quad \text{ve} \quad u_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \quad \text{olacak şekilde,}$$

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} \quad \text{olur.}$$

(2)  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$   $z$  silindir koordinatlarda, Laplasiyan

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta}$$

formunu alır.

(3) Dairesel simetrik problemlerde,  $u$  fonksiyonu  $\theta$  dan bağımsızdır, böylece

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + u_{zz} = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + u_{zz}.$$

olur.

(4) Laplace ve Poisson denklemleri lineerdir.

(5) Laplace denklemi, eliptik denklemler olarak bilinen denklemlerin en basit örneğidir.

### Örnek 5.2.2.

Kaynaklı, yalıtılmış üst ve alt yüzeyli ve sınırdaki sıcaklığı bilinen düzgün sonlu levhadaki denge sıcaklık dağılımı,  $\mathcal{D}$  basit kapalı eğri olacak şekilde,

$$\begin{aligned} \Delta u(x, y) &= f(x, y), & (x, y) &\in \mathcal{D}, \\ u(x, y) &= \alpha(x, y), & (x, y) &\in \mathcal{D}^c, \end{aligned}$$

SDP olarak verilir. Levhanın geometrisine bağılı olarak ya kartezyen veya kutupsal koordinatlarda Laplasiyan yazılır.

Örnek 5.2.2'deki SDP'nin klasik çözümü aşağıdaki özelliklere sahiptir.

- (i)  $D$ 'de iki kez sürekli türevlenebilir ve  $D$ 'de her noktada KDD'yi sağlar.
- (ii)  $D$ 'nin sınırı olan  $\partial D$ 'ye kadar sürekli ve  $\partial D$ 'deki her noktada SK'yı sağlar.

### **Teorem 5.2.3**

Eğer  $u$ , örnek, 5.2.2'deki BSDP'nin bir çözümü ise, o zaman  $u$ ,  $D$ 'nin  $\partial D$  sınırında maksimum ve minimum değerlerini alır.

**İspat.** Dairesel bir diskin merkezinde sıcaklığın, sınır çemberi üstündeki sıcaklığın ortalamasına eşit olduğunu ispatlayalım.

Denklemin çözümünün maksimumu  $D$ 'nin içinde bir  $P$  noktasında olsun.  $D$ 'nin içinde küçük bir diskin merkezini  $P$  olarak düşünerek,  $P$ 'deki  $u$ 'nun değerini, bu diskteki sınır çemberin üstündeki  $u$ 'nun tüm değerlerinin ortalaması olduğu söylenebilir. Böylece  $u$ , bu değerlerin hiçbirinden büyük olamaz. Sonuçta, bir çelişkiye ulaşılır bu da  $u$ 'nun maksimumun  $\partial D$  sınırında olduğunu söyler.

$v$  olarak düşünerek,  $u$ 'nun minimumunda aynı zamanda  $\partial D$  üstünde olduğu gösterilebilir.

Bu sonuç, Laplace denklemi için Maksimum Prensibi olarak bilinir.

### **Sonuç 5.2.4.**

Eğer örnek de SDP'nin çözümü  $\partial D$  üstünde sıfıra eşit ise,  $u$ 'da aynı zamanda  $D$  içinde de sıfıra denktir.

**İspat.**

Teorem 5.2.3.'ten,  $u$ 'nun maksimumu ve minimumu sıfırdır. Çünkü her ikisi de  $\partial D$ 'nin noktalarındadır. Böylece  $u$ ,  $D$ 'de sıfırdır.

### **Teorem 5.2.5.**

Örnek 5.2.2'deki SDP en fazla bir çözüme sahiptir.

**İspat.**  $u_1$  ve  $u_2$  diye iki çözümün var olduğunu kabul edelim. KDD ve SK'nin lineerliğinden  $u = u_1 - u_2$  farkı

$$\begin{aligned} (\Delta u)(x, y) &= 0, & (x, y) &\in \Omega, \\ u(x, y) &= 0, & (x, y) &\notin \Omega; \end{aligned}$$

tamamen homojen SDP'nin bir çözümüdür. 4.15'ten,  $u(x, y) \equiv 0$  olup manası  $u_1 = u_2$  dir.

#### Tanım 5.2.6.

Küçük bir değişimi çözümde sadece küçük bir değişime sebep oluyorsa, SDP'nin çözümüne sınır verilerine bağımlıdır denir.

#### Teorem 5.2.7

Örnek 5.2.2'deki SDP'nin çözümü, sınır verisine sürekli bağımlıdır.

**İspat.**

SDP

$$\begin{aligned} (\Delta u)(x, y) &= f(x, y), & (x, y) &\in \Omega, \\ u(x, y) &= \varphi(x, y), & (x, y) &\in \Gamma, \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (\Delta v)(x, y) &= f(x, y), & (x, y) &\in \Omega, \\ v(x, y) &= \varphi(x, y) + \varepsilon \psi(x, y), & (x, y) &\in \Gamma, \end{aligned}$$

verilsin. Burada  $\varepsilon, \psi$  sınır fonksiyonun küçük bir pertürbasyondur. O zaman, KDD ve SK'nin lineerliğinden  $w = v - u$  nin

$$\begin{aligned} (\Delta w)(x, y) &= 0, & (x, y) &\in \Omega, \\ w(x, y) &= \varepsilon \psi(x, y), & (x, y) &\in \Gamma, \end{aligned}$$

sağladığı görülebilir.

Teorem 5.2.3'ten,



$$\min \varepsilon(x, y) \leq v(x, y) = u(x, y) - \phi(x, y) \leq \max \varepsilon(x, y), \quad (x, y) \in \Omega;$$

dir.

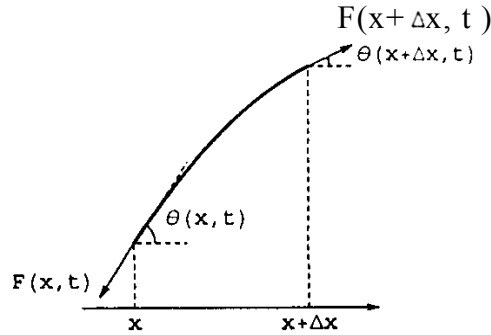
### Tanım 5.2.8.

Eğer SDP koşullara sürekli bağımlılığı olan tek bir çözümü varsa bu probleme iyi konulmuş problem denir.

Bundan sonraki konularda örnek 5.2.2'deki SDP için çözümü oluşturulur. Teorem 5.2.5'e göre, Laplace denklemi sadece tek çözüme sahiptir. Ayrıca Teorem 5.2.7'den, bu çözüm sınır verisine sürekli bağımlı olduğundan Dirichlet problemi iyi tanımlandığı bir problemdir denir.

### 5.3. Dalga Denklemi

**Titreşen Tel:** Sıkıca gerilmiş elastik bir teldeki düşünelim. Burada, teldeki noktaların yatay değişimi ihmal edilir.



Şekil 5.3.

Tel için aşağıdaki fiziksel parametreleri tanımlayalım.

L: uzunluk;

$u(x, t)$ : düşey değişim;

$\rho_0(x)$ : kütle yoğunluğu (birim uzunluktaki kütle),

$F(x, t)$ : serilim

$q(x, t)$ : birim kütledeki cisim kuvvetinin düşey bileşeni,

Denge pozisyonundan (x-ekseni boyunca [0,L] kısmında) düşey değişimi küçük kabul ederek ve Newton'un ikinci yasası olan

$$\text{kuvvet} = \text{kütle} \times \text{ivme}$$

yazarak  $x$  ve  $x+\Delta x$  e karşılık gelen iki yakın nokta arasında telin bir kısmı için düşey izdüşümünde, yaklaşık eşitliği

$$\rho(x)(\Delta u_{tt}(x,t) \cong T(x+\Delta x, t) \sin(\theta(x+\Delta x, t)) - T(x, t) \sin(\theta(x, t))) + \rho(x)(\Delta q(x, t).$$

olarak elde edilir.

Eğer  $\Delta x$  e bölüp  $\Delta x \rightarrow 0$  için limit alınırsa

$$\rho(x)u_{tt}(x,t) = [T(x,t) \sin(\theta(x,t))]_x + \rho(x)q(x,t). \quad (5.3.1)$$

elde edilir.

Küçük bir  $\theta$  açısı için, telin eğimi

$$u_x = \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta}{1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \dots} \cong \sin \theta$$

dır. Böylece (5.3.1)

$$\rho(x)u_{tt}(x,t) = [T(x,t)u_x(x,t)]_x + \rho(x)q(x,t). \quad (5.3.2)$$

formunda yeniden yazılabilir.

Tel elastik (yani,  $\theta$  küçük olduğu zaman  $F(x,t) \equiv T_0$  sabit alınır ve homojen  $p_0 = \text{sabit}$ ), ve cisim kuvvetini gerilimle karşılaştırıldığında ihmal edebileceğini ( $q(x,t) = 0$ ) kabul edersek, (5.3.2)'nin

$$u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (5.3.3)$$

dır. Burada  $c^2 = T_0 / \rho$  alınır.

Eğer cisim kuvveti ihmal edilemezse, (5.3.3)

$$u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t) + q(x,t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0.$$

şeklinde olur.

**Başlangıç koşulları:** (5.3.3) zamana göre ikinci dereceden olduğundan, iki başlangıç koşuluna gerek vardır.

Bunlar

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \quad 0 < x < L;$$

şeklindedir, yani telin noktalarının başlangıç pozisyonu ve hızı verilmektedir.

**Sınır koşulları:** Isı denklemindeki gibi, fiziksel şekilde anlamlı (5.3.3) içinde üç ana tipte SK vardır.

(i) Değişim son noktada bellidir, yani

$$u(L,t) = h(t).$$

(ii) Son nokta, serbest olabilir: (düşey gerilimi yoktur)

$$F_0 \sin \theta \cong F_0 \tan \theta = F_0 u_x = 0,$$

(iii) Son nokta, elastik bir eklentiye sahip olabilir, ki bu ;

$$F_0 u_x(0,t) = ku(0,t) \quad \text{veya} \quad F_0 u_x(L,t) = -ku(L,t), \quad t > 0,$$

k=sabit, olacak şekilde tanımlanır.

Dalga denklemi ile ilgili bazı özellikler aşağıdaki şekilde özetlenebilir.

(i) Dalga denklemlerinin SK'ları ile Isı denklemlerindekiler arasında açık bir benzerlik vardır.

(ii) Uç noktaların birinde tanımlanan koşul diğerinde tanımlanandan farklı olabilir.

(iii) Dalga denklemi lineerdir.

(iv) Bir boyutlu Dalga denklemi hiperbolik denklemin en basit örneğidir.

**Örnek 5.3.1.**

Ne zaman cisim kuvvetinin etkisine dikkat edildiğinde sabitlenmiş son noktalı titreşim bir tel için BSDP

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) &= c^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t), & 0 < x < L, \quad t > 0, \\ u(0,t) &= 0, \quad u(L,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) &= f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), & 0 < x < L, \end{aligned}$$

olur. Burada,  $q, f$  ve  $g$  verilen fonksiyonlardır.

**Örnek 5.3.2.**

Eğer Örnek 5.3.1'deki tel, yakındaki son noktada, serbest uzak son noktada ve ihmal edilen cisim kuvvetinde elastik bir eklentiye sahipse o zaman karşılık gelen BSDP,

$k$  bilinen pozitif sabit olmak üzere.

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) &= c^2 u_{xx}(x,t), & 0 < x < L, \quad t > 0, \\ u_t(0,t) - ku(0,t) &= 0, \quad u_x(L,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) &= f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), & 0 < x < L, \end{aligned}$$

Örnek 5.1.5'deki gibi tanım kümesi  $G$ 'yi ve sınır doğruları  $\partial^- G_x$  ve  $\partial^- G_t$  olsun.

Örnek 5.3.2'de BSDP'nin bir (klasik)  $u$  çözümü aşağıdaki özelliklere sahiptir.

- (i)  $G$  içinde  $x$ 'e ve  $t$ 'ye göre iki kere sürekli olarak türevlenebilir ve  $G$ 'nin her noktasında KDD'yi sağlar;
- (ii)  $\partial^- G_x$ 'e kadar birinci dereceden sürekli türevli ve  $\partial^- G_t$  üstündeki tüm noktalarda BK'nu sağlar.

Isı denklemi ve Laplace denklemiindeki durumda olduğu gibi koşullarda verilen fonksiyonların sıçramalı süreksizliklerinin bulunması, çözümün düzgünlüğünün azalmasına sebep olur.

**Teorem 5.3.3.**

Eğer  $q$ ,  $f$  ve  $g$  fonksiyonları, öyle olsun ki  $u$ , birinci türevi ve ikinci türevi, köşe noktaları  $(0,0)$  ve  $(L,0)$ 'ı içerecek şekilde  $G$ 'nin sınırına kadar sürekli ise, Örnek 5.3.1'deki BSDP'nin en fazla tek çözümü vardır.

### İspat.

Verilen BSDP,  $u_1$  ve  $u_2$  diye iki çözüme sahip olsun. O zaman,  $u = u_1 - u_2$  farkı

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) &= c^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < L, t > 0, \\ u(0,t) &= u(L,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) &= 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 < x < L. \end{aligned}$$

sağlar. KDD'yi  $u_t$  ile çarparak, çıkan sonucu  $[0,L]$  üstünde  $x$ 'e göre ve  $[0,T]$  üstünde, burada  $T > 0$  keyfi bir sabit sayı, integralini alıp, ve  $u$  için SK'yı kullanarak

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T \int_0^L (u_{tt} u_t - c^2 u_{xx} u_t) dx dt \\ &= \int_0^T \int_0^L \left[ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (u_t^2) - c^2 (u_x u_t)_x + c^2 u_x u_{xt} \right] dx dt \\ &= \int_0^T \int_0^L (u_{tt} u_t + c^2 u_x u_{xt}) dx dt - c^2 \int_0^T \left[ u_x u_t \right]_{x=0}^{x=L} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L (u_t^2 + c^2 u_x^2)_t dx dt = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ u_t^2 + c^2 u_x^2 \right]_{t=0}^{t=T} dx, \end{aligned}$$

olduğu görülür. Böylece,

$$\begin{aligned} &\int_0^L \left[ u_t^2(x,T) + c^2 u_x^2(x,T) \right] dx \\ &= \int_0^L \left[ u_t^2(x,0) + c^2 u_x^2(x,0) \right] dx \quad \text{herhangi } T > 0. \end{aligned}$$

Buradan

$$V(t) = \int_0^L (u_t^2 + c^2 u_x^2) dx = \kappa = \text{const} \geq 0. \quad t \geq 0.$$

dır.

SK ve BK'dan,  $V(0)=0$  olduğu anlaşılır,  $K=0$ ; diğer bir deyişle,  $V(t)=0$ ,  $V$ 'deki integralin içi negatif olduğundan, bunun ancak ve ancak

$$u_t(x,t) = 0, \quad u_x(x,t) = 0, \quad 0 \leq x \leq L, t \geq 0.$$

dır. Sonuçta,  $u$ ,  $G$ 'de ve sınır doğrularında sabittir. Bu doğrular üstünde,  $u$  sıfır olduğundan dolayı,  $u(x,t) = 0$  sonucuna ulaşılır, böylece  $u_1 = u_2$  dır..

#### Yorum 5.3.4.

(i) Isı ve Laplace denklemlerindeki gibi, bundan sonra, örnek 5.3.1'de değinilen BSDP için çözümü Teorem 5.3.3'ten, dolayı tektir.

(ii) Teklik, diğer SK'ları BSDP'lerin çözümleri için ayrıca ispatlanabilir.

$$(iii) \quad \xi = \frac{1}{L}x, \quad \tau = \frac{c^2}{L^2}t, \quad u(x,t) = v(L\xi, L\tau/c) = v(\xi, \tau)$$

dönüşümüyle Dalga denklemi

$$v_{\tau\tau}(\xi, \tau) = v_{\xi\xi}(\xi, \tau), \quad 0 < \xi < 1, \quad \tau > 0.$$

şekline indirgenebilir.

## 6. DEĞİŞKENLERE AYIRMA METODU

Değişkenlere ayırma metodu KDD problemlerinin belli çözümü için verilen en eski ve en etkili tekniklerden biridir.

Bu bölümde Isı ve Dalga denklemleri için başlangıç sınır değer problemlerine ve Laplace denklemi için sınır değer problemine uygulanan metodları verilecektir.

### 6.1. Isı Denklemi

**Uç noktalarda sıfır sıcaklı çubuk problemi:**

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= \kappa u_{xx}(x,t), & 0 < x < L, & t > 0, \\ u(0,t) &= 0, \quad u(L,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) &= f(x), & 0 < x < L, \end{aligned}$$

şeklinde verilir.

Denklemimiz ve sınır koşulları lineer ve homojen olduğundan

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

formunda bir çözümü arıyoruz. Eğer bu bir çözüm ise Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemi sağlamalı yani

$$X(x)T'(t) = \kappa X''(x)T(t) \quad .$$

Buradan

$$\frac{1}{\kappa} \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

bulunur.

Yukarıda sol taraf sadece t'nin bir fonksiyonu ve sağ taraf sadece x'in bir fonksiyonu olduğundan bu eşitlik, ancak ve ancak her iki tarafında bir ve aynı, - ∴ diye, bir sabite eşit olmasıyla mümkündür. Diğer bir ifadeyle ,

$$\frac{1}{\kappa} \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2 \quad .$$

dır. Bu, X ve T fonksiyonları için ayrışım denklemleri

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < L, \quad (6.1.1)$$

$$T'(t) + \lambda T(t) = 0, \quad t > 0 \quad (6.1.2)$$

ilk SK'dan

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0 \text{ her } t > 0 \text{ için}$$

görlür.

$T(t)=0$  olması imkansızdır. Çünkü bu bizi  $u(x,t) = 0$ 'a yani aşıkaz çözüme götürür.

$$X(0) = 0 \quad (6.1.3)$$

Benzer şekilde , ikinci başlangıç koşulu

$$X(L) = 0. \quad (6.1.4)$$

$X$  fonksiyonu (6.1.1), (6.1.3) ve (6.1.4) Sturm-Liouville probleminin çözümlüdür. Açıkça,  $X(x) = 0$ , bu problemin bir çözümlüdür, ama  $u(x,t) = 0$ 'a götürür ki bu bize bir şey ifade etmemektedir. Sonuçta, sıfır çözümlü olmayan bir  $X$  çözümlerini istiyoruz. Bu çözümler, Örnek 4.1.15'de hesaplanan  $\lambda_n$  özdeğerleri

$$\lambda_n = \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2, \quad X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.1.5)$$

karışık gelen  $X_n$  öz fonksiyonlarıdır. Her bir  $\lambda_n$  için, (6.1.2)'den,

$$T_n'(t) = -(\lambda_n/L)^2 t \quad (6.1.6)$$

bulunur.

Rayleigh bölümünü kullanmayan hiçbir  $\lambda$  özdeğerinin olmadığını göstermenin bir başka yoluda

(i) Eğer  $\lambda < 0$  ise, o zaman  $\mu = -\lambda > 0$  ve (5.1),  $X'' - \mu X = 0$  olur ki genel çözümlü



$$X(x) = C_1 \cosh(\sqrt{\mu} x) + C_2 \sinh(\sqrt{\mu} x), \quad C_1, C_2 = \text{abit}$$

(6.1.3)'ten ve  $\sinh s=0$  ancak ve ancak  $s=0$  olduğu gerçeğinden,  $C_1 = 0$  olduğunu görülebilir. Aynı zamanda (6.1.4)'ten

$$C_2 \sinh(\sqrt{sL} x) = 0$$

sonucu çıkar ki buradan  $C_2 = 0$  bulunur. Ancak bu aşıkâr çözüm olan  $X(x) \equiv 0$  'a götürür.

(ii) Eğer  $\lambda = 0$  ise, o zaman (6.1.1), genel çözümü

$$X(x) = C_1 x + C_2, \quad C_1, C_2 = \text{abit}$$

olan  $X'' = 0$  'a indirgenir. Daha önceki gibi, (6.1.3) ve (6.1.4)'ten  $X(x) = 0$  sonucu kolayca görülebilir. Geriye kalan tek olasılık, sonuçta  $\lambda < 0$  olması ki bu da (6.1.5) çiftlerine götürür.

(6.1.5) ve (6.1.6)'yı birleştirerek,

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

formundaki tüm fonksiyonların denklemi ve sınır koşullarının her ikisini de sağladığı sonucuna varılır.

Süper pozisyon prensibine göre, keyfî  $b_n$  sayıları olarak herhangi bir sonlu lineer kombinasyon

$$\sum_{n=1}^N b_n u_n(x, t) = \sum_{n=1}^N b_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t}, \quad (6.1.7)$$

bu durumdadır.

Eğer

$$f(x) = \sum_{n=1}^N b_n \sin \frac{n\pi x}{L},$$

ise başlangıç koşulunda sağlar.

Ama,  $f$ , özfonksiyonların bir sonlu lineer kombinasyonu olmadığı sürece, ki genel olarak, durum budur, bu mümkün olmaz. Buradan (6.1.7), BSDP'nin  $u(x,t)$  çözümü için iyi bir gösterim olmadığı sonucu çıkar. Bununla birlikte, eğer  $f$  parçalı düzgün ise, o zaman özfonksiyonların (Fourier sinus serisi) sonsuz bir lineer kombinasyonu olan

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L}, \quad 0 < x < L, \quad (6.1.8)$$

olup (3.2.1)'den

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.1.9)$$

dır.

Sonuçta çözüm,  $b_n$  katsayıları (6.1.9)'dan hesaplanacak şekilde,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t} \quad (6.1.10)$$

sonsuz serisi biçiminde yazılır.

### Örnek 6.1.1.

Başlangıç Sınır Değer Problemi

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= u_{xx}(x,t), & 0 < x < 1, & \quad t > 0, \\ u(0,t) &= 0, & u(1,t) &= 0, & \quad t > 0, \\ u(x,0) &= \sin(3\pi x) - \sin(5\pi x), & 0 < x < 1, \end{aligned}$$

şeklinde ele alınsın. Burada,  $L=1$  ve başlangıç koşulu içinin sağ tarafının fonksiyonu özfonksiyonların lineer bir kombinasyonudur. Bunu (5.8) ile karşılaştırarak,

$$b_1 = b_2 = 0, \quad b_3 = 1, \quad b_4 = 0, \quad b_5 = -1, \quad b_6 = b_7 = \dots = 0;$$

buluruz. Böylece (6.1.10)'u kullanarak problemin çözümü

$$u(x,t) = \sin(3\pi x) e^{-9\pi^2 kt} - \sin(5\pi x) e^{-25\pi^2 kt}.$$

**Örnek 6.1.2.**

Başlangıç Sınır Değer Problemi

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= u_{xx}(x,t), & 0 < x < 1, & \quad t > 0, \\ u(0,t) &= 0, \quad u(1,t) = 0, & \quad t > 0, \\ u(x,0) &= x, & 0 < x < 1, \end{aligned} \quad \{$$

bir çözümünü bulabilmek için, ilk olarak,  $b_n$  katsayılarını hesaplamak için  $f(x)=x$  ve  $L=1$ 'i (6.1.9)'da kullanırız.

$$\begin{aligned} b_n &= 2 \int_0^1 x \sin(n\pi x) dx \\ &= 2 \left\{ \left[ x \left( -\frac{1}{n\pi} \right) \cos(n\pi x) \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{n\pi} \cos(n\pi x) dx \right\} \\ &= 2 \left\{ -\frac{1}{n\pi} \cos(n\pi) + \frac{1}{n^2\pi^2} \left[ \sin(n\pi x) \right]_0^1 \right\} \\ &= -2 \frac{1}{n\pi} \cos(n\pi), \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

O zaman (6.1.10)'dan

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} -2 \frac{1}{n\pi} \cos(n\pi) \sin(n\pi x) e^{-(n\pi)^2 t}$$

BSDP' nin bir çözümü olur.

**Uç noktaları yalıtılmış çubuk:**

Uç noktaları yalıtılmış düzgün bir çubuk için ısı iletim problemi,

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= u_{xx}(x,t), & 0 < x < L, & \quad t > 0, \\ u_x(0,t) &= 0, \quad u_x(L,t) = 0, & \quad t > 0, \\ u(x,0) &= f(x), & 0 < x < L. \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Kısmi Türevli Diferansiyel Denklem ve sınır koşulları, lineer ve homojen olduğundan  $u(x,t)=X(x)T(t)$  formunda çözüm aranır. O zaman, son noktalarda sıfır sıcaklığı olan çubuk durumunda olduğu gibi, Kısmi Türevli Diferansiyel Denklem ve sınır koşullarından X ve T'nin

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < L,$$

$$X'(0) = 0, \quad X'(L) = 0,$$

ve

$$T'(t) + k\lambda T(t) = 0, \quad t > 0,$$

ki burada  $k$  ayrışım katsayısıdır.

Sıfır çözümünden farklı X çözümleri, Sturm-Liouville probleminin öz fonksiyonlarıdır.

Böylece,

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad X_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{L}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.1.11)$$

Alınacak şekilde T tarafından sağlanan denklemin integrali alındığında,

$$T_n(t) = e^{-k(n\pi/L)^2 t} \quad (6.1.12)$$

elde edilir.

Başlangıç Sınır Değer Problemi'nin çözümünün

$$u(x,t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t}, \quad (6.1.13)$$

seri gösterimine sahiptir. Burada her terim denkleminizi ve sınır koşullarını sağlar.

Eğer

$$u(x,0) = f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}, \quad 0 < x < L,$$

ise başlangıç koşulu sağlanır.

Bu,  $a_0$  ve  $a_n$ 'nin (3.3.1)'den

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.1.14)$$

şeklinde verilen  $f$ 'nin Fourier cosinüs seri katsayıları olduğunu gösterir.

Sonuçta, (6.1.14)'ten hesaplanan  $a_n$ 'lerle (6.1.13), Başlangıç Sınır Değer Probleminin çözümüdür.

### Örnek 6.1.3.

Başlangıç Sınır Değer Problemi

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = x, \quad 0 < x < 1,$$

nin çözümü,  $L=1$  ve  $f(x)=x$  olacak şekilde (6.1.13) ve (6.1.14)'ten elde edilir. Özel olarak,

$$a_0 = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2},$$

$$a_n = 2 \int_0^1 x \cos(n\pi x) dx$$

$$= 2 \left\{ \left[ x \left( \frac{1}{n\pi} \right) \sin(n\pi x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{n\pi} \sin(n\pi x) dx \right\}$$

$$= \frac{2}{n^2 \pi^2} \cos(n\pi) - \frac{2}{n^2 \pi^2}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

böylece, Örnek 6.1.2'deki gibi

$$u(x,t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( - \right)^n - \frac{2}{n^2 \pi^2} \cos(n\pi x) e^{-n^2 \pi^2 t}$$

Başlangıç Sınır Değer Probleminin çözümüdür.

#### Farklı homojen sınır koşullarıyla çubuk:

Değişkenlerin ayrılması metodu, son noktaların birinde sıcaklık sıfır, diğerinde yalıtılmış olduğu durumda da kullanılabilir.

#### Örnek 6.1.4

BSDP

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= u_{xx}(x,t), & 0 < x < 1, & \quad t > 0, \\ u(0,t) &= 0, \quad u_x(1,t) = 0, & & \quad t > 0, \\ u(x,0) &= f(x), & 0 < x < 1. \end{aligned}$$

şeklinde verilsin. Denkleminiz ve sınır koşulları lineer ve homojen olduğundan,  $u(x,t)=X(x)T(t)$  formunda bir çözüm aranır. Diğer durumlardaki gibi hareket yapıldığında, denklem ve sınır koşullarından  $X$  ve  $T$ 'nin

$$\begin{aligned} X''(x) + \lambda X(x) &= 0, & 0 < x < 1, & \quad t > 0, \\ X(0) &= 0, \quad X'(1) = 0, \end{aligned} \tag{6.1.15}$$

ve

$$T'(t) + \lambda T(t) = 0, \quad t > 0,$$

sağladığı görülür. Burada  $\lambda$  ayrışım katsayısıdır.  $X$ 'i bulmak için, olağan Sturm-Liouville problemi (6.1.15) için Rayleigh bölümü (4.1.6)'yı tekrar ele aldığımızda Örnek 4.1.15'de olduğu gibi

$$\int_a^b p(x) f(x) f'(x) dx = \int_a^b K(x) X'(x) X'(x) dx = 0,$$

ve (4.1.7) eşitsizliğine erişilir ki buradan, (6.1.15)'teki sınır koşulların ışığında  $\lambda \geq 0$  olduğunu çıkarılır. Böylece (6.1.15)'teki diferansiyel denklemin genel çözümü

$$X(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda} x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda} x), \quad C_1, C_2 = \text{abit}$$

olur.

$X(0)=0$  olduğundan,  $C_1 = 0$  bulunur.  $X'(1) = 0$  koşulunu kullanarak,  $\cos\sqrt{\lambda} = 0$  olduğu görülür. Bu durumda

$$\sqrt{\lambda} = \frac{(2n-1)\pi}{2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

bulunur.

(6.1.15)'teki özdeğer, özfonksiyon çiftlerinin

$$\lambda_n = \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4}, \quad X_n(x) = \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

olduğu ve karşılık gelen zaman bileşenlerinin

$$T_n(t) = e^{-\lambda_n t/4}.$$

Sonuçta,

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2} e^{-(2n-1)^2 \pi^2 t/4}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

fonksiyonları, denklemi ve sınır koşullarını sağlar. Tüm  $u_n$  fonksiyonlarının (sayılabilecek kadar çok) olağan keyfi lineer kombinasyonlarını düşünüldüğünde,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2} e^{-(2n-1)^2 \pi^2 t/4}, \quad (6.1.16)$$

olup başlangıç koşulunun

$$u(x, 0) = 1 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2}. \quad (6.1.17)$$

olduğunda sağlandığı görülür. Diğer bir deyişle, (6.1.16), eğer  $c_n$ ,  $f(x)$  fonksiyonunun genelleştirilmiş Fourier serisinin katsayılarıysa, verilen BSDP'nin çözümüdür. Bu katsayılar,

$$u(x) \equiv 0, \quad \sigma(x) \equiv 0, \quad f_n(x) = \sin \frac{(2n-1)\pi}{2}x$$

ile birlikte (4.1.10) yardımıyla hesaplanır.

$$\int_0^1 \sin^2 \frac{(2n-1)\pi}{2}x dx = \frac{1}{2}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

böylece

$$\begin{aligned} c_n &= \int_0^1 \sin \frac{(2n-1)\pi}{2}x dx \\ &= -\frac{4}{(2n-1)\pi} \left[ \cos \frac{(2n-1)\pi}{2}x \right]_0^1 = \frac{4}{(2n-1)\pi}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

olduğunu gösterir.

Sonuçta, BSDP' nin çözümü

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} \sin \frac{(2n-1)\pi}{2}x e^{-(2n-1)^2 \pi^2 t / 4}.$$

seri gösterimine sahiptir.

### Örnek 6.1.5.

Başlangıç Sınır Değer Problemi

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u_x(0, t) &= 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= x, \quad 0 < x < 1, \end{aligned}$$

nin çözümü, buradaki sınır koşulları ve Rayleigh bölümünün

$$\lambda_n = \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4}, \quad X_n(x) = \cos \frac{(2n-1)\pi}{2}x, \quad n = 1, 2, \dots \text{'i çıkarılması}$$

haricinde Örnek 6.1.4'teki gibi aynen inşa edilebilir.



$$\int_0^1 \cos^2 \frac{(2n-1)\pi x}{2} dx = \frac{1}{2} \quad n = 1, 2, \dots,$$

olduğundan, başlangıç koşulu fonksiyonu için genelleştirilmiş Fourier serisinin katsayıları,  $u(x)=x$ ,  $0 \leq x \leq 1$  ve  $L=1$  ile (4.1.10) tarafından verildiği haliyle,

$$\begin{aligned} c_n &= 2 \int_0^1 x \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2} dx \\ &= 2 \left\{ \left[ -\frac{x}{(2n-1)\pi} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2} \right] \right. \\ &\quad \left. - \int_0^1 \frac{1}{(2n-1)\pi} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2} dx \right\} \\ &= \left\{ (-1)^{n+1} \frac{2}{(2n-1)\pi} + \frac{4}{(2n-1)^2 \pi^2} \left[ \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2} \right]_0^1 \right\} \\ &= (-1)^{n+1} \frac{4}{(2n-1)\pi} - \frac{8}{(2n-1)^2 \pi^2}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

olur.

Sonuçta, BSDP' nin çözümü

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (-1)^{n+1} \frac{4}{(2n-1)\pi} - \frac{8}{(2n-1)^2 \pi^2} \right] \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2} e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 t}{4}}.$$

### Sıfır sıcaklık ortalama bir uç noktalı çubuk:

İçerisinde kaynağı bulunmayan düzgün bir çubukta, uç nokta sıfır sıcaklığında ve diğer uç nokta sıfır sıcaklıkta açık havada tutulduğu zamanki ısı akış problemini düşünürsek bu duruma karşılık gelen BSDP

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= \tau u_{xx}(x,t), & 0 < x < L, & \quad t > 0 \\ u(0,t) &= 0, & u_x(L,t) + hu(L,t) &= 0, & \quad t > 0 \\ u(x,0) &= f(x), & 0 < x < L, & \end{aligned}$$

olur. Burada  $h=\text{sabit}>0$  dir.

Denklem ve sınır koşulları lineer ve homojen olduğundan, değişkenlere ayırma metodunu kullanıp  $u(x,t)=X(x)T(t)$  formunda bir çözüm araştırılır. Bilinen yoldan, denklem ve sınır koşullarından  $X$ 'in alışılmış Sturm-Liouville probleminin

$$\begin{aligned} X''(x) + \lambda X(x) &= 0, & 0 < x < L, \\ X(0) &= 0, & X'(L) + hX(L) &= 0, \end{aligned} \quad (6.1.18)$$

sağladığını ve  $T$ 'nin denkleminin bir çözümü olduğu bulunur.

Örnek, 4.1.17'de hesaplanan (6.1.18)'in özdeğer-özfonksiyon çiftleri,

$$T'(t) + k\lambda T(t) = 0, \quad t > 0.$$

denkleminin pozitif kökleri olacak şekilde

$$\lambda_n = \left( \frac{\zeta_n}{L} \right)^2, \quad X_n(x) = \frac{\zeta_n x}{L}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

şeklinde yazılır.

$$\tan \zeta_n = -\tau / (hL). \quad \text{dir.}$$

Böylece

$$T_n(t) = e^{-k(\zeta_n/L)^2 t}$$

Başlangıç Sınır Değer Probleminin çözümü

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n(x) T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{\zeta_n x}{L} e^{-k(\zeta_n/L)^2 t}. \quad (6.1.19)$$

formunda seri gösterimine sahip olur.

$$u(x,0) = f(x) \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{\zeta_n x}{L}.$$

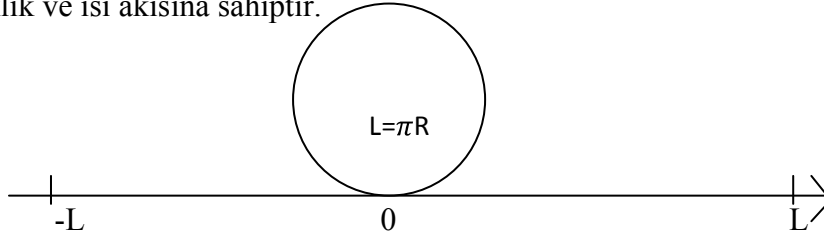
koşulundan  $c_n$  katsayıları,

(6.1.18)'in özfonksiyonları,  $[0,L]$  üstünde ortogonal olduğundan,  $c_n$ 'ler

$$c_n = \frac{\int_0^L f(x) \sin(\zeta_n x / L) dx}{\int_0^L \sin^2(\zeta_n x / L) dx}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.1.20)$$

### İnce düzgün dairesel bir halkadaki ısı iletimi:

Fiziksel olarak Şekil. 6.1'de gösterilen  $2L$  çevreli halka,  $2L$  uzunluğunda bir çubuk gibi düşünülebilir. Ancak süreklilikten dolayı,  $x=-L$  ve  $x=L$  iki son noktasında aynı sıcaklık ve ısı akısına sahiptir.



Şekil 6.1.

Bu duruma karşılık gelen Başlangıç Sınır Değer Problemi

$$u_t(x,t) = k u_{xx}(x,t), \quad -L < x < L, \quad t > 0.$$

$$u(-L,t) = u(L,t), \quad u_x(-L,t) = u_x(L,t), \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = f(x), \quad -L < x < L$$

olur.

Denklemimiz ve sınır koşulları homojendir, böylece  $u(x,t)=X(x)T(t)$  formunda bir çözüm aranır. O zaman, Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemi ve sınır koşullarından

$$X''(x) + \lambda \zeta(x) = 0, \quad -\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2},$$

$$X(-\frac{L}{2}) = X(L), \quad X'(-\frac{L}{2}) = X'(L), \quad (6.1.21)$$

ve

$$T'(t) + \lambda \zeta T(t) = 0, \quad T > 0. \quad (6.1.22)$$

bulunur.

BSDP'nin sıfır çözümü olmayan  $u$  çözümü için, X, Örnek 4.2.3'te incelenen periyodik Sturm-Liouville problemi (6.1.21)'in sıfır çözümü olmayan bir çözüm olmalıdır.

Bu Sturm-Liouville problemine karşılık gelen özdeğer ve özfonksiyonları

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$X_0(x) \equiv 1, \quad X_{1n}(x) = \cos\frac{n\pi x}{L}, \quad X_{2n}(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, \dots \text{ dir.}$$

Sonuçta,  $\lambda_n$  ile

$$T_n(t) = C e^{-(n\pi/L)^2 t}, \quad C = b t$$

Böylece,

$$u(x, t) = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( X_{1n}(x) + X_{2n}(x) \bar{T}_n(t) \right)$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L} \right) e^{-(n\pi/L)^2 t} \quad (6.1.23)$$

formunda seri çözümü elde edilir.

Başlangıç koşulunu uygulayarak

$$u(x, 0) = f(x) = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L} \right), \quad -\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2}.$$

elde edilir.

Örnek 4.2.3'te belirtildiği gibi,  $f$ 'nin bu tam Fourier serisi olup katsayılar (3.1.7), (3.1.8) ve (3.1.9) formülleriyle hesaplanarak

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx \\
a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots \\
b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{6.1.24}$$

elde edilir.

Sonuçta, BSDP'nin çözümü (6.1.23) ve (6.1.24) kullanılarak yazılır.

#### Örnek 6.1.6.

$$\begin{aligned}
u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t), \quad -1 < x < 1, \quad t > 0, \\
u(-1, t) &= u(1, t), \quad u_x(-1, t) = u_x(1, t), \quad t > 0, \\
u(x, 0) &= x + 1, \quad -1 < x < 1.
\end{aligned}$$

B SDP verilsin. Burada  $L=1$  ve  $f(x)=x+1$  dir. Böylece, (6.1.24)'ten,

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x+1) dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} x^2 + x \right]_{-1}^1 = 1, \\
a_n &= \int_{-1}^1 (x+1) \cos(n\pi x) dx \\
&= \left\{ \left[ (x+1) \frac{1}{n\pi} \sin(n\pi x) \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{1}{n\pi} \sin(n\pi x) dx \right\} \\
&= \frac{1}{n^2 \pi^2} \cos(n\pi) = (-1)^n, \\
b_n &= \int_{-1}^1 (x+1) \sin(n\pi x) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \left[ (x+1) \left(-\frac{1}{n\pi}\right) \cos(n\pi x) \right]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 \frac{1}{n\pi} \cos(n\pi x) dx \right\} \\
&= -\frac{2}{n\pi} \cos(n\pi) + \frac{1}{n^2\pi} [\sin(n\pi x)]_{-1}^1 = (-1)^{n+1} \frac{2}{n\pi}.
\end{aligned}$$

olur.

Böylece, (6.1.23)'ten, BSDP'nin çözümü

$$u(x,t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n\pi} \sin(n\pi x) e^{-n^2\pi^2 t}.$$

olur.

## 6.2. Dalga Denklemi

Genel değişkenlere ayırma metodu, Dalga denklemi için BSDP'ye, hemen hemen Isı denklemleri için uygulanan aynı yolla uygulanır. Bununla birlikte, zaman bileşeni, ikinci bir başlangıç koşul olan, ikinci dereceden Adi diferensiyel denklemi sağlamalıdır.

### Uç Noktaları Sabitlenmiş Tel:

Bu problem

$$\begin{aligned}
u_{tt}(x,t) &= c^2 u_{xx}(x,t), & 0 < x < L, & \quad t > 0, \\
u(0,t) &= 0, \quad u(L,t) = 0, & & \quad t > 0 \\
u(x,0) &= f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), & & \quad 0 < x < L,
\end{aligned}$$

şeklindedir.

Önceki problemlerdeki gibi, denklem ve sınır koşulları lineer ve homojen olduğundan,  $u(x,t)=X(x)T(t)$  formunda bir çözüm aranır.

Bunu, denklemde yazarak,

$$X(x)T''(t) = -c^2 X''(x)T(t),$$

edilir. Denklemin her iki tarafı  $c^2 X(x)T(t)$  bölündüğünde

$$\frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \quad (6.2.1)$$

verir. Burada  $\lambda$  = *abit*, ayırma sabitidir. Aynı zamanda, sınır koşulundan

$$X(0)=0, \quad X(L)=0;$$

elde edileceği görülebilir. Böylece,

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < L,$$

$$X(0) = 0, \quad X(L) = 0.$$

elde edilir.

Bu Sturm-Liouville problemi, Örnek 4.1.15'de çözülmüştü, ki burada bunun özdeğer-özfonksiyon çiftleri

$$\lambda_n = \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2, \quad X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.2.2)$$

(6.2.1)'den, her bir  $\lambda_n$  özdeğeri için, genel çözümü ( $\lambda_n$  için) olduğundan

$$T_n''(t) + c^2 \lambda_n T_n(t) = 0, \quad t > 0,$$

$$T_n(t) = b_{1n} \cos \frac{n\pi c t}{L} + b_{2n} \sin \frac{n\pi c t}{L}, \quad b_{1n}, b_{2n} = \text{abit} \quad (6.2.3)$$

denklemini sağlayan bir  $T_n$  fonksiyonu elde edilebileceği çıkarılabilir.

(6.2.2) ve (6.2.3)'ü göz önüne alarak, BSDP'nin çözümünün

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{L} \left( b_{1n} \cos \frac{n\pi c t}{L} + b_{2n} \sin \frac{n\pi c t}{L} \right) \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

seri gösterimine sahip olduğunu söylenilebilir.

Bu serinin her bir terimi, denklemimizi ve sınır koşulları sağlar. Başlangıç koşullarını sağlaması için, (6.2.4)'de ve (6.2.4)'ün terimlerini tek tek türevini alarak elde edilen  $u_t(x,t)$  ifadesinde  $t=0$  alınır.

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{1n} \sin \frac{n\pi}{L},$$

$$u_t(x,0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} \frac{n\pi}{L} \sin \frac{n\pi}{L}.$$

$b_{1n}$  ve  $b_{2n}$  ( $n\pi$ )/ $L$  sayılarının,  $f$  ve  $g$ 'nin Fourier sinüs serisinin katsayıları olduğunu görülür., böylece, (3.2.1)'den,

$$b_{1n} = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6.2.5)$$

$$b_{2n} = \frac{2}{n\pi} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

elde edilir.

Sonuçta, BSDP' nin çözümü (6.2.5)'den hesaplanan  $b_{1n}$  ve  $b_{2n}$  ile (6.2.4) tarafında verilir.

$u$ 'nun açılımındaki terimler, titreşimin normal modları olarak adlandırılır. Bu tip çözümler duran dalgalar olarak yorumlanır.

### Örnek 6.2.1.

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = \sin(\pi x) - \sin(3\pi x),$$

$$u_t(x,0) = 1\pi \sin(2\pi x), \quad 0 < x < 1,$$



içinde,  $f$  ve  $g$  fonksiyonlarının öz fonksiyonların lineer kombinasyonu olduğundan (6.2.5) ile karşılaştırıp ve  $c=1$  ve  $L=1$  alarak

$$b_{11} = \frac{1}{2}, b_{13} = -\frac{1}{2}, b_{22} = \frac{1}{2}, b_{12} = b_{14} = \dots = b_{21} = b_{23} = \dots = 0.$$

çıkarılır.

Böylece, (6.2.4)'den Başlangıç Sınır Değer Probleminin çözümü

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \sin(\pi x) \cos(\pi t) - \frac{1}{2} \sin(3\pi x) \cos(3\pi t) + \frac{1}{2} \sin(2\pi x) \sin(2\pi t).$$

şeklinde elde edilir.

### Örnek 6.2.2.

Yukarıdaki örnekte başlangıç koşulları

$$u(x,t) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq \frac{1}{2}, \\ 1-x, & \frac{1}{2} < x < 1, \end{cases} \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 < x < 1,$$

ile yer değiştirilirse, o zaman (5.29) ve kısmi integrasyonu kullanarak,

$$\begin{aligned} b_{1n} &= 2 \left\{ \int_0^{1/2} f(x) \sin(n\pi x) dx + \int_{1/2}^1 f(x) \sin(n\pi x) dx \right\} \\ &= 2 \left\{ \int_0^{1/2} x \sin(n\pi x) dx + \int_{1/2}^1 (1-x) \sin(n\pi x) dx \right\} \\ &= 2 \left\{ \left[ x \left( -\frac{1}{n\pi} \right) \cos(n\pi x) \right]_0^{1/2} + \int_0^{1/2} \frac{1}{n\pi} \cos(n\pi x) dx \right\} \\ &\quad + \left\{ (1-x) \left( -\frac{1}{n\pi} \right) \cos(n\pi x) \right\}_{1/2}^1 - \int_{1/2}^1 \frac{1}{n\pi} \cos(n\pi x) dx \right\} \\ &= 2 \left\{ -\frac{1}{2n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n^2\pi^2} \left[ \sin(n\pi x) \right]_0^{1/2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} - \frac{1}{n^2\pi^2} \left[ \sin(n\pi x) \right]_{1/2}^1 \right\} \end{aligned}$$

$$= \left( \frac{1}{1^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} \right) = \frac{4}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2},$$

$$b_{2n} = \frac{2}{n\pi} \int_0^1 g(x) \sin(n\pi x) dx = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

bulunur. Böylece, (6.2.4)'ten, BSDP' nin çözümü

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} \sin(n\pi x) \cos(n\pi t).$$

olur,

### Serbest Uç noktalı titreşen tel:

Bu duruma karşılık gelen BSDP

$$u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

$$u_t(0, t) = 0, \quad u_x(L, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < L,$$

Değişkenleri ayırarak, özdeğer özfonksiyon çiftleri

$$\lambda_n = \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2, \quad X_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, \dots$$

şeklinde olup,

$\lambda_0 = 0$  için, T tarafından sağlanan denklemin genel çözümü,

$$T_0(t) = u_{10} + u_{20}t, \quad a_{10}, a_{20} = \text{abit}$$

iken  $\lambda_n > 0$ ,  $n \geq 1$  için,  $T_n$  fonksiyonları yukarıdaki gibi olur. Böylece, BSDP' nin çözümü

$$u(x, t) = a_{10} + a_{20}t + \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi x}{L} \left( a_{1n} \cos \frac{n\pi t}{L} + a_{2n} \sin \frac{n\pi t}{L} \right), \quad (6.2.6)$$

formundadır.  $a_{1n}$  ve  $a_{2n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  sabit katsayılarıdır. (6.2.6)'daki her terim denklemi ve sınır koşullarını sağlar. Başlangıç koşulları sağlamak için,

$$u(x, 0) = f(x) = a_{10} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{1n} \cos \frac{n\pi x}{L},$$

$$u_t(x, 0) = g(x) = a_{20} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} \frac{n\pi}{L} \cos \frac{n\pi x}{L};$$

böylece (3.3.1)'den

$$a_{10} = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx, \quad a_{1n} = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$a_{20} = \frac{1}{L} \int_0^L g(x) dx, \quad a_{2n} = \frac{2}{n\pi} \int_0^L g(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6.2.7)$$

olur ve BSDP' nin çözümünün (6.2.7) aracılığıyla hesaplanan  $a_{1n}$  ve  $a_{2n}$  ile (6.2.6) şeklinde ifade edildiği çıkarılır.

### Örnek 6.2.3.

$$u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = \cos(2\pi x), \quad u_t(x, 0) = -\pi \cos(\pi x), \quad 0 < x < 1,$$

probleminin çözümünü bulmak için,  $C=1$  ve  $L=1$ , ve başlangıç veri  $f$  ve  $g$  fonksiyonlarının, öz fonksiyonların lineer kombinasyonu olduğunu belirlisin. Sonuçta

$$a_{12} = 1, \quad a_{21} = -\pi, \quad a_{10} = a_{11} = a_{13} = \dots = a_{22} = \dots = 0,$$

böylece, (6.2.6)'dan, BSDP' nin çözümü

$$u(x, t) = \cos(\pi x) \sin(\pi t) + \cos(2\pi x) \cos(2\pi t).$$

**Örnek 6.2.4.**

BSDP

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(1,t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = \begin{cases} -1, & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}, \\ 0 & \text{diğer yerde} \end{cases}$$

verilsin.

Burada  $c=1$  ve  $L=1$  olduğunda, (6.2.7)'den

$$a_{1n} = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$a_{20} = \int_0^{1/4} g(x)dx + \int_{1/4}^{3/4} g(x)dx + \int_{3/4}^1 g(x)dx = \int_{1/4}^{3/4} (-1)dx = -\frac{1}{2},$$

$$a_{2n} = \frac{2}{n\pi} \left\{ \int_0^{1/4} g(x) \cos(n\pi x) dx + \int_{1/4}^{3/4} g(x) \cos(n\pi x) dx \right. \\ \left. + \int_{3/4}^1 g(x) \cos(n\pi x) dx \right\}$$

$$= \frac{2}{n\pi} \int_{1/4}^{3/4} (-1) \cos(n\pi x) dx = \frac{2}{n\pi} \left( -\frac{1}{n\pi} \right) [\sin(n\pi x)]_{1/4}^{3/4}$$

$$= \frac{2}{n^2\pi^2} \left( \sin \frac{n\pi}{4} - \sin \frac{3n\pi}{4} \right) = -\frac{4}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{4} \cos \frac{n\pi}{2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

olur.

Böylece (6.2.6)'dan, BSDP' nin çözümü

$$u(x,t) = -\frac{1}{2}t - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{4} \cos \frac{n\pi}{2} \cos(n\pi x) \sin(n\pi t).$$

olur.

Karışık sınır koşulları ile tanımlanan BSDP aynı şekilde ele alınır.

### 6.3. Laplace Denklemi

Bu bölümde, problemlerin iki tip çözümü araştırılır. Birincisi kartezyen koordinatlarla verilen dikdörtgensel bir bölge bir diğeri kutupsal koordinatların kullanımının daha uygun olan bir diskte Laplace Denklemdir.

#### Bir dikdörtgende Laplace Denklemi:

Kaynağı bulunmayan ve sınırlarda sıcaklığı bilinen bir düzgün dikdörtgen

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq K, L, K = \text{abit}\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu bölgenin içindeki denge sıcaklığını düşünersek bu duruma karşılık gelen problem

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) &= 0, \quad 0 < x < L, \quad 0 < y < K, \\ u(x, 0) &= f_1(x), \quad u(x, K) = f_2(x), \quad 0 < x < L, \\ u(0, y) &= g_1(y), \quad u(L, y) = g_2(y), \quad 0 < y < K. \end{aligned}$$

Bu, bir sınır değer problemi olduğu halde, değişkenlere ayırma metodu hala uygulanabilir. Bununla beraber, burada sınır koşulları homojen olmadığından dolayı, bazı ek işlemler yapılması gerekmektedir.

Süperpozisyon prensibini kullanarak, yukarıdaki SDP'nin çözümünü

$$u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y) + u_3(x, y) + u_4(x, y),$$

şeklinde arayabilir ve burada  $u_1, u_2, u_3$  ve  $u_4$ 'ün her biri denklemin orijinal homojen sınır koşullarından birini ve kalan üç sınır koşullarının homojen versiyonlarını sağlar. Örneğin.

$$\begin{aligned} (u_1)_{xx}(x, y) + (u_1)_{yy}(x, y) &= 0, \quad 0 < x < L, \quad 0 < y < K, \\ u_1(x, 0) &= f_1(x), \quad u_1(x, K) = 0, \quad 0 < x < L, \\ u_1(0, y) &= 0, \quad u_1(L, y) = 0, \quad 0 < y < K. \end{aligned}$$

Bu Sınır Değer Probleminin

$$u_1(x, y) = X(x)Y(y),$$

formunda bir çözümünü bulmaya çalışılır. Bu çözümü denklemde yazarak

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0,$$

elde ederiz ki,  $X(x)Y(y)$ 'ye bölümünden

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda^2.$$

elde edilir. Burada  $\lambda^2$  ayrıştırma sabitidir.

Üç homojen Sınır koşulundan

$$X(x)Y(K) = 0, \quad 0 < x < L,$$

$$X(0)Y(y) = 0, \quad X(L)Y(y) = 0, \quad 0 < y < K.$$

elde edilir.

$$Y(K) = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(L) = 0,$$

Sonuçta Sturm-Liouville problemi

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < L,$$

$$X(0) = 0; \quad X(L) = 0.$$

Sturm-Liouville problemi elde edilir. Bu problemin özdeğer-özfonksiyon çiftlerinin

$$\lambda_n = \left( \frac{n\pi}{L} \right), \quad X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.3.1)$$

şeklindedir.

Bu durumda  $n=1, 2, \dots$  her biri için,

$$Y_n''(y) - \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 Y_n(y) = 0, \quad 0 < y < K,$$

$$Y_n(K) = 0.$$

sağlanacak şekilde  $Y_n$  fonksiyonları aranmalıdır, böylece

$Y_n$  için bu denklemin genel çözümü

$$Y_n(y) = C_1 \cosh \frac{n\pi y}{L} + C_2 \sinh \frac{n\pi y}{L}, \quad C_1, C_2 = \text{arbitrary}$$

olarak yazılabilir, böylece  $Y_n(K) = 0$  koşulunu kullanarak,

$$C_1 \cosh \frac{n\pi \zeta}{L} + C_2 \sinh \frac{n\pi \zeta}{L} = 0,$$

buluruz.

Bu durumda  $Y_n$  için genel çözüm,

$$Y_n(y) = C_1 \cosh \frac{n\pi (y - \zeta)}{L} + C_2 \sinh \frac{n\pi (y - \zeta)}{L}. \quad (6.3.2)$$

Denklemin herhangi  $Y_n(y)$  çözümü için,  $Y_n(y - \zeta)$  da bir çözüm olup (6.3.2) üstünde  $Y_n(K) = 0$  koşulunu kullanarak,  $C_1 = 0$  olduğu görülür. Böylece  $C_2 = 1$  alarak, kolaylık açısından ,

$$Y_n(y) = \sinh \frac{n\pi (y - \zeta)}{L} \quad (6.3.3)$$

elde edilir.

(6.3.1) ve (6.3.3) ışığında,  $u_1$  'in

$$u_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n(x) Y_n(y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{L} \sinh \frac{n\pi (y - K)}{L}, \quad (6.3.4)$$

Burada, her bir terim denklemini ve üç homojen sınır koşulunu sağlar. Geri kalanı, homojen olmayan sınır koşulunu sağlamak için,

$$u_1(x, 0) = f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( -c_n \sinh \frac{n\pi \zeta}{L} \right) \sin \frac{n\pi x}{L} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L};$$

alınmalıdır. (3.2.1)'den,

$$b_n = c_n \sinh \frac{n\pi \zeta}{L} = \frac{2}{L} \int_0^L f_1(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots,$$

böylece,

$$\begin{aligned} c_n &= -\frac{b_n}{\sinh(n\pi \zeta / L)} \\ &= -\frac{2}{L \sinh(n\pi \zeta / L)} \int_0^L f_1(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6.3.5)$$

olur.

Bunun anlamı  $u_1(x, y)$  fonksiyonunun, (6.3.5)'den hesaplanan  $c_n$  katsayıları ile (6.3.4) şeklinde veriliyor olmasıdır.

$u_2, u_3$  ve  $u_4$  bulmak için aynı işlem uygulanabilir.

### Örnek 6.3.1.

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2,$$

$$u(x, 0) = x, \quad u(x, 2) = 0, \quad 0 < x < 1,$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(1, y) = 0, \quad 0 < y < 2.$$

İlk olarak, kısmi integrasyonla,

$$L = 1, \quad K = 2, \quad f_1(x) = x, \quad f_2(x) \equiv 0, \quad f_3(y) \equiv 0, \quad f_4(y) \equiv 0.$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \sin(n\pi y) dx &= \left[ x \left( \frac{-1}{n\pi} \right) \cos(n\pi y) \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{n\pi} \cos(n\pi y) dx \\ &= -\frac{1}{n\pi} \cos(n\pi) + \frac{1}{n^2 \pi^2} \left[ \sin(n\pi x) \right]_0^1 = -(-1)^n + \frac{1}{n\pi}; \end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece, (6.3.5)'den

$$c_n = -(-1)^n \frac{2}{n\pi \sinh(2n\pi)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

olur.



Sonuçta, (6.3.4)'ten, verilen Sınır Değer Probleminin çözümü

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi \sinh(2n\pi)} \sin(n\pi x) \sinh(n\pi (y - 1)).$$

olur.

**Bir dairesel disk içinde Laplace denklemi:**  $r = R$  sabit sınırdaki bilinen sıcaklık koşulu altında hiçbir kaynağı olmayan bir düzgün dairesel disk

$$D = \{(r, \theta) : 0 < r < R, -\tau < \theta \leq \tau\}$$

içindeki denge sıcaklığını düşünölsün. Cismin geometrisi yüzünden, diskin merkezini kutup noktası olarak modellenen SDP  $r$  ve  $\theta$  kutupsal koordinatları cinsinden yazılabilir. Sonuçta, kutupsal koordinatlarda Laplace denklemi

$$\begin{aligned} u_{rr}(r, \theta) + r^{-1}u_r(r, \theta) + r^{-2}u_{\theta\theta} &= 0, \quad 0 < r < R, \quad -\tau < \theta < \tau \\ u(R, \theta) &= f(\theta), \quad -\tau < \theta < \tau \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Kartezyen koordinatlar cinsinden önceden çözülen Sınır Değer Problemlerinden farklı olarak, kutupsal koordinatlardaki denkleme yeni sınır koşullarını eklemek gerekir. Bu koşullar, altında yani  $r$  ve  $\theta$  değişkenleri  $r=0$ ,  $\theta = -\tau$  ve  $\theta = \tau$  şeklinde tanımlanır. Bunlar fiziksel olaylar göz önüne alınarak belirlenir. Burada çözümün sınırlı, sıcaklık ve dairesel ısı akısının sürekli olması gerekmektedir.

$$u(0, \theta) \text{ sınırlı } t > 0,$$

$$u(r, -\tau) = u(r, \tau), \quad u_\theta(r, -\tau) = u_\theta(r, \tau), \quad 0 < r < R$$

şeklinde verilebilir.

Denklem ve  $u(r, \theta) = f(\theta)$  haricindeki tüm sınır koşulları homojendir, böylece,

$$u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta), \quad (6.3.6)$$

formunda bir çözüm aranabilir. Bu durumda periyodik sınır koşulu

$$\Theta(\theta)R(r) = \Theta(-\tau)R(r), \quad \Theta'(-\tau)R(r) = \Theta'(\tau)R(r), \quad 0 < r < R$$

biçimindedir. Buradan, sıfıra denk olma durumunu engellemek için,

$$\Theta(r=0) = 0, \quad \Theta(r=\tau) = 0.$$

sonucuna ulaşılır. (6.3.6) ışığı altında denklem

$$[R''(r) + r^{-1}R'(r)]\Theta + r^{-1}R(r)\Theta'' = 0,$$

biçimde yazılabilir. Bunu  $r^{-1}R(r)\Theta'$  ya bölerek sabit, ayrışım sabiti olmak koşuluyla,

$$\frac{\Theta''}{\Theta} = -\frac{r^2 R''(r) + rR'(r)}{R(r)} = -\lambda^2. \quad (6.3.7)$$

bulunur. O zaman  $\Theta$  periyodik Sturm-Liouville problemi

$$\Theta'' + \lambda^2 \Theta = 0, \quad -\tau < \vartheta < \tau$$

$$\Theta(r=0) = 0, \quad \Theta(r=\tau) = 0. \quad (6.3.8)$$

bir çözümdür. Burada  $L=\pi$  için, özdeğerler ve karşılık gelen öz fonksiyonlar,

$$\lambda_n = 0, \quad \lambda_n = n^2, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$\Theta_0(\vartheta) \equiv 0, \quad \Theta_n(\vartheta) = \cos(n\vartheta), \quad \Theta_{-n}(\vartheta) = \sin(n\vartheta), \quad n = 1, 2, \dots$$

(6.3.7)'deki ikinci eşitlikten, her bir  $n=0, 1, 2, \dots$  için, karşılık gelen  $R_n$  radyan bileşeni

$$r^2 R_n''(r) + [R_n'(r) - r^2 R_n] = 0, \quad 0 < r < \tau. \quad (6.3.9)$$

sağlar.

Bu, bir Cauchy-Euler denklemidir  $n \neq 0$  için

$$R_n(r) = r^p, \quad p = \text{sabit}$$

formunda çözümler aranabilir. (6.3.9)'da bunu yazarsak,  $p_1 = 1$  ve  $p_2 = -1$  kökleriyle

$$[p(p-1) + p - n^2]r^p = 0,$$

bulunur. Sonuçta, bu durumda (6.3.8)'in genel çözümü

$$R_n(r) = C_1 r^n + C_2 r^{-n}, \quad C_1, C_2 = \text{abit} \quad (6.3.10)$$

olur. Eğer  $n=0$  ise, o zaman (6.3.8),  $(rR_0'(r))' = 0$  olup, böylece

$$rR_0'(r) = \bar{C}_2 = \text{abit}$$

veya  $R_0'(r) = \frac{\bar{C}_2}{r}$  olur. Böylece genel çözüm

$$R_0(r) = \bar{C}_1 + \bar{C}_2 \ln r, \quad \bar{C}_1, \bar{C}_2 = \text{abit} \quad (6.3.11)$$

olur.

(6.3.6)'dan ve  $u(0, \theta)$ 'nin sınırlılık koşulundan, tüm  $R_n(0)$  sayılarının, sonlu olduğunu söylenilebilir. (6.3.9) ve (6.3.10) dan  $C_2 = 0$   $\bar{C}_2 = 0$  olduğundan,

$$R_0(r) = \bar{C}_1, \quad R_n(r) = C_1 r^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

dır.

Bu keyfi sabiti 1 alarak,  $R_n(r) = r^n$ ,  $n=0, 1, 2, \dots$

seçilebilir.

Değişkenlerin ayrımı işlemine uygun olarak BSDP' nin çözümü

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= R_0(r) \Theta_0(\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} (r^n) [\mathbf{A}_n \Theta_n(\theta) + \mathbf{B}_n \Theta_n(\theta)] \\ &= \mathbf{A}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [\mathbf{A}_n \cos(n\theta) + \mathbf{B}_n \sin(n\theta)] \end{aligned} \quad (6.3.11)$$

formunda bir seri gösterimini elde edilir. Burada her bir terim denklemi ve üç homojen sınır koşulunu sağlar.  $a_0, a_n$  ve  $b_n$  bilinmeyen katsayılar,

$$u(r, \theta) = f(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)] \quad -\pi < \theta \leq \pi \quad (6.3.12)$$

den bulunur.  $L=\pi$  ve  $a_0, a_n$  ve  $b_n$  katsayıları ile  $f$ 'nin bir Fourier serisidir. Böylece (3.1.7), (3.1.8) ve (3.1.9) dan

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi\alpha^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.3.13)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi\alpha^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin(n\theta) d\theta \quad n = 1, 2, \dots$$

olur.

Sonuçta, SDP' nin çözümü, (6.3.13) kullanılarak hesaplanmış  $a_0$ ,  $a_n$  ve  $b_n$  ile (6.3.11) şeklinde ifade edilir.

(6.3.11) ve (6.3.13)'ten

$$u(0, \theta) = a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta;$$

anlaşılır. Diğer bir ifade ile  $a_0$ , diskin merkezindeki sıcaklık, sınır çemberinin üstündeki ortalama sıcaklığa eşittir. Buna, Laplace denklemi için ortalama değer özelliği denir.

### Örnek 6.3.2.

Sınır Değer Problemi

$$(\Delta u)(r, \theta) = 0, \quad 0 < r < 1, \quad -\pi < \theta < \pi$$

$$u(1, \theta) = 1 + \sin\theta - 2\cos(4\theta), \quad -\pi < \theta < \pi$$

de

$$\alpha = 1, \quad f(\theta) = 1 + \sin\theta - 2\cos(4\theta), \quad -\pi < \theta < \pi$$

mevcuttur.  $f$ , bu problemle ilişkilendirilen öz fonksiyonların lineer bir kombinasyonu olduğundan, (6.3.12)'le karşılaştırır ve  $a_0 = 1$ ,  $2^4 a_4 = -2$ , ve  $2b_1 = 1$ , iken diğer katsayıların sıfır olduğunu görülür. Sonuçta,

$$a_0 = 1, \quad a_4 = -1, \quad b_1 = 1, \quad a_1 = a_2 = a_3 = a_5 = \dots = b_2 = b_3 = \dots = 0,$$

olur ki, bunun anlamı, (6.3.11)'den verilen Sınır Değer Probleminin çözümü

$$u(r, \theta) = -\frac{1}{4}r^4 \cos(4\theta) + \frac{1}{2}r^2 \sin(2\theta).$$

olur.

#### 6.4. İki Denklemlilikli Denklemler

Daha önce, düzgün bir levha üstündeki ısı iletimi için bir matematiksel model ifade edildi. Ancak burada bilinmeyen sıcaklık fonksiyonu zaman değişkenine ve iki konum değişkenine bağlıydı. Burada, iki boyutlu Dalgalar denkleminin benzeri bir denklemi düşüneceğiz ve hem kartezyen hem de kutupsal koordinatlar cinsinden değişkenlerine ayırma metodunu kullanarak problemlerimizi çözmektir.

**Titreşen dikdörtgen zar:** İhmal edilebilir cisim kuvveti ve sabitlenmiş köşeleriyle titreşen bir dikdörtgen zar,

$$u_{tt}(x, y, t) = \frac{1}{\rho} (\Delta u(x, y, t) = \frac{1}{\rho} [u_{xx}(x, y, t) + u_{yy}(x, y, t)]),$$

$$0 < x < L, \quad 0 < y < K, \quad t > 0,$$

$$u(0, y, t) = 0, \quad u(L, y, t) = 0, \quad 0 < y < K, \quad t > 0$$

$$u(x, 0, t) = 0, \quad u(x, K, t) = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad u_t(x, y, 0) = g(x, y),$$

$$0 < x < L, \quad 0 < y < K.$$

şeklinde matematiksel olarak modellenir.

Denklem ve koşullar lineer ve homojen olduğundan, konum değişkenlerinin bir fonksiyonuyla zaman değişkeninin bir fonksiyonun çarpımıyla ifade edilen,

$$u(x, y, t) = v(x, y)T(t). \quad (6.4.1)$$

biçiminde bir çözüm arıyoruz. Önceki durumlarda olduğu gibi, denklem ve koşullardan T'nin

$$T''(t) + \lambda^2 T(t) = 0, \quad t > 0,$$

ve S'nin,  $\lambda$  sabit, ayrışım sabiti olmak koşuluyla,

$$\begin{aligned}
S_{xx}(x,y) + S_{yy}(x,y) + \lambda \zeta(x,y) &= 1, \quad 0 < x < L, \quad 0 < y < K, \\
S(0,y) &= 1, \quad S(L,y) = 1, \quad 0 < y < K, \\
S(x,0) &= 0, \quad S(x,K) = 0, \quad 0 < x < L,
\end{aligned} \tag{6.4.2}$$

bir çözümü olduğu bulunur.

S için denklem ve sınır koşulları lineer ve homojen olmasını görerek, tekrardan değişkenlerine ayırma metodunu kullanır ve (6.4.2) için

$$S(x,y) = X(x)Y(y). \tag{6.4.3}$$

formunda bir çözüm bulmaya çalışırız. (6.4.2)'deki denklem, o zaman,

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = -\lambda \zeta(x)Y(y),$$

olur ki, bunu  $X(x)Y(y)$  bölerek,  $\mu$ =sabit, ikinci bir ayrışım sabiti olmak koşuluyla,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\mu - \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda,$$

elde edilir.

Yukarıdaki eşitlik zincirinden ve (6.4.2)'deki koşullarda, X ve Y,

$$\begin{aligned}
X''(x) + \mu \zeta(x) &= 1, \quad 0 < x < L, \\
X(0) &= 1, \quad X(L) = 1,
\end{aligned} \tag{6.4.4}$$

ve

$$\begin{aligned}
Y''(y) + (\lambda - \mu \zeta) Y(y) &= 1, \quad 0 < y < K, \\
Y(0) &= 1, \quad Y(K) = 1.
\end{aligned} \tag{6.4.5}$$

Sturm-Liouville probleminin çözümleridir.

(6.4.4) için ihtiyaç duyduğumuz sıfır dışındaki çözümler,

$$\mu_n = \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2, \quad X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, \dots$$

ile birlikte hesaplanan bu Sturm-Liouville probleminin öz fonksiyonlarıdır.

$n$ 'nin her bir değeri için,  $Y$  fonksiyonu,  $\mu_m = \left(\frac{m\pi}{K}\right)^2$  olacak şekilde, (6.4.5) Sturm-Liouville problemini sağlar. Bu problem, (6.4.4)'ün aynısı olduğundan, özdeğerleri öz fonksiyonları  $\lambda_{nm} = \mu_m = \left(\frac{m\pi}{K}\right)^2$ ,  $Y_{nm}(y) = \sin \frac{m\pi y}{K}$ ,  $m = 1, 2, \dots$

(6.4.2)'nin, özdeğerleri,

$$\lambda_{nm} = \mu_m + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{K}\right)^2, \quad n, m = 1, 2, \dots,$$

ve karşılık gelen özfonksiyonları,

$$S_{nm}(x, y) = X_n(x)Y_{nm}(y) = \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi y}{K}, \quad n, m = 1, 2, \dots, \quad (6.4.6)$$

olacak şekilde iki boyutlu bir özdeğer problemi olarak düşünülebilir.  $T$  tarafından sağlanan denkleme geri dönüldüğünde,  $\lambda_{nm} = \lambda_{nm}$  için,

$$T_{nm}(t) = a_{nm} \cos(\sqrt{\lambda_{nm}} ct) + b_{nm} \sin(\sqrt{\lambda_{nm}} ct), \quad a_{nm}, b_{nm} = \text{abit}$$

fonksiyonları elde edilir. Bu, (6.4.1) ve (6.4.3)'den, şimdi original BSDP' nin çözümünün

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{nm}(x, y) T_{nm}(t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi y}{K} \left[ a_{nm} \cos(\sqrt{\lambda_{nm}} ct) + b_{nm} \sin(\sqrt{\lambda_{nm}} ct) \right] \end{aligned} \quad (6.4.7)$$

formunda bir gösterime sahip olduğu sonucu çıkarılabilir.

(6.4.7)'nin her bir terimi, denklemi ve sınır koşullarını sağlar. İlk başlangıç koşulunu sağlamak için,

$$u(x, y, 0) = f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_{nm} \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \sin \frac{m\pi y}{K},$$

olmalıdır.

İkinci eşitliği  $\sin \frac{p\pi y}{K}$   $p = 2, 3, \dots$  ile çarparak, çıkan sonucu  $y$ 'ye göre  $[0, K]$  üstünde integrali alınıp, (3.1.5) formülü göz önünde bulundurarak

$$\int_0^K f(x, y) \sin \frac{p\pi y}{K} dy = \frac{K}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_{np} \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

bulunur.

Bu yeni eşitliği  $\sin \frac{q\pi x}{L}$   $q = 2, 3, \dots$  ile çarparak, ve  $x$ 'e göre  $[0, L]$  üstünde integralini alarak,

$$\int_0^L \int_0^K f(x, y) \sin \frac{p\pi y}{K} \sin \frac{q\pi x}{L} dy dx = \frac{LK}{4} a_{qp}.$$

ifadesine ulaşılır ki bundan,  $q$  yerine  $n$  ve  $p$  yerine  $m$  yazarak,

$$a_{nm} = \frac{4}{LK} \int_0^L \int_0^K f(x, y) \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi y}{K} dy dx, \quad n, m = 1, 2, \dots \quad (6.4.8)$$

ikinci başlangıç koşulu ise yukarıdaki gibi,

$$u_t(x, y, 0) = z(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_m^{-1} c b_{nm} \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \sin \frac{m\pi y}{K};$$

sağlanır. Buradan,

$$b_{nm} = \frac{4}{LK \sqrt{\lambda_m} c} \int_0^L \int_0^K g(x, y) \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi y}{K} dy dx, \quad n, m = 2, 3, \dots \quad (6.4.9)$$

bulunur.

Sonuçta, problemin çözümü (6.4.8) ve (6.4.9)'dan hesaplanan  $a_{nm}$  ve  $b_{nm}$  katsayılarıyla ifade edilen (5.51) çift katlı Fourier serisi ile verilir.



**Örnek 6.4.1.**

BSDP

$$u_{tt}(x, y, t) = u_{xx}(x, y, t) + u_{yy}(x, y, t).$$

$$0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad t > 0,$$

$$u(0, y, t) = 0, \quad u(1, y, t) = 0, \quad 0 < y < 1, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0, t) = 0, \quad u(x, 1, t) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

$$u(x, y, 0) = \sin(2\pi x) [\sin(\frac{1}{2}\pi y) - \sin(\pi y)],$$

$$0 < x < 1, \quad 0 < y < 1,$$

$$u_t(x, y, 0) = \sin(2\pi x) \sin(\frac{1}{2}\pi y) \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1,$$

içinde  $c=1$ ,  $L=1$ , ve  $K=2$  olur, böylece,  $f$  ve  $q$ 'nun çift katlı Fourier serisi ile başlangıç değer fonksiyonları karşılaştırıldığında,

$$a_{21} = 0, \quad a_{22} = -\frac{1}{4}, \quad \sqrt{\lambda_{-1}} b_{21} = 0,$$

iken kalan  $a_{nm}$  ve  $b_{nm}$  katsayılarının sıfır olduğu görülür. Böylece

$$\lambda_{-1} = (2\pi)^2 + (\pi/2)^2 = 7\pi^2/4,$$

bulunur.

(6.4.7) formülü

$$\begin{aligned} u(x, y, t) = & \sin(2\pi x) \sin(\frac{1}{2}\pi y) \cos(\frac{1}{2}\sqrt{17}\pi t) \\ & - \frac{1}{4} \sin(2\pi x) \sin(\pi y) \cos(\sqrt{5}\pi t) \\ & + 4\pi \sqrt{17} \sin(2\pi x) \sin(\frac{1}{2}\pi y) \sin(\frac{1}{2}\sqrt{17}\pi t). \end{aligned}$$

çözümünü verir.

**Titreşen dairesel zar:** Bu tipteki iki boyutlu bir cisim  $0 \leq r \leq \rho$ ,  $-\tau < \vartheta \leq \tau$  olacak şekilde kutupsal koordinatlarla tanımlanır. Eğer cisim kuvveti, ihmal edilebilir ve  $r=\alpha$  sınırı, sabitleştirilmiş ise, o zaman zarın düşey titreşimleri, BSDP

$$u_{tt}(r, \theta, t) = c^2 (\Delta u)(r, \theta, t), \quad 0 < r < \alpha, \quad -\pi < \theta < \pi, \quad t > 0,$$

$$u(\alpha, \theta, t) = 0, \quad u(0, \theta, t) \text{ sınırlı} \quad -\pi < \theta < \pi, \quad t > 0$$

$$u(r, -\pi, t) = u(r, \pi, t), \quad u_\theta(r, -\pi, t) = u_\theta(r, \pi, t), \quad 0 < r < \alpha, \quad t > 0,$$

$$u(r, \theta, 0) = f(r, \theta), \quad u_t(r, \theta, 0) = g(r, \theta), \quad 0 < r < \alpha, \quad -\pi < \theta < \pi$$

şeklinde matematiksel olarak modellenir. Bu problem için (5.54) şeklinde bir çözüm aranır.

Bu son üç sınır koşulu fiziksel olaylardan ortaya çıkmıştır. Düzgün  $f$  ve  $g$  fonksiyonları için çözümün, diskin merkezinde sınırlı ve herhangi bir sınırla birlikte eş merkezli daire boyunca türeviyle birlikte sürekli olması gerekir.

Denklem ve sınır koşulları lineer ve homojen olduğundan, değişkenlerine ayırma metodu kullanılır ve

$$u(r, \theta, t) = S(r, \theta) T(t). \quad (6.4.10)$$

formunda bir çözüm aranır. O zaman standart işlemlere göre denklem ve sınır koşulları  $\lambda$  sabit, ayrışım sabiti olacak şekilde  $S$

$$(\Delta S)(r, \theta) + \lambda^2 S(r, \theta) = 0, \quad 0 < r < \alpha, \quad -\pi < \theta < \pi$$

$$S(\alpha, \theta) = 0, \quad S(0, \theta) \text{ sınırlı} \quad -\pi < \theta < \pi \quad (6.4.11)$$

$$S(r, -\pi) = S(r, \pi), \quad S_\theta(r, -\pi) = S_\theta(r, \pi), \quad 0 < r < \alpha,$$

probleminin bir çözümü iken

$T$ ,

$$T''(t) + \lambda^2 T(t) = 0, \quad t > 0$$

sağlar.

$S$  için denklem ve sınır koşulları lineer ve homojen olduğundan,

$$S(r, \theta) = R(r) \Theta(\theta). \quad (6.4.12)$$

formunda  $S$ 'yi aramaktır.

Daha sonra, kutupsal koordinatlarda Laplasiyan'ın ifadesini kullanarak

$$R''(r) + r^{-1} R'(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} R(r) + \lambda R(r) = 0, \quad (6.4.12)$$

biçiminde yazılır ki,  $r = R(r)\Theta(\theta)$  ya bölümünden,  $\lambda = \mu^2$  =sabit, ikinci bir ayrışım sabiti olacak şekilde,

$$-\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = \frac{r^2 R''(r) + r R'(r)}{R(r)} + l(l+1) = \mu^2$$

bulunur.

Sınır koşulları uygulanarak,  $R$  ve  $\Theta$ 'nın, Sturm-Liouville problemlerinin çözümleri olduğu çıkarılır. İlk olarak,  $\mu$ , özdeğerleri ve öz fonksiyonları,

$$\mu_n^2 = n^2, \quad \Theta_n(\theta) = \cos(n\theta), \quad \Theta_{-n}(\theta) = \sin(n\theta), \quad n = 1, 2, \dots$$

olan

$$\begin{aligned} \Theta(\theta) + \Theta(\theta) &= 0, \quad -\tau < \theta < \tau \\ \Theta(\theta) &= 0, \quad \Theta(\theta) = 0, \quad \theta = \tau \end{aligned}$$

periyodik S-L problemini sağlar.  $n$ 'nin her bir değeri için,

$$\begin{aligned} r^2 R_n''(r) + r R_n'(r) + (\lambda - l(l+1)) R_n(r) &= 0, \quad 0 < r < \alpha \\ R_n(\alpha) &= 0, \quad R_n(0) \text{ sınırlı} \end{aligned} \quad (6.4.13)$$

singüler S-L probleminin bir  $R_n$  çözümü hesaplanır.

$n=0$  olduğunda, bu problem, Örnek 4.2.5'de verilen forma indirgenir. Örnek, (6.4.13), sayılabilecek kadar çoklukta

$$0 < \lambda_{1,1} < \lambda_{1,2} < \dots < \lambda_{m,1} < \dots \rightarrow \infty \text{ as } m \rightarrow \infty$$

Özdeğerlerine ve karşılık gelen  $\Theta_{nl}$  üstünde  $r$  ağırlığıyla ortogonal olan,

$$\int_0^\alpha R_{np}(r) R_{nq}(r) r dr = 0, \quad p \neq q.$$

$R_{nm}$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , öz fonksiyonlarının tam bir kümesine sahip olduğu görülür.

$\xi = \sqrt{\lambda} r$  ve  $R_n(r) = \mathfrak{R}_n(\xi/\sqrt{\lambda}) = \mathfrak{P}_n(\xi)$  olarak, (6.4.13)'deki denklemi

$$\xi^2 \Phi_n(\xi) + \xi \mathfrak{P}_n(\xi) + (\xi^2 - n^2) \Phi_n(\xi) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.4.14)$$

formuna çevrilir. Bu,  $n$ 'inci dereceden Bessel denklemidir. Birinci/ikinci çeşit ve  $n$ 'inci dereceden Bessel fonksiyonları olarak adlandırılan iki lineer bağımsız

$J_n(\xi)$  ve  $Y_n(\xi)$  çözümlerine sahiptir yani,  $\xi \rightarrow 0$  giderken,

$$J_n(\xi) \approx \begin{cases} 1, & n = 0, \\ (1/(2^n n!)) \xi^n, & n > 0, \end{cases}$$

$$Y_n(\xi) \approx \begin{cases} (2/\pi) \ln \xi & n = 0, \\ -(2^n (n-1)!/\pi) \xi^{-n}, & n > 0. \end{cases} \quad (6.4.15)$$

olduğu bilinir.

Sonuçta, (6.4.15)'in genel çözümü ,

$$R_n(r) = \mathfrak{C}_{1n} J_n(\sqrt{\lambda} r) + \mathfrak{C}_{2n} Y_n(\sqrt{\lambda} r), \quad \mathfrak{C}_{1n}, \mathfrak{C}_{2n} = \text{abit}$$

olur.  $R_n, r$  'da sınırlı olması zorunlu olduğundan dolayı, (6.4.5) göz önüne alarak,  $\mathfrak{C}_{2n} = 0$  'a sahip olmalıdır. Böylece,

$$R_n(r) = \mathfrak{C}_{1n} J_n(\sqrt{\lambda} r).$$

dır.

Aynı zamanda,  $R_n(r) < \infty$  koşulundan,  $J_n(\sqrt{\lambda} r) < \infty$  çıkarılır. Eğer  $J_n$ 'nin köklerini,  $\xi_{n,m}, m = 0, 1, 2, \dots$  ile gösterirsek, o zaman (6.4.14)'ün özdeğerleri ve özfonksiyonları

$$\lambda_{n,m} = \left( \frac{\xi_{n,m}}{\alpha} \right)^2, \quad R_{nm}(r) = J_n \left( \frac{\xi_{n,m} r}{\alpha} \right) \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

olur.

Önceden belirttiğimiz  $R_{nm}$ 'nin ortogonal özelliği şimdi, her bir sabitlenmiş  $n$  değeri için

$$\int_0^\alpha J_n\left(\frac{\xi_{np}r}{\alpha}\right) J_n\left(\frac{\xi_{nq}r}{\alpha}\right) r dr = 0, \quad p \neq q. \quad (6.4.16)$$

olur.

Aynı zamanda, öz fonksiyonlar kümesi, tam olduğundan, herhangi bir parçalı düzgün  $h$  fonksiyonu, ve  $n=0,1,2,\dots$ , için

$$h(r) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m R_{nm}(r) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m J_n\left(\frac{\xi_{nm}r}{\alpha}\right)$$

formunda genelleştirilmiş bir Fourier seri gösterimine sahiptir. Burada, diğer S-L problemlerindeki gibi

$$c_m = \frac{\int_0^a h(r) J_n(\xi_{nm}r/\alpha) r dr}{\int_0^a J_n^2(\xi_{nm}r/\alpha) r dr}$$

T zaman bileşeni tarafından sağlanan denkleme dönerek,  $\lambda_{nm} = \xi_{nm}^2/\alpha^2$  için,

$$T_{nm}(t) = A_{nm} \cos \frac{\xi_{nm}ct}{\alpha} + B_{nm} \sin \frac{\xi_{nm}ct}{\alpha}, \quad A_{nm}, B_{nm} = \text{sabit}$$

çözümlerini elde edilir.

Kolaylık açısından,  $g(r,t) = 0$  olduğunu kabul edelim. O zaman,  $T_{nm}$  deki sinüs terimleri yok olur.

Böylece, eğer (6.4.10) ve (6.4.12)'ye göre  $u$ 'nun değişik bileşenlerini bir araya getirirsek, probleminin çözümünün,

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} \Theta_{1n}(\theta) + b_{nm} \Theta_{2n}(\theta) \bar{R}_{nm}(r) T_{nm}(t)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} \cos(n\theta) + b_{nm} \sin(n\theta) J_n\left(\frac{\xi_{nm} r}{\alpha}\right) \cos \frac{\xi_{nm} ct}{\alpha}.$$

formunda olması gerektiği sonucuna varılır. Bu toplamdaki her bir terim, denklemi, sınır koşullarını ve ikinci başlangıç koşulunu sağlar. İlk başlangıç koşulunu sağlamak için,

$$u(r, \theta) = f(r, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_{nm} \cos(n\theta) + b_{nm} \sin(n\theta) \right\} J_n\left(\frac{\xi_{nm} r}{\alpha}\right).$$

olup, şimdi  $a_{nm}$  ve  $b_{nm}$ , bu tipteki diğer problemlerde olduğu gibi,  $\cos(n\theta)$ ,  $\sin(n\theta)$ , ve  $L = \tau$  ile (3.1.4), (3.1.5) ve (3.1.6) ve (6.4.16) tarafından ifade edilen  $J_n(\xi_{nm} r / \alpha)$  ni ortogonallik özelliklerini kullanarak hesaplanır.

Dairesel simetrik durumda yani, veri fonksiyonları,  $\theta$ 'dan bağımsız olduğunda,  $u(r,t)=R(r)T(t)$  çözüm ayrımı kullanılır. Burada, problem, sıfırıncı dereceden Bessel denkleminin çözümüne indirgenir. Sonunda,

$$u(r,t) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[ \cos(\sqrt{\lambda_l} ct) + b_n \sin(\sqrt{\lambda_l} ct) \right] J_0(\sqrt{\lambda_l} r),$$

elde edilir. Burada  $\lambda_l$ ,  $\lambda_{-n}$ 'nin aynısı ve  $J_0(\sqrt{\lambda_l} r)$  fonksiyonlarının  $[0,a]$  üstünde  $r$  ağırlığı ile ortogonallik özelliğinden belirlenen  $a_n$  ve  $b_n$ 'dir.

## 7. HOMOJEN OLMAYAN LİNEER PROBLEMLER

Değişkenlerine ayırma metodu denklem ve sınır koşulları homojen ise uygulanmaktadır. Bununla birlikte bir matematiksel model homojen olmayan terim veya sınır noktalarında tanımlanan veriler içerebilir. Bu bölümde bu durumları ifade edilmektedir. Yani homojen olmayan terim içeren denklemlerin çözümleri ifade edilecektir.

### 7.1. Denge Çözümleri

Daha önce (düzgün durgun, veya zamandan bağımsız) yüksek boyutlu ısı denklemleri için denge çözümleri ele alınmıştı.

Burada düzgün bir çubuk için denge ısı dağılımı göz önüne alınmaktadır.

**Uç noktalarda tanımlı ısı :** Dış kaynaklardan etkilenen bir çubuktaki başlangıç sınır değer problemi

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) &= k u_{xx}(x,t) + q(x,t), & 0 < x < L, & \quad t > 0 \\ u(0,t) &= \alpha(t), \quad u(L,t) = \beta(t), & & \quad t > 0 \\ u(x,0) &= f(x), & 0 < x < L, & \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $\alpha$ ,  $\beta$  ve  $f$  belirli fonksiyonlardır. Eğer  $\alpha$  ve  $\beta$  sabit ve  $q=q(x)$  ise o zaman denge çözümü  $u_{\infty} = u_{\infty}(x)$  olup,

$$\begin{aligned} u_{\infty}''(x) + f(x) &= 0, & 0 < x < L \\ u_{\infty}(0) &= \alpha, & u_{\infty}(L) &= \beta \end{aligned}$$

sınır değer problemini sağlar.

Burada  $q = 1/k$ 'ya bağlı olup sınır koşulları  $u_{\infty}$ 'un hesaplanmasında bir etkiye sahip değildir. Zamandan bağımsız problemler için fiziksel olarak bir denge çözümü varsa,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x,t) = u_{\infty}(x)$$

şeklinde tanımlanır.

Burada sonsuz alt indis kullanmamız denge çözümü anlamına gelmektedir.

### Örnek 7.1.1.

Başlangıç sınır değer problemi için denge ısısı

$$u_t(x,t) = k u_{xx}(x,t) + \gamma x - \beta, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

$$u(0,t) = \gamma, \quad u(2,t) = -\beta, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = \sin\left(\frac{1}{2}\pi x\right) \quad 0 < x < L.$$

Buradan sınır koşullarını kullanarak

$$4u_{xx}(x) + \gamma x - \beta = 0, \quad 0 < x < L$$

$$u_{xx}(0) = \gamma, \quad u_{xx}(2) = -\beta$$

elde edilir.

Bu denklemi 2 defa integre edersek,

$$u_{xx}(x) = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{8}x^2 + C_1x + C_2, \quad C_1, C_2 = \beta t$$

bulunur.

Burada  $C_1$  ve  $C_2$  sabitleri sınır koşullarından bulunabilir. Böylece denge ısısının çözümü,

$$u_{xx}(x) = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{8}x^2 - \frac{17}{12}x +$$

dır.

### Uç Noktalarda Akıcı Durum:

Genel olarak başlangıç sınır değer problemi

$$u_t(x,t) = k u_{xx}(t) + q(x,t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$



$$u_x(0,t) = \alpha(t), \quad u_x(L,t) = \beta(t), \quad t > 0$$

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < L$$

tanımlanır.

Yukarıda olduğu gibi bir denge çözümü eğer  $\alpha$  ve  $\beta$  sabit ve  $q$   $t$ 'den bağımsız ise vardır.

Böylece çözüm sınır değer problemini sağlar ve

$$u_{xx}(x) + r(x) = 0, \quad 0 < x < L$$

$$u'(0) = \alpha \quad u'(L) = \beta$$

B.S.D. probleminin  $u(x,t)$  çözümünün  $t \rightarrow \infty$  limiti hesaplanabilir. Bu durumda başlangıç koşullarını göz ardı edebiliriz. Gerçekten denge ısılarının hesaplanmasında bu koşul temel rol oynamaktadır. Tamamen zamandan bağımsız problemler de yüksek enerjinin korunumu yasası göz önüne alırsak Kısmi Diferansiyel Denklem kendisine denk olur. Böylece  $0$ ' dan  $L$ 'ye terim terim integre edip sınır koşullarını kullanarak,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^L u(x,t) dx &= k \int_0^L u_{xx}(x,t) dx + \int_0^L q(x,t) dx \\ &= k [u_x(L,t) - u_x(0,t)] + \int_0^L q(x,t) dx = \int_0^L q(x,t) dx \end{aligned}$$

elde edilir.

Tamamıyla yalıtılmış bir çubuk verilmiş olsun, fiziksel olarak bu çubuktaki kaynağın tüm dış ortamdan etkilenmediğini söylenilebilir. Böylece bu kaynak sıfırdır,

$$\text{diğer bir ifadeyle} \quad \int_0^L q(x,t) dx = 0. \quad \frac{d}{dt} \int_0^L u(x,t) dx$$

söz konusu yukarıdaki eşitliği göstermektedir ki bu integral her  $t$  için sabittir ve böylece ,

$$\int_0^L u(x,0) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^L u(x,t) dx,$$

diğer bir ifadeyle

$$\int_0^L u_{\infty}'(x) dx = \int_0^L f(x) dx \quad (7.1.1)$$

### Örnek 7.1.2.

Başlangıç Sınır Değer Problemi için denge ısısı

$$u_t(x, t) = k u_{xx}(x, t) + \gamma \quad , \quad 0 < x < 2, \quad t > 0$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(2, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{2}, \quad 0 < x < 2$$

şeklinde verilsin. Burada  $k$  sabit ve

$$4k u_{\infty}''(x) + \gamma = 0, \quad 0 < x < 2$$

$$u_{\infty}'(0) = 0, \quad u_{\infty}'(2) = 0,$$

sınır değer problemi sağlanır.

Böylece

$$u_{\infty}'(x) = -\frac{1}{8} \gamma x^2 - \frac{1}{4} C_1 x + C_2$$

elde ederiz. Sınır koşullarını yüklenildiğinde,  $C_1 = 0$  ve  $\gamma = 0$  tekrar integral alırsak,

$$u_{\infty}(x) = \frac{1}{24} x^3 - \frac{1}{8} C_2 x^2 + C_3$$

elde edilir.

Bundan dolayı,

$$\int_0^L f(x) dx = \int_0^2 \sin \frac{\pi x}{2} dx = -\frac{2}{\pi} \left[ \cos \frac{\pi x}{2} \right]_0^2 = \frac{4}{\pi},$$

$$\begin{aligned}\int_0^L u(x) dx &= \int_0^2 \left( \frac{1}{24} x^3 - \frac{1}{8} x^2 + C_2 \right) dx \\ &= \left[ \frac{1}{96} x^4 - \frac{1}{24} x^3 + C_2 x \right]_0^2 = 2C_2 - \frac{1}{6},\end{aligned}$$

(7.1.1)'den  $C_2 = \frac{2}{\pi} + \frac{1}{12}$  böylece,

$$u_\infty(x) = \frac{1}{24} x^3 - \frac{1}{8} x^2 + \frac{2}{\pi} + \frac{1}{12}.$$

**Farklı Sınır Koşulları:** Farklı sınır koşulları denge çözümünde kullandığımız metod uygulanarak aynen çözülebilir. Bunu bir örnek üzerinde açıklarsak.

### Örnek 7.1.3.

$$u_t(x, t) = k u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < 2, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(2, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{2}, \quad 0 < x < 2$$

sınır değer probleminin denge ısısını bulmak için sınır verileriyle çözüme ihtiyaç vardır. Böylece

$$u''_\infty(x) = 0, \quad 0 < x < L$$

$$u_\infty(0) = 0, \quad u'(2) = 0$$

Kolayca görülebilir ki bu problemin çözümü  $u(x) \equiv 0$

### Örnek 7.1.4

$$u_t(x, t) = k u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < 2, \quad t > 0$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad u(0, t) = 1, \quad u(2, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{2}, \quad 0 < x < 2$$

BSDP' nin denge çözümü ,

$$u''(\infty, x) = 0, \quad 0 < x < \infty$$

$$u'_{\infty}(0) = \frac{1}{2} [u'_{\infty}(0) - \frac{1}{2} u'_{\infty}(0)] = -$$

sağlar ve burada  $u_{,\infty}(x) = \frac{1}{2} x + \dots$

Denge ısıları zaman zaman yüksek boyuttaki BSDP içinde uygulanabilir.

### Dairesel Bir Bölgedeki Isı Dağılımı:

Geometrik olarak bölgeyi göz önüne alındığında kutupsal koordinattaki Laplace denklemi kullanılır.

#### Örnek 7.1.5.

$$u_t(r, t) = kr^{-1} (ru_r(r, t))_r = 0, \quad 1 < r < 2, \quad t > 0$$

$$u(1, t) = 0, \quad u(2, t) = 1, \quad t > 0$$

$$u(r, 0) = f(r), \quad 1 < r < 2$$

BSDP ısı kaynağı düzgün dairesel bir bölgede sınırın içinde veya dışında iki farklı sabit ısı kaynağı olduğu zaman tanımlanabilir. Başlangıç koşulları bölge dairesel olduğunda simetriktir ve  $u$  çözümü  $r$  kutupsal açılarından bağımsız alınabilir. Bu durumda sınır değeri problemini sağlayan denge ısısı

$$u'_{\infty}(r) = 0, \quad 1 < r < 2$$

$$u_{\infty}(1) = 0, \quad u_{\infty}(2) = 1$$

şeklinde tanımlanır.

Denklemleri integre ederek ,

$$ru'_{,\infty}(r) = C_1 - bt$$

bulunabilir.

Bu denklemi bir defa daha integre ederek , genel çözümü,

$$u_{\infty}(r) = C_1 \ln r + C_2, \quad C_2 = \frac{1}{2} bt$$

bulunabilir.

Sınır koşullarını kullanarak  $r=1$  alındığında  $C_2 = \frac{1}{2}$  olduğu görülür. Eğer  $r=2$  alınırsa  $C_1 = \frac{1}{2 \ln 2}$  bulunur. Böylece

$$u_\infty(r) = \frac{4}{\ln 2} \ln r + \frac{1}{2}.$$

bulunur.

## 7.2. Homojen Olmayan Problemler

### Zamandan Bağımsız Sınır Koşulları:

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= \tau u_{xx}(x,t), & 0 < x < L, & & t > 0 \\ u(0,t) &= \alpha & u(L,t) &= \beta, & t > 0 \\ u(x,0) &= f(x), & 0 < x < L \end{aligned} \quad (7.2.1)$$

Başlangıç sınır değer problemini göz önüne alalım. Burada  $k, \tau, t$  sabit ve  $f$  belirli bir fonksiyondur. Değişkenlerine ayırma metodunu kullanmak için sınır koşullarını homojen hale getirmek gerekir bunu yaparken diferansiyel denklemin homojenliğini korumak zorundadır.

Bir önceki kısımda uyguladığımız yöntemi kullanırsak, bu problem için denge çözümü,

$$u_\infty(x) = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{L}x, \quad 0 < x < L \quad (7.2.2)$$

şeklindedir.

$v = u - u_\infty$  olarak BSDP' nin çözümü,

$$\begin{aligned} v_t(x,t) &= k v_{xx}(x,t), & 0 < x < L, & & t > 0 \\ v(0,t) &= 0, & v(L,t) &= 0, & t > 0 \\ v(x,0) &= f(x) - u_\infty(x), & 0 < x < L \end{aligned} \quad \text{şeklindedir.}$$

Bu yeni BSDP (6.1) bölümünde (6.1.10)'u kullanarak

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-(n^2\pi^2/L^2)t}$$

bulunur. Burada (6.1.9)'dan  $f$  yerine  $f - u_{\infty}$  alabiliriz.

Böylece,

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L [f(x) - u_{\infty}(x)] \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (7.2.3)$$

olup sonuç olarak, (7.2.1)'nin çözümü,

$$u(x,t) = u_{\infty}(x) + v(x,t) = u_{\infty}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t}$$

şeklindedir ve  $u_{\infty}$  ve  $b_n$  sırasıyla (7.2.2) ve (7.2.3)'te verildiği şekildedir.

#### Sınır koşulları ve Zamandan Bağımsız Kaynaklar :

$$u_t(x,t) = k u_{xx}(x,t) + q(x), \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

$$u(0,t) = \alpha, \quad u(L,t) = \beta, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < L$$

şeklinde matematiksel olarak modellenebilir. Yukarıda tanımladığımız metodu BSDP ile çalışırken de kullanılabilir. (7.1.1) kısmında görüldüğü gibi denge ısısını genişleterek alınabilir.

Diğer sınır koşullarında ise benzer bir yöntem uygulanabilir. Bu durumu bir örnek ile açıklayalım.

#### Örnek 7.2.1.

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + \pi^2 \sin(\pi x), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = x^2, \quad 0 < x < 1$$

probleminin  $u_{\infty}$  denge çözümü,

$$u''_{\infty}(x) + \pi^2 \sin(\pi x) = 0, \quad 0 < x < 1$$

$$u'_{\infty}(0) = 0, \quad u'_{\infty}(1) = 0$$

sağlar.

Bu sınır değer probleminin çözümü  $u_{\infty}(x) = \sin(\pi x) - \frac{1}{2}x^2$  olup bu durumda  $v(x) = u(x) - \sin(\pi x) + \frac{1}{2}x^2$  alındığında BSDP

$$v_t(x, t) = v_{xx}(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$v(0, t) = 0, \quad v(1, t) = 0, \quad t > 0$$

$$v(x, 0) = x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \sin(\pi x), \quad 0 < x < 1$$

şeklinde verilir. Bu da değişkenlerine ayırma metoduyla çözülebilir..

### Örnek 7.2.2.

BSDP

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) + x - \gamma \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3, \quad 0 < x < 1,$$

şeklinde verilsin. Burada  $\gamma = sbt$ ,  $u_{\infty}$  zamandan bağımsız çözüme sahip olduğundan dolayı bu çözüm,

$$u''_{\infty}(x) + x - \gamma = 0, \quad 0 < x < 1$$

$$u'_{\infty}(0) = 0, \quad u'_{\infty}(1) = 0$$

denklemini sağlamalıdır.

İlk önce denklemi integralleyerek,

$$u'_{\infty}(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \gamma + C_1, \quad C_1 = \frac{1}{2}bt$$

Eğer  $\gamma = \frac{1}{2}$  ve  $C_1 = 0$  ise sınır koşulları sağlanır. Diğer bir ifade ile,

$$u_\infty(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + C_2, \quad C_2 = \gamma bt$$

Örnek 7.2.1'deki prosedürü takip edersek,  $C_2 = 0$  olduğu görülebilir.

$$v(x) = u(x) + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2$$

olarak Örnek 6.1.3'deki çözülen problemi elde etmiş oluruz. Böylece verilen problemin çözümü

$$u(x,t) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{1}{n^2} \right)^n - \frac{2}{n^2 \pi^2} \cos(n\pi x) e^{-n^2 \pi^2 t}.$$

şeklindedir.

### Genel Durum:

$$u_t(x,t) = k u_{xx}(x,t) + q(x,t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

$$u(0,t) = \alpha(t), \quad u(L,t) = \beta(t), \quad t > 0$$

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < L$$

BSDP'ni göz önüne alırsak ki burada  $u$ ,  $t$ ,  $f$  ve  $q$   $x$ 'in fonksiyonlardır.

$$p(x,t) = \gamma_1(t) + \gamma_2(t)x$$

$x$ 'in bir lineer fonksiyonu olmak üzere, verilen sınır koşullarını sağlar. Yani

$$p(0,t) = \alpha(t) \text{ ve } p(L,t) = \beta(t) \text{ olup } C_1 = \gamma_1 \text{ ve } C_2 = \frac{\beta - \alpha}{L} \text{ bulunur. } u = v + p$$

yazarsak verilen başlangıç sınır değer problemi koyarsak verilen BSDP

$$v_t(x,t) = k v_{xx}(x,t) + q(x,t) - p_t(x,t) + k p_{xx}(x,t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

$$v(0,t) = 0, \quad v(L,t) = 0, \quad t > 0$$

$$v(x,0) = f(x) - p(x,0), \quad 0 < x < L$$



şekline girer.

Burada başlangıç koşulları homojen ve denklem homojen değildir.. Bu tür problemler diğer tipteki sınır koşullarıyla benzer bir şekilde, özellikle öz fonksiyonların dağılımı metoduyla çözülebilir ki bu konu sonraki bölümde verilecektir.

### Örnek 7.2.3.

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + xt, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u(0,t) = -t, \quad u(1,t) = t^2, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = x, \quad 0 < x < 1$$

Başlangıç sınır değer problemi verilsin. Burada  $L = 1$ ,  $\alpha(t) = -t$ ,  $\beta(t) = t^2$  ve  $q(x,t) = xt$  olup

$$p(x,t) = -t + t^2 + xt$$

bulunur.

$$u(x,t) = v(x,t) - t + t^2 + xt$$

elde edilir.

Böylece problem

$$v_t(x,t) = v_{xx}(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$v(0,t) = 0, \quad v(1,t) = 0, \quad t > 0$$

$$v(x,0) = 0, \quad 0 < x < 1$$

olur. Bu problemde sınır koşulları homojendir.

### Örnek 7.2.4.

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + xt, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u_x(0,t) = t, \quad u_x(1,t) = t^2, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = x, \quad 0 < x < 1$$

Başlangıç sınır değer problemini farklı şekilde ele almamız gerekmektedir. Burada  $p$ 'nin yerine  $p_x$  alırsak ki bu da  $x$ 'in lineer polinomu olup sınır koşullarını sağlar yani

$$p_x(x,t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)x, \quad p_x(0,t) = 0, \quad p_x(1,t) = 2$$

$p_x(x,t) = -(t^2 - 1)x$ , ifadesini integre ederek,

$$p(x,t) = -\frac{1}{2}(t^2 - 1)x^2$$

elde edilir.

Burada bir tek  $p$  fonksiyonuna ihtiyaç duyulduğunda integrasyon sabiti yerine sıfır alınabilir. Böylece

$$u(x,t) = v(x,t) + \frac{1}{2}(t^2 - 1)x^2 \text{ elde edilir.}$$

Şimdi original yeni başlangıç sınır değer problemimiz

$$v_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + t^2 - t + xt - \frac{1}{2}x^2(2t - 1), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$v_x(0,t) = 0, \quad v_x(1,t) = 0, \quad t > 0 \quad v(x,0) = x + \frac{1}{2}x^2, \quad 0 < x < 1$$

şekline indirgenmiş olur ki bu denklem öz fonksiyonların dağılım metoduyla çözülebilir.

## 8. ÖZ FONKSİYONLARIN DAĞILIM METODU

### 8.1. Isı Denklemi

$$u_t(x,t) = k u_{xx}(x,t) + q(x,t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = f(x) \quad 0 < x < L$$

BSDP verilsin. Bu problemin homojen kısmına karşılık gelen öz değer ve öz fonksiyonlar sırasıyla ( $q(x,t)=0$ )

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, \dots$$

şeklindedir.

$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$  tam bir küme olduğundan

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) X_n(x) \quad (8.1.1)$$

şeklinde bir çözüm aranabilir. Bu seri düzgün yakınsak olduğundan terim terim diferansiyelleyerek

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} c_n'(t) X_n(x) &= k \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) X_n''(x) + q(x,t) \\ &= -k \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \lambda_n X_n(x) + q(x,t) \end{aligned}$$

denklemini elde ederiz.

$X_n'' + \lambda_n X_n = 0$  denklemini kullanarak

$$\sum_{n=1}^{\infty} [c_n'(t) + k \lambda_n c_n(t)] X_n(x) = q(x,t)$$

şeklinde yazılabilir. Eşitliğin her iki tarafını  $X_m(x)$  ile çarpıp  $[0,L]$  integre edip aralığında  $X_n$ 'nin ortogonallığını kullanırsak

$$c'_m(t) + k\lambda_{..} c_m(t) \int_0^L X_m^2(x) dx = \int_0^L q(x,t) X_m(x) dx$$

yazılabilir.

$$c'_n(t) + k\lambda_{..} c_n(t) = \frac{\int_0^L q(x,t) X_n(x) dx}{\int_0^L X_n^2(x) dx}, \quad t > 0, n=1,2,\dots \quad (8.1.2)$$

ifadesini ve başlangıç verilerini göz önüne alarak,

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(0) X_n(x)$$

ve

$$c_n(0) = \frac{\int_0^L f(x) X_n(x) dx}{\int_0^L X_n^2(x) dx}, \quad n = 1,2,\dots \quad (8.1.3)$$

elde edilir. Burada

$$q(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) X_n(x), \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n X_n(x)$$

şeklindedir.

Burada  $q_n(t)$  ve  $f_n$  (8.1.2) ve (8.1.3)'ün sırasıyla sağ tarafında verilen terimlerdir. Böylece BSDP' nin çözümü (8.1.1) formundadır.  $c_n(t)$  katsayıları sırasıyla (8.1.2) ve (8.1.3)'den hesaplanabilir.

BSDP sınır koşullarının diğer tipleri içinde aynen uygulanabilir.

### Örnek 8.1.1

Aşağıdaki BSDP' nin özdeğer ve öz fonksiyonları

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + \pi^2 e^{-4\pi^2 t} \sin(5\pi x), \quad 0 < x < 1, t > 0$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = 3 \sin(4\pi x), \quad 0 < x < 1$$

(Burada  $L=1$ ) sırasıyla  $\lambda_n = n^2 \pi^2$  ve  $X_n(x) = \sin(n\pi x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  şeklindedir.

(8.1.2)'de  $q(x,t) = \pi^2 e^{-4\pi^2 t} \sin(5\pi x)$  alırsak ( $k=1$ ) ve (8.1.3)'de  $f(x) = 3 \sin(4\pi x)$  alırsak sınır değer problemine

$$c'_n(t) + n^2 \pi^2 c_n(t) = \begin{cases} \pi^2 e^{-24\pi^2 t}, & n = 5 \quad t > 0, \\ 0, & n \neq 5 \quad t > 0 \end{cases}$$

$$c_n(0) = \begin{cases} 3, & n = 4 \\ 0, & n \neq 4 \end{cases}$$

ulaşılır.

Böylece  $n=4$  için

$$c'_4(t) + 6\pi^2 c_4(t) = 0 \quad t > 0$$

$$c_4(0) = 3$$

bulunur. Burada  $c_4(t) = 3e^{-6\pi^2 t}$  dır.

$n=5$  için

$$c'_5(t) + 5\pi^2 c_5(t) = \pi^2 e^{-4\pi^2 t}, \quad t > 0$$

$$c_5(0) = 0$$

ile çözüm  $c_5(t) = e^{-5\pi^2 t} \left( \pi^2 t - \frac{1}{5} \right)$  ve  $n \neq 4, 5$  için

$$c_n'(t) + n^2 \pi^2 c_n(t) = 0, t > 0$$

$$c_n(0) = 1$$

ile çözüm  $c_n(t)$  elde edilir. Sonuç olarak (8.1.2)'de BSDP'nin çözümü,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= c_4(t)X_4(x) + c_5(t)X_5(x) \\ &= e^{-6\pi^2 t} \sin(4\pi x) + e^{-5\pi^2 t} \left( \frac{\pi^2 t}{2} - \frac{1}{2} \right) \sin(5\pi x) \end{aligned}$$

şeklindedir.

### Örnek 8.1.2.

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + xe^{-t}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = x - \frac{1}{2}, \quad 0 < x < 1$$

BSDP Örnek 8.1.1'deki gibi aynı özdeğer ve öz fonksiyonlara sahiptir. Burada  $q(x,t) = xe^{-t}$  ve  $f(x) = x - \frac{1}{2}$  olup (8.1.2), (8.1.3) ve (3.1.5) ifadelerinden

$$\begin{aligned} c_n'(t) + n^2 \pi^2 c_n(t) &= 2e^{-t} \int_0^1 x \sin(n\pi x) dx \\ &= 2e^{-t} \left\{ \left[ x \left( -\frac{1}{n\pi} \right) \cos(n\pi x) \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{n\pi} \cos(n\pi x) dx \right\} \\ &= 2e^{-t} \left\{ -\frac{1}{n\pi} \cos(n\pi) + \frac{1}{n^2 \pi^2} [\sin(n\pi x)]_0^1 \right\} \\ &= (-1)^{n+1} \frac{2}{n\pi} e^{-t}, \quad t > 0 \end{aligned} \tag{8.1.4}$$

dır.

$$c_n(0) = 2 \int_0^1 (x - \frac{1}{2}) \sin(n\pi x) dx$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \left\{ \left[ (x-1) \left( -\frac{1}{n\pi} \right) \cos(n\pi x) \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{n\pi} \cos(n\pi x) dx \right\} \\
&= 2 \left\{ -\frac{1}{n\pi} + \frac{1}{n^2\pi^2} [\sin(n\pi x)]_0^1 \right\} = -\frac{2}{n\pi}
\end{aligned} \tag{8.1.5}$$

bulunur.

(8.1.4) için integral çarpanı  $e^{-n^2\pi^2 t}$  dir. Böylece (8.1.4)-(8.1.5)'in çözümü

$$c_n(t) = (-1)^{n+1} \frac{2}{n\pi} \left\{ \left[ \frac{1}{n^2\pi^2 - 1} e^{-t} + (-1)^n \frac{1}{n^2\pi^2 - 1} \right] e^{-n^2\pi^2 t} \right\}$$

şeklindedir.

Bunun anlamı (8.1.1)'den BSDP' nin çözümü

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n\pi} \left\{ \frac{1}{n^2\pi^2 - 1} e^{-t} + (-1)^n \frac{1}{n^2\pi^2 - 1} \right\} e^{-n^2\pi^2 t} \sin(n\pi x)$$

şeklindedir.

### Örnek 8.1.3

BSDP ile ilgili özdeğer ve öz fonksiyonlar,

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + u_t + \cos(2\pi x), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(1,t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = \frac{1}{2\pi} \cos(2\pi x), \quad 0 < x < 1$$

$\lambda_n = -n^2\pi^2$  ve  $X_n(x) = \cos(n\pi x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  Burada  $k=1$ ,  $L=1$ ,  $q(x,t)=2t+\cos(2\pi x)$  ve  $f(x) = \frac{1}{2\pi} \cos(2\pi x)$  olduğundan

$$c_n'(t) + n^2 \pi^2 c_n(t) = \begin{cases} 2t, & n=0 \\ 1, & n=2 \\ 0, & n \neq 0,2 \end{cases}, t > 0$$

$$c_n(0) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi^2}, & n=2, \\ 0, & n \neq 2. \end{cases}$$

elde edilir.

Böylece  $n=0$  için

$$c_0'(t) = 2t \quad t > 0,$$

$$c_0(0) = 0$$

elde edilir. Bu denklemin çözümü  $c_0(t) = t^2$

$$n=2 \text{ için } c_2'(t) + 4\pi^2 c_2(t) = 1, t > 0$$

$$c_2(0) = \frac{1}{2\pi^2}$$

elde edilir. Buradan

$$c_2(t) = \frac{1}{4\pi^2} (1 + e^{-\pi^2 t}) \text{ ve } n \neq 0,2 \text{ için}$$

$$c_n'(t) + n^2 \pi^2 c_n(t) = 0 \quad t > 0$$

$$c_n(n) = 0$$

ile çözüm  $c_n(t)$  elde edilir. Böylece verilen başlangıç sınır değer probleminin çözümü

$$u(x,t) = c_0(t)X_0(x) + c_2(t)X_2(x) = t^2 + \frac{1}{4\pi^2} (1 + e^{-\pi^2 t}) \cos(2\pi x)$$



**Örnek 8.1.4** Aşağıdaki BSDP için

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= u_{xx}(x,t) - \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) + t \sin\left(\frac{5}{2}\pi\right) \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0,t) &= 0, \quad u_x(1,t) = 0, \quad t > 0 \\ u(x,0) &= \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) + \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right), \quad 0 < x < 1 \end{aligned}$$

özdeğer ve öz fonksiyonları

$$\lambda_n = -\frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4}, \quad X_n(x) = \sin\frac{(2n-1)\pi x}{2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Daha önce yapıldığı gibi biz (8.1.2) ve (8.1.3)  $X_n$ 'in  $[0,1]$ 'deki ortogonalliğini kullanarak,  $c_n$  için başlangıç koşulu ve denklemini bulabiliriz. Bununla birlikte

$q(x,t) = -\sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{5\pi}{2}$  ve  $f(x) = \sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{3\pi}{2}$  olduğunda  $X_n$ 'in lineer kombinasyonu hazırdır. Buradan,

$$\begin{aligned} c_n'(t) + \frac{1}{4}(2n-1)^2 \pi^2 c_n(t) &= \begin{cases} -1, & n=2 \\ t, & n=3 \\ 0, & n \neq 2,3 \end{cases} \quad t > 0 \\ c_n(0) &= \begin{cases} 1, & n=1 \\ 2, & n=2 \\ 0, & n \neq 1,2 \end{cases} \end{aligned}$$

görülmür.

Böylece  $n=1$  için

$$c_1'(t) + \frac{1}{4}\pi^2 c_1(t) = 0, \quad t > 0$$

$c_1(0) = 2$  denkleminin

çözümü,

$$c_i(t) = ? \quad t/4$$

n=2 için  $c_2'(t) + \frac{9}{4}\pi^2 c_2(t) = -1, \quad t > 0$

$$c_2(0) = 1$$

denkleminin çözümü  $c_2(t) = \left(2 + \frac{4}{9}\pi^2\right)e^{-\pi^2 t/4} - \frac{4}{9}\pi^2$

n=3 için  $c_3'(t) + \frac{25}{4}\pi^2 c_3(t) = t, \quad t > 0$

$$c_3(0) = 0$$

denkleminin çözümü,

$$c_3(t) = \frac{16}{625}\pi^2 e^{-5\pi^2 t/4} + \frac{4}{25}\pi^2 t - \frac{16}{625}\pi^2 \quad \text{ve } n=2,3 \text{ için}$$

$$c_n(t) + \frac{1}{4}(2n-1)^2 \pi^2 c_n(t) = 0, \quad t > 0$$

$$c_n(0) = 0$$

denkleminin çözümü  $c_n(t) = 0$ . Böylece (8.1.1)'den BSDP'nin çözümü

$$u(x,t) = e^{-\pi^2 t/4} \sin\left(\frac{1}{2}\pi x\right) + \left(\frac{18\pi^2 + 4}{9\pi^2} e^{-9\pi^2 t/4} - \frac{4}{9\pi^2}\right) \sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right) + \left(\frac{4}{25\pi^2} t - \frac{16}{625\pi^4} + \frac{16}{625\pi^4} e^{-25\pi^2 t/4}\right) \sin\left(\frac{5}{2}\pi x\right)$$

şeklindedir.

## 8.2. Dalga Denklemi

Dalga denklemi için BSDP

$$u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t) + q(x,t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \quad 0 < x < L$$

şeklindedir.. Bu problemin özdeğer ve öz fonksiyonları

$$\lambda_n = \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2, \quad X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L} \quad n = 1, 2, \dots$$

şeklindedir.

(8.1.1) formundaki bir açılımı kullanıp ve Isı denkleminde olduğu gibi aynı işlemleri takip ederek,

$$c_n''(t) + c^2 \lambda_n c_n(t) = \frac{\int_0^L q(x,t) X_n(x) dx}{\int_0^L X_n^2(x) dx}, \quad t > 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.2.1)$$

şeklinde yazarak (8.1.2)'yi bulabilir bunu (8.1.3) ile değiştirirsek,

$$c_n'(0) = \frac{\int_0^L g(x) X_n(x) dx}{\int_0^L X_n^2(x) dx}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.2.2)$$

elde edilebilir.

Başlangıç sınır değer probleminin çözümü bu durumda (8.1.1) ile verilir. Ve  $c_n$  sayıları (8.1.3), (8.2.1) ve (8.2.2) yardımıyla hesaplanır. Bu durum diğer sınır koşulları içinde benzer şekilde uygulanabilir.

**Örnek 8.2.1**

BSDP

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) + \pi^2 \sin(\pi x), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u(0,t) = 0, u(1,t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = 0 \quad u_t(x,0) = 2\pi \sin(2\pi x), \quad 0 < x < 1$$

için (8.1.3), (8.2.1), (8.2.2) ve (3.1.5) formülleriyle

 $c^2 = 1, L = 1, q(x,t) = \pi^2 \sin(\pi x), f(x) = 0$  ve  $g(x) = 2x \sin(2\pi x)$  alırsak

$$c_n''(t) + n^2 \pi^2 c_n(t) = \begin{cases} \pi^2, & n=1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases} \quad t > 0$$

$$c_n(0) = \int_0^1 2x \sin(n\pi x) dx = -\frac{2}{n} [\cos(n\pi x)]_0^1$$

$$= \begin{cases} -\frac{2}{n}, & n=1, 2, \dots \end{cases}$$

$$c_n'(0) = \begin{cases} 2\pi, & n=2 \\ 0, & n \neq 2 \end{cases}$$

elde ederiz. Böylece  $n=1$  için

$$c_1''(t) + \pi^2 c_1(t) = \pi^2, \quad t > 0$$

$$c_1(0) = -\frac{2}{\pi}, \quad c_1'(0) = 0$$

denkleminin çözümü  $c_1(t) = \frac{2}{\pi} \cos(\pi t) + 1$ ,

$$n=2 \text{ için } c_2''(t) + 4\pi^2 c_2(t) = 0, \quad t > 0$$

$$c_2(0) = -\frac{2}{2\pi}, \quad c_2'(0) = 2\pi$$

denkleminin çözümü  $c_2(t) = \sin(2\pi t)$  ve  $n \neq 1, 2$  için

$$c_n''(t) + n^2 \pi^2 c_n(t) = 0, \quad t > 0$$

$$c_n(0) = \begin{cases} 1 - \frac{2}{n} & n=1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}, c_n'(0) = 0$$

denkleminin çözümü

$$c_n(t) = \begin{cases} 1 - \frac{2}{n} & n=1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases} \cos(n\pi t)$$

şeklindedir. Sonuç olarak BSDP' nin çözümü, (8.1.1)'den

$$u(x,t) = \begin{cases} \cos(\pi t) + 1 & \sin(\pi x) + \sin(2\pi x) \sin(2\pi t) \\ + \sum_{n=3}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cos(n\pi t) \cdot \sin(n\pi x) \end{cases}$$

### Örnek 8.2.2.

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) + t \cos(\pi x), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u_x(0,t) = 0, u_x(1,t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = 1, u_t(x,0) = -\cos(2\pi x), \quad 0 < x < 1$$

BSDP' nin öz değer ve öz fonksiyonları ,

$$\lambda_n = n^2 \pi^2, \quad X_n(x) = \cos(n\pi x), \quad n = 1, 2, \dots$$

şeklindedir.

$c^2 = 1, L = 1, q(x,t) = t \cos(\pi x), f(x) = 1$  ve  $q(x) = -\cos(2\pi x)$  olup (8.1.3),(8.2.1),(8.2.2), (3.1.3) ve (3.1.4) den

$$c_n''(t) + n^2 \pi^2 c_n(t) = \begin{cases} 1, & n=0 \\ t, & n=1 \\ 0 & n \neq 0,1 \end{cases} \quad t > 0$$

$$c_n(0) = \begin{cases} 2, & n=0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

$$c_n'(0) = \begin{cases} -2, & n=2 \\ 0, & n \neq 2 \end{cases}$$

çözümü bulunur.

Böylece  $n=0$  için

$$c_0''(t) = t, \quad t > 0$$

$$c_0(0) = 1, \quad c_0'(0) = 0$$

elde edilir çözüm  $c_0(t) = \frac{1}{2}t^2 + 1$  olur.  $n=1$  için

$$c_1''(t) + \pi^2 c_1(t) = t, \quad t > 0$$

$$c_1(0) = 0, \quad c_1'(0) = 0$$

$$c_1(t) = -\frac{1}{\pi^2} \sin(\pi t) + \frac{1}{\pi^2} t, \quad n=1 \text{ için}$$

$$c_2''(t) + 4\pi^2 c_2(t) = 0, \quad t > 0$$

$$c_2(0) = 0, \quad c_2'(0) = -1$$

$$c_2(t) = -\frac{1}{2\pi} \sin(2\pi t) \text{ ve } n=2, 1, 2, \dots \text{ için}$$

$$c_n''(t) + n^2 \pi^2 c_n(t) = 0, \quad t > 0$$

$$c_n(0) = 0, \quad c_n'(0) = 0$$

elde edilir ve çözümü

$$c_n(t) = 0$$

Sonuç olarak (8.1.1)'den BSDP' nin çözümü

$$u(x, t) = \frac{1}{2}t^2 + 1 + \left[ \frac{1}{\pi^2}t - \frac{1}{\pi^2} \sin(\pi t) \right] \cos(\pi x) - \frac{1}{\pi} \sin(2\pi t) \cos(2\pi x)$$

### 8.3 Laplace Denklemi

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = f(x, y), \quad 0 < x < L, \quad 0 < y < K,$$

$$u(0, y) = 0, u(L, y) = 0, \quad 0 < y < K$$

$$u(x, 0) = f_1(x), u(x, K) = f_2(x), \quad 0 < x < L$$

sınır değer problemini göz önüne alınarak homojen olmayan Laplace Denklemi (Poisson Denklemi) ile ilgili özdeğer ve öz fonksiyonlar

$$\lambda_n = \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2, X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L} \quad n = 1, 2, \dots$$

şeklinde dir.

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(y) \sin(n\pi x / L)$$

formunda bir çözüm araştırılır.

(8.1.1) ve (8.1.2) deki eşitlikleri kullanarak yaptığımız gibi  $n=1, 2, \dots$  için

$c_n$

$$c_n''(y) - \lambda_n^2 c_n(y) = \frac{2}{L} \int_0^L f(x, y) X_n(x) dx, \quad 0 < y < K$$

$$c_n(0) = \frac{2}{L} \int_0^L f_1(x) X_n(x) dx$$

$$c_n(K) = \frac{2}{L} \int_0^L f_2(x) X_n(x) dx \quad (8.3.1)$$

olur.

**Örnek 8.3.1.**

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = \pi^2 \sin(\pi y), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(1, y) = 0, \quad 0 < y < 2$$

$$u(x, 0) = 0 \sin(3\pi x), \quad u(x, 2) = -\sin(\pi x), \quad 0 < x < 1$$

sınır değer problemini çözelim.

$L=1$   $K=2$ ,  $q(x, y) = \pi^2 \sin(\pi y)$ ,  $f_1(x) = 0 \sin(3\pi x)$  ve  $f_2(x) = -\sin(\pi x)$   $q$ ,  $f_1$  ve  $f_2$  öz fonksiyonların lineer kombinasyonları olduğundan (8.3.1)'ü göz önüne alarak  $(c_n)$ 'nin

$$c_n''(y) - n^2 \pi^2 c_n(y) = \begin{cases} \pi^2, & n=1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases} \quad 0 < y < 2,$$

$$c_n(0) = \begin{cases} 2, & n=3 \\ 0, & n \neq 3 \end{cases}$$

$$c_n(2) = \begin{cases} -1, & n=1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}$$

sağladığı görülür.

$$n=1 \text{ için } c_1''(y) - \pi^2 c_1(y) = \pi^2, \quad 0 < y < 2$$

$$c_1(0) = 2, \quad c_1(2) = -1$$

denklemin  $c_1(y) = -\frac{1}{2} \operatorname{sech}(2\pi \sinh(\pi(y-1))) - \frac{1}{2}$  çözümüne sahiptir.

$$n=3 \text{ için } c_3''(y) - 9\pi^2 c_3(y) = 0, \quad 0 < y < 2$$

$$c_3(0) = 2, \quad c_3(2) = 0$$

çözümü

$$c_3(y) = -\frac{1}{2} \operatorname{cosech}(6\pi \sinh(3\pi(y-1))) \text{ ve } n \neq 3 \text{ için}$$

$$c_n''(y) - n^2 \pi^2 c_n(y) = 0 \quad 0 < y < 2$$



$$c_n(0) = 1, \quad c_n(2) = 1$$

elde edilir. Böylece

$$c_n(y) = 1$$

Buradan sınır değer probleminin çözümü

$$u(x, y) = \cosh(2\pi \sinh(\pi(y-1))) + \sin(\pi x) \\ - \cosh(6\pi \sinh(3\pi(y-1))) \sin(3\pi x)$$

şeklindedir.

Bu metod homojen olmayan Laplace denkleminin kutupsal koordinatlardaki ifadesinde uygulanabilir

### Örnek 8.3.2.

Aşağıda kutupsal formda verilen Laplace denkleminin çözümünün

$$u_{rr}(r, \theta) + r^{-1} u_r(r, \theta) + r^{-2} u_{\theta\theta}(r, \theta) = 1, \quad 0 < r < 1, \quad -\tau < \theta < \tau \\ u(1, \theta) = 1 \cos \theta - \ln(2\theta), \quad -\tau < \theta < \tau$$

özdeğer ve öz fonksiyonları

$$\lambda_n = 1, \quad \Theta_n(\theta) \equiv 1,$$

$$\lambda_n = n^2, \quad \Theta_n(\theta) = \cos(n\theta), \quad \Theta_{-n}(\theta) = \sin(n\theta), \quad n = 1, 2, \dots$$

şeklindedir.

$$u(r, \theta) = c_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} c_{1n}(r) \Theta_{1n}(\theta) + c_{2n}(r) \Theta_{2n}(\theta)$$

formundaki çözüm ve örnek 3.3.1,  $c_0$ ,  $c_{1n}$  ve  $c_{2n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  kullanarak

$$c_0''(r) + r^{-1} c_0'(r) = 1, \quad 0 < r < 1,$$

$$c_0(1) = 1,$$

$$c_{1n}''(r) + r^{-1} c_{1n}'(r) - n^2 r^{-1} c_{1n}(r) = 0, \quad 0 < r < 1,$$

$$c_{1n}(1) = \begin{cases} 2, & n=1, \\ 0, & n \neq 1, \end{cases}$$

$$c_{2n}''(r) + r^{-1} c_{2n}'(r) - n^2 r^{-1} c_{2n}(r) = 0, \quad 0 < r < 1,$$

$$c_{2n}(1) = \begin{cases} -1, & n=2, \\ 0, & n \neq 2. \end{cases}$$

yazabiliriz.

$u(r, t)$  sınırları  $0 \leq r < 1$ ,  $-\tau < t \leq \tau$  olduğundan biz  $c_0$ ,  $c_{1n}$  ve  $c_{2n}$  çözümlerini araştırmaktayız.

$n=0$  için adi diferansiyel denklemi  $c_0' = 0$  olarak integre edersek  $c_0(r) = r^2$  olduğunu görürüz.  $n \neq 0$  için âdi diferansiyel denklem Cauchy-Euler denklemi şeklinde yazılabilir. Böylece  $n=1$  için

$$r^2 c_{11}''(r) + r c_{11}'(r) - c_{11}(r) = 0, \quad 0 < r < 1,$$

$$c_{11}(1) = 2$$

$$r^2 c_{21}''(r) + r c_{21}'(r) - c_{21}(r) = 0, \quad 0 < r < 1,$$

$$c_{21}(1) = -1$$

bulunur. Burada  $c_{11}(r) = 2r$  ve  $c_{21}(r) \equiv 0$  sınırlı çözümlerdir.  $n=2$  için

$$r^2 c_{12}''(r) + r c_{12}'(r) - 4c_{12}(r) = 0, \quad 0 < r < 1,$$

$$c_{12}(1) = 0$$

$$r^2 c_{22}''(r) + r c_{22}'(r) - 4c_{22}(r) = 0, \quad 0 < r < 1,$$

$$c_{22}(1) = -1$$

sınırlı çözümü  $c_{12}(r) \equiv 0$  ve  $c_{22}(r) = -r^2$  ve  $n = 3, 4, \dots$

için

$$r^2 c_{1n}''(r) + c_{1n}'(r) - n^2 c_{1n}(r) = 0, \quad 0 < r <$$

$$c_{1n}(1) = 0$$

$$c_{2n}''(r) + r^{-2} c_{2n}'(r) - n^2 r^{-2} c_{2n}(r) = 0, \quad 0 < r <$$

$$c_{2n}(1) = 0$$

olup sınır çözümleri  $c_{1n}(r) \equiv 0$  ve  $c_{2n}(r) = 0$

Böylece sınır değer probleminin çözümü

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= c_0(r) + c_{1n}(r) \Theta_{-n}(\theta) + c_{2n}(r) \Theta_{-n}(\theta) \\ &= c_0(r) + c_{1n}(r) \cos n\theta - c_{2n}(r) \sin(2\theta) \end{aligned}$$

şeklindedir.

## 9. FOURIER DÖNÜŞÜMLERİ

Pratik öneme sahip bazı problemler öz fonksiyonların dağılımı metodunun araştırılmasından daha da büyük, bir öneme sahiptir. Örneğin uzay değişken olduğunda reel doğru üzerinde problemi tanımlamak gerekmektedir ki bunun sonucunda sınır noktaları bulunmamaktadır. Bu durumda ortaya şu şekilde bir problem çıkmaktadır. Sayılan bir kümenin yerine öz değerlerin bir birleşimi karşımıza çıkmaktadır. Fourier dönüşümleri fonksiyonların Fourier serisine açılımından ortaya çıkmıştır ki genel olarak pratikte kullanışlıdır. Çünkü problemler sonlu veya yarı sonlu bölgelerde tanımlandığında bu yöntem rahatlıkla kullanılabilir. Yöntemin uygulanışını vermeden önce Fourier dönüşümü hakkında kısa bir bilgi verilmesi gerekir.

### 9.1. Fourier Dönüşümü

**Dönüşümün Oluşturulması:** Basitlik için  $\mathbb{R}$ 'de  $2L$  periyotlu sürekli  $f$  fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu durumda 2. bölümde görüldüğü gibi

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (9.1.1)$$

serisi vardır.

Burada,

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9.1.2)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

dir.

$a_n$  lerin verilen ifadeyle uyuşması için  $a_n$  yerine  $\frac{1}{2}a_0$  aldık

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad i^2 = -1$$

eşitliklerinden

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \quad \sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \quad \text{elde edilir. Netice olarak}$$

(9.1.1)'de  $t = i\pi x/L$  alırsak

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{in\pi x/L} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-in\pi x/L}$$

elde edilir.

Yukarıdaki ilk toplamda  $-n$ 'i  $n$  ile değiştirip (9.1.2)'de göz önüne alarak

$a_{-n} = a_n$ ,  $b_{-n} = -b_n$  olup son eşitlikten,

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-in\pi x/L} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-in\pi x/L}$$

veya

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\pi x/L}$$

elde ederiz. Burada (9.1.2)'den

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \left( \cos \frac{n\pi x}{L} + i \sin \frac{n\pi x}{L} \right) dx \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{in\pi x/L} dx \quad (b_0 = 0) \end{aligned}$$

Böylece

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(\xi) e^{in\pi \xi/L} d\xi \right] e^{-in\pi x/L}. \quad (9.1.3)$$

elde edilir.

Eğer  $f$  fonksiyonu periyodik değilse bu durumda periyodik kelimesinin yerine sonsuz periyodikliği de kullanılabilir. Bazı temel matematik hesaplamaları kullanarak  $L \rightarrow \infty$  iken (9.1.3) ifadesini,

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i\omega\xi} d\xi \right] e^{-i\omega x} d\omega \quad (9.1.4)$$

şekline gelebilir.

Biz buradan  $f$ 'in tam fourier dönüşümünü

$$[f](\omega) = F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx. \quad (9.1.5)$$

ile tanımlanır.

(9.1.4)'ten açıktır ki ters Fourier dönüşümü

$$F^{-1} [F](x) = f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega x} d\omega \quad (9.1.6)$$

şeklindedir.

$F$  ve  $F^{-1}$  integral operatörlerine sırasıyla Fourier dönüşümü ve ters Fourier dönüşümü denir.  $x$  değişkenine ise dönüşümün parametresi denir.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)| dx < \infty$$

dır.

Yani  $f \in R$ 'de mutlak integrallenebilir bir fonksiyon ise (9.1.5) ve (9.1.6) formülleri geçerlidir. Bununla birlikte Fourier dönüşümü yukarıdaki özellikleri sağlamayan bazı fonksiyonlar içinde tanımlanabilir. Bu durumda bunu genelleştirmiş anlamda düşünmemiz gerekmektedir. Mutlak integrallenebilir fonksiyonların dönüşümünü içeren bir limit durumunu düşünmemiz gerekir.

Eğer  $f$  parçalı sürekli ise bu durumda (9.1.4)'ün sağ tarafı  $\frac{1}{2} [f(x+) + f(x-)]$  ile değiştirilmelidir.

**Örnek 9.1.1.**

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , -a \leq x \leq a \\ 0 & , \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

fonksiyonunun Fourier dönüşümü

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a e^{i\omega x} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{e^{i\omega x}}{i\omega} \right]_{-a}^a = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{i\omega} (e^{i\omega a} - e^{-i\omega a}) = \frac{\sin \omega a}{\pi \omega} \end{aligned}$$

şeklindedir.

**Tanım 9.1.2.**

$f$  ve  $g$   $\mathbb{R}$ 'de mutlak integrallenebilir fonksiyonlar olsun.  $f$  ve  $g$ 'nin konvolüsyon

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \xi) g(\xi) d\xi, \quad -\infty < x < \infty$$

şeklinde tanımlanır.

$x$  yerine  $-y$  değişkeni aldığımız zaman kolayca görebiliriz ki

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) g(x - \xi) d\xi = (g * f)(x)$$

Bunun anlamı konvolüsyon operatörü değişmelidir.

**Teorem 9.1.3.**

(i)  $F$  lineer yani herhangi bir  $f_1$  ve  $f_2$   $F$  (fourier) dönüşümü uygulanabilen, herhangi  $c_1$  ve  $c_2$  sayısı için

$$F(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 F[f_1] + c_2 F[f_2]$$

(ii) Eğer  $u = u(x, t)$  iken  $u(x, t) \rightarrow 0$  ve  $F[u](\omega) = 0$  ise bu durumda

$$F[u_x](\omega) = -i\omega F[u](\omega)$$

(iii) Eğer  $x \rightarrow \infty$  iken  $U_x(x, t) \rightarrow 0$  ise  $F[U_x](\omega) = 0$

(iv) x'e göre fourier dönüşümü diferansiyellenebilme ve değişmelidir. Yani

$$F[U_t](\omega) = F[U_x](\omega) = F[U](\omega)$$

(v) Bir konvolüsyon Fourier dönüşümü

$$F[f * g] = F[f]F[g].$$

şeklindedir.

Genelde  $F[f * g] = F[f]F[g]$

(ii) Ters Fourier dönüşümü  $F^{-1}$   $F$  tanımdan da görüldüğü gibi lineerdir.

Teorem (9.1.5.)'ten istenilen Fourier dönüşümünün özellikleri belli tipteki kısmi türevli denklem problemlerinin çözümünde önemli rol oynar. Çözüm yöntemleri ise en iyi şekilde aşağıdaki örnekte verilmiştir.

### Sonsuz bir çubuk için Cauchy problemi:

Isı kaynağı olan çok uzun düzgün bir çubuk verilsin. Burada ısı aktivitesi uç noktalara düşmektedir. Bu problemin matematik modeli başlangıç değer problemi olarak ki buna Cauchy Problemide denir.

$$u_t(x, t) = k u_{xx}(x, t), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

$$u(x, t), u_x(x, t) \rightarrow 0 \quad x \rightarrow \pm \infty, t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad -\infty < x < \infty$$



notasyonlarını kullanarak.

$$F[\bar{f}](\omega) = \overline{F[f](\omega)} = \overline{F[f](\omega)}$$

elde edilir.

Kısmi türevli denkleme ve başlangıç koşullarına Fourier dönüşümünü uygularsak ve Teorem (9.1.3)'teki  $F$ 'nin özelliklerini kullanarak verilen başlangıç değer problemi adi diferansiyel denkleme indirgenmiş olur. Bu yeni başlangıç değer problemi (ki burada  $\alpha$  iç parametredir.)

$$u'(\omega) + k\omega U(\omega) = 1, \quad t > 0$$

$$U(0) = \gamma(0)$$

çözümü

$$U(\omega) = \gamma(\omega) e^{-\omega^2/2k} \quad (9.1.7)$$

Orijinal başlangıç değer probleminin çözümünü bulmak için  $U$ 'nun ters fourier dönüşümünü hesaplamaya ihtiyacımız vardır.  $P(\omega) = e^{-\omega^2/2k}$  olsun. burada  $k > 0$  ve bağılı olmayan pozitif bir sabittir.

İlk olarak

$$-\omega^2 = -\alpha^2 \left( \omega + \frac{i\alpha x}{\alpha} \right)^2 = -\alpha^2 \left[ \left( \omega + \frac{i\alpha x}{2\alpha} \right)^2 - \frac{x^2}{4\alpha} \right] = -\alpha^2 \left( \omega + \frac{i\alpha x}{2\alpha} \right)^2 + \frac{x^2}{4\alpha}$$

elde ederiz.

Böylece (9.1.6)'dan

$$\begin{aligned} F^{-1}[P](x, \alpha) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\omega^2} e^{-i\omega x} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\omega^2 - i\omega x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha \left( \omega + \frac{ix}{2\alpha} \right)^2} e^{-x^2/(4\alpha)} d\omega \end{aligned}$$

ve yukarıdaki integral

$$\sigma = \sqrt{\alpha} \left( \frac{x}{\sqrt{\alpha}} + \frac{y}{(2\alpha)} \right) \text{ ve } d\sigma = \sqrt{\alpha} d\omega$$

dönüşümüyle

$$F^{-1}[P](x, \alpha) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} e^{-x^2/(4\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{4\alpha}} d\sigma$$

şekline gelir.

Sağ taraftaki integral  $\sqrt{\pi}$  ye eşittir. Bundan dolayı

$$F^{-1}[P](x, \alpha) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-x^2/(4\alpha)} = \gamma(x, \alpha)$$

Buradan  $P(\omega, x) = \gamma[p](\omega, x)$  yazabiliriz. (9.1.7)'den  $U(\omega, t) = \gamma(\omega, P(\omega, t))$  veya  $F[u](\omega, t) = \gamma[f](\omega, F[p](\omega, t))$  görebiliriz. Teorem (9.1.3)(5) özelliğine göre ki bunun anlamı  $u = f * \gamma$  veya (9.1.3)'teki tanımdan

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \sqrt{\frac{\pi}{kt}} e^{-\pi \xi^2 / (4kt)} d\xi$$

bulunur. Bir başka gösterimle

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, t; \xi, 0) u(\xi, 0) d\xi \quad (9.1.8)$$

elde edilir. Burada

$$G(x, t; \xi, 0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\pi (x-\xi)^2 / (4kt)}$$

elde edilir ki buna Gauss-Weierstrass çekirdeği etkilenmiş fonksiyon denir. Young(1990)

(9.1.8) formülü göstermektedir ki  $u(x, 0)$ 'in başlangıç ısı dağılımı nasıl olursa olsun, çubuktaki ısıнын etkisi ihmal edilebilir.

### Sonsuz Çubuğun Titreşimi;

Dış kuvveti ihmal edilebilir sonsuz uzunluktaki uç noktaları yalıtılmış bir çubuğun titreşim işlemi matematiksel model olarak,

$$u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t) \quad , -\infty < x < \infty \quad t > 0 ,$$

$$u(x,t) \quad , x \rightarrow \pm \infty \quad c,t) \text{ iken } u_x(x,t) \rightarrow 0 \quad t > 0$$

$$u(x,0) = f(x) \quad , u_t(x,0) = 0 \quad , -\infty < x < \infty$$

Başlangıç değer problemi ile verilir.

$$F[u](\omega, t) = U(\omega, t) \text{ ve } F[f](\omega) = F(\omega) \text{ olsun.}$$

Kısmi Türevli Denklem ve başlangıç koşullarına Fourier dönüşüm yani F'yi uygularsak,  $U''(\omega, t) + c^2 \omega^2 U(\omega, t) = 0, \quad t > 0$

$$u(\omega, 0) = F(\omega) \quad , \quad U'(\omega, 0) = 0$$

elde edilir. Bunun genel çözümü

$U(\omega, t) = C_1(\omega) \cos(c\omega t) + C_2(\omega) \sin(c\omega t)$  'dir. Burada  $C_1(\omega)$  ve  $C_2(\omega)$  dönüşüm parametrelerine bağlı keyfi fonksiyonlardır. Böylece başlangıç koşullarını kullanarak,

$$U(\omega, t) = F(\omega) \cos(c\omega t)$$

bulunur.

$$\text{Euler formülünden } \cos(c\omega t) = \frac{1}{2}(e^{ic\omega t} + e^{-ic\omega t})$$

(9.1.6)'dan

$$\begin{aligned} u(x,t) &= F^{-1} \left[ U(\omega, t) \right] = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cos(c\omega t) e^{-i\omega x} d\omega \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \left[ e^{-i\omega(x-ct)} + e^{-i\omega(x+ct)} \right] d\omega \\ &= \frac{1}{2} \left[ f(x-ct) + f(x+ct) \right] \end{aligned}$$

elde edilir.

## 9.2. Fourier Sinüs ve Cosinüs Dönüşümleri

Sürekli  $f$  fonksiyonu için  $0 \leq x < \infty$ ’dan

$$F_s[f](\omega) = F(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \sin(\omega x) dx$$

$$F_c[f](\omega) = F(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos(\omega x) dx$$

şeklinde tanımlıdır.

Eğer  $f$  fonksiyonu  $(0, \infty)$  aralığında mutlak integrallenebilirse bu dönüşümlerin var olduğu gösterilebilir yani.

$$\int_0^{\infty} |f(x)| dx < \infty$$

Buna karşılık gelen ters dönüşüm ise

$$F_s^{-1}[F](x) = f(x) = \int_0^{\infty} F(\omega) \sin(\omega x) d\omega$$

$$F_c^{-1}[F](x) = f(x) = \int_0^{\infty} F(\omega) \cos(\omega x) d\omega$$

$F_s$  ve  $F_c$  operatörlerine sırasıyla Fourier sinüs ve Fourier cosinüs dönüşümleri denir.

$F_s^{-1}$  ve  $F_c^{-1}$  ise bunların ters dönüşümleridir.

### Örnek 9.2.1.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq a \\ 0, & x > a \end{cases} \quad a = bt$$

fonksiyonunun fourier sinüs ve cosinüs dönüşümleri

$$F_s[f](\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^a f(x) \sin(\omega x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^a \sin(\omega x) dx$$

$$= -\frac{2}{\pi\omega} \int_0^a \cos(\omega x) dx = \frac{2}{\pi\omega} \int_0^a \cos(\omega x) dx$$

$$F_c[f](\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(x) \cos(\omega x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^a \cos(\omega x) dx$$

$$= \frac{2}{\pi\omega} [\sin(\omega x)]_0^a = \frac{2}{\pi\omega} \sin(a\omega)$$

şeklindedir.

$F_s$  veya  $(F_c)$   $\mathbb{R}$ 'de  $f$  tek veya çift fonksiyon olarak da tanımlanabilir.

**Teorem 9.2.2.**

(i)  $F_s$  ve  $F_c$  lineer operatörlerdir.

(ii) eğer  $u = u(x, t)$  iken  $u(x, t)$  ise

$$F_s \left[ \frac{\partial}{\partial x} u \right](\omega) = -\omega F_c[u](\omega),$$

$$F_c[u_x](\omega) = -\frac{2}{\pi} u(0, t) + \omega F_s[u](\omega)$$

(iii) eğer  $x$  iken  $u_x(x, t)$  ise

$$F_s \left[ \frac{\partial}{\partial x} u \right](\omega) = \frac{2}{\pi} u(0, t) - \omega F_s[u](\omega)$$

$$F_c[u_{xx}](\omega) = -\frac{2}{\pi} u_x(0, t) - \omega F_c[u](\omega)$$

(iv) Fourier sinüs ve cosinüs dönüşümlerinde diferansiyelin sırası önemli değildir.

$$F_s \left[ \frac{\partial}{\partial t} u \right](\omega) = F_s[u]_t(\omega) \quad F_c \left[ \frac{\partial}{\partial t} u \right](\omega) = F_c[u]_t(\omega)$$

Teorem (9.2.2) (iii) deki gibi verilen B. Sınır değer probleminin çözümünde Fourier sinüs ve cosinüs arasından biri seçilerek  $x=0$ 'dan sınır koşullarına bağlı olarak çözülebilir.

### Yarı sonsuz Uzunluktaki Isı Kaynağı

Uç noktalardan tanımlanmış ısıya sahip uzun bir çubuktaki ısı kaynağı ile ilgili bir problem

$$u_t(x, t) = k u_{xx}(x, t) \quad , x > 0, t > 0$$

$$u(0, t) = g(t), t > 0$$

$$u(x, t), x \rightarrow \infty \text{ iken } u_t(x, t) \rightarrow 0 \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x), x > 0$$

başlangıç sınır değer problemiyle tanımlanabilir. Verilen sınır koşullarını göz önüne alarak ve fourier dönüşümünü kullanarak

$$F_s[u](\omega, t) = U(\omega, t) \quad , \quad F_s[f](\omega) = \varphi(\omega)$$

elde ederiz.

Kısmi türevli denklem ve başlangıç koşullarına  $F_s$ 'yi uygulayıp Teorem 3.2.3.'deki özellikler uygulanarak

$$U'(\omega, t) + k\omega^2 U(\omega, t) = \frac{2}{\pi} k\omega \varphi(\omega), \quad t > 0,$$

$$U(\omega, 0) = \varphi(\omega)$$

adi diferansiyel denklemini elde ederiz.

Dönüşüm bölgesinde  $U$ 'yu bulduktan sonra original B. Sınır değer probleminin çözümü

$$u(x, t) = \mathcal{F}_s^{-1}[U](x, t)$$

şeklinde bulur

**Örnek 9.2.3.**

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), \quad x > 0, \quad t > 0$$

$$u(0,t) = \alpha = sbt, \quad t > 0$$

$$u(x,t), \quad x \rightarrow \infty \quad u_x(x,t) \rightarrow 0 \quad t > 0$$

$$u(x,0) = 0, \quad x \geq 0$$

Başlangıç sınır değer problemi için Fourier sinüs dönüşümünü kullanmak gerekir. Çünkü sınır koşullarında ısı tanımlanmıştır. Özdeş olarak 1'e eşit olan fonksiyonun Fourier sinüs dönüşümü  $\frac{2}{\pi\omega}$  dir. Böylece Teorem 9.2.2.'den

$$U'(\omega) + \omega U(\omega) = \frac{2\alpha}{\pi} \omega, \quad t > 0,$$

$$U(0) = 0 \text{ 'dır.}$$

Dönüşüm probleminin çözümü

$$U(\omega) = \frac{2\alpha}{\pi\omega} (1 - e^{-\omega^2 t});$$

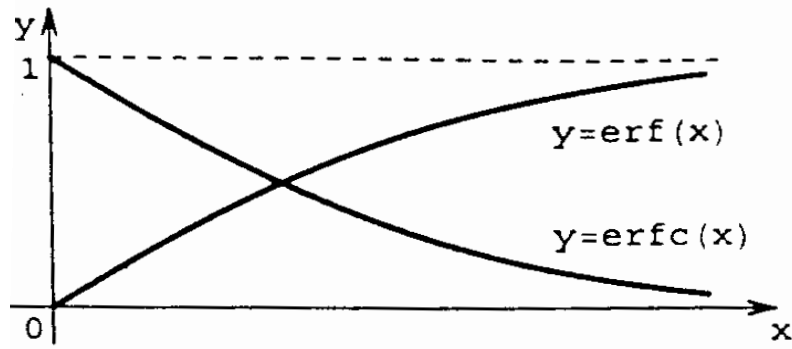
şeklindedir. Buradan ( $a = 1/\sqrt{2t}$ )

$$\begin{aligned} v(x,t) &= F_s^{-1}[v(x,t)] = a \int_0^\infty \frac{2}{\pi\omega} (1 - e^{-\omega^2 t}) \sin(\omega x) d\omega \\ &= \alpha \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) \end{aligned}$$

elde edilir.

$y = \operatorname{erfc}(x)$  ( $0 \leq x < \infty$ ) fonksiyonuna geçici hata fonksiyonu denir. Hatta fonksiyonlarının grafiği ve geçici hata fonksiyonu sırasıyla

$$y = \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi, \quad y = \operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-\xi^2} d\xi = 1 - \operatorname{erf}(x)$$



Şekil 9.1.

şeklinde gösterilir.

#### Örnek 9.2.4.

$$u_t(x,t) = k u_{xx}(x,t), \quad x > 0, \quad t > 0$$

$$u_x(0,t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x,t) \rightarrow 0 \text{ iken } u_x(x,t) \rightarrow 0, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = e^{-x}, \quad x > 0$$

başlangıç sınır değer probleminin fourier sinüs dönüşümüyle çözülebilir. Çünkü sınır koşulları  $x=0$ 'da  $x$ 'in türevi cinsinden verilmiştir. Teorem 9.2.2  $e^{-x}$ 'in cosinüs dönüşümü  $\frac{2}{\pi(1+\omega^2)}$  dir.

$U(\omega) = \mathcal{F}_c[u](\omega)$  dönüşümünden

$$U'(\omega) + i\omega U(\omega) = 0, \quad t > 0$$

$$U(\omega) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{1+\omega^2},$$

ve bunun çözümü

$$U(\omega) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{1+\omega^2} e^{-\omega x}$$



şeklindedir.

original başlangıç sınır değer probleminin çözümü

$$u(x,t) = \mathcal{F}_C^{-1} \left[ \bar{U}(x,t) \right] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{1+\eta^2} e^{-4\omega^2 t} \cos(\omega x) d\omega$$

dır.

### Yarı Sonsuz Uzunluktaki Bir Sicimin Denge Isısı:

Sabit durumdaki yarı sonsuz uzunluğa sahip bir sicimdeki sabit ısı dağılımı  $0 \leq x \leq L, y \geq 0$  matematiksel olarak

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, \quad 0 < x < L, \quad y > 0$$

$$u(0,y) = g_1(y), \quad u(L,y) = g_2(y), \quad y > 0 \quad y \rightarrow \infty \quad \text{iken} \quad g_1(y) - g_2(y) \rightarrow 0$$

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < L$$

$$u(x,y), \quad y \rightarrow \infty, \quad u_y(x,y) \rightarrow 0, \quad 0 < x < L$$

şeklinde modellenir. Süper pozisyon ilkesini kullanarak,

$$u(x,y) = u_1(x,y) + u_2(x,y)$$

yazılabilir.

Burada  $u_1 = g_1(y), g_2(y) \equiv 0$  ise sınır değer problemi sağlanır ve  $u_2$  ise  $f(x) - 0$  olarak sağlar.

Böylece 1. sınır değer problemi

$$(u_1)_{xx}(x,y) + (u_1)_{yy}(x,y) = 0, \quad 0 < x < L, \quad y > 0,$$

$$u_1(0,y) = 0, \quad u_1(L,y) = 0, \quad y > 0$$

$$u_1(x,0) = f(x), \quad 0 < x < L,$$

$$u_1(x, y), \quad y \rightarrow \infty \quad \text{iken} \quad (u_1)_y(x, y) \rightarrow 0, \quad 0 < x < L.$$

Bu problem değişkenlerine ayırma metodu ile çözülür.  $x=0$  ve  $x=L$  deki sınır koşullarından kısmi türevli denklem

$$\begin{aligned} u_1(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{L} \left( A_n \cosh \frac{n\pi y}{L} + B_n \sinh \frac{n\pi y}{L} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{L} \left( a_n e^{n\pi y/L} + b_n e^{-n\pi y/L} \right) \end{aligned}$$

$y \rightarrow \infty$  iken  $u_1(x, y) \rightarrow 0$  olduğundan  $a_n = 0$  almalıyız.  $n=1, 2, \dots$  böylece

$$u_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-n\pi y/L} \quad (9.2.1)$$

elde edilir.

$y=0$ 'daki sınır koşullarını kullanırsak,

$$u_1(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

elde ederiz. (2.10)dan ve fourier sinüs serisindeki  $b_n$  katsayıları

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

şeklinde bulunur.

Netice olarak (9.2.1) ile verilen 1. sınır değer probleminin çözümü yukarıdaki formülden  $b_n$ 'lerin bulunmasıyla hesaplanabilir.

2. sınır değer problemi

$$(u_2)_{xx}(x, y) + (u_2)_{yy}(x, y) = 0, \quad 0 < x < L, \quad y > 0$$

$$u_2(0, y) = g_1(y), \quad u_2(L, y) = g_2(y), \quad y > 0$$

$$y \rightarrow \infty \quad \text{iken} \quad g_1(y), g_2(y) \rightarrow 0$$

$$u_2(x,0) = 0, \quad 0 < x < L$$

$$u_2(x,y) \rightarrow 0, \quad y \rightarrow \infty \quad \text{iken} \quad (u_2)_y(x,y) \rightarrow 0, \quad 0 < x < L$$

şeklindedir.

$y=0$ 'da sınır koşullarını göz önüne alır ve  $y$ 'ye  $F_s$ 'yi kullanırsak  $F_s[u_2](x,\omega) = I(x,\omega) - F_s[g_1](\omega) = \tilde{f}_1(\omega)$  ve  $F_s[g_2](\omega) = \tilde{f}_2(\omega)$  yazabiliriz.

Böylece yukarıdaki sınır değer problemi

$$U''(x,\omega) - \omega^2 U(x,\omega) = 0, \quad 0 < x < L,$$

$$U(0,\omega) = \tilde{f}_1(\omega) \quad U(L,\omega) = \tilde{f}_2(\omega)$$

şekline indirgenebilir.

yukarıdaki denklemin genel çözümü

$$U(x,\omega) = B_1(\omega) \cosh(\omega x) + B_2(\omega) \sinh(\omega x)$$

Burada  $B_1$  ve  $B_2$   $\omega$ 'nin keyfi fonksiyonlarıdır. Ancak  $x = L$ 'de sınır koşullarını uyguladığımız zaman bu çözüm formu kullanışlı değildir.

Böylece bunu

$$\begin{aligned} U(x,\omega) &= \frac{B_1(\omega)}{\sinh(\omega L)} \sinh(\omega(L-x)) \cosh(\omega L) + B_2(\omega) \sinh(\omega x) \\ &= \frac{B_1(\omega)}{\sinh(\omega L)} [\sinh(\omega(L-x)) \cosh(\omega L) - \cosh(\omega(L-x)) \sinh(\omega L)] \\ &\quad + \frac{B_1(\omega)}{\sinh(\omega L)} \cosh(\omega(L-x)) \sinh(\omega L) + B_2(\omega) \sinh(\omega x) \\ &= B_1(\omega) \operatorname{cosech}(\omega L) \sinh(\omega(L-x)) \\ &\quad + B_1(\omega) \coth(\omega L) + B_2(\omega) \sinh(\omega x), \end{aligned}$$

şeklinde yeniden yazılabilir.

Bunun anlamı

$$U(x, \omega) = c_1 (\omega \sinh(\omega(L-x)))^{-1} + c_2 (\omega \sinh(\omega x))^{-1},$$

Burada  $c_1$  ve  $c_2$   $\omega$ 'nin keyfi fonksiyonlarıdır. Bu alternatif formu kullanıp  $x=0$  ve  $x=L$  deki sınır koşullarını kullanırsak,

$$U(x, \omega) = \text{sech}(\omega x) \left[ F_1(\omega \sinh(\omega(L-x)))^{-1} + F_2(\omega \sinh(\omega x))^{-1} \right]$$

## 10.GREEN FONKSİYONLARI METODU

Bu bölümde, Isı, Laplace, Dalga denklemlerini göz önüne alacağız ki tanımlanan başlangıç şartı, sınır şartı ve denklemde görülen homojen olmayan terimlerin tekliğini hesaplayacağız. Doğal olarak bir formül geliştirmek için verilen terimlerin çözümü verilmelidir. Böylece kapalı formdaki çözümler, verilen fonksiyonun Green fonksiyonu adı verilen bir yapı oluşturacaktır ki bu fiziksel uygulamalarda çok büyük bir öneme sahiptir. Constanda(2002)

### 10.1. Isı Denklemi

**Denge problemi:** İç kaynaklı sonlu bir çubuktaki düzgün ısı dağılımı ve uç noktalarda sıfır ısıya sahip başlangıç ve sınır değer problemi

$$u''(x) = -\frac{1}{k}q(x), \quad 0 < x < L,$$

$$u(0)=0, \quad u(L)=0 \quad (10.1.1)$$

Kolaylık olması bakımından denge durumundaki çözümdeki  $\frac{1}{k}$  gösterimini ortadan kaldırıyoruz. Fakat  $-1/k$  çarpanı ile daha sonra zamandan bağımsız problemler ve denge problemi çözümleri arasında bir karşılaştırma yapacağız.

Eğer  $0 < \xi < L$  aralığında bir  $\xi$  merkezli birim küremiz varsa,  $q(x) = \delta(x - \xi)$ ,

$$G_{xx}(x, \xi) = -\frac{1}{k}\delta(x - \xi), \quad 0 < x < L$$

$$G(0, \xi) = 0, \quad G(L, \xi) = 0 \quad (10.1.2)$$

sağlar.

$G(x, \xi)$  fonksiyonu açık bir şekilde hesaplanabilir.  $H_x(x - \xi) = \delta(x - \xi)$  ve (10.1.2)'yi kullanarak aşağıdaki denklemi yazabiliriz.

$$G_x(x, \xi) = -\frac{1}{2}H(x - \xi) + C_1(\xi) = \begin{cases} C_1(\xi) & x < \xi, \\ -\frac{1}{k} + C_1(\xi), & x > \xi \end{cases}$$

Böylece

$$G(x, \xi) = \begin{cases} xC_1(\xi) + C_2(\xi) & x < \xi \\ x\left[C_1(\xi) - \frac{1}{k}\right] + C_3(\xi), & x > \xi \end{cases} \quad (10.1.3)$$

Burada  $C_1, C_2$  ve  $C_3$ ,  $\xi$  nin keyfi fonksiyonlarıdır. (10.1.2) deki sınır şartlarını kullanarak ,

$$C_2(\xi) \equiv 0, \quad L\left[C_1(\xi) - \frac{1}{k}\right] + C_3(\xi) = 0$$

Böylece,  $C_3(\xi) = -L\left[C_1(\xi) - \frac{1}{k}\right]$  bulunur ve (10.1.3) ten

$$G(x, \xi) = \begin{cases} xC_1(\xi), & x < \xi, \\ (x - L)\left[C_1(\xi) - \frac{1}{k}\right], & x > \xi. \end{cases} \quad (10.1.4)$$

elde edilir.

Eğer  $G(x, \xi)$  bir sıçramalı süreksizliğe sahipse, bu durumda  $x = \xi$  da  $\delta$  bir singülerlik olacaktır. Bu istediğimiz bir durum olmadığından,  $x = \xi$  da  $G(x, \xi)$ ' yi sürekli almalıyız. Diğer bir ifade ile  $G(\xi - \epsilon) = G(\xi + \epsilon)$  dir. Bu durumda (10.1.4) e bakarsak,

$$\xi C_1(\xi) = (\xi - L)\left[C_1(\xi) - \frac{1}{k}\right] \text{ elde edilir.}$$

Böylece  $C_1(\xi) = (L - \xi)/(kL)$  ve (10.1.4)' ten

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{x}{kL}(L - \xi), & x \leq \xi, \\ \frac{\xi}{kL}(L - x), & x > \xi \end{cases},$$

elde edilir.

Açıktır ki  $G(x, \xi) = \mathcal{F}(\xi, x)$  dir.

Kısmi integrasyon metodunu kullanarak, düzgün u ve v fonksiyonları için  $[0, L]$  aralığında

$$\begin{aligned} \int_0^L (u''v - v''u)dx &= [v' - v'u]_0^L - \int_0^L (u'v' - v'u')dx \\ &= [v'(L)u(L) - v'(0)u(0)] - \int_0^L (u'v' - v'u')dx \end{aligned} \quad (10.1.5)$$

buluruz.

Bu Green formülü olarak bilinir. Böylece (10.1.1)' in bir çözümüdür ve  $v=G$  ise (10.1.2)' nin bir çözümüdür ve böylece (10.1.5) in sağ tarafındaki ifade sıfır olur. Buradan

$$\int_0^L [v'(x)\delta(x-\xi) - G(x, \xi)q(x)]dx = 0$$

x ve  $\xi$  nin yerlerini değiştirirsek, ve  $G(x, \xi) = \mathcal{F}(\xi, x)$ 'i kullanırsak

$$u(x) = \int_0^L G(x, \xi)q(\xi)d\xi \quad (10.1.6)$$

elde ederiz.

$G(x, \xi)$ 'ye (10.1.1) sınır-değer probleminin Green fonksiyonu denir ki  $\xi$  ısı kaynaklı birim merkezli x noktasındaki ısıyı vermektedir. (10.1.6) formülü x noktasındaki ısıda bir çubuktaki tüm  $q(\xi)$  kaynaklarına etkisi altında olduğunu göstermektedir.

(10.1.6)' ya benzer şekilde gösterilen bu formül homojen olmayan sınır koşulları içinde hesaplanabilir. (10.1.1) sınır koşullarını  $u(0)=a$  ve  $u(L)=b$  ile değiştirelim. Bu durumda yukarıda tanımlandığı gibi  $u$  ve  $v$  nin aynı seçilmesiyle (10.1.5)'den

$$\int_0^L \left[ \frac{1}{k} (x) \delta(x - \xi) - G(x, \xi) q(x) \right] dx = -k \left[ \frac{1}{k} (x) G_x(x, \xi) \right]_{x=0}^{x=L}$$

böylece,

$$u(x) = \int_0^L G(x, \xi) q(\xi) d\xi - k \left[ G_\xi(x, L) - a G_\xi(x, 0) \right]$$

elde edilir.

Böylece

$$G_\xi(x, \xi) = \begin{cases} -\frac{x}{kL} & , \quad x \leq \xi \\ -\frac{x-L}{kL} & , \quad x > \xi \end{cases}$$

ifadesine sahip oluruz.

Sonuç olarak

$$u(x) = \int_0^L G(x, \xi) q(\xi) d\xi + b \frac{x}{L} + a \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad (10.1.7)$$

elde edilir.

### Örnek 10.1.1.

Aşağıdaki başlangıç ve sınır değer problemi için düzgün durum çözümünü hesaplayınız.

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) + x - 1, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

$$u(0, t) = 1, \quad u(1, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < 1,$$



$k=1$ ,  $L=1$ ,  $a=2$ ,  $b=-1$  ve  $q(x)=x-1$  alarak, (10.1.7)'yi kullanırsak,

$$G(x, \xi) = \begin{cases} x(1-\xi), & x \leq \xi \\ \xi(1-x), & x > \xi \end{cases} \quad G_{\xi}(x, \xi) = \begin{cases} -x, & x < \xi \\ 1-x, & x > \xi \end{cases}$$

böylece,

$$\begin{aligned} \int_0^1 G(x, \xi) q(\xi) d\xi &= \int_0^x \xi(1-x)(\xi-1) d\xi + \int_x^1 x(1-\xi)(\xi-1) d\xi \\ &= (1-x) \int_0^x (\xi^2 - \xi) d\xi - x \int_x^1 (\xi-1)^2 d\xi \\ &= (1-x) \left[ \frac{1}{3} \xi^3 - \frac{1}{2} \xi^2 \right]_0^x - \frac{1}{3} x [\xi-1]^3_x^1 \\ &= (1-x) \left( \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 \right) + \frac{1}{3} x (x-1)^3 = -\frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{3} x. \end{aligned}$$

$bx/L + \alpha(1-x/L) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x$  olduğunda verilen başlangıç sınır değer probleminin denge çözümü,

$$u(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{6} \text{ şeklindedir.}$$

Green fonksiyonları çift katlı Fourier serisi olarak ifade edilebilir. (10.1.1) ile ilgili Sturm-Liouville probleminin öz fonksiyonlarına baktığımızda,  $G$  nin sürekliliği ve  $G(x, \xi) = \mathcal{H}(\xi, x)$  simetrikliği görülebilir. Böylece (10.1.8) formunda ki seriyi elde ederiz.

$$G(x, \xi) = \sum_{m=1}^{\infty} \left( \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} \sin \frac{n\pi}{L} \right) \sin \frac{m\pi\xi}{L} \quad (10.1.8)$$

(10.1.8)'deki ifadeyi iki kez terim terim  $x$ 'e göre diferansiyelleyip ve (10.1.2) deki adi diferansiyel denklemi göz önüne alırsak,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 b_{mn} \sin \frac{n\pi}{L} \right] \sin \frac{m\pi\xi}{L} = \frac{1}{k} \delta(k-\xi)$$

elde edilir.

Bu eşitliği  $\sin(p\pi \cdot / L)$ ,  $p = 2, \dots$  ile çarpıp,  $[0, L]$  integralini alıp, (3.1.5) kullanarak

$$\left( \frac{p\pi}{L} \right) \frac{kL}{2} \sum_{m=1}^{\infty} b_{mp} \sin \frac{m\pi \xi}{L} = \sin \frac{p\pi \xi}{L}, \quad p = 2, \dots$$

elde edilir

Öz fonksiyonların lineer bağımsızlıktan dolayı sıfırdan farklı katsayılar  $b_{pp} = 2L/(k p^2 \pi^2)$  olup (10.1.8) serisi

$$G(x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2L}{k n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi \xi}{L} \quad (10.1.9)$$

şeklindedir

**Zamandan bağımsız problem:** İç kaynaklı ve uç noktalarındaki sıfır ısıya sahip sonlu bir çubuk aşağıdaki başlangıç sınır değer problemi ile modellenebilir.

$$u_t(x, t) = k u_{xx}(x, t) + q(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L$$

Öz fonksiyonların dağılımı metodunu kullanarak bu problemi çözebiliriz..

Böylece

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L},$$

$$q(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin \frac{n\pi x}{L},$$

Burada

$$q_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L q(x,t) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad f_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx.$$

(10.1.10)

dir.

Kısmi diferansiyel denklemdeki bu serileri yeniden düzenlersek,  $u_n$ ,  $n=1,2,\dots$ ,  
nin

$$u_n'(t) + k \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 u_n(t) = q_n(t), \quad t > 0,$$

$$u_n(0) = f_n$$

sağladığını görürüz.

Bu problem çözülebilir, örneğin integral çarpanını

$$\exp \left\{ \int k \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 dt \right\} = e^{k(n\pi/L)^2 t}$$

alabiliriz.

Böylece  $u_n$  için başlangıç koşulunu yüklersek,

$$\begin{aligned} u_n(t) &= e^{-k(n\pi/L)^2 t} \left[ \int_0^t q_n(\tau) e^{k(n\pi/L)^2 \tau} d\tau + C \right] \\ &= f_n e^{-k(n\pi/L)^2 t} + e^{-k(n\pi/L)^2 t} \int_0^t q_n(\tau) e^{k(n\pi/L)^2 \tau} d\tau \end{aligned}$$

olduğunu görebiliriz. (10.10) dan da aşağıdaki ifadeleri elde ederiz.

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ f_n e^{-k(n\pi/L)^2 t} + e^{-k(n\pi/L)^2 t} \int_0^t q_n(\tau) e^{k(n\pi/L)^2 \tau} d\tau \right] \sin \frac{n\pi x}{L} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[ \frac{2}{L} \int_0^L f(\xi) \sin \frac{n\pi \xi}{L} d\xi \right] e^{-k(n\pi/L)^2 t} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ e^{-k(n\pi/L)^2 t} \int_0^t \int_0^L \lambda(\xi, \tau) \sin \frac{n\pi\xi}{L} d\xi \right\} e^{k(n\pi/L)^2 \tau} d\tau \Bigg\} \sin \frac{n\pi x}{L} \\
& = \int_0^L f(\xi) \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi\xi}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t} \right] d\xi \\
& + \int_0^t \int_0^L \lambda(\xi, \tau) \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi\xi}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 (t-\tau)} \right] \tau d\xi d\tau
\end{aligned}$$

Eğer

$$G(x, t; \xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi\xi}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 (t-\tau)}, \quad \tau < t \quad (10.1.11)$$

ile Green fonksiyonunu tanımlarsak, başlangıç sınır değer probleminin çözümü

$$u(x, t) = \int_0^L G(x, t; \xi, 0) f(\xi) d\xi + \int_0^t \int_0^L G(x, t; \xi, \tau) \lambda(\xi, \tau) d\xi d\tau \quad (10.1.12)$$

formunda yazılabilir

Bu formülde gösterilen ilk terim herhangi bir t anında ve herhangi bir x noktasındaki çubuğun iç ısıısının etkisini göstermektedir. İkinci terim ise  $0 < \tau < t$  anındaki çubuktaki tüm kaynakların etkisini göstermektedir. Bu ifade Causality prensibi olarak bilinmektedir. Constanda(2002)

### Örnek 10.1.2.

(10.1.11) ve (10.1.12)' yi kullanarak,

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) + t(x-1), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = x, \quad 0 < x < 1$$

Başlangıç sınır değer probleminin çözümünü bulalım. Burada

$k=1$ ,  $L=1$ ,  $q(x, t)=t(x-1)$  ve  $f(x)=x$  tir.

$$G(x, t; \xi, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln(n\pi) \sin(n\pi\xi) e^{-n^2\pi^2(t-\tau)};$$

şeklindedir. Böylece

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^1 G(x, t, \xi, 0) d\xi + \int_0^t \int_0^1 G(x, t, \xi, \tau) (\xi - 1) d\tau d\xi \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 2 \sin(n\pi) \left[ \int_0^1 \xi \sin(n\pi\xi) d\xi + e^{-n^2\pi^2 t} \right] \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \sin(n\pi) \left[ \int_0^1 (\xi - 1) \sin(n\pi\xi) d\xi \right] \left[ \int_0^t \tau e^{-n^2\pi^2(t-\tau)} d\tau \right] \end{aligned}$$

olur. Kısmi integralleme sağ taraftaki ilk integral

$$= \left[ \xi \left( -\frac{1}{n\pi} \right) \cos(n\pi\xi) \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{n\pi} \cos(n\pi\xi) d\xi = (-1)^{n+1} \frac{1}{n\pi},$$

İkinci integral ise,

$$\left[ (\xi - 1) \left( -\frac{1}{n\pi} \right) \cos(n\pi\xi) \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{n\pi} \cos(n\pi\xi) d\xi = -\frac{1}{n\pi},$$

Üçüncü integral ise

$$\begin{aligned} &\left[ \tau \frac{1}{n^2\pi^2} e^{-n^2\pi^2(t-\tau)} \right]_0^t - \int_0^t \frac{1}{n^2\pi^2} e^{-n^2\pi^2(t-\tau)} d\tau \\ &= \frac{1}{n^2\pi^2} t - \frac{1}{n^4\pi^4} (1 - e^{-n^2\pi^2 t}) \end{aligned}$$

Bu sonuçları elde ettiğimiz çözümde yerine koyarsak,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi) \left[ (-1)^{n+1} e^{-n^2\pi^2 t} - \frac{1}{n^2\pi^2} t + \frac{1}{n^4\pi^4} (1 - e^{-n^2\pi^2 t}) \right] \ln(n\pi)$$

elde ederiz.

Green fonksiyonu ve temsil ettiği fonksiyonların hepsi başlangıç sınır değer problemleri veya diğer tipten başlangıç sınır-değer problemleri içinde uygulanabilir. Burada uzay değişebilir. Yarı sonlu veya tamamen sonsuz aralık olarak da alınabilir.

## 10.2. Laplace Denklemi

Laplace denklemi

$$(\Delta - \epsilon)(x, y) = f(x, y), \quad 0 < x < L, \quad 0 < y < K,$$

$$u(x, 0) = \phi, \quad u(x, K) = \psi, \quad 0 < x < L,$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(L, y) = 0, \quad 0 < y < K$$

dengeleri zamandan bağımsız düzgün dikdörtgensel bir bölgedeki ve sınırlarda sıfır ısıya sahip sınır değer problemi olarak yorumlanır.

$(x, y)$  noktasında  $G(x, y; \xi, \eta)$  alalım ki bu noktada  $(\xi, \eta)$   $0 < \xi < L, \quad 0 < \eta < K$ . Böylece  $G$ ;

$$(\Delta - \epsilon)(x, y)G(x, y; \xi, \eta) = \delta(x - \xi)\delta(y - \eta) \quad 0 < x < L, \quad 0 < y < K,$$

$$G(x, 0; \xi, \eta) = \phi, \quad G(x, K; \xi, \eta) = \psi, \quad 0 < x < L,$$

$$G(0, y; \xi, \eta) = 0, \quad G(L, y; \xi, \eta) = 0, \quad 0 < y < K.$$

sınır değer probleminin çözümüdür.

Burada  $\delta(x - \xi)\delta(y - \eta) = \delta(x - \xi)\delta(y - \eta)$  ve  $\Delta - \epsilon$  değişkenlerine göre Laplasiyan gösterilir. D dikdörtgensel bir bölge olsun yani;

$$D = \{(x, y) : 0 < x < L, 0 < y < K\}$$

D parçalı düzgün olduğundan, divergens teoremini kullanarak, u ve v fonksiyon çifti için

$$\int_D (u\Delta v - v\Delta u) da = \int_D (u \operatorname{div} \operatorname{grad} v - v \operatorname{div} \operatorname{grad} u) da$$

$$\begin{aligned}
&= \int_D [\text{div}(u \text{grad} v) - (\text{grad} u)(\text{grad} v) \\
&\quad - \text{div}(v \text{grad} u) + \text{grad} v(\text{grad} u)] da \\
&= \int_{\partial D} (uv_n - vu_n) ds, \tag{10.2.1}
\end{aligned}$$

bulabiliriz.

Burada  $n$  indisi ile sınırdaki birim dış normal türev gösterilmektedir. (10.2.1) eşitliği iki değişkenli uzaylar için Green fonksiyonudur. Eğer  $u$  verilen başlangıç değer probleminin çözümünde  $G$  yerine  $v$  yazarsak, bu durumda homojen sınır koşulları (10.2.1) ün sağ tarafında yer alan  $u$  ve  $G$  nin her ikisini birden sağlar ve böylece (10.2.1) formülü,

$$\int_D [(x, y) \delta(x - \xi) \delta(y - \eta) - q(x, y) G(x, y; \xi, \eta)] da(x, y) = 0,$$

formuna indirgenir.

Burada da  $da(x, y)$ ,  $x$  ve  $y$ 'ye göre integrasyon alanını göstermektedir.

$$u(\xi, \eta) = \int_D G(x, y; \xi, \eta) q(x, y) da(x, y). \tag{10.2.2}$$

elde ederiz. Aynı zamanda  $u(x, y)$  yerine  $G(x, y; \xi, \eta)$ ,  $v(x, y)$  yerine de  $G(x, y; p, \sigma)$  yazıp (10.2.1)'i uygularsak, simetriklik özelliğini elde ederiz.

$$G(\xi, \eta; p, \sigma) = G(p, \sigma; \xi, \eta).$$

Böylece değişkenlerin basit şekilde değiştirilmesiyle (10.2.2) formülü;

$$u(x, y) = \int_D G(x, y; \xi, \eta) q(\xi, \eta) da(\xi, \eta) \tag{10.2.3}$$

şekline girer.  $G(x, y; \xi, \eta)$  'ye verilen sınır değer probleminin Green fonksiyonu denir. (10.2.3) formülü  $D$  bölgesinde  $(x, y)$  noktasındaki tüm  $u$  nın etkisini göstermektedir.  $G$  'nin Fourier serisi ifadesini bulmak için sınır değer problemi ile ilgili (6.4.2) iki boyutlu özdeğer problemi kullanılır. Burada özdeğer ve özfonksiyonlar sırasıyla

$$\lambda_{nm} = \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{K} \right)^2, \quad S_{nm} = \sin \frac{n\pi}{L} \sin \frac{m\pi}{K}, \quad n, m = 1, 2, \dots$$

şeklindedir.

Sonuç olarak;

$$\begin{aligned} G(x, y; \xi, \eta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{nm}(\xi, \eta) S_{nm}(x, y) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{nm}(\xi, \eta) \sin \frac{n\pi}{L} \sin \frac{m\pi}{K}. \end{aligned}$$

dır..Eğer G tarafından sağlanan denklemle bu gösterimin yerini değiştirirsek,

$$\begin{aligned} \Delta(x, y) G(x, y; \xi, \eta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{nm}(\xi, \eta) (\Delta S_{nm})(x, y) \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_{nm} c_{nm}(\xi, \eta) S_{nm}(x, y) \\ &= \delta(x - \xi) \delta(y - \eta) \end{aligned}$$

elde edilir.  $S_{pq}(x, y)$  ile bu eşitliğin her iki tarafını çarpıp D üzerinden integral alarak kullanalım.

$$c_{pq}(\xi, \eta) = - \frac{4}{LK \lambda_{pq}} S_{pq}(\xi, \eta)$$

elde edilir.

Böylece G için çift katlı Fourier sinüs serisi;

$$G(x, y; \xi, \eta) = - \frac{4}{LK} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi\xi/L) \sin(m\pi\eta/K)}{(n\pi/L)^2 + (m\pi/K)^2} \sin \frac{n\pi}{L} \sin \frac{m\pi}{K}. \quad (10.2.4)$$

elde edilir.



**Örnek 10.2.1**

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = -\pi^2 \sin(\pi x) \sin(2\pi y), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, 2) = 0, \quad 0 < x < 1,$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(1, y) = 0, \quad 0 < y < 1,$$

sınır değer problemini çözelim.

Dikkat edilirse burada,  $L=1$ ,  $K=2$  ve  $q(x, y) = -\pi^2 \sin(\pi x) \sin(2\pi y)$  dir. (10.2.4)'den,

$$G(x, y; \xi, \eta) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi\xi) \sin(m\pi\eta - 2)}{n^2\pi^2 + m^2\pi^2/4} \sin(n\pi x) \sin\frac{m\pi y}{2},$$

elde edilir. Böylece (10.2.3) ve (3.1.5)'ten,

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^1 \int_0^1 (-2) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4 \sin(n\pi\xi) \sin(m\pi\eta - 2)}{\pi^2(4n^2 + m^2)} \sin(n\pi x) \sin\frac{m\pi y}{2} \\ &\quad \times (-\pi^2) \sin(\pi\xi) \sin(2\pi\eta) d\xi d\eta \\ &= 40 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 + m^2} \left( \int_0^1 \sin(\pi\xi) \sin(n\pi\xi) d\xi \right) \\ &\quad \times \left( \int_0^2 \sin(2\pi\eta) \sin\frac{m\pi\eta}{2} d\eta \right) \sin(n\pi x) \sin\frac{m\pi y}{2} \\ &= \left( \frac{40}{4 \cdot 1^2 + 1^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \right) \sin(\pi x) \sin(2\pi y) = \sin(\pi x) \sin(2\pi y). \end{aligned}$$

olarak bulunur.

**10.3. Dalga Denklemi**

Sonsuz uzunluktaki bir telin titreşim hareketi,

$$u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t) + q(x, t), \quad -\infty < x < \infty \quad t > 0,$$

$$x \rightarrow \pm \infty \text{ iken } u(x, t), \quad u_x(x, t) \rightarrow 0 \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \quad -\infty < x < \infty$$

sınır değer problemi ile tanımlanır.

Eğer  $t = \tau$  anında  $\xi$  noktasında bir dış etki (zorlama hareketi) varsa bu durumda  $G(x,t;\xi,\tau)$  nun etkisi  $t$  anında bir  $x$  noktasının düşey titreşim üzerine etkisidir. Böylece

$$G_{tt}(x,t;\xi,\tau) = c^2 G_{xx}(x,t;\xi,\tau) = \delta(x-\xi) \delta(t-\tau), \quad -\infty < x < \infty \quad t > \tau,$$

$$x \rightarrow \mp \infty \text{ iken } G(x,t;\xi,\tau), \quad G_x(x,t;\xi,\tau) \rightarrow 0, \quad t > \tau$$

$$G(x,t;\xi,\tau) = 0, \quad -\infty < x < \infty \quad t < \tau$$

Burada  $\delta(x-\xi) \delta(t-\tau) = \delta(x-\xi) \delta(t-\tau)$  ve başlangıç koşulları  $x$  noktasının yer değiştirmesine fiziksel olarak etki etmektedir. Böylece  $\xi$  noktasındaki birim kuvvete etki etmektedir.

Isı denklemini için Cauchy problemini çözdüğümüz gibi Fourier transformasyonunu kullanarak  $G$ 'yi bulabiliriz. İlk olarak (9.1)'den,

$$F[\delta(x-\xi)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-\xi) e^{i\omega x} dx = \frac{1}{2\pi} e^{i\omega \xi}$$

Böylece, eğer  $F[G](\omega; \xi, t) = \tilde{G}(\omega; \xi, t)$  yazarsak, ve kısmi diferansiyel denkleme Fourier'i uygularsak, sınır koşullarının  $G$ 'yi sağlamasından dolayı,

$$\tilde{G}_{tt}(\omega, t; \xi, \tau) + c^2 \omega^2 \tilde{G}(\omega, t; \xi, \tau) = \frac{1}{2\pi} e^{i\omega \xi} \delta(t-\tau), \quad t > \tau \quad (10.3.1)$$

$$\tilde{G}(\omega, t; \xi, \tau) = 0, \quad t < \tau$$

geçiş problemine ulaşırız.

$t = \tau$  için  $\delta(t-\tau) = 0$  olduğundan dolayı (10.3.1)'in çözümü

$$\tilde{G}(\omega, t; \xi, \tau) = \begin{cases} 0, & t < \tau \\ C_1 \cos(c\omega(t-\tau)) + C_2 \sin(c\omega(t-\tau)), & t > \tau \end{cases} \quad (10.3.2)$$

Burada  $C_1$  ve  $C_2$ ,  $\omega, \xi$  ve  $\tau$  nun keyfi fonksiyonlarıdır.  $\tilde{G}$  nin  $t=\tau$  da sürekli almak zorunda olduğumuzdan  $C_1 = 0$  dır.  $C_2$  yi bulmak için  $\tau, \tau_0$  aralığını göz önüne alalım.

Burada  $0 \leq \tau \leq \tau_1$  ve (10.3.1)'i bu aralık üzerinde  $t$  ye göre integre edersek,

$$\begin{aligned} \tilde{G}_t(w, \tau; \xi, \tau) - \tilde{G}_t(w, \tau; \xi, \tau) + c^2 w^2 \int_{\tau}^{\tau} \tilde{G}(w, t; \xi, \tau) dt \\ = \frac{1}{2\pi} e^{i w \xi} \int_{\tau}^{\tau} \delta(t - \tau) dt = \frac{1}{2\pi} e^{i w \xi} \end{aligned}$$

elde edilir. (10.3.2) den

$$\tilde{G}_t(w, \tau; \xi, \tau) = 0,$$

$$\tilde{G}_t(w, \tau; \xi, \tau) = c w C_2 \cos(c w (\tau - \tau)).$$

bulunur. Eğer bir  $\tau_1, \tau_2 \rightarrow \tau$  götürürsek,  $t=\tau$  da  $G$ 'nin sürekliliğinden  $C_2 = e^{i w \xi} / (2\pi c w)$  bulunur. Böylece,

$$\tilde{G}(w, t; \xi, \tau) = \begin{cases} 0, & t < \tau, \\ \frac{1}{2c} e^{i w \xi} \cdot \frac{\sin(c w (t - \tau))}{\pi w}, & t > \tau \end{cases}$$

Fourier dönüşümü listesinden

$$F^{-1} \left[ \frac{1}{\pi} \frac{\sin(a w)}{w} \right] = \mathcal{H}(a - |x|),$$

$$F^{-1} \left[ e^{i w a} F[f(w)] \right] = f(x - a);$$

olur. Sırasıyla  $a = c(t - \tau)$  ve  $a = \xi$  aldığımızda,

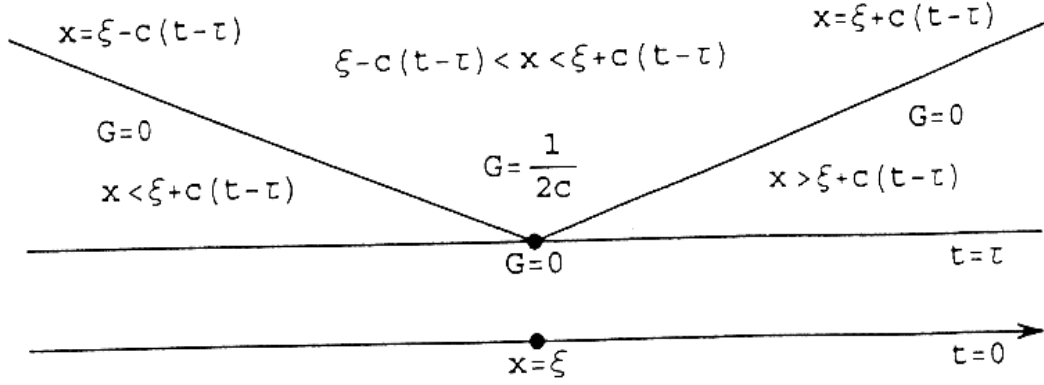
$$G(x, t; \xi, \tau) = \frac{1}{2c} H(c(t - \tau) - |x - \xi|). \quad (10.3.3)$$

elde ederiz.

(10.1.1) deki şekilden de görüldüğü gibi  $(x, t)$  düzleminin  $(t > 0)$ , yarı düzlemindeki  $G$  nin değerleri (10.3.3) dan hesaplanabilir. Aynı şekli kullanarak kolayca

$$G(x, t; \xi, \tau) = \frac{1}{2c} [H((x - \xi) + c(t - \tau)) - H((x - \xi) - c(t - \tau))]. \quad (10.3.4)$$

görebiliriz.



Şekil 10.1

Kullandığımız yöntemi biraz daha geliştirirsek, Laplace denklemine de uygulayabiliriz ve dalga denklem için  $G$  nin simetrikliğini de elde edebiliriz  $G$  deki  $u$  çözümü elde edilebilir. Böylece genel form;

$$\begin{aligned}
 u(x, t) = & \int_a^t \int_a^b G(x, t; \xi, \tau) q(\xi, \tau) d\xi d\tau \\
 & + \int_a^b [F(x, t; \xi, 0) u_r(\xi, 0) - G_\tau(x, t; \xi, 0) u(\xi, 0)] d\xi \\
 & - c^2 \int_0^t [F_\xi(x, t; \xi, \tau) u(\xi, \tau) - G(x, t; \xi, \tau) u_\xi(\xi, \tau)]_{\xi=a}^{\xi=b} d\tau
 \end{aligned} \quad (10.3.5)$$

şeklindedir. Burada  $q$  dış kuvveti,  $a$  ve  $b$  ise sınır koşullarını göstermektedir.  $G(x, t; \xi, \tau)$  ye dalga denklemi için Green fonksiyonu denir.

$x \rightarrow \infty$  olduğunda yukarıda yaptığımız gibi  $a \rightarrow -\infty$  ve  $b \rightarrow \infty$  olarak  $|x|$ 'i yeterince büyük seçip  $G(x, t; \xi, \tau) = \delta(x - \xi)$  olarak hesaplarız.

**Örnek 10.3.1.**

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) + q(x,t), \quad -\infty < x < \infty \quad t > 0,$$

$$x \rightarrow \pm \infty \text{ iken } u(x,t), u_x(x,t) \rightarrow 0 \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0, \quad -\infty < x < \infty$$

Başlangıç değer problemini göz önüne alalım.

Burada  $q(x,t) = \begin{cases} 1, & -1 < x < 1, t > 0, \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$

(10.3.5) ve (10.3.4) den  $c=1$  alarak problemimizin çözümü,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t G(x,t;\xi,\tau) q(\xi,\tau) d\xi d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t \frac{1}{2} [H(x-\xi+t-\tau) - H(x-\xi-t+\tau)] q(\xi,\tau) d\xi d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{x+t-\tau} q(\xi,\tau) d\xi d\tau - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{x-t+\tau} q(\xi,\tau) d\xi d\tau \end{aligned}$$

yani;

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \int_0^{x+t} \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} q(\xi,\tau) d\xi d\tau$$

olur.

$(x,t) = (3,2)$  noktasındaki çözümün değeri ise

$$u(3,2) = \frac{1}{2} \int_0^2 \int_{1+\tau}^{5-\tau} q(\xi,\tau) d\xi d\tau \quad \text{dir.}$$

Bunu hesaplamak için  $0 < \tau < 2$ 'de yukarıdaki integralde  $\xi = 1 + \tau$  aldık.

Bunun anlamı  $q(1+\tau, \tau) = 1$  dir. Böylece  $u(3,2) = 1$  dir.

Benzer şekilde;

$$u(2,2) = \frac{1}{2} \int_0^2 \int_{\tau}^{4-\tau} q(\xi, \tau) d\xi d\tau$$

Burada  $0 \leq \tau \leq 2$  ve içteki integralin üst sınırı  $4-\tau$  olarak alındığında,

$$\begin{aligned} u(2,2) &= \frac{1}{2} \int_0^2 \int_{\tau}^{4-\tau} q(\xi, \tau) d\xi d\tau + \frac{1}{2} \int_2^4 \int_{\tau}^{4-\tau} q(\xi, \tau) d\xi d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 \int_{\tau}^1 d\xi d\tau = \frac{1}{2} \int_0^2 (1-\tau) d\tau = 1/4. \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$u(1,3) = \frac{1}{2} \int_0^3 \int_{-2+\tau}^{4-\tau} q(\xi, \tau) d\xi d\tau$$

da hesaplanabilir.

Böylece, (i) Eğer  $1 < \tau < 2$  ise  $-2+\tau < -1$  ve  $4-\tau > 2$  dir.

(ii) Eğer  $1 < \tau < 2$  ise  $-2+\tau < -1$  ve  $4-\tau > 2$  dir.

Buradan

$$\begin{aligned} u(1,3) &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{-1}^1 d\xi d\tau + \frac{1}{2} \int_1^3 \int_{-2+\tau}^1 d\xi d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 2 d\tau + \frac{1}{2} \int_1^3 (3-\tau) d\tau = 2 \end{aligned}$$

Eğer dış kuvvet yoksa yani  $q(x,t)=0$  ise (10.3.5) formülü,

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} [F(x,t;\xi,0)u_{\tau}(\xi,0) - G_{\tau}(x,t;\xi,0)u(\xi,0)] d\xi \quad (10.3.6)$$

şeklinde ifade edilebilir. (10.3.5)'e göre

$$H'(\tau-t) = \delta(\tau-t),$$

ve

$$G_{\tau}(x, t; \xi, \tau) = -\frac{1}{2} \left[ \delta((x - \xi) + c(t - \tau)) + \delta((x - \xi) - c(t - \tau)) \right]$$

elde ederiz.

H ve  $\delta$  nin tanımından ve (10.3.6)'dan

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - \xi - ct) + \delta(x - \xi + ct) f(\xi) d\xi \\ &\quad + \frac{1}{2c} \int_{-\infty}^{\infty} [H(x - \xi + ct) - H(x - \xi - ct)] g(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{2} [f(x + ct) + f(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi) d\xi \end{aligned}$$

elde edilir. Bu formüle D'Alembert çözümü denir.

## KAYNAKLAR

- Anar, İ.E., 2005. *Kısmi Diferensiyel Denklemler*. Palme yayıncılık, 314, Ankara. 552.
- Billingham J., 2000. Steady-state solutions exothermic ignition in symmetric geometries. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 65:283-313
- Boyce, W.E., Di Prima, R.C., 2001. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. John Wiley, A371.R6, Newyork. 745.
- Constanda, C., 2002. *Solution Techniques for Elemantary Partial Differential Equations*. Acrc Pres Company, 1-58488-257-3, Florida. 253.
- Çağlıyan M., Çelebi O., 2002. *Kısmi Diferensiyel Denklemler*. Uludağ Üniversitesi Güçlendirme Vakfı Yayın No:196, Bursa
- Dernek, A.N., 2005. *Kısmi Türevli Denklemler ve Çözümlü Problemler*. Nobel yayıncılık, 786, Ankara. 302.
- Evans, G., Blackledge, J., Yardley, P., 2000. *Analytic Methods for Partial Differential Equations*. Verlag london limited, 515, London. 299.
- Gribben, R.J., 1975. *Elementary Partial Differential Equations*. Van Nostrand Reinhold Co. Ltd Molly Millers Lane, A3716.871, Wokingham. 121.
- Haberman R., 1998. *Elementary Applied Partial Differential Equations with* Fourier Series and Boundary Value Problembs, Prentice-Hall, Upper Saddle River NJ
- Needham D.J., King A.C., 2006. On the Behaviour of Eigenvalues Associated with Sturm-Liouville Problems on Shrinking Domains. *Proceedings of the Edinburgh Mathematicial Society*. 49:201-214
- Otto S.R., Denier J., 1999. Numerical Solution of a Generalized Elliptic Partial Differential Eigenvalue Problem. *Journal of Computational Physics*. 156:352-359



Rainville, E.D., Bedient, P.E., Bedient, R.E., 1997. *Elementary Differential Equations*. Macmillian publishing company, A371.R29, New Jersey. 530.

Ross, S.L., 1984. *Differential Equations*. John Wiley, 83-21643, Canada. 807,

Sneddon I.N., 1957. *Elements of Partial Differential Equations*. McGraw-Hill, New York-Toronto-London.

Young, E.C., 1990. *Partial Differential Equations*. Allyn and Bacon, Inc, Boston. 346.