

De-Sitter Uzayında Yüzeylerin Geometrisi Üzerine

Gül Uğur

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Ağustos 2010

On the Geometry of Surfaces in de-Sitter Space

Gül Uğur

MASTER OF SCIENCE THESIS

Department of Mathematic

August 2010

De-Sitter Uzayında Yüzeylerin Geometrisi Üzerine

Gül Uğur

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. İsmail Kocayusufoğlu

Ağustos 2010

ONAY

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Gül Uğur' un YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı “De-Sitter Uzayında Yüzeylerin Geometrisi Üzerine” başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. İsmail Kocayusufoğlu

İkinci Danışman : --

Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:

Üye : Prof. Dr. İsmail Kocayusufoğlu

Üye : Doç. Dr. İbrahim Günaltılı

Üye : Doç. Dr. Dursun Eser

Üye : Doç. Dr. Kürşat Yenilmez

Üye : Yrd. Doç. Dr. Cumali Ekici

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun tarih ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Nimetullah BURNAK

Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu çalışmanın amacı 3-boyutlu de-Sitter uzayında spacelike yüzeylerin lokal teorisi ve sabit asal eğrilikli tam spacelike yüzeyler ile ilgili bazı özellikleri incelemektir. Bu çalışmada, esas olarak Juan A. Aledo ve Jose A. Galvez in ‘Complete spacelike surfaces with a constant principal curvature in the 3-dimensional de Sitter space’ adlı makalesi incelendi.

Birinci ve ikinci bölümlerde, ele aldığımız konunun tarihsel gelişimi ile çalışmamızda gerekli olan tanım ve teoriler verildi.

Üçüncü bölümde de-Sitter uzayında spacelike yüzeyler ile ilgilenildi. De-Sitter 3-uzayındaki spacelike yüzeyler için Hermitian matris modeli, görünmez top modeli, slab modeli ve immersiyonun lax çifti gibi bazı kavramların tanımları ve metrikleri incelendi. Ayrıca bir immersiyonun karakteristiğinden bahsederek, spacelike immersiyonlar ve sabit ortalama eğrilikli immersiyonlar ele alınarak, bir immersiyonun total umbilik olma şartı incelendi. Daha sonra hiperbolik Gauss dönüşümünün geometrik yorumu verilerek, örnekler incelendi.

Son bölümde ise, 3-boyutlu S_1^3 de-Sitter uzayında sabit asal eğrilikli tam spacelike yüzeylerin umbilik olmasıyla ilgili bazı özellikler ile bir teorem ve ispatı verildi. Ayrıca S_1^3 uzayında tam bağlantılı yüzeylerin ailesi elde edildi.

Anahtar Kelimeler: Yarı-Riemann manifoldu, spacelike yüzey, ortalama eğrilik, asal eğrilik, de-Sitter uzayı, immersiyon, total umbilik.

SUMMARY

The aim of this study is to examine some features related to the local theory of spacelike surfaces on the 3-dimensional de-Sitter space and the complete spacelike surfaces with constant mean curvature. In this thesis, especially, the paper whose name ‘complete spacelike surfaces with a constant principal curvature in the 3-dimensional de Sitter space’ by Juan A. Aledo and Jose A. Galvez is studied.

The historical development of the subject and the necessary definitions and theories are presented in chapter 1 and 2.

In chapter 3, spacelike surfaces on de-Sitter space are dealt with. Definitions and metrics of some concepts like the Hermitian matrix model, the hollow ball model, slab model and immersion lax pair are examined for spacelike surfaces on 3-dimensional de-Sitter space. In addition, the condition of an immersion to be a total umbilic is analyzed by mentioning the causal characteristic of an immersion and handling the spacelike immersions and constant mean curvature immersions. Afterwards, examples are examined by giving the geometrical comment of hyperbolic Gauss map.

In the last chapter, some characteristics related to the spacelike surfaces with constant principal curvature and their being umbilical are indicated together with a theorem and its proof. Furthermore, the family of complete orientable surfaces is obtained.

Key Words: Semi-Riemannian manifold, spacelike surface, mean curvature, principal curvature, de-Sitter space, immersion, total umbilic.

TEŞEKKÜR

De-Sitter uzayında yüzeylerin geometrisi üzerine adlı tez çalışmamda ve derslerimde, beni yönlendiren ve her türlü olanağı sağlayan Sayın Yrd. Doç. Dr. Cumali Ekici ve danışmanım Sayın Prof. Dr. İsmail Kocayusufoğlu'na teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET.....	v
SUMMARY.....	vi
TEŞEKKÜR.....	vii
SİMGELER DİZİNİ.....	ix
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1 Simetrik Bilineer Formlar.....	3
2.2 Yarı Riemann Manifoldlar.....	6
3. DE-SİTTER UZAYINDA SPACELİKE YÜZEYLERİN	
LOKAL TEORİSİ.....	16
3.1 De-Sitter 3-Uzayı.....	16
3.2 S_1^3 Uzayındaki Spacelike İmmersiyonlar.....	19
3.3 Hiperbolik Gauss Dönüşümü.....	30
4. 3-BOYUTLU DE-SİTTER UZAYINDA SABİT ASAL	
EĞRİLİKLİ TAM SPACELİKE YÜZEYLER.....	36
4.1 Asıl Sonucun İfade ve Tanıtımı.....	36
SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	44
KAYNAKLAR.....	45

SİMGELER DİZİNİ

$H_{p-1}^{n+p-1}(c)$	c -sabit eğrilikli anti de-Sitter uzayı
$S_p^{n+p}(c)$	c -sabit eğrilikli de-Sitter uzayı
$\vec{h}$	Ortalama eğrilik vektörü
p	Yarı Riemann manifoldunun indeksi
S	İkinci temel formun karesi
Δ	Laplasyan
$\chi(M)$	M manifoldu üzerindeki vektör alanlarının uzayı
$T_p M$	$p \in M$ noktasındaki tanjant uzay
R	Riemann eğrilik tensörü
∇	Levi-Civita koneksiyonu
$\mathcal{H}$	Ortalama eğrilik vektör alanı
Ric	Ricci eğrilik tensörü
R_{ij}	Ricci eğriliği
R_{ijkl}	Riemann eğrilik tensörünün bileşenleri
w	Bir 1-form
dw	1-formun diferensiyeli
κ	Gauss eğriliği
h_{ij}	ikinci temel formun bileşenleri
ρ	Skalar eğrilik
K	Kesit eğriliği
$T_p^* M$	$p \in M$ deki dual uzay, kotanjant uzayı
$C^\infty(M, \mathbb{R})$	$M \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı $\mathbb{C}^\infty$ fonksiyonların kümesi
Γ_{jk}^i	Riemann-Christoffel sembolü

BÖLÜM 1

GİRİŞ

De Sitter uzay, Riemann geometrisindeki n -kürenin Lorentz karşılığı olarak ifade edilebilir. De Sitter uzayının hiperyüzeyleri ile ilgili bazı çalışmalar Cheng S. Y., Yau S. T., Cheng Q. M., Akutagawa K., Zheng Y., Pang H. D., Xu S. L., Dai S., Ramanathan J., Montiel S. gibi matematikçiler tarafından yapılmıştır. Bu çalışmalar daha çok spacelike hiperyüzeyler üzerinde yoğunlaşmıştır.

Spacelike hiperyüzeyler üzerinde ilk çalışma 1976 yılında Cheng S. Y. ve Yau S. T. tarafından yapılmıştır. Bu çalışmada, spacelike hiperyüzey, Lorentz uzayında kapalı altküme olmak üzere, hiperyüzeyin ortalama eğriliğinin sabit olması durumunda indirgenmiş metriğin tam Riemann metrik olduğu ve hiperyüzeyin ikinci temel formu verilmiştir.

De Sitter uzayında spacelike hiperyüzeylerin total geodeziklik durumu ilk olarak 1970 yılında Calabi E. ve daha sonra 1976 yılında Cheng S. Y. ve Yau S. T. tarafından incelenmiştir. 1984 yılında Nishikawa S. yaptığı çalışmada, Lorentz manifoldunda maximal spacelike hiperyüzeylerin total geodezik olma koşullarını vermiştir. 1987 de Ramanathan S_1^3 uzayındaki sabit ortalama eğrilikli her kompakt spacelike yüzeyin tamamı ile umbilik olduğunu göstermiştir. Bu 1988 yılında Montiel tarafından herhangi bir boyutun hiperyüzeylerine genellenmiştir. Diğer taraftan Li de kompakt spacelike yüzeyin sabit Gauss eğriliğine sahipken aynı sonucu elde etmiştir. 2001 yılında Aledo J. A. ve Galvez J. A. 3 boyutlu de Sitter uzayındaki asal eğrilikli tam spacelike yüzeyler (bir uzayın tam uzay olması, uzayda oluşturulan cauchy dizisinin yine uzaydaki bir noktaya yakınsamasıdır) ile ilgilenmiştir. 2002 yılında Pang H. D., Xu S. L. ve Dai S. 1-indeksli de Sitter uzayında genel spacelike hiperyüzeyler üzerine çalışmış ve böyle hiperyüzeylerin total geodezik olma koşullarını incelemişlerdir. 2003 yılında Romero ve Aledo da

alışmalarında Gauss eğriliğinin ikinci temel formunun sabit olduğı gibi tamamen umbilik kürelerin de, de-Sitter uzayındaki tek tam spacelike yüzeyler olduğunu elde etmişlerdir.

Ramanathan ve Li nin sonuçlarının doğal bir genellemesi olarak araştırmacılar S_1^3 uzayında tam lineer Weingarten yüzeylerinin (ortalama ve Gauss eğrilikleri sabit lineer bir kombinasyonunu gerektiren yüzeyler) sadece tam umbilik küreler olduğunu kanıtlamıştır.

Bu çalışmada da de-Sitter 3-uzayındaki spacelike yüzeyler için Hermitian matris modeli, görünmez top modeli, slab modeli ve immersiyonun lax çifti gibi bazı kavramların tanımları ve metrikleri incelendi. Ayrıca bir immersiyonun causal karakteristiğinden bahsederek spacelike immersiyonlar ele alınarak bir immersiyonun total umbilik olma şartı incelendi. Daha sonra hiperbolik Gauss dönüşümünün geometrik yorumu verilerek örnekler incelendi. 3-boyutlu de-Sitter uzayında sabit asal eğrilikli tam spacelike yüzeylerin umbilik olmasıyla ilgili bir teorem ve ispatı verildi. Ayrıca S_1^3 uzayında tam bağlantılı yüzeylerin ailesi elde edildi.

Ayrıca sabit asal eğrilikli kompakt spacelike yüzeylerin tam umbilik küreler olduğu gösterildi.

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Simetrik Bilineer Formlar

Tanım 2.1.1: V bir reel vektör uzayı olsun.

$$g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümü $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ için

- i) $g(\vec{u}, \vec{v}) = g(\vec{v}, \vec{u})$
- ii) $g(a\vec{u} + b\vec{v}, \vec{w}) = ag(\vec{u}, \vec{w}) + bg(\vec{v}, \vec{w})$,
 $g(\vec{u}, a\vec{v} + b\vec{w}) = ag(\vec{u}, \vec{v}) + bg(\vec{u}, \vec{w})$

özelliklerine sahip ise g dönüşümüne V reel vektör uzayı üzerinde bir *simetrik bilinear form* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.2: g, V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form olsun.

- i) $\forall \vec{v} \in V$ ve $\vec{v} \neq \vec{0}$ için $g(\vec{v}, \vec{v}) > 0$ ise g simetrik bilinear formuna *pozitif tanımlı*,
- ii) $\forall \vec{v} \in V$ ve $\vec{v} \neq \vec{0}$ için $g(\vec{v}, \vec{v}) < 0$ ise g simetrik bilinear formuna *negatif tanımlı*,
- iii) $\forall \vec{v} \in V$ için $g(\vec{v}, \vec{v}) \geq 0$ ise g simetrik bilinear formuna *yarı-pozitif tanımlı*,
- iv) $\forall \vec{v} \in V$ için $g(\vec{v}, \vec{v}) \leq 0$ ise g simetrik bilinear formuna *yarı-negatif tanımlı*,
- v) $\forall \vec{u} \in V$ için $g(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ iken $\vec{v} = \vec{0}$ olmak zorunda ise g simetrik bilinear formuna *non-dejenere*, aksi halde *dejenere*dir denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.3: V bir reel vektör uzayı ve

$$g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

bir simetrik bilineer form olsun.

$$g|_w: W \times W \rightarrow \mathbb{R}$$

negatif tanımlı olacak şekilde en büyük boyutlu W alt uzayının boyutuna g simetrik bilineer formun *indeksi* denir ve p ile gösterilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.4: Bir V reel vektör uzayı üzerinde non-dejenere simetrik bilineer forma V reel vektör uzayı üzerinde bir *skalar çarpma* denir.

V üzerindeki bir skalar çarpma g ise (V, g) ikilisine *skalar çarpımlı vektör uzay* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.5: $\forall \vec{v}, \vec{w} \in V$ için $\vec{v} \neq \vec{0}$ ve $\vec{w} \neq \vec{0}$ iken $g(\vec{v}, \vec{w}) = 0$ ise $\vec{v}$ ve $\vec{w}$ vektörleri *diktir* denir ve $\vec{v} \perp \vec{w}$ şeklinde gösterilir. V reel vektör uzayının bir alt uzayı W olmak üzere,

$$W^\perp = \{\vec{v} \in V : \vec{v} \perp W\}$$

olsun. $W^\perp$ alt uzayına V nin *dik alt uzay* denir. $W^\perp$ alt uzayı, W nin ortogonal komplemanı olamaz. Çünkü $W + W^\perp$ genellikle V uzayının tamamı değildir (O'Neill, 1983).

Teorem 2.1.6: W bir V skalar çarpım uzayının altuzayı olsun. O zaman,

$$i) \text{ boy } W + \text{ boy } W^\perp = \text{ boy } V$$

$$ii) (W^\perp)^\perp = W$$

özellikleri vardır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.7: α eğrisinin hız vektör alanı T , eğri boyunca paralel ise, yani kendi kendine paralel ise α eğrisine M üzerinde bir *geodezik eğri* adı verilir. $D_T T = 0$ dır (Hacısalıhoğlu ve Ekmekçi, 2003).

Tanım 2.1.8: Bir V reel vektör uzayı üzerindeki skalar çarpma g olsun. Bir $\vec{v} \in V$ vektörünün normu

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{|g(\vec{v}, \vec{v})|}$$

olarak tanımlanır. Normu bir birim olan vektöre *birim vektör* ve ortogonal birim vektörlerin cümlesine de *ortonormal sistem* denir (O'Neill, 1983).

Teorem 2.1.9: Bir $V \neq \{\vec{0}\}$ skalar çarpım uzayı bir ortonormal baza sahiptir (O'Neill, 1983).

Teorem 2.1.10: V reel vektör uzayı için bir ortonormal baz $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ olsun. $\varepsilon_i = g(e_i, e_i)$ olmak üzere $\forall \vec{v} \in V$ vektörü

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i g(\vec{v}, e_i) e_i$$

olacak şekilde tek türlü yazılabilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.11: V bir skalar çarpım uzayı olsun. V nin indeksi p olmak üzere, $p = 1$ ve $\dim V \geq 2$ ise V skalar çarpım uzayına *Lorentz Uzayı* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.12: Her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye *regüler eğri* denir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Tanım 2.1.13: $U, \mathbb{R}^2$ uzayının irtibatlı bir açık alt kümesi olmak üzere

$\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ düzgün ve regüler bir dönüşüm olsun. $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ dönüşümü bir homeomorfizm ise $\varphi(U)$ kümesine, $\mathbb{R}^3$ uzayında bir *basit yüzey* denir (Sabuncuoğlu, 2006).

Tanım 2.1.14: $M, \mathbb{R}^3$ uzayının bir alt kümesi olsun. M nin her bir p noktası için $p \in \varphi(U)$ ve $\varphi(U) \subset M$ olacak biçimde bir $\varphi(U)$ basit yüzeyi bulunabiliyorsa

M kümesine, $\mathbb{R}^3$ uzayında bir *yüzey* denir (Sabuncuoğlu, 2006).

Tanım 2.1.15: V bir Lorentz Uzayı olsun. $\vec{v} \in V$ olmak üzere,

i) $g(\vec{v}, \vec{v}) > 0$ veya $\vec{v} = 0$ ise $\vec{v}$ vektörüne *spacelike*,

ii) $g(\vec{v}, \vec{v}) < 0$ ise $\vec{v}$ vektörüne *timelike*,

iii) $g(\vec{v}, \vec{v}) = 0$, $\vec{v} \neq 0$ ise $\vec{v}$ vektörüne *lightlike(null)* denir (O'Neill, 1983).

2.2 Yarı-Riemann Manifolddar

Tanım 2.2.1: M bir C^∞ manifold olsun. $P \in M$ noktasındaki tanjant uzay $T_P M$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} g_p : T_P M \times T_P M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (X_P, Y_P) &\longrightarrow g_p(X_P, Y_P) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı sabit indeksli, simetrik, bilineer, non-dejenere (0,2) tensörüne M üzerinde bir *metrik tensör* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.2: M bir C^∞ manifold olsun. M bir g metrik tensör ile donatılmışsa, M ye bir *yarı-Riemann manifoldu* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.3: Bir M yarı-Riemann manifoldu üzerinde g metrik tensörünün indeksine *yarı-Riemann manifoldunun indeksi* denir ve $indM$ ile gösterilir.

Eğer, indeks p ise $0 \leq p \leq boyM$ dir. Özel olarak, $p = 0$ ise $\forall p \in M$ için $g|_p$, $T_P M$ üzerinde pozitif tanımlı bir iç çarpım olduğundan, M bir Riemann manifoldu olur. $p = 1$ ve $n \geq 2$ olması durumunda ise, M manifolduna bir *Lorentz manifoldu* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.4: $\mathbb{R}^n$ Öklid n-uzay verilsin. $0 \leq p \leq n$ olmak üzere p tamsayısı için, $\mathbb{R}^n$ üzerinde

$$g(X_P, Y_P) = -\sum_{i=1}^p x_i y_i + \sum_{i=p+1}^n x_i y_i$$

ile verilen metrik tensör göz önüne alınırsa, elde edilen uzay *yarı-Öklid n-uzay* olarak adlandırılır ve $\mathbb{R}_p^n$ ile gösterilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.5:

$$V \text{ ve } W = \sum W_i \partial_i,$$

$\mathbb{R}_p^n$ üzerinde vektör alanı iseler,

$$\nabla_V W = \sum V(W_i) \partial_i$$

vektör alanına W nın V ye göre *kovaryant türevi* denir.

Burada, $\{\partial_i \mid 1 \leq i \leq n\}$, $\chi(\mathbb{R}_p^n)$ vektör alanları uzayının standart bazıdır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.6: M bir C^∞ manifold olsun. M üzerinde bir ∇ koneksiyonu,

i) $\nabla_v W$, V ye göre $C^\infty(M, \mathbb{R})$ lineerdir.

ii) $\nabla_v W$, W ya göre $\mathbb{R}$ lineerdir.

iii) $\nabla_v(fW) = V(f)W + f\nabla_v W$, $\forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$

olacak şekilde

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

fonksiyonudur (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.7: Bir M yarı-Riemann manifoldu üzerinde $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

i) $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$

ii) $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$

olacak şekilde bir tek ∇ koneksiyonu vardır. ∇ ye M nin *Levi-Civita koneksiyonu*

denir ve Levi-Civita koneksiyonu

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) - g(X, [Y, Z]) \\ &\quad + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]) \end{aligned}$$

Kozsul formülü ile karakterize edilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.8: M bir Riemann manifoldu ve M üzerindeki Riemann koneksiyonu D olsun. O zaman, M üzerinde $\{(I, \alpha)\}$ atlası ile verilen eğri boyunca *geodezik eğrilik vektör alanı* diye, bu eğrinin birim teğet vektör alanı T olmak üzere, $D_T T$ vektör alanına denir.

$$\begin{aligned} k_g: I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longrightarrow k_g(t) = \| D_T T \| \end{aligned}$$

olarak tanımlanan k_g fonksiyonuna da α eğrisinin *geodezik eğrilik fonksiyonu* denir (Hacısalıhoğlu, 2004).

Tanım 2.2.9: Levi-Civita koneksiyonu ∇ olan bir yarı-Riemann manifold M olsun. $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} R: \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) &\longrightarrow \chi(M) \\ (X, Y, Z) &\longrightarrow R(X, Y)Z = \nabla_{[X, Y]}Z - \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan R fonksiyonu M üzerinde (1,3) tensördür. Bu tensöre M nin *Riemann eğrilik tensörü* denir (O'Neill, 1983).

Teorem 2.2.10: M bir yarı-Riemann manifold ve R , M nin Riemann eğrilik tensörü olsun. $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

- i) $g(R(X, Y)Z, W) = -g(R(Y, X)Z, W)$
- ii) $g(R(X, Y)Z, W) = -g(R(X, Y)W, Z)$

$$iii) g(R(X, Y)Z, W) = g(R(Z, W)X, Y)$$

eşitlikleri vardır (Duggal and Bejancu, 1996).

Tanım 2.2.11: M bir semi-Riemann manifold ve $P \in M$ noktasındaki X_P, Y_P tanjant vektörlerinin gerdiği $T_P M$ tanjant uzayının 2-boyutlu bir non-dejenere altuzayı Π olsun.

$$K(\Pi) = \frac{g(R(X, Y)Y, X)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2}$$

şeklinde tanımlanan $K(\Pi)$ reel sayısına, Π nin *kesit eğriliği* denir. M manifoldu sabit kesit eğriliğine sahipse M ye *sabit eğriliklidir* denir (O'Neill, 1983).

Teorem 2.2.12: Eğer M manifoldu sabit bir c eğriliğine sahipse M nin eğrilik tensörü $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$

$$R(X, Y)Z = c\{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\}$$

şeklindedir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.13: $(N, \tilde{g})$ Riemann manifoldunun bir altmanifoldu (M, g) olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ olmak üzere

$$h(X, Y) = g(X, Y)\tilde{H}$$

eşitliği sağlanıyorsa M ye *total umbilik altmanifold* adı verilir.

Eğer

$$\tilde{g}(h(X, Y), \tilde{H}) = \lambda g(X, Y)$$

olacak biçimde M üzerinde bir λ fonksiyonu var ise M ye *pseudo-umbilik altmanifold* denir (Hacısalıhoğlu ve Ekmekçi, 2003).

Tanım 2.2.14: M bir yarı-Riemann manifold ve R , M manifoldunun Riemann eğrilik tensörü olsun. $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, $T_P M$ nin bir ortonormal bazı olmak üzere

$$\rho = \sum_{i=1}^n g^{ij} R_{ijk}^k \quad \text{veya} \quad \rho = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i Ric(e_i, e_i)$$

değerine M nin *skalar eğriliği* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.15: $F : E^n \rightarrow E^m$ bir dönüşüm ve $\vec{v} \in T_{E^n}(P)$ olsun. E^m uzayının $t \rightarrow F(\vec{p} + t\vec{v})$ eğrisinin $t = 0$ anındaki hız vektörü

$$(F_*)_P(\vec{v}_P) \in T_{E^m}(F(P))$$

ise

$$(F_*)_P : T_{E^n}(P) \rightarrow T_{E^m}(F(P))$$

fonksiyonuna F nin P noktasındaki *türev dönüşümü* denir (Hacısalihoglu, 2000).

Tanım 2.2.16: $\tilde{M}$ yarı-Riemann manifoldunun C^∞ altmanifoldu M ve $\tilde{M}$ deki metrik g olsun.

$$\begin{aligned} \phi : M &\longrightarrow \tilde{M} \\ P &\longrightarrow \phi(P) = P \end{aligned}$$

inclusion (daldırma) dönüşümü için $P \in M$ noktasındaki türev dönüşümü

$$\phi_{*|P} : T_P M \rightarrow T_P \tilde{M}$$

ve ek dönüşümü de

$$\phi^*|_P : T_P \tilde{M}^* \rightarrow T_P M^*$$

olmak üzere, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$\phi^*|_P(g_P)(X_P, Y_P) = g(\phi_*(X_P), \phi_*(Y_P))$$

eşitliği ile tanımlı $\phi^*|_P(g_P)$, M üzerinde bir metrik ise M ye $\tilde{M}$ nin bir *yarı-Riemann altmanifoldu* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.17: $M, \tilde{M}$ nin bir yarı-Riemann altmanifoldu olsun. $\forall p \in M$ için $T_p M^\perp$ uzayının boyutuna M nin *dik tümleyeninin boyutu (codimension)*, $T_p M^\perp$ uzayının indeksine de M nin *dik tümleyeninin indeksi (co-indeksi)* denir (O'Neill, 1983).

$M, \tilde{M}$ nin bir yarı-Riemann altmanifoldu olduğunda $T_p \tilde{M} = T_p M \oplus T_p M^\perp$ olduğundan $X_p \in T_p \tilde{M}$ için tanjant ve normal bileşenleri yardımıyla

$$X_p = \tan X_p + \text{nor} X_p$$

yazılır. Burada $\tan X_p \in T_p M$, $\text{nor} X_p \in T_p M^\perp$ dir. Ortogonal izdüşümlerin sonucu olarak,

$$\tan : T_p \tilde{M} \rightarrow T_p M$$

$$\text{nor} : T_p \tilde{M} \rightarrow T_p M^\perp$$

dönüşümleri $\mathbb{R}$ -lineerdir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.18: $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned} h : \chi(M) \times \chi(M) &\longrightarrow \chi(M)^\perp \\ (X, Y) &\longrightarrow h(X, Y) = \text{nor} \tilde{\nabla}_X Y \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı h dönüşümü 2- lineer ve simetriktir. h fonksiyonuna M manifoldunun *şekil tensörü* veya *ikinci temel tensörü* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.19: $M, \tilde{M}$ nin bir yarı-Riemann altmanifoldu ve $\tilde{M}$ üzerindeki Leci-Civita koneksiyonu $\tilde{\nabla}$ olsun.

$$\begin{aligned} \nabla : \chi(M) \times \chi(M) &\longrightarrow \chi(M) \\ (X, Y) &\longrightarrow \nabla_X Y = \tan \tilde{\nabla}_X Y \end{aligned}$$

indirgenmiş fonksiyonuna M yarı-Riemann altmanifoldu üzerine *indirgenmiş koneksiyon* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.20: $M, \tilde{M}$ nin bir yarı-Riemann altmanifoldu olsun. ∇ ve $\tilde{\nabla}$, sırasıyla $\tilde{M}$ ve M üzerindeki Levi-Civita koneksiyonları olmak üzere

$\forall X, Y \in \chi(\tilde{M})$ için,

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y)$$

eşitliğine M nin *Gauss denklemi* denir (O'Neill, 1983).

Teorem 2.2.21: $M, \tilde{M}$ nin bir yarı-Riemann altmanifoldu olsun. $M, \tilde{M}$ manifoldunun Riemann eğrilik tensörleri sırasıyla R ve $\tilde{R}$, şekil tensörleri de h olmak üzere $\forall V, W, X, Y \in \chi(M)$ için

$$\langle R_{VW}X, Y \rangle = \langle \tilde{R}_{VW}X, Y \rangle - \langle h(V, X), h(W, Y) \rangle + \langle h(V, Y), h(W, X) \rangle$$

eşitliği sağlanır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.22: $M, \tilde{M}$ nin bir yarı-Riemann altmanifoldu olsun. $p \in M$ ve p noktasında M nin bazı $e_1, e_2, \dots, e_n$ olmak üzere, M nin $\mathcal{H}$ ortalama eğrilik vektör alanı

$$\mathcal{H}_p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i h(e_i, e_i)$$

olarak tanımlanır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.23: Sabit eğrilikli, tam, bağlantılı yarı-Riemann manifoldda *indefinit uzay formu* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.24: $M \subset \tilde{M}$, M yarı-Riemann hiperyüzeyi üzerinde birim normal vektör alanı U olsun. $\forall V, W \in \chi(M)$ için,

$$\langle S(V), W \rangle = \langle h(V, W), U \rangle$$

olacak şekilde S , $(1, 1)$ tensör alanına M nin *şekil operatörü* denir. Her bir $p \in M$ noktasında $S : T_p M \rightarrow T_p M$ bir lineer operatör belirtir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.25: $M \subset \tilde{M}$, M yarı-Riemann hiperyüzeyinin bir P noktasındaki şekil operatörü $S(P)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \kappa : M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ P &\longrightarrow \kappa(P) = \det S(P) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona M nin *Gauss eğrilik fonksiyonu*, $\kappa(P)$ değerine de M nin P noktasındaki *Gauss eğriliği* denir (Hacısalihoglu, 1998).

Tanım 2.2.26: $M, \tilde{M}$ nin bir yarı-Riemann hiperyüzeyi olmak üzere, M nin ikinci temel tensörü sıfır ise M ye *total geodeziktir* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.27: M ve N birer C^∞ yarı-Riemann manifoldu olsun. f , M den N ye tanımlanan bir C^∞ fonksiyon olmak üzere, (f_*) jakobiyen matrisine karşılık gelen dönüşüm M nin her bir P noktası için birebir ise f fonksiyonuna bir *immersiyon* denir (Hacısalihoglu, 1998).

Tanım 2.2.28: M ve N birer C^∞ yarı-Riemann manifoldu olsun. f , M den N ye tanımlanan C^∞ fonksiyon bir immersiyon olmak üzere $\forall X, Y \in T_p M$ için,

$$g(f_*(X), f_*(Y)) = g(X, Y)$$

ise f ye bir *izometrik immersiyon* adı verilir. Burada g , $T_p M$ den indirgenmiş metriktir (Hacısalihoglu, 2003).

Tanım 2.2.29: M, C^∞ yarı-Riemann manifoldu olsun. M nin bir $p \in M$ noktasındaki kotanjant uzayı $T_p^*(M)$ olsun. Buna göre, bir

$$w : M \rightarrow \bigcup_{p \in M} T_p^*(M)$$

fonksiyonu için

$$\pi \circ w : M \rightarrow M$$

özdeşlik fonksiyonu olacak şekilde bir

$$\pi : \bigcup_{p \in M} T_p^*(M) \rightarrow M$$

fonksiyonu mevcut ise w ya M üstünde bir *1-form* denir (Hacısalıhoğlu, 1998).

Tanım 2.2.30: M bir Riemann manifoldu, M nin k -boyutlu altmanifoldu $\overline{M}$ ve M nin Riemann koneksiyonu D , eğrilik tensörü R , $\overline{M}$ nin Riemann koneksiyonu $\overline{D}$, eğrilik tensörü $\overline{R}$, ikinci temel tensörü V olsun. O zaman $\forall X, Y, Z \in \chi(\overline{M})$ için

$$Teg(R(X, Y)Z) = \overline{R}(X, Y)Z + teg\{D_X V(Y, Z) - D_Y V(X, Z)\}$$

denklemini $\overline{M}$ üzerinde *genelleştirilmiş Gauss eğrilik denklemini* ve

$$\begin{aligned} nor(R(X, Y)Z) = & V(X, \overline{D}_Y Z) - V(Y, \overline{D}_X Z) - V([X, Y], Z) \\ & + nor\{D_X V(Y, Z) - D_Y V(X, Z)\} \end{aligned}$$

denklemine de $\overline{M}$ üzerinde *genelleştirilmiş Codazzi-Mainardi denklemini* denir (Hacısalıhoğlu, 2004).

Tanım 2.2.31: M manifoldunun koneksiyonu ∇ ve bir $U \subset M$ açık altcümlesi üzerinde bir koordinat komşuluğu (U, ϕ) olsun. $\chi(U)$ üzerinde C^∞ vektör alanlarının ortonormal bazı $\{\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n\}$ ve bu bazın dual bazı da $\{w^1, w^2, \dots, w^n\}$ olmak üzere, $\forall X \in \chi(U)$ için

$$\nabla_X \partial_j = w_j^k(X) \partial_k$$

$$w^p(\nabla_X \partial_j) = w_j^p(X)$$

dir. Buna göre

$$\begin{aligned} w_j^p : \chi(U) & \longrightarrow C^\infty(U, \mathbb{R}) \\ X & \longrightarrow w_j^p(X) = w^p(\nabla_X \partial_j) \end{aligned}$$

olarak tanımlanan w_j^p 1-formlarına, U üzerinde $\{\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n\}$ baz vektör alanlarına göre ∇ *koneksiyonunun 1-formları* denir.

Özel olarak $X = \partial_k$ alınırsa

$$\begin{aligned} w_j^p(\partial_k) &= w^p(\nabla_{\partial_k} \partial_j) \\ &= w^p(\Gamma_{jk}^j \partial_i) \\ &= \Gamma_{jk}^j w^p(\partial_i) \quad , w^p(\partial_i) = \delta_i^p \\ &= \Gamma_{jk}^p w^p(\partial_k) \quad , 1 \leq j, p \leq n \end{aligned}$$

buradan da

$$w_j^p = \Gamma_{jk}^i w^k$$

olur (Hacısalihoğlu, 2003).

Tanım 2.2.32: $n \geq 2$ ve $0 \leq p \leq n$ olmak üzere,

i) $S_p^n(r) = \{X \in \mathbb{R}_p^{n+1} : g(X, X) = r^2\}$ hiperquadratığıne, $\mathbb{R}_p^{n+1}$ uzayında $r > 0$ yarıçaplı, n -boyutlu ve p indeksli *pseudo küre* denir.

ii) $H_p^n(r) = \{X \in \mathbb{R}_{p+1}^{n+1} : g(X, X) = -r^2\}$ hiperquadratığıne, $\mathbb{R}_p^{n+1}$ uzayında $r > 0$ yarıçaplı, n -boyutlu ve p indeksli *pseudo-hiperbolik uzay* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.33: $n \geq 2$ ve $0 \leq p \leq n$ olsun.

i) $S_p^n(r)$ *pseudo küre*, $c = 1/r^2$ sabit pozitif eğrilikli, tam Riemann manifoldudur.

ii) $H_p^n(r)$ *pseudo-hiperbolik uzay*, $c = -1/r^2$ sabit negatif eğrilikli, tam Riemann manifoldudur (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.34: $M(c)$, p -indeksli indefinite uzay formu olsun. $c > 0$ ve $p = 1$ ise M uzayına *1-indeksli de-Sitter uzayı* denir (Zheng, 1996).

BÖLÜM 3

DE-SİTTER UZAYINDA SPACELIKE YÜZEYLERİN LOKAL TEORİSİ

3.1 De-Sitter uzayı

3.1.1. De-Sitter 3-uzayı

$\mathbb{R}_1^4$, Lorentz metriklı 4-boyutlu Lorentz (Minkowski) uzayı ise

$$\langle (x_0, x_1, x_2, x_3), (y_0, y_1, y_2, y_3) \rangle = -x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

dir ve de-Sitter 3-uzayı

$$S_1^3 = S_1^3(1) = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_1^4 \mid -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

$\mathbb{R}_1^4$ uzayından indirgenmiş metriklıdır.

S_1^3 , 1 sabit kesit eğrilikli, basit bağlantılı 3-boyutlu Lorentzian manifoldudur.

3.1.2 Geodezik

Teorem 3.1.1 $I \subset \mathbb{R}$ ve

$$\gamma : I \ni t \rightarrow \gamma(t) \in S_1^3$$

de bir eğri ve

$$\gamma(0) = p \text{ ve } \dot{\gamma}(0) = v$$

ve γ nın S_1^3 uzayında $\gamma(o) = p$ ve $\dot{\gamma}(0) = \gamma \in T_p S_1^3$ şartıyla bir geodezik olsun.

i) Eğer γ spacelike geodezik ise $\langle v, v \rangle = 1$

$$\gamma(t) = (\cos t)p + (\sin t)v$$

ii) Eğer γ timelike geodezik ise $\langle v, v \rangle = -1$

$$\gamma(t) = (\cosh t)p + (\sinh t)v$$

iii) Eğer γ lightlike geodezik ise $\langle v, v \rangle = 0$

$$\gamma(t) = p + tv$$

dir. Burada herbir geodezik tamdır.

3.1.3 Hermitian matris modeli

$\mathbb{R}_1^4$ uzayını 2x2 tipindeki simetrik matrisler olarak ele alabiliriz, bu da

$$f : \mathbb{R}_1^4 \ni X = (x_0, x_1, x_2, x_3) \leftrightarrow X = \sum_{k=0}^3 x_k e_k = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} \quad (3.1.1)$$

dönüşümü birebir eşlemedir.

$$\left\{ e_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\mathbb{R}_1^4$ uzayında bir taban olduğundan de-Sitter S_1^3 uzayı

$$S_1^3 = \{X \mid X^* = X \quad \det X = -1\}$$

şeklinde ve metriği ise

$$\langle X, Y \rangle = -\frac{1}{2}iz(X_{e_2}, Y_{e_2}^t)$$

şeklindedir. Özel olarak

$$\|x\|^2 = \langle X, X \rangle = -\det X$$

dir.

Lemma 3.1.2: $S_1^3 = \{Fe_3F^* \mid F \in SL(2, C)\}$ dir.

İspat:

$$\{X \mid X^* = X, \det X = -1\} = \{Fe_3F^* \mid F \in SL(2, C)\}$$

olduğunu göstermeliyiz. İfadesinin sağ tarafındaki herhangi bir elemanın sol taraftaki ifadenin de elemanı olduğu açıktır. Tersini gösterelim. Sol taraftaki herhangi bir X için;

$$E \in SU(2) \text{ mevcuttur } \ni X = E \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} E^*$$

Bu ifadedeki λ_1 ve λ_2 , X in özdeğerleridir. $X = X^*$ olduğundan; λ_1 ve λ_2 reel olmalıdır. $\det X = -1$ olduğundan dolayı; X in özdeğerleri, λ ve $\frac{-1}{\lambda}$ ($\lambda > 0$ için) yazılabilir.

Bu durumda

$$X = E \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\lambda} \end{pmatrix} E^*$$

öyleki

$$X = F e_3 F^*$$

bulunur. Burada $\lambda > 0$ olduğundan

$$F = E \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix} \in SL(2, C)$$

bulunur.

3.1.4 Görünmez top modeli

S_1^3 uzayındaki spacelike immersiyonları görüntür kılmak için, S_1^3 uzayının hollow ball modeli (Kim and Yang) daki gibi kullanılırsa, herhangi bir X noktası için

$$\begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_1 - ix_2 \end{pmatrix} \longleftrightarrow (x_0, x_1, x_2, x_3) \in S_1^3$$

dir. Ayrıca $1 \leq k \leq 3$ için

$$y_k = \frac{e^{\arctan x_0}}{\sqrt{1 + x_0^2}} x_k$$

olmak üzere, $e^{-\pi} < y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 < e^{\pi}$ dir.

$(x_0, x_1, x_2, x_3) \longleftrightarrow (y_1, y_2, y_3)$ birebir eşleme, S_1^3 uzayından görünmez top uzayına birebir ve örtendir.

O halde

$$H = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \mid e^{-\pi} < y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 < e^{\pi}\}$$

dir.

Bu durumda S_1^3 , H görünmez top ile özdeşleşir.

3.1.5 Slab modeli

Tanım 3.1.3: S_1^3 uzayının slab modeli $Y = \{(t, z) \mid -1 < t < 1, z \in (C \cup \{\infty\})\}$ olarak tanımlanır.

Metriği

$$ds^2 = \left(\frac{2}{t^2 - 1} \right)^2 \left\{ -dt^2 + \left(\frac{t^2 + 1}{z\bar{z} + 1} \right)^2 dzd\bar{z} \right\},$$

şeklinde tanımlıdır.

Y ile S_1^3 uzayı arasındaki karşılıklı bağıntı:

$$Y \ni (t, z) \rightarrow \left(\frac{-2t}{t^2 - 1}, \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1} \frac{z + \bar{z}}{z\bar{z} + 1}, \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1} \frac{i(\bar{z} - z)}{z\bar{z} + 1}, \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1} \frac{z\bar{z} - 1}{z\bar{z} + 1} \right) \in S_1^3$$

ve

$$Y \ni \left(\frac{\sqrt{1 + x_0^2} - 1}{x_0}, \frac{x_1 + ix_2}{\sqrt{1 + x_0^2} - x_3} \right) \longleftarrow (x_0, x_1, x_2, x_3) \in S_1^3$$

şeklindedir.

3.2. S_1^3 Uzayındaki Spacelike İmmersiyonlar

3.2.1. Temel denklemler

$D \subset C$, $z = x + iy$ kompleks koordinatlı basit bağlantılı bir tanım kümesi olsun.

(Bu bölümde yalnızca yerel teoriyi incelediğimizden, D altuzayının daima basit bağlantılı olduğu varsayılacaktır)

$f : D \rightarrow S_1^3$ spacelike bir immersiyon olsun yani

$$ds^2 = \langle df, df \rangle$$

indirgenmiş metriği pozitif tanımlıdır. Genelliği bozmaksızın, f immersiyonunun konformal olduğunu varsayabiliriz. Bu durumda diferensiyellenebilir bir

$$u : D \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu vardır.

$$I = \begin{pmatrix} \langle f_z, f_z \rangle & \langle f_z, f_{\bar{z}} \rangle \\ \langle f_{\bar{z}}, f_z \rangle & \langle f_{\bar{z}}, f_{\bar{z}} \rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{2}e^{2u} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

olduğunda

$$ds^2 = e^{2u} dz d\bar{z} = (dz, d\bar{z}) I \begin{pmatrix} dz \\ d\bar{z} \end{pmatrix}$$

dir. Yani

$$\langle f_z, f_z \rangle = \langle f_{\bar{z}}, f_{\bar{z}} \rangle = 0 \text{ ve } \langle f_z, f_{\bar{z}} \rangle = \frac{1}{2}e^{2u}$$

şeklindedir. Bu ifadedeki

$$f_z = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \text{ ve } f_{\bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

ve $\langle, \rangle$ lineer olarak TpS_1^3 ($p \in S_1^3$) tanjant uzayının kompleksine genişletilmiştir.

Teorem 3.2.2: Her bir $p \in D$ için $N(p)$, p noktasındaki f immersiyonunun birim normal vektörü olsun. Bu durumda $N(p) \in TpS_1^3$, p de f immersiyonunun $f_*(TpD)$ tanjant düzlemine ortogonaldır.

f immersiyonu spacelike olduğundan dolayı N normalinin timelike yani

$$\langle N, N \rangle = -1$$

dir. N future pointing olduğundan N normalinin birinci koordinatı pozitifdir. Bundan dolayı

$$f : N : D \rightarrow H^3 = \{n = (n_0, n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{R}_1^4 \mid \langle n, n \rangle = -1, n_0 > 0\} \quad (3.2.1)$$

f immersiyonunun 2. temel formu

$$h = - \langle df, dN \rangle = (dz, d\bar{z}) \Pi \begin{pmatrix} dz \\ d\bar{z} \end{pmatrix}$$

ile tanımlanır. Bu ifade

$$\Pi = \begin{pmatrix} \langle f_{zz}, N \rangle & \langle f_{z\bar{z}}, N \rangle \\ \langle f_{z\bar{z}}, N \rangle & \langle f_{\bar{z}\bar{z}}, N \rangle \end{pmatrix}$$

şeklinededir. Ayrıca f immersiyonunun şekil operatörü $S = \Pi/I$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.2.3: f immersiyonunun H ortalama eğriliği ve Q Hopf diferensiyeli

$$H = \frac{1}{2}izS = 2e^{-2\pi} \langle f_{zz}, N \rangle \text{ ve } Q = qdz^2 = \langle f_{zz}, N \rangle dz^2$$

şeklinde tanımlanır. Burada q kompleks koordinatın seçimine bağlı olmasına rağmen, Q ve H kompleks koordinatın seçiminden bağımsızdır.

Teorem 3.2.4: f immersiyonunun hareketli çatısı

$$\mathcal{F} = (N, f_z, f_{\bar{z}}, f)$$

olsun. Bu durumda, $\mathcal{F}_z = \mathcal{F}U$ ve $\mathcal{F}_{\bar{z}} = \mathcal{F}V$ vardır. Ayrıca

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -q & -e^{2u}H/2 & 0 \\ -H & 2u_z & 0 & 1 \\ -2e^{-2u}q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2u}/2 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } V = \begin{pmatrix} 0 & -e^{2u}H/2 & -\bar{q} & 0 \\ -2e^{-2u}\bar{q} & 0 & 0 & 0 \\ -H & 0 & 2u_{\bar{z}} & 1 \\ 0 & -2^{2u}/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dir. Bu aşağıdaki Gauss -Weingarten denkleminde özdeşleşir.

$$\begin{aligned} f_{zz} &= -qN + 2u_z f_z \\ f_{z\bar{z}} &= -\frac{1}{2}e^{2u}HN - \frac{1}{2}e^{2u}f \\ f_{\bar{z}\bar{z}} &= -\bar{q}N + 2u_{\bar{z}}f_{\bar{z}} \end{aligned}$$

ve

$$N_z = -Hf_z - 2e^{-2u}qf_{\bar{z}}$$

$$N_{\bar{z}} = -2e^{-2u}\bar{q}f_z - Hf_{\bar{z}}$$

olur.

Gözlem:

$$\Pi = \begin{pmatrix} q & e^{2u} H/2 \\ e^{2u} H/2 & \bar{q} \end{pmatrix} \text{ ve } S = \begin{pmatrix} H & 2e^{-2u}\bar{q} \\ 2e^{-2u}q & H \end{pmatrix}$$

eşitlikleri var olduğundan

$$h = qd_z^2 + \bar{q}d_{\bar{z}}^2 + e^{2u}Hd_zd_{\bar{z}} = Q + \bar{Q} + Hd_s^2$$

Gauss-Codazzi denklemi; (yani $(F_z)_{\bar{z}} = (F_{\bar{z}})_z$ integrallenebilirlik koşulu)

$$U_{\bar{z}} - V_z - [U, V] = 0$$

denkliğine özdeştir ve

$$2u_{z\bar{z}} + \frac{1}{2}e^{2u}(1 - H^2) + 2e^{-2u}q\bar{q} = 0 \quad (3.2.2)$$

formuna sahiptir.

$$H_z + 2e^{-2u}q_{\bar{z}} = 0 \quad (3.2.3)$$

(3.2.2) Gauss denklemi olarak adlandırılır ve (3.2.3) ise Codazzi denklemidir.

$$ds^2 = e^{2u}d_zd_{\bar{z}}$$

denkleminin Gauss eğriliği

$$K = e^{-2u} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = -4e^{-2u}u_{z\bar{z}} \quad (3.2.4)$$

ile tanımlanır. Dolayısıyla (3.2.2) Gauss denklemi

$$K = -H^2 + 4e^{-4u}q\bar{q} + 1 = -\det S + 1 \quad (3.2.5)$$

olarak yazılır.

3.2.2. f immersiyonu için 2×2 tipinden lax çifti

Bu kesimde S_1^3 uzayının Hermitian matris modeli kullanılacaktır. Yani $\mathbb{R}_1^4$ uzayındaki (x_0, x_1, x_2, x_3) noktası

$$\sum_{k=0}^3 x_k e_k = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix}$$

matrisi ile özdeşleştirilecektir.

Ayrıca metrik

$$\forall X, Y \in S_1^3 \text{ için } \langle X, Y \rangle = -\frac{1}{2}iz(Xe_2Y^te_2) \quad \langle X, X \rangle = -\det X$$

ile verilir. Bu durumda aşağıdaki önerme ortaya çıkar.

Önerme 3.2.5: $\forall X, Y \in S_1^3$ için $F \in SL(2, C)$ ise

$$\langle X, Y \rangle = \langle FXF^*, FYF^* \rangle$$

dir.

Önerme 3.2.6: $F \in SL(2, C)$ vardır. (F in işaretine göre tek olan)

Ayrıca $z = x + iy$ olmak üzere,

$$N = FF^* \quad \frac{f_*}{|f_*|} = Fe_1F^* \quad \frac{fy}{|fy|} = Fe_2F^* \quad f = Fe_3F^*$$

dir.

Sonuç: 3.2.5. önermesindeki gibi F seçilirse,

$$f_x = e^u Fe_1F^* \text{ ve } f_y = e^u Fe_2F^*$$

ve

$$f_z = e^u F \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} F^* \text{ ve } f_{\bar{z}} = e^u F \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} F^*$$

dir. U, V Lax çifti $F^{-1}dF = Ud_z + Vd_{\bar{z}}$ olarak tanımlanır.

Sonuç: U, V Lax çifti için

$$U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u_z & -e^u(1+H) \\ -2e^{-u}q & -u_z \end{pmatrix} \text{ ve } V = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -u_z & -2e^{-u}\bar{q} \\ e^u(1-H) & u_{\bar{z}} \end{pmatrix}$$

dir.

3.2.3 Total umbilik immersiyonlar

Eğer $q(p) = 0$ ise bir $p \in D$ noktası $f : D \rightarrow S_1^3$ spacelike immersiyonunun bir umbilik noktasıdır. f immersiyonu eğer $q \equiv 0$ ise total umbilik olarak adlandırılır.

Teorem 3.2.7: $f : D \rightarrow S_1^3$ bir total umbilik immersiyon olsun, bu durumda

i) U, V Lax çifti için

$$U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u_z & -e^u(1+H) \\ 0 & -u_z \end{pmatrix} \text{ ve } V = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -u_{\bar{z}} & 0 \\ e^u(1-H) & u_z \end{pmatrix}$$

dir.

ii) $F_{jk} : D \rightarrow C(j, k = 1, 2)$ fonksiyonları

$$F = e^{u/2} \begin{pmatrix} \bar{F}_{11} & F_{12} \\ \bar{F}_{21} & F_{22} \end{pmatrix}$$

eşitliğini sağlar. Dolayısıyla

$$\bar{F}_{11}F_{22} - F_{12}\bar{F}_{21} = e^{-u}$$

dir. Çünkü $F \in SL(2, C)$.

Lemma 3.2.8: Bütün F_{jk} fonksiyonları holomorfik fonksiyonlardır.

İspat: $U = F^{-1}F_z$ olduğundan

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} u_z & -e^u(1+H) \\ 0 & -u_z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u_z + 2e^u(F_{22}(\bar{F}_{11})_z - F_{12}(\bar{F}_{21})_z) & 2e^4(F_{22}(F_{12})_z - F_{12}(F_{22})_z) \\ 2e^u(\bar{F}_{11}(\bar{F}_{21})_z - \bar{F}_{21}(\bar{F}_{11})_z) & u_z + 2e^u(\bar{F}_{11}(F_{22}) - \bar{F}_{21}(F_{12})) \end{pmatrix}$$

dir. Buradan

$$\begin{pmatrix} F_{22} & -F_{12} \\ -\bar{F}_{21} & \bar{F}_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\bar{F}_{11})_z \\ (\bar{F}_{21})_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ve

$$(\bar{F}_{11})_z = (\bar{F}_{21})_z = 0$$

dir. Yani F_{11} ve F_{21} holomorfiktir.

Benzer şekilde

$$V = F^{-1}F_{\bar{z}}, (F_{12})_{\bar{z}} = (F_{22})_{\bar{z}} = 0$$

olduğu gösterilebilir. Yani F_{12} ve F_{22} holomorfiktir.

3.2.4 CMC 1 immersiyonları

S_1^3 uzayındaki sabit ortalama eğrilikli 1 spacelike immersiyonlar özel gösterim formülüne sahiptir, bu gösterim Aiyama-Akutagawa gösterimi olarak adlandırılır. Bu alt bölümde de bu formül ispat edilecektir.

Lemma 3.2.9: $f : D \rightarrow S_1^3$ spacelike bir immersiyon olsun. Eğer f immersiyonu $H = 1$ sabit ortalama eğriliğine sahipse, bu durumda $(FB)_{\bar{z}} = 0$ olacak şekilde bir $B : D \rightarrow SU(1, 1)$ mevcuttur.

Uyarı: 3.2.6 önermesindeki ilk üç eşitlik sağlamasa bile

$$f = Fe_F^* = (FB)e_3(FB)^*$$

olarak bilinen f immersiyonu, B ile işlem yapıldığında değişmeyecektir.

İspat: $H = 1$ olduğunu varsayalım.

$$B_{\bar{z}} = -VB \quad (3.2.6)$$

olacak şekilde B bulunmalıdır.

$$B_z = WB \quad (3.2.7)$$

olsun.

Buradan (3.2.6) ve (3.2.7) Lax ikilisi

$$B_x = (W - V) B \text{ ve } B_y = i(W + V) B \quad (3.2.8)$$

ifadesine özdeştir. Basit bir hesaplama ile

$$W - V, i(W + V) \in \mathbf{SU}(1, 1) \text{ den } W = e_3 V^* e_3$$

bulunur. O halde

$$V_z + (e_3 V^* e_3)_{\bar{z}} + [V, e_3 V^* e_3] = \frac{1}{2} e^{2u} (1 - H) e_3$$

dir. Dolayısıyla eğer $H = 1$ ise (3.2.8) Lax ikilisi için uyumluluk durumu

$$V_z + (e_3 V^* e_3)_{\bar{z}} + [V, e_3 V^* e_3] = 0$$

(ya da özdeş olarak , (3.2.6)-(3.2.7) Lax ikilisi için de) ile sağlanır. Dolayısıyla (Fujimori, et al., 2005) $sl(n, C)$ ve $SL(n, C)$ li bir benzeri, $su(1, 1)$ ve $SU(1, 1)$ ile yer değiştirince, (3.2.6) - (3.2.7) Lax ikilisinden $B \in SU(1, 1)$ çözümlerinin vardır. O halde (3.2.6) $B \in SU(1, 1)$ dir.

f , $H = 1$ sabit ortalama eğriliğine sahip olduğundan B çözümü

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \text{ ve } a\bar{a} - b\bar{b} = 1$$

şeklinde dir. FB mevcut olduğundan

$$(FB)^{-1}(FB)_z = B^{-1}(U + e_3 V^* e_3)B = e^u \begin{pmatrix} -\bar{a}\bar{b} & -\bar{a}^2 \\ \bar{b}^2 & \bar{a}\bar{b} \end{pmatrix}$$

dir. $w, g, \bar{F}$

$$\begin{aligned} w &= w dz = e^u \bar{b}^2 dz, \\ g &= \frac{\bar{a}}{\bar{b}} \\ \bar{F} &= FB \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın.

($|a|^2 - |b|^2 = 1$ olduğundan dolayı $|g|^2 > 1$ dir). Bu durumda $\bar{F}$, z de holomorftir ve Aiyama Akutagawa gösterimindeki gibi

$$\tilde{F}^{-1} d\tilde{F} = \begin{pmatrix} g & -g^2 \\ 1 & -g \end{pmatrix} w \quad (3.2.9)$$

elde edilir.

(3.2.9) dan, w holomorftik 1-formdur ve g meromorftik bir fonksiyondur.

g fonksiyonunun kutuplarının kümesi, w nın sıfırlarının kümesidir ve g fonksiyonunun k . mertebeden her bir kutbu, g ve w nın tanımını itibariyle $2k$. mertebeden w nın bir sıfırır. D üzerindeki bir Riemann metriği

$$d\tilde{s}^2 = (1 + |g|^2)^2 w \bar{w} \quad (3.2.10)$$

eşitliği ile verilir.

Ayrıca

$$(1 - |g|^2)^2 w \bar{w} = e^{2u} d_z d_{\bar{z}}$$

ve Aiyona - Akutagoma gösteriminde kullanılan g ve w dan dolayı yukarıdaki metrik elde edilir. $V = -B_{\bar{z}} B^{-1}$ olduğundan dolayı V ile $-B_{\bar{z}} B^{-1}$ üst sağ girdiler karşılaştırılırsa,

$$q = e^u (\bar{b}_z \bar{a} - \bar{a}_z \bar{b}) = g_z w$$

bulunur.

Tersine (3.2.9) u çözen herhangi bir $\bar{F}$ ile başlarsak, spacelike bir CMC 1 immersiyon olan Fe_3F^* ın elde edildiği kontrol edilebilir.

Teorem (Aiyama - Akutagawa Gösterimi):

$D, z_0 \in D$ baz noktalı C uzayında basit bağlantılı bir tanım kümesi olsun.

$$g : D \rightarrow (C \cup \{\infty\}) \setminus \{z \in C \mid |z| \leq 1\}$$

bir holomorfik fonksiyon ve w, D üzerinde holomorfik 1-form olsun, öyle ki w nın, $2k$. mertebeden bir sifıra sahip olması için gerek ve yeter şart g nin, k . mertebeden bir kutba sahip olması ve öyle ki w nın başka hiç bir sıfırı olmamasıdır.

$\tilde{F}(z_0)$ $\tilde{F}$ ile, (3.2.9) eşitliğini sağlayan

$$F = (F_{jk}) : D \rightarrow SL(2, C)$$

holomorfik immersiyonunu seçeriz. Bundan dolayı $f : D \rightarrow S_1^3$ ile tanımlanan $f = \tilde{F}e_3\tilde{F}^*$ konformal spacelike CMC 1 immersiyonudur. D üzerindeki indirgenmiş $ds^2 = f^*(ds^2 S_1^3)$ metriği ve f immersiyonunun h , II. temel formu ve Q , $Hopf$ diferensiyeli aşağıdaki gibi verilir.

$$ds^2 = (1 - |g|^2)^2 w\bar{w} \quad h = Q + \bar{Q} + ds^2 \quad Q = wdg \quad (3.2.11)$$

Tersine, herhangi bir basit bağlantılı spacelike CMC 1 immersiyonu, bu şekilde gösterilebilir.

Uyarı: Yukarıdaki Aiyoma Akutagawa temsilini ispatlamada $H = 1$ seçiminin önemli bir yeri vardır.

3.2.6 teoremiyle ilgili aşağıdaki uyarıları yapalım.

Uyarı:

(1) (3.2.4) ile (3.2.5) denklemleri S_1^3 uzayındaki spacelike bir CMC 1 immersiyonunun Gauss eğriliğinin daima negatiften farklı olduğunu ifade ederler. Bu $\mathbb{R}_1^3$ Lorentz 3-uzayındaki maksimal immersiyonlardaki durumun benzeridir, ve $\mathbb{R}^3$ Ök-lit 3-uzayındaki minimal immersiyonlarda ve H^3 hiperbolik 3-uzayındaki CMC 1 immersiyonlarındaki durumlardan da farklıdır.

(2) Umehara ve Yamada'nın terminolojisini kullanırsak g , ikincil Gauss dönüşümü olarak adlandırılır. Ayrıca (g, w) ikilisine Weierstrass verisi adı verilir.

(3) f immersiyonunun future pointing birim normal vektör alanı

$$N = \frac{1}{|g|^2 - 1} \tilde{F} \begin{pmatrix} |g|^2 + 1 & 2g \\ 2\bar{g} & |g|^2 + 1 \end{pmatrix} \tilde{F}^*$$

olarak verilir.

(4) (3.2.11) eşitliklerini sağlayan $\tilde{F}$ holomorfik immersiyonu için

$$\tilde{f} = F F^* : D \rightarrow H^3$$

1. temel form

$$\tilde{f}^*(d^2_{H^3}) \text{ ve } \hat{h} = -\hat{Q} - \overline{\hat{Q}} + d\hat{s}^2$$

olan 2. temel formu konformal bir CMC 1 immersiyonudur.

2. temel formdaki

$$\hat{Q} = w dg,$$

f dönüşümünün *hopf* diferensiyelidir.

(Umehara and Yamada, 1993) daki (2.6) denklemiyle G , g ve Q arasında şu bağıntı mevcuttur.

$$2Q = S(g) - S(G) \quad (3.2.12)$$

Bu ifadedeki

$$S(g) = S_z(g)dz^2 \text{ ve } S_z(g) = \left(\frac{g''}{g'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{g''}{g'}\right)^2, \quad (' = d/d_z)$$

g dönüşümünün Schwarzian türevidir.

3.3 Hiperbolik Gauss Dönüşümü

$f : D \rightarrow S_1^3$ dönüşümü spacelike bir immersiyon ve N future pointing birim normal vektör alanı olsun.

Tanım 3.3.1:

$$G : D \rightarrow C \cup \{\infty\}$$

hiperbolik Gauss dönüşümü

$$f + N = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & c \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$G = \frac{b}{c} \quad (3.3.1)$$

ile verilir.

Hiperbolik Gauss dönüşümünün geometrik olarak anlamı şudur, $N = FF^*$ future pointing birim normal vektörü, S_1^3 uzayındaki $f = F_{e_3}F^*$ yüzeyine hem diktir hemde $F \in S_1^3$ ün her bir noktasında $\mathbb{R}_1^4$ uzayındaki S_1^3 uzayına da teğettir. P nin $(0,0,0,0)$, f ve $f + N$ noktalarını içeren $\mathbb{R}_1^3$ uzayındaki yegane 2 boyutlu düzlem olduğunu kabul edelim. Dolayısıyla, S_1^3 de-Sitter uzayındaki γ geodeziğini

içeren P , f immersiyonunda başlar ve N doğrultusunda genişler. (Bunun nedeni şudur: S_1^3 uzayındaki bütün izometrilere, $\forall A \in SL(2, \mathbb{C})$ için AfA^* formundadır ve $P \cap S_1^3$ ü, bir düzlemde yatan

$$\{(\cos ht, \sin ht, 0, 0) \in \mathbb{R}_1^4 | t \in \mathbb{R}\}$$

geodeziğine hareket ettiren $\mathbb{R}_1^4$ uzayının bir dönmesi vardır) Bu γ geodeziği, $\mathbb{R}_1^4$ uzayının light koninin

$$\mathbb{N}^+ = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_1^4 | -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, x_0 \geq 0\}$$

Üst yarı konisi $\mathbb{N}^+$ daki sınırlayıcı bir doğrultudur. $f + N$ doğrultusundaki bu sınırlayıcı doğrultu, f immersiyonunun hiperbolik Gauss dönüşümüdür.

S^2 li sınırlayıcı doğrultuların kümesini,

$$[(x_0, x_1, x_2, x_3)] = \{\alpha(x_0, x_1, x_2, x_3) | \alpha \in \mathbb{R}^+\} \quad (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{N}^+$$

doğrultusunu, S^2 uzayındaki

$$(x_1/x_0, x_2/x_0, x_3/x_0) \in S^2$$

noktasıyla buluşturarak tanımlayabiliriz. Yani

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & c \end{pmatrix} \in \mathbb{N}^+ \quad \left(\frac{b + \bar{b}}{a + c}, \frac{\bar{b} - b}{a + c}, \frac{a - c}{a + c} \right) \in S^2$$

şeklinde ifade edilebilir. Stereografik projeksiyon ile birleştirirsek

$$S^2 \ni (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \rightarrow \begin{cases} (\xi_1 + i\xi_2)/(1 - \xi_3), & \xi_3 \neq 1 \\ \infty, & \xi_3 = 1 \end{cases}$$

ifadesi elde edilir. O halde

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & c \end{pmatrix} \in \mathbb{N}^+ \quad \frac{b}{c} \in \mathcal{C} \cup \{\infty\}$$

şeklinde tanımlanır.

Lemma 3.3.2: (Bryant, 1987; Umehara and Yamada, 1993) Eğer $f : D \rightarrow S_1^3$ CMC 1 immersiyon ise bu durumda G holomorftir.

İspat: 3.2.5 Lemmada görüldüğü gibi $(FB)_{\bar{z}} = 0$ olacak şekilde bir $B \in SU(1,1)$ mevcuttur. $\tilde{F} = FB$ tanımladıktan sonra

$$\begin{aligned} f + N &= 2F \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} F^* \\ &= 2(\tilde{F}B^{-1}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (\tilde{F}B^{-1}) \\ &= 2 \begin{pmatrix} (\tilde{F}_{11}\bar{a} - \tilde{F}_{12}\bar{b})(\overline{\tilde{F}_{11}a - \tilde{F}_{12}b}) & (\tilde{F}_{11}\bar{a} - \tilde{F}_{12}\bar{b})(\overline{\tilde{F}_{21}a - \tilde{F}_{22}b}) \\ (\tilde{F}_{21}\bar{a} - \tilde{F}_{22}\bar{b})(\overline{\tilde{F}_{11}a - \tilde{F}_{12}b}) & (\tilde{F}_{21}\bar{a} - \tilde{F}_{22}\bar{b})(\overline{\tilde{F}_{21}a - \tilde{F}_{22}b}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur, burada

$$\tilde{F} = \begin{pmatrix} \tilde{F}_{11} & \tilde{F}_{12} \\ \tilde{F}_{21} & \tilde{F}_{22} \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad B = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \quad a\bar{a} - b\bar{b} = 1$$

olduğundan

$$G = \frac{\tilde{F}_{11}\bar{a} - \tilde{F}_{12}\bar{b}}{\tilde{F}_{21}\bar{a} - \tilde{F}_{22}\bar{b}} = \frac{\tilde{F}_{11}g + \tilde{F}_{12}}{\tilde{F}_{21}g + \tilde{F}_{22}}$$

şeklindedir. $\tilde{F}_{jk}$ ve g holomorftik olduklarından G holomorftir.

Uyarı 3.3.3: 3.2.9 denkleminde

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} d\tilde{F}_{11} & d\tilde{F}_{12} \\ d\tilde{F}_{21} & d\tilde{F}_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \tilde{F}_{11} & \tilde{F}_{12} \\ \tilde{F}_{21} & \tilde{F}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & -g^2 \\ 1 & -g \end{pmatrix} w \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{F}_{11}g + \tilde{F}_{12} & -g(\tilde{F}_{11}g + \tilde{F}_{12}) \\ \tilde{F}_{21}g + \tilde{F}_{22} & -g(\tilde{F}_{21}g + \tilde{F}_{22}) \end{pmatrix} w \end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Böylece hiperbolik Gauss dönüşümü,

$$\begin{aligned} G &= \frac{\tilde{F}_{11}g + \tilde{F}_{12}}{\tilde{F}_{21}g + \tilde{F}_{22}} \\ &= \frac{d\tilde{F}_{11}}{d\tilde{F}_{21}} \\ &= \frac{d\tilde{F}_{12}}{d\tilde{F}_{22}} \end{aligned}$$

olarak yazılabilir.

Lemma 3.3.4.: Eğer $f : D \rightarrow S_1^3$ uzayına total umbilik ise, bu durumda G antiholomorfiktir.

İspat: 3.2.4 Lemmada gösterdiği gibi, f ve F in çatısını

$$F = e^{\frac{u}{2}} \begin{pmatrix} \tilde{F}_{11} & F_{12} \\ \tilde{F}_{21} & F_{22} \end{pmatrix}$$

olarak ifade edersek, buradaki

$$F_{jk} (j, k = 1, 2)$$

fonksiyonları holomorfiktir.

$$f + N = 2F \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} F^* = 2e^u \begin{pmatrix} F_{11}\tilde{F}_{11} & \tilde{F}_{11}F_{21} \\ F_{11}\tilde{F}_{21} & F_{21}\tilde{F}_{21} \end{pmatrix}$$

eşitliğinden dolayı

$$G = \frac{\tilde{F}_{11}}{\tilde{F}_{21}} = \overline{\left(\frac{F_{11}}{F_{21}} \right)}$$

denklemini elde ederiz.

Hem F_{11} hem de F_{21} holomorfik olduklarından G antiholomorfiktir.

Ayrıca bu iki lemmanın tersi de doğrudur. Aslında, aşağıdaki önermeyi elde ederiz.

Önerme 3.3.5: G hiperbolik Gauss dönüşümünün holomorfik (antiholomorfik) olması için gerek ve yeter şart f immersiyonunun bir CMC 1 immersiyonu (total umbilik) olmasıdır.

İspat: (3.3.1) aracılığı ile

$$F + N = C \begin{pmatrix} G\bar{G} & G \\ \bar{G} & 1 \end{pmatrix}$$

yazabiliriz. Buradaki $c : D \rightarrow \mathbb{R}$ uzayına giden reel değerli bir fonksiyondur.

Eğer G holomorfikse, bu durumda

$$(f + N)_z = \begin{pmatrix} (Gc)_z \bar{G} & (Gc)_z \\ c_z \bar{G} & c_z \end{pmatrix}$$

eşitliği vardır. Dolayısıyla

$$\langle (f + N)_z, (f + N)_z \rangle = -\det [(f + N)_z] = 0$$

şeklinde yazılır. Diğer taraftan, Weingarten denklemiyle

$$(f + N)_z = f_z + N_z = (1 - H)f_z - 2e^{-2u}qf_{\bar{z}}$$

ifadesi bulunur.

Dolayısıyla ;

$$\begin{aligned} \langle (f+N)_z, (f+N)_z \rangle &= (1-H)^2 \langle f_z, f_z \rangle + 4e^{-4u}q^2 \langle f_{\bar{z}}, f_{\bar{z}} \rangle \\ &\quad + 4e^{-2u}q(H-1) \langle f_z, f_{\bar{z}} \rangle \\ &= 2(H-1)q \end{aligned}$$

elde edilir.

Buradan eğer G holomorfikse, buna bağlı olarak

$$q(H - 1) = 0 \tag{3.3.2}$$

elde edilir.

Benzer şekilde, eğer G antiholomorfikse, tekrar (3.3.2) ifadesini elde ederiz. Buradan (3.3.2) ve (3.3.4) lemmalarını birleştirerek istenilen sonuç elde edilir.

4. BÖLÜM

3 BOYUTLU DE-SİTTER UZAYINDA SABİT ASAL EĞRİLİKLİ TAM SPACELİKE YÜZEYLER

4.1 Asıl Sonucun İfade ve Tanıtımı

L^4 4-boyutlu Lorentz-Minkowski uzayı olsun. Reel vektör uzayı $\mathbb{R}^4$ uzayının standart koordinatları (x_1, x_2, x_3, x_4) olmak üzere Lorentzian metrik tensör

$$\langle, \rangle = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_4^2$$

şeklinde verilir. 3-boyutlu de-Sitter uzayı, L^4 uzayının hiperkuadratığı olarak verilmiştir. Yani,

$$S_1^3 = \{x \in L^4 \mid \langle x, x \rangle = 1\}$$

şeklinde dir. Bilindiği gibi S_1^3 de-Sitter uzayı, L^4 uzayından kalan zaman-uyumlu Lorentzian metriği onu sabit kısmi eğrilikli Lorentzian uzayının standart modeli yapar. 2-boyutlu M bağlantılı manifoldunun $\psi : M^2 \rightarrow S_1^3 \subset L^4$ düzgün immersiyonunun spacelike yüzey olabilmesi için M üzerinde Riemann metriği olması gerekir. Ayrıca $\langle, \rangle$ ile gösterilir. S_1^3 uzayının zaman benzeri bize M üzerinde küresel olarak tanımlanan N timelike birim normal cismini seçmemizi, S_1^3 uzayının tanjantı M manifoldunun N ile bağlantılı olduğunu kabul etmemizi sağlar. Son olarak M manifoldunun N ile bağlantılı asal eğriliklerini λ_1 ve λ_2 ile göstereceğiz.

Teorem 4.1: $R^2 < 1$ olmak üzere R sabit asal eğrilikli $\psi : M \rightarrow S_1^3$ dönüşümünü tam spacelike yüzey alalım. Böylece $\psi(M)$ ya tamamen umbiliktir ya da serbest umbiliktir. İkinci durumda $R > 0$ ve yüzey kompakt değildir. α , C^∞ sınıfından S_1^3 uzayında tam regüler bir eğri ve $\{v_1(y), v_2(y)\}$ de α boyunca normal düzlemin ortonormal çatısı olduğunda

$$\psi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 - R^2}}(R\alpha(y) + \cos(x)v_1(y) + \sin(x)v_2(y)) \quad (4.1.1)$$

şeklinde tanımlanır.

Diğer taraftan S_1^3 regüler bir eğri verilirse, (4.1.1) denkleminde $0 < R^2 < 1$ iken S_1^3 uzayında sabit asal eğrilik R ile serbest umbilikli spacelike immersiyonu tanımlanır.

İspat:

$$\psi : M^2 \rightarrow S_1^3 \subset L^4$$

dönüşümünü S_1^3 uzayında sabit asal eğrilikli

$$0 \leq \lambda_1 = R < 1$$

tam spacelike bir yüzey alalım.

M yüzeyinde umbilik olmayan bir p elemanı varsa asal eğriliği $\lambda_2 \neq R$ olmak üzere

$$\langle d\psi, d\psi \rangle = Edu^2 + Gdv^2$$

ve

$$\langle d\psi, -dN \rangle = REdu^2 + \lambda_2 Gdv^2$$

şartlarını sağlayan umbilik nokta olmaksızın U daki p komşuluğunda (u, v) lokal parametrelerini düşünebiliriz.

Yapı denklemleri

$$\psi_{uu} = \frac{Eu}{2E}\psi_u - \frac{Ev}{2G}\psi_u - REN - E\psi$$

$$\psi_{uv} = \frac{Eu}{2E}\psi_u + \frac{Gu}{2G}\psi_v$$

$$\psi_{vv} = -\frac{Gu}{2E}\psi_u + \frac{Gv}{2G}\psi_v - \lambda_2 GN - G\psi$$

$$N_u = -R\psi_u$$

$$N_v = -\lambda_2\psi_v$$

şeklinde gösterilir.

ψ immersiyonu için Codazzi-Mainardi denklemleri de

$$\begin{aligned} (R - \lambda_2)E_v &= 0 \\ (R - \lambda_2)\frac{Gu}{2G} + (R - \lambda_2)_u &= 0 \end{aligned}$$

şeklindedir.

$\lambda_2 \neq R$ olduğundan E katsayısı v ye bağlı olmadığından $E = E(u)$ şeklinde yazılır.

Yeni parametreleri

$$x = \int \sqrt{E(u)} du, \quad y = v$$

şeklinde düşünersek yapı denklemleri;

$$\begin{aligned} \psi_{xx} &= -RN - \psi \\ \psi_{xy} &= \frac{Gx}{2G}\psi_y \\ \psi_{yy} &= -\frac{Gx}{2}\psi_x + \frac{Gy}{2G}\psi_y - \lambda_2 GN - G\psi \\ N_x &= -R\psi_x \\ N_y &= -\lambda_2\psi_y \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

Codazzi-Mainardi denklemi de

$$(R - \lambda_2)\frac{Gx}{2G} + (R - \lambda_2)_x = 0 \tag{4.1.3}$$

şeklindedir.

Diğer yandan Gauss denklemi

$$\left(\frac{Gx}{2G}\right)_x + \left(\frac{Gx}{2G}\right)^2 = R\lambda_2 - 1 = R(\lambda_2 - R) + R^2 - 1 \tag{4.1.4}$$

şeklinde verilir.

$$\varphi = \frac{1}{R - \lambda_2}$$

şeklinde alırsak (4.1.3) ve (4.1.4) den

$$\begin{aligned}\varphi_x &= \frac{Gx}{2G}\varphi \\ \varphi_{xx} &= \left(\left(\frac{Gx}{2G}\right)_x + \left(\frac{Gx}{2G}\right)^2\right) \\ \varphi &= -R - (1 - R^2)\varphi\end{aligned}\tag{4.1.5}$$

denklemini elde ederiz.

R asal eğriliği için

$$q = \psi(x_0, y_0) \in U$$

a noktasından geçen maksimal eğrilik çizgisini γ_q alalım.

$$w_0 \in L^4$$

sabit vektörü için

$$(\gamma_q)_{tt} + (1 - R^2)\gamma_q = R_{w_0}$$

diferensiyel denklemin çözümü γ_q nun geodezik eğri olmasıdır.

Herhangi iki vektör $w_1, w_2 \in L^4$ ve $0 \leq R < 1$ için

$$\gamma_q = \cos(\sqrt{(1 - R^2)}t)w_1 + \sin(\sqrt{(1 - R^2)}t)w_2 + \frac{R}{1 - R^2}w_0\tag{4.1.6}$$

şeklinde verilir.

a, b sabitleri için (4.1.5) denkleminde asal eğrilik λ_2, γ_q üzerinde

$$R - \lambda_2 = (a\cos(\sqrt{(1 - R^2)}t) + b\sin(\sqrt{(1 - R^2)}t) - \frac{R}{1 - R^2})^{-1}\tag{4.1.7}$$

olarak hesaplanabilir.

$\gamma_q(t_1)$ ifadesini, γ_q üzerinde 1. umbilik nokta ise (4.1.7) denkleminde elde ederiz ve λ_2 nin sürekliliği

$$0 = R - \lambda_2(\gamma_q(t_1)) = \lim_{t \rightarrow t_1} R - \lambda_2(\gamma_q(t)) \neq 0$$

ile çelişir.

Bu yüzden γ_q üzerinde hiç umbilik nokta yoktur.

Görölür ki M tam olduğu için $\forall t \in R$ için γ_q geodeziği tanımlıdır. Dahası $R \neq 0$ olması durumunda da bazı $t \in R$ için

$$a \cos(\sqrt{1-R^2}t) + b \sin(\sqrt{1-R^2}t) = 0$$

olması da λ_2 nin sürekliliği ile çelişiyor.

$\tilde{U}$ kümesini, p noktasını içeren umbilik olmayan noktaların bağlantılı bileşeni olarak alalım.

Belirli β_1, β_2 için

$$-\infty \leq \beta_1 < \beta_2 \leq \infty$$

olduğunda

$$(x, y) \in (-\infty, \infty) \times (\beta_1, \beta_2)$$

tarafından parametrelendirilebilen (bir önceki sebepten) $\tilde{U}$ açık kümesinden dolayı immersiyon (4.1.6) denkleminde

$$\psi(x, y) = \cos(\sqrt{1-R^2}x)w_1(y) + \sin(\sqrt{1-R^2}x)w_2(y) + \frac{R}{1-R^2}w_0(y) \quad (4.1.8)$$

olarak ifade edilebilir.

Yukarıda ki tartışmalar $\gamma_{\tilde{q}}$ üzerinde umbilik olmayan noktaların var olduğunu ispatlamamız için yeterlidir. Aslında (4.1.7) eşitliğinden $p_n \in \gamma_n$ noktasını seçebiliriz ki böylece

$$\lambda_2(p_n) = \frac{1}{R} \neq R$$

elde edilir. Son olarak kompaktlık ile ilgili tartışmalardan $\tilde{p} \in \gamma_{\tilde{q}}$ umbilik olmayan noktasına $\{p_n\}$ in $\{p_k\}$ altserisinin olduğu söylenebilir.

Tersine M ya serbest umbilik ya da total umbiliktir.

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-R^2}}w_0, \quad v_1 = \sqrt{1-R^2}w_1, \quad v_2 = \sqrt{1-R^2}w_2$$

olduğunda (4.1.8) ifadesi

$$\psi_{(x,y)} = \frac{1}{\sqrt{1-R^2}} \left(R\alpha(y) + \cos(\sqrt{1-R^2}x) v_{1(y)} + \sin(\sqrt{1-R^2}x) v_{2(y)} \right)$$

olarak yeniden yazılabilir. (4.1.2) ifadesinin ilk denklemi kullanarak ψ ve ψ_{xx} ifadelerinden Gauss dönüşümü olan N hesaplanabilir. Böylece

$$\langle \varphi, \varphi \rangle = 1, \langle \varphi_x, \varphi_x \rangle = 1, \langle N, N \rangle = -1$$

ve bunlar φ , φ_x , N ortogonal olduğu için α , v_1 , v_2 ortogonal ve $\langle \alpha, \alpha \rangle = -1$, $\langle v_1, v_1 \rangle = 1$ ve $\langle v_2, v_2 \rangle = 1$ olduğunu gösterir.

Diğer taraftan ψ_y , ψ_x ve N normaline dik olduğu için $\langle \psi_{xy}, N \rangle = 0$ ifadesini kullanabiliriz.

μ_0 , μ_1 ve μ_2 C^∞ sınıfından fonksiyonlar ve α , v_1 ve v_2 L^4 uzayında ise

$$\alpha' = \mu_0 P \quad v_1' = \mu_1 P \quad v_2' = \mu_2 P$$

şeklinde yazılabilir. Dahası

$$\langle \psi_y, \psi_y \rangle = \frac{1}{1 - R^2} (R\mu_0 + \cos(\sqrt{1 - R^2}x)\mu_1 + \sin(\sqrt{1 - R^2}x)\mu_2)^2$$

pozitif olduğundan bu bize gösterir ki $\mu_0 \neq 0$ dır. Ve bu yüzden tanjant vektör P ile α regüler eğridir. α boyunca normal düzlemin ortonormal çatı alanı $\{v_1(y), v_2(y)\}$ dir. Son olarak M nin kompaktlığından α nın kompaktlığı gösterilir.

Tersi basit bir hesaplamayla gösterilir. İmmersiye kompakt olduğundan ve

$$R - \lambda_2 = (a \cos(\sqrt{1 - R^2}t) + b \sin(\sqrt{1 - R^2}t) - \frac{R}{1 - R^2})^{-1}$$

ifadesinden dolayı $R \neq 0$ dır. $t \in \mathbb{R}$ için

$$a \cos(\sqrt{1 - R^2}t) + b \sin(\sqrt{1 - R^2}t) = 0$$

olduğunda γ_q üzerinde bir nokta var olması λ_2 nin sürekliliği ile çelişir. Bu yüzden yüzey, küre etrafında tamamen umbilik olmalıdır.

4.4. Örnekler

Basit bağlantılı 2-boyutlu monifold M üzerinde, II simetrik $(2, 0)$ tensör, I Riemann metriği verilsin. Eğer I ve II, S_1^3 de-Sitter uzayının Gauss ve Codozzi-Mainnardi denklemlerini sağlar ise, o zaman I ve II, sırasıyla birinci ve ikinci temel form olmak üzere $\Psi : M \rightarrow S_1^3$ uzayına giden sadece bir immersiyon vardır (Greene, 1970). İfadesinden yararlanarak aşağıdaki örnekleri ifade edeceğiz.

İlk olarak sabit asal eğriliği $R = 1$, umbilik ve umbilik olmayan noktalar ile S_1^3 uzayında tam bağlantılı yüzeylerin ailesini elde ederiz.

Örnek 4.4.1: 1. temel form

$$I_h = dx^2 + \frac{1}{4} (2 + (x^2 - 2) h(y))^2 dy^2$$

ve 2. temel form

$$II_h = dx^2 + \frac{1}{4} (2 + x^2 h(y)) (2 + (x^2 - 2) h(y)) dy^2$$

şeklinde verilen Ψ_h tek immersiyonunu ve $\mathbb{R}^2 = M$ olduğunu düşünelim. (sabit bir c için

$$0 \leq h(y) \leq c < 1$$

olduğu durumda tanımlanmayan

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

C^∞ fonksiyonu olduğu durumda)

$$I = dx^2 + \frac{1}{4} (x^2 h(y) + 2(1 - h(y)))^2 dy^2 \geq dx^2 + (1 - c)^2 dy^2$$

ve $dx^2 + (1 - c)^2 dy^2$ bir tam metriktir. Dolayısıyla

$$1 \text{ ve } \frac{2 + x^2 h(y)}{2 + (x^2 - 2) h(y)}$$

asal eğrilikleri ile Ψ_h immersiyonu tamdır.

Böylece umbilik noktaların kümesi

$$\Omega = \{(x, y) \mid h(y) = 0\}$$

Ω kümesinin boş olmayabileceği gözüküyor.

Şimdi de, sabit asal eğriliği $R > 1$ ve umbilik ve umbilik olmayan noktalar ile S_1^3 uzayındaki tam bağlantılı yüzeylerin ailesini inşa edeceğiz.

Örnek 4.4.2: $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan C^∞ fonksiyonu bazı noktalarda tanımsız ve $R > 1$ olduğu durumda sırasıyla 1. ve 2. temel formlar

$$I_{R,h} = \frac{1}{R^2} dx^2 + \frac{\left(R^3 h(y) + (R^2 - 1) e^{\sqrt{1 - \frac{1}{R^2}} x}\right)^2}{R^2 (R^2 - 1)^2} dy^2$$

$$II_{R,h} = \frac{1}{R} dx^2 + \left(\frac{1}{R} e^{\sqrt{1 - \frac{1}{R^2}} 2x} + \frac{h(y)}{(R^2 - 1)^2} \left(R^3 h(y) + (R^2 - 1) e^{\sqrt{1 - \frac{1}{R^2}} x}\right)\right) dy^2$$

ile $\Psi_{R,h}$ tek immersiyonunu ve tekrar $M = \mathbb{R}^2$ olduğunu düşünelim.

$$I_{R,h} \geq \frac{1}{R^2} \left(dx^2 + e^{\sqrt{1 - \frac{1}{R^2}} 2x} dy^2\right)$$

olduğu için,

$$R \text{ ve } R \frac{Rh(y) + (R^2 - 1) e^{\sqrt{1 - \frac{1}{R^2}} x}}{R^3 h(y) + (R^2 - 1) e^{\sqrt{1 - \frac{1}{R^2}} x}}$$

asal eğrilikleri ile Ψ_h immersiyonu tamdır.

Tekrardan umbilik noktaların kümesi

$$\Omega = \{(x, y) \mid h(y) = 0\}$$

şeklindedir.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışma sırasında, Öklid ve Lorentz uzayındaki temel kavramlar ve teoremler verildi. De-Sitter 3-uzayındaki spacelike yüzeyler için Hermitian matris modeli, görünmez top modeli, slab modeli ve immersiyonun lax çifti gibi bazı kavramların tanımları ve metrikleri incelendi. Ayrıca bir immersiyonun causal karakteristiğinden bahsederek spacelike immersiyonlar ve sabit ortalama eğrilikli immersiyonlar üzerinde duruldu. İmmersiyonun ortalama eğriliği verilerek, integrallenebilirlik koşulu için Gauss-Codazzi ve Gauss denklemi hesaplandı. Hiperbolik Gauss dönüşümünün tanımı ve geometrik yorumu verilerek örnekler incelendi. Sonra 3-boyutlu de-Sitter uzayında sabit asal eğrilikli tam spacelike yüzeyler ile ilgili bir teorem verildi. Son olarak da S_1^3 uzayında tam bağlantılı yüzeylerin ailesi elde edildi. De-Sitter uzayındaki spacelike yüzeyler için incelenen modeller ve özellikler, bu uzayda null ya da timelike yüzeyler için de incelenebilir.

KAYNAKLAR

- Aiyama, R. and Akutagawa, K., 1998, Kenmotsu-Bryant type representation formulas for constant mean curvature surfaces in $H^3(-c^2)$ and $S_1^3(c^2)$, Ann Global Anal. Geom. (1) 17p; 49-75.
- Aledo, J.A. and Galvez, J.A., 2001, Complete spacelike surfaces with a constant principal curvature in the 3-dimensional de Sitter space,
- Aledo, J.A. and Galvez, J.A., 2002, Some rigidity results for compact spacelike surfaces in the 3-dimensional de Sitter space, Proceedings of the Conference Differential Geometry Valencia 2001, World Scientific P.C., 19-27.
- Aledo, J.A. and Romero, A., 2003, Compact spacelike surfaces in the 3-dimensional de Sitter space with non-degenerate second fundamental form, to appear in Differ. Geom. Appl.
- Aledo, J.A. and Galvez, J.A., 2005, Complete surfaces in the hyperbolic space with a constant principal curvature, preprint.
- Bryant, R., 1987, Surfaces of mean curvature one in hyperbolic space, Asterisque 154-155; 321-347.
- Cheng, S. Y. and Yau, S. T., 1976, Maximal spacelike hypersurfaces in the Lorentz-Minkowski spaces, Ann. of Math., 104p. 407-419.
- Duggal, L. K. and Bejancu, A., 1996, Lightlike submanifolds of semi-Riemannian manifolds and applications, Kluwer Academic Publishers, 300p., AH Dordrecht.
- Fujimori, S., Kobayashi, S.-P. and Rossman, W., 2005, Loop group methods for constant mean curvature surfaces, Rokko Lectures in Math. 17p.

- Fujimori, S., Rossman, W., Umehara, M., Yamada, K. and Yang, S.D., 2004, Spacelike mean curvature one surfaces in de-Sitter 3-space, Kobe University, www.lib.kobe-u.ac.jp/repository/thesis/d1/D1003547.pdf.
- Greene, R., 1970, Isometric embeddings of Riemannian and pseudo-Riemannian manifolds, Mem. Amer. Math. Soc. 97p.
- Hacısalıhoğlu, H. H., 2000, Diferensiyel geometri, Cilt I-II, Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi Yayınları, 269s. - 340s.
- Hacısalıhoğlu, H. H. ve Ekmekçi, N., 2003, Tensör geometri, Ankara Üniversitesi, 256s. Ankara
- Hacısalıhoğlu, H. H., 2004, Diferensiyel geometri, Cilt III, Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi Yayınları. 206s.
- Kim, Y.W. and Yang, S.D. The geodesic reflection principle for spacelike constant mean curvature surfaces in de Sitter three-space, preprint.
- Li, H., 1997. Global rigidity theorems of hypersurfaces, Ark. Mat. 35p. 327-351.
- Montiel, S., 1988, An integral inequality for compact spacelike hypersurfaces in de Sitter space and applications to the case of constant mean curvature in de Sitter space, Indiana Univ. Math. J. 37p. 909-917.
- Nishikawa, S., 1984, On maximal spacelike hypersurfaces in a Lorentzian manifold. Nagoya math. J., 95p. 117-124.
- O'Neill, B., 1983, Semi-Riemannian geometry with applications to relativity, Academic Press, Inc., 468p., New York.
- Pang, H. D., Xu, S. L., Dai, S., 2002, Spacelike hypersurfaces in de Sitter space, J. of Geometry and Physics, 42p, 78-84.

- Ramanathan, J., 1987, Complete spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in de Sitter space, *Indiana Univ. Math. J.* 36; 349-359.
- Sabuncuoğlu, A., 2006, *Diferensiyel geometri*, 440s. Ankara.
- Umehara, M. and Yamada, K., 1993, Complete surfaces of constant mean curvature 1 in the hyperbolic 3-space, *Ann. of Math.* (2) 137; 611-638.
- Zheng, Y., 1996, Spacelike hypersurfaces with constant scalar curvature in the de Sitter space, *Differential Geometry and its Applications*, 6, 51-54.