

T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÜÇ BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA LIGHTLIKE
DOĞRULTMANLI REGLE YÜZEYLERİN
EĞRİLİK TEORİSİ ÜZERİNE

Tunahan TURHAN

Danışman: Doç. Dr. Nihat AYYILDIZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
ISPARTA – 2010

TEZ ONAYI

Tunahan TURHAN tarafından hazırlanan “Üç Boyutlu Minkowski Uzayında Lightlike Doğrultmanlı Regle Yüzeylerin Eğrilik Teorisi Üzerine” adlı tez çalışması aşağıdaki juri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Süleyman Demirel Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Nihat AYYILDIZ



Süleyman Demirel Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Juri Üyeleri :

Yrd. Doç. Dr. Ünver ÇİFTÇİ



Namık Kemal Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Doç. Dr. Ahmet YÜCESAN



Süleyman Demirel Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Prof. Dr. Mustafa KUŞCU

Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER.....	<i>i</i>
ÖZET.....	<i>ii</i>
ABSTRACT.....	<i>iii</i>
TEŞEKKÜR.....	<i>iv</i>
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	<i>v</i>
SİMGELER DİZİNİ.....	<i>vi</i>
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1. Cebirsel kavramlar.....	3
2.2. $\mathbb{R}_1^3$ Üç Boyutlu Minkowski Uzayında Regle Yüzeyler.....	10
3. ÜÇ BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA LIGHTLIKE DOĞRULTMANLI LORENTZ REGLE YÜZEYLER.....	12
3.1. Lightlike Doğrultmanlı Lorentz Regle Yüzeyler.....	12
3.2. Merkezi Normal Lorentz Yüzey.....	21
4. ÜÇ BOYUTLU MINKOWSKI UZAYDA BİR ROBOT END-EFFECTORÜN HAREKETİ.....	28
4.1. Bir Robot Yörüngesinin Temsili.....	28
4.2. Referans Çatıları.....	29
4.3. Robot End-Effector Hareketinin Birinci Mertebeden Diferansiyel Özelikleri.....	31
5. KAYNAKLAR.....	35
ÖZGEÇMİŞ.....	37

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ÜÇ BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA LIGHTLIKE DOĞRULTMANLI REGLE YÜZEYLERİN EĞRİLİK TEORİSİ ÜZERİNE

Tunahan TURHAN

Süleyman Demirel Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Nihat AYYILDIZ

Bu tez çalışması, dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, eğrilik teorisinin tarihsel gelişimi ve bir uygulama alanından bahsedilmiştir.

İkinci bölümde, Minkowski uzayının cebirsel elemanlarının tanıtıldığı temel kavramlara yer verilmiştir.

Üçüncü bölüm, üç boyutlu Minkowski uzayında lightlike doğrultmanlı bir Lorentz regle yüzeyin eğrilik teorisi ile ilgilidir. Bu bölümde formüle edilen denklemler dördüncü bölümün temelini oluşturmaktadır.

Dördüncü bölüm, bir Lorentz regle yüzeyin eğrilik teorisinin bir robot end-effector hareketine nasıl uygulandığını göstermektedir. Ayrıca bu bölümde, üçüncü bölümde elde edilen bir Lorentz regle yüzeyin eğrilik teorisi, bir robot end-effector hareketinin diferansiyel özelliklerini belirlemek için kullanıldı.

Anahtar Kelimeler: Null çatı, regle yüzey, Darboux çatısı, Frenet formülleri, striksiyon çizgisi, robot end-effector.

2010, 37 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

ON CURVATURE THEORY OF RULED SURFACE WITH LIGHTLIKE RULING IN THREE DIMENSIONAL MINKOWSKI SPACE

Tunahan TURHAN

Süleyman Demirel University

Graduate School of Applied and Natural Sciences

Mathematics Department

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Nihat AYYILDIZ

This thesis is composed of four chapters.

In the first chapter, historical development of curvature theory and one its application field are explained.

In the second chapter, basic definitions which are introduce algebraic elements of Minkowski space are given.

Third chapter is related with curvature theory of Lorentzian ruled surfaces with lightlike ruling in three dimensional Minkowski space. The equations formulated in this chapter are basis for developments in the chapter four.

Fourth chapter is shows how the curvature theory of a Lorentzian ruled surface is applied to robot end-effector motion. Also, in this chapter, curvature theory of Lorentzian ruled surface obtained in third chapter is used for determine differential properties of a robot end-effector motion.

Key Words: Null frame, ruled surface, Darboux frame, Frenet formula, striction line, Robot end-effector.

2010, 37 pages

TEŞEKKÜR

Bu çalışmada bana yardımcı olan ve çalışmanın her aşamasında ilgi ve desteğini bir an bile esirgemeyen danışman hocam Doç. Dr. Nihat AYYILDIZ'a teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Bu çalışmayı hazırlarken benden manevi desteklerini esirgemeyen aileme minnet ve şükranlarımı sunarım.

2037 – *YL* – 09 No'lu Proje ile tezimi maddi olarak destekleyen Süleyman Demirel Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Yönetim Birimi Başkanlığı'na teşekkür ederim.

Tunahan TURHAN
ISPARTA, 2010

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1. $X(s, t)$ Lorentz regle yüzeyi.....	25
Şekil 3.2. $X_U(s, t)$ Merkezi normal Lorentz yüzey.....	26
Şekil 4.1. Robot yörüngesi.....	28
Şekil 4.2. Lorentz regle yüzey.....	29

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar cismi
$\mathbb{R}^3$	Üç boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{R}_1^3$	Üç boyutlu Minkowski uzayı
κ	Eğrilik
τ	Torsiyon
κ_g	Jeodezik eğrilik
κ_n	Normal eğrilik
τ_g	Jeodezik torsiyon
$X(s, t)$	Lorentz regle yüzey
$X_U(s, t)$	Merkezi normal Lorentz yüzey
δ	Lorentz regle yüzeyin dağılma parametresi
$\beta(s)$	Lorentz regle yüzeyin striksiyon çizgisi
Ω, Γ, Δ	Lorentz regle yüzeyin eğrilik fonksiyonları

1. GİRİŞ

Eğrilik teorisi, hareketli bir katı cisme gömülmüş noktalar, doğrular ve düzlemlerin yörüngelerinin temel geometrik özelliklerini araştırır. Eğrilik teorisi aynı zamanda, bir harekete maruz kalan hareketli bir katı cismin hız ve ivme dağılımıyla da ilgilidir. Eğrilik teorisinden elde edilen sonuçlar; düzlemsel, küresel ve uzaysal mekanizmaların sentezine ve analizine uygulanır.

Uzayda hareketli bir katı cisme sabitlenmiş doğru bir regle yüzey meydana getirir. Bir regle yüzey bir C^∞ yüzeyin özel durumu olduğundan, bu yüzeyin diferansiyel geometrisi vektör hesabının geleneksel teknikleri kullanılarak geliştirilir. McCarthy ve Roth (1981), uzay kinematikleri için çizgi yörüngelerinin skalar eğrilik teorisini elde etmek için bu yaklaşımı kullandı. McCarthy ve Roth'un yaklaşımı, Kruppa (1957) tarafından verilen bir regle yüzeyin analizine dayanmaktadır. Aynı zamanda McCarthy (1987), bir regle yüzeyin eğrilik teorisinin hem skalar hem de dual formüllerini elde etti ve bu iki formül arasında bağıntılar verdi. Bu çalışma temel alınarak Ayyıldız ve Yücesan (2006), Minkowski (Lorentz) uzayında null olmayan eğriler için çizgi yörüngelerinin eğrilik teorisinin skalar ve dual formüllerini elde ettiler. Eğrilik yörüngesi üzerine yapılan çalışmalardan birisi de Ersoy ve Tosun (2008) tarafından, $\mathbb{R}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayda Cartan çatılı bir null eğri boyunca yönlendirilmiş bir null doğrunun hareketi ile sıkı sıkıya bağlı null scrolların yörüngesi üzerinedir. Bu çalışmada aynı zamanda null scrollun baz eğrisinin jeodezik eğriliği, jeodezik torsiyonu ve eğrilikleri arasında bazı ilişkiler elde edildi. Lorentz uzayında null eğriler ve yüzeyler üzerine yapılan çalışmalardan birisi de Çöken ve Çiftçi (2007) ye aittir. Bu çalışmada yazarlar üç boyutlu Lorentz uzayında bir Cartan çatılı null eğrinin Frenet çatısı ile yüzeyin Darboux çatısını karşılaştırdılar.

Eğrilik teorisi, uzay katı hareketini belirlemenin en sık ve en basit yoludur. Bu nedenle, eğrilik teorisi çeşitli alanlara ışık tutabilecek önemli bir analitik araçtır. Örneğin Ryuh ve Pennock (1989) bir robotik aracın ani hareket özelliklerini belirlemek için bir regle yüzeyin eğrilik teorisini kullandılar. Bir robot

kolunun aparatı olan end-effector hareketinin differansiyel özellikleri eğrilik teorisinden elde edildi. Hareket özellikleri end-effectore sabitlenmiş bir noktanın hızını ve ivmesini belirlemek için kullanıldı. Bu kinematik bilgi robot yörünge planlamasında oldukça önemlidir.

Bu çalışmada, üç boyutlu Minkowski uzayda lightlike doğrultmanlı bir Lorentz regle yüzeyin eğrilik teorisi verilmeye çalışıldı. Burada bir Lorentz regle yüzeyin şeklini belirleyen eğrilik fonksiyonları için bağıntılar elde edildi. Böylece bir Lorentz regle yüzeyin eğrilik teorisi, bir robot end-effector hareketinin yörünge planlaması için kullanıldı. Bu metodla, bir eğrinin geometrik modeli kullanılarak bir regle yüzeyin nasıl üretilebileceği gösterildi.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde üçüncü ve dördüncü bölümler için gerekli olan temel kavramlara ve teoremlere yer verilmiştir.

2.1. Cebirsel Kavramlar

Tanım 2.1.1. $I \subset \mathbb{R}$ bir aralık olmak üzere

$$\begin{aligned}\alpha : I &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ s &\rightarrow \alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s))\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan sürekli fonksiyona $\mathbb{R}^3$ uzayında bir eğri denir (Do Carmo, 1976).

$I, \mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin bir açık aralığı olmak üzere α diferansiyellenebilir ise α ya diferansiyellenebilir eğri denir. Bu çalışma boyunca diferansiyellenebilir eğri yerine sadece eğri ifadesi kullanılacaktır.

Tanım 2.1.2. $\alpha, \mathbb{R}^3$ üzerinde bir eğri olsun. I aralığındaki $\forall t$ sayısı için,

$$\alpha'(t) = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}(t), \frac{d\alpha_2}{dt}(t), \frac{d\alpha_3}{dt}(t) \right)_{\alpha(t)}$$

teğet vektörüne, eğrinin $\alpha(t)$ noktasındaki hız vektörü denir (O'Neill, 1997).

Tanım 2.1.3. $\alpha, \mathbb{R}^3$ üzerinde bir eğri olsun. $\forall t \in I$ için $\alpha'(t) \neq 0$ ise α eğrisine regüler eğri denir (O'Neill, 1997).

Tanım 2.1.4. $\alpha, I \subset \mathbb{R}$ aralığında tanımlı, $\mathbb{R}^3$ de bir eğri olsun. $a, b \in I$ olmak üzere

$$\int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

reel sayısına $t = a$ ve $t = b$ noktaları arasındaki α eğrisinin yay uzunluğu denir (Hacısalihoglu, 2000).

Tanım 2.1.5. $\alpha, J \subset \mathbb{R}$ aralığında tanımlı, $\mathbb{R}^3$ üzerinde bir eğri olsun. $\forall s \in J$ için,

$$\|\alpha'(s)\| = 1$$

ise α eğrisine birim hızlı, s parametresine de yay uzunluğu parametresi denir (Hacısalihoglu, 2000).

Tanım 2.1.6. V bir reel vektör uzayı olsun.

$$\langle, \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümü $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall u, v, w \in V$ için

$$i) \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle,$$

$$ii) \langle au + bv, w \rangle = a \langle u, w \rangle + b \langle v, w \rangle,$$

$$\langle u, av + bw \rangle = a \langle u, v \rangle + b \langle u, w \rangle$$

özelliklerine sahip ise $\langle, \rangle$ dönüşümüne V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.7. V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form $\langle, \rangle$ olsun.

i) $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle > 0$ ise $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formuna pozitif tanımlı,

ii) $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle < 0$ ise $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formuna negatif tanımlı,

iii) $\forall v \in V$ için $\langle v, v \rangle \geq 0$ ise $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formuna pozitif yarı-tanımlı,

iv) $\forall v \in V$ için $\langle v, v \rangle \leq 0$ ise $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formuna negatif yarı-tanımlı,

v) $\forall w \in V$ için $\langle v, w \rangle = 0$ iken $v = 0$ olmak zorunda ise $\langle, \rangle$ simetrik bilinear formuna non-dejenere, aksi halde dejenere dir denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.8. V bir reel vektör uzayı ve V üzerinde simetrik bilinear dönüşüm $\langle, \rangle$ olsun. V uzayının

$$RadV = \{\xi \in V : \langle \xi, v \rangle = 0, \forall v \in V\}$$

ile tanımlı altuzayına, $\langle, \rangle$ simetrik bilinear dönüşümüne göre V uzayının radikal uzayı (veya null uzayı) denir (Duggal and Bejancu, 1996).

Tanım 2.1.9. V bir reel vektör uzayı ve W da V vektör uzayının altuzayı

olsun. Bu durumda $W \times W$ üzerinde $<, >$ dönüşümünün kısıtlanmış da W üzerinde simetrik bilinear formdur. Simetrik bilinear formun negatif olduğu en büyük W altuzayının boyutuna V uzayı üzerinde, bilinear formun indeksi denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.10. Bir V reel vektör uzayı üzerinde non-dejenere simetrik bilinear forma V reel vektör uzayı üzerinde bir skalar çarpma denir. V üzerindeki bir skalar çarpma $<, >$ ise $(V, <, >)$ ikilisine skalar çarpımlı vektör uzayı denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.11. $\forall v, w \in V$ için $v \neq 0$ ve $w \neq 0$ iken $< v, w > = 0$ ise v ve w vektörleri diktir denir ve $v \perp w$ şeklinde gösterilir.

V reel vektör uzayının bir altuzayı W ise $W^\perp = \{v \in V | v \perp W\}$ olsun. $W^\perp$ altuzayına V vektör uzayının dik altuzayı denir. $W^\perp$ altuzayı W uzayının dik tümleyeni olarak isimlendirelemez. Çünkü $W + W^\perp$ genellikle V vektör uzayının tamamı değildir (O'Neill, 1983).

Önerme 2.1.12. W bir V skalar çarpım uzayının altuzayı olsun. O zaman,

$$i) \text{ boy}W + \text{boy}W^\perp = \text{boy}V,$$

$$ii) (W^\perp)^\perp = W$$

$$iii) \text{Rad}W = \text{Rad}W^\perp = W \cap W^\perp$$

özellikleri vardır (Duggal and Bejancu, 1996).

Tanım 2.1.13. V bir skalar çarpım uzayı olsun. V nin indeksi ν olmak üzere $\nu = 1$ ve $\text{boy}V \geq 2$ ise V skalar çarpım uzayına bir Lorentz uzayı denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.14. $(V, <, >)$ bir Lorentz uzayı olsun. $W \subset V$ altuzayı için,

$$i) <, > |_W : W \times W \rightarrow \mathbb{R} \text{ pozitif tanımlı ise } W \text{ uzayına spacelike altuzay,}$$

$$ii) <, > |_W : W \times W \rightarrow \mathbb{R} \text{ indeksi 1 olan non-dejenere ise } W \text{ uzayına timelike altuzay,}$$

$$iii) <, > |_W : W \times W \rightarrow \mathbb{R} \text{ dejenere ise } W \text{ uzayına lightlike altuzay denir (O'Neill, 1983).}$$

Önerme 2.1.15. $(W, <, >)$ reel n-boyutlu lightlike vektör uzayı ve $\text{Rad}W$ da

W vektör uzayının radikali olsun. Bu durumda radikal uzaya tümleyen olan bir altuzay nondejeneredir. Bu uzaya perde uzay denir ve $S(W)$ ile gösterilir. O halde

$$W = RadW \perp S(W)$$

dır (Duggal and Bejancu, 1996).

Teorem 2.1.16. Bir $V \neq \{0\}$ skalar çarpım uzayı bir ortonormal baza sahiptir (O'Neill, 1983).

Teorem 2.1.17. V reel vektör uzayı için bir ortonormal baz $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ olsun. $\varepsilon_i = \langle e_i, e_i \rangle$ olmak üzere $\forall v \in V$ vektörü

$$v = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \langle v, e_i \rangle e_i$$

olacak şekilde tek türlü yazılabilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.18. $\mathbb{R}^3$, 3-boyutlu Öklid uzay ve $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ olsun. $\mathbb{R}^3$ üzerinde,

$$\langle u, v \rangle = -u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

ile verilen skalar çarpım göz önüne alınarak elde edilen uzaya Minkowski 3-uzay veya 3-boyutlu Minkowski uzayı denir ve $\mathbb{R}_1^3$ ile gösterilir. Burada tanımlanan $\langle, \rangle$ metriğe Lorentz metriği (veya Minkowski metriği) denir (Lopez, 2008).

Tanım 2.1.19. $\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzay olsun. $u \in \mathbb{R}_1^3$ olmak üzere,

- i) $\langle u, u \rangle > 0$ veya $u = 0$ ise u vektörüne spacelike,
- ii) $\langle u, u \rangle < 0$ ise u vektörüne timelike,
- iii) $\langle u, u \rangle = 0$ ve $u \neq 0$ ise u vektörüne null (veya lightlike) dır denir (Lopez, 2008).

Tanım 2.1.20. $\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzay ve $u \in \mathbb{R}_1^3$ olsun.

$$\|u\| = \sqrt{|\langle u, u \rangle|}$$

sayısına u vektörünün normu denir. Normu bir birim olan vektöre birim vektör ve

ortogonal birim vektörlerin kümesine de ortonormal sistem denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.21. $\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzay ve $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}_1^3$ olsun.

$$u \times v = \left(- \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

şeklinde tanımlı $\times$ operatörüne $\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında Lorentz anlamında vektörel çarpım denir (Liu, 2008).

Teorem 2.1.22. $\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayda iki vektör u ve v olmak üzere,

- i) u ve v spacelike vektör ise $u \times v$ bir timelike vektördür,
- ii) u spacelike ve v timelike vektör ise $u \times v$ spacelike vektördür,
- iii) u spacelike ve v null vektör olmak üzere $\langle u, v \rangle = 0$ ise $u \times v$ null vektör, eğer $\langle u, v \rangle \neq 0$ ise $u \times v$ spacelike vektördür,
- iv) u ve v null vektör ise $u \times v$ spacelike vektördür,
- v) u timelike ve v null vektör ise $u \times v$ spacelike vektördür,
- vi) u ve v timelike vektör ise $u \times v$ spacelike vektördür (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.23. $\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzay olsun. $x, y, z, w \in \mathbb{R}_1^3$ olmak üzere,

$$\langle x \times y, z \times w \rangle = -(\langle x, z \rangle \langle y, w \rangle - \langle x, w \rangle \langle y, z \rangle)$$

ifadesine $\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında Lagrange formülü denir (Liu, 2008).

Tanım 2.1.24. α , $\mathbb{R}_1^3$ de bir eğri olsun. α eğrisinin hız vektörü α' olmak üzere,

- i) $\alpha'(t)$ hız vektörü spacelike ise α eğrisine spacelike,
 - ii) $\alpha'(t)$ hız vektörü timelike ise α eğrisine timelike
- denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.25. $\mathcal{U}$, $\mathbb{R}^2$ nin bir açık alt kümesi olsun. $x : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ bire bir regüler dönüşümüne bir koordinat sistemi denir (O'Neill, 1997).

Tanım 2.1.26. $x : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ bir koordinat sistemi olsun. $x^{-1} : x(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{U}$ ters fonksiyonu $x(\mathcal{U})$ nun her noktasında sürekli ise $x : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dönüşümüne

uygun koordinat sistemi denir (O'Neill, 1997).

Tanım 2.1.27. M , $\mathbb{R}^3$ uzayının alt kümesi olsun. M nin her p noktası için görüntüsü M de p noktasının bir komşuluğunu içine alan bir uygun koordinat sistemi varsa M ye $\mathbb{R}^3$ de bir yüzey denir (O'Neill, 1997).

Tanım 2.1.28. $\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey M olsun. Her $p \in M$ ve her $u_p \in T_p M$ ve $v_p \in T_p M$ için

$$\langle u_p, v_p \rangle = 0 \Rightarrow u_p = 0$$

önermesi sağlanıyorsa M yüzeyine $\mathbb{R}_1^3$ uzayında bir non-dejenere yüzey denir (Beem and Ehrlich, 1981). Bir başka ifadeyle, M yüzeyinin non-dejenere yüzey olması için gerek ve yeter şart, yüzeyin normalinin null vektör alanı olmamasıdır.

Tanım 2.1.29. $\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzay ve M bir non-dejenere yüzey olsun.

- i) M yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik Lorentz metriği ise M yüzeyine bir timelike yüzey,
- ii) M yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik pozitif tanımlı ise M yüzeyine bir spacelike yüzey denir (Beem and Ehrlich, 1981).

Tanım 2.1.30. M , n -boyutlu bir yarı-Riemann manifoldu olsun. $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ diferansiyellenebilir eğrisi; $1 \leq m \leq n$, $\langle \gamma^{(i)}(t), \gamma^{(i)}(t) \rangle = 0$, $i = 1, \dots, m-1$ ve $\langle \gamma^{(m)}(t), \gamma^{(m)}(t) \rangle = \pm 1$ şartlarını sağlıyorsa, t parametresine yarı-yay parametresi denir (Ferrandez, Gimenez and Lucas, 2002).

Tanım 2.1.31. M , boyutu $n = m + 2$ ve indeksi ν , $0 < \nu < n$, olan yani metriği indefinite olan bir yarı-Riemann manifoldu olsun. M de lokal olarak $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ biçiminde parametrelendirilmiş bir C eğrisi verilsin. Eğer C nin teğet vektörü her noktada bir null vektör ise C ye null ya da lightlike eğri denir (Duggal and Bejancu, 1996).

M , boyutu $n = m + 2$ ve indeksi ν , $0 < \nu < n$, olan bir yarı-Riemann manifoldu olsun. M de lokal olarak $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ biçiminde parametrelendirilmiş bir C eğrisi verilsin. C eğrisinin teğet demetini TC ile gösterilsin ve tıpkı non-dejenere

durumda olduğu gibi $TC^\perp$ vektör demeti de

$$TC^\perp = \bigcup_{P \in C} T_P C^\perp; T_P C^\perp = \{\xi_P \in T_P M : \langle \xi_P, V_P \rangle = 0, \forall V_P \in T_P C\}$$

olarak tanımlansın. Buna göre $TC^\perp$ vektör demetinin rankı $m + 1$ dir. V_P bir null vektör olduğundan TC teğet demeti, $TC^\perp$ vektör demetinin rankı 1 olan bir alt vektör demetidir. O halde, $TC^\perp$ vektör demeti de TC teğet demetinin

$$TC^\perp = TC \perp S(TC^\perp)$$

olacak şekilde bir ortogonal tümleyeni göz önüne alınabilir. Buna göre; C eğrisinin bir perde vektör demeti olarak adlandırılan $S(TC^\perp)$, rankı m olan bir non-dejenere alt vektör demetidir. Böylece

$$TM|_C = S(TC^\perp) \perp S(TC^\perp)^\perp$$

olarak yazılabilir (Duggal and Bejancu, 1996).

Teorem 2.1.32. C , bir M yarı-Riemann manifoldunun bir null eğrisi olsun. O zaman C üzerinde her $U \subset C$ koordinat komşuluğunda

$$\langle \gamma'(t), N \rangle = 1$$

ve

$$\langle N, N \rangle = \langle N, X \rangle = 0 \quad \forall X \in \Gamma(S(TC^\perp)|_U)$$

şartlarını sağlayan birtek $N \in \Gamma(E|_C)$ kesitine sahip bir ve yalnız bir E vektör demeti vardır ve rankı 1 dir. Buna göre E vektör demeti, C eğrisinin $S(TC^\perp)$ perde vektör demetine göre null transversal vektör demeti olarak adlandırılır ve $ntr(C)$ ile gösterilir. N vektör alanı da C eğrisinin $\gamma'(t)$ hız vektörüne göre null transversal vektör alanıdır. Ayrıca, C eğrisinin transversal vektör demeti

$$tr(C) = ntr(C) \perp S(TC^\perp)$$

olarak tanımlanır. Dolayısıyla

$$TM|_C = TC \oplus tr(C) = (TC \oplus ntr(C)) \perp S(TC^\perp)$$

dir (Duggal and Bejancu, 1996).

2.2. $\mathbb{R}_1^3$, Üç Boyutlu Minkowski Uzayında Regle Yüzeyler

Tanım 2.2.1. $\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayın $\mathcal{F} = \{X, Y, Z = Y \times X\}$ bazı

$$\langle X, X \rangle = \langle Y, Y \rangle = 0, \quad \langle X, Y \rangle = \langle Z, Z \rangle = 1$$

şartlarını sağlarsa $\mathcal{F}$ bazına bir null çatı denir (Graves, 1979).

Bir dejenere eğrinin Frenet formülleri oldukça karmaşıktır ve çok sayıda eğrilik fonksiyonu içermektedir. Non-dejenere halde keyfi bir parametre için Frenet formüllerini sağlayan bir tek Frenet çatısı olduğu bilinir. Özel olarak yay uzunluğu parametresi seçilirse, genel eğrilik fonksiyonları elde edilebilir. Fakat dejenere eğriler için bunlar geçerli değildir. Hatta, null eğriler için yay uzunluğu parametresi kavramından da söz edilemez (Çiftçi, 2004).

$\mathcal{F}$ çatılı α null eğrisi, verilen bir $k_0 = k_0(s)$ pozitif fonksiyonu için $X = X(s) = \frac{\alpha'}{k_0}$ olmak üzere aşağıdaki Frenet denklemlerini sağlar:

$$\begin{aligned} X' &= k_1 X + k_2 Z, \\ Y' &= -k_1 Y + k_3 Z, \\ Z' &= -k_3 X - k_2 Y. \end{aligned}$$

Burada k_i , $1 \leq i \leq 3$, fonksiyonuna α eğrisinin i . eğriliği denir (Graves, 1979).

Tanım 2.2.2. α , $\mathbb{R}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında $\mathcal{F} = \{X, Y, Z\}$ null çatılı bir null eğri olsun. $\mathbb{R}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında α eğrisi boyunca

$$\psi(s, t) = \alpha(s) + tY(s)$$

ile parametrize edilmiş non-dejenere regle yüzeye bir null scroll denir. Burada α eğrisine yüzeyin dayanak eğrisi, Y vektörüne de yüzeyin doğrultmanı denir (Graves, 1979).

$k_2 = 1$ ve $k_1 = 0$ olmak üzere $(\alpha, \mathcal{F})$ çatılı null eğriye Cartan çatılı null eğri, $\mathcal{F}$ çatı alanına da Cartan çatısı denir. Eğer, $\mathbb{R}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında X , Y ve Z vektörleri $\langle X, X \rangle = \langle Y, Y \rangle = 0$ ve

$$\begin{aligned} X' &= Z, \\ Y' &= k_3 Z, \\ Z' &= -k_3 X - Y \end{aligned}$$

özeliklerini sağlarsa

$$\psi(s, t) = \alpha(s) + tY(s)$$

regle yüzeyine bir $\mathcal{B}$ scroll denir (Graves, 1979).

Tanım 2.2.3. $\mathbb{R}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında bir regle yüzeyin anadoğruları boyunca teğet düzlemleri her noktada aynı ise regle yüzeye açılabilir denir (Balgetir, Bektaş ve Ergüt, 2003).

Tanım 2.2.4. $\mathbb{R}_1^3$ 3-boyutlu Minkowski uzayında dayanak eğrisi α ve anadoğrusu Y olan bir regle yüzey verilsin.

$$\beta(s) = \alpha(s) - \mu Y(s)$$

olmak üzere

$$\langle \beta', Y' \rangle = 0$$

denklemini sağlayan β eğrisine yüzeyin striksiyon çizgisi denir (Guggenheimer, 1977).

3. ÜÇ BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA LIGHTLIKE DOĞRULTMANLI LORENTZ REGLE YÜZEYLER

Üç boyutlu Minkowski uzayında Lorentz metriği indefinitedir. Bu yüzden üç boyutlu Minkowski uzayda regle yüzeyler, spacelike, timelike (Lorentz) veya dejenere olabileceğinden Öklid durumundan daha karmaşık yapıya sahiptir.

Diferansiyel geometri açısından null eğrileri çalışmak özel bir ilgiye sahiptir. Öklid geometrideki çoğu klasik sonuçların Minkowski geometrisinde bir karşılığı vardır. Aslında spacelike veya timelike eğriler; pozitif tanımlı Öklid geometrisinde olduğu gibi benzer yaklaşımla çalışılabilir. Bununla birlikte null eğriler spacelike ve timelike eğrilerden çok farklı özelliklere sahiptir. Diğer bir deyişle null eğri teorisi Öklid durumunda benzeri olmayan sonuçlara sahiptir. Null eğrilerin geometrisindeki zorluklar yay uzunluğunun sıfır olmasından kaynaklanır. Böyle bir durumda alışılmış yolla teğet vektörü birimleştirmek mümkün değildir. Bu işlem için teğet vektörün türevini birimleştiren ve yarı-yay olarak isimlendirilen yeni bir parametre kullanmak gerekir.

Bu bölüm iki alt bölümden oluşmaktadır. Bu alt bölümlerden birincisi lightlike doğrultmanlı Lorentz regle yüzeylere ayrılmıştır. Burada, lightlike doğrultmanlı Lorentz regle yüzeyin Darboux çatısı oluşturularak değişimi incelenmiştir. Buna bağlı olarak Lorentz regle yüzeyi karakterize eden eğrilik fonksiyonları elde edilmiştir. Daha sonra Lorentz regle yüzeyin baz eğrisinin çatısı ile yüzeyin Darboux çatısı arasında bağıntılar elde edilmiştir.

İkinci alt bölüm ise merkezi normal Lorentz yüzeye ayrılmıştır. Burada lightlike doğrultmanlı Lorentz regle yüzeyin asli normalinin hareketiyle oluşturulan merkezi normal Lorentz yüzeyin eğrilik fonksiyonları elde edilmiştir.

3.1. Lightlike Doğrultmanlı Lorentz Regle Yüzeyler

$\mathbb{R}_1^3$ üç boyutlu Minkowski uzayında

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$$

null eğrisi verilsin. Eğer

$$\begin{aligned} \langle T, T \rangle &= \langle N, N \rangle = \langle T, W \rangle = \langle N, W \rangle = 0, \\ \langle T, N \rangle &= \langle W, W \rangle = 1, \quad W = N \times T \end{aligned}$$

şartları sağlanırsa $\mathcal{F} = \{T, N, W\}$ bazına $\mathbb{R}_1^3$ üç boyutlu Minkowski uzayında α eğrisinin bir null çatısı denir. Böyle bir durumda α eğrisine $\mathcal{F}$ ile çatılanmıştır denir. Null eğrilerin çatıları tek değildir. Üstelik çatılar bir eğrinin parametrizasyonları altında değişir. Bu yüzden null eğriler için eğri ile çatı birlikte verilir.

α eğrisi $T = \frac{d\alpha}{ds}$ olmak üzere $\mathcal{F} = \{T, N, W\}$ çatısıyla verilsin. O zaman N ve W vektör alanları α eğrisi üzerinde, sırasıyla, $ntr(\alpha)$ ve $S(T\alpha^\perp)$ vektör demetlerini tanımlar. Böylece, $\mathcal{F}$ çatısına göre α eğrisinin Frenet denklemleri elde edilebilir. Buna göre T' vektörü $\mathcal{F} = \{T, N, W\}$ çatısına göre

$$T' = aT + bN + cW$$

biçiminde yazılır. Bu ifadede a, b ve c katsayıları, sırasıyla,

$$\begin{aligned} a &= \langle T', N \rangle = k_1, \\ b &= \langle T', T \rangle = 0, \\ c &= \langle T', W \rangle = k_2 \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. O halde

$$T' = k_1 T + k_2 W \tag{3.1}$$

biçiminde yazılır. Benzer yolla, N' ve W' vektörleri de

$$N' = -k_1 N + k_3 W \tag{3.2}$$

ve

$$W' = -k_3 T - k_2 N \tag{3.3}$$

biçiminde elde edilir. (3.1), (3.2) ve (3.3) denklemleri matris formunda

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ W' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_1 & k_3 \\ -k_3 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ W \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

şeklinde yazılır. Burada k_i , $1 \leq i \leq 3$, fonksiyonlarına $\mathcal{F} = \{T, N, W\}$ çatısına göre α eğrisinin eğrilik fonksiyonları denir. Eğer, $k_1 = 0$ olursa s parametresine distinguished parametresi denir. Bu durumda $\mathcal{F} = \{T, N, W\}$ çatısına da distinguished Frenet çatısı denir (Duggal and Bejancu, 1996).

$\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$, $\mathcal{F} = \{T, N, W\}$ çatılı bir null eğri olsun. Buna göre, $\mathbb{R}_1^3$ üç boyutlu Minkowski uzayında bir lightlike doğrultmanlı M Lorentz regle yüzey

$$\begin{aligned} X &: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3 \\ (t, \nu) &\rightarrow X(t, \nu) = \alpha(t) + \nu V(t) \end{aligned}$$

biçiminde ifade edilir. Burada α eğrisi M Lorentz regle yüzeyinin dayanak eğrisi, $V(t)$ vektörü de M Lorentz regle yüzeyi meydana getiren bir null vektördür. Bu $V(t)$ null vektörü, $Y \in T_{\alpha(t)}M$ ve $\langle Y, T \rangle \neq 0$ biçimindeki bir Y vektörü için, α eğrisinin teğet vektörü T olmak üzere

$$V = \frac{1}{\langle Y, T \rangle} \left\{ Y - \frac{\langle Y, Y \rangle}{2 \langle Y, T \rangle} T \right\}$$

biçiminde bulunur. Böylece M yüzeyinin spacelike birim normal vektörü $U = V \times T$ olmak üzere $\mathbb{R}_1^3$ üç boyutlu Minkowski uzayın $\{T, V, U\}$ bazı, $\alpha(t)$ noktasında yüzeyin Darboux çatısıdır. Bu çatı

$$\begin{aligned} \langle T, T \rangle &= \langle V, V \rangle = \langle V, U \rangle = \langle T, U \rangle = 0 \\ \langle T, V \rangle &= \langle U, U \rangle = 1 \end{aligned}$$

şartlarını sağlar. O halde $\{T, V, U\}$ doğrultman üçlüsünün birinci mertebeden

değişimi hesaplanabilir. Bunun için T' vektörü $\{T, V, U\}$ Darboux çatısına göre

$$T' = a_1 T + b_1 V + c_1 U$$

biçiminde yazılabileceğinden; a_1 , b_1 ve c_1 katsayıları, sırasıyla,

$$a_1 = \langle T', V \rangle = \kappa_g,$$

$$b_1 = \langle T', T \rangle = 0,$$

$$c_1 = \langle T', U \rangle = \kappa_n$$

biçiminde bulunur. Buna göre T' vektörü

$$T' = \kappa_g T + \kappa_n U$$

şeklinde yazılır. Benzer yolla,

$$V' = a_2 T + b_2 V + c_2 U$$

olmak üzere

$$a_2 = \langle V', V \rangle = 0,$$

$$b_2 = \langle V', T \rangle = -\kappa_g,$$

$$c_2 = \langle V', U \rangle = \tau_g$$

şeklinde bulunur. Böylece

$$V' = -\kappa_g T + \tau_g U$$

biçiminde yazılır. Son olarak

$$U' = a_3 T + b_3 V + c_3 U$$

şeklinde yazılırsa,

$$\begin{aligned} a_3 &= \langle U', V \rangle = -\tau_g, \\ b_3 &= \langle U', T \rangle = -\kappa_n, \\ c_3 &= \langle U', U \rangle = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$U' = -\tau_g T - \kappa_n V$$

olur. Böylece $\{T, V, U\}$ Darboux çatısının değişimi matris formunda

$$\begin{bmatrix} T' \\ V' \\ U' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_g & 0 & \kappa_n \\ 0 & -\kappa_g & \tau_g \\ -\tau_g & -\kappa_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ V \\ U \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

biçiminde yazılır. Burada κ_g , κ_n ve τ_g fonksiyonlarına, sırasıyla, α eğrisinin jeodezik eğriliği, normal eğriliği ve jeodezik torsiyonu denir.

Doğrultman boyunca direktrise göre striksiyon çizgisinin yeri μ reel değerli bir parametre olmak üzere

$$\beta(s) = \alpha(s) - \mu V(s) \quad (3.6)$$

biçiminde verilir. μ parametresini belirlemek için

$$\langle \beta'(s), V'(s) \rangle = 0 \quad (3.7)$$

ile verilen striksiyon çizgisinin tanımı kullanılacaktır. (3.6) denkleminin türevi alınır

$$\beta' = \alpha' - \mu' V - \mu V'$$

elde edilir. Bu denklemde $T = \alpha'$ eşitliği kullanılırsa

$$\beta' = T - \mu' V - \mu V' \quad (3.8)$$

elde edilir. (3.8) denklemi (3.7) denkleminde yerine yazılırsa

$$< T, V' > -\mu' < V, V' > -\mu < V', V' > = 0$$

elde edilir. Böylece

$$\mu = \frac{< T, V' >}{< V', V' >}$$

elde edilir. Elde edilen eşitlikte $V' = -\kappa_g V + \tau_g U$ olduğu kullanılırsa

$$\mu = \frac{< T, -\kappa_g V + \tau_g U >}{< -\kappa_g V + \tau_g U, -\kappa_g V + \tau_g U >}$$

eşitliğinden

$$\mu = -\frac{\kappa_g}{\tau_g^2} \quad (3.9)$$

dır.

Aynı zamanda striksiyon çizgisinin $\{T, V, U\}$ doğrultman üçlüsüne göre birinci mertebeden konum değişimi de

$$\beta' = \lambda_1 T + \lambda_2 V + \lambda_3 U$$

biçiminde ifade edilir. Buna göre

$$\lambda_1 = < \beta', V >, \\ \lambda_2 = < \beta', T >, \\ \lambda_3 = < \beta', U >$$

olduğundan

$$\beta' = (< \beta', V >)T + (< \beta', T >)V + (< \beta', U >)U \quad (3.10)$$

biçiminde yazılır. (3.10) denkleminde birinci parantezdeki katsayıyı hesaplamak

için (3.8) denklemi kullanılırsa,

$$\langle \beta', V \rangle = \langle T - \mu'V - \mu V', V \rangle \quad (3.11)$$

eşitliğinden

$$\langle \beta', V \rangle = 1$$

elde edilir. (3.10) denkleminde ikinci parantezdeki katsayıyı hesaplamak için (3.8) ve (3.5) denklemleri kullanılırsa

$$\langle \beta', T \rangle = \langle T - \mu'V - \mu V', T \rangle$$

eşitliğinden

$$\langle \beta', T \rangle = -\mu' + \mu\kappa_g$$

bulunur. Burada (3.9) denklemi göz önüne alınırsa

$$\langle \beta', T \rangle = -\mu' - \frac{\kappa_g^2}{\tau_g^2} \quad (3.12)$$

olur. (3.10) denkleminde üçüncü parantezdeki katsayıyı hesaplamak için (3.8) ve (3.5) denklemleri kullanılırsa

$$\langle \beta', U \rangle = \langle T - \mu'V - \mu V', U \rangle \quad (3.13)$$

eşitliğinden

$$\langle \beta', U \rangle = \frac{\kappa_g}{\tau_g}$$

elde edilir. O halde; $\Omega = 1$, $\Gamma = \mu' + \frac{\kappa_g^2}{\tau_g^2}$ ve $\Delta = \frac{\kappa_g}{\tau_g}$ olmak üzere (3.11), (3.12) ve (3.13) denklemlerinden

$$\beta' = \Omega T - \Gamma V + \Delta U \quad (3.14)$$

biçiminde yazılır. Burada Ω , Γ ve Δ fonksiyonları $X(t, \nu)$ Lorentz regle yüzeyini karakterize eder. Bu fonksiyonlara $X(t, \nu)$ Lorentz regle yüzeyinin eğrilik fonksiyonları denir.

Eğer β eğrisi null kabul edilir ve (3.14) denklemi göz önüne alınırsa

$$\langle T - \left(\mu' + \frac{\kappa_g^2}{\tau_g^2} \right) V + \frac{\kappa_g}{\tau_g} U, T - \left(\mu' + \frac{\kappa_g^2}{\tau_g^2} \right) V + \frac{\kappa_g}{\tau_g} U \rangle = 0$$

eşitliğinden

$$\mu' = -\frac{\kappa_g^2}{2\tau_g^2}$$

bulunur. Böylece, bu eşitliğin her iki yanı integre edilirse

$$\mu = -\frac{1}{2} \int \frac{\kappa_g^2}{\tau_g^2} dt + c$$

olur. Burada c integral sabitidir. Buna göre (3.6) denklemi

$$\beta(s) = \alpha(s) - \left(-\frac{1}{2} \int \frac{\kappa_g^2}{\tau_g^2} dt + c \right) V(s)$$

biçiminde yazılır.

Şimdi yüzeyin $\{T, V, U\}$ Darboux çatısı ile α eğrisinin $\{T, N, W\}$ null çatısı arasındaki ilişki incelenecektir.

Bunun için ilk olarak (3.1) ve (3.5) denklemleri karşılaştırılırsa

$$\kappa_g T + \kappa_n U = k_1 T + k_2 W \quad (3.15)$$

bulunur. (3.15) denkleminin her iki yanı U ile iç çarpılırsa

$$\kappa_g \langle T, U \rangle + \kappa_n \langle U, U \rangle = k_1 \langle T, U \rangle + k_2 \langle W, U \rangle$$

eşitliğinden

$$\langle W, U \rangle = \frac{\kappa_n}{k_2} \quad (3.16)$$

ve V ile iç çarpılırsa

$$\kappa_g \langle T, V \rangle + \kappa_n \langle U, V \rangle = k_1 \langle T, V \rangle + k_2 \langle W, V \rangle$$

eşitliğinden,

$$\langle W, V \rangle = \frac{\kappa_g - k_1}{k_2} \quad (3.17)$$

bulunur. Diğer taraftan $\langle T', N \rangle$ katsayısı için (3.1) denkleminden yararlanılırsa

$$\langle T', N \rangle = \langle k_1 T + k_2 W, N \rangle$$

eşitliğinden

$$\langle T', N \rangle = k_1 \quad (3.18)$$

bulunur. $\langle U, N \rangle$ katsayısı için (3.5) denkleminin birinci satırı ve (3.18) denklemini kullanılırsa

$$\langle U, N \rangle = -\frac{\kappa_g - k_1}{\kappa_n} \quad (3.19)$$

bulunur. Son olarak $\langle V, N \rangle$ katsayısını belirlemek için Lagrange formülü kullanılırsa

$$\langle V, N \rangle = -\frac{(\kappa_g - k_1)^2}{\kappa_n(k_2 + \kappa_n)} \quad (3.20)$$

elde edilir. Böylece (3.16), (3.17), (3.19) ve (3.20) denklemlerinden

$$\begin{bmatrix} T \\ N \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{(\kappa_g - k_1)^2}{\kappa_n(k_2 + \kappa_n)} & 1 & -\frac{\kappa_g - k_1}{\kappa_n} \\ \frac{\kappa_g - k_1}{k_2} & 0 & \frac{\kappa_n}{k_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ V \\ U \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

elde edilir. Burada (3.16) denklemini ve Lagrange formülü göz önüne alınırsa

$$\langle W, U \rangle = \langle V \times T, N \times T \rangle = 1$$

eşitliğinden

$$\kappa_n = k_2$$

bulunur. Böylece α eğrisinin $\{T, N, W\}$ null çatısı ile yüzeyin $\{T, V, U\}$ Darboux

çatısı arasındaki ilişki matris formunda

$$\begin{bmatrix} T \\ N \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{(\kappa_g - k_1)^2}{2k_2^2} & 1 & -\frac{\kappa_g - k_1}{k_2} \\ \frac{\kappa_g - k_1}{k_2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ V \\ U \end{bmatrix}$$

biçiminde verilir. Tersine, yüzeyin $\{T, V, U\}$ Darboux çatısı, α eğrisinin $\{T, N, W\}$ null çatısına göre

$$\begin{bmatrix} T \\ V \\ U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{(\kappa_g - k_1)^2}{2k_2^2} & 1 & \frac{\kappa_g - k_1}{k_2} \\ -\frac{\kappa_g - k_1}{k_2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ W \end{bmatrix}$$

biçiminde ifade edilir.

3.2. Merkezi Normal Lorentz Yüzey

Şimdi β eğrisini dayanak eğrisi kabul eden ve doğrultmanı U olan merkezi normal Lorentz yüzey göz önüne alınsın. Merkezi normal Lorentz yüzey, s ve ν reel parametreler olmak üzere

$$X_U(s, \nu) = \beta(s) + \nu U(s)$$

denklemleriyle verilir. Bu yüzeyin striksiyon çizgisinin yeri

$$\beta_U(s) = \beta(s) - \mu_U U(s) \quad (3.22)$$

biçiminde ifade edilir. Böylece merkezi normal Lorentz yüzey için, striksiyon çizgisinin tanımını kullanılırsa

$$\langle \beta'_U(s), U'(s) \rangle = 0 \quad (3.23)$$

olur. (3.22) denkleminin s ye göre türevi alınırsa

$$\beta'_U(s) = \beta'(s) - \mu'_U(s)U(s) - \mu_U(s)U'(s) \quad (3.24)$$

elde edilir. (3.24) denklemi (3.23) denkleminde yerine yazılırsa

$$< \beta'(s) - \mu'_U(s)U(s) - \mu_U(s)U'(s), U'(s) > = 0$$

eşitliğinden

$$\mu_U(s) = \frac{< \beta'(s), U'(s) >}{< U'(s), U'(s) >} \quad (3.25)$$

elde edilir. (3.14) ve (3.5) denklemleri (3.25) denkleminde kullanılırsa

$$\mu_U = \frac{\kappa_g^2 - 2\kappa_n\tau_g}{4\tau_g\kappa_n}$$

bulunur.

Merkezi normal Lorentz yüzeyin striksiyon çizgisinin birinci mertebeden konum değişimi (3.24) denkleminde verilmişti. Ayrıca merkezi normal Lorentz yüzeyin striksiyon çizgisinin birinci mertebeden konum değişimi $\{T, N, W\}$ null çatısına göre

$$\beta'_U = aT + bN + cW$$

biçiminde ifade edilir. Burada a, b ve c katsayıları, sırasıyla,

$$a = < \beta'_U, N >,$$

$$b = < \beta'_U, T >,$$

$$c = < \beta'_U, W >$$

olup

$$\beta'_U = (< \beta'_U, N >)T + (< \beta'_U, T >)N + (< \beta'_U, W >)W \quad (3.26)$$

şeklinde yazılır.

(3.26) denkleminde birinci parantezdeki katsayıyı hesaplamak için (3.19) denklemi, (3.5) denkleminin üçüncü satırı ve (3.24) denklemi kullanılırsa

$$< \beta'_U, N > = < \beta' - \mu'_U U - \mu_U U', N >$$

eşitliğinden

$$< \beta'_U, N > = \frac{(\kappa_g - k_1)^2}{k_2^2} \left(\frac{\mu_U}{2} - \frac{\kappa_g^2}{4\tau_g^2} \right) - \frac{(\kappa_g - k_1)}{k_2} \left(\frac{\kappa_g}{\tau_g} - \mu'_U \right) + \mu_U \tau_g + 1$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.26) denkleminde ikinci parantezdeki katsayıyı hesaplamak için (3.19) denklemi, (3.5) denklemi ve (3.24) denklemi kullanılırsa

$$< \beta'_U, T > = < \beta' - \mu'_U U - \mu_U U', T >$$

eşitliğinden

$$< \beta'_U, T > = \mu_U k_2 - \frac{\kappa_g^2}{2\tau_g^2}$$

elde edilir. Son olarak (3.26) denkleminde üçüncü parantezdeki katsayıyı hesaplamak için (3.19) denklemi, (3.5) denklemi ve (3.24) denklemi kullanılırsa

$$< \beta'_U, W > = < \beta' - \mu'_U U - \mu_U U', W >$$

eşitliğinden

$$< \beta'_U, W > = \frac{\kappa_g}{\tau_g} - \mu'_U + \left(\frac{\kappa_g - k_1}{k_2} \right) \left(\mu_U k_2 - \frac{\kappa_g^2}{2\tau_g^2} \right)$$

elde edilir. Böylece, (3.24) denklemi,

$$\Psi = \frac{\kappa_g - k_1}{k_2}$$

seçilirse

$$\begin{aligned} \Omega_U &= \Psi^2 \left(\frac{\mu_U}{2} - \frac{1}{4} \Delta^2 \right) - \Psi (\Delta - \mu'_U) + \mu_U \tau_g + 1, \\ \Gamma_U &= \mu_U k_2 - \frac{1}{2} \Delta^2 \end{aligned}$$

ve

$$\Delta_U = \Delta - \mu'_U + \Psi \left(\mu_U k_2 - \frac{1}{2} \Delta^2 \right)$$

olmak üzere

$$\beta'_u = \Omega_U T + \Gamma_U N + \Delta_U W$$

biçiminde yazılır. Burada Ω_U , Γ_U and Δ_U fonksiyonları $X_U(s, \nu)$ merkezi normal Lorentz yüzeyini karakterize eder. Bu fonksiyonlar $X_U(s, \nu)$ merkezi normal Lorentz yüzeyinin eğrilik fonksiyonları olarak isimlendirilir.

Şimdi, lightlike doğrultmanlı Lorentz regle yüzey ve bu yüzeyin asli normalinin oluşturduğu merkezi normal Lorentz yüzey ile ilgili bir örnek aşağıdaki gibi verilebilir.

Örnek 3.1. $\mathbb{R}_1^3$, üç boyutlu Minkowski uzayında

$$\begin{aligned} \alpha: I \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_1^3 \\ s &\rightarrow \alpha(s) = (s, \sin s, -\cos s) \end{aligned}$$

null eğrisi

$$T = (1, \cos s, \sin s), \quad N = (-1, \sin s, -\cos s) \quad \text{ve} \quad W = (-1, \sin s - \cos s, -\sin s - \cos s)$$

olmak üzere $\mathcal{F} = \{T, N, W\}$ null çatısı ile birlikte verilsin. Bu çatı

$$\begin{aligned} \langle T, T \rangle &= \langle N, N \rangle = \langle T, W \rangle = \langle N, W \rangle = 0, \\ \langle T, N \rangle &= \langle W, W \rangle = 1, \quad W = N \times T \end{aligned}$$

özelliklerini sağlar. Böylece $\mathcal{F}$ çatısına göre α eğrisinin Frenet denklemleri

$$T' = -T - W,$$

$$N' = N - W,$$

$$W' = T + N$$

biçiminde elde edilir. Diğer taraftan dayanak eğrisi $\alpha(s) = (s, \sin s, -\cos s)$ ve doğrultman vektörü $V = (-1, -\sin s, \cos s)$ olan

$$X(s, t) = (s, \sin s, -\cos s) + t(-1, -\sin s, \cos s)$$

Lorentz regle yüzeyi göz önüne alınsın. Buna göre yüzeyin Darboux çatısı

$$T = (1, \cos s, \sin s), \quad V = (-1, -\sin s, \cos s), \quad \text{ve} \quad U = (1, \sin s + \cos s, \sin s - \cos s)$$

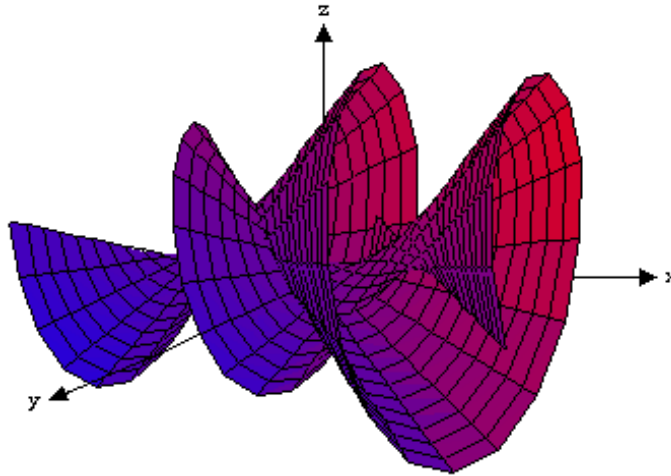
olacak şekilde oluşturulur. Bu üçlü

$$\begin{aligned} \langle T, T \rangle &= \langle V, V \rangle = \langle V, U \rangle = \langle T, U \rangle = 0 \\ \langle T, V \rangle &= \langle U, U \rangle = 1 \end{aligned}$$

özelliklerini sağlar. Buna göre $X(s, t)$ Lorentz regle yüzeyin $\{T, V, U\}$ Darboux çatısının değişimi

$$\begin{aligned} T' &= T - U, \\ V' &= -V - U, \\ U' &= T + V \end{aligned}$$

biçiminde elde edilir.



Şekil 3.1. $X(s, t)$ Lorentz regle yüzeyi.

α eğrisinin $\{T, N, W\}$ null çatısı ile yüzeyin $\{T, V, U\}$ Darboux çatısı arasındaki

ilişki (3.21) denkleminde matris formunda

$$\begin{bmatrix} T \\ N \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ V \\ U \end{bmatrix}$$

biçiminde bulunur. Buna göre $X(s, t)$ Lorentz regle yüzeyinin dağılma parametresi

$$\delta = -\frac{1}{2}$$

ve eğrilik fonksiyonları da (3.11), (3.12) ve (3.13) denklemlerinden

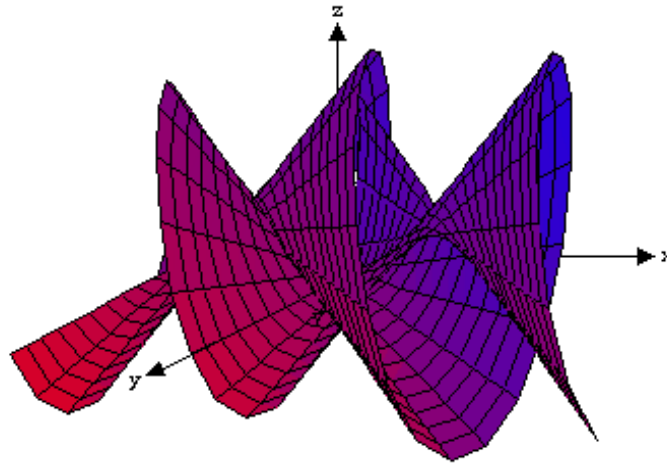
$$\Delta = -1, \Gamma = 1 \text{ ve } \Omega = 1$$

şeklinde bulunur.

Şimdi Darboux çatısındaki U vektörünün hareketi ile oluşturulan

$$X_U(s, t) = (s, \sin s, -\cos s) + t(1, \sin s + \cos s, \sin s - \cos s)$$

merkezi normal Lorentz yüzeyi göz önüne alınsın.



Şekil 3.2. $X_U(s, t)$ Merkezi normal Lorentz yüzey.

Buna göre $\alpha(s) = (s, \sin s, -\cos s)$ eğrisinin κ_g jeodezik eğriliği, κ_n normal eğriliği

ve τ_g jeodezik torsiyonu, sırasıyla,

$$\kappa_g = 1, \kappa_n = -1 \text{ ve } \tau_g = -1$$

biçiminde elde edilir. Sonuç olarak $X_U(s, t)$ merkezi normal Lorentz yüzeyin dağılma parametresi

$$\delta = -1$$

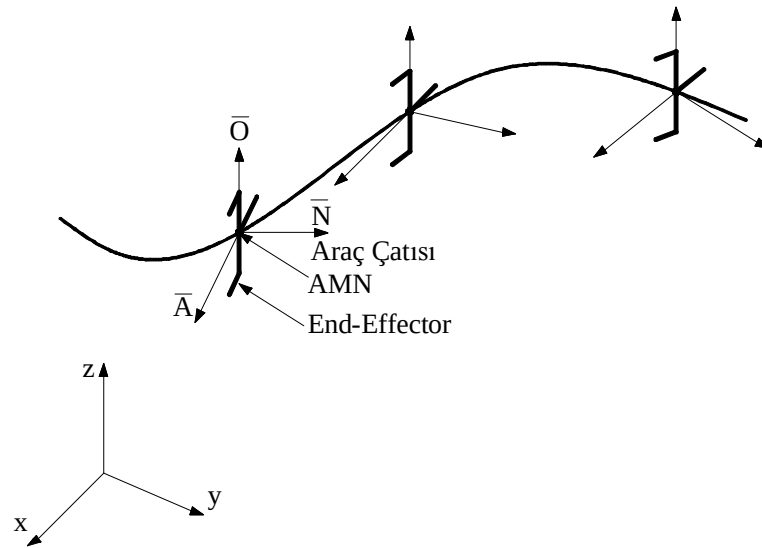
ve eğrilik fonksiyonları da

$$\Delta_U = -\frac{3}{4}, \Gamma_U = -\frac{1}{4} \text{ ve } \Omega_U = -\frac{9}{4}$$

şeklinde bulunur.

4. ÜÇ BOYUTLU MINKOWSKI UZAYDA BİR ROBOT END-EFFECTORÜN HAREKETİ

Bu bölüm robot yörünge planlaması için üçüncü bölüm de verilen bir Lorentz regle yüzeyin eğrilik teorisinin uygulaması olacaktır. İlk önce, bir robot yörüngesinin bir Lorentz regle yüzey kullanılarak nasıl temsil edilebileceği tartışıldı. Daha sonra bir Lorentz regle yüzeyin eğrilik teorisi, bir robot end-effector hareketinin diferansiyel denklemini belirlemek için kullanıldı.



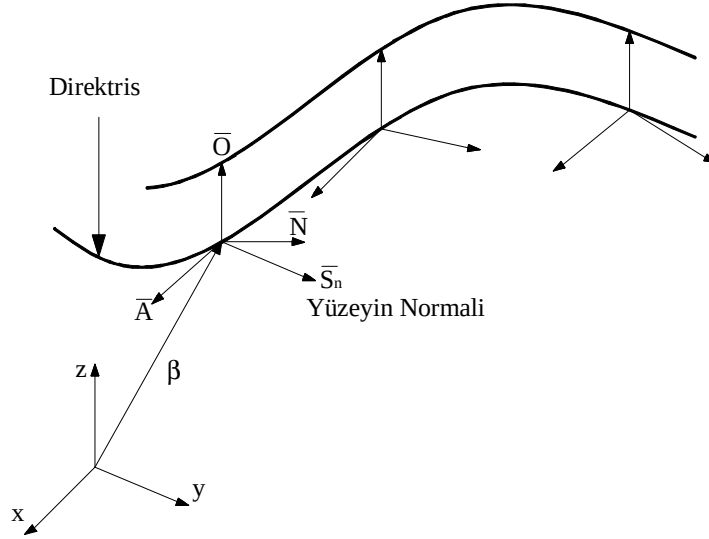
Şekil 4.1. Robot yörüngesi

Bir tipik robot yörüngesi Şekil 4.1 de gösterilmiştir. Robot end-effectorün yeri ve yönü, araç merkez noktası ve araç çatısı kullanılarak tamamıyla belirlenir. Araç çatısı; $\bar{0}$ yön vektörü, $\bar{N}$ normal vektör ve $\bar{A}$ yaklaşım vektöründen oluşur. Araç merkez noktası araç çatısının orijini olarak seçilebilir.

4.1. Bir Robot Yörüngesinin Temsili

Şekil 4.2, Şekil 4.1 deki robot yörüngesinin bir Lorentz regle yüzeyi kullanarak nasıl temsil edilebileceğini gösterir. Üç regle yüzey araç kontrol noktası ile çizilen ortak bir direktrisi paylaşırken araç çatısının üç vektörünün herbiri bir Lorentz

regle yüzey meydana getirir.



Şekil 4.2. Lorentz regle yüzey

Robot yörüngesini temsil etmek için üç Lorentz regle yüzeyini de kullanmak gerekmez, birini kullanmak yeterlidir. Şekil 4.2 de gösterildiği gibi $\bar{O}$ yön vektörü ile meydana gelen Lorentz regle yüzey, yörüngeyi temsil eden yüzey olarak seçilebilir.

4.2. Referans Çatıları

End-effector hareketi çalışmalarında dört önemli referans çatısı vardır. Bu çatılar araç çatısı, yüzey çatısı, Darboux çatısı ve null çatıdır. Araç çatısı, Darboux çatısı ve null çatıdan daha önce bahsedilmişti. Yüzey çatısı ise $\bar{O}$ yön vektörü ile tanımlanır. Yüzey normali S_n ve yüzey binormali S_b olmak üzere $\{\bar{O}, S_n, S_b\}$ üçlüsü

$$\begin{aligned}\bar{O} &= V, \\ S_b &= \frac{1}{\langle Y, V \rangle} \left\{ Y - \frac{\langle Y, Y \rangle}{2 \langle Y, V \rangle} V \right\} \quad Y \in T_{\alpha(t)}M, \quad \langle Y, V \rangle \neq 0, \\ S_n &= S_b \times \bar{O}\end{aligned}$$

biçiminde tanımlıdır. Bu çatı

$$\begin{aligned} \langle \bar{0}, \bar{0} \rangle &= \langle S_b, S_b \rangle = \langle \bar{0}, S_n \rangle = \langle S_b, S_n \rangle = 0, \\ \langle \bar{0}, S_b \rangle &= \langle S_n, S_n \rangle = 1 \end{aligned}$$

şartlarını sağlar. $\{ \bar{0}, \bar{A}, \bar{N} \}$ araç çatısı da $\bar{0} = V$ olmak üzere aşağıdaki şartları sağlayacak biçimde seçilebilir:

$$\begin{aligned} \langle \bar{0}, \bar{0} \rangle &= \langle \bar{A}, \bar{A} \rangle = \langle \bar{A}, \bar{N} \rangle = \langle \bar{0}, \bar{N} \rangle = 0, \\ \langle \bar{0}, \bar{A} \rangle &= \langle \bar{N}, \bar{N} \rangle = 1, \quad \bar{N} = \bar{A} \times \bar{0}. \end{aligned}$$

O halde $\{ \bar{0}, \bar{A}, \bar{N} \}$ araç çatısı ile $\{ \bar{0}, S_n, S_b \}$ yüzey çatısı arasındaki bağıntı matris formunda

$$\begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{A} \\ \bar{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \langle \bar{A}, S_b \rangle & \langle \bar{A}, S_n \rangle & 1 \\ \langle \bar{N}, S_b \rangle & \langle \bar{N}, S_n \rangle & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{0} \\ S_n \\ S_b \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

biçiminde verilir.

$\{ \bar{0}, S_n, S_b \}$ yüzey çatısı ile $\{ T, V, U \}$ Darboux çatısı arasındaki bağıntı matris formunda

$$\begin{bmatrix} \bar{0} \\ S_n \\ S_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \langle S_n, T \rangle & -1 \\ 1 & \langle S_b, V \rangle & \langle S_b, U \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ V \\ U \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

biçiminde elde edilir. Eğer (4.2) denklemini (4.1) de kullanılırsa $\{ \bar{0}, \bar{A}, \bar{N} \}$ araç çatısı ve $\{ T, V, U \}$ Darboux çatısı arasındaki bağıntı

$$\begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{A} \\ \bar{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & l_1 & l_2 \\ 0 & l_3 & l_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ V \\ U \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\begin{aligned}
l_1 &= \langle S_b, \bar{A} + T \rangle + \langle \bar{A}, S_n \rangle \langle S_n, T \rangle \\
l_2 &= \langle S_b, U \rangle - \langle \bar{A}, S_n \rangle \\
l_3 &= \langle \bar{N}, S_b \rangle + \langle \bar{N}, S_n \rangle \langle S_n, T \rangle \\
l_4 &= - \langle \bar{N}, S_n \rangle
\end{aligned}$$

biçimindedir.

4.3. Robot End-Effector Hareketinin Birinci Mertebeden Diferansiyel Özellikleri

Robot end-effector hareketi, araç merkez noktasının lineer hareketi ve araç çatısının hareketi ile tanımlanır. Bu bölümde, araç merkez noktasının ve araç çatısının diferansiyel özellikleri;

i) 3. Bölüm de verilen Lorentz regle yüzeyin eğrilik teorisine

ii) 4.2 de verilen dört referans çatısı arasındaki ilişkiler

kullanılarak çalışılmıştır.

α eğrisi araç merkez noktasının yeri olduğundan (3.8) denklemi yeniden düzenlenirse araç merkez noktasının birinci mertebeden konum değişimi

$$\alpha' = \beta' + \mu'V + \mu V' \quad (4.4)$$

biçiminde elde edilir.

(3.14) ve (3.5) denklemleri (4.4) denkleminde kullanılırsa

$$\alpha' = T - (\Gamma - \mu' + \kappa_g \mu)V + (\Delta + \mu\tau_g)U \quad (4.5)$$

bulunur. α' teğet vektörü

$$\Lambda_1 = \frac{\mu' l_4 - l_4 \Gamma - l_4 l_1 + l_3 l_2 - \mu \kappa_g l_4 - l_3 \Delta - \mu \tau_g l_3}{l_4}$$

ve

$$\Lambda_2 = \frac{\mu\tau_g - l_2 + \Delta}{l_4}$$

olmak üzere

$$\alpha' = \Lambda_1 \bar{0} + \bar{A} + \Lambda_2 \bar{N} \quad (4.6)$$

biçiminde $\{\bar{0}, \bar{A}, \bar{N}\}$ araç çatısının lineer birleşimi olarak yazılabilir.

Böylece $\{\bar{0}, \bar{A}, \bar{N}\}$ araç çatısının birinci mertebeden diferansiyel özellikleri için (4.3) denkleminin türevi alınır ve bulunan ifadede (3.5) denklemi kullanılırsa,

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{A} \\ \bar{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\kappa_g & \tau_g \\ -l_2 \tau_g & l'_1 - l_1 \kappa_g - l_2 \kappa_n & l'_2 + l_1 \tau_g \\ -l_4 \tau_g & l'_3 - l_3 \tau_g - l_4 \kappa_n & l'_4 + l_3 \tau_g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ V \\ U \end{bmatrix}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} l'_1 &= \langle S'_b, \bar{A} + T \rangle + \langle S_b, \bar{A}' + T' \rangle + (\langle \bar{A}', S_n \rangle + \langle \bar{A}, S'_n \rangle) \langle S_n, T \rangle \\ &\quad + \langle \bar{A}, S_n \rangle (\langle S'_n, T \rangle + \langle S_n, T' \rangle) \\ l'_2 &= \langle S'_b, U \rangle + \langle S_b, U \rangle - \langle \bar{A}', S_n \rangle - \langle \bar{A}, S'_n \rangle \\ l'_3 &= \langle \bar{N}', S_b \rangle + (\langle \bar{N}', S_n \rangle + \langle \bar{N}, S'_n \rangle) \langle S_n, T \rangle + \\ &\quad \langle \bar{N}, S_n \rangle (\langle S'_n, T \rangle + \langle S_n, T' \rangle) \\ l'_4 &= -\langle \bar{N}', S_n \rangle - \langle \bar{N}, S'_n \rangle \end{aligned}$$

dir.

Örnek 4.1. $X(s, t) = (s, \sin s, -\cos s) + t(-1, -\sin s, \cos s)$ lightlike doğrultmanlı Lorentz regle yüzeyi göz önüne alınsın. Buna göre $\{\bar{0}, S_n, S_b\}$ yüzey üçlüsü

$$\begin{aligned} \bar{0} &= (-1, -\sin s, \cos s), \\ S_b &= (1, -\cos s, -\sin s), \\ S_n &= (1, \sin s - \cos s, -\sin s - \cos s) \end{aligned}$$

şeklinde belirlenir. Burada $\{\bar{0}, S_n, S_b\}$ üçlüsü

$$\begin{aligned} \langle \bar{0}, \bar{0} \rangle &= \langle S_b, S_b \rangle = \langle \bar{0}, S_n \rangle = \langle S_b, S_n \rangle = 0, \\ \langle \bar{0}, S_b \rangle &= \langle S_n, S_n \rangle = 1 \end{aligned}$$

şartlarını sağlar. Benzer şekilde, $\{\bar{0}, \bar{A}, \bar{N}\}$ araç çatısı da $\bar{0} = V$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \bar{0} &= (-1, -\sin s, \cos s), \\ \bar{A} &= (5, 3 \cos s + 4 \sin s, 3 \sin s - 4 \cos s), \\ \bar{N} &= (-3, -\cos s - 3 \sin s, 3 \cos s - \sin s) \end{aligned}$$

şeklinde belirlenebilir. Burada $\{\bar{0}, \bar{A}, \bar{N}\}$ araç çatısı

$$\begin{aligned} \langle \bar{0}, \bar{0} \rangle &= \langle \bar{A}, \bar{A} \rangle = \langle \bar{A}, \bar{N} \rangle = \langle \bar{0}, \bar{N} \rangle = 0, \\ \langle \bar{0}, \bar{A} \rangle &= \langle \bar{N}, \bar{N} \rangle = 1, \quad \bar{N} = \bar{A} \times \bar{0} \end{aligned}$$

şartlarını sağlar.

O halde $\{\bar{0}, \bar{A}, \bar{N}\}$ araç çatısı ile $\{\bar{0}, S_n, S_b\}$ yüzey çatısı arasındaki bağıntı matris formunda

$$\begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{A} \\ \bar{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -8 & -4 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{0} \\ S_n \\ S_b \end{bmatrix}$$

biçiminde verilir.

Benzer olarak $\{\bar{0}, S_n, S_b\}$ yüzey çatısı ile $\{T, V, U\}$ Darboux çatısı arasındaki bağıntı matris formunda

$$\begin{bmatrix} \bar{0} \\ S_n \\ S_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ V \\ U \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Eğer (4.8) denklemini (4.7) de kullanılırsa $\{\bar{0}, \bar{A}, \bar{N}\}$ ve $\{T, V, U\}$

arasındaki bağıntı

$$\begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{A} \\ \bar{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ V \\ U \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Diğer taraftan $\{\bar{0}, \bar{A}, \bar{N}\}$ araç çatısının birinci mertebeden diferansiyel özellikleri için (4.9) denkleminin türevi alınır ve bulunan ifade de (3.5) denklemini kullanılırsa

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{A} \\ \bar{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ V \\ U \end{bmatrix}$$

elde edilir.

5. KAYNAKLAR

- Ayyıldız, N., Yücesan, A., 2006. On the scalar and dual formulations of the curvature theory of line trajectories in the Lorentzian space. *Journal of the Korean Mathematical Society*, 43, 1339 – 1355.
- Balgetir, H., Bektaş, M., Ergüt, M., 2003. Null scroll in the 3–dimensional Lorentzian space. *Applied Sciences*, 5, 1 – 5.
- Beem, J. K., Ehrlich, P. E., 1981. *Global Lorentzian Geometry*. Marcel Dekker, Inc., 460 p., New York.
- Choi, S.M., Ki, U.H., Suh, Y.J., 1998. On the Gauss map of null scrolls. *Tsukuba Journal of Mathematics*, 22, 273 – 279.
- Çiftçi, Ü., 2004. *Semi-Riemann Manifoldlarında Null Eğrilerin Geometrisi*. Yüksek Lisans Tezi, Süleyman Demirel Üniversitesi, 54 s., Isparta.
- Çöken A. C., Çiftçi, Ü., 2007. On null curves on surfaces and null vectors in Lorentz space. *SDÜ Fen Edebiyat Fakültesi Fen Dergisi*, 2(1), 111 – 116.
- Do Carmo, M. P., 1976. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, 503 p., New Jersey.
- Duggal, K. L., Bejancu, A., 1996. *Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian manifolds and Applications*. Kluwer Academic Publishers, 303 p., The Netherlands.
- Ersoy, S., Tosun, M., 2008. On the trajectory null scrolls in 3–dimensional Minkowski space-time E_1^3 . *Kyungpook Mathematical Journal*, 48, 81–92.
- Ferrandez, A., Gimenez, A., Lucas, P., 2001. Null helices in Lorentzian space forms, *International Journal of Modern Physics*, 16, 4845 – 4863.
- Graves, L.K., 1979. Codimension one isometric immersions between Lorentz spaces. *American Mathematical Society*, 252, 367 – 392.

- Guggenheimer H. W., 1977. Differential Geometry. Dover Publications, 378 p., New York.
- Hacısalıhoğlu, H., 2000. Diferensiyel Geometri. Hacısalıhoğlu Yayıncılık, 269 s., Ankara.
- Liu, H., 2009. Ruled surfaces with lightlike ruling in 3-Minkowski space. Journal of Geometry and Physics, 59, 74 – 78.
- Lopez, R., 2008. Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski Space. http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/0810/0810.3351v1.pdf. Erişim Tarihi: 06.10.2009.
- McCarthy, J.M., Roth B., 1981. The curvature theory of line trajectories in spatial kinematics. ASME Journal of Mechanical Design, 103, 718 – 724.
- McCarthy, J.M., 1987. On the scalar and dual formulations of the curvature theory of line trajectories. Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design, 109, 101 – 106.
- O'Neill, B., 1983. Semi-Riemann Geometry with Applications to Relativity. Academic Pres, 469 p., New York.
- O'Neill, B., 1997. Elementary Differential Geometry. Second Edition, Academic Press, Inc., 482 p., New York.
- Ryuh, B. S., 1989. Robot trajectory planning using the curvature theory of ruled surfaces. Doctoral dissertation, Purdue University, West Lafayette, Ind, 141 p., USA.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Tunahan TURHAN
Doğum Yeri ve Yılı : Alanya / ANTALYA, 1986
Medeni Hali : Bekar
Yabancı Dili : İngilizce



Eğitim Durumu :

Lise : A. Feyzi Alaettinoğlu Lisesi, 2000-2004
Lisans : Süleyman Demirel Üniversitesi, 2004-2008
Yüksek Lisans : Süleyman Demirel Üniversitesi, 2008 – 2010