

**T.C.
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KONİK METRİK UZAYLAR VE BU UZAYLARDA
SABİT NOKTA TEOREMLERİ**

**Tezi Hazırlayan
Mustafa Cemil BİŞGİN**

**Tezi Yöneten
Yrd. Doç. Dr. Abdulcabbar SÖNMEZ**

**Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi**

**Haziran 2010
KAYSERİ**

**T.C.
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KONİK METRİK UZAYLAR VE BU UZAYLARDA
SABİT NOKTA TEOREMLERİ**

**Tezi Hazırlayan
Mustafa Cemil BİŞGİN**

**Tezi Yöneten
Yrd. Doç. Dr. Abdulcabbar SÖNMEZ**

**Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi**

**Haziran 2010
KAYSERİ**

Yrd. Doç. Dr. Abdulcabbar SÖNMEZ danışmanlığında **Mustafa Cemil BİŞGİN** tarafından hazırlanan “**Konik Metrik Uzaylar Ve Bu Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri**” adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans** tezi olarak kabul edilmiştir.

11.06.2010

JÜRİ:

Başkan :Prof. Dr. Osman MUCUK



Üye :Prof. Dr. Hikmet ÖZARSLAN



Üye : Yrd. Doç. Dr. Abdulcabbar SÖNMEZ



ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulunun 15/06/2010 tarih ve 2010 / 19 - 03 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

15. / 06. / 2010



Prof. Dr. Nusret AYYILDIZ
Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

“ **Konik Metrik Uzaylar ve Bu Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri** ” konulu tez çalışmasının seçiminde, yürütülmesinde ve sonuçlandırılmasında yardımlarını esirgemeyen değerli hocam sayın **Yrd. Doç. Dr. Abdulcabbar SÖNMEZ**’e teşekkür ederim.

Maddi desteklerinden dolayı **TÜBİTAK**’a teşekkür ederim.

KONİK METRİK UZAYLAR VE BU UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Mustafa Cemil BİŞGİN
Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi, Haziran 2010
Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Abdulcabbar SÖNMEZ

ÖZET

Bu tezde ilk olarak konikler tanımlanıp bunların bazı özellikleri incelenecektir. Ardından bu tanımdan faydalanarak metrik uzayların genellemesi olan konik metrik uzaylar tanımlanıp metrik uzaylarda geçerli olan bazı özelliklerin konik metrik uzaylarda da geçerli olduğu gösterilecektir.

İkinci olarak konik metrik uzaylarda büzölme dönüşümleri için sabit nokta teoremleri ispatlanacaktır.

Üçüncü olarak bazı koşullar altında iki dönüşüm için ortak sabit nokta ve periyodik nokta teoremleri ispatlanacaktır.

Son olarak konikler üzerindeki normallik şartı ihmal edilerek sabit nokta ve ortak sabit nokta teoremleri ispatlanacaktır.

Anahtar Kelimeler: Konik, Konik Metrik, Sabit Nokta, Ortak Sabit Nokta, Periyodik nokta

CONE METRIC SPACES AND FIXED POINT THEOREMS ON THIS SPACES

Mustafa Cemil BİŞGİN

Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences

M.Sc. Thesis, June 2010

Thesis Supervisor: Assist. Prof. Abdulcabbar SÖNMEZ

ABSTRACT

In this thesis firstly we introduce cones and consider some properties of cones. After with the aid of this definition we introduce cone metric spaces, which generalize metric spaces and we demonstrate some properties of cone metric spaces are current, which hold true on metric spaces.

Secondly we prove fixed point theorems of contractive mappings on cone metric spaces.

Thirdly under some conditions we prove common fixed point and periodic point theorems for two maps on cone metric spaces.

Lastly we prove fixed point and common fixed point theorems by omitting normality of cones.

Keywords: Cone, Cone Metric, Fixed Point, Common Fixed Point, Periodic point

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	i
TEŞEKKÜR	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
SİMGELER	vi
1. BÖLÜM	
GİRİŞ	1
2. BÖLÜM	
GENEL BİLGİLER VE YARDIMCI TEOREMLER	3
2.1. Metrik Uzaylar	3
2.2. Vektör Uzayları	4
2.3. Normlu Vektör Uzayları	5
2.4. Konikler	6
2.5. Konik Metrik Uzaylar	10
3. BÖLÜM	
BÜZÜLME DÖNÜŞÜMLERİ VE SABİT NOKTA TEOREMLERİ	16
3.1. Büzülme(Daralma) Dönüşümleri	16
3.2. Sabit Nokta Teoremleri	16
4. BÖLÜM	
ORTAK SABİT NOKTA VE PERİYODİK NOKTA TEOREMLERİ	25
4.1. Ortak Sabit Nokta Teoremleri	25
4.2. Periyodik Nokta Teoremleri	37
5. BÖLÜM	
NORMALLİK ŞARTININ İHMAL EDİLME DURUMU	40
5.1. Normallik Şartı Gerektirmeyen Konikler İçin Sabit Nokta Teoremleri	40
KAYNAKLAR	49
ÖZGEÇMİŞ	50

SİMGELER

R : Reel sayılar kümesi

R^2 : Kompleks sayılar kümesi

N : Doğal sayılar kümesi

P^o : P koniğinin içi

$C_R([0,1])$: $[0,1]$ aralığından R ye sürekli fonksiyonlar kümesi

$C_R^2([0,1])$: $[0,1]$ aralığından R ye ikinci mertebeden sürekli türevlere sahip fonksiyonlar kümesi

$f(X)$: X kümesinin f fonksiyonu altındaki görüntüsü

$DF(x)$: F fonksiyonunun x değişkenine göre birinci mertebeden türevi

1. BÖLÜM

GİRİŞ

Reel veya kompleks sayılar teorisinde bir çok netice bu sayıların cebirsel özelliklerine bağlıdır. Mesela $a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ polinomu kompleks sayıların toplamı ve çarpımı yardımıyla teşkil edildiğinden burada yatan temel fikir cebirseldir. Bununla beraber Analizde bir çok netice reel veya kompleks sayıların cebirsel yapısına bağlı değildir. Mesela limit ve süreklilik kavramları topolojik kavramlardır. Çünkü limit ve süreklilik R veya R^2 deki topolojiye göre tarif edilir. Tariflerde esas olan husus da R veya R^2 de iki nokta arasındaki uzaklık kavramına dayanır.

İşte bu nedenle reel veya kompleks sayılar teorisindeki birçok sonucu elde etmemizi sağlayan uzaklık kavramını, daha genel hale getirmeyi ve onu herhangi bir soyut kümenin elemanlarına uygulamayı düşündüğümüzde aşikâr olarak metrik uzaylar teorisine girmiş oluruz.

Metrik fonksiyonları $d : X \times X \rightarrow R_+$ şeklinde tanımlanan fonksiyonlardır. Burada R özel bir Banach uzayıdır. O halde herhangi bir Banach uzayında R_+ nın yerine geçecek ve konik olarak adlandırılacak bir küme tanımlanıp metrik uzaylar genelleştirilebilir. Bu genelleştirme yardımıyla metrik uzaylarda geçerli olan özelliklerin konik metrik uzaylarda da geçerli olacağı görülebilir.

Sabit nokta teorisinin temeli olan sabit nokta problemi de şu şekilde ifade edilebilir. X bir küme A ve B de $A \cap B \neq \emptyset$ olacak şekilde X in boştan farklı iki alt kümesi olsun. $f : A \rightarrow B$ dönüşümünü göz önüne alalım. $x \in A$ için ne zaman $f(x) = x$ olur. İşte bu sorunun cevabı matematikte, verilen bir dönüşüm için kök bulma problemi ile eşdeğerdir. Bu teori analiz, topoloji ve geometrinin güzel bir karışımıdır. Bu teori

yalnızca matematięe deęil biyoloji, kimya, ekonomi, mühendislik, oyun teorisi ve fizięe de uygulanabilir. Sabit nokta teorisi

1-) Topolojik sabit nokta teorisi

2-) Metrik sabit nokta teorisi

3-) Ayrık sabit nokta teorisi

şeklinde  esas kısıma ayrılabilir.

Bu çalışmada sadece reel sayılara tanımlanan metrik fonksiyonu yerine reel sayılardan daha genel olan sıralı Banach uzaylarına konik metrik olarak isimlendirilen fonksiyon tanımlanacak ve bu tanımdan faydalanarak bu uzaylarda belli özellikleri taşıyan fonksiyonlar için sabit nokta teorisi incelenecektir.

2. BÖLÜM

GENEL BİLGİLER VE YARDIMCI TEOREMLER

Bu bölümde ilk olarak metrik uzaylar tanıtılacak ve bu uzaylarda yakınsak bir dizi ile Cauchy dizisinin tanımı verilecektir. İkinci olarak vektör uzayı kavramı tanımlanıp bu uzay üzerinde norm tanımlanacaktır. Son olarak sıralı Banach uzaylarında R_+ nın yerine geçebilecek bir alt küme tanımlanıp metrik uzayın genellemesi olan konik metrik uzay tanımlanacak ve metrik uzaylarda geçerli olan bazı özelliklerin konik metrik uzaylarda da geçerli olduğu gösterilecektir.

2.1. Metrik Uzaylar

Tanım 2.1.1.

X boştan farklı bir küme ve $d : X \times X \rightarrow R_+$, $(x, y) \mapsto d(x, y)$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall x, y, z \in X$ için

$$\mathbf{M1)} \quad d(x, y) > 0 \text{ ve } d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$\mathbf{M2)} \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$\mathbf{M3)} \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad (\text{Üçgen eşitsizliği})$$

şartları sağlanıyorsa d ye X üzerinde bir metrik ve (X, d) ikilisine de metrik uzay denir. Burada (M1)-(M3) aksiyomlarına metrik aksiyomları denir. (M3) aksiyomunu tekrar uygulayarak $\forall x, y, z_1, z_2, \dots, z_n \in X$ için

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, z_1) + d(z_1, y) \\ &\leq d(x, z_1) + d(z_1, z_2) + d(z_2, y) \\ &\vdots \\ &\leq d(x, z_1) + d(z_1, z_2) + \dots + d(z_n, y) \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu ifadeye genelleştirilmiş üçgen eşitsizliği denir.

Örnek 2.1.1.

$X = R$ olmak üzere $d : X \times X \rightarrow R_+$, $(x, y) \mapsto |x - y|$ şeklinde tanımlı d dönüşümü R üzerinde bir metriktir. Bu metriğe R üzerinde mutlak değer metriği denir.

Tanım 2.1.2.

(X, d) bir metrik uzay, (x_n) , X de bir dizi ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $n > n_0$ olduğunda $d(x_n, x_0) < \varepsilon$ olacak şekilde ε değerine bağlı bir n_0 doğal sayısı varsa (x_n) dizisi x_0 noktasına yakınsıyor denir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \text{ veya } x_n \rightarrow x_0 \text{ (} n \rightarrow \infty \text{)}$$

şekillerinden biri ile gösterilir.

Tanım 2.1.3.

(X, d) metrik uzay ve (x_n) , X de bir dizi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ olduğunda $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde ε değerine bağlı bir n_0 doğal sayısı varsa (x_n) dizisine X de bir Cauchy dizisi denir.

Tanım 2.1.4.

Bir (X, d) metrik uzayında ki her Cauchy dizisi X içinde bir limite sahip ise (X, d) uzayına tam metrik uzay denir.

2.2. Vektör Uzayları

Tanım 2.2.1

V boş olmayan, üzerinde vektörel toplama diyeceğimiz bir toplama ve skalerle (Reel sayılarla) çarpım tanımlanmış bir küme olsun. Simgesel olarak, vektörel toplama ve skalerle çarpım işlemleri,

$$x, y \in V \text{ için } x + y \in V$$

$r \in R$ ve $x \in V$ için $rx \in V$ şeklinde tanımlı olsun. V kümesi vektörel toplama ve skalerle çarpım işlemlerine göre kapalı olsun. Eğer $\forall x, y, z \in V$ ve $\forall a, b \in R$ için

$$\mathbf{V1)} \quad (x + y) + z = x + (y + z)$$

$$\mathbf{V2)} \quad x + 0 = 0 + x = x \text{ olacak şekilde bir } 0 \in V \text{ vardır.}$$

$$\mathbf{V3)} \quad x + x^* = x^* + x = 0 \text{ olacak şekilde bir } x^* \in V \text{ vardır.}$$

$$\mathbf{V4)} \quad x + y = y + x$$

$$\mathbf{V5)} \quad (a + b)x = ax + bx, \quad a(x + y) = ax + ay$$

$$\mathbf{V6)} \quad (ab)x = a(bx)$$

$$\mathbf{V7)} \quad 1 \in R \text{ için } 1x = x$$

şartları sağlanıyorsa V ye R üzerinde bir vektör uzayı denir. Burada $0 \in V$ sıfır vektörüdür.

2.3. Normlu Vektör Uzayları

Tanım 2.3.1.

X, R cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $\|\cdot\| : X \rightarrow R_+, x \mapsto \|x\|$ dönüşümü

$\forall x, y \in X$ ve $\forall a \in R$ için

$$\mathbf{N1)} \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\mathbf{N2)} \quad \|ax\| = |a|\|x\|$$

$$\mathbf{N3)} \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

özelliklerini sağlıyorsa bu dönüşüme X üzerinde bir norm $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de normlu vektör uzayı denir.

Bir $(X, \|\cdot\|)$ normlu vektör uzayında $\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ için

$$\|x_1 + x_2 + \dots + x_n\| \leq \|x_1\| + \|x_2\| + \dots + \|x_n\|$$

özelligi sağlanır.

Tanım 2.3.2.

$(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayı içinde bir dizi (x_n) ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\| = 0$$

ise (x_n) dizisi x_0 noktasına yakınsıyor denir. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ yada $x_n \rightarrow x_0 \quad (n \rightarrow \infty)$

şekillerinden biri ile gösterilir.

Tanım 2.3.3.

$(X, \|\cdot\|)$ normlu bir uzay ve bunun içinde bir dizi (x_n) olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ olduğunda $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ olacak şekilde ε değerine bağlı bir n_0 doğal sayısı varsa (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Tanım 2.3.4.

Bir $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında ki her Cauchy dizisi X içinde bir noktaya yakınsıyorsa bu $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayına tam normlu uzay veya Banach uzayı denir.

2.4. Konikler

$R_+ = [0, \infty)$ olmak üzere $a, b \in R$ için " $\leq$ " bağıntısı

$$a \leq b \Leftrightarrow b - a \in R_+$$

şeklinde tanımlanabilir. O halde Banach uzaylarında R_+ yerine geçebilecek uygun bir alt küme tanımlanabilirse bu uzaylarda sıralama yapılabilir. R^2 de kordinatları negatif olmayan vektörleri pozitif vektörler olarak adlandırabiliriz. Bu tip vektörler geometrik olarak R^2 de bir konik oluştururlar [1].

Tanım 2.4.1.

E her zaman reel Banach uzayı olsun. $P \subseteq E$ koniği $\forall \lambda \geq 0$ için $\lambda P \subseteq P$ ve $P \cap (-P) = \{0\}$ olacak şekilde kapalı ve konveks bir P kümesidir. Verilen bir P koniği için E Banach uzayı üzerindeki " $\leq$ " bağıntısını $\forall x, y \in E$ için

$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \in P$$

şeklinde tanımlayacağız. Burada $x < y$ ile $x \leq y$ fakat $x \neq y$ olduğu kastedilecektir. Ayrıca P^o boştan farklı olmak üzere $x < y$ ile $y - x \in P^o$ olduğu anlaşılacaktır. $(x_n), E$ de bir dizi olmak üzere $\forall n \in N$ için $x_n \leq x_{n+1}$ veya $x_n \geq x_{n+1}$ ise (x_n) dizisine monotondur denir. Bir $M \subseteq E$ kümesi verilsin. Eğer $\forall x \in M$ için $x \leq y$ olacak şekilde en az bir $y \in E$ varsa M kümesine üstten sınırlıdır denir. Benzer şekilde alttan sınırlı olma durumu da tanımlanabilir [2].

P koniği yardımıyla yapılan sıralama kısmi sıralama olmasına rağmen R üzerindeki tam sıralama yapısının bir çok özelliğine sahiptir. Yani

$$\text{i-)} \forall x \in E \text{ için } x \leq x$$

$$\text{ii-)} \forall x, y, z \in E \text{ için } x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$$

$$\text{iii-)} \forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in E \text{ için } x_1 \leq y_1 \wedge x_2 \leq y_2 \Rightarrow x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2$$

$$\text{iv-)} x, y \in P \text{ ve } a, b \in R_+ \text{ ise } ax + by \in P$$

özellileri vardır [1].

Tanım 2.4.2.

E reel Banach uzayı ve $P \subseteq E$ olsun. P koniktir $\Leftrightarrow$

$$\text{i)} P \text{ kapalı, boştan farklı, } P \neq \{0\}$$

$$\text{ii-)} a, b \in R_+ \text{ olmak üzere } x, y \in P \Rightarrow ax + by \in P$$

$$\text{iii-)} x \in P \text{ ve } -x \in P \text{ ise } x = 0$$

şartları sağlanır [3].

Tanım 2.4.3.

E bir reel Banach uzayı ve $P \subseteq E$ bir konik olsun. Bir $K > 0$ vardır öyle ki $\forall x, y \in E$ için $0 \leq x \leq y$ olması $\|x\| \leq K\|y\|$ olmasını gerektiriyorsa P koniğine normaldir denir. Yukarıda ki şartı sağlayan en küçük pozitif K sayısına P normal koniğinin normal sabiti denir [3].

Tanım 2.4.5.

Eğer üstten sınırlı ve artan her dizi yakınsak ise P koniğine düzgün konik denir. Yani bazı $y \in E$ değerleri için (x_n) dizisi

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq \dots \leq y$$

ise bu taktirde bir $x_0 \in E$ vardır öyle ki $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\| = 0$ olur. Buna denk olarak alttan sınırlı ve azalan her dizi yakınsak ise P ye düzgün konik denir [3].

Lemma 2.4.1.

Her düzgün konik normaldir [4].

İspat

Kabul edelim ki P normal olmayan düzgün konik olsun. $\forall n \geq 1$ için $s_n, t_n \in P$ olmak üzere $t_n - s_n \in P$ alalım. P normal olmadığından $\forall n \geq 1$ için

$$s_n \leq t_n \Rightarrow n^2 \|t_n\| \leq \|s_n\|$$

yazılabilir. Burada $\forall n \geq 1$ için $y_n = \frac{t_n}{\|t_n\|}$ ve $x_n = \frac{s_n}{\|t_n\|}$ olarak alalım. P bir konik

olduğundan (ii) şartı gereği $y_n - x_n = \frac{t_n - s_n}{\|t_n\|} \in P$ olacaktır. Burada $\|y_n\| = 1$ ve

$\|x_n\| = \frac{\|s_n\|}{\|t_n\|} \geq n^2$ olup $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \|y_n\|$ yakınsak ve P kapalı olduğundan bir $y \in P$ vardır

öyleki $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} y_n = y$ (Normlu yakınsak her seri yakınsak olduğundan) yazılabilir. Diğer taraftan

$$0 \leq x_1 \leq x_1 + \frac{x_2}{2^2} \leq x_1 + \frac{x_2}{2^2} + \frac{x_3}{3^2} \leq \dots \leq y$$

olup P düzgün konik olduğundan her artan ve üstten sınırlı dizi yakınsaktır. Yani

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x_n$ yakınsaktır. Diğer taraftan yakınsak her seride genel terimin limiti sıfıra

gideceğinden $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} x_n = 0$ olur. Norm fonksiyonu sürekli olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \|x_n\| = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} x_n \right\| = 0$$

olup $\|x_n\| \geq n^2$ olacağından bu bir çelişkidir. O halde her düzgün konik normaldir.

Lemma 2.4.2.

$K < 1$ normal sabitine sahip normal konik yoktur [4].

İspat

$P, K < 1$ normal sabitine sahip normal konik olsun. Sıfırdan farklı $x \in P$ ve $0 < \varepsilon < 1$

olacak şekildeki ε değerleri için $K < 1 - \varepsilon$ olsun. $(1 - \varepsilon)x \leq x \Rightarrow (1 - \varepsilon)\|x\| \leq K\|x\|$ olup

bu bir çelişkidir. O halde $K \geq 1$ olmalıdır.

Örnek 2.4.1.

$E = C_R[0,1]$ supremum normu ile verilsin. $P = \{f \in E : f \geq 0\}$ alalım. O zaman $P, K = 1$ normal sabitli normal koniktir.

Şimdi elemanları E de olan alttan sınırlı ve azalan bir dizi E de yakınsak olmasın

$$x \geq x^2 \geq x^3 \geq \dots \geq 0$$

($x = 1$ ve $x \in [0,1]$ için limitler farklıdır.) olabileceğinden Lemma 2.4.1. in tersi doğru değildir [4].

Önerme 2.4.1.

$\forall k > 1$ için $K > k$ olacak şekilde normal sabitli normal konik vardır [4].

İspat

$k > 1$ verilsin. $E = \left\{ ax + b : a, b \in R, x \in \left[1 - \frac{1}{k}, 1 \right] \right\}$ reel vektör uzayını supremum normu

ile ve $P = \{ax + b : a \leq 0, b \geq 0\} \subseteq E$ kümesini göz önüne alalım. Öncelikle P nin düzgün konik olduğunu gösterelim. Çünkü Lemma 2.4.1. gereği her düzgün konik normaldir. $(a_n x + b_n)$ artan ve üstten sınırlı bir dizi olsun. Yani bir $cx + d \in E$ vardır

öyle ki $\forall x \in \left[1 - \frac{1}{k}, 1 \right]$ için

$$a_1 x + b_1 \leq a_2 x + b_2 \leq \dots \leq a_n x + b_n \leq cx + d$$

olur. Burada (a_n) ve (b_n) R de iki dizidir. Dolayısıyla buradan

$$b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq d \text{ ve } a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq c$$

elde edilir. R de monoton ve sınırlı her dizi yakınsak olacağından (a_n) ve (b_n) dizileri yakınsaktır. O halde $a_n \rightarrow a$ ve $b_n \rightarrow b$ olacak şekilde $a, b \in R$ vardır. O zaman $ax + b \in P$ olup $a_n x + b_n \rightarrow ax + b$ olur. Üstten sınırlı ve artan her dizi yakınsak olacağından P düzgün dolayısıyla da normaldir. Lemma 2.4.2. gereği $\forall f, g \in E$ için bir $K \geq 1$ sayısı vardır öyle ki $0 \leq g \leq f \Leftrightarrow \|g\| \leq K\|f\|$ olur. Şimdi $K > k$ olduğunu gösterelim. İlk olarak $f(x) = -kx + k \in P$ ve $g(x) = k \in P$ için $f(x) - g(x) = -kx \in P$ olacağına dikkat edelim. Bundan dolayı $0 \leq g \leq f$ ise $k = \|g\| \leq K\|f\| = K$ olur. Diğer

tarafından $f(x) = -\left(k + \frac{1}{k}\right)x + k$ ve $g(x) = k$ olduğu zaman $f(x), g(x) \in P$ ve $f(x) - g(x) \in P$ olup $\|g\| = k$ ve $\|f\| = 1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}$ ise $k = \|g\| > k\|f\| = k + \frac{1}{k} - 1$ olup bu ise $K > k$ olduğunu gösterir.

Aşağıda ki örnekte normal olmayan konik varlığı gösterilecektir.

Örnek 2.4.2.

$E = C_R^2([0,1])$, $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ normu ile verilsin. $\forall k \geq 1$ için $P = \{f \in E : f \geq 0\}$ koniğini göz önüne alalım. $g(x) = x^{2k}$ ve $f(x) = x$ olsun. O zaman $0 \leq g \leq f$ ve $\|f\| = 2$, $\|g\| = 2k + 1$ elde edilir. $k\|f\| < \|g\|$ olduğundan k , P nin normal sabiti değildir. Bundan dolayı P normal olmayan bir koniktir.

Önerme 2.4.2.

E reel Banach uzayı ve $P \subseteq E$ bir konik olsun. $a \in P$ alalım. Eğer $a \leq \lambda a$ ve $0 < \lambda < 1$ ise $a = 0$ dır [5].

İspat

$a \leq \lambda a \Rightarrow \lambda a - a = a(\lambda - 1) = -(1 - \lambda)a \in P$ yazılabilir. Diğer taraftan $a \in P$ ve $(1 - \lambda) > 0$ ise $(1 - \lambda)a \in P$ olur. Konik tanımının (iii) özelliğinden $(1 - \lambda)a = 0$ ve $(1 - \lambda) \neq 0$ olacağından $a = 0$ elde edilir.

2.5. Konik Metrik Uzaylar

Tanım 2.5.1.

$X \neq \emptyset$ ve $d : X \times X \rightarrow E$ bir dönüşüm olsun. Eğer d dönüşümü $\forall x, y, z \in X$ için

i-) $0 < d(x, y)$ ve $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

ii-) $d(x, y) = d(y, x)$

iii-) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

şartlarını sağlarsa d ye X üzerinde konik metrik, (X, d) ikilisine de konik metrik uzay denir [3].

Bu tanımdan konik metrik uzayların, metrik uzayların bir genellemesi olduğu açıktır.

Örnek 2.5.1.

$E = \mathbb{R}^2$, $P = \{(x, y) \in E : x, y \geq 0\}$, $X = \mathbb{R}$ ve $d : X \times X \rightarrow E$ dönüşümü $\alpha \geq 0$ olmak üzere $d(x, y) = (|x - y|, \alpha|x - y|)$ ile tanımlansın. Bu taktirde (X, d) konik metrik uzaydır [3].

Tanım 2.5.2.

(X, d) konik metrik uzay, (x_n) , X de bir dizi ve $x \in X$ olsun. $0 << c$ olacak şekilde ki her $c \in E$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyleki $\forall n > n_0$ için $d(x_n, x) << c$ ise (x_n) dizisi x değerine yakınsaktır denir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \text{ veya } x_n \rightarrow x (n \rightarrow \infty)$$

şeklinde gösterilir [3].

Tanım 2.5.3.

(X, d) konik metrik uzay ve (x_n) , X de bir dizi olsun. Eğer $0 << c$ olacak şekilde ki her $c \in E$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyleki $\forall m, n \geq n_0$ için $d(x_n, x_m) << c$ ise (x_n) dizisine X de bir Cauchy dizisi denir [3].

Tanım 2.5.4. (X, d) konik metrik uzay olsun. Eğer X de alınan her Cauchy dizisi yine X de yakınsak ise (X, d) metrik uzayına tam konik metrik uzay denir [3].

Tanım 2.5.5.

(X, d) konik metrik uzay olsun. Eğer X de alınan her (x_n) dizisinin X de yakınsak olacak şekilde bir (x_{n_i}) alt dizisi varsa X e dizisel kompakt konik metrik uzay denir [3].

Lemma 2.5.1.

(X, d) konik metrik uzay olsun. $\forall c \in P^o$ için $\|x\| < \delta$ olduğunda $c - x \in P^o$ olacak şekilde $\delta > 0$ vardır.

İspat

$c \in P^o$ olduğundan $\{x \in E : \|x - c\| < \delta\} \subseteq P$ olacak şekilde $\delta > 0$ vardır. $\|(c - x) - c\| = \|x\| < \delta$ olup $c - x \in P^o$ olur.

Lemma 2.5.2.

Eğer $c \in P^o$, $0 \leq a_n$ ve $a_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) ise bir $n_0 \in N$ vardır öyleki $\forall n > n_0$ için $a_n \ll c$ olur. [5]

İspat

$0 \ll c$ verilsin. Simetrik bir $\mathcal{G}$ komşuluğu seçelim öyleki $c + \mathcal{G} \subseteq P$ olsun. $a_n \rightarrow 0$ olduğundan bir $n_0 \in N$ vardır öyleki $\forall n > n_0$ için $a_n \in \mathcal{G} = -\mathcal{G}$ yazabiliriz. Bunun anlamı $\forall n > n_0$ için $c_+^- \mathcal{G} \in c + \mathcal{G} \subseteq P$ olmasıdır. O halde $a_n \ll c$ olur.

Lemma 2.5.3.

(X, d) konik metrik uzay ve P normal K sabiti ile normal konik olsun. (x_n) , X de bir dizi olmak üzere

$$x_n \rightarrow x (n \rightarrow \infty) \Leftrightarrow d(x_n, x) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$$

olur [3].

İspat

($\Rightarrow$) Kabul edelim ki $x_n \rightarrow x (n \rightarrow \infty)$ olsun. $\varepsilon > 0$ değerini $0 \ll c$ olacak şekildeki $c \in E$ için $K\|c\| < \varepsilon$ olarak seçelim. $x_n \rightarrow x (n \rightarrow \infty) \Leftrightarrow 0 \ll c$ olacak şekildeki her $c \in E$ için $\exists n_0 \in N$ vardır öyleki $\forall n > n_0$ için $d(x_n, x) \ll c$ olur. P normal K sabitli normal konik olduğundan

$$d(x_n, x) \ll c \Leftrightarrow \|d(x_n, x)\| \leq K\|c\| < \varepsilon$$

elde edilir. Bu ise $d(x_n, x) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) olmasıdır.

($\Leftarrow$) $d(x_n, x) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) olsun. Lemma 2.5.2. den dolayı $0 < c$ olacak şekildeki her $c \in E$ için bir $n_0 \in N$ vardır öyleki $\forall n > n_0$ için $d(x_n, x) < c$ olur. Bu ise $x_n \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$) olduğunu gösterir.

Lemma 2.5.4.

P, E reel Banach uzayında içi boştan farklı bir konik olsun. Eğer $c \in P^o$ ise $\forall m \in N$ için $\frac{c}{m} \in P^o$ olur.

İspat

$c \in P^o$ olsun bu takdirde $c \in \{x \in E : \|x - c\| < \varepsilon\} \subset P$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı

vardır. O halde $\forall m \in N$ için $\frac{c}{m} \in \frac{1}{m} \{x \in E : \|x - c\| < \varepsilon\} \subset \frac{1}{m} P \subset P$ olur. Yani

$\frac{c}{m} \in \left\{ \frac{1}{m} x \in E : \frac{1}{m} \|x - c\| < \frac{1}{m} \varepsilon \right\} = \left\{ y \in E : \left\| y - \frac{c}{m} \right\| < \frac{\varepsilon}{m} \right\} \subset \frac{1}{m} P \subset P$ olacak şekilde

$\frac{\varepsilon}{m} > 0$ vardır. Bu ise $\frac{c}{m} \in P^o$ olduğunu gösterir.

Lemma 2.5.5.

(X, d) konik metrik uzay olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır.

i-) Eğer $u \leq v$ ve $v < w$ ise $u < w$

ii-) $\forall n \in N$ için $0 \leq x_n \leq y_n$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ ise $0 \leq x \leq y$

iii-) Eğer $0 \leq d(x_n, x) \leq b_n$ ve $b_n \rightarrow 0$ ise $x_n \rightarrow x$ olur [6].

Lemma 2.5.6.

(X, d) konik metrik uzay ve (x_n) , X de bir dizi olsun. Eğer (x_n) dizisi yakınsak ise (x_n) bir Cauchy dizisidir [3].

İspat

$x_n \rightarrow x (n \rightarrow \infty)$ olsun. Bu taktirde $0 << c$ olacak şekildeki her $c \in E$ için $\exists n_0 \in N$ vardır öyleki $\forall n > n_0$ için $d(x_n, x) << \frac{c}{2}$ yazılabilir. Bu taktirde

$0 << c$ olacak şekildeki her $c \in E$ için $\exists n_0 \in N$ vardır öyleki $\forall n, m > n_0$ için

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x_m, x) << \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c \Rightarrow d(x_n, x_m) << c$$

elde edilir ki bu ise (x_n) dizisinin Cauchy dizisi olmasıdır.

Lemma 2.5.7.

(X, d) konik metrik uzay, P normal K sabiti ile normal konik ve $(x_n), X$ de bir dizi olsun.

$$(x_n) \text{ Cauchy} \Leftrightarrow d(x_n, x_m) \rightarrow 0 (m, n \rightarrow \infty)$$

olur [3].

İspat

$(\Rightarrow)$ $(x_n), X$ de bir Cauchy dizisi olsun. $\varepsilon > 0$ değerini $0 << c$ olacak şekildeki $c \in E$ için $K\|c\| < \varepsilon$ olarak seçelim. (x_n) Cauchy dizisi olduğundan bir $n_0 \in N$ vardır öyleki $\forall m, n > n_0$ için $d(x_n, x_m) << c$ yazılabilir. P normal K sabiti ile normal konik olduğundan

$$\|d(x_n, x_m)\| \leq c \Leftrightarrow \|d(x_n, x_m)\| \leq K\|c\| < \varepsilon$$

elde edilir. Bu ise $d(x_n, x_m) \rightarrow 0 (m, n \rightarrow \infty)$ olmasıdır.

$(\Leftarrow)$ $d(x_n, x_m) \rightarrow 0 (m, n \rightarrow \infty)$ olsun. Lemma 2.5.2. den dolayı $0 << c$ olacak şekildeki her $c \in E$ için $\exists n_0 \in N$ vardır öyleki $\forall n, m > n_0$ için $d(x_n, x_m) << c$ olur. Bu ise (x_n) dizisinin Cauchy dizisi olmasıdır.

Lemma 2.5.8.

(X, d) konik metrik uzay, P normal K sabiti ile normal konik ve (x_n) ile (y_n) X de iki dizi olsun Eğer $x_n \rightarrow x (n \rightarrow \infty)$ ve $y_n \rightarrow y (n \rightarrow \infty)$ ise bu taktirde $d(x_n, y_n) \rightarrow d(x, y)$ olur [3].

İspat

$\varepsilon > 0$ için $0 < c$ olacak şekildeki $c \in E$ değerini $\|c\| < \frac{\varepsilon}{4K+2}$ olarak seçelim. Hipotez

gereği $x_n \rightarrow x (n \rightarrow \infty)$ ve $y_n \rightarrow y (n \rightarrow \infty)$ olacağından

$$x_n \rightarrow x \Leftrightarrow 0 < c, \forall c \in E, \exists n_1 \in N, \forall n > n_1 \text{ için } d(x_n, x) < c$$

$$y_n \rightarrow y \Leftrightarrow 0 < c, \forall c \in E, \exists n_2 \in N, \forall n > n_2 \text{ için } d(y_n, y) < c$$

yazabiliriz. $\max\{n_1, n_2\} = n_0$ alınırsa $\forall n > n_0$ için

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y_n, y) \leq d(x, y) + 2c \dots (1)$$

$$d(x, y) \leq d(x_n, x) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y) \leq d(x_n, y_n) + 2c \dots (2)$$

(1) ve (2) ifadeleri birlikte düşünülürse $0 \leq d(x_n, y_n) - d(x, y) + 2c \leq 4c$ olur. P normal

K sabitli normal konik olduğundan

$$\|d(x_n, y_n) - d(x, y)\| \leq \|d(x_n, y_n) - d(x, y) + 2c\| + \|2c\| \leq (4K+2)\|c\| < \varepsilon$$

elde edilir ki bu ise $d(x_n, y_n) \rightarrow d(x, y)$ olmasıdır.

3. BÖLÜM

BÜZÜLME DÖNÜŞÜMLERİ VE SABİT NOKTA TEOREMLERİ

3.1. Büzülme (Daralma) Dönüşümleri

Tanım 3.1.1.

Bir (X, d) konik metrik uzayı üzerinde büzülme dönüşümü $0 \leq k < 1$, $k \in R$ ve $\forall x, y \in X$ için

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$$

şartını sağlayan $f : X \rightarrow X$ fonksiyonudur. Bu şekildeki k değerlerinin en küçüğüne Lipschitz sabiti denir. Büzülme dönüşümleri bazen Lipschitz dönüşümleri olarak adlandırılır. Eğer yukarda ki şart $0 < k \leq 1$ olacak şekildeki reel k değerleri için sağlanırsa bu dönüşüme genişlemeyen dönüşüm denir.

3.2. Sabit Nokta Teoremleri

Tanım 3.2.1.

(X, d) konik metrik uzay ve $T : M \subseteq X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. $T(x) = x$ denkleminin çözümüne T dönüşümünün sabit noktası denir.

$F : M \subseteq X \rightarrow X$ dönüşümünün kökünün bulunması sabit nokta problemi olarak değişik yollarla ifade edilebilir. Bunlar

i-) $T(x) := x - F(x)$

ii-) $T(x) := x - wF(x)$, $w \in R$

iii-) $T(x) := x - (DF(x))^{-1}F(x)$ (Newton metodu)

şeklindedir.

Teorem 3.2.1.

(X, d) tam konik metrik uzay ve P normal K sabitli normal konik olsun. Kabul edelim ki $T : X \rightarrow X$ dönüşümü büzülme koşulunu sağlasın. Yani $k \in [0,1)$ olmak üzere $\forall x, y \in X$ için

$$d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y)$$

olsun. Bu taktirde T , X de bir tek sabit noktaya sahiptir. Ve $\forall x \in X$ için $(T^n(x))$ iterasyon dizisi bu sabit noktaya yakınsar [3].

İspat

$x_0 \in X$ keyfi bir nokta olsun. Bu takdirde $(T^n(x))$ iterasyon dizisini

$$x_1 = T(x_0), x_2 = T(x_1) = T^2(x_0), \dots, x_{n+1} = T(x_n) = T^{n+1}(x_0), \dots$$

şeklinde oluşturalım. Buradan

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(T(x_n), T(x_{n-1})) \leq kd(x_n, x_{n-1}) \leq k^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq \dots \leq k^n d(x_1, x_0)$$

elde edilir. Bu yüzden $n > m$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \dots + d(x_{m+1}, x_m) \\ &\leq (k^{n-1} + k^{n-2} + \dots + k^m) d(x_1, x_0) \leq \frac{k^m}{1-k} d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

yazılabilir. P normal K sabitli normal konik olduğundan

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{k^m}{1-k} d(x_1, x_0) \Rightarrow \|d(x_n, x_m)\| \leq K \frac{k^m}{1-k} \|d(x_1, x_0)\|$$

elde edilir. Bu ise $m, n \rightarrow \infty$ için $d(x_n, x_m) \rightarrow 0$ olmasını gerektirir. Bundan dolayı (x_n) bir Cauchy dizisidir. Hipotez gereği X tam olduğundan bir $p \in X$ vardır öyleki $x_n \rightarrow p (n \rightarrow \infty)$ olur. Şu halde

$$d(T(p), p) \leq d(T(x_n), T(p)) + d(T(x_n), p) \leq kd(x_n, p) + d(x_{n+1}, p)$$

yazılabilir. P normal K sabitli normal konik olduğundan

$$\|d(T(p), p)\| \leq K[k\|d(x_n, p)\| + \|d(x_{n+1}, p)\|]$$

olup ifadenin sağ tarafı $n \rightarrow \infty$ için sıfıra gideceğinden $\|d(T(p), p)\| = 0$ olacaktır. O halde norm fonksiyonunun özelliğinden $T(p) = p$ elde edilir. Bundan dolayı p, T dönüşümü için bir sabit noktadır. Eğer $r \in X$ noktası T dönüşümü için bir diğer sabit nokta ise o zaman

$$d(p, r) = d(T(p), T(r)) \leq kd(p, r)$$

olacaktır. Önerme 2.4.2. gereğince $d(p, r) = 0$ olup bu ise konik metrik özelliğinden $p = r$ olmasını gerektirir. O halde sabit nokta tektir. Ayrıca burada alınan $x_0 \in X$ noktası keyfi bir nokta olduğundan $\forall x \in X$ için $(T^n(x))$ iterasyon dizisi bu sabit noktaya yakınsar.

Önerme 3.2.1.

(X, d) tam konik metrik uzay ve P normal K sabitli normal konik olsun. $0 < k < 1$ olacak şekilde $c \in E$ ve $x_0 \in X$ için

$$B(x_0, c) = \{x \in X : d(x, x_0) \leq c\}$$

olsun. Kabul edelim ki $T : X \rightarrow X$ dönüşümü büzülme koşulunu sağlasın. Yani $k \in [0, 1)$ olmak üzere $\forall x, y \in X$ için

$$d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y)$$

olsun. Ayrıca

$$d(T(x_0), x_0) \leq (1 - k)c$$

şartı sağlansın. Bu taktirde T dönüşümü $B(x_0, c)$ de tek sabit noktaya sahiptir [3].

İspat

Burada $B(x_0, c)$ nin tam olduğunu ve $\forall x \in B(x_0, c)$ için $T(x) \in B(x_0, c)$ olacağını göstermek yeterlidir. Kabul edelim ki (x_n) , $B(x_0, c)$ de bir Cauchy dizisi olsun. Bu taktirde (x_n) , X de bir Cauchy dizisidir. X tam olduğundan $x_n \rightarrow x$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır.

$$d(x_0, x) \leq d(x_n, x) + d(x_0, x_n) \leq c + d(x_n, x)$$

yazılabilir. $x_n \rightarrow x$ olması $d(x_n, x) \rightarrow 0$ olmasını gerektirdiğinden, $(n \rightarrow \infty)$ için $d(x_0, x) \leq c$ olur. O halde $x \in B(x_0, c)$ olur ki bu ise $B(x_0, c)$ nin tam olduğunu gösterir. $\forall x \in B(x_0, c)$ için

$$d(x_0, T(x)) \leq d(x_0, T(x_0)) + d(T(x_0), T(x)) \leq (1 - k)c + kd(x_0, x) \leq (1 - k)c + kc = c$$

olur. O halde $T(x) \in B(x_0, c)$ elde edilir.

Önerme 3.2.2.

(X, d) tam konik metrik uzay ve P normal K sabitli normal konik olsun. Kabul edelim ki $T : X \rightarrow X$ dönüşümü bazı $n \in N$ değerleri için $k \in [0,1)$ olmak üzere $\forall x, y \in X$ için

$$d(T^n(x), T^n(y)) \leq kd(x, y)$$

şartını sağlasın. Bu taktirde T, X de tek sabit noktaya sahiptir [3].

İspat

Teorem 3.2.1. den dolayı T^n dönüşümü $p \in X$ gibi tek sabit noktaya sahiptir. Fakat $T^n(T(p)) = T(T^n(p)) = T(p)$ olacağından $T(p), T^n$ dönüşümü için bir sabit noktadır. Sabit nokta tek olacağından $T(p) = p$ olup p, T için bir sabit noktadır. T nin sabit noktası aynı zamanda T^n içinde bir sabit nokta olacağından bu nokta tektir.

Teorem 3.2.2.

(X, d) dizisel kompakt konik metrik uzay ve P düzgün konik olsun. Kabul edelim ki $x \neq y$ olacak şekilde ki $\forall x, y \in X$ için

$$d(T(x), T(y)) < d(x, y)$$

olsun. Bu taktirde T, X de tek sabit noktaya sahiptir [3].

İspat

Seçilen bir $x_0 \in X$ noktası için $(T^n(x))$ iterasyon dizisini

$$x_1 = T(x_0), x_2 = T(x_1) = T^2(x_0), \dots, x_{n+1} = T(x_n) = T^{n+1}(x_0), \dots$$

şeklinde oluşturalım. Bazı $n \in N$ değerleri için $x_{n+1} = x_n$ ise x_n, T için bir sabit noktadır. Bu ise ispatı tamamlar. Bu yüzden kabul edelim ki $\forall n \in N$ için $x_{n+1} \neq x_n$ olsun.

$$d_n = d(x_{n+1}, x_n)$$

şeklinde bir dizi oluşturalım.

$$0 < d_{n+1} = d(x_{n+2}, x_{n+1}) = d(T(x_{n+1}), T(x_n)) < d(x_{n+1}, x_n) = d_n$$

olur ki bu (d_n) dizisinin azalan ve alttan 0 ile sınırlı bir dizi olduğunu gösterir. P düzgün konik olduğundan bir $d^* \in E$ vardır öyle ki $d_n \rightarrow d^* (n \rightarrow \infty)$ olur.

Diğer taraftan X dizisel kompakt olduğundan (x_n) dizisinin bir (x_{n_i}) alt dizisi vardır öyle ki $x^* \in X$ için $x_{n_i} \rightarrow x^*$ ($n_i \rightarrow \infty$) olur. Ayrıca

$$d(T(x_{n_i}), T(x^*)) < d(x_{n_i}, x^*), \quad i = 1, 2, \dots$$

yazılabilir. Bu yüzden K, P nin normal sabiti olmak üzere

$$\|d(T(x_{n_i}), T(x^*))\| < K \|d(x_{n_i}, x^*)\| \rightarrow 0 \quad (n_i \rightarrow \infty)$$

elde edilir. Bundan dolayı

$$T(x_{n_i}) \rightarrow T(x^*) \quad (i \rightarrow \infty)$$

olur. Benzer olarak

$$T^2(x_{n_i}) \rightarrow T^2(x^*) \quad (i \rightarrow \infty)$$

olur. O halde

$$d(T(x_{n_i}), x_{n_i}) \rightarrow d(T(x^*), x^*) \quad (i \rightarrow \infty)$$

$$d(T^2(x_{n_i}), T(x_{n_i})) \rightarrow d(T^2(x^*), T(x^*)) \quad (i \rightarrow \infty)$$

.

.

.

elde edilir. Bu nedenle

$$d_{n_i} = d(T(x_{n_i}), x_{n_i}) \rightarrow d^* = d(T(x^*), x^*)$$

olacağı açıktır. Şimdi de $T(x^*) = x^*$ olduğunu gösterelim. Eğer $T(x^*) \neq x^*$ ise $d^* \neq 0$ olur. Buradan da

$$d^* = d(T(x^*), x^*) > d(T^2(x^*), T(x^*)) = \lim_{i \rightarrow \infty} d(T^2(x_{n_i}), T(x_{n_i})) = \lim_{i \rightarrow \infty} d_{n_i+1} = d^*$$

olur ki bu bir çelişkidir. O halde $T(x^*) = x^*$ olup x^* , T nin sabit noktasıdır. Sabit noktanın tekliği hipotez gereği açıktır.

Teorem 3.2.3.

(X, d) tam konik metrik uzay ve P normal K sabitli normal konik olsun. Kabul edelim ki $T: X \rightarrow X$ dönüşümü büzülme koşulunu sağlasın. Yani $k \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ olmak üzere $\forall x, y \in X$ için

$$d(T(x), T(y)) \leq k(d(T(x), x) + d(T(y), y))$$

olsun. O zaman T , X de tek sabit noktaya sahiptir. Ve $\forall x \in X$ için $(T^n(x))$ iterasyon dizisi bu sabit noktaya yakınsar [3].

İspat

Keyfi bir $x_0 \in X$ noktası için $(T^n(x))$ iterasyon dizisini

$$x_1 = T(x_0), x_2 = T(x_1) = T^2(x_0), \dots, x_{n+1} = T(x_n) = T^{n+1}(x_0), \dots$$

şeklinde oluşturalım. Buna göre

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(T(x_n), T(x_{n-1})) \leq k(d(T(x_n), x_n) + d(T(x_{n-1}), x_{n-1})) \\ &= k(d(x_{n+1}, x_n) + d(x_n, x_{n-1})) \end{aligned}$$

elde edilir. Bundan dolayı

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{k}{1-k} d(x_n, x_{n-1}) = h d(x_n, x_{n-1}) \leq \dots \leq h^n d(x_1, x_0), \quad h = \frac{k}{1-k} \in [0,1)$$

yazılabilir. Şimdi $n > m$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \dots + d(x_{m+1}, x_m) \\ &\leq (h^{n-1} + h^{n-2} + \dots + h^m) d(x_1, x_0) \leq \frac{h^m}{1-h} d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

olur ki P normal K sabitli normal konik olduğundan

$$\|d(x_n, x_m)\| \leq K \frac{h^m}{1-h} \|d(x_1, x_0)\|$$

elde edilir. O halde $m, n \rightarrow \infty$ için $d(x_n, x_m) \rightarrow 0$ olacağından (x_n) , X de bir Cauchy dizisidir. Diğer taraftan hipotez gereği X tam olduğundan bir $p \in X$ vardır öyle ki $x_n \rightarrow p$ ($n \rightarrow \infty$) olur. Buna göre

$$\begin{aligned} d(T(p), p) &\leq d(T(p), T(x_n)) + d(T(x_n), p) \\ &\leq k(d(T(x_n), x_n) + d(T(p), p)) + d(T(x_n), p) \end{aligned}$$

olur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$d(T(p), p) \leq \frac{k}{1-k} (k d(x_{n+1}, x_n) + d(x_{n+1}, p))$$

elde edilir. P normal K sabitli normal konik olduğundan

$$\|d(T(p), p)\| \leq K \frac{k}{1-k} (k \|d(x_{n+1}, x_n)\| + \|d(x_{n+1}, p)\|)$$

olur. İfadenin sağ tarafı $n \rightarrow \infty$ için sıfıra yaklaşıacağından $\|d(T(p), p)\| = 0$ olup norm ve konik metrik fonksiyonlarının özelliği gereği $T(p) = p$ elde edilir.

Bu ise p noktasının T dönüşümü için bir sabit nokta olduğunu gösterir. Eğer $r \in X$ noktası T nin diğer bir sabit noktası ise

$$0 \leq d(p, r) = d(T(p), T(r)) \leq k(d(T(p), p) + d(T(r), r)) = 0$$

$$d(p, r) = 0$$

$$p = r$$

olur ki bu ise sabit noktanın tek olduğunu gösterir. Ayrıca burada alınan $x_0 \in X$ noktası keyfi bir nokta olduğundan $\forall x \in X$ için $(T^n(x))$ iterasyon dizisi bu sabit noktaya yakınsar.

Teorem 3.2.4.

(X, d) tam konik metrik uzay ve P normal K sabitli normal konik olsun. Kabul edelim ki $T: X \rightarrow X$ dönüşümü büzülme koşulunu sağlasın. Yani $k \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ olmak üzere $\forall x, y \in X$ için

$$d(T(x), T(y)) \leq k(d(T(x), y) + d(T(y), x))$$

olsun. O zaman T , X de tek sabit noktaya sahiptir. Ve $\forall x \in X$ için $(T^n(x))$ iterasyon dizisi bu sabit noktaya yakınsar [3].

İspat

Keyfi bir $x_0 \in X$ noktası için $(T^n(x))$ iterasyon dizisini

$$x_1 = T(x_0), x_2 = T(x_1) = T^2(x_0), \dots, x_{n+1} = T(x_n) = T^{n+1}(x_0), \dots$$

şeklinde oluşturalım. Buna göre

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(T(x_n), T(x_{n-1})) \leq k(d(T(x_n), x_{n-1}) + d(T(x_{n-1}), x_n)) \\ &= k(d(x_{n+1}, x_{n-1}) + d(x_n, x_n)) \\ &\leq k(d(x_{n+1}, x_n) + d(x_n, x_{n-1})) \end{aligned}$$

olur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{k}{1-k} d(x_n, x_{n-1}) = h d(x_n, x_{n-1}) \leq \dots \leq h^n d(x_1, x_0), \quad h \in [0, 1)$$

elde edilir. O halde $n > m$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \dots + d(x_{m+1}, x_m) \\ &\leq (h^{n-1} + h^{n-2} + \dots + h^m) d(x_1, x_0) \leq \frac{h^m}{1-h} d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

olur ki P normal K sabitli normal konik olduğundan

$$\|d(x_n, x_m)\| \leq K \frac{h^m}{1-h} \|d(x_1, x_0)\|$$

elde edilir. O halde $m, n \rightarrow \infty$ için $d(x_n, x_m) \rightarrow 0$ olacağından (x_n) X de bir Cauchy dizisidir. Diğer taraftan hipotez gereği X tam olduğundan bir $p \in X$ vardır öyle ki $x_n \rightarrow p$ ($n \rightarrow \infty$) olur. Buna göre

$$\begin{aligned} d(T(p), p) &\leq d(T(p), T(x_n)) + d(T(x_n), p) \\ &\leq k(d(T(p), x_n) + d(T(x_n), p)) + d(T(x_n), p) \\ &= k(d(T(p), x_n) + d(x_{n+1}, p)) + d(x_{n+1}, p) \\ &\leq k(d(T(p), p) + d(x_n, p) + d(x_{n+1}, p)) + d(x_{n+1}, p) \end{aligned}$$

olup gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$d(T(p), p) = \frac{1}{1-k} (k(d(x_n, p) + d(x_{n+1}, p)) + d(x_{n+1}, p))$$

elde edilir. Diğer taraftan P normal K sabitli normal konik olduğundan

$$\|d(T(p), p)\| \leq K \frac{1}{1-k} [k(\|d(x_n, p)\| + \|d(x_{n+1}, p)\|) + \|d(x_{n+1}, p)\|]$$

yazılabilir. İfadenin sağ tarafı $n \rightarrow \infty$ için sıfıra yaklaşacağından $\|d(T(p), p)\| = 0$ olup norm ve konik metrik fonksiyonlarının özelliği gereği $T(p) = p$ elde edilir. Bu ise p noktasının T dönüşümü için bir sabit nokta olduğunu gösterir. Eğer $r \in X$ noktası T nin diğer bir sabit noktası ise

$$\begin{aligned} d(p, r) &= d(T(p), T(r)) \leq k(d(T(p), r) + d(T(r), p)) \\ &\leq k(d(p, r) + d(r, p)) \\ &= 2kd(p, r) \end{aligned}$$

olur. Önerme 2.4.2. gereğince $d(p, r) = 0$ olup bu ise konik metrik özelliğinden $p = r$ olmasını gerektirir. O halde sabit nokta tektir. Ayrıca burada alınan $x_0 \in X$ noktası keyfi bir nokta olduğundan $\forall x \in X$ için $(T^n(x))$ iterasyon dizisi bu sabit noktaya yakınsar.

Burada ki teoremler metrik uzaylarda büzülme dönüşümleri için sabit nokta teoremlerini konik metrik uzaylara genellemiştir.

Şimdi bununla ilgili bir örnek verelim.

Örnek 3.2.1.

$E = R^2$ ve $P = \{(x, y) : x, y \geq 0\} \subset R^2$ normal konik olsun.

$X = \{(x, 0) : 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(0, x) : 0 \leq x \leq 1\}$ olmak üzere $d : X \times X \rightarrow E$ dönüşümü

$$d((x, 0), (y, 0)) = \left(\frac{4}{3}|x - y|, |x - y| \right) , \quad d((0, x), (0, y)) = \left(|x - y|, \frac{2}{3}|x - y| \right)$$

$$d((x, 0), (0, y)) = d((0, y), (x, 0)) = \left(\frac{4}{3}x + y, x + \frac{2}{3}y \right)$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde (X, d) tam konik metrik uzaydır. $T : X \rightarrow X$

dönüşümü $T((x, 0)) = (0, x)$ ve $T((0, x)) = \left(\frac{x}{2}, 0 \right)$ ile verilsin. O zaman T dönüşümü

$\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X$ için $k = \frac{3}{4} \in [0, 1)$ olmak üzere

$$d(T((x_1, x_2)), T((y_1, y_2))) \leq kd((x_1, x_2), (y_1, y_2))$$

büzülme dönüşümü şartını sağlar. O halde $(0, 0) \in X$ noktası T nin tek sabit noktasıdır.

Diğer taraftan T nin X deki Öklid metriğine göre büzülme dönüşümü olmadığı görülür [3].

4. BÖLÜM

ORTAK SABİT NOKTA VE PERİYODİK NOKTA TEOREMLERİ

Bu bölümde bazı şartları sağlayan dönüşümler için ortak sabit nokta ve periyodik nokta teoremleri ifade ve ispat edilecektir.

4.1. Ortak Sabit Nokta Teoremleri

Tanım 4.1.1.

$f, g: X \rightarrow X$ dönüşümleri verilsin. Eğer bazı $x \in X$ değerleri için $w = f(x) = g(x)$ ise o zaman x , f ve g nin çakışık noktası, w da f ve g nin çakışma noktasıdır [7].

Tanım 4.1.2.

$f, g: X \rightarrow X$ dönüşümleri verilsin. Eğer $f(x) = g(x) = x$ olacak şekilde $x \in X$ noktası varsa bu noktaya f ve g nin ortak sabit noktası denir [7].

Tanım 4.1.3.

$\forall x \in X$ için $f(x) = g(x)$ olduğunda $f(g(x)) = g(g(x))$ oluyorsa $f, g: X \rightarrow X$ dönüşümlerine zayıf bağdaşabilir dönüşümler denir [8].

Tanım 4.1.4.

$f, g: X \rightarrow X$ dönüşümlerini göz önüne alalım. $f(X) \subseteq g(X)$ ve $\forall x_0 \in X$ için (x_n) , X de bir dizi olmak üzere $g(x_n) = f(x_{n-1})$ olsun. Bu şekilde tanımlanan $(f(x_n))$ dizisine $f - g$ dizisi denir [9].

Önerme 4.1.1.

$f, g: X \rightarrow X$ dönüşümleri zayıf bağdaşan dönüşümler olsunlar. Eğer f ve g , $w = f(x) = g(x)$ olacak şekilde tek çakışma noktasına sahip ise w , f ve g için tek ortak sabit noktadır [7].

İspat

$w = f(x) = g(x)$ ve f ile g zayıf bağdaşan dönüşümler olduğundan

$$f(w) = f(g(x)) = g(g(x)) = g(w)$$

yazılabilir. O zaman $f(w) = g(w)$ noktası f ve g nin çakıştığı noktadır. Fakat f ve g yalnız w noktasında çakıştığından $w = f(w) = g(w)$ olmalıdır. O halde w , f ile g dönüşümlerinin ortak sabit noktasıdır. Eğer $z \in X$ noktası f ile g nin diğer bir ortak sabit noktası ise $z = f(z) = g(z)$ olup z , f ile g nin çakıştığı noktadır. Bu nokta tek olacağından $z = w$ olur ki bu ise ortak sabit noktanın tek olduğunu gösterir.

Teorem 4.1.1.

(X, d) konik metrik uzay ve P normal K sabiti ile verilen normal konik olsun. Kabul edelim ki $f, g: X \rightarrow X$ dönüşümleri $k \in [0, 1)$ olmak üzere $\forall x, y \in X$ için

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(g(x), g(y))$$

koşulunu sağlasın. Eğer $f(X) \subseteq g(X)$ ve $g(X)$, X in tam alt uzayı ise f ve g , X de tek çakışma noktasına sahiptir. Ayrıca f ve g zayıf bağdaşabilir ise f ile g tek ortak sabit noktaya sahiptir [7].

İspat

$x_0 \in X$ keyfi bir nokta olsun. X de bir x_1 noktası seçelim öyle ki $g(x_1) = f(x_0)$ olsun. Bunu $f(X) \subseteq g(X)$ olduğundan yapabiliriz. Bu şekilde devam edilirse X de seçilen bir x_n elemanı için bir x_{n+1} elemanı bulunabilir öyle ki $g(x_{n+1}) = f(x_n)$ olur. O halde

$$\begin{aligned} d(g(x_{n+1}), g(x_n)) &= d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq kd(g(x_n), g(x_{n-1})) \\ &\leq k^2 d(g(x_{n-1}), g(x_{n-2})) \leq \dots \leq k^n d(g(x_1), g(x_0)) \end{aligned}$$

elde edilir. O zaman $n > m$ için

$$\begin{aligned}
d(g(x_n), g(x_m)) &\leq d(g(x_n), g(x_{n-1})) + d(g(x_{n-1}), g(x_{n-2})) + \dots + d(g(x_{m+1}), g(x_m)) \\
&\leq (k^{n-1} + k^{n-2} + \dots + k^m) d(g(x_1), g(x_0)) \leq \frac{k^m}{1-k} d(g(x_1), g(x_0))
\end{aligned}$$

elde edilir. P normal K sabiti ile verilen normal konik olduğundan

$$\|d(g(x_n), g(x_m))\| \leq K \frac{k^m}{1-k} \|d(g(x_1), g(x_0))\|$$

olup bu ise $m, n \rightarrow \infty$ için $d(g(x_n), g(x_m)) \rightarrow 0$ olmasıdır. O halde $(g(x_n)), g(X)$ de bir Cauchy dizisidir. Hipotez gereğince $g(X)$ tam olduğundan $g(X)$ de bir q elemanı vardır öyle ki $g(x_n) \rightarrow q, (n \rightarrow \infty)$ olur. Sonuç olarak X de bir p noktası bulunabilir öyle ki $g(p) = q$ olur. Ayrıca

$$d(g(x_n), f(p)) = d(f(x_{n-1}), f(p)) \leq kd(g(x_{n-1}), g(p)) = kd(g(x_{n-1}), q)$$

olup P normal K sabiti ile verilen normal konik olduğundan

$$\|d(g(x_n), f(p))\| \leq Kk \|d(g(x_{n-1}), q)\|$$

elde edilir. İfadenin sağ tarafı $n \rightarrow \infty$ için sifıra gideceğinden $g(x_n) \rightarrow f(p), (n \rightarrow \infty)$ olur. Diğer taraftan konik metrik uzaylarda yakınsak dizinin limiti tek olacağından $f(p) = q$ olur. Şimdi f ve g nin çakışma noktasının tek olduğunu gösterelim. Başka bir $r \in X$ noktası için $f(r) = g(r)$ olsun. O halde

$$d(g(r), g(p)) = d(f(r), f(p)) \leq kd(g(r), g(p))$$

olup önerme 2.4.2. gereğince $d(g(r), g(p)) = 0$ ve dolayısıyla $g(r) = g(p)$ olur. Önerme 4.1.1. gereğince f ve g tek ortak sabit noktaya sahiptir ve bu nokta $q \in X$ noktasıdır.

Örnek 4.1.1.

$E = R^2$, $P = \{(x, y) \in E : x, y \geq 0\}$ olmak üzere $d : R \times R \rightarrow E$, $d(x, y) = (|x - y|, \alpha|x - y|)$ ($\alpha > 0$) şeklinde tanımlansın.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\beta+1}x & , x \neq 0 \\ \gamma & , x = 0 \end{cases} \quad \text{ve} \quad g(x) = \begin{cases} \alpha x & , x \neq 0 \\ \gamma & , x = 0 \end{cases}$$

şeklinde f ve g dönüşümleri tanımlayalım. Burada $\beta \geq 1$ ve $\gamma \neq 0$ olsun. Buna göre

$$d(f(x), f(y)) = \left(\frac{\alpha}{\beta+1}|x-y|, \frac{\alpha^2}{\beta+1}|x-y| \right) \quad \text{ve} \quad d(g(x), g(y)) = (\alpha|x-y|, \alpha^2|x-y|)$$

şeklinde olacaktır. Burada $\beta \geq 1$ olacağından $k = \frac{1}{\beta} \in (0,1]$ alınırsa

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(g(x), g(y))$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca burada $f(X) \subseteq g(X)$ ve $g(X)$ tam olduğundan f ve g tek çakışma noktasına sahiptir. Bu örnekte f ve g çakışma noktaları olan 0 noktasında değişimli değildirler. Bundan dolayı zayıf bağdaşan değildirler. O halde f ve g nin ortak sabit noktası yoktur [7].

Teorem 4.1.2.

(X, d) konik metrik uzay ve P normal K sabiti ile verilen normal konik olsun. Kabul edelim ki $f, g : X \rightarrow X$ dönüşümleri $k \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ olmak üzere $\forall x, y \in X$ için

$$d(f(x), f(y)) \leq k(d(f(x), g(x)) + d(f(y), g(y)))$$

koşulunu sağlasın. Eğer $f(X) \subseteq g(X)$ ve $g(X)$, X in tam alt uzayı ise f ve g , X de tek çakışma noktasına sahiptir. Ayrıca f ve g zayıf bağdaşabilir ise f ile g tek ortak sabit noktaya sahiptir [7].

İspat

$x_0 \in X$ keyfi bir nokta olsun. X de bir x_1 noktası seçelim öyle ki $g(x_1) = f(x_0)$ olsun. Bunu $f(X) \subseteq g(X)$ olduğundan yapabiliriz. Bu şekilde devam edilirse X de seçilen bir x_n elemanı için bir x_{n+1} elemanı bulunabilir öyle ki $g(x_{n+1}) = f(x_n)$ olur. O halde

$$\begin{aligned} d(g(x_{n+1}), g(x_n)) &= d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq k(d(f(x_n), g(x_n)) + d(f(x_{n-1}), g(x_{n-1}))) \\ &= k(d(g(x_{n+1}), g(x_n)) + d(g(x_n), g(x_{n-1}))) \end{aligned}$$

olur. Gerekli düzenlemeler yapılsa

$$d(g(x_{n+1}), g(x_n)) \leq h d(g(x_n), g(x_{n-1})), \quad h = \frac{k}{1-k} \in [0,1)$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilirse

$$d(g(x_{n+1}), g(x_n)) \leq h d(g(x_n), g(x_{n-1})) \leq \dots \leq h^n d(g(x_1), g(x_0))$$

olur. O halde $n > m$ için

$$\begin{aligned}
d(g(x_n), g(x_m)) &\leq d(g(x_n), g(x_{n-1})) + d(g(x_{n-1}), g(x_{n-2})) + \dots + d(g(x_{m+1}), g(x_m)) \\
&\leq (h^{n-1} + h^{n-2} + \dots + h^m) d(g(x_1), g(x_0)) \\
&\leq \frac{h^m}{1-h} d(g(x_1), g(x_0))
\end{aligned}$$

yazılabilir. P normal K sabiti ile verilen normal konik olduğundan

$$\|d(g(x_n), g(x_m))\| \leq K \frac{h^m}{1-h} \|d(g(x_1), g(x_0))\|$$

elde edilir. Eşitsizliğin sağ tarafı $m \rightarrow \infty$ için sıfıra gideceğinden $m, n \rightarrow \infty$ için $d(g(x_n), g(x_m)) \rightarrow 0$ olur. O halde $(g(x_n))$, $g(X)$ de bir Cauchy dizisidir. Hipotez gereğince $g(X)$ tam olduğundan $g(X)$ de bir q elemanı vardır öyle ki $g(x_n) \rightarrow q, (n \rightarrow \infty)$ olur. Sonuç olarak X de bir p noktası bulunabilir öyle ki $g(p) = q$ olur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
d(g(x_n), f(p)) &= d(f(x_{n-1}), f(p)) \leq k(d(f(x_{n-1}), g(x_{n-1})) + d(f(p), g(p))) \\
&= k(d(g(x_n), g(x_{n-1})) + d(f(p), g(p))) \\
&\leq k(d(g(x_n), g(x_{n-1})) + d(f(p), g(x_n)) + d(g(x_n), g(p)))
\end{aligned}$$

yazılabilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$d(g(x_n), f(p)) \leq \frac{k}{1-k} (d(g(x_n), g(x_{n-1})) + d(g(x_n), g(p)))$$

olur. P normal K sabiti ile verilen normal konik olduğundan

$$\|d(g(x_n), f(p))\| \leq K \frac{1}{1-k} (\|d(g(x_n), g(x_{n-1}))\| + \|d(g(x_n), g(p))\|) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$$

olacağından $d(g(x_n), f(p)) \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty)$ olur. Konik metrik uzaylarda limitin tekliğinden $g(x_n) \rightarrow f(p) = q, (n \rightarrow \infty)$ olacaktır. O halde $f(p) = g(p) = q$ olur. Şimdi f ve g dönüşümlerinin tek çakışma noktası olduğunu gösterelim. Bir $r \in X$ için $f(r) = g(r)$ olsun. O halde

$$0 \leq d(g(r), g(p)) = d(f(r), f(p)) \leq k(d(f(r), g(r)) + d(f(p), g(p))) = 0$$

olur. Bu takdirde $d(g(r), g(p)) = 0$ ve dolayısıyla $g(r) = g(p)$ olur. f ve g zayıf bağdaşabilir ise Önerme 4.1.1. gereğince f ve g tek ortak sabit noktaya sahiptir. Ve bu nokta $q \in X$ noktasıdır.

Teorem 4.1.3.

(X, d) konik metrik uzay ve P normal K sabiti ile verilen normal konik olsun. Kabul

eldim ki $f, g : X \rightarrow X$ dönüşümleri $k \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ olmak üzere $\forall x, y \in X$ için

$$d(f(x), f(y)) \leq k(d(f(x), g(y)) + d(f(y), g(x)))$$

koşulunu sağlasın. Eğer $f(X) \subseteq g(X)$ ve $g(X)$, X in tam alt uzayı ise f ve g , X de tek çakışma noktasına sahiptir. Ayrıca f ve g zayıf bağdaşabilir ise f ile g tek ortak sabit noktaya sahiptir [7].

İspat

$x_0 \in X$ keyfi bir nokta olsun. X de bir x_1 noktası seçelim öyle ki $g(x_1) = f(x_0)$ olsun. Bunu $f(X) \subseteq g(X)$ olduğundan yapabiliriz. Bu şekilde devam edilirse X de seçilen bir x_n elemanı için bir x_{n+1} elemanı bulunabilir öyle ki $g(x_{n+1}) = f(x_n)$ olur. O halde

$$\begin{aligned} d(g(x_{n+1}), g(x_n)) &= d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq k(d(f(x_n), g(x_{n-1})) + d(f(x_{n-1}), g(x_n))) \\ &= k(d(g(x_{n+1}), g(x_{n-1})) + d(g(x_n), g(x_n))) \\ &= kd(g(x_{n+1}), g(x_{n-1})) \\ &\leq k(d(g(x_{n+1}), g(x_n)) + d(g(x_n), g(x_{n-1}))) \end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$d(g(x_{n+1}), g(x_n)) \leq h d(g(x_n), g(x_{n-1})), \quad h = \frac{k}{1-k} \in [0, 1)$$

olur. Bu şekilde devam edilirse

$$d(g(x_{n+1}), g(x_n)) \leq h d(g(x_n), g(x_{n-1})) \leq \dots \leq h^n d(g(x_1), g(x_0))$$

yazılabilir. Buna göre $n > m$ için

$$\begin{aligned} d(g(x_n), g(x_m)) &\leq d(g(x_n), g(x_{n-1})) + d(g(x_{n-1}), g(x_{n-2})) + \dots + d(g(x_{m+1}), g(x_m)) \\ &\leq (h^{n-1} + h^{n-2} + \dots + h^m) d(g(x_1), g(x_0)) \\ &\leq \frac{h^m}{1-h} d(g(x_1), g(x_0)) \end{aligned}$$

yazılabilir. P normal K sabiti ile verilen normal konik olduğundan

$$\|d(g(x_n), g(x_m))\| \leq K \frac{h^m}{1-h} \|d(g(x_1), g(x_0))\|$$

elde edilir. Eşitsizliğin sağ tarafı $m \rightarrow \infty$ için sıfıra gideceğinden $m, n \rightarrow \infty$ için $d(g(x_n), g(x_m)) \rightarrow 0$ olur. O halde $(g(x_n))$, $g(X)$ de bir Cauchy dizisidir. Hipotez

gereğince $g(X)$ tam olduğundan $g(X)$ de bir q elemanı vardır öyle ki $g(x_n) \rightarrow q, (n \rightarrow \infty)$ olur. Sonuç olarak X de bir p noktası bulunabilir öyle ki $g(p) = q$ olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} d(g(x_n), f(p)) &= d(f(x_{n-1}), f(p)) \\ &\leq k(d(f(x_{n-1}), g(p)) + d(f(p), g(x_{n-1}))) \\ &= k(d(g(x_n), g(p)) + d(f(p), g(x_{n-1}))) \\ &\leq k(d(g(x_n), g(p)) + d(f(p), g(x_n)) + d(g(x_n), g(x_{n-1}))) \end{aligned}$$

yazabiliriz. Gerekli düzenlemeler yapılsa

$$d(g(x_n), f(p)) \leq \frac{k}{1-k} (d(g(x_n), g(p)) + d(g(x_n), g(x_{n-1})))$$

elde edilir. P normal K sabiti ile verilen normal konik olduğundan

$$\|d(g(x_n), f(p))\| \leq K \frac{k}{1-k} (\|d(g(x_n), g(p))\| + \|d(g(x_n), g(x_{n-1}))\|) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

olacağından $d(g(x_n), f(p)) \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty)$ olur. Konik metrik uzaylarda limitin tekliğinden $g(x_n) \rightarrow f(p) = q, (n \rightarrow \infty)$ olacaktır. O halde $f(p) = g(p) = q$ olur. Şimdi f ve g dönüşümlerinin tek çakışma noktası olduğunu gösterelim. Bir $r \in X$ için $f(r) = g(r)$ olsun. O halde

$$d(g(r), g(p)) = d(f(r), f(p)) \leq k(d(f(r), g(p)) + d(f(p), g(r))) = 2kd(g(r), g(p))$$

olur. Önerme 2.4.2. gereğince $d(g(r), g(p)) = 0$ ve dolayısıyla $g(r) = g(p)$ olur. f ve g zayıf bağdaşabilir ise Önerme 4.1.1. gereğince f ve g tek ortak sabit noktaya sahiptir ve bu nokta $q \in X$ noktasıdır.

Teorem 4.1.4.

(X, d) konik metrik uzay, P normal K sabitli normal konik ve $f, g: X \rightarrow X$ dönüşümleri de $f(X) \subseteq g(X)$ şartını sağlasınlar. Kabul eldim ki $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 1)$ ve $\alpha + \beta + \gamma < 1$ olmak üzere $\forall x, y \in X$ için

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(f(x), g(x)) + \beta d(f(y), g(y)) + \gamma d(g(x), g(y))$$

koşulu sağlansın. Ayrıca f ve g zayıf bağdaşabilir dönüşümler olsunlar. Eğer $f(X)$ veya $g(X)$, X in tam alt uzayı iseler f ve g , X de tek ortak noktaya sahiptir. Ve $\forall x \in X$ başlangıç noktası için $f - g$ dizisi bu ortak sabit noktaya yakınsar [9].

İspat

Keyfî bir $x_0 \in X$ noktası için $f - g$ dizisi olan $(f(x_n))$ dizisinin $f(X)$ de bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Eğer bazı $n \in N$ değerleri için $f(x_n) = f(x_{n-1})$ ise o zaman $m > n$ olacak şekilde ki $\forall m \in N$ için $f(x_m) = f(x_n)$ olup $(f(x_n))$ bir Cauchy dizisidir. O halde kabul edelim ki $\forall n \in N$ için $f(x_n) \neq f(x_{n-1})$ olsun. Şu halde

$$\begin{aligned} d(f(x_{n+1}), f(x_n)) &\leq \alpha d(f(x_{n+1}), g(x_{n+1})) + \beta d(f(x_n), g(x_n)) + \gamma d(g(x_{n+1}), g(x_n)) \\ &= \alpha d(f(x_{n+1}), f(x_n)) + \beta d(f(x_n), f(x_{n-1})) + \gamma d(f(x_n), f(x_{n-1})) \end{aligned}$$

yazılabilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$d(f(x_{n+1}), f(x_n)) \leq \frac{\beta + \gamma}{1 - \alpha} d(f(x_n), f(x_{n-1})) = k \cdot d(f(x_n), f(x_{n-1})), \quad k = \frac{\beta + \gamma}{1 - \alpha} \in [0, 1)$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilirse

$$d(f(x_{n+1}), f(x_n)) \leq k d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq \dots \leq k^n d(f(x_1), f(x_0))$$

olur. O halde $n > m$ için

$$\begin{aligned} d(f(x_n), f(x_m)) &\leq d(f(x_n), f(x_{n-1})) + d(f(x_{n-1}), f(x_{n-2})) + \dots + d(f(x_{m+1}), f(x_m)) \\ &\leq (k^{n-1} + k^{n-2} + \dots + k^m) d(f(x_1), f(x_0)) \\ &\leq \frac{k^m}{1 - k} d(f(x_1), f(x_0)) \end{aligned}$$

olur. P normal K sabitli normal konik olduğundan

$$\|d(f(x_n), f(x_m))\| \leq K \frac{k^m}{1 - k} \|d(f(x_1), f(x_0))\|$$

yazılabilir. Burada $m \rightarrow \infty$ için eşitsizliğin sağ tarafı sıfıra gideceğinden $m, n \rightarrow \infty$ için $d(f(x_n), f(x_m)) \rightarrow 0$ olur. O halde $(f(x_n))$ bir Cauchy dizisidir. Varsayım gereği $f(X)$ tam olduğundan bir $p \in f(X) \subset g(X)$ bulunabilir öyle ki $f(x_n) \rightarrow p$ ve $g(x_n) \rightarrow p$ olur. $g(q) = p$ olacak şekilde bir $q \in X$ noktası seçelim. $f(q) = g(q)$ olduğunu gösterelim.

$$d(f(x_n), f(q)) \leq \alpha d(f(x_n), g(x_n)) + \beta d(f(q), g(q)) + \gamma d(g(x_n), g(q))$$

yazılabilir. Bu ifadenin her iki tarafının $n \rightarrow \infty$ için limiti alınır

$$d(p, f(q)) \leq \alpha d(p, p) + \beta d(f(q), p) + \gamma d(p, p) = \beta d(f(q), p)$$

elde edilir. Önerme 2.4.2. gereği $d(p, f(q)) = 0$ olur. Bu ise $f(q) = g(q) = p$ olmasıdır.

f ile g nin zayıf bağdaşan dönüşümler olmasından $f(q) = g(q) = p$ ise

$$f(p) = f(g(q)) = g(g(q)) = g(p)$$

olur. Şimdi de $f(p) = g(p) = p$ olduğunu gösterelim. Eğer $f(p) \neq p$ ise

$$0 < d(f(p), f(q)) \leq \alpha d(f(p), g(p)) + \beta d(f(q), g(q)) + \gamma d(g(p), g(q)) \\ = \gamma d(f(p), f(q))$$

olur ki $\gamma \in [0,1)$ olmasından dolayı bu bir çelişkidir. O halde $f(p) = g(p) = p$ olmalıdır. O zaman $p \in X$ noktası f ve g dönüşümlerinin ortak sabit noktasıdır. Şimdi bu noktanın tek olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki bir $r \in X$ noktası için $f(r) = g(r) = r$ olsun. O halde

$$0 \leq d(r, p) = d(f(r), f(p)) \leq \alpha d(f(r), g(r)) + \beta d(f(p), g(p)) + \gamma d(g(r), g(p)) \\ = \gamma d(g(r), g(p)) = \gamma d(r, p)$$

elde edilir. Önerme 2.4.2. gereği $d(r, p) = 0$ olur ki bu ise $p = r$ olmasıdır. O halde ortak sabit nokta tektir. Ayrıca burada alınan $x_0 \in X$ noktası keyfî bir nokta olduğundan $\forall x \in X$ için $f - g$ dizisi bu ortak sabit noktaya yakınsar.

Bu teoremden $g = I_X$ alınırsa aşağıda ki önerme elde edilir.

Önerme 4.1.2.

(X, d) tam konik metrik uzay, P normal K sabitli normal konik ve $f : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki $\alpha, \beta, \gamma \in [0,1)$ ve $\alpha + \beta + \gamma < 1$ olmak üzere $\forall x, y \in X$ için

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(f(x), x) + \beta d(f(y), y) + \gamma d(x, y)$$

koşulu sağlansın. O zaman f, X de tek sabit noktaya sahiptir. Ayrıca $\forall x \in X$ başlangıç noktası için $(f^n(x))$ dizisi bu sabit noktaya yakınsar [9].

Bu önermede sırasıyla $\alpha = \beta = 0$ ve $\alpha = \beta, \gamma = 0$ alınırsa bölüm 3 de ispatlanan teoremler elde edilir.

Teorem 4.1.5.

(X, d) tam konik metrik uzay ve P normal K sabiti ile normal konik olsun. Kabul edelim ki $f, g : X \rightarrow X$ dönüşümleri $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ ve $\alpha + 2\beta + 2\gamma < 1$ olmak üzere $\forall x, y \in X$ için

$$d(f(x), g(y)) \leq \alpha d(x, y) + \beta (d(x, f(x)) + d(y, g(y))) + \gamma (d(x, g(y)) + d(y, f(x)))$$

şartını sağlasın. O zaman f ve g , X de tek ortak sabit noktaya sahiptir. Ayrıca f nin her sabit noktası g ninde bir sabit noktasıdır. Ve bunun terside doğrudur [10].

İspat

$x_0 \in X$ keyfi bir nokta olmak üzere (x_n) dizisini $x_{2n+1} = f(x_{2n})$ ve $x_{2n+2} = g(x_{2n+1})$ $n = 0, 1, 2, \dots$ şeklinde tanımlayalım. Şu halde

$$\begin{aligned} d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) &= d(f(x_{2n}), g(x_{2n+1})) \\ &\leq \alpha d(x_{2n}, x_{2n+1}) + \beta (d(x_{2n}, f(x_{2n})) + d(x_{2n+1}, g(x_{2n+1}))) \\ &\quad + \gamma (d(x_{2n}, g(x_{2n+1})) + d(x_{2n+1}, f(x_{2n}))) \\ &= (\alpha + \beta + \gamma) d(x_{2n}, x_{2n+1}) + (\beta + \gamma) d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \leq \frac{\alpha + \beta + \gamma}{1 - \beta - \gamma} d(x_{2n}, x_{2n+1}) = k d(x_{2n}, x_{2n+1}), \quad k = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{1 - \beta - \gamma} \in [0, 1)$$

olur. Benzer olarak

$$d(x_{2n+3}, x_{2n+2}) \leq k \cdot d(x_{2n+2}, x_{2n+1})$$

yazılabilir. O halde $\forall n \in N$ için

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq k \cdot d(x_n, x_{n+1}) \leq k^2 \cdot d(x_{n-1}, x_n) \leq \dots \leq k^{n+1} d(x_0, x_1)$$

elde edilir. Şimdi $n > m$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \dots + d(x_{m+1}, x_m) \\ &\leq (k^{n-1} + k^{n-2} + \dots + k^m) d(x_1, x_0) \\ &\leq \frac{k^m}{1 - k} d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

yazılabilir. P normal K sabiti ile normal konik olduğundan

$$\|d(x_n, x_m)\| \leq K \frac{k^m}{1 - k} \|d(x_1, x_0)\|$$

olur. Eşitsizliğin sağ tarafı $m \rightarrow \infty$ için sifıra yakınsayacağından $m, n \rightarrow \infty$ için

$d(x_n, x_m) \rightarrow 0$ olur. Bu ise (x_n) dizisinin X de bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir.

Hipotez gereği X tam olduğundan bir $p \in X$ vardır öyle ki $x_n \rightarrow p$ ($n \rightarrow \infty$) olur.

Şimdi $g(p) = p$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
d(p, g(p)) &\leq d(p, x_{2n+1}) + d(x_{2n+1}, g(p)) = d(p, x_{2n+1}) + d(f(x_{2n}), g(p)) \\
&\leq d(p, x_{2n+1}) + \alpha d(x_{2n}, p) + \beta(d(x_{2n}, x_{2n+1}) + d(p, g(p))) \\
&\quad + \gamma(d(x_{2n}, g(p)) + d(p, x_{2n+1})) \\
&\leq d(p, x_{2n+1}) + \alpha d(x_{2n}, p) + \beta(d(x_{2n}, x_{2n+1}) + d(p, g(p))) \\
&\quad + \gamma(d(x_{2n}, p) + d(p, g(p)) + d(p, x_{2n+1}))
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$d(p, g(p)) \leq \frac{1}{1-\beta-\gamma} (d(p, x_{2n+1}) + \alpha d(x_{2n}, p) + \beta d(x_{2n}, x_{2n+1}) + \gamma(d(x_{2n}, p) + d(p, x_{2n+1})))$$

eşitsizliği elde edilir. P normal K sabiti ile normal konik olduğundan

$$\|d(p, g(p))\| \leq \frac{K}{1-\beta-\gamma} [\|d(p, x_{n+1})\| + \alpha \|d(x_n, p)\| + \beta \|d(x_n, x_{n+1})\| + \gamma \|d(x_n, p)\| + \gamma \|d(p, x_{n+1})\|]$$

yazılabilir. Her iki tarafın $n \rightarrow \infty$ için limiti alınırsa eşitsizliğin sağ tarafı sıfıra yaklaşacağından $\|d(p, g(p))\| = 0$ olur ki norm ve konik metrik özelliğinden $g(p) = p$ olur. Şimdi $f(p) = p$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
d(p, f(p)) &= d(f(p), g(p)) \\
&\leq \alpha d(p, p) + \beta(d(p, f(p)) + d(p, g(p))) + \gamma(d(p, g(p)) + d(p, f(p))) \\
&\leq (\alpha + \beta)d(p, f(p))
\end{aligned}$$

olup Önerme 2.4.2. gereğince $d(p, f(p)) = 0$ olur. Bu ise $f(p) = p$ olmasıdır. Şimdi de ortak sabit noktanın tek olduğunu gösterelim. Bunun için kabul eldim ki $q \in X$ noktası için $f(q) = g(q) = q$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned}
d(p, q) &= d(f(p), g(q)) \\
&\leq \alpha d(p, q) + \beta(d(p, f(p)) + d(q, g(q))) + \gamma(d(p, g(q)) + d(q, f(p))) \\
&= (\alpha + 2\gamma)d(p, q)
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde Önerme 2.4.2. gereğince $d(p, q) = 0$ olup bu ise $p = q$ olmasını gerektirir. O halde ortak sabit nokta tektir.

Önerme 4.1.3.

(X, d) tam konik metrik uzay ve P normal K sabiti ile normal konik olsun. Kabul edelim ki $f : X \rightarrow X$ dönüşümü $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$, $\alpha + 2\beta + 2\gamma < 1$ ve p, q sabit pozitif sayılar olmak üzere $\forall x, y \in X$ için

$$d(f^q(x), f^q(y)) \leq \alpha d(x, y) + \beta(d(x, f^p(x)) + d(y, f^q(y))) + \gamma(d(x, f^q(y)) + d(y, f^p(x)))$$

şartını sağlasın. O zaman f , X de tek sabit noktaya sahiptir.

İspat

Teorem 4.1.5. de $f = f^p$ ve $g = f^q$ alınırsa ispat benzer şekilde yapılır.

Önerme 4.1.4.

(X, d) tam konik metrik uzay ve P normal K sabiti ile normal konik olsun. Kabul edelim ki $f : X \rightarrow X$ dönüşümü $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ ve $\alpha + 2\beta + 2\gamma < 1$ olmak üzere $\forall x, y \in X$ için

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y) + \beta(d(x, f(x)) + d(y, f(y))) + \gamma(d(x, f(y)) + d(y, f(x)))$$

şartını sağlasın. O zaman f , X de tek sabit noktaya sahiptir.

İspat

Önerme 4.1.3. de $p = q = 1$ alınarak ispat yapılır.

Önerme 4.1.5.

(X, d) tam konik metrik uzay ve P normal K sabiti ile normal konik olsun. Kabul edelim ki $f : X \rightarrow X$ dönüşümü $\forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ için $a_i \geq 0$ ve $\sum_{i=1}^5 a_i < 1$ olmak üzere

$\forall x, y \in X$ için

$$d(f(x), f(y)) \leq a_1.d(x, y) + a_2.d(x, f(x)) + a_3.d(y, f(y)) + a_4.d(x, f(y)) + a_5.d(y, f(x))$$

şartını sağlasın. O zaman f , X de tek sabit noktaya sahiptir.

İspat

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y) + \beta(d(x, f(x)) + d(y, f(y))) + \gamma(d(x, f(y)) + d(y, f(x)))$$

$$d(f(y), f(x)) \leq \alpha d(y, x) + \beta(d(y, f(y)) + d(x, f(x))) + \gamma(d(y, f(x)) + d(x, f(y)))$$

yazılabileceğinden burada

$$d(x, f(x)) = m_2 \text{ ve } d(y, f(y)) = m_3$$

olarak alınırsa

$\beta(m_2 + m_3) = a_2m_2 + a_3m_3$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{a_2m_2 + a_3m_3}{m_2 + m_3} = \frac{a_2m_2 + a_2m_3 - a_2m_3 + a_3m_3 + a_3m_2 - a_3m_2}{m_2 + m_3} \\ &= (a_2 + a_3) - \frac{a_2m_3 + a_3m_2}{m_2 + m_3} = (a_2 + a_3) - \beta\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada gerekli düzenlemeler yapılsa $\beta = \frac{a_2 + a_3}{2}$ olarak bulunur. Benzer

şekilde $\gamma = \frac{a_4 + a_5}{2}$ ve $\alpha = a_1$ olarak alınırsa ispat Önerme 4.1.4. deki gibi yapılır.

Önerme 4.1.6.

(X, d) tam konik metrik uzay ve P normal K sabiti ile normal konik olsun. Kabul edelim ki $f : X \rightarrow X$ dönüşümü $\alpha, \beta \geq 0$ ve $\alpha + 2\beta < 1$ olmak üzere $\forall x, y \in X$ için

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y) + \beta(d(x, f(x)) + d(y, f(y)))$$

koşulunu sağlasın. Bu takdirde f , X de tek sabit noktaya sahiptir.

İspat

Önerme 4.1.4. de $\gamma = 0$ alınırsa ispat benzer olarak yapılır.

4.2. Periyodik Nokta Teoremleri

Açık olarak bir p noktası f dönüşümünün sabit noktası ise $\forall n \in \mathbb{N}$ için f^n dönüşümünün de sabit noktasıdır. Çünkü $f(p) = p$ ise

$$f^n(p) = f(f^{n-1}(p)) = f^{n-1}(p) = \dots = f(p) = p$$

olur. Buna karşın bunun tersi her zaman doğru değildir. Örneğin $X = [0, 1]$ ve

$f(x) = 1 - x$ şeklinde tanımlanırsa $x = \frac{1}{2}$ noktası f fonksiyonunun tek sabit noktasıdır.

Fakat f fonksiyonunun her çift yinelemesi birim dönüşüm olur ki bu dönüşüm için $[0, 1]$ aralığındaki her nokta bir sabit noktadır [10].

Tanım 4.2.1.

$f : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olmak üzere $\{x \in X : f(x) = x\}$ kümesine f dönüşümünün sabit noktalarının kümesi denir. Ve $F(f)$ ile gösterilir [10].

Tanım 4.2.2.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $F(f) = F(f^n)$ ise f dönüşümü (P) özelliğine sahiptir denir. Eğer $F(f) \cap F(g) = F(f^n) \cap F(g^n)$ ise f ve g dönüşümleri (Q) özelliğine sahiptir denir.[10]

Teorem 4.2.1.

(X, d) konik metrik uzay ve P normal K sabiti ile normal konik olsun. $f : X \rightarrow X$ dönüşümü

i-) $\forall x \in X$ ve $0 \leq k < 1$ veya

ii-) Kesin eşitsizlik ile $k = 1$ ve $\forall x \in X$ için $f(x) \neq x$ olduğunda

$$d(f(x), f^2(x)) \leq kd(x, f(x))$$

şartını sağlasın. Eğer $F(f) \neq \emptyset$ ise f , (P) özelliğine sahiptir [10].

İspat

$n > 1$ olarak alalım. Eğer $n = 1$ ise bu önemsizdir. Kabul edelim ki (i) şartı sağlansın. $p \in F(f^n)$ keyfi bir eleman olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} d(p, f(p)) &= d(f(f^{n-1}(p)), f^2(f^{n-1}(p))) \\ &\leq kd(f^{n-1}(p), f^n(p)) \\ &\leq k^2 d(f^{n-2}(p), f^{n-1}(p)) \leq \dots \leq k^n d(p, f(p)) \end{aligned}$$

elde edilir. P normal K sabiti ile normal konik olduğundan

$$\|d(p, f(p))\| \leq Kk^n \|d(p, f(p))\|$$

yazılabilir. $0 \leq k < 1$ olduğundan $n \rightarrow \infty$ için sağ taraf sıfıra yaklaşır. O halde

$$\|d(p, f(p))\| = 0 \Rightarrow f(p) = p$$

olur. Bu ise $p \in F(f)$ olduğunu gösterir. Bundan dolayı $F(f^n) \subset F(f)$ olur. Diğer taraftan $F(f) \subset F(f^n)$ olduğu açıktır. O halde $F(f) = F(f^n)$ olur. Yani f , (P) özelliğine sahiptir. Şimdi

Kabul edelim ki f , (ii) şartını sağlasın. Burada $f(p) \neq p$ ve $k = 1$ için (i) ifadesinden

$$d(p, f(p)) < d(p, f(p))$$

olacaktır ki bu bir çelişkidir. O halde her durumda $f(p) = p$ olup $F(f) = F(f^n)$ sağlanır.

Teorem 4.2.2.

(X, d) tam konik metrik uzay ve P normal K sabiti ile normal konik olsun. Kabul edelim ki $f, g : X \rightarrow X$ dönüşümleri $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ ve $\alpha + 2\beta + 2\gamma < 1$ olmak üzere $\forall x, y \in X$ için

$$d(f(x), g(y)) \leq \alpha d(x, y) + \beta(d(x, f(x)) + d(y, g(y))) + \gamma(d(x, g(y)) + d(y, f(x)))$$

koşulunu sağlasın. O zaman f ve g (Q) özelliğine sahiptir [10].

İspat

Teorem 4.1.5. gereğince f ve g , X de ortak sabit noktaya sahiptir.

$p \in F(f^n) \cap F(g^n)$ olsun. Şimdi

$$\begin{aligned} d(p, g(p)) &= d(f(f^{n-1}(p)), g(g^n(p))) \\ &\leq \alpha d(f^{n-1}(p), g^n(p)) + \beta[d(f^{n-1}(p), f^n(p)) + d(g^n(p), g^{n+1}(p))] \\ &\quad + \gamma[d(f^{n-1}(p), g^{n+1}(p)) + d(g^n(p), f^n(p))] \\ &\leq \alpha d(f^{n-1}(p), p) + \beta[d(f^{n-1}(p), p) + d(p, g(p))] \\ &\quad + \gamma[d(f^{n-1}(p), g(p)) + d(p, p)] \end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$d(p, g(p)) \leq kd(f^{n-1}(p), p), \quad k = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{1 - \beta - \gamma} < 1$$

olur. Bu şekilde devam edilirse

$$d(p, g(p)) \leq kd(f^{n-1}(p), p) \leq k^2 d(f^{n-2}(p), p) \leq \dots \leq k^n d(f(p), p)$$

elde edilir. P normal K sabiti ile normal konik olduğundan

$$\|d(p, g(p))\| \leq Kk^n d(p, f(p))$$

olur. Burada $k < 1$ olduğundan $n \rightarrow \infty$ için sağ taraf sıfıra gider. O halde $g(p) = p$ elde edilir. Teorem 4.1.5. gereği g nin her sabit noktası f ninde bir sabit noktası olacağından $f(p) = p$ olup bu ise $F(f) \cap F(g) = F(f^n) \cap F(g^n)$ olduğunu gösterir.

5. BÖLÜM

NORMALLİK ŞARTININ İHMAL EDİLME DURUMU

Örnek 2.4.2. de olduğu gibi normal olmayan konikler de vardır. Bu bölümde konikler için normallik şartı ihmal edilerek bazı şartları sağlayan dönüşümler için sabit nokta ve ortak sabit nokta teoremleri ispatlanacaktır.

5.1. Normallik Şartı Gerektirmeyen Konikler İçin Sabit Nokta Teoremleri

Teorem 5.1.1.

(X, d) tam konik metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ dönüşümü büzülme dönüşümü koşulunu sağlasın. Yani $k \in [0,1)$ olmak üzere $\forall x, y \in X$ için

$$d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y)$$

olsun. O zaman T, X de tek sabit noktaya sahiptir. Ayrıca $\forall x \in X$ için $(T^n(x))$ iterasyon dizisi bu sabit noktaya yakınsar [4].

İspat

$x_0 \in X$ keyfi bir nokta olsun. Bu takdirde $(T^n(x))$ iterasyon dizisini

$$x_1 = T(x_0), x_2 = T(x_1) = T^2(x_0), \dots, x_{n+1} = T(x_n) = T^{n+1}(x_0), \dots$$

şeklinde oluşturalım. Buradan

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(T(x_n), T(x_{n-1})) \leq kd(x_n, x_{n-1}) \leq k^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq \dots \leq k^n d(x_1, x_0)$$

elde edilir. Bu yüzden $n > m$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \dots + d(x_{m+1}, x_m) \\ &\leq (k^{n-1} + k^{n-2} + \dots + k^m) d(x_1, x_0) \leq \frac{k^m}{1-k} d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

yazılabilir. O halde

$m \rightarrow \infty$ için $\frac{k^m}{1-k} d(x_1, x_0) \rightarrow 0$ olacağından Lemma 2.5.2. gereğince $c \in P^o$ için

$\exists n_1 \in N$ vardır öyle ki $\forall m > n_1$ için $\frac{k^m}{1-k} d(x_1, x_0) << c$ olur. O halde $\forall n, m > n_1$ için

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{k^m}{1-k} d(x_1, x_0) << c \Rightarrow d(x_n, x_m) << c$$

elde edilir. Bu yüzden (x_n) , X de bir Cauchy dizisidir. Hipotez gereğince (X, d) tam konik metrik uzay olduğundan bir $p \in X$ vardır öyle ki $x_n \rightarrow p (n \rightarrow \infty)$ olur. O halde seçilen bir $n_2 \in N$ için $n > n_2$ olduğunda

$$d(x_n, p) << \frac{c}{2}$$

olur. Bu takdirde

$$\begin{aligned} d(T(p), p) &\leq d(T(p), T(x_n)) + d(T(x_n), p) \\ &\leq kd(x_n, p) + d(x_{n+1}, p) \\ &<< \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade $\forall c \in P^o$ için sağlanacağından $\forall n > n_2$ ve $\forall m \geq 1$ için

$$d(T(p), p) << \frac{c}{m}$$

yazılabilir. O halde $\forall m \geq 1$ için $\frac{c}{m} - d(T(p), p) \in P$, $\frac{c}{m} \rightarrow 0 (m \rightarrow \infty)$ ve P kapalı olduğundan $-d(T(p), p) \in P$ olur. Fakat $d(T(p), p) \in P$ olup koniğin (iii) özelliği gereği $d(T(p), p) = 0$ olur ki bu $T(p) = p$ olmasını gerektirir. O halde $p \in X$ noktası T dönüşümünün sabit noktasıdır. Eğer $r \in X$ noktası T dönüşümü için bir diğer sabit nokta ise o zaman

$$d(p, r) = d(T(p), T(r)) \leq kd(p, r)$$

olacaktır. Önerme 2.4.2. gereğince $d(p, r) = 0$ olup bu ise konik metrik özelliğinden $p = r$ olmasını gerektirir. O halde sabit nokta tektir. Ayrıca burada alınan $x_0 \in X$ noktası keyfî bir nokta olduğundan $\forall x \in X$ için $(T^n(x))$ iterasyon dizisi bu sabit noktaya yakınsar.

Teorem 5.1.2.

(X, d) tam konik metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ dönüşümü $k \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ olmak üzere

$\forall x, y \in X$ için

$$d(T(x), T(y)) \leq k(d(T(x), x) + d(T(y), y))$$

büzülme koşulunu sağlasın. O zaman T, X de tek sabit noktaya sahiptir. Ayrıca

$\forall x \in X$ için $(T^n(x))$ iterasyon dizisi bu sabit noktaya yakınsar [4].

İspat

Keyfi bir $x_0 \in X$ noktası için $(T^n(x))$ iterasyon dizisini

$$x_1 = T(x_0), x_2 = T(x_1) = T^2(x_0), \dots, x_{n+1} = T(x_n) = T^{n+1}(x_0), \dots$$

şeklinde oluşturalım. Buna göre

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(T(x_n), T(x_{n-1})) \leq k(d(T(x_n), x_n) + d(T(x_{n-1}), x_{n-1})) \\ &= k(d(x_{n+1}, x_n) + d(x_n, x_{n-1})) \end{aligned}$$

elde edilir. Bundan dolayı

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{k}{1-k} d(x_n, x_{n-1}) = h d(x_n, x_{n-1}) \leq \dots \leq h^n d(x_1, x_0), \quad h = \frac{k}{1-k} \in [0, 1)$$

yazılabilir. Şimdi $n > m$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \dots + d(x_{m+1}, x_m) \\ &\leq (h^{n-1} + h^{n-2} + \dots + h^m) d(x_1, x_0) \leq \frac{h^m}{1-h} d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

yazılabilir. $m \rightarrow \infty$ için $\frac{h^m}{1-h} d(x_1, x_0) \rightarrow 0$ olacağından Lemma 2.5.2. gereğince $c \in P^o$

için $\exists n_1 \in N$ vardır öyle ki $\forall m > n_1$ için $\frac{h^m}{1-h} d(x_1, x_0) << c$ olur. O halde $\forall n, m > n_1$

için

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{h^m}{1-h} d(x_1, x_0) << c \Rightarrow d(x_n, x_m) << c$$

elde edilir. Bu yüzden (x_n) , X de bir Cauchy dizisidir. Hipotez gereğince (X, d) tam

konik metrik uzay olduğundan bir $p \in X$ vardır öyle ki $x_n \rightarrow p (n \rightarrow \infty)$ olur. Bir

$n_2 \in N$ seçeli öyle ki $\forall n > n_2$ için

$$d(x_{n+1}, x_n) < \frac{c(1-k)}{2k} \text{ ve } d(x_{n+1}, p) < \frac{c(1-k)}{2}$$

olsun. Bundan dolayı $\forall n > n_2$ için

$$\begin{aligned} d(T(p), p) &\leq d(T(p), T(x_n)) + d(T(x_n), p) \\ &\leq k(d(T(x_n), x_n) + d(T(p), p)) + d(x_{n+1}, p) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$d(T(p), p) \leq \frac{1}{1-k} (kd(x_{n+1}, x_n) + d(x_{n+1}, p)) < \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c$$

olur. Bu ifade $\forall c \in P^o$ için sağlanacağından $\forall n > n_2$ ve $\forall m \geq 1$ için

$$d(T(p), p) < \frac{c}{m}$$

yazılabilir. O halde $\forall m \geq 1$ için $\frac{c}{m} - d(T(p), p) \in P$, $\frac{c}{m} \rightarrow 0 (m \rightarrow \infty)$ ve P kapalı olduğundan $-d(T(p), p) \in P$ olur. Fakat $d(T(p), p) \in P$ olup koniğin (iii) özelliği gereği $d(T(p), p) = 0$ olur ki bu $T(p) = p$ olmasını gerektirir. O halde $p \in X$ noktası T dönüşümünün sabit noktasıdır. Eğer $r \in X$ noktası T dönüşümü için bir diğer sabit nokta ise o zaman

$$0 \leq d(p, r) = d(T(p), T(r)) \leq k(d(T(p), p) + d(T(r), r)) = 0$$

$$d(p, r) = 0$$

$$p = r$$

olur ki bu ise sabit noktanın tek olduğunu gösterir. Ayrıca burada alınan $x_0 \in X$ noktası keyfi bir nokta olduğundan $\forall x \in X$ için $(T^n(x))$ iterasyon dizisi bu sabit noktaya yakınsar.

Teorem 5.1.3.

(X, d) tam konik metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ dönüşümü $k \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ olmak üzere

$\forall x, y \in X$ için

$$d(T(x), T(y)) \leq k(d(T(x), y) + d(T(y), x))$$

büzülme koşulunu sağlasın. O zaman T , X de tek sabit noktaya sahiptir. Ayrıca $\forall x \in X$ için $(T^n(x))$ iterasyon dizisi bu sabit noktaya yakınsar [4].

İspat

Keyfi bir $x_0 \in X$ noktası için $(T^n(x))$ iterasyon dizisini

$$x_1 = T(x_0), x_2 = T(x_1) = T^2(x_0), \dots, x_{n+1} = T(x_n) = T^{n+1}(x_0), \dots$$

şeklinde oluşturalım. Buna göre

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(T(x_n), T(x_{n-1})) \leq k(d(T(x_n), x_{n-1}) + d(T(x_{n-1}), x_n)) \\ &= k(d(x_{n+1}, x_{n-1}) + d(x_n, x_n)) \\ &\leq k(d(x_{n+1}, x_n) + d(x_n, x_{n-1})) \end{aligned}$$

olur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{k}{1-k} d(x_n, x_{n-1}) = h d(x_n, x_{n-1}) \leq \dots \leq h^n d(x_1, x_0), \quad h \in [0,1)$$

elde edilir. O halde $n > m$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \dots + d(x_{m+1}, x_m) \\ &\leq (h^{n-1} + h^{n-2} + \dots + h^m) d(x_1, x_0) \leq \frac{h^m}{1-h} d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

yazılabilir. $m \rightarrow \infty$ için $\frac{h^m}{1-h} d(x_1, x_0) \rightarrow 0$ olacağından Lemma 2.5.2. gereğince $c \in P^o$

için $\exists n_1 \in N$ vardır öyle ki $\forall m > n_1$ için $\frac{h^m}{1-h} d(x_1, x_0) << c$ olur. O halde $\forall n, m > n_1$

için

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{h^m}{1-h} d(x_1, x_0) << c \Rightarrow d(x_n, x_m) << c$$

elde edilir. Bu yüzden (x_n) , X de bir Cauchy dizisidir. Hipotez gereğince (X, d) tam konik metrik uzay olduğundan bir $p \in X$ vardır öyle ki $x_n \rightarrow p (n \rightarrow \infty)$ olur. Bir $n_2 \in N$ seçeli öyle ki $\forall n > n_2$ için

$$d(x_n, p) << \frac{c(1-k)}{3}$$

olsun. O halde $\forall n > n_2$ için

$$\begin{aligned} d(T(p), p) &\leq d(T(p), T(x_n)) + d(T(x_n), p) \\ &\leq k(d(T(x_n), p) + d(T(p), x_n)) + d(x_{n+1}, p) \\ &\leq k(d(T(p), p) + d(x_n, p) + d(x_{n+1}, p)) + d(x_{n+1}, p) \end{aligned}$$

olur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$d(T(p), p) \leq \frac{1}{1-k} [k(d(x_n, p) + d(x_{n+1}, p)) + d(x_{n+1}, p)] < \frac{c}{3} + \frac{c}{3} + \frac{c}{3} = c$$

elde edilir. Bu ifade $\forall c \in P^o$ için sağlanacağından $\forall n > n_2$ ve $\forall m \geq 1$ için

$$d(T(p), p) < \frac{c}{m}$$

yazılabilir. O halde $\forall m \geq 1$ için $\frac{c}{m} - d(T(p), p) \in P$, $\frac{c}{m} \rightarrow 0 (m \rightarrow \infty)$ ve P kapalı olduğundan $-d(T(p), p) \in P$ olur. Fakat $d(T(p), p) \in P$ olup koniğin (iii) özelliği gereği $d(T(p), p) = 0$ olur ki bu $T(p) = p$ olmasını gerektirir. O halde $p \in X$ noktası T dönüşümünün sabit noktasıdır. Eğer $r \in X$ noktası T dönüşümü için bir diğer sabit nokta ise o zaman

$$\begin{aligned} d(p, r) &= d(T(p), T(r)) \leq k(d(T(p), r) + d(T(r), p)) \\ &\leq k(d(p, r) + d(r, p)) \\ &= 2kd(p, r) \end{aligned}$$

olur. Önerme 2.4.2. gereğince $d(p, r) = 0$ olup bu ise konik metrik özelliğinden $p = r$ olmasını gerektirir. O halde sabit nokta tektir. Ayrıca burada alınan $x_0 \in X$ noktası keyfi bir nokta olduğundan $\forall x \in X$ için $(T^n(x))$ iterasyon dizisi bu sabit noktaya yakınsar.

Tanım 5.1.1.

E sıralı Banach uzayı ve $P \subset E$ bir konik olsun. Azalmayan bir $\varphi: P \rightarrow P$ fonksiyonu için

- i-) $\varphi(0) = 0$ ve $0 < \varphi(w) < w$, $w \in P - \{0\}$
- ii-) $w \in P^o$ olması $w - \varphi(w) \in P^o$ olmasını gerektirir.
- iii-) $\forall w \in P - \{0\}$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(w) = 0$

şartları sağlanırsa $\varphi: P \rightarrow P$ fonksiyonuna φ -dönüşümü denir [8].

Teorem 5.1.4.

(X, d) konik metrik uzay, P bir konik ve $f, g: X \rightarrow X$ dönüşümleri φ - çift dönüşümler olsun. Yani bir φ dönüşümü vardır öyle ki $\forall x, y \in X$ için

$$d(f(x), f(y)) \leq \varphi(d(g(x), g(y)))$$

olsun. Kabul eldim ki f ve g dönüşümleri zayıf bağdaşan ve $f(X) \subseteq g(X)$ olsun. Eğer $f(X)$ veya $g(X)$ uzaylarından en az biri tam ise f ve g , X de tek ortak sabit noktaya sahiptir. Ayrıca $\forall x \in X$ için $f - g$ dizisi olan $(f(x_n))$ dizisi bu noktaya yakınsar [8].

İspat

Keyfi bir $x_0 \in X$ noktası alalım. $(f(x_n))$ dizisinin $f(X)$ uzayında Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Bazı $n \in N$ değerleri için $f(x_n) = f(x_{n-1})$ ise $m > n$ olacak şekildeki $\forall m \in N$ için $f(x_n) = f(x_m)$ olacağından $(f(x_n))$ bir Cauchy dizisidir. Kabul eldim ki $\forall n \in N$ için $f(x_n) \neq f(x_{n-1})$ olsun. Buna göre

$$d(f(x_{n+1}), f(x_n)) \leq \varphi(d(g(x_{n+1}), g(x_n))) = \varphi(d(f(x_n), f(x_{n-1})))$$

olur. Bu şekilde devam edilirse

$$d(f(x_{n+1}), f(x_n)) \leq \varphi(d(f(x_n), f(x_{n-1}))) \leq \dots \leq \varphi^n(d(f(x_1), f(x_0)))$$

elde edilir. Sabit bir $0 < c$ ve bir $\delta > 0$ sayısı seçelim öyle ki $B(0, \delta) = \{y \in E : \|y\| < \delta\}$ olmak üzere $c - \varphi(c) + B(0, \delta) \subset P^o$ olsun. Ayrıca bir $n_0 \in N$ seçelim öyle ki $\forall m > n_0$ için $\varphi^m(d(f(x_1), f(x_0))) \in B(0, \delta)$ olsun. O zaman $\forall m > n_0$ için

$$\varphi^m(d(f(x_1), f(x_0))) < c - \varphi(c) \Rightarrow d(f(x_{m+1}), f(x_m)) < c - \varphi(c)$$

elde edilir. Şimdi $\forall m, n > n_0$ için

$$d(f(x_m), f(x_{n+1})) < c \dots (1)$$

olduğunu gösterelim. Eğer $m = n$ ise (1) ifadesi bir önceki sonuç gereği doğrudur.

Kabul eldim ki (1) ifadesi bazı $n \geq m$ değerleri için sağlansın. O zaman

$$\begin{aligned} d(f(x_m), f(x_{n+2})) &\leq d(f(x_m), f(x_{m+1})) + d(f(x_{m+1}), f(x_{n+2})) \\ &< c - \varphi(c) + \varphi(d(g(x_{m+1}), g(x_{n+2}))) \\ &< c - \varphi(c) + \varphi(d(f(x_m), f(x_{n+1}))) \\ &< c \end{aligned}$$

olur. Bu yüzden (1) ifadesi n yerine $n+1$ alındığında da sağlanır. O halde tümevarım gereğince $\forall n \geq m$ için (1) ifadesi sağlanır. Bundan dolayı $(f(x_n))$ bir Cauchy dizisidir.

Hipotez gereği $f(X)$ veya $g(X)$ tam olduğundan bir $p \in f(X) \subset g(X)$ vardır öyle ki $f(x_n) \rightarrow p$ ve $g(x_n) \rightarrow p$ olur. $g(q) = p$ olacak şekilde bir $q \in X$ seçelim.

$f(q) = g(q)$ olacağını gösterelim. Sabit bir $0 < c$ ve bir $n_0 \in \mathbb{N}$ seçelim öyle ki

$$d(p, f(x_n)) < \frac{c}{2} \text{ ve } d(g(p), g(x_n)) < \frac{c}{2}$$

olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} d(p, f(q)) &\leq d(p, f(x_n)) + d(f(x_n), f(q)) \\ &\leq d(p, f(x_n)) + \varphi(d(g(x_n), g(q))) \\ &\leq d(p, f(x_n)) + d(g(x_n), g(q)) \\ &< \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c \end{aligned}$$

elde edilir. Bundan dolayı $\forall m \in \mathbb{N}$ için $d(p, f(q)) < \frac{c}{m}$ yazılabilir. Burada

$$\frac{c}{m} - d(p, f(q)) \in P, \frac{c}{m} \rightarrow 0 (m \rightarrow \infty) \text{ ve } P \text{ kapalı olduğundan } -d(p, f(q)) \in P \text{ olur.}$$

Ayrıca $d(p, f(q)) \in P$ olacağından koniğin (iii) özelliği gereği $d(p, f(q)) = 0$ olup bu ise $f(q) = p$ olduğunu gösterir. Yani $f(q) = p = g(q)$ olup p , f ve g nin çakıştığı noktadır. Şimdi zayıf bağdaşabilme kavramını kullanarak $p \in X$ noktasının ortak sabit nokta olduğunu gösterelim.

$$f(q) = g(q) \Rightarrow f(p) = f(g(q)) = g(g(q)) = g(p)$$

elde edilir. Şimdi $f(p) = p = g(p)$ olduğunu gösterelim. Eğer $g(p) \neq p$ ise

$$d(f(q), f(p)) \leq \varphi(d(g(q), g(p))) < d(g(q), g(p)) = d(f(q), f(p))$$

olur ki bu bir çelişkidir. Bu ise $f(p) = p = g(p)$ olduğunu gösterir. O zaman $p \in X$ noktası f ve g nin ortak sabit noktasıdır. $r \in X$ f ve g nin bir diğer ortak sabit noktası olsun. Şu halde

$$d(p, r) = d(f(p), f(r)) \leq \varphi(d(g(p), g(r))) < d(g(p), g(r)) = d(p, r)$$

olacağından bu bir çelişkidir. O halde ortak sabit nokta tekdir. Ayrıca burada alınan $x_0 \in X$ noktası keyfi bir nokta olduğundan $\forall x \in X$ için $(f(x_n))$ iterasyon dizisi bu sabit noktaya yakınsar.

Teorem 5.1.4. de $k \in [0,1)$ olmak üzere $\varphi(w) = kw$ alınırsa Teorem 4.1.1. elde edilir.

Şimdi bir genelleme yapalım

(X, d) tam konik metrik uzay ve P bir konik olsun. Kabul edelim ki $f, g: X \rightarrow X$ dönüşümleri A, B, C, D, E ler negatif olmayan reel sayılar olmak üzere $\forall x, y \in X$ için

$$d(f(x), f(y)) \leq Ad(g(x), g(y)) + Bd(g(x), f(x)) + Cd(g(y), f(y)) \\ + Dd(g(x), f(y)) + Ed(g(y), f(x))$$

şartını sağlasın. Bu takdirde

1-) $g = I$ alınırsa

i-) $B = C = D = E = 0$, $A < 1$ için Teorem 5.1.1.

ii-) $A = D = E = 0$, $B = C < \frac{1}{2}$ için Teorem 5.1.2.

iii-) $A = B = C = 0$, $D = E < \frac{1}{2}$ için Teorem 5.1.3.

elde edilir. Ayrıca

2-) f ve g zayıf bağdaşan ise

i-) $B = C = D = E = 0$, $A < 1$ için Teorem 4.1.1.

ii-) $A = D = E = 0$, $B = C < \frac{1}{2}$ için Teorem 4.1.2.

iii-) $A = B = C = 0$, $D = E < \frac{1}{2}$ için Teorem 4.1.3.

elde edilir [11].

KAYNAKLAR

1. Musayev, B., Alp, M., Fonksiyonel Analiz, Balcı Yayınları, Kütahya, Kasım 2000.
2. Deimling, K., Nonlinear Functional Analysis, Springer-Verlag, Germany, July 1985.
3. Long-Guang, H., Xian, Z., Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings, J. Math. Anal. Appl., 332, 1468-1476, 2007.
4. Rezapour, S., Hamlbarani, R., Some notes on paper ‘Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings.’, J. Math. Anal. Appl., 345, 719-724, 2008.
5. Radenović, S., Rhoades, B.E., Fixed point theorem for two non-self mappings in cone metric spaces, Computers and Mathematics with Applications, 57, 1701-1707, 2009.
6. Kadelburg, Z., Radenović, S., Rakočević, V., Remarks on ‘Quasi-contraction on a cone metric space’, Applied Mathematics Letters, 22, 1674-1679, 2009.
7. Abbas, M., Jungck, G., Common fixed point results for noncommuting mappings without continuity in cone metric spaces, J. Math. Anal. Appl., 341, 416-420, 2008.
8. Di Bari, C., Vetro, P., ϕ -pairs and common fixed points in cone metric spaces, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 57, 279-285, 2008.
9. Vetro, P., Common fixed points in cone metric spaces, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Serie II, Tomo LVI, 464-468, 2007.
10. Abbas, M., Rhoades, B.E., Fixed and periodic point results in cone metric spaces, Applied Mathematics Letters, 22, 511-515, 2009.
11. Azam, A., Arshad, M., Beg, I., Common fixed points of two maps in cone metric spaces, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 57, 433-441, 2008.
12. Khamsi, M.A., Introduction to Metric Fixed Point Theory, International Workshop on Nonlinear Functional Analysis and its Applications, Shahid Beheshti University, January 20-24, 2002.
13. Niethammer, B., Fixed Point Methods for Nonlinear PDEs, Lecture notes, Oxford University, April 2010.

ÖZGEÇMİŞ

Mustafa Cemil BİŞGİN 1986 yılında Kahramanmaraş'ın Elbistan ilçesinde doğdu. İlk öğrenimini Ankara'da tamamladı. 2004 yılında kazandığı Erciyes Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünden 2008 yılında mezun oldu. Aynı yıl Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalında Yüksek Lisansa başladı. 2009 yılında Rize Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak göreve başladı. 2010 yılında geçici olarak Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsüne Araştırma Görevlisi olarak atandı. Halen Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde görevine devam etmektedir.

Adres : Erciyes Üniversitesi Fen Fakültesi

Matematik Bölümü 38039-KAYSERİ

e-posta : mbisgin@erciyes.edu.tr

