

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

POZİTİF TANIMLI MATRİSLER İLE İLGİLİ EŞİTSİZLİKLER

Şeyda İLDAN

Selçuk Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Hasan KÖSE

2006, Sayfa 47

Juri: Prof. Dr.Durmuş BOZKURT

Yrd. Doç. Dr. Hasan KÖSE

Yrd. Doç. Dr. Necati TAŞKARA

Bu tezde pozitif tanımlı matrisler ile ilgili eşitsizlikler ve bunların ispatları üzerine çalışılmıştır.

Pozitif tanımlı matrisler ile ilgili eşitsizlikler matrisler ile ilgili çok çeşitli alanlara yardım sağladığı için her birini ayrı ayrı bölümler içinde lemma ve teoremler yardımıyla ispatladık.

Anahtar Kelimeler: Pozitif tanımlı matris, pozitif yarıtanımlı matris, Hermityen matris, matris izi, özdeğer, singüler değer

ABSTRACT

INEQUALITIES FOR POSITIVE DEFINITE MATRICES

Ms Thesis

Şeyda İLDAN

Selcuk University

Gradute School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Asist. Prof. Dr. Hasan KÖSE

2006, Page 47

Jury: Prof. Dr. Durmuş BOZKURT

Assist. Prof. Dr. Hasan KÖSE

Assist. Prof. Dr. Necati TAŞKARA

In this thesis we studied about positive definite matrices and their proof.

Inequalities with positive definite matrices help the several inequalities with matrices so we provided each one separately with lemmas and theories.

Keywords: Positive definite matrices, positive semidefinite matrices, Hermitian matrix, eigenvalue, singular value.

ÖNSÖZ

Bu çalışma bir derleme olup, Selçuk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Yrd. Doç. Dr. Hasan KÖSE yönetiminde yapılarak Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsüne Yüksek Lisans tezi olarak sunulmuştur.

Çalışmanın birinci bölümü Giriş'e ayrılmış olup literatür özeti verilmiştir. İkinci bölümde pozitif tanımlı matrisler ile çalışmamızda yardımcı olacak tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde pozitif tanımlı matrislerin açıklamasına, pozitif tanımlı matrisler ile ilgili çeşitli eşitsizliklere yer verilmiştir. Bunların ışığında matrisler ile ilgili çeşitli eşitsizlikler geliştirilip, ispatları ile sunulmuştur.

Tezimi sabır ve titizlikle yöneten, yardımını esirgemeyen saygıdeğer hocam, Yrd. Doç. Dr. Hasan KÖSE'ye teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Şeyda İLDAN

2006

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ	iii
İÇİNDEKİLER	iv
1.GİRİŞ	1
2.ÖN BİLGİLER	2
2.1. Pozitif Tanımlı Matris	2
2.1.1 Pozitif Tanımlılık Testleri	5
2.2. Matris İzleri ve Özdeğerleri	7
2.3. Singüler Değer	7
2.4. Hermityen, Monoton, Konkav, Birim, Üniter, P Matrisler	8
2.5. Sürekli ve İyi Tanımlanmış Fonksiyonlar	9
2.6. Hadamard Çarpımı.....	10
3.POZİTİF TANIMLI MATRİSLER İLE İLGİLİ EŞİTSİZLİKLER	11
3.1. Bazı Matris Eşitsizlikleri Üzerine	11
3.2. İz Eşitsizlikleri	13
3.3. Karma Matris Eşitsizlikleri	14
3.4. Genelleştirilmiş Eşitsizlik	17
3.5. Pozitif Tanımlı Matrisler İçin Çeşitli Karma Ortalama Eşitsizlikler	21
3.6.Esas Lemmalar	23
3.7. Karma Ortalama Eşitsizlikleri	26
3.8.Hadamard Matris Çarpımlarıyla İlgili Bazı Determinantal Eşitsizlikler	29
3.9. Kesin P-Matrisleri İçin Bir Schur Tamamlayıcısı Eşitsizliği	43
4. KAYNAKLAR	47

1.GİRİŞ

Pozitif tanımlı matrisler ve pozitif yarıtanımlı matrisler ile ilgili birçok eşitsizlik bulunmaktadır. Biz bu çalışmamızda bu eşitsizlikleri ve ispatlarını inceledik.

(Zhan 2003) Bütün A,B matrislerinden dolayı Bhatia ve Kittaneh aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğini vererek bunu pozitif tanımlı matrislerde iz eşitsizliğini geliştirmek için kullanmıştır.

(Uchiyama 2001) B-A pozitif yarıtanımlı matris olmak üzere bir karma eşitsizlik vermiştir.

(Hu,Zhang ve Yong 2004) Üç veya daha fazla pozitif tanımlı matrisler için karma ortalama takdim edip bunlara bağlı karma ortalama eşitsizlikleri vermişlerdir.

(Liu ve Zhu 1997) Pozitif tanımlı Hermityen matrislerin toplamı ve Schur tamamlayıcılarının özdeğerleri ile ilgili eşitsizlikler vermişlerdir.

(Chen 2002) $A=(a_{ij})$ ve $B=(b_{ij})$ M matrisleri ile veya pozitif tanımlı matris sırası n olan, AoB Hadamard çarpımı ile ilgili eşitsizlik vermiştir.

(Neubauer 1997) Pozitif tanımlı matrisler için Hadamard eşitsizliğini kuvvetlendirmiştir. Sonuçlar (± 1) matrislerin determinantları ile ilgili eşitsizlikleri göstermek için kullanılabilecektir.

(Markham ve Smith 1998) A ve B Hadamard matrislerinin Schur tamamlayıcıları ile ilişki kuran bir eşitsizlik türetilmiştir.

(Drury 2001) A pozitif tanımlı bloklara ayrılmış matrisin kanonik ılıntıları üzerine çalışmıştır.

(Jiang 1999) $A_1, \dots, A_s$ pozitif tanımlı matrisleri, I birim matrisi gösterebilir, c_i ,

$1 \leq i \leq s$ sabitler olsun. $A_1, \dots, A_0, X_1, \dots, X_s$ pozitif numaralara bağlı olmak

üzere $A_i \leq \frac{c_i}{x_i^2} (I + \sum_{j=1}^s x_j A_j)^2$, $1 \leq i \leq s$ olduğunu ispat etmiştir.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde çalışmamıza yardımcı olan bazı temel tanım ve teoremlere yer verilecektir.

2.1. Pozitif Tanımlı Matris

(Bhatia 1996) Bir $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ Hermit matrisi, eğer her sıfır olmayan n -boyutlu x vektörü için,

$\langle Ax, x \rangle > 0$ sağlanıyorsa pozitif tanımlı matris, eğer

$\langle Ax, x \rangle \geq 0$ sağlanıyorsa yarı pozitif tanımlı matris denir.

Aynı tipte iki pozitif tanımlı matrisin toplamı yine aynı tipte pozitif tanımlı bir matristir, pozitif tanımlı bir matrisin Hermit transpozunu da pozitif tanımlıdır.

Teorem 2.1. (Bozkurt ve Türen 2003) A , n -kare hermityen ve P , sütunları A matrisinin normalize edilmiş öz vektörlerinden oluşan bir üniter matris olsun. $u = [u_1 \dots u_n]^T$ vektörü için $x = Pu$ ve λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) A matrisinin özdeğerleri ise,

$$x^H A x = u^H (P^H A P) u = \lambda_1 u_1 \bar{u}_1 + \lambda_2 u_2 \bar{u}_2 + \dots + \lambda_n u_n \bar{u}_n \text{ dir.}$$

Teorem 2.2. (Bozkurt ve Türen 2003) $x^H A x$ formunun pozitif tanımlı olması için gerek ve yeter şart A matrisinin bütün öz değerlerinin pozitif olmasıdır.

İspat: A matrisinin bütün öz değerleri pozitif olsun. Teorem 2.1'den P düzgün matris olmak üzere

$$x^H A x = u^H (P^H A P) u = \lambda_1 u_1 \bar{u}_1 + \lambda_2 u_2 \bar{u}_2 + \dots + \lambda_n u_n \bar{u}_n \quad (2.1)$$

olacak şekilde $x = Pu$ dönüşümünü tanımlayalım. Her λ_i pozitif olduğundan, (2.1) denkleminin sağ yanındaki form pozitif tanımlıdır.

$x^H A x$ formu pozitif tanımlı olsun. Teorem 2.1'den $P^H A P = B$ olacak şekilde P düzgün matrisi vardır ve $x^H B x$ formu pozitif tanımlıdır. O halde λ_i 'ler, A matrisinin

özdeğerleri olmak üzere $Q^H A Q = \Lambda = \text{köş}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ olacak şekilde bir Q düzgün matrisi vardır. Teorem 2.1'den $x^H(Q^H A Q)x = x^H \Lambda x$ olur ki, $x^H \Lambda x$ pozitif tanımlıdır. Dolayısıyla A matrisinin bütün özdeğerleri pozitiftir.

Teorem 2.3. (Bozkurt ve Türen 2003) A bir hermityen matris olsun. A matrisi pozitif tanımlı ise;

- i) A 'nın esas köşegen elemanlarının hepsi pozitiftir.
- ii) $i \neq j$ için $a_{ii}a_{jj} > |a_{ij}|^2$ 'dir.
- iii) A 'nın esas değerce en büyük elemanı esas köşegeni üzerindedir.
- iv) $\det(A) > 0$ 'dır.

İspat: i) $x^H A x$ kuadratik formunda, x_j hariç bütün x_i 'leri ($1 \leq i, j, k \leq n$) sıfır

seçelim. Bu takdirde form $x^H A x = a_{jj}|x_j|^2$ haline dönüşür. $x_j \neq 0$ ve form pozitif tanımlı olduğundan $a_{jj} > 0$ olur. Bu her j için gösterilebileceğinden A 'nın esas köşegen elemanlarının hepsi pozitiftir.

ii) İspat için bu seferde x_j ve x_k hariç bütün x_i 'leri ($1 \leq i, j, k \leq n$) sıfır seçelim.

Bu durumda form

$$x^H A x = a_{jj}|x_j|^2 + a_{jk} \bar{x}_j x_k + a_{jk}^* x_j \bar{x}_k + a_{kk}|x_k|^2$$

$$= a_{jj} \left| x_j \frac{a_{jk} x_k}{a_{jj}} \right|^2 + \frac{[a_{jkk} - |a_{jk}|^2] x_k^2}{a_{jj}} \text{ şekline gelir. } x_j = -\frac{a_{jk} x_k}{a_{jj}}$$

seçelim. $a_{jj} > 0$ olduğundan formun pozitif tanımlı olması için $a_{jj}a_{kk} > |a_{jk}|^2$ ($i \neq j$) olması gerekir.

iii) Kabul edelim ki, bazı i, j 'ler için $a_{ii}a_{jj} \leq |a_{ij}|^2$ olsun. O halde

$$a_{ii}a_{jj} \leq |a_{ij}|^2 \quad (2.2)$$

olur. (i)'den $a_{ii}, a_{ij} > 0$ olduğundan (2.2) ile, (ii) ile çelişir.

iv) $x^H A x$ kuadratik formu pozitif tanımlı olduğundan teorem 2.2'den A

matrisinin bütün özdeğerleri pozitifdir. A matrisinin determinanı da öz değrlerin çarpımı olduğundan $\det(A) > 0$ 'dır.

Teorem 2.4. (Bozkurt ve Türen 2003) A hermityen matris ve A_i , A matrisinin sol üst tarafındaki $i \times i$ alt matris olsun. $1 \leq i \leq n$ için her A_i düzgünse, L; esas köşegen elemanları 1 olan alt üçgen matris ve K da köşegen elemanları sıfır olmayan reel köşegen matris olmak üzere A matrisi

$$A = L K L^H \quad (2.3)$$

Teorem 2.5. (Bozkurt ve Türen 2003) $x^H A x$ (A hermityen) formunun pozitif tanımlı olması için gerek ve yeter şart ya,

i) A matrisinin esas köşegeni boyunca satır eşelon forma getirilirken

kullanılan pivotların hepsinin pozitif olmasıdır, veya

ii) A'nın sol üst köşesindeki $i \times i$ ($i=1, 2, \dots, n$) determinantlardan ibaret esas

determinantlarının hepsinin pozitif olmasıdır. Yani,

$$a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \dots \quad (2.4)$$

İspat: i) $x^H A x$ (A hermityen) formu pozitif tanımlı olsun. A matrisi satır-eşelon forma indirgenirken elde edilen pivotlar a_k ($k=1, 2, \dots, n$) ise $\det(A_i) = a_1 a_2 \dots a_i$ olur. Her i için $\det(A_i) > 0$ olduğundan her a_k pozitif olmalıdır.

Pivotların hepsi pozitif olsunlar. O halde $\det(A_i) > 0$ ve dolayısıyla her i için A_i düzgün olacaktır. O halde teorem 2.4'den A, (2.3)'deki gibi yazılabilir ki, bu da bize A matrisinin, K reel köşegen matrisiyle hermityen-denkleş olduğunu verir. $x^H A x$ kuadratik formu pozitif tanımlı olduğundan $x^H A x$ formu da pozitif tanımlıdır.

ii) $x^H A x$ (A hermityen) formu pozitif tanımlı olsun. A matrisinin sol üst yanındaki $i \times i$ ($i=1,2, \dots, n$) alt matrisini A_i ile gösterelim. A pozitif tanımlı olduğundan $i=1,2, \dots, n$ için her A_i pozitif tanımlıdır. A matrisinin sol üst yanındaki $i \times i$ ($i=1,2, \dots, n$) A_i alt matrisleri pozitif tanımlı olsunlar. Teorem 2.3 (iv)'den $i=1,2,\dots,n$ için $\det(A_i) > 0$ 'dır.

Pozitif tanımlılık testlerini yukarıda verdiğimiz teoremlerin ışığında aşağıdaki gibi düzenleyelim.

2.1.1. Pozitif Tanımlılık Testleri

(Bhatia 1996) Aşağıdaki üç testin herbiri bir $A \times n$ Hermit matrisinin pozitif tanımlı olması için gerek ve yeter koşulları verir. Yani, A Hermit matrisi bu testlerin herhangi birini geçerse pozitif tanımlı bir matristir.

1) A, ancak ve ancak sadece E3 temel satır işlemleri ile üstüçgensel biçime indirgenebiliyorsa ve sonuçta bulunan matrisin tüm köşegen elemanları pozitif ise pozitif tanımlıdır.

2) A matrisinin bir asli minörü, A'nın son k satır ve kolonu ($k=0, 1, \dots, n-1$) çıkarılarak elde edilen alt matrisin determinantıdır. A, ancak ve ancak tüm asli minörleri pozitif ise pozitif tanımlıdır.

3) A, ancak ve ancak tüm özdeğerleri pozitif ise pozitif tanımlıdır.

Aşağıdaki testler bir $A=[a_{ij}] \times n$ matrisinin pozitif tanımlı olması için gerekli koşulları verir. Bu testlerin herhangi birinden kalan bir Hermit matrisi pozitif tanımlı değildir, ancak testleri geçen bir Hermit matrisi bir sonuca varılamaz.

4) A'nın köşegen elemanları pozitif olmalıdır.

5) A'nın en büyük mutlak değerli elemanı, A'nın köşegeni üzerinde olmalıdır.

6) $a_{ii}a_{jj} > |a_{ij}|^2$ ($i \neq j$).

Örnek 2.1: $\begin{bmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & -2 \\ -2 & -2 & 10 \end{bmatrix}$ matrisinin pozitif tanımlılığını inceleyelim.

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 0 & 16/3 & -4/3 \\ -2 & -2 & 10 \end{bmatrix} \quad \text{Birinci satırın } \left(\frac{-1}{3}\right) \text{ katı ikinci satırla toplanır.}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 0 & 16/3 & -4/3 \\ 0 & -4/3 & 28/3 \end{bmatrix} \quad \text{Birinci satırın } \frac{1}{3} \text{ katı üçüncü satırla toplanır.}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 0 & 16/3 & -4/3 \\ 0 & 0 & 27/3 \end{bmatrix} \quad \text{İkinci satırın } \frac{1}{4} \text{ katı üçüncü satırla toplanır.}$$

6, 16/3, 27/3 köşegen elemanlarının tümü pozitif olduğundan, matris pozitif tanımlıdır. Veya;

A'nın asli minörleri,

$$\det[6]=6 \quad \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 36 - 4 = 32 \text{ ve } \begin{vmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & -2 \\ -2 & -2 & 10 \end{vmatrix} = 288 \text{ dir.}$$

Tüm asli minörler pozitif olduğundan, matris pozitif tanımlıdır.

Örnek 2.2: Aşağıdaki A matrisinin pozitif tanımlı olup olmadığını belirleyelim.

$$A = \begin{bmatrix} 11 & -3 & 5 & -8 \\ -3 & 11 & -5 & -8 \\ 5 & -5 & 19 & 0 \\ -8 & -8 & 0 & 16 \end{bmatrix}.$$

A'yı sadece E3 temel işlemlerini kullanarak aşağıdaki biçime indirgeriz:

$$\begin{bmatrix} 11 & -3 & 5 & -8 \\ 0 & 112/11 & -40/11 & -112/11 \\ 0 & 0 & 108/7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Merkezi elemanların, 11, 112/11, 108/7 ve 0, tümü pozitif olmadığından, matris pozitif tanımlı değildir. Ancak, bu merkezi elemanlar negatif değildir, böylece A bir pozitif yarı-tanımlı matristir.

Tanım 2.1.

(Horn ve Jhonson 1985) $A, B \in M_n$, Hermityen matrisler olsun. Eğer $A-B$ pozitif yarı-tanımlı matrisler ise $A \geq B$ olarak yazabiliriz. Benzer olarak, $A > B$ 'nin anlamı da $A-B$ 'nin pozitif tanımlı olduğudur.

2.2. Matris İzleri ve Özdeğerleri

Tanım 2.2.1. (Özdeğer-Özvektör) :

(Bhatia 1996) F bir cisim olmak üzere $A \in M_n(F)$ olsun.

$$Ax = \lambda x_j (x \neq 0)$$

Olacak şekilde, $\lambda \in F$ skalerine A matrisinin özdeğeri, x 'e de A matrisinin λ özdeğerine karşılık gelen özvektörü denir.

Teorem 2.6. (Horn ve Jhonson 1985) $A \in M_n$ Hermityen matrisinin özdeğerleri azalan sırada ;

$$\lambda_{\min} = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n = \lambda_{\max} \text{ şeklindedir.}$$

Teorem 2.7. (Weyl Teoremi): (Horn ve Jhonson 1985) $A, B \in M_n$ Hermityen ve öz değerleri $\lambda_i(A)$, $\lambda_i(B)$ ve $\lambda_i(A+B)$ $k=1,2, \dots, n$ için teorem 2.6 dan azalan sırada olsun.

$$\lambda_k(A) + \lambda_1(B) \leq \lambda_k(A+B) \leq \lambda_k(A) + \lambda_n(B) \quad (2.2.1)$$

Tanım 2.2.2. (Matris İzi) :

(Bronson 1989) A , $n \times n$ tipinde matris olmak üzere, A 'nın esas köşegeni üzerindeki elemanlarının toplamına A matrisinin izi denir ve

$$\text{iz}A = \sum_{i=1}^n a_{ii} \text{ şeklinde gösterilir.}$$

Teorem 2.2.1. (Bronson 1989) $A \times n$ tipinde kare matrisler olmak üzere;

$$\text{iz}(AB) = \text{iz}(BA) \text{ dır.}$$

2.3. Singüler Değer

(Bozkurt ve Türen 2003) A genel $m \times n$ matris olsun. $A^H A$ matrisinin özdeğerleri λ_i ($i=1, 2, \dots, m$) ise $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ değerlerine A matrisinin singüler değerleri denir.

Teorem 2.3.1. (Horn ve Jhonson 1985) $A \in M_{m,n}$ bir matris olarak verilsin. $\hat{A}$ 'da, A'nın herhangi bir sütununun silinmesiyle oluşsun, $\{\sigma_i\}$ A'nın singüler değerlerini, $\{\hat{\sigma}_i\}$ de $\hat{A}$ 'nın singüler değerlerini gösterebilir, artmayan sırada;

a) Eğer $m \geq n$ ise,

$$\sigma_1 \geq \hat{\sigma}_1 \geq \sigma_2 \geq \hat{\sigma}_2 \geq \dots \geq \hat{\sigma}_{n-1} \geq \sigma_n \geq 0$$

b) Eğer $m < n$ ise,

$$\sigma_1 \geq \hat{\sigma}_1 \geq \sigma_2 \geq \hat{\sigma}_2 \geq \dots \geq \sigma_m \geq \hat{\sigma}_m \geq 0$$

Eğer A'nın bir sütunu yerine bir satırı silinerek oluşursa, (a) ve (b) içindeki m ve n'yi yerdeğiştiririz.

2.4. Hermityen, Monoton, Konkav, Birim, P-Matrisler

Tanım 2.4.1. (Hermityen Matris) :

(Bellman 1996) Bir matris, eğer kompleks eşlenik transpozuna eşit ise, Hermit matristir, yani A için eğer,

$$A = A^H \text{ ise A Hermittir.}$$

Tanım 2.4.2. (Monoton Matris) :

(Uchiyama 2001) Eğer A, $f[0, \infty)$ sürekli fonksiyon üzerinde bir matris ve $0 \leq A < B$ için $f(A) \leq f(B)$ 'yi kapsarsa monoton matristir.

Tanım 2.4.3. (Konkav Matris) :

(Uchiyama 2001) Bütün A, $B \geq 0$ ve bütün $0 < \lambda < 1$ için,

$$f(\lambda A + (1-\lambda) B) \geq \lambda f(A) + (1-\lambda) f(B) \text{ ise konkav matristir.}$$

Tanım 2.4.4. (Birim Matris) :

(Bozkurt ve Türen 2003) Esas köşegeni üzerindeki elemanlarının hepsi 1 olan köşegen matrise birim matris denir ve

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

olarak gösterilir.

Tanım 2.4.5. (Üniter Matris) :

(Bhatia 1996) $A \in M_n(C)$ matrisi için;

$$AA^* = A^*A = I$$

Özelliği sağlanırsa A matrisine üniter matris denir. Burada A^* , A matrisinin eşleniğinin transpozunu göstermektedir.

Tanım 2.4.6. (P-Matris) :

(Chen 2002) A bütün prensibal minörleri pozitif olan nxn türünde bir matris ise, böyle bir A matrisine P-matris denir.

Örnek 2.3: $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ 3x3 prensibal minörü $\det(A) = 15$, 2x2 prensibal

minörleri

$$\det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = 15; \det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 5; \det \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = 6$$

1x1 prensibal minörleri ise, 3, 7 ve 2'dir.

2.5. Sürekli ve İyi Tanımlanmış Fonksiyonlar**Tanım 2.5.1. (Sürekli Fonksiyon) :**

(Bhatia 1996) $f: A \rightarrow R$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun. f fonksiyonu a noktasında tanımlı ise, f fonksiyonun a noktasında limiti varsa, fonksiyonun a noktasındaki limiti a noktasındaki değerine eşitse bu fonksiyonlara sürekli fonksiyon denir.

Tanım 2.5.2. (İyi Tanımlanmış Fonksiyonlar) :

(Bhatia 1996) Eğer z kompleks değişkeninin $f(z)$ fonksiyonunun bir Maclaurin seri açılımı varsa,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ ve bu } |z| < R \text{ için yakınsaksa o zaman } \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n \text{ matris serisi}$$

yakınsaktır, burada A kare matris ve özdeğerlerinin mutlak değeri R 'den küçük olmalıdır. Böyle bir durumda, $f(A)$

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n \text{ ile tanımlanır ve iyi tanımlanmış fonksiyon olarak adlandırılır.}$$

Tam olarak, $A^0 = I$ 'dir.

2.6. Hadamard (Schur) Çarpımı

(Horn ve Jhonson 1985) $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ve $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ olsun.

$A \circ B = [a_{ij} b_{ij}]_{m \times n}$ çarpımına A ile B matrislerinin Hadamard çarpımı denir.

A ve B pozitif tanımlı matrisler ise $\det(A \circ B) \geq \det A \cdot \det B$ dir.

A ve B pozitif tanımlı matrisler ise $A \circ B$ de pozitif tanımlıdır.

3. POZİTİF TANIMLI MATRİSLER İLE İLGİLİ EŞİTSİZLİKLER

3.1. Bazı Matris Eşitsizlikleri Üzerine

(Zhan 2003) Çalışmamızın temelini teşkil eden bu bölümde M_n $n \times n$ kompleks matrisler olmak üzere, ACM_n matrisinin singüler değerlerinin $s_1(A) \geq s_2(A) \geq \dots \geq s_n(A)$ olduğunu 2.3.1'den biliyoruz ve singüler değerler için Bhatia ve Kittaneh'in söylediği, iyi bilinen aritmetik-geometrik eşitsizliği olan;

$$2 s_j(AB^*) \leq s_j(A^*A + B^*B), j=1,2,\dots, n \quad (3.1.1)$$

eşitsizliğini, (burada A, BCM_n ve B^* da B 'nin eşlenik transpozunu göstermektedir) ve A, BCM_n pozitif yarıtanımlı matrisleri için $A \oplus B$ blok köşegen matrisleri için $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ göstermek üzere,

$$s_j(A-B) \leq s_j(A \oplus B), j=1,2,\dots, n \quad (3.1.2)$$

eşitsizliklerini ispatladık. Daha sonra bu iki eşitsizliği, A_0 , bir pozitif tanımlı matris,

$A_1, \dots, A_k$ pozitif yarı-tanımlı matrisler olmak üzere,

$$iz \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=0}^j A_i \right)^{-2} A_j < iz A_0^{-1} \text{ iz eşitsizliğini geliştirmek için kullanacağız.}$$

Şimdi 3.1.1 ve 3.1.2 eşitsizliklerini ispatlayalım.

G, H Hermityen matrisleri için, $G \leq H$ anlamı $H-G$ nin pozitif yarıtanımlı matrisler olduğudur. Eğer $H \in CM_n$ Hermityen ise, her zaman özdeğerlerinin artan sırada,

$$\lambda_1(H) \geq \lambda_2(H) \geq \dots \geq \lambda_n(H) \text{ olduğunu teorem 2.6'den biliyoruz.}$$

Teorem 2.7 (Weyl'in monotonicity prensibi)den, $G \leq H$ için $\lambda_j(G) \leq \lambda_j(H)$, $j=1,2,\dots,n$ olduğunu biliyoruz. Bu Hermityen matrislerin özdeğerlerinin minimax karakterizasyonundan takip edilir.

İspat (3.1.1) :

$$X = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & AB^* \\ BA^* & 0 \end{pmatrix}$$

Sonra,

$$X^* X = \begin{pmatrix} A^* B + B^* B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, XX^* = \begin{pmatrix} AA^* & AB^* \\ BA^* & BB^* \end{pmatrix} \text{ ve}$$

$$0 \leq \begin{pmatrix} A & 0 \\ -B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ -B & 0 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} AA^* & -AB^* \\ -BA^* & BB^* \end{pmatrix} = XX^* - 2Y_j \text{ 'dir.}$$

Öyleyse $2Y \leq XX^*$ olur. Weyl'in monotonicity prensibinden,

$$2\lambda_j(Y) \leq \lambda_j(XX^*), j=1, 2, \dots, 2n \text{ 'dir.} \quad (3.1.3)$$

$j=1, 2, \dots, n$ için, XX^* 'in özdeğerleri, $s_j(A^* A + B^* B)$, Y 'nin özdeğerleri, $s_j(AB^*)$, buradan, (3.1.3)

$$2s_j(AB^*) \leq s_j(A^* A + B^* B), j=1, 2, \dots, n \text{ olduğunu verir.}$$

Lemma 3.1.1. (Zhan 2003) Eğer $H \in M_n$ Hermityen ise

$$s_j(H) = \lambda_j(H \oplus -H), j=1, 2, \dots, n \text{ olur.}$$

İspat (3.1.2) : Lemma 3.1.1 den

$$s_j(A-B) = \lambda_j[(A-B) \oplus (B-A)], j=1, 2, \dots, n \quad (3.1.4)$$

$(A-B) \oplus (B-A) \leq A \oplus B$ olduğundan, Weyl'in monotonicity prensibinden

$$\lambda_j[(A-B) \oplus (B-A)] \leq \lambda_j(A \oplus B) j=1, 2, \dots, 2n \quad (3.1.5)$$

elde ederiz.

$\lambda_j(A \oplus B) = s_j(A \oplus B)$, $j=1, 2, \dots, 2n$ olduğuna dikkat edelim. (3.1.4) ve (3.1.5)'i birleştirerek, $s_j(A-B) \leq s_j(A \oplus B)$, $j=1, 2, \dots, n$ elde ederiz.

3.2 İz Eşitsizlikleri (Zhan 2003)

Teorem 3.2.1. (Zhan 2003) A_0 pozitif tanımlı matris ve $A_1, \dots, A_k$ pozitif yarı-tanımlı matrisler olsun. Sonra,

$$\text{iz} \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=0}^j A_i \right)^{-2} A_j \leq \text{iz} A_0^{-1} \text{ 'dir.} \quad (3.2.1)$$

İspat: Sonuç $1 \leq j \leq k$ için

$$\text{iz} \left(\sum_{i=0}^j A_i \right)^{-2} A_j \leq \text{iz} \left\{ \left(\sum_{i=0}^{j-1} A_i \right)^{-1} - \left(\sum_{i=0}^j A_i \right)^{-1} \right\} \quad (3.2.2)$$

den takip edilecek.

Eğer X, Y pozitif tanımlı matrisler ise, (3.1.1)'den

$$2 s_j(X) = 2 s_j[Y^{1/2} (XY^{-1/2})] \leq s_j(Y + Y^{-1/2} X^2 Y^{-1/2}) \text{ elde ederiz.}$$

Öyle ki, $\text{iz} WZ = \text{iz} ZW$ (Teorem 2.2.1) den

$$2 \text{iz} X \leq \text{iz}(Y + X^2 Y^{-1}) \quad (3.2.3)$$

olur.

$$(3.2.3)'de, X = \left(\sum_{i=0}^j A_i \right)^{-1} \text{ ve } Y = \left(\sum_{i=0}^{j-1} A_i \right)^{-1} \text{ yerleştirerek,}$$

$$\text{iz} \left\{ \left(\sum_{i=0}^j A_i \right)^{-1} - \left(\sum_{i=0}^{j-1} A_i \right)^{-2} \left(\sum_{i=0}^{j-1} A_i \right) \right\} \leq \text{iz} \left\{ \left(\sum_{i=0}^{j-1} A_i \right)^{-1} - \left(\sum_{i=0}^j A_i \right)^{-1} \right\} \text{ elde ederiz.}$$

Sol tarafını basitleştirerek (3.2.2)'yi elde ederiz. (3.2.2)'yi j için 1 den k ya toplayarak,

$$\text{iz} \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=0}^j A_i \right)^{-2} A_j \leq \text{iz} A_0^{-1} - \text{iz} \left(\sum_{j=1}^k A_j \right)^{-1} < \text{iz} A_0^{-1} \text{ 'e sahip oluruz. Buda}$$

ispatı tamamlar.

Örnek 3.1.1: A_0 pozitif tanımlı bir matris, $A_1, A_2, \dots, A_k$ pozitif yarı-tanımlı matrisler olsun, iz $\sum_{j=1}^k (\sum_{i=0}^j A_i)^{-2} A_j < \text{iz} A_0^{-1}$ eşitsizliğinin sağlandığını gösterelim:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ olsun. } 1 \leq j \leq k \text{ ise } j=2,$$

$k=3$ için;

$$\sum_{i=0}^j A_i = A_0 + A_1 + A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, (\sum_{i=0}^j A_i)^{-2} = \begin{bmatrix} 1/16 & 7/9 & -14/27 \\ 0 & 1/9 & 4/27 \\ 0 & 0 & 1/9 \end{bmatrix} = A$$

$$\sum_{j=1}^k (\sum_{i=0}^j A_i)^{-2} A_j = A.A_1 + A.A_2 + A.A_3$$

$$= \begin{bmatrix} 17/72 & 1/16 & 7/9 \\ 0 & 0 & 7/9 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$\text{iz} \sum_{j=1}^k (\sum_{i=0}^j A_i)^{-2} = \frac{17}{72} + \frac{1}{3} = 0,569$$

$$A_0^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{iz} A_0^{-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 1 = 1,833$$

$0,569 < 1,833$ olur.

3.3. Karma Matris Eşitsizlikleri

(Uchiyama 2001) Bu bölümde, eğer $0 \leq A, B, C$ ve $S^* S + T^* T \leq 1$ ise, o zaman,

$$A \leq S^* B S + T^* C T$$

$$A^{r/2} (S^* B^s S + T^* C^s T) A^{r/2}$$

$$\leq \{ A^{r/2} (S^* B^t S + T^* C^t T) A^{r/2} \}^{(s+r)/(t+r)} \quad (t \geq 1, t \geq s \geq 0, r > 0 \text{ için})$$

$A^{1+r} \leq \{ A^{r/2} (S^* B^t S + T^* C^t T) A^{r/2} \}^{(1+r)/(t+r)}$ ($t \geq 1, r > 0$ için) olduklarını gösterdik.

Burada büyük harfler matrisleri temsil etmektedir. Tanım 2.2 den $A \leq B$ 'nin anlamının $B-A$ 'nın pozitif yarıtanımlı matris olduğudur. $A, f[0, \infty)$ sürekli fonksiyon üzerinde bir matris ve $0 \leq A < B$ için, $f(A) \leq f(B)$ 'yi kapsarsa monoton matris, $A, B \geq 0$ ve $0 < \lambda < 1$ için $f(\lambda A + (1-\lambda) B) \geq \lambda f(A) + (1-\lambda)f(B)$ ise konkav matrisdir.

Hansen ve Pedersen pozitif sürekli fonksiyon $f[0, \infty)$ için verilen şartların geçerli olduğunu göstermişlerdir.

i) f monoton operatör

ii) f konkav operatör

iii) Bütün T matrisi (gerekmedikçe kare), $\|T\| \leq 1$ ve bütün $A \geq 0$ için;

$$T^* f(A) T \leq f(T^* A T).$$

iv) Bütün P izdüşümü ve $A \geq 0$ için $P f(A) P \leq f(P A P)$,

v) Bütün S, T çiftleri için, $S^* S + T^* T \leq 1$ ile $A, B \geq 0$ için

$$S^* f(A) S + T^* f(B) T \leq f(S^* A S + T^* B T)$$

Burada, bu beş özelliğe bir kolay özellik ekleyebiliriz.

Lemma 3.3.1. (Uchiyama 2001)

(vi) Bütün tersi olan T ve $T^* T \geq 1$ için $f(T^* A T) \leq T^* f(A) T$.

İspat: (iii) $\Rightarrow$ (vi): $(T^*{}^{-1} T^* A T T^{-1}) \geq T^*{}^{-1} f(T^* A T) T^{-1}$

(vi) $\Rightarrow$ (iv): keyfi bir $A \geq 0$ ve keyfi bir P izdüşümünü alalım.

$$\{ 1/(1+C(P+ C)) \}^{-2} \geq 1 \text{ (} C > 0 \text{) } ' \text{ dan.}$$

(vi)'de $T = \{ 1/(1+C(P+ C)) \}^{-1}$ ve $B = T^{-1} A T^{-1}$ yerine koyarak,

$$f(A) = f(T B T) \leq T f(B) T, \text{ v.s. } T^{-1} f(A) T^{-1} \leq f(T^{-1} A T^{-1}) \text{ elde ederiz.}$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ iken, genel olarak, $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ için $Pf(A)P \leq f(PAP)$; $\|f(x_n) - f(x)\| \rightarrow 0$ 'ı kapsar. f sürekli fonksiyon için, x 'de interval spektrumu içerir.

Gerçek, $f(x) = x^a$ ($0 < a \leq 1$) monoton matris Lowner –Heinz eşitsizliği olarak adlandırılır. Furuta, $0 \leq A \leq B$ 'nin

$$\begin{aligned} (A^{r/2} B^t A^{r/2})^{(1+r)/(t+r)} &\geq A^{r+1}, \\ (B^{r/2} A^t B^{r/2})^{(1+r)/(t+r)} &\leq B^{r+1} \quad (t \geq 1, r > 0) \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

kapsadığını

$$\begin{aligned} (A^{r/2} B^t A^{r/2})^{(s+\lambda)/(t+r)} &\geq A^{r/2} B^s A^{r/2}, \\ (B^{r/2} A^t B^{r/2})^{(s+\lambda)/(t+r)} &\leq B^{r/2} A^s B^{r/2} \quad (t \geq s > 0, r > 0) \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

göstermiştir.

U, V fonksiyon çifti üzerinde çalışalım. $V(U^{-1}(x))$ yeni operatör fonksiyon elde etmek için monoton operatör: (3.3.1)'i daha fazla monoton operatör fonksiyonlarla genelleştirdik. (3.3.2), A ve B ters çevrilebilir ve $\log A \leq \log B$ olduğunu içine alır.

Harmonik ortalama, $A^{\frac{1}{\lambda}} B$, A ve B , $A^{\frac{1}{\lambda}} B = (\lambda A^{-1} + (1-\lambda) B^{-1})^{-1}$ tarafından tespit edilir. Eğer A ve B ters çevrilebilir ve $(A+C)^{\frac{1}{\lambda}} (B+C)$ eğer $C \rightarrow +0$ kuvvetsiz limiti değilse, (3.3.2)'yi takip ederek $A, B, C \geq 0$, $0 < s \leq t$ ve $0 < r$ için, $A \leq B^{\frac{1}{\lambda}} C$ ise

$$\{A^{r/2} (\lambda B^t + (1-\lambda) C^t) A^{r/2}\}^{(s+r)/(t+r)} \geq A^{r/2} (\lambda B^s + (1-\lambda) C^s) A^{r/2} \quad (3.3.3)$$

olur.

Eğer $0 \leq A, B, C$ ve $S^* S + T^* T \leq I$ ise $A \leq S^* B S + T^* C T$, $t \geq 1$, $t \geq s > 0$, $r > 0$ için,

$$\{A^{r/2} (S^* B^t S + T^* C^t T) A^{r/2}\}^{(s+r)/(t+r)} \geq A^{r/2} (S^* B^s S + T^* C^s T) A^{r/2} \text{ olur.}$$

(3.3.3)'ün bir uzantısı olan, $B^{\frac{1}{\lambda}} C \leq \lambda B + (1-\lambda) C$ eşitsizliğinden

$\{ A^{r/2} (S^* B^t S + T^* C^t T) A^{r/2} \}^{(1+r)/(t+r)} \geq A^{1+r}$, eşitsizliği (3.3.1)'i içine alır. Şimdi yukarıdaki ve (v). eşitsizliği kapsayan bir karma eşitsizlik verelim.

3.4. Genelleştirilmiş Eşitsizlik

(Uchiyama 2001) Bu kısımda (3.3.2) eşitsizliğini genelleştirdik. Bunu yapmak için öncelikle monoton operatör fonksiyonlarla ilgili yeni bir aile kurduk.

$(0, \infty)$ aralığında $f(x) \geq 0$ bir monoton operatör fonksiyon olarak verilsin ve $t > 0$ ve $r \geq 0$ reel sayıları, $\varphi_{r,t}(x)$ $[0, \infty)$ 'da bir fonksiyon belirtsin.

$$\varphi_{r,t}(x) = x^{r/(r+t)} f(x^{t/(r+t)}), \text{ i.e., } \varphi_{r,t}(x^r x^t) = x^r f(x^t) \quad (3.4.1)$$

de $0^0=1$ olarak yerleştiririz.

$\varphi_{ar, at}(x) = \varphi_{r,t}(x)$ ($a > 0$), $\varphi_{0,t}(x) = f(x)$ ($x \geq 0$) olduğu aşıkâr, Lowner'in teoreminden $\varphi_{r,t}(x)$ monoton operatördür.

$0 \leq s \leq t$ için $f(x) = x^{s/t}$ koyarız. $\varphi_{r,t}(x) = x^{(s+r)/(t+r)}$ için (3.3.2)'yi $r > 0$ için tekrar yazabiliriz.

$$\varphi_{r,t}(A^{r/2} B^t A^{r/2}) \geq A^{r/2} f(B^t) A^{r/2},$$

$\varphi_{r,t}(B^{r/2} A^t B^{r/2}) \leq B^{r/2} f(A^t) B^{r/2}$. (3.3.2)'nin uzantısını Teorem 3.4.1 içinde göstereceğiz, bu eşitsizlikler keyfi bir $f \geq 0$ operatör monoton fonksiyon ve $\varphi_{r,t}(x)$ için (3.4.1) tarafından tespit edilir.

Lemma 3.4.1: (Uchiyama 2001) $\varphi(x) \geq 0$ $[0, \infty)$ aralığında operatör monoton fonksiyon olsun ve $k(x)$ ve $\ell(x)$ pozitif artan devamlı fonksiyonlar olsun öyle ki;

$$\varphi(xk(x)) = x \ell(x) \text{ olur.}$$

Sonra, $0 \leq H \leq K$ için,

$$\varphi(H^{1/2} k(K) H^{1/2}) \geq H^{1/2} \ell(K) H^{1/2}$$

$$\varphi(K^{1/2} k(H) K^{1/2}) \leq K^{1/2} \ell(H) K^{1/2} \text{ eşitsizliğini içine alır.}$$

İspat: $\varphi(x)$ devamlı olduğundan beri K ve H ters çevrilebilir olduğunu farzedebiliriz. Sonra ispat $0 \leq H \leq K$ için $H^{1/2} K^{-1} H^{1/2} \leq 1$ 'dan takip edilir. (iii)'den ,

$$\begin{aligned}
\varphi(H^{1/2}k(K)H^{1/2}) &= \varphi(H^{1/2}K^{-1/2}Kk(K)K^{-1/2}H^{1/2}) \\
&\leq H^{1/2}K^{-1/2}\varphi(Kk(K))K^{-1/2}H^{1/2} \\
&= H^{1/2}\ell(K)H^{1/2} \text{ olur.}
\end{aligned}$$

3.3.2 eşitsizliğini görmek için $(K^{1/2}H^{-1}K^{1/2}) \geq 1$ ve (vi)'yi kullandık. Lemma 3.4.1'den operatör ortalamayı kullanarak Kuba-Ando'dan dolayı ϕ nin, φ ile bağlantılı olduğunu göstereceğiz.

$$H^{-1}\phi(k(K)) \geq K^{-1}\phi(K) = \ell(K), \text{ 1. eşitsizlik Lemma 3.4.1 ile denk olur.}$$

Teorem 3.4.1.

(Uchiyama 2001) $f(x) \geq 0$ $[0, \infty)$ 'da bir operatör fonksiyon olsun ve monoton operatör fonksiyon $r \geq 0, t > 0$ için $\phi_{r,t}$ 'yi (3.4.1) ile tespit edelim. Sonra $0 \leq A \leq B$ için,

$$\phi_{r,t}(A^{r/2}B^tA^{r/2}) \geq A^{r/2}f(B^t)A^{r/2} \quad (3.4.2)$$

$$\phi_{r,t}(B^{r/2}A^tB^{r/2}) \leq B^{r/2}f(A^t)B^{r/2} \quad (3.4.3)$$

içine alır.

Lemma 3.4.2. (Uchiyama 2001) $\varphi(x) \geq 0$ $[0, \infty)$ aralığında bir operatör monoton fonksiyon olsun ve $k(x)$ ve $\ell(x)$ pozitif artan devamlı fonksiyonlar ise,

$$\varphi(xk(x)) = x\ell(x) \text{ olur. Sonra } 0 \leq H \leq K \text{ için,}$$

$$\varphi(H^{1/2}k(K)H^{1/2}) \geq H^{1/2}\ell(K)H^{1/2}$$

$$\varphi(K^{1/2}k(H)K^{1/2}) \leq K^{1/2}\ell(H)K^{1/2} \text{ eşitsizliğini içine alır.}$$

$$\begin{aligned}
\phi_{r,t}(A^{r/2}B^tA^{r/2}) &= \phi_{r,t}(A^{r/2}B^{-r/2}B^{t+r}B^{-r/2}A^{r/2}) \\
&\geq A^{r/2}B^{-r/2}\phi_{r,t}(B^{t+r}B^{-r/2}A^{r/2}) \\
&= A^{r/2}f(B^t)A^{r/2}, \text{ dir.}
\end{aligned}$$

Böylece $0 \leq r \leq 1$ için (3.4.2)'yi içine alır. $0 \leq r \leq 2^n$ için, bütün operatör monoton fonksiyon f ve (3.4.1) tarafından tespit edilen $\phi_{r,t}$ için (3.4.2)'nin içine aldığını farzedelim.

$[2^n, 2^{n+1}]$ aralığında $r/2 \leq 2^n$ için, keyfi bir r alalım,

$$\phi_{r/2,t}(A^{r/4}B^tA^{r/4}) \geq A^{r/4}f(B^t)A^{r/4} \text{ olduğu farzedilebilir.}$$

$$F(x) = 1 \text{ ve } \phi_{r,t}(x) = x^{r/(t+r)} \quad (3.4.4)$$

içinde göz önünde tutulursa,

$$(A^{r/4}B^tA^{r/4})^{r/(2t+r)} \geq A^{r/2} \text{ olur.}$$

Eşitsizliğin sol tarafını K ve sağ tarafını H ile gösterelim ve (3.4.1)'de yerine koyalım.

$$y = x^{r/2}, k(y) = x^{r/2}x^t = y^{(r+2t)/r}, \ell(y) = x^{r/2}f(x^t) = \phi_{r/2,t}(k(y)),$$

$$\phi_{r,t}(y(k(y))) = y \ell(y) \text{ elde edilir.}$$

Lemma 3.4.1 den, $K \geq H$ ise,

$$\phi_{r,t}(H^{1/2}k(K)H^{1/2}) \geq H^{r/2} \ell(K)H^{1/2}, \text{ dir.}$$

$$K(K) = K^{(r+2t)/r} = A^{r/4}B^tA^{r/4} \text{ olduğundan, bu}$$

$$\phi_{r,t}(A^{r/4}A^{r/4}B^tA^{r/4}A^{r/4}) \geq \phi_{r/2,t}(A^{r/4}B^tA^{r/4})A^{r/4} \text{ olduğunu meydana çıkarır.}$$

(3.4.2)'i elde etmek için bunu (3.4.4) 'ye katalım, $r \geq 0$ için (3.4.2)'i elde ederiz ve (3.4.3) 'ü daha iyi görebiliriz.

(3.4.2) ve (3.4.3) 'nin (3.3.2)'nin uzantısı olduğuna dikkat edelim, $f(x) = x^{s/t}$ koyarak (3.3.2)'yi küçültürüz. Yukarıdaki ispatın, A ve B Hilbert boşluğunda operatörlerse yürürlükte olabileceğine dikkat edelim. Şimdi $0 \leq A \leq B$ şartını genişleterek yukarıdaki teoremden $\log A \leq \log B$ şartını yerine getirelim. Eğer A ve B operatörler ise $\log A$ ve $\log B$ ölçüsüz olabilir.

Teorem 3.4.2. (Uchiyama 2001) $[0, \infty)$ aralığında f monoton operatör fonksiyon olsun ve $\phi_{r,t}$ 'yi (3.4.1) ile tespit edelim. Eğer $\log A \leq \log B$ ise (3.4.2) ve (3.4.3) içine alır.

İspat: $(1-1/n\log A)^{-1}$ ve $(1-1/n\log B)^{-1}$ ikisi de sınırlı. Yeterli genişlikte n için,

$0 \leq (1-1/n\log A)^{-1} \leq (1-1/n\log B)^{-1}$, dir. Bundan dolayı bu eşitsizliğe ve fonksiyona müracaat edebiliriz.

$\Phi_{nr,nt}(x^{nr}x^{nt}) = x^{nr}f(x^{nt})$, den (3.4.2) ye, sonra,

$$\phi_{nr,nt} \left(1 - \frac{1}{n} \log A\right)^{-nr/2} \left(1 - \frac{1}{n} \log B\right)^{-nt} \left(1 - \frac{1}{n} \log A\right)^{-nr/2} \geq$$

$$\left(1 - \frac{1}{n} \log A\right)^{-nr/2} f \left(\left(1 - \frac{1}{n} \log B\right)^{-nt} \right) 2. \left(1 - \frac{1}{n} \log A\right)^{-nr/2}$$

$\phi_{nr,nt} = \phi_{r,t}$ ise $n \rightarrow \infty$ için (3.4.2) meydana çıkar.

3.4.1. Karma Eşitsizlikler (Uchiyama 2001)

Teorem 3.4.3. (Uchiyama 2001) $S^*S + T^*T \leq 1$ ve $A, B, C \geq 0$ olsun. Eğer $t \geq 1, r > 0$ için $0 \leq A \leq S^*BS + T^*CT$ ise,

$$\phi_{r,t}(A^{r/2}(S^*B^tS + T^*C^tT)A^{r/2}) \geq A^{r/2}(S^*f(B^t)S + T^*f(C^t)T)A^{r/2}, \quad (3.4.5)$$

$$\{A^{r/2}(S^*B^tS + T^*C^tT)A^{r/2}\}^{(s+r)/(t+r)} \geq A^{r/2}(S^*B^sS + T^*C^sT)A^{r/2} \quad (t \geq s \geq 0), \quad (3.4.6)$$

$$\{A^{r/2}(S^*B^tS + T^*C^tT)A^{r/2}\}^{(1+r)/(t+r)} \geq A^{1+r}. \quad (3.4.7)$$

İspat: $x^{1/t}$ ($t \geq 1$) monoton operatör ise

$$A \leq S^*BS + T^*CT \leq (S^*B^tS + T^*C^tT)^{1/t} \text{ olur.}$$

Teorem 3.4.1'den $\phi_{r,t}(A^{r/2}(S^*B^tS + T^*C^tT)A^{r/2})$

$$= \phi_{r,t}(A^{r/2} \{(S^*B^tS + T^*C^tT)^{1/t}\} A^{r/2})$$

$$\geq A^{r/2}(f(S^*B^tS + T^*C^tT)A^{r/2})$$

$$\geq A^{r/2}(S^*f(B^t)S+T^*f(C^t)T)A^{r/2}.$$

Burada son eşitsizlik (v)'den takip edilir. Böylece (3.4.5)'i elde ederiz. (3.4.6)'yı elde etmek için (3.4.5)'de $f(x)=x^{s/t}$ yerleştirmeliyiz ve sonra $s=1$ yerleştirerek (3.4.7) elde ederiz. (3.4.5) ve (3.4.7), sırasıyla (3.3.1) ve (3.3.2) nin uzantısıdır.

3.5. Pozitif Tanımlı Matrisler İçin Çeşitli Karma Ortalama Eşitsizlikler

(Hu,Zhang ve Yang 2004) Bu bölümde üç veya daha fazla pozitif tanımlı matris için geometrik ortalama, aritmetik ortalama, harmonik ortalama içeren çeşitli ortalamalar ve bazı karma ortalamaların ispatları sunulmuştur.

A_1, A_2 aynı düzende iki pozitif tanımlı matris olsun. A_1, A_2 nin geometrik ortalaması $G(A_1, A_2)$ ile gösterilsin, Puzs ve Woronowicz tarafından:

$$G(A_1, A_2) = A_1^{1/2} (A_1^{-1/2} A_2 A_1^{-1/2})^{1/2} A_1^{1/2} \quad (3.5.1)$$

takdim edildi.

Keyfi bir pozitif tanımlı matris A için, I birim matrisi göstermek üzere,

$$G(I, A) = A^{1/2} \text{ dir.}$$

Keyfi $(n-1)$ için pozitif tanımlı matrisler $A_1, \dots, A_{n-1}$ için, farzedelim ki geometrik ortalama $G(A_1, \dots, A_{n-1})$ iyi tanımlı olsun.

$n \geq 3$ için aynı düzende $A_1, \dots, A_n$ pozitif tanımlı matrisler olarak verilsin,

$\{(A_1^{(k)}, \dots, A_n^{(k)})\}$ sırasını tanıttık.

$$A_j^{(0)} = A_j, A_j^{(k)} = G((A_l^{(k-1)})_{l \neq j}), k=1, 2, \dots \quad (3.5.2)$$

Burada ve neticede, sembol $(B_l)_{l \neq j} (n-1)$ için

$(B_1, \dots, B_{j-1}, B_{j+1}, \dots, B_n)$ 'dir.

Şimdi $k=0, 1, \dots$ için $R^{(k)} = \sum_{i=1}^n A_i^k$ olsun.

Burada A pozitif tanımlı matris, öyle ki

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} A_i^{(k)}, k=\tilde{A}, i=1, 2, \dots, n \quad (3.5.3)$$

$k=0, 1, \dots$ için $\{R^{(k)}\}$ sınırlanmış ve azalmış;

$$R^{(k)} \geq R^{(k+1)} \quad (3.5.4)$$

Bu, $\{R^{(k)}\}$ 'nin, bazı pozitif tanımlı matrislerle bir noktada birleşen olduğunu ima eder. ((3.5.3)'den)

$R=n \tilde{A}$, veya eşit bir şekilde,

$$\tilde{A} = \frac{1}{n} \lim_{k \rightarrow +\infty} R^{(k)} = \frac{1}{n} R \text{ dir.} \quad (3.5.5)$$

(3.5.3)'de $\tilde{A}$ matrisi, $A_1, \dots, A_n$ 'nin geometrik ortalaması $G(A_1, \dots, A_n)$ olarak tespit edilmiştir.

Bu tip pozitif tanımlı matrisler için birçok özellik geometrik ortalamadan tahmin edilir.

$A_1, \dots, A_n$ gibi pozitif tanımlı matrislerin geometrik ortası $G(A_1, \dots, A_n)$ aşağıda verilen limit tarafından determine edilebilir.

$$G(A_1, \dots, A_n): \lim_{\varepsilon \downarrow 0} G(A_1 + \varepsilon I, \dots, A_n + \varepsilon I).$$

Şimdi, bizim için yararlı olacak bazı $G(A_1, \dots, A_n)$ 'nin bazı özelliklerini düzenleyelim.

P1: Skalerle tutarlılık: Eğer $A_1, \dots, A_n$ 'i ortaklaşa değiş tokuş edersek, sonra

$$G(A_1, \dots, A_n) = (A_1, \dots, A_n)^{1/n} \text{ olur.}$$

P2: Permütasyon invaryans: $(A_1, \dots, A_n)$ 'nin herhangi permütasyonu olan bütün $(A_{i1}, \dots, A_{in})$ için

$$G(A_{i1}, \dots, A_{in}) = G(A_1, \dots, A_n) \text{ 'dir.}$$

P3: Monotonluk: $(A_1, \dots, A_n) \rightarrow G(A_1, \dots, A_n)$ monoton.

Eğer $B_1 \geq A_1, \dots, B_n \geq A_n$ ise $G(B_1, \dots, B_n) \geq G(A_1, \dots, A_n)$ 'dir.

P4: Uygunluk invaryansı: Herhangi ters çevrilebilir S matrisi için

$$G(S^* A_1 S, \dots, S^* A_n S) = S^* G(A_1, \dots, A_n) S \text{ 'dir.}$$

P5: Müşterek Konkavlık: $(A_1, \dots, A_n) \rightarrow G(A_1, \dots, A_n)$, eğer $0 < \alpha < 1$ ise konkav olur, sonra

$$G(\alpha A_1 + (1 - \alpha) B_1, \dots, \alpha A_n + (1 - \alpha) B_n)$$

$$\geq \alpha G(A_1, \dots, A_n) + (1 - \alpha) G(B_1, \dots, B_n) \text{ 'dir.}$$

P6: Öz-çiftlik: $G(A_1, \dots, A_n) = G(A_1^{-1}, \dots, A_n^{-1})^{-1}$.

P7: Devamlılık: Eğer herhangi bir pozitif tanımlı matris ardışık ise

$\{A_i^{(k)}\}_{0^{+\infty}} (1 \leq i \leq n)$ $k \rightarrow \infty$ 'a kadar pozitif tanımlı matris içerir, sonra

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} G(A_1^{(k)}, \dots, A_n^{(k)}) = G(A_1, \dots, A_n) \text{ olur.}$$

(3.5.4) ve (3.5.5)'den klasik aritmetik-geometrik-harmonik ortalama eşitsizlikleri:

$$H(A_1, \dots, A_n) \leq G(A_1, \dots, A_n) \leq A(A_1, \dots, A_n) \quad (3.5.6)$$

$$H(A_1, \dots, A_n) = ((A_1^{-1} + \dots + A_n^{-1}) / n)^{-1} \quad (3.5.7)$$

$$A(A_1, \dots, A_n) = (A_1 + \dots + A_n) / n$$

$A_1, \dots, A_n$ 'nin harmonik ve aritmetik ortalaması olarak adlandırılır.

3.6. Esas Lemmalar

(Hu, Zhang ve Yang 2004) Bu kısımda, bizim araştırmamız için sonra kullanacağımız yardımcı önermeleri kurduk.

Öncelikle $P1$, $P2$ ve $P4$ 'den, özel bir n için $(A_1, \dots, A_n)$ 'nin, geometrik ortalaması $G(A_1, \dots, A_n)$ için formül elde edilir.

Lemma 3.6.1. (Hu,Zhang ve Yang 2004) Farzedelim ki A ve B iki pozitif tanımlı matris olsun, sonra,

$$G(A_1, \dots, A_n) = G(\underbrace{A, \dots, A}_{n-p}, \underbrace{B, \dots, B}_p) = A^{1/2} (A^{-1/2} B A^{-1/2})^{p/n} A^{1/2} \quad (3.6.1)$$

Eğer A=I ise o zaman,

$$G(A_1, \dots, A_n) = G(\underbrace{I, \dots, I}_{n-p}, \underbrace{B, \dots, B}_p) = B^{p/n} \quad (3.6.2)$$

Sonra P5 ve matematiksel tanım, $G(A_1, \dots, A_n)$ 'nin aşağıdaki özelliğini ortaya çıkarır.

Lemma 3.6.2. (Hu,Zhang ve Yang 2004) Eğer A_{ij} ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$) pozitif tanımlı matrisler ise,

$$G(\sum_{j=1}^m t_j A_{1j}, \dots, \sum_{j=1}^m t_j A_{nj}) \geq \sum_{j=1}^m t_j G(A_{1j}, \dots, A_{nj}) \quad (3.6.3)$$

Lemma 3.6.3. (Hu,Zhang ve Yang 2004) A_{ij} ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$) pozitif tanımlı matrisler ise,

$$G(\sum_{j=1}^m A_{1j}, \dots, \sum_{j=1}^m A_{nj}) \geq \sum_{j=1}^m G(A_{1j}, \dots, A_{nj}) \quad (3.6.4)$$

Aşağıda vereceğimiz 2 lemma Teorem 3.7.1'in ispatı için gereklidir. İlki $m=n-1$ seçilerek lemma 3.6.3'den neticelendirilebilir ve verilen $A_1, \dots, A_n$ pozitif tanımlı matrisler için $(A_{11}, \dots, A_{im}) = (A_k)_{k \neq i}$ dir. 2.side $G(A_1, \dots, A_n)$ 'nin üst sınırını veren ortalama eşitsizliğidir.

Lemma 3.6.4. (Hu,Zhang ve Yang 2004) $A_1, \dots, A_n$ ($n \geq 3$) pozitif tanımlı matrisler olsun, o zaman,

$$G(\sum_{i \neq 1} A_i, \dots, \sum_{i \neq n} A_i) \geq \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \sum_{k=1}^{n-1} G(\underbrace{A_i, \dots, A_i}_{k \text{ defa}}, \underbrace{A_j, \dots, A_j}_{n-k \text{ defa}}) \quad (3.6.5)$$

olur.

İspat: $\Pi (1, \dots, n)$ için keyfi bir permütasyon olsun. P2'den ve Lemma 3.6.3'den,

$$\begin{aligned} G(\sum_{i \neq 1} A_i, \dots, \sum_{i \neq n} A_i) &= G(\sum_{i \neq 1} A_{\Pi(i)}, \dots, \sum_{i \neq n} A_{\Pi(i)}) \\ &\geq G(A_{\Pi(2)}, A_{\Pi(1)}, \dots, A_{\Pi(1)}) + G(A_{\Pi(3)}, A_{\Pi(3)}, A_{\Pi(2)}, \dots, A_{\Pi(2)}) + \dots + G(A_{\Pi(n)}, \dots, \\ &A_{\Pi(n)}, A_{\Pi(n-1)}) \text{ 'dir.} \end{aligned}$$

Bütün permütasyonların $(1, \dots, n)$ numaraları $n!$ 'den ötürü,

$$\begin{aligned} n! G(\sum_{i \neq 1} A_i, \dots, \sum_{i \neq n} A_i) &\geq \sum_{\Pi} [G(A_{\Pi(2)}, A_{\Pi(1)}, \dots, A_{\Pi(1)}) + G(A_{\Pi(3)}, A_{\Pi(3)}, \\ &A_{\Pi(2)}, \dots, A_{\Pi(2)}) + \dots + G(A_{\Pi(n)}, \dots, A_{\Pi(n)}, A_{\Pi(n-1)})] \\ &= \sum_{\Pi} \sum_{k=1}^{n-1} G(\underbrace{A_{\pi(k+1)}, \dots, A_{\pi(k+1)}}_{k \text{ defa}}, \underbrace{A_{\pi(k)}, \dots, A_{\pi(k)}}_{n-k \text{ defa}}) \end{aligned} \quad (3.6.6)$$

$i \neq j$ için $(n-2)!$ defa (3.6.6)'nın sağ tarafında belirir, çünkü permütasyonların numarası, Π , öyle ki

$\Pi(k+1) = i, \Pi(k) = j, (1 \leq k \leq (n-1), i \neq j \text{ için } (n-2)!$ 'dir. Böylece,

$$\begin{aligned} n(n-1) G(\sum_{i \neq 1} A_i, \dots, \sum_{i \neq n} A_i) &\geq \sum_{i \neq j} \sum_{k=1}^{n-1} G(\underbrace{A_i, \dots, A_i}_{k \text{ defa}}, \underbrace{A_j, \dots, A_j}_{n-k \text{ defa}}) \\ &= 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \sum_{k=1}^{n-1} G(\underbrace{A_i, \dots, A_i}_{k \text{ defa}}, \underbrace{A_j, \dots, A_j}_{n-k \text{ defa}}) \text{ 'dir.} \end{aligned}$$

Son eşitlikten (3.6.5) eşitsizliği neticelendirilir.

Lemma 3.6.5. (Hu,Zhang ve Yang 2004) $n \geq 3$ için $A_1, \dots, A_n$ pozitif tanımlı matrisler olsun, sonra,

$$G(A_1, \dots, A_n) \leq \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} G(A_i A_j) \quad (3.6.7)$$

İspat: Öncelikle özel durum $n=3$ için ele alalım, (3.5.4 ve 3.5.5)'den

$$G(A_1, A_2, A_3) = \tilde{A} = 1/3R \leq 1/3R^{(1)}$$

$$= 1/3(G(A_1, A_2) + G(A_1, A_3) + G(A_2, A_3)) \quad n=3 \text{ için elde edilir.}$$

Farzedelim ki (3.6.7) $n=p (\geq 3)$ için elde edilsin.

$$G(A_1, \dots, A_p) \leq \frac{2}{(p-1)p} \sum_{1 \leq i < j \leq p+1} G(A_i A_j) \quad (3.6.8)$$

$$G(A_1, \dots, A_{p+1}) \leq \frac{2}{(p+1)p} \sum_{1 \leq i < j \leq p+1} G(A_i A_j) \quad (3.6.9)$$

$$G(A_1, \dots, A_{p+1})$$

$$= \tilde{A} = \frac{1}{p+1} R \leq \frac{1}{p+1} R^{(1)}$$

$$\leq \frac{2}{(p+1)p(p-1)} \left(\begin{array}{cc} \sum & G(A_i, A_j) + \dots + \sum G(A_i, A_j) \\ 1 \leq i < j \leq p+1 & 1 \leq i < j \leq p+1 \\ i, j \neq 1 & i, j \neq p+1 \end{array} \right)$$

$$= \frac{2}{(p+1)p} \sum_{1 \leq i < j \leq p+1} G(A_i A_j),$$

3.6.9 eşitsizliği takip edilerek lemmanın ispatı tamamlanır.

3.7. Karma Ortalama Eşitsizlikleri

(Hu, Zhang ve Yang 2004) Bu kısımda, üç veya daha fazla pozitif tanımlı matris için karma ortalama eşitsizlikleri türettik.

Burada G, A, H 3.5 deki sembollerdir.

$$(1) \tilde{G}(A_1, \dots, A_n): G(A_{(A_i)_{i \neq 1}}), A_{((A_i)_{i \neq 2}}), \dots, A_{((A_i)_{i \neq n})};$$

$$(2) \tilde{A}(A_1, \dots, A_n): A(G_{((A_i)_{i \neq 1}}), G_{((A_i)_{i \neq 2}}), \dots, G_{((A_i)_{i \neq n})});$$

$$(3) \hat{G}(A_1, \dots, A_n): = G(H_{((A_i)_{i \neq 1}}), H_{((A_i)_{i \neq 2}}), \dots, H_{((A_i)_{i \neq n})});$$

$$(4) \hat{H}(A_1, \dots, A_n) = H(G((A_i)_{i \neq 1}), G((A_i)_{i \neq 2}), \dots, G((A_i)_{i \neq n})).$$

Şimdi amacımız, pozitif yarı-tanımlı matrisler için aritmetik, geometrik, harmonik ortalama ve üç ve daha fazla pozitif tanımlı matris için yukarıdaki 4 çeşit karma ortalamaları düzenlemek.

Teorem 3.7.1. (Hu,Zhang ve Yang 2004) $n \geq 3$ için $A_1, \dots, A_n$ pozitif tanımlı matrisler olsun. Takip eden karma ortalama eşitsizlikleri

$$G(A_1, \dots, A_n) \leq \tilde{A}(A_1, \dots, A_n) \leq \tilde{G}(A_1, \dots, A_n) \leq A(A_1, \dots, A_n) \quad (3.7.1)$$

İspat: (3.5.4) ve (3.5.5)'den,

$$\begin{aligned} G(A_1, \dots, A_n) &= \tilde{A} = \frac{1}{n} R \leq \frac{1}{n} R^{(1)} \\ &= \frac{G((A_i)_{i \neq 1}) + G((A_i)_{i \neq 2}) + \dots + G((A_i)_{i \neq n})}{n} \\ &= \tilde{A}(A_1, \dots, A_n). \end{aligned}$$

Sonra 1. eşitsizlik(3.7.1)'i kapsar.

Bundan başka (3.5.6), 2. eşitsizlikten

$$\begin{aligned} \tilde{G}(A_1, \dots, A_n) &\leq \frac{A((A_i)_{i \neq 1}) + A((A_i)_{i \neq 2}) + \dots + A((A_i)_{i \neq n})}{n} \\ &= \frac{A_1 + A_2 + \dots + A_n}{n} = A(A_1, \dots, A_n). \end{aligned} \quad (3.7.2)$$

Lemma 3.6.5'in tanımından

$$\begin{aligned} \tilde{A}(A_1, \dots, A_n) &= \frac{G((A_i)_{i \neq 1}) + G((A_i)_{i \neq 2}) + \dots + G((A_i)_{i \neq n})}{n} \\ &\leq \frac{2}{n(n-1)(n-2)} \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} G(A_i A_j) + \dots + \sum_{1 \leq i < j \leq n} G(A_i A_j) \right) \end{aligned} \quad (3.7.3)$$

$$= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} G(A_i A_j).$$

Diğer taraftan Lemma 3.7.4'den

$$\begin{aligned} \tilde{G}(A_1, \dots, A_n) &= G\left(\frac{1}{n-1} \sum_{i \neq 1} A_i, \frac{1}{n-1}, \sum_{i \neq 2} A_i, \dots, \frac{1}{n-1}, \sum_{i \neq n} A_i\right) \\ &\geq \frac{2}{n(n-1)^2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \sum_{k=1}^{n-1} G\left(\underbrace{A_i, \dots, A_i}_{k \text{ defa}}, \underbrace{A_j, \dots, A_j}_{n-k \text{ defa}}\right) \end{aligned} \quad (3.7.4)$$

P4'den genelliği kaybetmeden, $A_i = I$ ve $A_j = A$ farzedebiliriz.

$$\sum_{k=1}^{n-1} G\left(\underbrace{A_i, \dots, A_i}_{k \text{ defa}}, \underbrace{A_j, \dots, A_j}_{n-k \text{ defa}}\right) \geq (n-1) G(A_i A_j) \quad (3.7.5)$$

(3.7.5) bütün i, j ($i \neq j$) için tekrar kontrol edilir.

$$A^{\frac{n-1}{n}} + \dots + A^{\frac{2}{n}} + A^{\frac{1}{n}} \geq (n-1) A^{\frac{1}{2}} \quad (3.7.6)$$

gibi tekrar yazılabilir,

$$A^{\frac{n-1}{n}} + \dots + A^{\frac{2}{n}} + A^{\frac{1}{n}} - (n-1) A^{1/2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \left(A^{\frac{k}{2n}} - A^{\frac{n-k}{2n}} \right)^2 \geq 0$$

Böylece 3.7.6 eşitsizliği doğrulanır.

(3.7.3), (3.7.4) ve (3.7.5)'den (3.7.2) eşitsizliğini çıkarabiliriz. Teorem 3.7.1 bundan dolayı ispatlanmıştır.

Uyarı:

1) 3.7.6 eşitsizliği P1'den çıkartılabilir.

2) $A_i + \Sigma I$ limitlerini alalım, $A_1, \dots, A_n$ pozitif yarıtanımlı matrisler için teorem 3.7.1 yürürlüktedir.

Teorem 3.7.2. (Hu, Zhang ve Yang 2004) $n \geq 3$ için $A_1, \dots, A_n$ pozitif tanımlı matrisler olsun. O zaman matris ortalama eşitsizliklerini,

$$H(A_1, \dots, A_n) \leq \hat{G}(A_1, \dots, A_n) \leq \hat{H}(A_1, \dots, A_n) \leq G(A_1, \dots, A_n) \quad (3.7.7)$$

olarak ifade edelim.

İspat: $A_1, \dots, A_n$ pozitif tanımlı matrisler olduğundan, bunların tersleri $A_1^{-1}, \dots, A_n^{-1}$ matrislerinin pozitif tanımlı matrisler olduğunu biliyoruz. Bütün A_i 'lerin terslerini (3.7.1)'de yer değiştirirsek

$G(A_1^{-1}, \dots, A_n^{-1}) \leq \tilde{A}(A_1^{-1}, \dots, A_n^{-1}) \leq \tilde{G}(A_1^{-1}, \dots, A_n^{-1}) \leq A(A_1^{-1}, \dots, A_n^{-1})$ ve böylece

$A(A_1^{-1}, \dots, A_n^{-1})^{-1} \leq \tilde{G}(A_1^{-1}, \dots, A_n^{-1})^{-1} \leq \tilde{A}(A_1^{-1}, \dots, A_n^{-1})^{-1} \leq G(A_1^{-1}, \dots, A_n^{-1})^{-1} \quad (3.7.8)$ elde edilir.

P6'dan, aşağıdaki bağıntıları kolayca kontrol edebiliriz.

$$H(A_1, \dots, A_n) = A(A_1^{-1}, \dots, A_n^{-1})^{-1},$$

$$G(A_1, \dots, A_n) = G(A_1^{-1}, \dots, A_n^{-1})^{-1},$$

$$\hat{H}(A_1, \dots, A_n) = \tilde{A}(A_1^{-1}, \dots, A_n^{-1})^{-1} \quad (3.7.9)$$

$$\hat{G}(A_1, \dots, A_n) = \tilde{G}(A_1^{-1}, \dots, A_n^{-1})^{-1}.$$

(3.7.9)'yi (3.7.8)'de yerleştirerek (3.7.7) elde ederiz. Buda ispatı tamamlar.

3.8. Hadamard Matris Çarpımlarıyla İlgili Bazı Determinantal Eşitsizlikler

3.8.1. Oppenheim Eşitsizliği (Chen 2002)

$A = (a_{ij}) \in S_n^+$ ve $B = (b_{ij}) \in S_n^+$ ise

$$\det(A \circ B) \geq \left(\prod_{i=1}^n a_{ii} \right) \det B$$

Örnek 3.8.1:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \in S_n^+, b = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in S_n^+ \text{ olup, } \det(B) = 6$$

$$AoB = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ dir. } \det(AoB) = 24$$

$$\left(\prod_{i=1}^n a_{ii} \right) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} = 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4$$

$$24 = 4 \cdot 6 = 24 \text{ olup}$$

$$\det(AoB) \geq \left(\prod_{i=1}^n a_{ii} \right) \det B \text{ eşitsizliği sağlandı.}$$

3.8.2. Lynn Ve Ando Eşitsizliği (Chen 2002)

$A = (a_{ij}) \in M_n$ ve $B = (b_{ij}) \in M_n$ ise

$$\det(AoB) + \det A \cdot \det B \geq (\det A) \left(\prod_{i=1}^n b_{ii} \right) + (\det B) \left(\prod_{i=1}^n a_{ii} \right), (1)$$

$$\det(AoB) \geq \det(AB) \left(\frac{\prod_{i=1}^n b_{ii}}{\det B} + \frac{\prod_{i=1}^n a_{ii}}{\det A} - 1 \right)$$

Örnek 3.8.2 :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \in M_n \text{ ve } B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \in M_n$$

$$\det A = 2$$

$$\det B = 7$$

$$A \circ B = \begin{bmatrix} 12 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 12 \end{bmatrix} \text{ ise } \det(A \circ B) = 408$$

$$n = 3$$

$$n = 3$$

$$\prod_{i=1}^n b_{ii} = b_{11} \cdot b_{22} \cdot b_{33} = 24, \quad \prod_{i=1}^n a_{ii} = 24$$

$$\det(A \circ B) + \det A \cdot \det B \geq (\det A) \prod_{i=1}^n b_{ii} + (\det B) \prod_{i=1}^n a_{ii}, \quad (1)$$

$$408 + 2 \cdot 7 \geq 2 \cdot 24 + 7 \cdot 24$$

422 > 216 olup (1) eşitsizlik sağlandı.

$$AB = \begin{bmatrix} 16 & -5 & -2 \\ -10 & 12 & -10 \\ 2 & -11 & 13 \end{bmatrix} \text{ ise } \det(AB) = 14$$

$$\frac{\prod_{i=1}^n b_{ii}}{\det B} = \frac{24}{7} \quad \frac{\prod_{i=1}^n a_{ii}}{\det A} = \frac{24}{2}$$

$$\det (AoB) \geq \det (AB) \left(\frac{\prod_{i=1}^n b_{ii}}{\det B} + \frac{\prod_{i=1}^n a_{ii}}{\det A} - 1 \right)$$

$$408 > 14 \cdot \left(\frac{24}{7} + \frac{24}{2} - 1 \right)$$

408>202 olup (2) eşitsizlik sağlandı.

3.8.3. Livrezhu Eşitsizliği (Chen 2002)

Oppenheim eşitsizliğini geliştirerek aşağıdaki eşitsizliğe ulaşmışlardır.

$A=(a_{ij}) \in M_n$ ve $B=(b_{ij}) \in M_n US_n^+$ ise

$$\det (AoB) \geq a_{11}b_{11} \prod_{k=2}^n \left[\frac{b_{kk}\det A_k}{\det A_{k-1}} + \frac{\det B_k}{\det B_{k-1}} \left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{a_{ik}a_{ki}}{a_{ii}} \right) \right]$$

Örnek 3.8.3:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \in M_n \text{ ve } B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \in M_n US_n^+$$

$$AoB = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix} \det(AoB) = 720$$

$$a_{11}b_{11}=8$$

$$\prod_{k=2}^n \left[\frac{b_{kk} \det A_k}{\det A_{k-1}} + \frac{\det B_k}{\det B_{k-1}} \left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{a_{ik} a_{ki}}{a_{ii}} \right) \right] \text{ise (1)}$$

$$(2) \sum_{i=1}^2 \frac{a_{ii} a_{ki}}{a_{ii}} = \frac{a_{13} a_{31}}{a_{11}} + \frac{a_{23} a_{32}}{a_{22}}, \sum_{i=1}^1 \frac{a_{ii} a_{ki}}{a_{ii}} = \frac{a_{11} a_{11}}{a_{11}} \quad (3)$$

$$(2) = \frac{-1.a}{4} + 1 = 1 \quad (3) = 4$$

$$\frac{b_{22} \det A_2}{\det A_1} + \frac{\det B_2}{\det B_1} \cdot \left(\sum_{i=1}^1 \frac{a_{ik} a_{ki}}{a_{ii}} \right) \quad (a)$$

$$= \frac{3.12}{4} + \frac{10}{15} \cdot 4 = 11.66$$

$$\frac{b_{33} \det A_3}{\det A_2} + \frac{\det B_3}{\det B_2} \cdot \left(\sum_{i=1}^2 \frac{a_{i3} a_{3i}}{a_{ii}} \right) \quad (b)$$

$$= \frac{5.4}{12} + \frac{6}{10} \cdot 1 = 2.866$$

$$(1) = (a).(b) \text{ ise } (1) = 33.442533$$

$$a_{11} b_{11} \cdot (1) = 8 \times 33.442533 = 267.540 \text{ olup}$$

720 > 267.540 olur, böylece Livre Zhu eşitsizliği sağlanır.

Lemma 3.8.1. (Chen 2002) Eğer $A \in \mathbb{C}H_n$, $B \in \mathbb{C}H_n \mathcal{U}_n^+$ ise $A \circ B \in \mathbb{C}H_n$ dir.

Örnek 3.8.4:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2+i & -4-i \\ 2-i & 2 & 5i \\ -4+i & -5i & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}H_n \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1-3i & 2i \\ 1+3i & 1 & 1+i \\ -2i & 1-i & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}H_n \mathcal{U}_n^+$$

$$A \circ B = \begin{bmatrix} 1 & 5-5i & 2-8i \\ 5+5i & 2 & -5+5i \\ 2+8i & -5-5i & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}H_n \text{ olup lemma 3.8.1 sağlanır.}$$

Lemma 3.8.2. (Chen 2002) Eğer $A \in \mathbb{C}S_n^+$ ve $B \in \mathbb{C}S_n^+$ ise $A \circ B \in \mathbb{C}S_n^+$ olur.

Örnek 3.8.5:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}S_n^+$$

$$A \circ B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}S_n^+ \text{ olup Lemma 3.8.2 sağlanır.}$$

Lemma 3.8.3. (Chen 2002) Eğer $A=(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n} \cap H_n$, $a_{ii} > 0 \ (\forall i \in \mathbb{N})$ ise $\det A \geq \det V(A) > 0$

İspat: $A \in H_n$ ise D gibi pozitif diagonal bir matris oluşur. Bunun gibi AD 'de tam manasıyla diagonal olur, şöyle ki;

$$|a_{ii}d_i| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}d_j| \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

Şimdi $a_{ii}d_i > 0 \ (\forall i \in \mathbb{N})$ için $\det(AD) \geq \det V(AD) > 0$ elde edilir.

$\det(AD) = \det A \cdot \det D$ ve $\det V(AD) = \det V(A) \cdot \det D$ olduğundan

$\det A \geq \det V(A) > 0$ elde edilir.

Lemma 3.8.4. (Chen 2002) Eğer A ve B'nin her ikisi $M_n US_n^+$ ye aitse, AoB bir P-matrisdir.

İspat: Aşağıdaki iki durumu ayırt edebiliriz.

1. durum: Lemma 3.8.2.'ye göre, eğer ACS_n^+ ve BES_n^+ ise $AoBES_n^+$ dir. Bu nedenle AoB ayrıca bir P-matrisdir.

2. durum: Eğer A ve B'den biri M_n 'ye aitse, $AoBCH_n$ olur.

AoB bir reel pozitif değerli H-matris olduğundan bunun bütün alt matrisleri için geçerlidir. Lemma 3.8.3'ü AoB'nin bütün alt matrisleri için uygularsak AoB'nin bir P-matris olduğu sonucuna ulaşırız.

Örnek 3.8.6:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_n US_n^+ \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \in M_n US_n^+$$

$$AoB = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \in P \text{ olup, Lemma 3.8.4 gerçekleşir.}$$

Teorem 3.8.1. (Chen 2002)

a) Eğer $A = (a_{ij})$ ve $B = (b_{ij})$ 'ler $M_n VS_n^+$ 'e aitse, daha sonra şu gerçekleşir:

$$\det(AoB) \geq \det(AB) \prod_{k=2}^n \left(\frac{a_{kk} \det A_{k-1}}{\det A_k} + \frac{b_{kk} \det B_{k-1}}{\det B_k} - 1 \right)$$

b) Eğer $A = (a_{ij}) \in CH_n$ ve $B = (b_{ij}) \in CH_n$ olursa

$$\det u(AoB) \geq \det(u(A) u(B)) \prod_{k=2}^n \left(\frac{|a_{kk}| \det U(A_{k-1})}{\det U(A_k)} + \frac{|b_{kk}| \det U(B_{k-1})}{\det B_k} - 1 \right)$$

İspat:

a) A_k ve B_k her ikisi de $M_n \mathbb{R}^+$ 'e ait olsun.

$$x > a_{kk} - \frac{\det A_k}{\det A_{k-1}} \text{ ve } y > b_{kk} - \frac{\det B_k}{\det B_{k-1}}, \quad xy > a_{kk}b_{kk} - \frac{\det(A_k \circ B_k)}{\det(A_{k-1} \circ B_{k-1})}$$

olduğundan $\forall \Sigma > 0$ için;

$$\left(a_{kk} - \frac{\det A_k}{\det A_{k-1}} + \Sigma \right) \left(b_{kk} - \frac{\det B_k}{\det B_{k-1}} + \Sigma \right) > a_{kk}b_{kk} - \frac{\det(A_k \circ B_k)}{\det(A_{k-1} \circ B_{k-1})}$$

$\Sigma \rightarrow 0$ durumunda limiti alındığında sabit değerler olan determinant değerlerinde hiçbir değişiklik olmayacaktır. Sadece $\Sigma = 0$ olur.

$$\left(a_{kk} - \frac{\det A_k}{\det A_{k-1}} \right) \left(b_{kk} - \frac{\det B_k}{\det B_{k-1}} \right) \geq a_{kk}b_{kk} - \frac{\det(A_k \circ B_k)}{\det(A_{k-1} \circ B_{k-1})}$$

Buradan şunu elde ederiz:

$$a_{kk}b_{kk} - a_{kk} \frac{\det B_k}{\det B_{k-1}} - b_{kk} \frac{\det A_k}{\det A_{k-1}} + \frac{\det A_k \cdot \det B_k}{\det A_{k-1} \det B_{k-1}} \geq a_{kk}b_{kk} - \frac{\det(A_k \circ B_k)}{\det(A_{k-1} \circ B_{k-1})}$$

$$\frac{\det(A_k \circ B_k)}{\det(A_{k-1} \circ B_{k-1})} \geq a_{kk} \frac{\det B_k}{\det B_{k-1}} - b_{kk} \frac{\det A_k}{\det A_{k-1}} - \frac{\det A_k \cdot \det B_k}{\det A_{k-1} \det B_{k-1}} \quad (1)$$

Buradan;

$$\frac{\det(A_k \circ B_k)}{\det(A_{k-1} \circ B_{k-1})} \geq \frac{\det A_k \cdot \det B_k}{\det A_{k-1} \det B_{k-1}} \left(\frac{a_{kk} \det A_{k-1}}{\det A_k} + \frac{b_{kk} \det B_{k-1}}{\det B_k} \right)$$

denklemini açılıp payda eşitlenirse;

$$\frac{\det(A_k \circ B_k)}{\det(A_{k-1} \circ B_{k-1})} \geq \frac{a_{kk} \det A_{k-1} \det A_k \cdot \det B_k}{\det A_k \cdot \det A_{k-1} \det B_{k-1}} + \frac{b_{kk} \det B_{k-1} \det B_k \det A_k}{\det B_k \det B_{k-1} \cdot \det A_{k-1}}$$

$$- \frac{\det A_k \det B_k}{\det A_{k-1} \det B_{k-1}}$$

$$\frac{\det(A_k \circ B_k)}{\det(A_{k-1} \circ B_{k-1})} \geq a_{kk} \frac{\det B_k}{\det B_{k-1}} + b_{kk} \frac{\det A_k}{\det A_{k-1}} - \frac{\det A_k \cdot \det B_k}{\det A_{k-1} \det B_{k-1}} \quad (1)$$

$$\frac{\det(A_k \circ B_k)}{\det(A_{k-1} \circ B_{k-1})} \geq \frac{\det A_k \cdot \det B_k}{\det A_{k-1} \det B_{k-1}} \left(\frac{a_{kk} \det A_{k-1}}{\det A_k} + \frac{b_{kk} \det B_{k-1}}{\det B_k} \right)$$

$$\prod_{k=2}^n \frac{\det(A_k \circ B_k)}{\det(A_{k-1} \circ B_{k-1})} \geq \prod_{k=2}^n \frac{\det A_k \cdot \det B_k}{\det A_{k-1} \det B_{k-1}} \left(\frac{a_{kk} \det A_{k-1}}{\det A_k} + \frac{b_{kk} \det B_{k-1}}{\det B_k} \right)$$

Sonuçta;

$$\det(A \circ B) \geq \det(A) \det(B) \prod_{k=2}^n \left(\frac{a_{kk} \det A_{k-1}}{\det A_k} + \frac{b_{kk} \det B_{k-1}}{\det B_k} - 1 \right) \text{ olur.}$$

b) $A_k \in \mathcal{CH}_k$ ve $B_k \in \mathcal{CH}_k$ ($2 \leq k \leq n$), $\forall \Sigma > 0$ için

$$\left(|a_{kk}| - \frac{\det U(A_k)}{\det U(A_{k-1})} + \Sigma \right) \left(|b_{kk}| - \frac{\det U(B_k)}{\det U(B_{k-1})} + \Sigma \right) >$$

$$|a_{kk} b_{kk}| - \frac{\det U(A_k \circ B_k)}{\det U(A_{k-1} \circ B_{k-1})} \text{ elde ederiz. (2)}$$

Şimdi (2) (1)'in kanıtlandığı gibi benzer bir durumla kanıtlanabilir.

Örnek 3.8.7:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n \mathcal{US}_n^+ \text{ ve } B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n \mathcal{US}_n^+ \text{ ise}$$

$$A \circ B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow 30 = \det(A \circ B) \text{ olur.}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A.B) = 0 \text{ olur.}$$

$$\det(A \circ B) \geq \det(AB) \prod_{k=2}^n \left(\frac{a_{kk} \det A_{k-1}}{\det A_k} + \frac{b_{kk} \det B_{k-1}}{\det B_k} - 1 \right) \text{ teoremi}$$

$$30 \geq 0. \left(\prod_{k=2}^n \left(\frac{a_{kk} \det A_{k-1}}{\det A_k} + \frac{b_{kk} \det B_{k-1}}{\det B_k} - 1 \right) \right)$$

$30 \geq 0$ olduğundan gerçekleşir.

Önerme 3.8.1.

$A = (a_{ij})$ ve $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n} \cap H_n$ de tanımlı olsun, $\prod_{i=1}^n a_{ii} b_{ii} > 0$ olup,

$$\det(A \circ B) \geq \det(u(A) \circ u(B)) \prod_{k=2}^n \left(\frac{|a_{kk}| \det u(A_{k-1})}{\det u(A_k)} + |b_{kk}| \frac{\det u(B_{k-1})}{\det u(B_k)} - 1 \right) \text{ dir.}$$

İspat:

$D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$, $n \times n$ tipinde köşegen matris olarak tanımlansın.

Eğer $x > 0$ ise $\text{Sgn}(x) = 1$ olduğundan $d_i = \text{Sgn}(a_{ii} b_{ii})$ ($\forall i \in \mathbb{N}$) olarak tanımlanır.

Çünkü;

$$\prod_{i=1}^n a_{ii} b_{ii} > 0 \text{ dır ve}$$

$$\prod_{i=1}^n |a_{ii}b_{ii}| = \prod_{i=1}^n a_{ii}b_{ii}d_i = \left(\prod_{i=1}^n a_{ii}b_{ii}\right) \left(\prod_{i=1}^n d_i\right) \text{ olur.}$$

$$\det D = \prod_{i=1}^n d_i = 1 \text{ olduğunu biliyoruz. Sonuç olarak,}$$

$$\det (AoB) = \det [(AoB) \Delta] = \det [Ao(BD)] \text{ olur.}$$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n} \cap H_n$ ve $B \in \mathbb{R}^{n \times n} \cap H_n$ ise Lemma 2.1 tarafından;

$Ao(BD) \in \mathbb{R}^{n \times n} \cap H_n$ ve $Ao(BD)$ pozitif diagonal; $|a_{11}b_{11}|, |a_{22}b_{22}|, \dots, |a_{nn}b_{nn}|$ olur.

$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n} \cap H_n, a_{ii} > 0$ ise $\det A \geq \det U(A) > 0$ lemması tarafından

$\det(AoB) \geq \det U(AoB)$ dir.

Teorem 3.8.1'den önermemiz geçerlidir.

Önerme 3.8.2.

$A = (a_{ij})$ ve $B = (b_{ij}) \in M_n \mathbb{S}_n^+$ ye ait olursa,

$\det(AoB) \geq \det(AB)$ olur.

İspat:

Hadamard-Fischer eşitsizliğine göre;

$$\frac{a_{kk} \det A_{k-1}}{\det A_k} \geq 1 \text{ ve } \frac{b_{kk} \det B_{k-1}}{\det B_k} \geq 1 (2 \leq k \leq n)$$

$$\frac{a_{kk} \det A_{k-1}}{\det A_k} + \frac{b_{kk} \det B_{k-1}}{\det B_k} - 1 \geq 1 \text{ ise Teorem 3.8.1'den } \det (AoB) \geq \det AB \text{ olur.}$$

3.8.4. Önceki Sonuçların İlişkisi (Chen 2002)

Öneri 3.8.1.

$A = (a_{ij})$ ve $B = (b_{ij}) \in M_n^+(n \geq 2)$ de tanımlı olsun.

$$\prod_{k=2}^n \left(\frac{a_{kk} \det A_{k-1}}{\det A_k} + \frac{b_{kk} \det B_{k-1}}{\det B_k} - 1 \right) \geq \left(\frac{\prod_{i=1}^n b_{ii}}{\det B} + \frac{\prod_{i=1}^n a_{ii}}{\det A} - 1 \right)$$

İspat:

$n=2$ için önerimizin doğru olduğunu kolayca görebiliriz.

$n > 2$ için, önerimizin $n-1$ durumu için doğru olduğunu farzederek tanıtım hipotezini takip edelim.

$$\prod_{k=2}^n \left(\frac{a_{kk} \det A_{k-1}}{\det A_k} + \frac{b_{kk} \det B_{k-1}}{\det B_k} - 1 \right)$$

$$\geq \left(\frac{\prod_{i=1}^n b_{ii}}{\det B_{n-1}} + \frac{\prod_{i=1}^n a_{ii}}{\det A_{n-1}} - 1 \right) \left(\frac{a_{nn} \det A_{n-1}}{\det A} + \frac{b_{nn} \det B_{n-1}}{\det B} - 1 \right)$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^n a_{ii}}{\det A} + \frac{\prod_{i=1}^n b_{ii}}{\det B} + \frac{\prod_{i=1}^{n-1} b_{ii}}{\det B_{n-1}} \left(\frac{a_{nn} \det A_{n-1}}{\det A} - 1 \right)$$

$$\begin{aligned}
& \prod_{i=1}^n a_{ii} \\
& + \frac{i=1}{\det A_{n-1}} \left(\frac{b_{nn} \det B_{n-1}}{\det B} - 1 \right) \\
& - \left[\left(\frac{a_{nn} \det A_{n-1}}{\det A} - 1 \right) + \left(\frac{b_{nn} \det B_{n-1}}{\det B} - 1 \right) + 1 \right] \\
& = \frac{\prod_{i=1}^n a_{ii}}{\det A} - \frac{\prod_{i=1}^n b_{ii}}{\det B} + \left(\frac{a_{nn} \det A_{n-1}}{\det A} - 1 \right) \left(\frac{i=1}{\det B_{n-1}} - 1 \right)
\end{aligned}$$

$$+ \left(\frac{b_{nn} \det B_{n-1}}{\det B} - 1 \right) \left(\frac{\prod_{i=1}^{n-1} a_{ii}}{\det A_{n-1}} - 1 \right) - 1$$

$$\begin{aligned}
& \prod_{i=1}^n a_{ii} - \prod_{i=1}^n b_{ii} \\
& \geq \frac{i=1}{\det A} - \frac{i=1}{\det B} - 1 \text{ olur.}
\end{aligned}$$

Öneri 3.8.2.

$A = (a_{ij}) \in M_n$ ise

$$\frac{\det A_k}{A_{kk} \det A_{k-1}} \leq 1 - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{a_{ik} a_{ki}}{a_{ii} a_{kk}} \quad (2 \leq k \leq n).$$

İspat:

$\alpha=(a_{k1}\dots a_{kk-1})$ ve $\beta=(a_{1k}\dots a_{k-1k})^T$ değerlerini alalım.

$$\text{Buradan } \det A_k = \det A_{k-1} (a_{kk} - \alpha A_{k-1}^{-1} \beta)$$

$$A_{k-1} \leq \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{k-1,k-1})$$

$$\alpha A_{k-1}^{-1} \beta \geq \alpha \text{diag}\left(\frac{1}{a_{11}}, \dots, \frac{1}{a_{k-1,k-1}}\right)$$

$$\beta = a_{kk} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{a_{ik}a_{ki}}{a_{ii}a_{kk}} \text{ ve böylece}$$

$$\det A_k \leq \det A_{k-1} \left[a_{kk} - a_{kk} \left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{a_{ik}a_{ki}}{a_{ii}a_{kk}} \right) \right]$$

$$= a_{kk} \det A_{k-1} \left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{a_{ik}a_{ki}}{a_{ii}a_{kk}} \right).$$

$a_{kk} \det A_{k-1} > 0$ olduğundan önerimizin geçerli olduğunu iddia ederiz.

Sonuç:

$$a_{11}b_{11} \prod_{k=2}^n \frac{\det A_k \det B_k}{\det A_{k-1} \det B_{k-1}} \left[\frac{b_{kk} \det B_k}{\det B_k} + \frac{a_{kk} \det A_{k-1}}{\det A_k} \left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{a_{ik}a_{ki}}{a_{ii}a_{kk}} \right) \right]$$

$$= \det(AB) \prod_{k=2}^n \left[\frac{b_{kk} \det B_k}{\det B_k} + \frac{a_{kk} \det A_{k-1}}{\det A_k} \left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{a_{ik}a_{ki}}{a_{ii}a_{kk}} \right) \right].$$

Öneri 3.8.3 tarafından;

$$\left(\frac{a_{kk} \det A_{k-1}}{\det A_k} - 1 \right) - \frac{a_{kk} \det A_{k-1}}{\det A_k} \left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{a_{ik}a_{ki}}{a_{ii}a_{kk}} \right)$$

$$\frac{a_{kk} \det A_{k-1}}{\det A_k} \left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{a_{ik} a_{ki}}{a_{ii} a_{kk}} \right) - 1 \geq 0$$

ve böylece;

$$\begin{aligned} & \frac{a_{kk} \det A_{k-1}}{\det A_k} + \frac{b_{kk} \det B_{k-1}}{\det B_k} - 1 \\ & \geq \frac{b_{kk} \det B_{k-1}}{\det B_k} + \frac{a_{kk} \det A_{k-1}}{\det A_k} \left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{a_{ik} a_{ki}}{a_{ii} a_{kk}} \right) \end{aligned}$$

Bütün bu çalışmalarımızın asıl sonucu şu şekildedir;

$A=(a_{ij})$ ve $B=(b_{ij})$ matrislerinin Hadamard çarpımı, $A \circ B$ ile nitelendirilmiştir, A_k ve B_k ($k=1, 2, \dots, n$) A ve B 'nin $k \times k$ altmatrisleri olmak üzere

$$\det(A \circ B) \geq \det(A) \det(B) \prod_{k=2}^n \left(\frac{a_{kk} \det A_{k-1}}{\det A_k} + \frac{b_{kk} \det B_{k-1}}{\det B_k} - 1 \right), \text{dir.}$$

3.9. P-Matrisleri İçin Bir Schur Tamamlayıcısı Eşitsizliği

(Markham ve Smith 1998) Bu bölümde A ve B Hadamard matrisleri ve A ve B pozitif tanımlı matrisler için Schur tamamlayıcıları ile ilgili bir eşitsizlik ispatlandı.

3.9.1. Pozitif Tanımlı Matrisler İçin Bir Eşitsizlik

(Markham ve Smith 1998) A ve B $n \times n$ kompleks sayı alanı üzerinde pozitif tanımlı matrisler olsun.

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (3.9.1)$$

A_{11} ve A_{12} olarak sırasıyla k ve $n-k$ kare olarak bölünebilir.

$$\text{Genellikle } (A/A_{22}) = A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} \quad (3.9.2)$$

A'nın içindeki A_{22} 'nin ters çevrilebilir sağlandığı Schur tamamlayıcısı olarak çağrılır. Baştan sona (3.9.1)'deki A'nın boyutları gibi B'nin bloklara ayrıldığını farzettik.

A ve B Hadamard matrisleri, $A*B$ ile gösterilsin ve A ve B pozitif tanımlı ise $A*B$ 'ninde pozitif tanımlı olduğu iyi bilinir. $A \geq B$ 'de $A-B \geq 0$ veya A-B'nin pozitif yarıtanımlı olduğu anlamındadır. Bu kısmi düzen genellikle Loewner olarak adlandırılır. Eğer A (3.9.1)'deki gibi parçalanırsa, A_{22} ters çevrilebilir ve a_{nn} ters çevrilebilir elemanı için Crabtree ve Haynsworth bölüm kuralını ispatlar

$$((A/a_{nn}) / (A_{22}/a_{nn})) = (A/A_{22}) . \quad (3.9.3)$$

Lemma 3.9.1. (Markham ve Smith 1998) Eğer A $n \times n$ pozitif tanımlı matris ve B $n \times r$ tipinde bir matris ise, sonra,

$$C = A * (BB^*) = 0, \text{ sade ve sadece } B=0 \text{ ise, doğru olur.}$$

Teorem 3.9.1. (Markham ve Smith 1998) A ve B (3.9.1)'deki gibi bloklara ayrılmış $n \times n$ pozitif tanımlı matrisler ise,

$$(A*B/A_{22}*B_{22}) \geq (A/A_{22}*B_{22}) \quad (3.9.4)$$

Sade ve sadece A ve B (3.9.1)'deki gibi blok köşegen ise (3.9.4) eşitsizliği sağlanır.

İspat:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \text{ ve } \hat{B} \text{ benzer şekilde tanımlansın.}$$

A_{22} $n-k$ olduğundan, $n-k$ ranklı $\hat{A}$ ve $\hat{B}$ pozitif yarı-tanımlıdır. Bundan sonra

$\hat{A} * \hat{B}$ pozitif yarı-tanımlı ($\text{rank} \geq n-k$) ve ayrıca

$\hat{A} * \hat{B} / A_{22} * B_{22} \geq 0$. Şimdi (3.9.4) eşitsizliğini

$$(A/A_{22}) * (B_{12} B_{22}^{-1} B_{21}) + (A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}) * (B/B_{22}) + \hat{A} * \hat{B} / (A_{22} * B_{22}) \geq 0 \quad (3.9.5)$$

olarak yazabiliriz.

Fakat (3.9.5) eşitliğinden pozitif yarı-tanımlı matrislerin toplamı da pozitif yarı-tanımlıdır. Bu (3.9.4) 'ün ispatını bitirir.

A ve B $n \times n$ pozitif yarı-tanımlı matrisler olsun ve A ve B'nin öz değerleri aynı artan düzende düzenlendi. Sonra, eğer $\det(\cdot)$ determinant fonksiyon gösterirse, $\det(A*B) \geq \det(A) \det(B)$ olduğu iyi bilinir.

$$\lambda_1(A*B) \geq \lambda_1(AB) \geq \lambda_1(A) \lambda_1(B) \text{ ve } A^{-1}*B^{-1} \geq (A*B)^{-1}, \text{ eğer } A \geq B \text{ ise}$$

$$\det(A) \geq \det(B), B^{-1} \geq A^{-1} \text{ ve } \lambda_k(A) \geq \lambda_k(B), k=1, 2, \dots, n \text{ olduğu iyi bilinir.}$$

Bu Schur Tamamlayıcı formundan takip edilir ki, $n \geq 3$ için (3.9.4) eşitsizliği,

$$(A/A_{22})^{-1}*(B/B_{22})^{-1} \geq (A*B/A_{22}*B_{22})^{-1} \text{ ile denk veya eşit bir şekilde,}$$

$(A*B/A_{22}*B_{22}) \geq [(A/A_{22})^{-1}*(B/B_{22})^{-1}]^{-1}$, bütün $k=1, \dots, n-1$ için $(n-k) \times (n-k)$ için A ve B'nin prensibal alt matrisleri sırasıyla A_{22}, B_{22} 'dir.

$(A/A_{22})*(B/B_{22}) \geq [(A/A_{22})^{-1}*(B/B_{22})^{-1}]^{-1}$ olduğundan beri bütün A_{22} ve B_{22} için (3.9.4) eşitsizliğini görürüz.

$$(A_{11}*B_{11})^{-1} \leq (A*B/A_{22}*B_{22})^{-1} \text{ eşitsizliğine denk şekilde,}$$

$(A*B/A_{22}*B_{22}) \leq A_{11}*B_{11}$ 'dir. Son olarak, $B=A$ değeri vurgulanarak, bizim eşitsizliğimiz,

$$(A*A/A_{22}*A_{22}) \geq (A/A_{22})*(A/A_{22}) \text{ şekline dönüşür.}$$

Sonuç 3.9.1. Eğer A ve B (3.9.1)'deki gibi parçalanmış $n \times n$ tipinde pozitif tanımlı matrisler ise,

$$(i) \det(A*B) / \det(A_{22}*B_{22}) \geq (\det(A) \det(B)) / (\det(A_{22}) \det(B_{22})),$$

$$(ii) (A/A_{22})^{-1}*(B/B_{22})^{-1} \geq [(A/A_{22})*(B/B_{22})]^{-1} \geq (A*B/A_{22}*B_{22})^{-1} \geq (A_{11}*B_{11})^{-1},$$

$$(iii) j=1, 2, \dots, k \text{ için } \lambda_j(A*B/A_{22}*B_{22}) \geq \lambda_j[(A/A_{22})*(B/B_{22})]$$

$$\text{Özellikle, } \lambda_1(A_{11}*B_{11}) \geq \lambda_1[(A/B)*(A_{22}/B_{22})] \geq \lambda_1[(A/A_{22})*(B/B_{22})]$$

$$\geq \lambda_1[(A/A_{22}) \lambda_1(B/B_{22})].$$

İspat: (3.9.4) eşitsizliğinden

$$\det(A*B/A_{22}*B_{22}) \geq [(A/A_{22}) *(B/B_{22})] \geq \det(A/A_{22}) \det(B/B_{22}).$$

(i) $\det(A/ A_{22}) \geq \det(A) / \det(A_{22})$ Schur'un formülüne dikkat ederek takip edilir.

(ii) ve (iii) teoremin ifadesinden önce takip edilir.

Örnek 3.9.1: $\det(A*B) / \det(A_{22}*B_{22}) \geq (\det(A) \det(B)) / (\det(A_{22})\det(B_{22}))$ eşitsizliğinin sağlandığını gösterelim.

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -3 & 0 & -3 \\ -3 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & -3 \\ -3 & 0 & -3 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ olsun.}$$

$$A*B = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 18 & 12 & 0 \\ 0 & 12 & 27 & -3 \\ 3 & 0 & -3 & 6 \end{bmatrix} \text{ ise, } \det(A*B) = 13203$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}, B_{22} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ olup, } A_{22}*B_{22} = \begin{bmatrix} 27 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} = 153$$

$$\det(A*B) / \det(A_{22}*B_{22}) = 86.29 \text{ olur.}$$

$$\det(A) = -15.552, \det(B) = -36 \text{ ise, } \det(A) \det(B) = 559.872$$

$$\det(A_{22}) = 45, \det(B_{22}) = 2 \text{ ise, } \det(A_{22})\det(B_{22}) = 90$$

$$(\det(A) \det(B)) / (\det(A_{22})\det(B_{22})) = 0.22 \text{ olup}$$

$$86.29 > 0.22 \text{ dir.}$$

4. KAYNAKLAR

- [1] R.A. Horn ve C.R. Johnson, 1985, Matrix Analysis, Cambridge University, New York.
- [2] Bronson, 1989, Matris İşlemleri, Fairleigh Dickinson University.
- [3] A. Graybill, Matrices With Applications in Statistics, 1983, Wadsworth & Brooks/Cole.
- [4] Szidórovsky ve Molnar, Matrix Theory.
- [5] Bellman R., 1996, Introduction To Matrix Analysis, Mc Grow-Hill Book Company.
- [6] Bhatia R., 1996, Matrix Analysis, Springer
- [7] Horn R.A. ve Johnson C.R., 1991, Topics In Matrix Analysis, Cambridge University.
- [8] Chatelin F., 1983, Eigenvalues of Matrices.
- [9] Gontmacher F.R., 1960, The Theory of Matrices, Chelsea Publishing Company, New York.
- [10] Marcus M., Minch, 1964, A Survey of Matrix Theory And Matrix Inequalities, 1964, Boston.
- [11] Bozkurt ve Türen, 2003, Lineer Cebir, Selçuk Üniversitesi, Konya.